Universidade Estadual de Londrina

GERALDO VERNIJO DEIXA

UMA ABORDAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS NA 8ª CLASSE:

INDICADORES PARA UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Londrina
2014

GERALDO VERNIJO DEIXA

UMA ABORDAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS NA 8ª CLASSE:

INDICADORES PARA UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor.

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Figueiredo Salvi.

Londrina
2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

D325a Deixa, Geraldo Vernijo..
Uma abordagem dos números inteiros relativos na 8ª classe : $b indicadores para uma proposta de formação de professores / Geraldo Vernijo Deixa. 2014.

153 f. : il.

Orientador: Rosana Figueiredo Salvi.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Educação Matemática, 2014.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Teoria dos números – Teses. 3. Professores de – Teses. I. Salvi, Rosana Figueiredo Salvi. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Educação Matemática. III. Título.

D325a

GERALDO VERNIJO DEIXA

UMA ABORDAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS NA 8ª CLASSE:

INDICADORES PARA UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora. Profª. Dra. Rosana Figueiredo Salvi
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profª. Drª . Maria Tereza Carneiro Soares
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Profª. Drª . Eloiza Cristiane Torres
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profª. Drª . Márcia Cristina de C. T. Cyrino
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profª. Drª . Marinez Meneghello Passos
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 10 de junho de 2014.

Dedico este trabalho à minha mãe, ao meu pai (falecido) e à minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora, não só pela constante orientação neste trabalho, mas sobretudo pela sua amizade e paciência que teve para a materialização desta tese.

Aos colegas e professores do programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pelos momentos de estudos e trocas de experiências.

À MCT-MOZ/CNPq-Brasil, pela bolsa concedida para a realização desta pesquisa.

Aos meus irmãos, pelos bons momentos em família, compreensão, incentivo e apoio.

À Arieta, pelo carinho, incentivo e compreensão durante minha ausência.

Aos meus filhos Aurora, Augusta, Ângelo e Priscila, pela paciência e sacrifícios.

À direção da Universidade Pedagógica de Moçambique, pelo afastamento para a realização deste trabalho.

E a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram com meus estudos.

DEIXA, Geraldo Vernijo. **Uma abordagem dos números inteiros relativos na 8ª classe:** indicadores para uma proposta de formação de professores. 2014. 153f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo elaborar uma proposta de ensino, para o trabalho com números inteiros relativos para a educação escolar que articule as dimensões de conhecimento dos números relativos (reta, contexto e abstrata) em uma proposta de tarefas para formação de professores de Matemática. Buscamos um quadro de referência com base na perspectiva da multidimensionalidade do conhecimento (BRUNO, 1997). A pesquisa compreendeu três fases: a primeira consistiu na revisão da literatura a respeito do tema, a segunda, num curso de formação de professores em exercício e, a última, aplicação em quatro turmas da 8ª classe de uma Escola Secundária da cidade de Quelimane. Adotamos uma abordagem qualitativa com base na Análise de Conteúdo, realizamos uma análise de quatro livros didáticos e um Programa de Ensino da Matemática da 8ª classe à luz da multidimensionalidade de conhecimento, tendo constatado que as três dimensões de conhecimento estão desarticuladas. Nestes documentos há predomínio de tarefas na dimensão abstrata, sendo poucas as alternativas sugeridas para o tratamento do tema. Os resultados da aplicação indicam que uma abordagem multidimensional pode contribuir para uma aprendizagem efetiva dos números inteiros relativos. Nesses documentos são sugeridos como vias para o ensino desse conteúdo matemático: situações que envolvem negócios, a altitude, cronologia, temperatura, impossibilidade da subtração em N, uso da História da Matemática, a reta numerada, o método extrapolatório do Freudenthal (1973) e uso de diagrama de Vergnaud. Estas constatações serviram de indicadores para a elaboração de uma proposta de tarefas para a formação de professores de Matemática do sistema educacional de Moçambique.

Palavras-chave: Educação matemática. Dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos. Indicadores para uma proposta de formação de professores.

DEIXA**,** Geraldo Vernijo**. An Approach of Whole Numbers Relating in 8th grade**: indicators for a proposed teacher training. 2014. 153f. Thesis (Sciences and Mathematics Education Post-Graduate Program) – State University of Londrina, Londrina, 2014.

ABSTRACT

This research aims to develop a proposal for teaching, for working with whole numbers relating for school education, which sets the dimensions of knowledge of the whole numbers relating (straight, context and abstract) on a proposed tasks for training teachers of Mathematics. We seek a framework from the perspective of the multidimensionality of knowledge (Bruno, 1997). The research consisted of three phases: the first was to review the literature on the subject, the second, a training course for practicing teachers and, last, application in four classes of the class of a secondary school of the city of Quelimane 8th. We used a qualitative approach based on content analysis; we conducted an analysis of four textbooks and a Program for Teaching Mathematics Grade 8 in the light of the multidimensionality of knowledge and found that the three dimensions of knowledge are disarticulated. In these documents, there is a predominance of tasks in the abstract dimension, with few alternatives suggested for the treatment of the theme. The results indicate that application of a multidimensional approach can contribute to effective learning of whole numbers relating. In these documents, are suggested as ways to teach mathematical content that: situations involving business, elevation, timing, temperature, inability subtraction in N, using the history of mathematics, a number line, the extrapolator method of Freudenthal (1973) and use of Vergnaud diagram. These findings served as indicators for the development of a proposal for the tasks of training of Mathematics teachers of the educational system in Mozambique.

Keywords: Mathematics education. Dimensions of knowledge of integers. Indicators for a proposed training professores.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Transferências de conhecimentos entre dimensões........................33
Figura 2 – Transferências entre as dimensões que os alunos estabelecem com mais facilidades 35
Figura 3 – Construção proposta por Descartes 46
Figura 4 – Construção de produto de a por b 47
Figura 5 – Triângulos semelhantes de acordo com a construção proposta por Hilbert...48
Figura 6 – Divisão de segmentos...49
Figura 7 – Triângulos semelhantes 49
Figura 8 – Síntese das transferências de conhecimentos entre as dimensões de conhecimentos no PEM 84
Figura 9 – Transferência de conhecimento no L1 87
Figura 10 – Transferência de conhecimento no L2 89
Figura 11 – Transferência de conhecimentos no L3 90
Figura 12 – Transferência de conhecimento no L4 92
Figura 13 – Representação da variação da temperatura pelo diagrama de Vergnaud 110
Figura 14 – Representação na reta numérica da variação da temperatura 111
Figura 15 – Representação dos números inteiros relativos na reta numérica 112
Figura 16 – Representação da soma de 8 por 4 na reta numérica 114
Figura 17 – Representação da soma de -5 por 4 na reta numérica..................114
Figura 18 – Representação da soma de -5 por -6 na reta numérica.................115
Figura 19 – Representação do movimento do João no diagrama de Vergnaud 120
Figura 20 – Representação do movimento no diagrama Vergnaud..................121
Figura 21 – Representação na reta numérica da soma de 3 por 5 122
Figura 22 – Representação do movimento do elevador pelo diagrama de Vergnaud 123
Figura 23 – Representação do depósito e de levantamentos pelo diagrama de Vergnaud...124
Figura 24 – Representação do movimento do comboio na reta numérica........124

Figura 25 – Construção geométrica do produto de 4 por 2 127
Figura 26 – Construção geométrica do produto de 4 por -2 128
Figura 27 – Construção geométrica do produto de 2 por 0 128
Figura 28 – Construção geométrica do produto de -4 por -2 129
Figura 29 – Construção geométrica da divisão de -6 por 2 131
Figura 30 – Construção geométrica da divisão de 6 por 2 131
Figura 31 – Construção geométrica da divisão de -9 por -3 132
Figura 32 – Representação da situação pelo diagrama de Vergnaud 133
Figura 33 – Representação de (-6) – (-4) na reta numérica 135
Figura 34 – Outra possibilidade da representação de (-6) – (-4) na reta numérica 135
Figura 35 – Representação de (-9) – (-11) na reta numérica 136
Figura 36 – Construções de conhecimentos entre as dimensões CA 138
Figura 37 – Construções de conhecimentos entre as dimensões AC 139
Figura 38 – Construções de conhecimentos entre as dimensões CR 139
Figura 39 – Construções de conhecimentos entre as dimensões RC 139
Figura 40 – Construções de conhecimentos entre as dimensões AR 140
Figura 41 – Construções de conhecimentos entre as dimensões RA 140
Figura 42 – Construções de conhecimentos entre as dimensões AA 140
Figura 43 – As articulações entre tarefas na multidimensionalidade de conhecimento 141
Figura 44 – Proposta de Ensino dos números inteiros relativos 143

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Caracterização das dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos 32
Quadro 2 – Exemplo da exposição do método extrapolatório indutivo 39
Quadro 3 – Conteúdos do curso de formação 59
Quadro 4 – Síntese das atividades do curso de formação 62
Quadro 5 – Livros analisados e PEM...65
Quadro 6 – Unidades de registros 67
Quadro 7 – Exemplificação das unidades de registros utilizadas na análise das tarefas...69
Quadro 8 – Respostas dos inquiridos nas questões Q1 e Q5 73
Quadro 9 – Saldos em milhares de meticais em função do tempo.....................82
Quadro 10 – Saldos bancários em milhões de meticais 82
Quadro 11 – Regras de sinais da multiplicação no L1...86
Quadro 12 – Regras de sinais da multiplicação no L2...88
Quadro 13 – Regras de sinais da multiplicação no L4...91
Quadro 14 – Transferências de conhecimento entre as dimensões da reta, do contexto e do abstrato nas tarefas analisadas....................94
Quadro 15 – Unidades de registros nos livros didáticos analisados.....................96
Quadro 16 – Exemplos de operações construídas pelos alunos envolvendo números inteiros (n=140)...98
Quadro 17 – Define uma situação utilizando palavras que podem ser representadas da seguinte operação: (-5) + 7 = 2 98
Quadro 18 – Define uma operação que pode resolver a seguinte situação 100
Quadro 19 – Qual é a operação que pode ser representada pela reta...............100
Quadro 20 – Represente na reta numérica a operação dada por: (-5) + (+6) 101
Quadro 21 – Sequência de construção de regras pelo método exploratório de Freudenthal...125

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

INDE	Instituto Nacional de Desenvolvimento da Educação
ESG	Ensino Secundário Geral
ESG-1	Ensino Secundário Geral do 1º ciclo
AfriMAP	Africa Governance, Monitoring and Advocacy Project
SOISA	Open Society Initiative for Southern Africa
SNE	Sistema Nacional de Educação
UEL	Universidade Estadual de Londrina
PEM	Programa do Ensino da Matemática
IFHIECEM	Investigações em Filosofia e História da Ciência, Educação Científica e Matemática
MEC	Ministério da Educação e Cultura

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO 13

1 ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS 19

1.1 Desenvolvimento Histórico dos Números Inteiros Relativos 20

1.2 Obstáculos Epistemológicos 23

1.3 Obstáculos Didáticos 26

1.4 Diferentes Abordagens dos Números Inteiros Relativos 30

2 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA 53

2.1 A escolha Metodológica 55

2.2 Curso de Formação de Professores 57

2.3 Procedimentos de Análise dos Livros Didáticos e PEM 64

2.4 Informações sobre os Professores que Aplicaram a Proposta em Turma da 8ª classe 70

2.5 Procedimentos de Análise dos Dados dos Alunos 71

3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS 72

3.1 O que nos Informa o Resultado do Curso Aplicado aos Professores 72

3.2 Análise do Programa de Ensino da Matemática da 8ª classe 80

3.3 Análise da Unidade Temática sobre Números Inteiros Relativos nos quatro Livros Didáticos da 8ª classe 84

3.4 Análise das Tarefas Propostas nos quatro Livros Didáticos da 8ª classe 93

3.5 Análise dos Resultados do Estudo com os Alunos 97

4 A PESQUISA: INDICADORES PARA UMA PROPOSTA DE ENSINO 104

4.1 Proposta de Ensino dos Números Inteiros Relativos 105
4.2 Descrição da Proposição das Tarefas Propostas 109

CONSIDERAÇÕES FINAIS 142

REFERÊNCIAS 150

APRESENTAÇÃO

Ao longo da nossa prática profissional e dos nossos estudos na graduação e no mestrado, sentimo-nos atraídos por entender as dificuldades dos alunos no com os números inteiros relativos. Fomos refletindo a respeito do que se passava na sala de aula, nos livros didáticos e no Programa de Ensino da Matemática (PEM). Desse modo, compreendemos que o ensino e a aprendizagem dos números inteiros relativos na educação escolar de Moçambique apresentam lacunas. Assim, a necessidade de uma pesquisa para esse campo merece um pouco mais de atenção.

Nos últimos anos tem aumentado o número de pesquisas que tratam dos números inteiros relativos. Esta tendência revela que ainda há necessidade de esclarecimento de alguns aspectos relacionados ao tema.

Uma vez definido o nosso objeto de estudo, determinamos a classe e os documentos a serem analisados nesta pesquisa. Além disso, explicitamos a nossa trajetória como aluno de Licenciatura e do mestrado por entendermos que essas informações podem servir de mote para a compreensão das razões da escolha desse objeto de estudo – os números inteiros relativos.

Comecei minha formação de Bacharelado e Licenciatura (graduação) em ensino da Matemática na Universidade Pedagógica da Beira, a qual me conferiu a certificação para atuar no Ensino Secundário Geral (ESG), que compreende da 8ª à 12ª classe. Depois da conclusão da graduação atuei por 1 ano como professor de Matemática na Escola da catedral – cidade da Beira, lecionando a 8ª, 10ª e 12ª classes. Esta fase representou o primeiro contato com os alunos. Durante minha atuação fui sentindo que o que tinha aprendido na graduação parecia ainda insuficiente para atender algumas inquietações dos alunos, principalmente, quanto à justificação das regras de sinais na multiplicação e na divisão dos números inteiros relativos.

Após a graduação trabalhei 1 ano no Instituto do Magistério Primário, atuando como formador de professores do Ensino Primário. Atuo desde 2006 na Universidade Pedagógica de Moçambique, cidade de Quelimane, no curso de Licenciatura em Ensino da Matemática. No decurso das minhas aulas eram frequentes situações que requeriam justificações para o entendimento dos conceitos matemáticos.

Dando continuidade aos estudos, cursei o mestrado em Ensino da Matemática na Universidade Pedagógica de Maputo, sob a orientação da professora doutora Sarifa Fagilde. Minha dissertação abordou o uso da História da Matemática na sala de aula como alternativa didática para o ensino da Matemática. Com a elaboração desta dissertação aprendi que muitos professores não usam a História da Matemática na sala de aula porque não a conhecem e, consequentemente, não podem usá-la para justificar alguns conceitos matemáticos quanto à sua origem e evolução ao longo dos tempos.

Para dar prosseguimento aos estudos, ingressei no doutorado no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática na UEL. Inicialmente pretendia dar prosseguimento com o tema do mestrado a respeito do uso da História da Matemática em sala de aula. Por sentir que este tema é vasto e que requeria outros fundamentos teóricos para o desenvolvimento da pesquisa, optei por abordar um caso particular, os números inteiros relativos na perspectiva de busca de proposições para o ensino destes números. Por isso, a pesquisa abrangeria professores em exercício que ensinam matemática na 8ª classe, visto que as demais pesquisas realizadas a respeito do tema investigaram o modo como os alunos aprendem os números inteiros relativos e quais dificuldades enfrentam (BORBA, 1998; TEIXEIRA, 1993; CARRAHER, 1990; BRUNO, 1997; MARÍ, 1995). São poucas as pesquisas que apresentam propostas didáticas para a superação das dificuldades para o ensino dos números inteiros relativos, envolvendo as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Por entendermos que o sucesso da aprendizagem deste tema pode depender da maneira como o professor o compreende e o concebe, optamos por trabalhar com dez professores que ensinam a Matemática na 8ª classe.

INTRODUÇÃO

O problema da educação moçambicana pode ser visto nas várias reformas introduzidas que ainda não tiveram o efeito desejado (AfriMAP; SOISA, 2012). O setor da Educação enfrenta vários problemas, sendo que a qualidade dos serviços está a cair e as várias reformas introduzidas não têm tido um impacto significativo, visto que as mesmas não são devidamente acompanhadas das transformações desejadas. O mesmo setor introduz as mudanças curriculares sem, contudo, a observância das necessárias transformações ao nível dos mentores da base. Constata-se mesmo a existência de poucas horas de contato entre professores e alunos, e os problemas da carência de aulas e de métodos de ensino adequados.

De acordo com o relatório do Instituto Nacional de Desenvolvimento da Educação (INDE) (2004), uma pesquisa realizada com alunos revelou enormes dificuldades na produção escrita em todos os níveis de escolaridades (8ª a 12ª classes). Essas dificuldades interferem em áreas como a Matemática, Física, Química, Biologia, entre outras.

O ensino e a aprendizagem dos números inteiros relativos apresentam igualmente sérios problemas. Eles são apresentados aos alunos a partir da 8ª classe (13 a 14 anos de idade). Nessa fase, muitas dificuldades são constatadas nos processos de ensino e de aprendizagem desses números, por exemplo, nesse novo conjunto, adicionar nem sempre denota o aumento, do mesmo modo subtrair nem sempre significa a diminuição. Ao mesmo tempo, a multiplicação nem sempre poder ser entendida como adição de parcelas iguais.

De acordo com Teixeira (1993, p. 62-65), as dificuldades surgem quando a subtração $(a - b)$ é dedicada a casos para os quais $b > a$, originando resultados que até então os alunos desconhecem. Do mesmo modo, explicar ao aluno que $(- 1).(-1) = (+ 1)$ a partir da ideia da multiplicação como adição de parcelas iguais igualmente pode ser difícil.

No contexto da sala de aula, os números inteiros relativos são apresentados aos alunos com significado, geralmente relacionados a uma medida, associando ao número positivo a ideia de um ganho e ao número negativo a ideia de uma perda, conseguindo deste modo sucessos nas operações de adição e subtração com esses números. Eles são determinados de modo único, não podendo ser mudados *ad libitum* (FREUDENTHAL, 1973, p. 233). Porém, esta maneira de ensinar os números relativos encontra dificuldades quando se pretende introduzir a multiplicação e a divisão desses números. São frequentes os casos em que professores e/ou autores de livros didáticos utilizam exemplos do tipo: uma perda multiplicada por uma perda se transforma num ganho; uma dívida multiplicada por um crédito se transforma numa dívida.

De acordo com Cyrino e Pasquini (2010, p. 39), as “estratégias atualmente utilizadas para promover a compreensão das operações que envolvem números inteiros, na Educação Básica, não mostram eficiências, principalmente no que se refere à multiplicação e à divisão”. Essas autoras sugerem a apresentação do método geométrico para a multiplicação e a divisão. É uma tentativa de problematização destas operações com vista a oportunizar discussões e reflexões sobre estas operações.

Borba (1998) sugere o uso de modelos para o ensino dos números inteiros relativos visando amenizar as dificuldades de aprendizagem desse conteúdo matemático. Esta autora aponta que adição é mais fácil de ser tratada usando a reta numérica do que a subtração.

O estudo da multidimensionalidade efetuada por Bruno (1997) aponta que para uma compreensão adequada dos números inteiros relativos é necessário que o ensino desse tema esteja articulado entre três dimensões de conhecimentos, nomeadamente: da reta, do contexto e a abstrata. A necessidade da presença das três dimensões no ensino pode ser atestada pelo argumento de que a aprendizagem de um conceito demanda muitas situações. Isto quer dizer que cada conceito pode ser compreendido com a ajuda de várias situações (D’AMORE, 2005).

Diante das sugestões apontadas anteriormente no que se refere ao ensino e a aprendizagem dos números inteiros relativos, propomos nesta tese discutir a ideia de multidimensionalidade do conhecimento no ensino deste conteúdo matemático.

Considerando que o Programa do Ensino da Matemática (PEM) e os livros didáticos não respondem um problema sobre os números inteiros relativos, que os alunos têm dificudades na aprendizagem, ainda, que a formação docente é deficiente no que tange ao conteúdo dos números inteiros relativos, propusemo-nos a responder à seguinte questão de investigação:

Que indicadores devem ser considerados em uma proposta de ensino de números inteiros relativos para a educação escolar a ser utilizada na formação de professores em Moçambique?

De acordo com Bruno (1997), um ensino baseado em dimensões de conhecimento dos números inteiros relativos pode proporcionar condições para a aprendizagem dos alunos. Assim, para o desenvolvimento da pesquisa defendemos a tese de que é importante uma proposta de ensino que articule as dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos para a formação de professores ressalvando a conjuntura educacional de Moçambique.

Esta pesquisa visa estudar indicadores de uma proposta de ensino com números inteiros relativos a ser utilizada na formação de professores em Moçambique.

Constitui objetivo específico da pesquisa:

Elaborar uma proposta de ensino para o trabalho com números inteiros relativos para a educação escolar que articule as dimensões de conhecimento dos números relativos (reta, contexto e abstrata).

Para concretização dessa pesquisa foi realizado um estudo piloto envolvendo 10 professores de Matemática que lecionavam na 8ª classe de diversas Escolas da cidade de Quelimane num curso de formação de curta duração. A partir do levantamento de informações envolvendo o estudo de Programa de Ensino da Matemática (PEM), de livros didáticos, entre outros documentos especializados, e da observação do modo como professores de matemática trabalham com este tema em 4 turmas da 8ª classe, foram elaboradas as tarefas que constituíram a nova proposta de ensino à luz da multidimensionalidade de conhecimento.

Esperamos que os resultados dessa pesquisa colaborem no sentido de apresentar indicadores para uma proposta de formação de professores para o trabalho com os números inteiros relativos que leve em conta: explicar, esclarecer, discutir e refletir com os professores em formação sobre as lacunas nas propostas de números inteiros relativos existentes nos documentos oficiais do ensino de matemática e nos livros didáticos; introduzir junto aos professores as noções sobre as dimensões do conhecimento desses números levando em consideração os obstáculos para o ensino e a aprendizagem no decorrer da sua história; elaborar as tarefas para o ensino dos números inteiros relativos construídos pelos professores em formação com base nas três dimensões do conhecimento propostas por Bruno

(1997); aplicar as tarefas em classes da 8ª classe do Ensino Secundário Geral Moçambicano para a análise de seus resultados e, elaborar uma proposta de ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos.

A pesquisa encontra-se dividida em quatro capítulos. No primeiro capítulo discutimos alguns encaminhamentos a respeito do ensino dos números inteiros relativos na perspectiva de autores como Freudenthal (1973 e 1983); Borba (1998); Bruno (1997); Carraher (1990); Cyrino e Pasquini (2010), entre outros, buscando subsídios para fases posteriores da pesquisa. Neste capítulo apresentamos o desenvolvimento histórico do tema por entendermos que a História da Matemática busca ideias para a Didática da Matemática, facilitando assim a compreensão da Matemática. Neste capítulo apontamos ainda alguns obstáculos epistemológicos e obstáculos didáticos que interferem no tratamento desse tema.

No segundo capítulo apresentamos o encaminhamento metodológico da pesquisa, os documentos e livros didáticos do estudo piloto e relações com as práticas dos professores, tendo como teóricos, Bardin (2011), Moraes e Galiazzi (2011), Bogdan e Biklen (1994), os participantes, os instrumentos para a coleta e o processo de análise dos dados.

No terceiro, abordamos a análise e discussão dos resultados, apontando as conexões entre as práticas constituídas por professores moçambicanos ao ensinar números inteiros relativos e as dificuldades evidenciadas pelos alunos.

No quarto, expomos a nossa proposta de ensino e, em seguida, apresentamos as considerações finais e as referências bibliográficas.

Neste capítulo inicial trazemos aspectos do desenvolvimento histórico do tema. Entendemos que o conhecimento desses aspectos pode ajudar o professor, possibilitando aumentar maneiras e valores positivos frente ao conhecimento matemático que seus alunos podem mostrar.

Os obstáculos que hoje em dia os alunos deparam na aprendizagem dos números inteiros relativos podem ser acomodados nas dificuldades que os matemáticos encontraram na História da Matemática para o entendimento e o emprego dos conceitos envolvendo este tema. Igualmente, o professor pode reconhecer que a matemática é uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano.

1 O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

Iniciamos o capítulo apresentando os obstáculos epistemológicos que os matemáticos enfrentaram ao longo da evolução dos conceitos a respeito dos números inteiros relativos. Para o efeito desta pesquisa, um obstáculo epistemológico refere-se diretamente a um conhecimento matemático. Este termo deve ser entendido como sinônimo de dificuldade que impede a aprendizagem de um conteúdo matemático, não se trata de ausência de conhecimentos.

D'Amore (2005) sugere que a investigação dos obstáculos deve ser feita, ao mesmo tempo, na escola, na prática didática e no estudo da História da Matemática. Daí a importância da ligação entre os dois contextos de pesquisa (prática didática e a história da Matemática). Portanto, um estudo prévio do percurso histórico dos números inteiros relativos pode servir de motivo para o entendimento das dificuldades que os alunos enfrentam para a compreensão desta temática.

Ainda para este autor há obstáculo ontogenético que está diretamente ligado à maturação do sujeito (D'AMORE, 2005, p. 107). O entendimento dessa característica é fundamental para o professor, pois o planejamento de conteúdos para o ensino pode ser feito em função da maturação do aluno, pressupondo que cada determinada classe de escolaridade possui suas particularidades que podem ser consideradas. Por isso, uma ligação entre o conhecimento informal e o formal pode servir de mote para alunos buscarem respostas para os problemas de construção dos números inteiros relativos.

Por um lado, essa discussão se baseia na ideia de que o conhecimento do percurso da evolução dos conceitos e das dificuldades históricas podem ajudar os professores a compreender melhor as causas dos erros dos alunos e propor alternativas adequadas para minimizar o problema em sala de aula. E por outro lado, a História da Matemática é um recurso para a compreensão dos fenômenos ligados à Matemática. O seu uso é importante porque pode mostrar que os conceitos mais difíceis de compreender e integrar, quer pela sociedade, quer pelos próprios Matemáticos, são aqueles em que ao longo do desenvolvimento histórico não tiveram aceitação imediata (BARDIN, *et al.*, 2000).

Estes autores referem que para o aluno a História da Matemática o encoraja a pensar que a Matemática não é estática, mas sim um processo contínuo de reflexão humana que vai melhorando ao longo dos tempos; não é um produto acabado; e ainda não é um conjunto de verdades irrefutáveis. Só assim, dado um problema, alunos podem concordar na existência de várias formas de resolvê-lo, uma vez que a Matemática é fruto da humanidade, visto que cada civilização tem a sua visão, portanto, caminhos diferentes conduzem ao mesmo resultado (BARDIN, *et al*., 2000, p. 64-65).

A nossa intenção, ao abordamos a história da Matemática, consiste em ressalvar aspectos que podem ajudar a esclarecer a complexidade do tema, ciente de que esse entendimento é fundamental para o professor. O conhecimento sobre a origem e evolução histórica dos números inteiros relativos permite-nos compreender as dificuldades e os avanços que os alunos podem enfrentar ao longo do desenvolvimento desse tema.

De acordo com D'Ambrósio (1998, p. 29-30), a História da Matemática é um elemento essencial para se compreender como teorias e práticas matemáticas foram concebidas, desenvolvidas e utilizadas numa situação característica da época. Para o professor, esse entendimento pode servir de base para o tratamento da Matemática de hoje.

Este capítulo encontra-se dividido em quatro seções. Na primeira apresentamos aspectos do desenvolvimento histórico dos números inteiros relativos que podem ajudar a justificar dificuldades que os alunos têm na aprendizagem desse conteúdo matemático. Na segunda, tratamos dos obstáculos epistemológicos, na terceira, os obstáculos didáticos apresentados pela literatura quanto ao trabalho com esse tema na educação escolar e, na última, expomos abordagens de ensino que buscam o enfrentamento das dificuldades na aprendizagem desse conteúdo matemático.

1.1 Desenvolvimento Histórico dos Números Inteiros Relativos

De acordo com Kleine (1976, p. 55), os números inteiros relativos introduzidos pelos indianos, por volta de 600 a.C., não tiveram aceitação durante um milênio, dado que lhes faltava apoio intuitivo. Esses números surgiram das manipulações algébricas na resolução de equações do 1º e 2º graus. Brahmagupta (598-670) utilizou a ideia de posse e de débito para distinguir, respectivamente os números positivos dos negativos. Pensadores como Cardan, Vieta, Descartes e Fermat, recusaram-se a operar com números inteiros relativos. O mesmo autor afirma que nem Descartes, Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss ou Cauchy poderiam ter dado uma definição desses números, visto que as suas justificações baseavam-se em utilidades práticas.

Os subsídios do Brahmagupta à álgebra são de ordem superior às suas regras de mensuração, pois foram encontradas soluções gerais de equações quadráticas, inclusive duas raízes, mesmo quando uma delas é negativa.

A aritmética sistematizada dos números negativos e do zero, encontra-se pela primeira vez em sua obra. As regras sobre grandezas negativas já eram conhecidas através dos teoremas geométricos dos gregos sobre a subtração, por exemplo, (a-b)(c-d)= ac+bd-ad-bc. Os hindus as transformaram em regras numéricas sobre números negativos e positivos (BOYER, 1991, p. 160).

Embora os gregos tivessem o conceito do zero nunca o interpretaram como número, como fizeram os hindus. Brahmagupta entrou em conflito ao afirmar que $0 \div 0 = 0$, e sobre a questão $a \div 0$ para $a \neq 0$, não se comprometeu:

> Positivo dividido por positivo, ou negativo por negativo, é afirmativo. Cifra dividida por cifra é nada. Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo. Positivo ou negativo dividido por cifra é uma fração com esse denominador (BOYER, 1991, p. 160).

De acordo com Glaeser (1985), a regra dos sinais foi esclarecida pelo Hankel em 1867, quando este demonstra que a única das regras possíveis é aquela que preserva a distributividade à esquerda e à direita. Esse entendimento foi possível, visto que Hankel aborda a ideia de número negativo numa dimensão formal, recorrendo à ideia de extensão das propriedades dos números reais positivos para os reais negativos. Deste modo, Hankel enuncia o seguinte teorema: “A única multiplicação sobre $\mathbb{R}$, que prolonga a multiplicação usual sobre $\mathbb{R}_+$ respeitando a distributividade (à esquerda e à direita) está de acordo com a regra dos sinais” (GLAESER, 1985, p. 106). Assim sendo, a regra dos sinais é uma convenção com vistas à manutenção dos princípios estabelecida anteriormente sobre as operações com números naturais.

Nessa ordem de ideia, para manter as propriedades dos números reais positivos aos negativos “devemos definir as regras para os sinais de maneira usual, como fazemos na escola quando abordamos os números inteiros relativos" (MORETTI, 2012, p. 703).

Ainda, de acordo com Glaeser (1985), Hankel recusou a busca por um modelo de ensino dos números inteiros relativos que consiste em abordar os números numa outra perspectiva, não podendo mais procurar exemplos práticos que explicam os números relativos por analogias, pois esses números não são mais descobertos, mas inventados e imaginados.

Caraça (1970) apoiou esta ideia ao argumentar que as regras não podem ser provadas, mas sim justificadas. Elas derivam do imperativo de manter coesão nos princípios da matemática.

Em ocorrências do tipo 5x +7 = 2, Diofanto chamava esses casos de absurdo, dado que a solução seria um número negativo. Ele considerava somente as soluções positivas, um indicativo de que não conhecia os números negativos. Diofanto só entendia quantidade negativa quando, junto, era dada uma quantidade positiva maior da qual a primeira era subtraída: assim, -2 não fazia sentido para ele a não ser com o significado de duas unidades tiradas de algo, 3, por exemplo. Porém, Diofanto já havia esquematizado as regras dos sinais ao afirmar que menos por mais dá menos, menos por menos dá mais (LINTZ, 1999, p. 368).

De acordo com Cajor (2007, p. 99), Diofanto coloca que "um número a ser subtraído, multiplicado por um número a ser subtraído fornece um número a ser somado". Isso era aplicado à multiplicação de diferenças, como (x-1)(x-2). É possível que Diofanto de Alexandria não tivesse noção do que expressam os números negativos por si mesmos. O que ele compreendia era a diferença, tais como (3x-9), nas quais 3x não pode ser menor do que 9, do contrário seria tida como um absurdo.

Glaeser, referindo-se a D'Alembert, afirma que este demonstrou-se equivocado na apropriação dos números inteiros negativos ao referir que,

> [...] dizer que as quantidades negativas estão abaixo de nada é afirmar uma coisa que não se pode conceber [...] Quantidades negativas encontradas no cálculo indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. O sinal - que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar e corrigir um erro que cometemos na hipótese [...] (D'ALEMBERT *apud* GLAESER, 1985, p. 73).

Assim, as imensas dificuldades com que os matemáticos depararam podem nos revelar a necessidade de um esforço adicional para que este tema fosse discutido e compreendido pelos alunos.

Diante das dificuldades dos números inteiros relativos, encontramos obstáculos que iremos tratar ao longo do desenvolvimento da próxima seção.

1.2 Obstáculos Epistemológicos

Conforme nos referimos anteriormente, para o efeito desta pesquisa, um obstáculo epistemológico refere-se diretamente ao conhecimento matemático. Esse conhecimento produz respostas adequadas em determinado contexto comumente encontrado, porém pode produzir respostas falsas fora desse contexto. Está continuamente conexo a uma alteração de estratégia necessária ao conhecimento matemático. São conhecimentos relativamente consolidados que podem dificultar o desenvolvimento da aprendizagem (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001, p. 224-225).

Diante dessa investigação discutiremos com mais detalhe a noção de obstáculos. Abordamos nesta seção os obstáculos epistemológicos que foram apontados ao longo do desenvolvimento histórico dos números inteiros relativos e os obstáculos didáticos a respeito do ensino desse conteúdo matemático numa perspectiva didática que serão discutidos na seção 1.3.

O obstáculo epistemológico[1] levantado por Bachelard pode ser compreendido quando,

> se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado [...]. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1999, p. 17).

De acordo com esse autor, os obstáculos epistemológicos são característicos do desenvolvimento da ciência. Assim, todo o conhecimento científico

---

[1]A noção do obstáculo epistemológico foi introduzida na didática da Matemática por Guy Brousseau (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001, p. 283)

é construído a partir do conhecimento anterior ou em oposição a outro anterior. O obstáculo epistemológico é intrínseco e está ligado à origem e à evolução de um conceito ao longo do tempo.

Pais (2001, p. 39) assegura que:

> esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, mas, pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento.

D'Amore (2005) também argumenta que o obstáculo epistemológico deriva da própria natureza do assunto, a sua complexidade em que foi caracterizado ao longo da evolução histórica do tema. O autor questiona: quando e em quais ideias matemáticas é possível existir um obstáculo epistemológico? Segundo o autor,

> [...] quase certamente existe um obstáculo epistemológico naquelas ideias para as quais na análise histórica reconhece-se uma ruptura, uma passagem brusca, uma não continuidade na evolução histórico--crítica da própria ideia. Tem-se um obstáculo epistemológico em relação a uma ideia quando um determinado erro aparece como recorrente, mais ou menos nos mesmos termos, ao redor daquela ideia (D'AMORE, 2005, p. 107).

No tocante aos obstáculos vistos no ensino dos números inteiros relativos, Glaeser (1985) se inspirou no entendimento das dificuldades relativas a esse conteúdo matemático.

Glaeser (1985, p. 39) assinala e identifica, no decurso da formalização dos números inteiros relativos, uma série de obstáculos de natureza epistemológica que resistiram ao entendimento dos números inteiros desde a antiguidade até ao séc. XIX.

Apresentamos a seguir alguns obstáculos epistemológicos identificados por Glaeser (1985):

- inaptidão para manipular quantidades isoladas;
- dificuldade de dar um sentido a quantidades negativas isoladas;
- dificuldade em unificar a reta numérica,
- a ambiguidade dos dois zeros (zero absoluto e zero como origem);
- estagnação no estágio das operações concretas; e,

- o desejo de um modelo unificador.

Inaptidão para manipular quantidades isoladas: Glaeser (1985) argumenta que este obstáculo demonstra a rejeição de quantidades negativas. Diofanto de Alexandria é um exemplo, pois no livro I da sua *Aritmética* não faz qualquer referência aos números negativos isolados. Ele simplesmente enuncia que: *"O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta"* (DIOFANTO *apud* GLAESER, 1985, p. 47).

Dificuldades em dar sentido às quantidades negativas isoladas: para Glaeser (1985), apesar de muitos matemáticos antigos terem utilizado os números negativos em seus cálculos como elementos intercessores destes, levaram muito tempo para que as quantidades negativas adquirissem o estatuto de números. Eles trabalhavam separadamente com os números, considerando os positivos como solução verdadeira e os negativos como solução falsa. Essa consideração os impediu a compreensão total desses números.

Unificar a reta numérica: este aparece quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos, ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semirretas opostas com sinais diferentes, ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.

Ambiguidade dos dois zeros: Glaeser (1985) argumenta que durante séculos os matemáticos interpretaram o zero como *zero absoluto*, isto é, abaixo do qual nada se poderia imaginar, por essa razão os números negativos eram considerados absurdos, indicativo de que o zero não era compreendido como *origem* de um referencial sobre um eixo orientado. Essa compreensão os impediu de trabalhar com o zero como origem. A noção do zero como origem favoreceu a criação dos números inteiros relativos.

Estagnação no estágio das operações concretas: a dificuldade de se afastar de um sentido concreto atribuído aos números pode ser compreendida pelas justificações que eram procuradas a partir das experiências da vida cotidiana. Deste modo, demorou muito tempo para que houvesse outros desenvolvimentos na aprendizagem dos números inteiros relativos que auxiliassem para o entendimento das operações formais. Só com o abandono da procura de explicação das regras de sinais via considerações concretas da vida real para a via formal alavancou a compreensão nesse domínio numérico.

Desejo de um modelo unificador: o desejo de um modelo unificador que pudesse atender o campo aditivo e que fosse válido para ilustrar o campo multiplicativo foi outro obstáculo, pois a reta numérica não é adequada para a multiplicação (GLAESER, 1985, p. 40). Esses dois últimos obstáculos foram amenizados com a descoberta da orientação da reta em que os sinais - e + podem indicar o sentido nessa reta. A seguir apresentamos alguns obstáculos didáticos.

1.3 Obstáculos Didáticos

D'Amore (2005) indica uma outra noção de obstáculo, obstáculo didático que é causado pelas escolhas estratégicas do professor, bem como a forma como os conteúdos são abordados em livros didáticos. Obstáculo didático nasce da escolha das estratégias de ensino. Assim sendo, quando o professor distingue esses obstáculos pode rever a sua maneira de ensinar esse conteúdo matemático.

Marí (1995, p. 31-32) aponta obstáculos didáticos específicos caracterizados pela incompatibilidade do tempo da introdução por necessidades de adaptação e as justificações aceitáveis dos conceitos e procedimentos correspondentes. O mesmo autor constata que os livros didáticos, os Programas de Ensino e outros documentos curriculares apresentam contradições na abordagem dos números inteiros relativos e as operações aritméticas elementares. São exemplos dessas contradições: o fato de alguns livros, programas e trabalhos cotidianos dos alunos evitarem apresentação de operações de subtrações impossíveis entre números naturais; o tratamento didático como cópia simplificada e difundida do processo linear de construção dos conjuntos numéricos e, a maior atenção nos processos algorítmicos, no contexto da educação espanhola.

A mesma posição é compartilhada pelo Trovon (2009), ao argumentar que os obstáculos didáticos aparecem com mais vigor na fase da aprendizagem e súmula do conhecimento do que em seu apontamento histórico. Assim sendo, durante a aprendizagem da matemática, ao iniciar o contato com um novo conceito, pode ocorrer uma revolução interna entre a estabilização superficial do conhecimento antigo e o saber que se encontra em fase de construção. Esse atrito leva ao surgimento de obstáculos.

Tal como Marí (1995), Trovon também aponta como obstáculos didáticos: a forma simplificada com que os conteúdos são apresentados nos livros didáticos; generalização apressada de ideias antes de serem suficientemente discutidas e refletidas, trata-se de uma precipitação de pensamento indutivo em que a observação de casos particulares é considerada suficiente para induzir afirmações gerais (TROVON, 2009, p. 6). Para este autor, os obstáculos didáticos podem ser amenizados não abrindo espaço para uma generalização precipitada, sem atender a precisão conceitual, sendo que há necessidade de se fazer indagações e reflexões, para em seguida decidir se pode ou não generalizar o resultado das discussões.

Dando continuidade, uma formalização antecipada das conclusões a respeito de número negativo sinalizado pode atrapalhar sua compreensão pelos alunos, por conseguinte pode aparecer um obstáculo. Segundo Pais (2011, p. 48), na escola o perigo de acontecer uma generalização prematura coexiste com a tentativa de transformar o saber cotidiano em saber científico.

Carraher (1990) defende que uma representação sinalizada dos números negativos constitui fonte de confusão para os alunos, se o sinal *menos* for interpretado como indicação de uma subtração. Assim sendo, a autora argumenta que as dificuldades na aprendizagem formal dos números relativos estão relacionadas à diferença de significados da notação Matemática (-), visto que o símbolo (-) pode representar uma operação, a subtração, ora o sinal posicional ou posicionamento de um número na reta numérica, ora a operação de inversão. A autora ainda entende que um contexto propício para a construção de números negativos seria fora da sala de aula, envolvendo números negativos sem o sinal menos, o que remete à necessidade da construção desses números a partir de situações cotidianas sem a sua formalização prematura, ou seja, números relativos não sinalizados podem constituir um ambiente propício para a formação desse conceito.

Esses problemas podem ter origem na interferência com os sentidos intuitivos que as crianças adquirem quando são ensinadas com adjetivação de dívidas e pela ênfase dada aos livros didáticos de retirar como sendo o significado do sinal menos (MARÍ, 1995).

Já para Teixeira (1993), as lacunas para aprendizagem dos números inteiros relativos surgem quando se pretende estender propriedades das operações que as crianças aprenderam sobre os números naturais, a realidades às quais elas não se aplicam.

Assim sendo,

> [...] a perturbação se instala quando a subtração (a-b) é aplicada a casos em que b>a, gerando um resultado até então inexistente e demonstrando assim o caso típico em que as operações geram um novo conteúdo. Admitir a realidade deste novo resultado implica reconhecer a existência de uma nova classe de números – os negativos (TEIXEIRA, 1993, p. 62).

Essa autora indica que o aluno precisa ampliar o conceito de número que adquiriu anteriormente. Trata-se da ampliação do conjunto dos números naturais e suas respectivas operações de modo que as leis do sistema de numeração continuem válidas nesse novo conjunto, o dos números inteiros relativos.

De acordo com Freudenthal (1983, p. 436), situações envolvendo dívida, o termômetro, o elevador, podem propiciar o entendimento de números inteiros relativos desde que o seu enfoque seja adaptado ao nível de escolaridade dos alunos. Ademais, o sucesso no uso dessas situações deve ser intencional.

Deste modo, a escolha de situações associadas ao ensino dos números inteiros relativos deve ser feita de forma intencional e cuidadosa, pois sabemos que um dos problemas do ensino pode estar relacionado com os obstáculos didáticos, decorrente das escolhas de estratégias e exemplos para sala de aula (PAIS, 2011).

Davidson (1987), no campo de iniciação do estudo dos números inteiros relativos,

> [...] mostra como crianças de 4 e 5 anos podem representar números negativos em contexto de ação nos quais os números negativos e positivos são representados pelos movimentos, para frente e para trás, numa rua de papel onde as casas são numeradas de -4 a 4 (DAVIDSON *apud* BORBA, 1998, p. 125).

Essa conclusão comprova que as crianças constroem modelos mentais que incluem números inteiros relativos antes de receberem um ensino formal (na escola). Esses modelos justamente podem ser completados com os modelos da reta numérica para resolução de tarefas que abarcam números inteiros relativos. Nesse sentido, Borba (1998) argumenta que no domínio do ensino e de aprendizagem dos números inteiros relativos nas primeiras séries do Ensino Fundamental,

> [...] as formas de representação podem ser uma das principais causas das dificuldades das crianças quando lidam com números relativos, já que não parece haver muitas dificuldades na compreensão de situações cotidianas que envolvem esse campo numérico (BORBA, 1998, p. 125).

Nesta seção apontamos três tipos de obstáculos no ensino: obstáculos de origem ontogenética que são aqueles que sucedem carecidos das limitações de sujeito em consequência de seu desenvolvimento mental; obstáculos de ordem didática são aqueles que estão sujeitos somente às escolhas conseguidas para um sistema educativo e, os de ordem epistemológica, são aqueles que não se pode nem se deve esquivar, pois são indispensáveis ao conhecimento dado.

Acreditamos que um caminho para o enfrentamento dos obstáculos pode ser a ideia da multidimensionalidade do conhecimento (BRUNO, 1997), apontando contextos em diferentes modos de procedimentos matemáticos desde a aritmética, álgebra, gráfica e cálculo. Esse modo de procedimento pode viabilizar o uso de várias formas de expressão na linguagem da matemática agregadas aos pares contexto/abstrato, contexto/reta, reta/abstrato, abstrato/contexto, reta/contexto e abstrato/reta.

Na seção seguinte apresentamos direções tomadas por várias investigações sobre o tema com vistas a enfrentamento dos obstáculos apontados pela literatura e discutidos anteriormente. Nela, apontaremos as vias de acesso ao conjunto dos números inteiros relativos, como sendo: uso da reta, método extrapolatório do Freudenthal, método geométrico para multiplicação e divisão dos números inteiros relativos, uso das temperaturas, o nível médio das águas do mar, numa perspectiva de multidimensionalidade do conhecimento dos números inteiros relativos (BRUNO, 1997). A discussão a respeito das diferentes abordagens pode auxiliar o professor a ampliar seu horizonte sobre este conteúdo matemático.

1.4 Diferentes Abordagens dos Números Inteiros Relativos

Como vimos na seção anterior, há resultados sobre os obstáculos didáticos e epistemológicos relacionados à origem e à aprendizagem dos números inteiros relativos na pesquisa Educação Matemática[2]. Diante disso, há necessidade de conhecer esses resultados para dar continuidade às pesquisas relacionadas a este tema. Nesta seção apresentamos abordagens do ensino visando o enfrentamento dos obstáculos apontados pela literatura.

De acordo com Bruno (1997, p. 5), o ensino dos números inteiros pode ser feito por meio de três dimensões: abstrata, da reta e do contexto. É nessas dimensões que se pode operar transferências de conhecimento, de modo que se possa constituir e aprimorar as três componentes básicas para aprendizagem da Matemática, nomeadamente: a conceituação, a manipulação e aplicação. O termo transferência de conhecimento deve ser entendido nesta pesquisa como a construção de conhecimentos entre as dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos. Do mesmo modo, o termo contexto deve ser percebido como sinônimo de situação real ou fictícia.

Concordamos com Bruno (1997), ao defender a essencialidade das três dimensões de conhecimento nos processos de ensino e da aprendizagem dos números inteiros relativos e, nessa linha de pensamento, argumentamos que as dificuldades de aprendizagem em Matemática podem ser explicadas pela ênfase na dimensão abstrata, visto que nela o conhecimento matemático não encontra explicação contextual. Esse destaque da dimensão abstrata pode ser confirmado pelo excessivo uso de tarefas descontextualizadas em livros didáticos da Matemática. Ela, a Matemática, é ensinada como se fosse um corpo de conhecimento que não depende de outro para seu desenvolvimento. Isso justifica o cerne da multidimensionalidade de conhecimento no ensino da Matemática, neste caso dos números inteiros relativos.

Deste modo, a construção do conhecimento entre as dimensões depende das articulações que as tarefas podem provocar. Essas tarefas devem ser elaboradas tendo em conta a necessidade de articular a conceitualização, a

[2] É uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e aprendizagem da matemática em diversos níveis de escolaridade, quer seja em sua dimensão teórica ou prática (PAIS, 2011, p. 10).

manipulação e aplicações com vistas a um estabelecimento de conexões com outras matérias, de modo que haja construção entre as dimensões de conhecimento. Por essa razão, elas devem ser previamente preparadas com essa finalidade. A visão de Bruno (1997) assenta na perspectiva unitária do conhecimento numérico, isto é, o que se aprende desde os primeiros anos de escolaridade constitui partes de um único conhecimento numérico que pode ter um fio condutor que o unifique e o torne homogêneo.

Assim sendo, a dependência entre os conjuntos numéricos se mostra relevante, de modo que os alunos não construam conhecimentos como núcleos isolados, ou seja, compartimentados. Nessa perspectiva, são utilizadas três dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos. Cada dimensão apresenta características próprias, sendo que a dimensão abstrata envolve os conhecimentos sobre os sistemas numéricos como estruturas matemáticas e as formas de escritas numéricas, os símbolos. As noções de soma e de diferença são identificadas mediante o uso da noção do oposto de um número. Assim, a – b = a + (- b) e a + b = a – (- b).

Concordamos com Moretti (2012), ao argumentar que as situações anteriores envolvem a regra de sinais para a multiplicação e, esclarece que,

> a subtração, por exemplo, para o caso, a – (- b) só poderá ser explorada no campo multiplicativo. Como explicar o uso da reta dos inteiros para obtenção de 5 em 2-(-3)? Se "–" indica movimento na reta numérica à esquerda, como é que dois movimentos no sentido à esquerda vão resultar em um único movimento à direita? O desenvolvimento dessa expressão se dá da seguinte maneira: a-(-b)=a+b. O caso a-(+b) também teria o desenvolvimento seguinte: a-(+b)=a+(-b). O que observamos, nestas duas situações típicas, é o uso da regra dos sinais para a multiplicação (MORETTI, 2012, p. 707).

A dimensão contextual envolve as aplicações, situações concretas em que se utilizam os números inteiros. Nessa dimensão somar é acrescentar, agregar ou ainda incluir, e subtrair é separar, ou diminuir. Nessa ordem de ideia, ressalvamos que a subtração nem sempre encontra explicação contextual (MORETTI, 2012). A dimensão da reta envolve as representações dos números sobre a reta, baseadas na identificação dos números reais com os pontos da reta e com vetores que indicam as direções. As tarefas nas dimensões abstratas e do contexto devem ter seu reflexo na dimensão da reta (BRUNO, 1997, p. 6). O sucesso na transferência de conhecimentos entre as dimensões da reta, do contexto e de abstrato depende da natureza das tarefas propostas aos alunos.

Apresentamos no quadro a seguir as características das dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos que consideramos para o desenvolvimento dessa pesquisa.

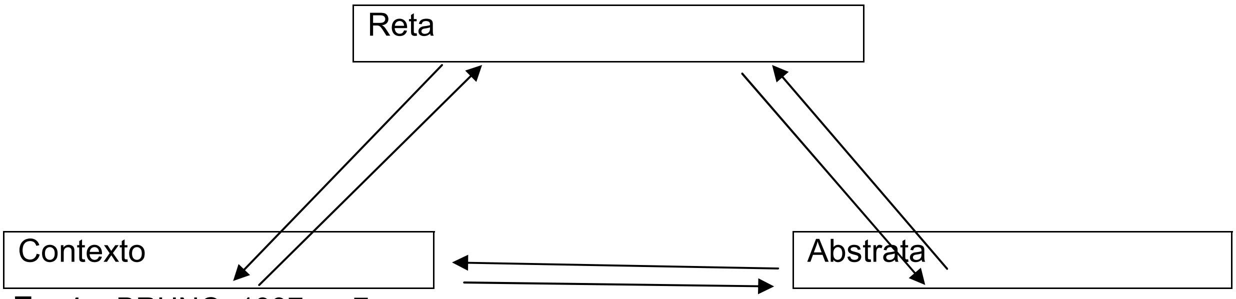
Quadro 1 – Caracterização das dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos

Dimensões	**Caracterização**
Abstrata	Exige alto grau de generalização, ou seja, demanda uma reflexão profunda. Existe no âmbito de imaginação, por isso requer concentração. Enquadra os sistemas numéricos, algébricos como estruturas matemáticas e as formas de escritas – os símbolos. É própria da Matemática.
Reta	As representações dos números sobre a reta. Os números reais são vistos como pontos da reta e como vetores que indicam direções. Ideia de deslocamentos, profundidade, altura etc. Uso de tabelas, diagramas e gráficos no plano cartesiano. A reta é vista como um caminho ou pista. Essa dimensão é abrangente, pois visualiza tanto a dimensão abstrata quanto a contextual.
Contexto	As aplicações práticas dos números inteiros, situações concretas em que se utilizam números inteiros na vida cotidiana. Trata-se do uso de fatos verdadeiros no cotidiano do aluno. Mas também pode consistir num uso de situações fictícias com vistas a problematizar. Visa motivar os alunos para aprendizagem da Matemática. É uma forma de aplicar a matemática e ao mesmo tempo fornece âncora para o entendimento da Matemática. A Matemática como contexto situa na dimensão abstrata.

Fonte: adaptado de Bruno (1997)

O nível de exigência da tarefa é fundamental para a construção do conhecimento entre as dimensões da reta, do contexto e abstrata. A figura seguinte mostra as articulações entre diferentes dimensões de conhecimento dos números inteiros relativos nas condições ideais apontadas pela autora.

Figura 1 – Transferências de conhecimentos entre dimensões



Fonte: BRUNO, 1997, p. 7.

Nessa tríade, as seis setas indicam as transferências de conhecimentos que podem ocorrer nos processos de ensino e de aprendizagem dos números inteiros relativos. O princípio de cada seta indica o ponto de partida, os processos de ensino e de aprendizagem dos números inteiros relativos e pode prosseguir de modo a abarcar todas as dimensões de conhecimento.

Assim sendo, as tarefas elaboradas na perspectiva de multidimensionalidade podem auxiliar os alunos a associarem as três dimensões e possibilitar o entendimento dos números inteiros relativos, envolvendo a verbalização como foco central para promover a construção de conhecimentos.

Assim, o exame dessa tríade pode nos levar a perceber que uma proposta de ensino deve incorporar seis agrupamentos de tarefas diferentes visando à construção de uma possível aprendizagem efetiva. Esses agrupamentos correspondem às articulações seguintes: abstrato-reta (AR), abstrato-contexto (AC), contexto-reta (CR), reta-abstrato (RA), contexto-abstrato (CA) e reta-contexto (RC).

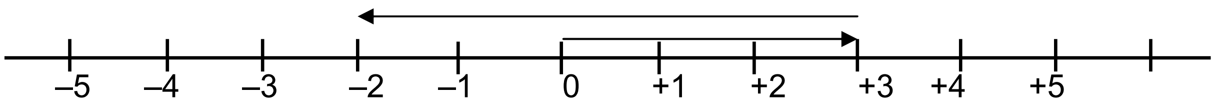
Apresentamos a seguir alguns exemplos de tarefas à luz da multidimensionalidade de conhecimentos.

1. **Transferência do conhecimento de abstrata para reta (AR)**
   Resolva as seguintes operações usando a reta numérica:
   (-5) + (+4)   b) (+3) + (-2)
2. **Transferência de conhecimento de abstrata para contexto (AC)**
   Construa um contexto em que pode ser utilizada a seguinte operação:
   (-6) + (+5) = (-1)
3. **Transferência de conhecimento da dimensão do contexto para a da reta (CR)**

Um elevador encontrava-se inicialmente no 7º piso abaixo do subsolo e depois, subiu 10 pisos. Qual é a posição depois dessa subida? Represente essa situação na reta numérica.

4. **Transferência do conhecimento da dimensão da reta para abstrata (RA)**

Qual é a operação que pode ser representada pelas setas?



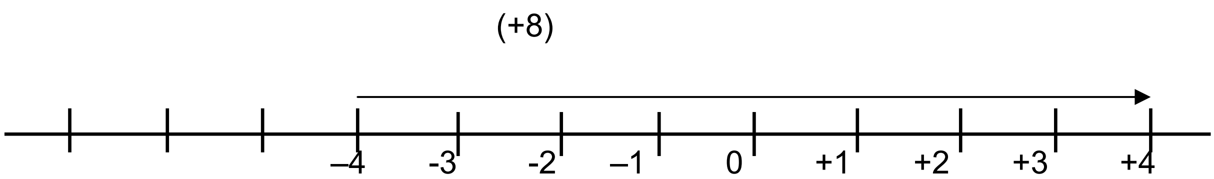
5. **Transferência de conhecimento da dimensão do contexto para abstrata (CR)**

Defina uma operação que pode resolver a seguinte situação:

Um objeto que se encontrava a 30°C foi esfriado até alcançar a temperatura de 6°C. Qual foi a variação da sua temperatura?

6. **Transferência de conhecimento da dimensão da reta para contexto (RC)**

Escreva um contexto que pode ser representado da seguinte forma:

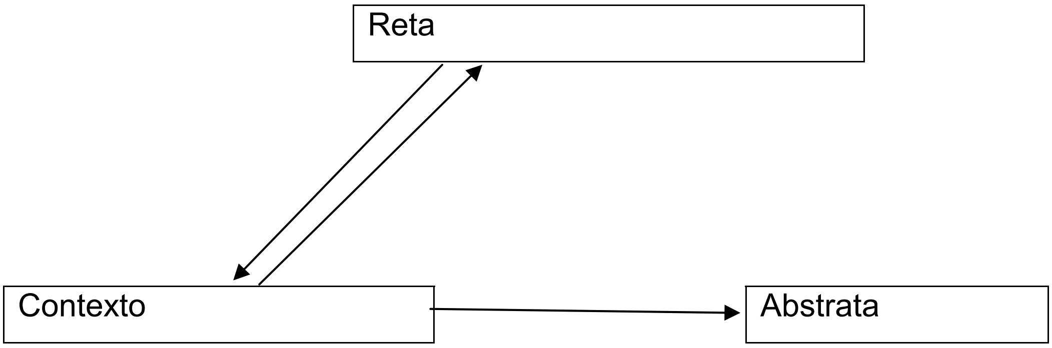


Ao resolver com sucesso todas essas tarefas o aluno tem a possibilidade de construir um conhecimento que abarca as três dimensões de conhecimento consideradas.

De acordo com Bruno (1997, p. 15-17), os alunos apresentam facilidade na transferência da dimensão da reta ao contexto e vice-versa. E dificilmente do contexto ao abstrato e do abstrato à reta. As transferências entre as três dimensões devem ser de tal modo que as regras operatórias que se situam na dimensão abstrata tenham uma clara translação em dimensões da reta e do contexto.

A seguir ilustramos as transferências que os alunos efetuam com facilidade.

Figura 2: Transferências entre as dimensões que os alunos estabelecem com mais facilidades



Fonte: Bruno, 997, p. 16

Podemos justificar essa facilidade pelo fato de que os alunos têm a possibilidade de vivenciar e criar situações na dimensão do contexto e representá-las na dimensão da reta. Quando as tarefas propostas aos alunos não levam em conta a transferência da dimensão abstrata para a da reta e vice-versa pode ocorrer uma aprendizagem não efetiva.

Apoiamos a ideia de que os números inteiros negativos sejam interpretados como grandezas subentendidas como negativas, por exemplo, dívidas, mas independentes do sinal menos nos primeiros momentos da sua abordagem com os alunos (CARRAHER, 1990; BORBA, 1998). Percebemos que isso passa pela construção de situações de aprendizagem em diversas linguagens que podem levar o aluno à imaginação, à argumentação e aferir por si próprio a partir das tarefas propostas.

O conteúdo dessas tarefas pode estar relacionado com o cotidiano, visto que os alunos necessitam de experiências em exploração e manipulação de situações familiares em que os números inteiros relativos se encontram, como dinheiro, temperatura, a reta, futebol, movimentos para cima e para baixo, comparação de idades (BELL, 1986). O mesmo autor argumenta que uma combinação de movimentos para a introdução dos números inteiros é necessária, dado que envolve o estado inicial, intermediário e o final. A ideia de combinação de movimentos está ligada à teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1985).

Importante se faz realçar que a teoria dos campos conceituais proposta por Vergnaud (1985) é fundamental, uma vez que ela está relacionada com as dimensões do conhecimento dos números inteiros relativos. Para esse autor, um conceito não pode se restringir à sua definição. Argumenta que a aprendizagem ocorre por meio de experiências com grande número de situações.

Nessa ordem de ideia, Vergnaud (1985) considera dois campos conceituais: o campo das estruturas aditivas (adição e subtração) e o de estruturas multiplicativas (divisão e multiplicação). No primeiro, estabelecem relações que envolvem duas variáveis e que adicionadas resultem num todo. No último, envolvem situações com a divisão e a multiplicação dos números inteiros, bem como as frações, razão, proporção e porcentagem.

Adicionado ao que Vergnaud advoga, é necessário dizer que o conceito pode ser trabalhado ao nível das três dimensões de conhecimentos, ou seja, ele deve ser estudado via contexto para situar o aluno, via reta para sua visualização e ainda via abstração para a sua generalização. Esse esclarecimento pode ser evidenciado por meio dos livros didáticos apresentando proposições diversificadas de situações para aprendizagem dos números inteiros relativos.

Os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática necessitam trazer uma multiplicidade de situações atinentes aos seus aspectos conceituais e admitir que os mesmos sejam representados por diferentes formas com o objetivo de se garantir uma compreensão mais aprofundada. No processo de ensino e nos livros didáticos isso pode se refletir na proposição de situações, que possibilitam que os alunos inventem, confrontem e socializem estratégias de resolução das tarefas. Igualmente isso pode ser refletido no estímulo pela utilização de diferentes representações tendo em conta que uma representação pode favorecer a compreensão de um aspecto do conceito enquanto que outra pode ser mais clara para outro aspecto (VERGNAUD, 1985).

De acordo com Freudenthal (1973, p. 212), a reta numérica deve ser usada desde o início da aritmética, ou pelo menos muito cedo. No começo só os números naturais são observados e marcados nela; depois com as subtrações os inteiros negativos aparecem e são também marcados nela. Em sua opinião esta é a primeira chance oferecida para um aluno considerar conceitos matemáticos a partir de um ponto de vista formal, dedutivo. Por outras palavras, partindo de uma hipótese geral chega-se a uma conclusão particular.

Nesse caso, o aluno aprende os números naturais desde o início da escolaridade, observa os padrões e regularidades na formação desses números. Ele estuda as propriedades desses números e pode relacioná-las com outras situações. Mais tarde revelar a insuficiência desse conjunto para o tratamento de outras situações.

Freudenthal (1973) explica que o surgimento dos números inteiros negativos foi motivado por meio da contagem para trás (contagem regressiva), embora reconhece que sua origem verdadeira esteja na necessidade da subtração sem restrições, portanto, da necessidade de estender a validade das operações (FREUDENTHAL, 1973, p. 225).

Concordamos com Freudenthal (1973), ao apontar que a necessidade de uma lógica intuitiva superior é primeiramente sentida com números negativos. Com vistas a amenizar as dificuldades com os números inteiros relativos, este autor, propõe o uso do método extrapolatório indutivo. Com base nesse método várias tarefas podem ser sugeridas levando o aluno a aceitar, por uma questão de lógica, a regra dos sinais. Nessa abordagem não se constroem modelos contextualizados, trabalha-se com a reta numérica e com as regras, observando e analisando os padrões dos resultados obtidos com vistas à elaboração das conclusões.

O método extrapolatório indutivo baseia-se no prolongamento da reta numérica dos números naturais. Freudenthal (1973, p. 211) indica que como meio de visualização a intenção da reta numérica quando usada apropriadamente pode ser um excelente meio de visualização das quatro operações aritméticas. Neste caso, a adição e subtração são interpretadas como recursos da reta numérica, a subtração de um número como uma reflexão, multiplicações e divisões como dilatações e contrações. Desse modo, as regras de cálculos podem se tornar intuitivamente claras.

Nesta reta, os números crescem da esquerda para a direita. A manutenção desta ideia justifica as regras dos sinais na multiplicação, conforme o exemplo a seguir: (-1).(+2) =(-2); (-1).(+1) =(-1); (-1).0 = 0; (-1).(-1) =(+1); (-1).(-2) =(+2) (MORETTI, 2012, p.701).

Por meio do reconhecimento dos padrões para modelar, representar ou descrever padrões físicos, regularidades, o aluno pode adquirir confiança em sua capacidade de abstrair relações (FREUDENTHAL, 1973). A capacidade de abstração é fundamental na aprendizagem da Matemática, daí que uma proposta atrelada nas dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos pode possibilitar o desenvolvimento desta capacidade. A abstração aqui é entendida como ato de isolar mentalmente algo para considerar à parte um elemento de representação que seja fundamental para a situação que está sendo tratada. Esse elemento não é dado separadamente, por exemplo, pode ser a dedução de uma fórmula a partir do estudo de padrões e regularidades. O método extrapolatório de Freudenthal nas operações com números inteiros relativos baseia-se nesse princípio. Este método exige que as propriedades válidas com os números positivos também devem ser válidas para os negativos (FREUDENTHAL, 1973, P.281-282).

O método é extrapolatório, porque de fato, faz-se uma extrapolação para além do zero, isto é, as propriedades observadas à direita de zero continuam válidas à esquerda de zero. O método é indutivo, pois, de forma intuitiva os alunos observando tabelas induzem regras práticas e generalizações. Esse método tem duas exigências fundamentais para o aluno: a primeira, ele deve dominar a reta numérica saber onde se localiza cada número inteiro e se possível, deve ter a imagem, da reta na sua cabeça. A segunda exigência é assumir que as propriedades que se observam com os números positivos (do lado natural) devem continuar válidas do lado negativo.

Freudenthal (1973, p.281) argumenta que as dificuldades do ensino dos números inteiros relativos não reside na introdução nem nas tarefas como: 3-7, 7+(-3), (-7) +3, 2. (-5), mas em resolver casos do tipo 3-(-7), 10-(-7), (-3) +(-7), (-3) -(-7) e (-2). (-5). De acordo com esse autor, podemos ensinar as operações com números inteiros relativos a partir de tarefas conforme ilustramos no quadro seguinte.

Quadro 2 – Exemplo da exposição do método extrapolatório indutivo

3+2=5	3-2=1	3.2=6	(-3).2=-6
3+1=4	3-1=2	3.1=3	(-3).1=-3
3+0=3	3-0=3	3.0=0	(-3).0=0
3+(-1)=2	3-(-1)=4	3.(-1)=-3	(-3).(-1)=3
3+(-2)=1	3-(-2)=5	3.(-2)=-6	(-3).(-2)=6

Fonte: adaptado de Freudenthal (1973, p. 281-282)

De acordo com Freudenthal (1973, p. 229), os números inteiros negativos devem ser introduzidos definindo, por exemplo, -2 como a coisa que se comporta como: (-2) +2 = 0 e derivar desta definição a aritmética dos números inteiros negativos. Partindo dessa lógica, podemos escrever:

(- 2) + 2 = 0 e (-3) +3 = 0, deduz-se, por adição, que (-2) + (-3) + (2+3) = 0, por isso, (- 2) + (-3) = - (2+3), ou por multiplicação da primeira por -3 e a segunda por 2, obtemos: (-2).(-3) + 2.(-3) = 0 e 2. (-3) + 3. 2 = 0 e por isso (-2). (-3) = 6. Deste modo, o autor argumenta que os números inteiros negativos surgem como soluções de determinadas equações e são submetidas às operações habituais como expusemos no exemplo anterior.

Para Caraça (2003, p. 91-96), o ensino dos números inteiros relativos pode ser feito via considerações de acontecimentos históricos que pode ser representado por meio de um calendário, tomando um acontecimento para origem o nascimento de Cristo. E a partir dessa origem contam-se os tempos para lá e para cá. Analogamente, o autor considera como ponto de partida o movimento de um móvel, que sai de certa posição inicial, realizando-se ao longo de uma trajetória retilínea um movimento em sentidos opostos (o caráter dinâmico dos números inteiros relativos). Nesse caso, precisamos saber qual dos dois sentidos opostos, sobre a reta, o movimento se realiza. Para indicar o sentido para esquerda do ponto inicial representou pelo sinal (-) e o movimento para direita indicou pelo sinal (+).

De acordo com Caraça (2003), as operações sobre números inteiros relativos podem ser definidas por extensão imediata (princípio de extensão) das operações estudadas no conjunto dos números naturais. Para ele, a Matemática possui uma lógica própria que precisa ser considerada, por isso, “todo o trabalho intelectual do homem é, no fundo, orientado por certas normas, certos princípios”. Deste modo, as regras não podem ser provadas, podendo sim ser justificadas, visto que elas derivam da necessidade de manter coesos os princípios da Matemática. Portanto, este autor considera o modelo aritmético e o geométrico para o tratamento dos números inteiros relativos. O modelo geométrico emprega a reta numérica com a origem 0 (zero) e um sentido positivo e um negativo. A multiplicação e a divisão são tratadas no modelo aritmético. Este autor define o número relativo da seguinte, maneira:

> Sejam a e b dois números reais quaisquer: à diferença a-b chamaremos número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo, conforme for $a>b$, $a=b$, $a<b$ (CARAÇA, 2003, p. 92).

Assim sendo, todo número negativo pode ser considerado como uma diferença em que o aditivo é zero e o subtrativo é o número real igual ao seu módulo, ou seja, dado um número negativo p-q qualquer, se pode escrever, chamando r à diferença p - q: $p - q = 0 - r = - r$ (CARAÇA, 2003, p. 95). Este autor justifica as regras de sinais determinando as operações sobre números inteiros relativos por extensão imediata das operações com os números naturais. Para as operações da adição e subtração aponta que:

1) $(p – q) + (r – s) = p + r – q – s = (p + r) – (q + s)$
2) $(p – q) - (r – s) = p - q - r + s = (p + s) – (q + r)$

Em particular, tem-se:

3) $a + (- b) = a + (0 – b) = a + 0 – b = a – b$
4) $a – (- b) = a – (0 - b) = a - (0 – b) = a + b$

Dessas sentenças concluímos que,

> somar um número negativo equivale a subtrair o número positivo com o mesmo módulo; subtrair um número negativo equivale a somar o número positivo com o mesmo módulo (CARAÇA, 2003, p. 95).

Quanto à multiplicação, o autor apresenta a seguinte demonstração:

$(p - q).(r – s) = p (r – s) – q.(r – s) = pr – ps – (qr – qs) = pr – ps – qr + qs = (pr + qs) – (ps + qr)$.

Em particular tem-se:

$(+a). (+b) = (a – 0). (b - 0) = + a.b$

$(+a). (-b) = (a – 0) .(0 - b) = - a.b$

$(-a). (+b) = (0 - a) .(b - 0) = - a.b$

$(- a). (- b) = (0 – a). (0 - b) = + a.b$

Essas igualdades contêm a conhecida regra dos sinais (CARAÇA, 2003, p. 96). Quanto à divisão, o autor define como operação inversa da multiplicação, por isso valem também as regras da multiplicação.

De acordo com Borba (1998), são duas abordagens que um professor pode utilizar quando pretende ensinar os números relativos. A escolha da abordagem a utilizar na sala de aula depende do ponto de vista e do domínio que o professor possui a respeito do assunto.

> A primeira abordagem, essencialmente abstrata, tem como preocupação primordial a coerência interna do sistema e se utiliza basicamente da manipulação de símbolos. A segunda abordagem usa modelos concretos ou situações contextualizadas que dão sentido aos números inteiros e às operações realizadas com eles (BORBA, 1998, p. 26).

A primeira abordagem defende que os números inteiros são entidades matemáticas abstratas inseridas num sistema regido por certas regras e que deve ser ensinado como tal, atende a intuição como foco para aceitação da existência e da manipulação dos números negativos. A segunda abordagem segue a ideia de construção de modelos, os quais podem ajudar a representar os objetos matemáticos, de modo que esses se aproximem cada vez mais da realidade dos alunos.

> [...] o valor educacional de uma disciplina expande na medida em que o aluno compreende os vários vínculos do conteúdo estudado com um contexto compreensível por ele (PAIS, 2011, p. 27).

Ressaltamos a necessidade dos contextos pertencerem ao repertório dos alunos, por exemplo, o conhecimento sobre créditos, débitos, a temperatura (acima e abaixo de zero), altitudes (acima ou e abaixo do nível do mar), níveis de elevação de água em reservatórios. O nível de reservatório de água pode aumentar ou pode baixar, ou seja, ocorre uma variação. Porém, essas abordagens não podem ser feitas de modo isolado (BORBA, 1998). Assim, a operação da subtração é difícil de ser aprendida utilizando a reta graduada ou modelos concretos.

A subtração apresenta diferentes significados, senão vejamos: retiradas, decréscimo, inverso de acréscimo, comparação, complemento e diferenças entre quantidades no campo dos números naturais. De acordo com Moretti (2012, p. 707), a subtração do tipo a-(-b) só poderá ser explorada no campo multiplicativo. Nesse campo, o desenvolvimento da expressão a-(-b) se dá da seguinte maneira: a-(-b) = a+b. O caso de a-(+b) = a-(+b) = a-b. Ressalvamos aqui o uso da regra dos sinais para a multiplicação.

No novo campo dos números relativos são acrescentadas as diferenças entre transformações e relações (BORBA, 1998). A respeito disso, Bell (1986) constata que o problema reside na dificuldade dos alunos em distinguir as relações entre estado inicial, intermediário e estado final.

Para o ensino dos números inteiros relativos são apontados alguns modelos, por exemplo, para os naturais o modelo fundamental é a contagem enquanto para os números relativos é o geométrico (MARÍ, 1995; BORBA, 1998).

Nessa mesma linha de pensamento Borba (1998) sugere a diversificação de situações para o ensino de números inteiros relativos, apontando, por exemplo, situações em que nos processos de ensino e de aprendizagem recorre: o uso de expressões numéricas descontextualizadas; de problemas sobre débitos e créditos; de problemas envolvendo temperaturas e de interpretações de expressões numéricas. As quatro operações de aritmética não devem ser impostas ao aluno pelo professor. Concordamos com essa autora quando diz que os alunos podem descobrir as quatro operações num contexto de resolução de tarefas, as quais articulam as dimensões de conhecimentos, percorrendo da reta-contexto-abstrato ou vice-versa, constituindo um suporte para a construção de conhecimento.

De acordo com Borba (1998), o uso de diagramas de Vergnaud como alternativa para o ensino dos números inteiros relativos facilita a compreensão dos números relativos pelos alunos. A mesma autora argumenta que tal diagrama diferencia o estado, a transformação, a relação e o tempo, podendo ser considerada como uma equação com informações adicionais específicas. Trata-se de um esquema simbólico intermediário entre a representação verbal das tarefas e a representação numérica formal. Adicionando a isso também se faz necessário utilizar a reta numérica. Uma vantagem adicional é o fato de que, a partir dessas transformações, podemos estabelecer conhecimentos para percorrer dentro das dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos.

Ao utilizarmos o diagrama de Vergnaud nos importam as designações de problemas aditivos e as estruturas aditivas. Problemas aditivos são aqueles cuja solução exige somente adições ou subtrações. De igual modo, as estruturas aditivas são aquelas em que as relações em jogo são formadas somente por adições ou subtrações (VERGNAUD, 2009, p. 197).

Segundo Bell (1986, p. 205), não se pode propor ensinar regras para manipular os números inteiros relativos sem que os alunos compreendam as situações que os contêm. Ademais, essas situações quando são bem compreendidas podem servir de referências para dotar de significados as manipulações com esses números.

No âmbito desse processo, a contextualização é tida como aspecto relevante, pois entendemos que só desse modo as operações poderão ganhar sentido. Assim sendo, as questões contextualizadas envolvem adição do tipo mudança envolvendo o estado inicial, o intermediário e o final e que pode ser verbalizada pelos alunos. Por exemplo:

Aurora retirou 100,00 meticais[3] da sua conta no banco. Ela ficou devendo 50,00 meticais ao banco. Qual era a sua relação antes de fazer a retirada?

Nessa tarefa, o estado inicial não é conhecido. O estado intermediário é a retirada de 100,00 meticais e o estado final é a dívida de 50,00 meticais. Assim sendo, o estado inicial + estado intermediário = estado final.

Tarefa dessa natureza pode ajudar ao aluno a relacionar situações da vida com a Matemática que aprende na escola. Nesse caso, as expressões são apresentadas na notação formal, pede-se aos alunos que interpretem as sentenças e criem contextos para elas.

Por exemplo, a partir da conta: (-200)+(+800) = (+600), solicita-se que o aluno responda à pergunta: “Que contexto pode representar essa operação?” De acordo com Borba,

> [...] os diagramas aplicam-se a problemas no campo conceitual de estruturas aditivas. Diz-se que um problema é aditivo quando seus cálculos envolvem apenas adição ou subtração, seja no campo dos naturais, seja no dos relativos (BORBA, 1998, p. 134).

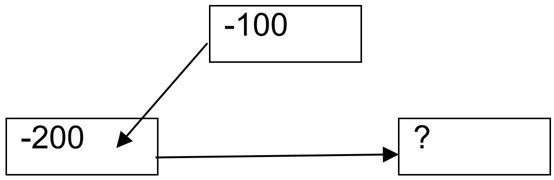
Na tarefa abaixo, utilizamos o diagrama de Vergnaud. Exemplo:

Augusta estava devendo 200,00 meticais na sua conta no banco. Ela retirou 100,00 meticais da sua conta. Qual a situação após a retirada?

Usando o diagrama de Vergnaud a situação fica representada assim:

---

[3] *Metical é unidade da moeda da República de Moçambique, o seu símbolo é Mtn.*

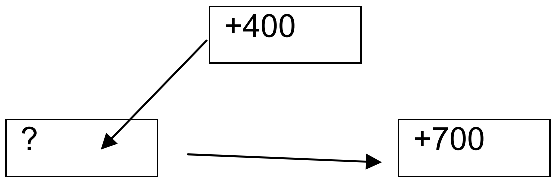


Para que se possa desenvolver a visão dos alunos sobre a tarefa, a representação final deve ser discutida e constituída: (-200)+(-100)=? Igualmente, podemos usar a reta numérica para verificar se a operação escolhida é adequada e efetuada de forma correta (BORBA, 1998).

Outro exemplo:

Ângelo depositou 400,00 meticais na sua conta no banco. Ele então ficou com 700,00 meticais na sua conta. Qual a situação antes do depósito?

O diagrama da situação fica:



Assim, a representação final deve ser debatida e estabelecida: ? +(400) = (+700).

Observamos que a utilização do diagrama de Vergnaud remete a situações como mudança do estado, transformação, relação e tempo. Essa variação mostra um aspecto dinâmico dos números inteiros relativos, o entendimento dessas mudanças nesse campo numérico pode possibilitar que o aluno pouco a pouco compreenda e construa o conceito do número negativo, podendo perceber que ele, o número negativo, pode representar cada uma das mudanças referidas (BORBA, 1998).

Assim, dos apontamentos que fizemos a respeito das estruturas aditivas podemos constatar que elas estão relacionadas com as dimensões apontadas por Bruno (1997), de conhecimento dos números inteiros (reta, contexto e abstrata), fato que nos pode assegurar a sua conciliação para o tratamento dos números inteiros relativos.

Nessa linha de pensamento, concordamos com Carraher (1990, p. 149) quando afirma que dívidas são complexas em significados e em representação.

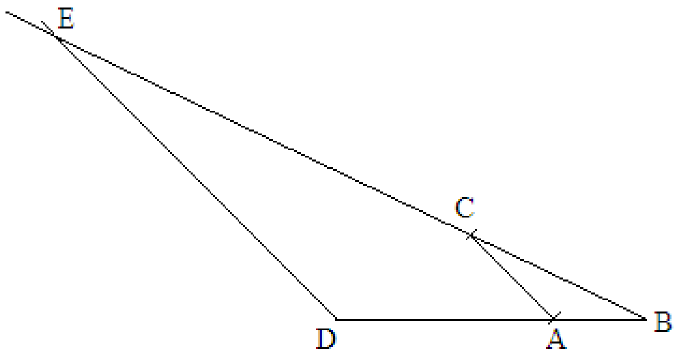
E, ela argumenta que quando alguém pede emprestado um dinheiro esse alguém fica com mais dinheiro na sua carteira. Porém, o dinheiro emprestado é marcado como não sendo o seu próprio dinheiro, mas alguma coisa que tem que ser devolvida ao emprestado. Pelas razões acima expostas, vemos que há necessidade de se buscar exemplos nos quais as relações entre contextos e as representações formais possam ficar bem claras e que sirvam de veículo para a construção de conhecimento entre essas formas de representações.

Borba (1998) alerta nos que as formas de representação podem ser uma das principais causas das dificuldades das crianças quando lidam com números relativos, já que parece haver muitas dificuldades na compreensão de situações cotidianas que envolvem esse campo numérico.

Concordamos com Cyrino e Pasquini (2010), quando propõem o uso do método de multiplicação e divisão de segmentos propostos por Descartes e Hilbert como via para problematizar estas operações em sala de aula com vistas à compreensão e percepção das regularidades para a estrutura multiplicativa, e a partir daí justificar as regras de sinais, tendo em conta que as mesmas são apresentadas aos alunos sem fundamentação, podendo contribuir para a sua compreensão. Para atender esta proposição, essas autoras recorrem, nas palavras de Descartes, a possibilidades de se auxiliar em conceitos geométricos como forma para que os aritméticos possam ser considerados (CYRINO; PASQUINI, 2010, p. 22).

A apresentação de Descartes traz sua geometria colocando a unidade a partir de uma configuração do Teorema de Thales. Geometricamente, a multiplicação é descrita da seguinte maneira:

Figura 3*:* Construção proposta por Descartes



Seja por exemplo $\overline{AB}$ a unidade, e que se deve multiplicar $\overline{BD}$ por $\overline{BC}$, para isso, só é necessário unir os pontos A e C, depois determinar $\overline{DE}$ paralela a $\overline{CA}$, sendo $\overline{BE}$ o produto desta multiplicação.

Fonte: Cyrino e Pasquini, 2010, p. 22*.*

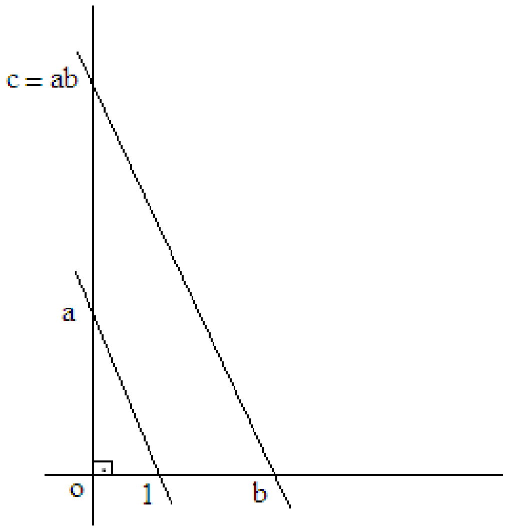
Na divisão de $\overline{BE}$ por $\overline{BD}$, admitindo ainda $\overline{AB}$ como a unidade, é indispensável unir os pontos E e D, depois achar $\overline{CA}$ paralela a $\overline{DE}$, sendo $\overline{BC}$ o resultado desta divisão.

A construção geométrica das operações também foi apresentada pelo David Hilbert (1862-1943). Este matemático descreve a construção geométrica do produto da seguinte maneira:

> Para definir geometricamente o produto de um segmento a por outro b, servimo-nos da seguinte construção: Escolhemos primeiramente um segmento qualquer, fixo em tudo o que o segue e designemo-lo por 1. Desloquemos para um dos lados dum ângulo reto e a partir do vértice O, o segmento 1 e, além disso também a partir de O, o segmento b; em seguida deslocamos para o outro lado o segmento a. Unamos as extremidades dos segmentos 1 e a por uma reta e conduzamos uma paralela a esta reta pela extremidade do segmento b; esta determinará um segmento c no outro lado do ângulo: chamemos a este segmento c o produto do segmento a pelo segmento b e designamo-lo por: $c = ab$ (HILBERT *apud* CYRINO; PASQUINI, 2010, p. 24).

A seguir apresentamos alguns exemplos de construção geométrica de produto e de quociente.

Figura 4*:* Construção de produto de a por b

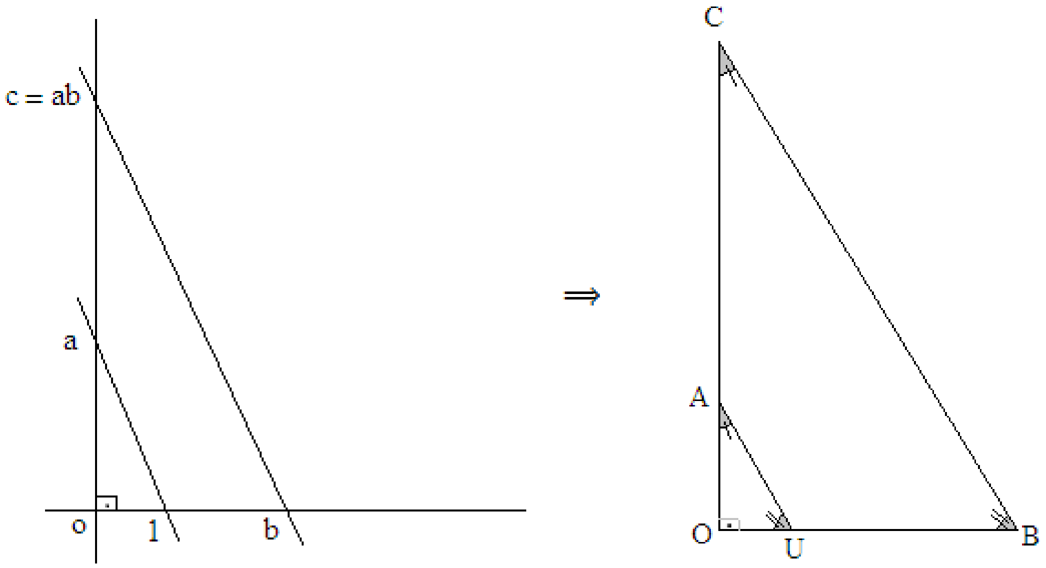


Fonte: Cyrino e Pasquini, 2010, p. 45.

> A construção proposta por Hilbert diferencia-se da proposta por Descartes, basicamente pelo fato de Hilbert dizer que os segmentos de reta devem ser dispostos perpendiculares (CYRINO e PASQUINI, 2010, p. 45).

Para a validação das construções propostas por Hilbert recorremos à semelhança de triângulos. A seguir mostramos como se procede a validação:

Figura 5*:* Triângulos semelhantes de acordo com a construção proposta por Hilbert



Fonte: Cyrino e Pasquini, 2010, p. 49.

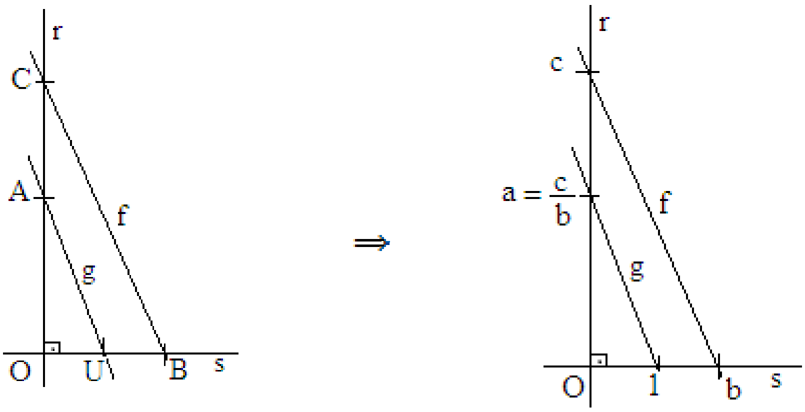
Na figura acima,

> temos que os triângulos ΔUOA e ΔBOC são semelhantes, pois as medidas dos seus ângulos correspondentes são iguais. Como os triângulos são semelhantes, seus lados correspondentes possuem medidas proporcionais. Assim, podemos escrever a proporção a seguir e realizar os cálculos: $\frac{UO}{BO} = \frac{AO}{CO} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow c = ab$ Concluímos assim que c é o produto entre a e b. Note que em ambas as demonstrações utilizamos construção proposta por Hilbert. No entanto, o ângulo entre os segmentos concorrentes não importa, logo, as demonstrações realizadas anteriormente são válidas tanto para a construção proposta por Hilbert quanto para a proposta por Descartes (CYRINO; PASQUINI, 2010, p. 49-50).

A similaridade do que aconteceu com a multiplicação, na divisão igualmente podemos usar segmentos para visualizar o quociente geometricamente. Porém, entre a multiplicação e a divisão por meio das construções geométricas, distingue-se exclusivamente pelo procedimento de construção (CYRINO; PASQUINI, 2010, p. 58).

Para a divisão dos números inteiros relativos podemos proceder da seguinte maneira: consideremos a operação $c \div b = a$, traçamos duas retas r e s, de modo que r seja perpendicular à s intersectando-se no ponto O.E ainda, considerando O como origem, localizamos o dividendo c em r e o divisor b em s, em seguida traçamos um segmento de reta que une o dividendo c e o divisor b e designamo-lo por f, a partir da unidade positiva de s, traçamos outro segmento da reta paralelo a f e designamo-lo por g, a intersecção de g com o segmento da reta r resulta o quociente a, isto é, $a = \frac{c}{b}$. (CYRINO; PASQUINI, 2010), conforme ilustramos a seguir.

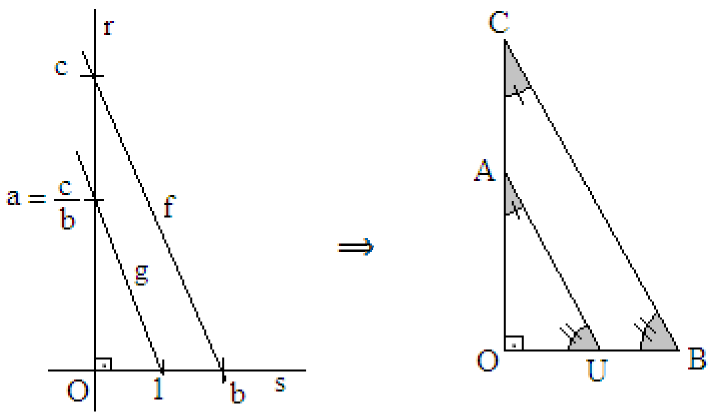
Figura 6: Divisão de segmentos



Fonte: Cyrino e Pasquini, 2010, p. 58.

Portanto, é importante destacar a semelhança de triângulos para a validação do processo da divisão de segmentos aplicando o método geométrico de Hilbert. Deste modo, apresentamos:

Figura 7: Triângulos semelhantes



Fonte: Cyrino e Pasquini, 2010, p. 59.

Notamos que

> os triângulos ΔUOA e ΔBOC são semelhantes, pois as medidas dos seus ângulos correspondentes são iguais. Porém, os seus lados correspondentes possuem medidas proporcionais. Assim podemos escrever a proporção:

$\frac{AO}{OU} = \frac{OC}{OB}$.Note que OU é a unidade de medida, logo $OU = 1$. Realizando os cálculos.$\frac{AO}{OU} = \frac{OC}{OB} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{c}{b} \Rightarrow a = \frac{c}{b}$(CYRINO; PASQUINI, 2010, p. 59).

A seguir apresentamos o extracto de algumas tarefas da proposta de Cyrino e Pasquini (2010, p.36-65):

Tarefa 1.3

Descreva reminisciências de seu primeiro contato, enquanto estudante, com números inteiros, respondendo:

Que tipo de dificuldades você e seus colegas enfrentaram para aprender este tema?

Que material foi utulizado para o ensino deste tema?

Como eram as tarefas propostas para aprendizagem deste tema?

Tarefa 5

Segundo o teorema de Thales ``um feixe re retas paralelas divide duas retas transversais quaisquer em segmentos proporcionais``.

Investigue em livros de História da Matemática o modo como o Teorema de Thales é apresentado?

Questão problematizadora:

As construções propostas por Descartes e por Hilbert guardam alguma relação com o teorema de Thales? Por quê?

Tarefa 6

Represente geometricamente o produto entre 4 e 7, por meio da construção proposta por Hilbert, em um sistema de coordenadas. Após a construção, verifique algebricamente o resultado obtido.

Tarefa 9

Como fica a construção geométrica do produto entre um número positivo e um número negativo?

Qual das construções estudadas é mais adequada para representação do produto de números negativos? Represente geometricamente esse produto.

Tarefa 10

Faça a construção geometrica da multiplicação em que um dos fatores é zero.

Tarefa

Tarefa 14

Por meio de alguma construção geométrica que estudamos, pe possível calcular o quociente entre um número positivo e um número negativo? E entre dois números negativos?

Como essas construções podem ser realizadas?

Como representar um número negativo nessa construção?

A multiplicação e a divisão dos números inteiros relativos pelo método geométrico pode ser enquadrada na dimensão da reta e de abstrato com a exceção da dimensão do contexto. A dimensão abstrata nessas operações se refere às demonstrações analíticas da validade do método. Assim, todo o conhecimento numérico abrange cada uma dessas dimensões (BRUNO, 1997, p. 7).

O professor precisa organizar tarefas que possam articular as dimensões de conhecimentos dos números inteiros. Assim, a informação deve estar introduzida no contexto das tarefas educacionais com objetivo de que quem aprende seja capaz de envolver-se em ciclos perceptíveis dentro das dimensões. Por exemplo, uma tarefa como a que segue: *a temperatura num certo domingo, do lugar A, foi de -5°C. Na segunda-feira subiu 6°C, na terça-feira desceu 5°C e na quarta desceu 2°C. Construa e preencha a tabela de temperaturas daqueles dias, usando números inteiros relativos*[4]. Podemos compreender que as capacidades de tradução do enunciado são da linguagem natural para a linguagem Matemática. E a transferência da dimensão do contexto para a abstrata, bem como da dimensão abstrata para a da reta. Esse movimento demanda interações entre as dimensões, o que pode possibilitar a compreensão da temática pelo aluno.

As dimensões da reta, do contexto e abstrata, envolvendo situações como ganhos e perdas, a reta numérica, cronologia (tempo) e diagrama de Vergnaud, temperaturas, deslocamentos, nível médio das águas do mar, são formas de abordar números inteiros relativos com alunos para que possam encontrar significados destes na vida real.

No próximo capítulo apresentamos a nossa trajetória da pesquisa no que diz respeito à elaboração da proposta que foi utilizada no curso para os

---

[4] Adaptada de Nhêze, 1998, p. 29.

professores de Moçambique, que concretamente foi considerado o estudo de programa de Ensino da Matemática, de livros didáticos, entre outros documentos. Igualmente, esclarecemos o processo de coleta de dados com professores de Moçambique. Por fim, justificamos em que medida as reflexões promovidas no decorrer do trabalho com os professores nos ajudaram a elaborar a nova proposta de ensino.

2 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Tratar da aprendizagem dos professores fundamentados na essencialidade das dimensões de conhecimento para elaboração de uma propossta de ensino dos números inteiros relativos é importante, dado que permite aprendizagens dos participantes que posteriormente irão aplicar esse conhecimento com seus alunos (BRUNO, 1997). Segundo esta autora, aprendizagem é caracterizada pela construção de conhecimento nas três dimensões, nomeadamente a da reta, a abstrata e a de contexto. Isto quer dizer que só há aprendizagem quando o aluno consegue relacionar os conteúdos matemáticos por meio da construção de conhecimento entre as dimensões acima apontadas.

Para fazer face aos nossos objetivos da pesquisa, realizamos um estudo piloto envolvendo 10 professores que ensinam Matemática num curso de formação de curta duração. Posteriormente, em 4 turmas da 8ª classe foram aplicadas tarefas produzidas no curso de formação. Dos dez professores, 4 foram selecionados para implementar a proposta na Escola Secundária de Coalane, cidade de Quelimane, de janeiro a março de 2013.

A proposta foi montada a partir das contribuições dos professores, isto quer dizer que ela surgiu de suas vivências, das dificuldades que seus alunos apresentavam e da literatura especializada.

Para que o estudo piloto fosse estruturado houve uma análise prévia de quatro livros didáticos de Matemática da 8ª classe do ensino moçambicano e um Programa de Ensino da Matemática, com a finalidade de observar as diretrizes dadas ao professor de forma a compreender as políticas públicas voltadas para o ensino da Matemática.

Nossa pretensão era compreender como é que os números inteiros relativos são abordados e até que ponto as tarefas propostas nessa unidade temática articulam as dimensões de conhecimento dos números inteiros relativos. Escolhemos esses livros por serem os mais recentes. Dos quatro livros, somente um, intitulado Matemática 8ª classe, de autoria de Chuquela e Langa, 2011, é recomendado pelo Ministério da Educação para o uso em escolas secundárias.

Os conteúdos desses livros são: Números inteiros relativos; Equações lineares; Proporcionalidades e funções lineares; Sistemas de duas equações a duas incógnitas; Circunferências e círculos e Congruência de triângulo e Teorema de Pitágoras (INDE, 2010, p. 15).

Para a análise, escolhemos a unidade temática I a respeito dos números inteiros relativos. Dos conteúdos a respeito dos números inteiros relativos constam as seguintes seções: números simétricos; módulo ou valor absoluto de um número; operações em Z (adição, subtração, multiplicação e divisão). Escolhemos essa unidade por ser a que cria mais dificuldade no ensino e na aprendizagem desse conteúdo matemático.

Nessa unidade, fizemos um levantamento de como os conteúdos são apresentados e quais as vias de acesso utilizadas para o tratamento desse tema. Esse estudo ajudou-nos a identificar o que os livros não trazem em termos das três dimensões de conhecimentos e suas articulações nas tarefas propostas. Essa informação foi importante para a seleção de tarefas para a nossa proposta.

Efetuamos primeiro um estudo documental que consistiu na revisão de livros didáticos e de programa de Ensino da Matemática sobre o tema e a seguir um estudo prático envolvendo professores de Matemática da 8ª classe em uma formação de curta duração e aplicação em turmas da 8ª classe. A partir das contribuições teóricas de diversos autores (FREUDENTHAL, 1973; BORBA, 1998; BRUNO, 1997; VERGNAUD, 2009, entre outros) elaboramos uma proposta[5] de formação de professores em exercício.

Nesta pesquisa buscamos responder à seguinte questão de investigação: **que indicadores devem ser considerados em uma proposta de ensino dos números inteiros relativos para educação escolar a ser utilizada na formação de professores em Moçambique?** Para respondermos à questão propomos o seguinte objetivo: elaborar uma proposta de ensino para o trabalho com números inteiros relativos para a educação escolar que articule as dimensões de conhecimento dos números relativos.

Assim, neste capítulo apresentamos a escolha metodológica adotada na pesquisa, os participantes, o contexto, os instrumentos para a coleta de informações e o processo de análise dos dados. Este se encontra dividido em cinco seções: na primeira, apresentamos a escolha metodológica explicitando as nossas posições quanto a abordagem metodológica adotada para essa pesquisa; na

[5] Fase piloto.

segunda, delineamos o curso de formação de professores; na terceira, expomos os procedimentos de análise dos livros didáticos e do PEM; na quarta apresentamos informações sobre os professores que aplicaram a proposta em quatro turmas da 8ª classe e, na última, descrevemos os procedimentos da análise dos dados dos alunos.

2.1 A Escolha Metodológica

Com vistas a responder à questão de investigação e aos objetivos que orientam a presente pesquisa, optamos por realizar uma investigação qualitativa. A pesquisa qualitativa apresenta cinco características fundamentais: 1) o ambiente natural como fonte de dados e o pesquisador como instrumento fundamental de coleta de dados; 2) a investigação qualitativa é descritiva; 3) os pesquisadores estão preocupados com o processo e não simplesmente com os resultados e o produto; 4) os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente; e, 5) o significado é a preocupação essencial na abordagem qualitativa (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 47-51).

Estivemos presente em todas as fases da pesquisa desde o curso de formação de curta duração, a aplicação da proposta em sala de aula, planejamento das aulas com professores, agindo como membro e pesquisador. No curso de formação observamos as ações dos participantes, suas contribuições e inquietações. Igualmente, observamos aulas dos 4 professores visando compreender a aplicabilidade da proposta, anotando o que estivesse ao nosso alcance e isso era complementado com as notas que os professores entregavam no final de cada semana – o que constituiu o ambiente natural. Mantivemos contato direto primeiro com os 10 professores durante a formação e depois com os 4 durante aplicação da proposta na sala de aula com alunos da 8ª classe. Consideramos os seus pontos de vista, o que deu mais liberdade para eles se expressarem sobre as ocorrências nas sessões, o que possibilitou aos professores entregarem suas notas de campo.

Os dados coletados foram descritos a partir das anotações e dos registros escritos produzidos pelos professores na formação e durante aplicação da proposta na sala de aula.

Durante o curso de formação buscamos compreender o que os participantes já sabiam sobre o tema e como encaram as sugestões dos autores (BRUNO, 1997; FREUDENTHAL, 1973; BORBA, 1998; CARRAHER, 1990, entre outros) a respeito do ensino dos números inteiros relativos, e, ainda, como avaliam as tarefas apresentadas nos 4 livros didáticos de Matemática da 8ª classe, a partir das novas perspectivas de abordagem dos números inteiros relativos. Igualmente buscamos perceber as sensibilidades dos participantes da necessidade de uma proposição voltada aos ideários dos autores discutidos. Nossa intenção era entender, a partir dos pontos de vista dos participantes, a possibilidade de elaboração de uma proposta que pudesse atender alguns dos ideários com enfoque na multidimensionalidade de conhecimento dos números inteiros relativos. Por isso, entendemos que nossa preocupação estava voltada mais para o processo do que para o produto.

Para análise dos dados, constituímos o *corpus* da pesquisa composto por 4 livros didáticos (Saber Matemática, 8ª classe. Longman Moçambique, Lda., 1ª Edição, 2007; Matemática 8ª classe. Plural Editores, 2011; Matemática 8ª classe (M8). Diname, 2007. Matemática para todos, 8ª classe. Editora Nacional de Moçambique, 2010; o Programa da Matemática da 8ª classe. MEC/INDE, Maputo, 2010 (PEM), os registros escritos dos professores, as anotações do pesquisador e os registros dos alunos.

De acordo com Bardin (2011, p. 125-126), *corpus* é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos. A sua composição implicou as escolhas, seleções e regras. Essa autora afirma que as diferentes fases de análise de conteúdo organizam-se em torno de três polos cronológicos: 1) a pré-análise; 2) a exploração do material; e, 3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Todas essas fases foram utilizadas no processamento dos dados sem, contudo, fazer a devida discriminação, no sentido de controlar onde começa uma e onde termina outra.

Assim sendo, tivemos o cuidado de observar as seguintes regras: a da exaustividade utiliza a exaustão junto aos dados do texto de forma que toda a informação pertencente a uma unidade fosse incluída. Nada do material foi excluído sem explicação. A regra da homogeneidade: agrupamos as expressões semelhantes ou que tinham o mesmo significado. Tivemos ainda em conta a necessidade de evitar que outro tema, ideias ou textos fossem incluídos na mesma categoria, e a regra da pertinência, adequando o material selecionado ao conteúdo e ao objetivo da análise (BARDIN, 2011, p. 125).

Esse movimento teve início com uma desorganização dos materiais (*corpus*) da análise, a unitarização, constituindo um exercício de desconstrução dos materiais textuais reunidos (MORAES; GALIAZZI, 2011, p. 44). Esse movimento permitiu-nos a construção de novas compreensões.

Realizamos nossa análise à medida que os dados foram sendo colhidos no estudo piloto. Organizamos os dados em função dos nossos objetivos de modo que pudessem nos tornar visível, de uma forma indutiva, determinados aspectos característicos do nosso objeto de estudo, a reflexão de um formador de professores sobre a essencialidade da teoria sobre dimensões de conhecimento na formulação de uma proposta para o ensino dos números inteiros relativos.

Assim, fizemos uma leitura acautelada de todas as informações (registros escritos dos professores, dos alunos, anotações do investigador) que estiveram ao nosso alcance, visto que nesse tipo de investigação todos os dados são importantes e precisam ser examinados. Em seguida, tendo em conta os nossos objetivos, elaborar uma proposta de ensino e estudar as potencialidades desta, elegemos tarefas que estivessem de acordo com a nossa teoria e procedemos ao estudo das mesmas quanto às suas potencialidades.

Os resultados foram organizados em quadros e, em seguida, a descrição de elementos fundamentais – as constatações obtidas. E, finalizamos pela apresentação da nova proposta de ensino.

2.2 Curso de Formação de Professores

Primeiro estudamos os documentos e fizemos o levantamento dos conteúdos sobre números inteiros relativos nos livros didáticos e no PEM, observando as falhas e lacunas e desenvolvendo uma proposta de um curso de pouca duração e depois fomos para a sala de aula observar os resultados desse curso, quando os 4 professores regressaram para a sala de aula.

No processo de elaboração da proposta utilizada para o curso de formação dos professores em exercício consideramos o estudo do Programa de Ensino da Matemática, de livros didáticos, textos específicos sobre o tema, entre outros documentos.

Dando continuidade, aplicamos um curso de curta duração aos professores em exercício que ensinam em escolas da cidade de Quelimane e, posteriormente, nas turmas da 8ª classe. Participaram do curso 10 professores, com a duração de 22 horas. Foi desenvolvido no período compreendido entre 10 de dezembro de 2012 e 18 de janeiro de 2013, nas instalações da Universidade Pedagógica, Quelimane. A escolha desse local justificou-se pelas facilidades que o investigador dispunha na aquisição de sala, evitando questões burocráticas, visto que o mesmo faz parte do quadro integrante dessa instituição de Ensino Superior.

A proposta do curso foi validada no grupo de pesquisa IFHIECEM e por duas professoras do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), um professor aposentado do Departamento de Matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique, de origem holandesa, e três da Universidade Pedagógica de Moçambique.

Os participantes foram professores que lecionavam Matemática em Escolas da cidade de Quelimane e que fazem parte dos estágios supervisionados, sendo a participação feita pelo critério de voluntariedade, isto é, não houve a obrigatoriedade em fazer parte, foi por interesse e curiosidade individual. Foram explicitados os objetivos do curso e sua possível contribuição para o ensino da Matemática. As identidades dos professores não foram reveladas nessa pesquisa, evitando qualquer tipo de transtorno, buscando assim interpretações do ambiente onde atuam, extraindo informações que consideram significantes para constituir estratégias de ações com as quais poderiam influenciar os processos de ensino e de aprendizagem dos números inteiros relativos.

No início da formação os participantes responderam a um questionário composto por cinco perguntas (Q1, Q2, Q3, Q4 e Q5). O nosso objetivo era coletar informações a respeito do que aqueles professores já sabiam do tema e o que gostariam de saber mais.

A seguir apresentamos o questionário aplicado no início do curso.

1. Escreva o que você sabe sobre os números inteiros relativos (Q1).
2. Como você trabalha os conteúdos a respeito dos números inteiros relativos na 8ª classe? (Q2)
3. Que dificuldades encontra quando pretende abordar os números inteiros com os seus alunos? Como tem ultrapassado tais dificuldades? (Q3)

4. Como você justifica a multiplicação de dois números negativos? (Q4)
5. Você acha que existe outra maneira mais fácil de ensinar os números inteiros relativos, para além da sugerida no programa e no livro do aluno? Explique a sua resposta (Q5).

Dessas cinco tarefas apresentamos as transcrições das respostas de Q1 e Q5, pois essas avaliavam os pré-requisitos e as alternativas para o ensino dos números inteiros relativos. As restantes foram descritas e apontadas algumas constatações.

Devido à disponibilidade dos participantes, o curso decorreu no período de tarde com uma duração de 2 horas diárias**.** O material utilizado durante o curso foi basicamente a lousa, giz, apagador e textos de apoio. O curso foi montado com base nos conteúdos que apresentamos a seguir:

Quadro 3 – Conteúdos do curso de formação

Conteúdos
Considerações históricas dos números inteiros relativos.
Os números relativos vistos por diversos ângulos.
Discussão do capítulo sobre números inteiros relativos nos livros didáticos e no Programa de Ensino da Matemática.
Planejamento de aulas.
Avaliação do curso.

Fonte: organizado pelo autor

Dinâmica:

Aos participantes eram distribuídos textos de apoio de cada tema com antecedência de um dia com a restrição do primeiro. Esses textos eram de conteúdos com base nos estudos teóricos.

Em todas as sessões, os participantes eram solicitados a responder duas perguntas diferentes daquelas propostas (Q1 a Q5): 1) O que gostou da leitura do texto e o que gostaria de aprofundar utilizando outros textos; e, 2) O que não gostou da leitura do texto. Explique a sua resposta.

Na primeira questão a nossa intenção era compreender quais as abordagens que cada participante utilizava ao ensinar esse tema e o que realmente ele sabia do tema. Na segunda, pretendíamos coletar dado a respeito do que cada participante não sabia do tema.

Em sala de aula, em grupo de dois a três, os participantes discutiam o texto, anotavam suas ideias e as dúvidas. Na fase seguinte, cada representante do grupo apresentava oralmente as conclusões. Por sua vez, essas eram debatidas e no final juntamente com os participantes fazíamos uma síntese das ideias apresentadas. Essa dinâmica acontecia em todos os encontros.

Durante a formação trabalhamos com os quatro livros didáticos apontados anteriormente. As informações provenientes do estudo dos textos foram utilizadas para o estudo dos livros didáticos. Nesses documentos, o nosso foco era destacar as formas como esse assunto é introduzido nos quatro livros, analisar as tarefas propostas na unidade temática sobre números inteiros relativos e quais os exemplos mais frequentes utilizados para o tratamento do tema. Outro foco do estudo foi comparar as abordagens propostas nos livros didáticos e relacioná-las com as sugestões dos diferentes teóricos a respeito do tema. A partir dessas informações solicitamos que cada grupo elaborasse cinco tarefas que estivessem de acordo com os teóricos estudados. Em seguida as tarefas foram avaliadas em grupos[6] de dois a três e as conclusões anotadas. A discussão das tarefas tinha como foco principal:

- Que capacidades essas tarefas provocam no aluno?
- Quais os possíveis erros que os alunos poderiam cometer em cada uma das tarefas elencadas?
- As tarefas levam o aluno à argumentação, a relacionar, a sintetizar, a solicitar ajuda aos colegas da turma?
- As tarefas solicitam ao aluno o recurso aos conhecimentos anteriores?
- A tarefa admite muitas respostas?
- A linguagem é objetiva?
- A tarefa permite a transferência[7] (construção) de conhecimentos entre as dimensões da reta, abstrata e contexto?

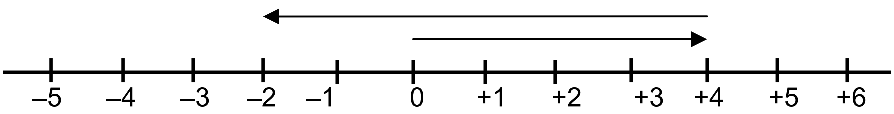
[6] Esses grupos não eram fixos, havia permutação de elementos como forma de permitir que cada um pudesse conversar com os participantes restantes.
[7] Com referência a Bruno (1997).

A partir das tarefas propostas por cada grupo, selecionamos aquelas que contemplavam aspectos que não constavam nos livros didáticos analisados e que apresentavam indícios de que poderiam contribuir para a construção de conhecimento entre as dimensões.

Por exemplo, não foram vistas tarefas do tipo:

1) Construa um contexto do cotidiano que possa ser descrito pela operação (-2) + (+6).

2) Qual é a operação que pode ser representada pelas retas:



Essas tarefas podem levar o aluno a operar, a recorrer aos colegas solicitando ajuda, e, enfim, a questionamentos que podem contribuir para a construção do conhecimento.

No final de cada sessão, eram apresentadas as conclusões. Essa fase visava essencialmente abrir um espaço de discussão para que os participantes apresentassem seus comentários e as propostas para que pudessem constar na ficha de tarefas que seria utilizada pelos professores em sala de aula. Assim, logo no início das aulas do Ensino Secundário geral (segunda quinzena de janeiro, 2013), as tarefas foram aplicadas em quatro turmas da 8ª classe.

Quanto aos procedimentos de análise dos dados proveniente dos professores, esses foram feitos de forma descritiva, acompanhados de alguns depoimentos.

Apresentamos a seguir o quadro síntese do curso de formação dos professores em exercício.

Quadro 4 – Síntese das atividades do curso de formação

Sessões/dia e carga horária	**Sequências de atividades, textos utilizados e justificativa de sua inclusão**		**Objetivos/Dinâmica**
10.12.2012 (2 horas)	Aplicação de um questionário.		Identificar as vias de acesso que os professores utilizam em suas aulas. Identificar o conhecimento prévio sobre o tema. Discussão das respostas apresentadas em grupo.
11.12.2012 a 13.12.2012 (4 horas)	Estudo dos textos teóricos de GLAESER, G. Epistemologia dos números negativos. Boletim do GEPEM, n. 17. p. 29-124, 1985. Escolhemos esse autor porque ele nos fornece algumas informações sobre os obstáculos epistemológicos ligados a origem e evolução dos números inteiros relativos, base para a compreensão do nosso objeto de pesquisa.		Identificar e analisar as vias de acesso ao tratamento dos números inteiros relativos. Estudar as suas implicações para aprendizagem do tema. Leitura prévia dos textos. Discussão em grupo de 2 a 3 professores Síntese das leituras do texto. Apresentação das conclusões parciais.
18.12.2012 a 19.12.2012 (4 horas)	FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an educational task,** D. Reidel, Dordrecht, p. 211-282, 1973. Escolhemos esse autor porque ele contribui com o seu método extrapolatório (funcional) para a multiplicação dos números inteiros relativos e ênfase dada à utilização da reta para o tratamento deste tema. Esses subsídios vão ao encontro do que intencionamos propor e fazer.		Identificar e analisar as vias de acesso ao tratamento dos números inteiros relativos. Estudar as suas implicações para aprendizagem do tema. Leitura prévia dos textos. Discussão em grupo de 2 a 3 professores. Síntese das leituras do texto. Apresentação das conclusões parciais.
12.01.2013 a 13.01.2013 (6 horas)	BRUNO, Alicia. La ensiñanza de los números negativos: aportaciones de uma investigación. Números Revista de didática de las Matemática, n.29, Marzo de 1997. p.5-18.		Identificar vias de acesso ao tratamento dos números inteiros relativos. Estudar as suas implicações para aprendizagem do tema.

	Escolhemos essa autora porque ela nos fornece subsídios fundamentais para a proposição da nossa tese: a multidimensionalidade de conhecimento dos números inteiros relativos. A visão desta autora enquadra ademais pelo fato de defender que o ensino deste tema passa necessária pela criação de condições/situações de aprendizagem que leve à construção de conhecimento entre três dimensões: reta, contexto e abstrato.		Leitura prévia dos textos. Discussão em grupo de 2 a 3 professores. Síntese das leituras do texto. Apresentação das conclusões parciais.
15.01.2013 (2 horas)	BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O ensino e a compreensão de números relativos. In: SCHLIEMANN, Analúcia e CARRAHER, David (Orgs.). A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998, pp. 121-151. A escolha dessa autora justifica-se pelo fato dela admitir a necessidade de contextualizar o conhecimento para possibilitar o entendimento pelo aluno.		Identificar e analisar as vias de acesso aos tratamentos dos números inteiros relativos. Estudar as suas implicações para aprendizagem do tema. Leitura prévia dos textos. Discussão em grupo de 2 a 3 professores. Síntese das leituras do texto. Apresentação das conclusões parciais.
16.01.2013 (1 hora)	Estudo do PEM dos quatro livros didáticos: Saber Matemática, 8ª classe, 2007. Matemática 8ª classe, 2011. Matemática 8ª classe (M8), 2007. Matemática para todos, 8ª classe, 2010. INDE. Estes Livros são importantes para esta pesquisa, visto que os números inteiros relativos vêm retratados nesses documentos. Por ser uma pesquisa didática, é relevante analisar os documentos em uso para observar o que está falhado e o que é de positivo. Esse entendimento é relevante para dar continuidade à pesquisa, acrescentando o que está em falta com vistas à melhoria.		Verificar como o assunto foi introduzido em cada livro didático. Analisar as tarefas propostas na unidade temática sobre números inteiros relativos.
16.01.2013 (1 hora)	Estudo do programa da Matemática (PEM) Programa da Matemática da 8ª classe. MEC/INDE, Maputo, 2010. Este documento foi relevante, pois todas as diretrizes do Ministério		Observar as diretrizes recomendadas para o tratamento do tema, Analisar suas implicações para aprendizagem do tema.

	da Educação sobre o Ensino da Matemática da 8ª classe são apresentadas nesse documento. É importante observar e entender, antes de qualquer movimento de pesquisa, as sugestões apontadas sobre o tema.		
17.01.2013 (30 minutos)	Apresentação das conclusões gerais.		Discussão em grupo. Cada representante do grupo apresentava as sínteses das leituras.
17.01.2013 (1 hora e 30 min.)	Resultado final da formação. Avaliação do curso.		Elaboração de tarefas com base nos livros didáticos e do referencial teórico orientado pelas perspectivas das três dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos. Montagem da aplicação na sala da 8ª classe.

Fonte: organizado pelo autor

Em seguida apresentamos os procedimentos de análise dos livros didáticos e do PEM.

2.3 Procedimentos de Análise dos Livros Didáticos e PEM

Elencamos os livros de Matemática da 8ª classe no período de 2007-2011, por se tratar dos livros atualmente disponíveis, sendo um deles recomendado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) para uso em sala de aula. Todos estão de acordo com o PEM quanto à estruturação das unidades temáticas previstas no currículo, bem como a ordem da sua apresentação. São no total 6 unidades temáticas que compõem o currículo da 8ª classe. Codificamos os livros em L1, L2, L3 e L4, que corresponde a livro 1, livro 2, livro 3 e livro 4, conforme apresentamos no quadro a seguir.

Quadro 5 – Livros analisados e PEM

Código	Nome do Livro	Autores dos Livros
L1	Saber Matemática, 8ª classe. Longman Moçambique, Lda., 1. Edição, 2007.	João Carlos Sapatinha & Dinis Guibundana.
L2	Matemática 8ª classe. Plural Editores, 2011. (Livro recomendado pelo MEC)	Helton Langa & Neto João Nick Chuquela.
L3	Matemática 8ª classe (M8). Diname, 2007.	Raúl Fernando Carvalho & Zeferino Alexandre Martins.
L4	Matemática para todos, 8ª classe. Editora Nacional de Moçambique, 2010.	Ismael Cassamo Nheze, Fabião F. Nhabique & Rafael João.
PEM	Programa da Matemática da 8ª classe. MEC/INDE, Maputo, 2010.	INDE.

Fonte: organizado pelo autor

No PEM buscamos compreender as diretrizes emanadas e identificar as sugestões apontadas para o tratamento do tema. Essa informação foi importante na medida em que nos forneceu subsídios para análise dos livros didáticos e para o planejamento e adaptação das tarefas para sala de aula.

Tendo em conta a nossa questão de pesquisa: que indicadores devem ser considerados em uma proposta de ensino com números inteiros relativos para a educação escolar a ser utilizada na formação de professores em Moçambique? – e, visando estudar tais indicadores, identificamos nove abordagens para o ensino dos números inteiros relativos (A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 e A9) que a literatura aponta como sendo potenciais para o tratamento deste tema.

A nossa caminhada ao longo dos livros didáticos obedeceu dois movimentos: primeiro efetuamos uma análise do capítulo sobre números inteiros relativos de cada livro tendo em conta, portanto, as abordagens neles contidas (A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 e A9), apresentadas no quadro 6 da página a seguir. Desse estudo, fizemos descrições das características encontradas, apontando aquelas que também deveriam estar presentes, tendo como base o referencial teórico utilizado. Por exemplo, o método extrapolatório de Freudenthal, o uso de diagrama de Vergnaud, entre outras características. No segundo movimento, lançamos os nossos olhares para o conteúdo sobre números inteiros relativos de todos os livros, extraindo deles os aspectos comuns e divergentes, buscando uma compreensão do fenômeno em estudo.

Assim sendo, foram etapas desse estudo: exploração dos livros didáticos e levantamentos e sistematização dos conteúdos de acordo com a multidimensionalidade do conhecimento. Em cada livro buscamos relacionar a abordagem sugerida com as três dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos (reta, abstrata e contexto). Esse movimento foi feito por meio de análise da forma como os números inteiros relativos são introduzidos e de análise das tarefas propostas em cada unidade temática. Assim, o nosso foco foi verificar se as tarefas propostas remetem à construção de conhecimento entre as dimensões.

Em suma, nesses livros buscamos uma compreensão de como o conteúdo sobre números inteiros é discutido e quais as abordagens que utilizam para a introdução desse tema.

Dando continuidade, iniciamos a nossa análise dos livros e o PEM a partir das unidades de registros prévias tomadas com base na literatura. Unidade de registro trata-se de uma acepção codificada e obedece ao segmento de conteúdo considerado unidade base, apontando a categorização e a contagem da frequência (BARDIN, 2011, p. 134).

Como dissemos anteriormente, para as abordagens dos números inteiros relativos foram criadas as unidades de registros e codificadas em A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 e A9, conforme o quadro 6. Essas unidades foram criadas a partir da revisão teórica sobre o tema, portanto, *a priori*, são

> teorias escolhidas e explicitadas desde o início da investigação [...]. Quando a opção é por teorias *a priori* estas servirão de base para todas as etapas da pesquisa, especialmente para a interpretação dos dados. As teorias *a priori* correspondem a olhares teóricos trazidos de “Fora” para examinar e interpretar os fenômenos focalizados em uma pesquisa (MORAES; GALIAZZI, 2011, p. 158).

Apresentamos a seguir as unidades de registros adotadas a partir da revisão teórica para essa pesquisa. Alguns desses exemplos foram adaptados dos quatro livros analisados e dos textos especializados sobre o tema.

Quadro 6 – Unidades de registros

Unidades registros	Explicitação da abordagem e exemplificação
A1	Negócios – acomoda as sugestões referentes a compras, perdas e ganhos e as vendas de produtos nos mercados informais pelas populações. (BORBA, 1998; BRUNO, 1997). O Eduardo tinha 15,00Mt no bolso e gastou 7,00Mt na compra de rebouçados. Pediu 10,00Mt à sua mãe para ir ao cinema. Pagou o bilhete com 12,00Mt. Com quanto dinheiro ficou?
A2	A altitude – acomoda situações ou exemplos que focalizam o nível das águas do mar como referência para o tratamento dos números inteiros relativos (BORBA, 1998; BRUNO, 1997). Num dado momento, um pássaro encontra-se a 10 metros de altitude e um peixe está a uma profundidade de 5 metros. Represente essas medidas usando números inteiros relativos; Represente essas medidas na reta numérica; e, Explique qual foi o referencial usado.
A3	Cronologia – acomoda situações que usam o tempo como referência para o ensino dos números inteiros relativos (CARAÇA,2003; BRUNO, 1997) Tomando como origem das datas o ano do seu nascimento. Indique por que números inteiros relativos devem representar as seguintes datas: Ano 2014; Ano 1980; Ano do nascimento do seu pai; e, Ano de nascimento da sua mãe.
A4	A temperatura – acomoda situações sobre temperaturas abaixo e acima de zero como referencial (BORBA, 1998; BRUNO, 1997). A temperatura de certa cidade A é de 15°C acima de zero, e numa outra cidade B é de 15°C abaixo de zero. a) Qual é a cidade mais fria nesse dia? b) Represente essas temperaturas usando números inteiros relativos; c) Represente na reta numérica essas temperaturas.
A5	A reta numérica – acomoda situações que usam a reta numérica para o tratamento dos números inteiros relativos. BORBA, 1998; FREUDENTHAL, 1973; BRUNO, 1997; CARAÇA, 2003). Considere uma reta numérica, assinale nela os pontos cujas abcissas são representadas por: A: -4; B: +4; C: -5; D: 0; E:-1; F: -3; G: 2; H: 1; I: -2, L:3
A6	Acomoda a introdução dos números inteiros via impossibilidade da subtração em N (BORBA, 1998; MARÍ, 1995; BRUNO, 1997). Qual será o resultado de: 5-10; 1-2; 0-4.
A7	Acomoda o uso da História da Matemática (CARAÇA, 2003; GLAESER, 1985; método geométrico de HILBERT & DESCARTES *apud* CYRINO & PASQUINI, 2010). Iremos apresentar exemplos sobre a multiplicação e

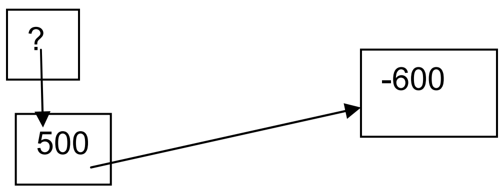
<table>
<tr><td></td><td>divisão dos números inteiros relativos ao longo do desenvolvimento desta pesquisa.</td></tr>
<tr><td>A8</td><td>Acomoda o método extrapolatório de Freudenthal nas operações com números inteiros relativos (FREUDENTHAL, 1973).

Observa as operações abaixo:

<table>
<tr><td>5-5=0</td><td>3+ 3= 6</td><td>3.3=9</td><td>(-3).(+3)=</td></tr>
<tr><td>5-4=1</td><td>3+ 2= 5</td><td>3.2=6</td><td>(-3).(+2)=</td></tr>
<tr><td>5-3=2</td><td>3+ 1= 4</td><td>3.1=3</td><td>(-3).(+1)=</td></tr>
<tr><td>5-2=3</td><td>3+ 0 = 3</td><td>3.0=0</td><td>(-3).(0)=</td></tr>
<tr><td>5-1=4</td><td>3+(-1)=?</td><td>3.(-1)=?</td><td>(-3).(-1)=</td></tr>
<tr><td>5-0=5</td><td>3+ (-2) =?</td><td>3.(-2)=?</td><td>(-3).(-2)=</td></tr>
<tr><td>5-(-1)= ?</td><td>3+(-3) =?</td><td>3.(-3)=?</td><td>(-3).(-3)=</td></tr>
<tr><td>5-(-2)=?</td><td>3+(-4) =?</td><td>3.(-4)=?</td><td>(-3).(-4)=</td></tr>
</table>

Pode continuar a resolver completando a 4ª coluna e,
Descubra as regras de multiplicação a partir da análise das operações neste quadro?
Qual é o resultado de (-250).(-300)?
Qual é o resultado de (-50)÷10?
Qual é o resultado de (-50) ÷(-10)?</td></tr>
<tr><td>A9</td><td>Acomoda o uso de diagrama de Vergnaud para as operações de adição e subtração dos números inteiros relativos (VERGNAUD, 2009; BORBA, 1998).

Ângelo possui uma conta bancária. Ele fez um saque no valor de 500,00 meticais. Agora ficou devendo ao banco 600,00 meticais. Qual era o montante antes do saque?



</td></tr>
</table>

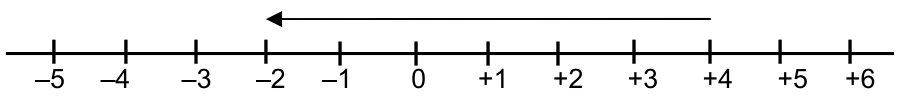
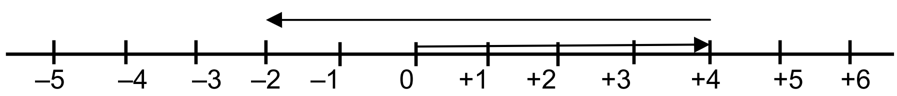
Fonte: organizado pelo autor

Para o estudo das articulações entre tarefas e dimensões de conhecimento nos quatro livros didáticos, consideramos as codificações a seguir: dimensões de contexto (C), de reta (R) e abstrata (A). Assim, criamos as seguintes unidades de registros: CR, CA, RC, AR, RA e AC. Nessas unidades de registros: CR significa que as tarefas articulam a transferência de conhecimento da dimensão de contexto para a reta, AC as tarefas articulam a transferência do abstrato ao contexto, assim por diante.

Depois da análise das tarefas verificamos que havia concentração de tarefas na dimensão abstrata (A). Para acomodarmos esse aspecto criamos a

unidade de registro AA. Neste caso, AA significa que as tarefas articulam a transferência de conhecimento da dimensão abstrata para abstrata. Assim, passamos a ter as seguintes unidades de registros: AA, CR, CA, RC, AR, RA e AC.
A seguir apresentamos exemplos dessas unidades de registros. Algumas dessas tarefas foram adaptadas dos livros analisados.

Quadro 7 – Exemplificação das unidades de registros utilizadas na análise das tarefas

Unidades de registros	**Exemplos de tarefas por cada unidade de registros**
AA	1. Efetue: a) (-15)-(-7) b) (+4)+(-5) c) (-6).(+2) 2. Coloque os sinais > ou < entre os números dos pares seguintes, de forma a obter afirmações verdadeiras: a) (-6)___(-10); b) (+6)____(-12)
CR	Registrou-se as variações da temperatura de uma substância em cinco momentos diferentes. 1º momento 15°C; 2º momento 10°C; 3º momento 0°C; 4º momento -10°C e no 5º momento -15°C. Represente essa variação na reta numérica.
RC	Descreva uma situação que pode ser representada pela seta na reta numérica abaixo: 
AC	Dada a operação: (-6) + (+12)=(+6), construa um contexto da vida real que pode ser interpretada por esta operação.
CA	No meu aniversário, ganhei 1.000 meticais do meu tio, 300 meticais da minha irmã. Dois dias depois, perdi 500 meticais. E precisei de empréstimo de 100 meticais do meu amigo. Como você indicaria isso usando números inteiros relativos?
AR	Efetue as operações usando a reta numérica: (-3) +(-5) d) (+5) +(+2)
RA	Observe a figura abaixo. Escreva a operação correspondente. 

Fonte: organizado pelo autor

Assim, contamos e examinamos todas as tarefas constantes na unidade temática sobre números inteiros relativos de cada livro didático tendo como foco a sua articulação com as dimensões de conhecimento.

Os resultados foram apresentados em quadros comentados contendo as respectivas porcentagens.

2.4 Informações sobre os Professores que Aplicaram a Proposta em Turmas da 8ª Classe

A segunda fase do projeto piloto foi aplicada em quatro turmas do Ensino Secundário Geral com a duração de dois meses. Nessas turmas, cada professor[8] reportava a participação dos alunos nas aulas por meio de tomada de notas nos registros diários que entregavam ao investigador. A entrega era semanal.

Apresentamos a seguir informações dos quatro professores que aplicaram a proposta de ensino em 4 turmas da 8ª classe sobre a sua formação do magistério e tempo de serviço.

O professor P1 é Licenciado em Ensino de Matemática pela Universidade Pedagógica (2009), tem 35 anos de idade e 4 anos de experiência no ensino Primário completo (1ª à 7ª classe) e 5 anos no ESG-1 (8ª à 10ª classe). O Professor P2 é Bacharelado em Ensino de Matemática pela Universidade Pedagógica (2008), tem 29 anos de idade e 6 anos de experiência no ESG-1. Já lecionou várias vezes na 8ª classe. O Professor P3 é Licenciado em Ensino de Matemática pela Universidade Pedagógica (2010), tem 38 anos de idade e 10 anos de experiência no ESG-1. O Professor P4 é Licenciado em Ensino de Matemática pela Universidade Pedagógica (2011), tem 32 anos de idade e 7 anos de experiência no ESG-1. Cada professor tem uma carga horária obrigatória de 24 horas semanais, para a disciplina de Matemática, corresponde a 5 turmas. Uma turma de Matemática na 8ª classe tem uma carga horária de 5 horas semanais. Todos esses professores são efetivos do quadro de funcionários da Educação Pública da República de Moçambique.

Optamos por coletar os dados em quatro turmas (A, B, C e D) da 8ª classe de uma Escola Secundária Geral da cidade de Quelimane. Trata-se de uma instituição pública, que atende alunos da 8ª à 10ª classe em três períodos (manhã, tarde e noite). A Escola recebe estagiários, em todos semestres, de diversos cursos de graduação da Universidade Pedagógica. Todas as turmas funcionavam no

[8] Referimos aos professores que aplicaram a proposta nas turmas da 8ª classe.

período da tarde. Os alunos mostraram-se interessados em aprender, mesmo com a falta de carteiras eles se faziam presentes. A escolha do local e das turmas se deu pelo fato de que os quatro professores (P1, P2, P3, e P4) responsáveis dessas turmas participaram do curso de formação continuada orientado pelo investigador para efeito de aplicação da proposta e, ainda, por ter experiência no ensino, o que facilitaria a aplicação da mesma. Os dados foram coletados nos meses de janeiro a abril de 2013. Apesar de a proposta ter sido aplicada em quatro turmas, o investigador prestou muita atenção na turma A, como forma de aprofundar bem os cenários.Todavia, de vez em quando o investigador acompanhava o desenvolvimento de outras aulas nas restantes turmas por meio de encontros com os professores. Os dados provenientes das turmas B, C e D eram basicamente fornecidos pelos professores dessas turmas por meio das notas tomadas por escrito dos seus registros diários.

2.5 Procedimentos de Análise dos Dados dos Alunos

As produções dos alunos foram constituídas por palavras, expressões e respostas numéricas. Para cada tarefa analisamos: 1) os contextos que foram apontados nas frases construídas; e, 2) para outros casos as respostas foram agrupadas de acordo com a sua natureza (correta ou errada) e seguidas de comentários. Nosso intuito era verificar o efeito das tarefas propostas e que foram elaboradas tendo em conta a ideia de multidimensionalidade de conhecimento dos números inteiros relativos.

No próximo capítulo apresentamos a análise e discussão dos resultados da pesquisa, apontando as conexões entre as práticas construídas por professores moçambicanos ao ensinar números inteiros relativos, e as dificuldades evidenciadas e finalizamos pela apresentação da nova proposta de ensino.

3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

A partir da revisão teórica e da apresentação dos procedimentos metodológicos, procuramos evidências e indicadores que pudessem servir de mote para a elaboração de uma nova proposta para formação de professores.

Este capítulo encontra-se dividido em cinco seções: na primeira apresentamos o resultado do curso aplicado aos professores e as difiuldades evidenciadas; na segunda, a análise do Programa de Ensino da Matemática; na terceira, expomos a análise da unidade temática sobre números inteiros relativos; na quarta, apresentamos análise das tarefas nos quatro livros didáticos da 8ª classe; na quinta, proporcionamos análise dos resultados do estudo com alunos.

3.1 O que nos Informa o Resultado do Curso Aplicado aos Professores

Apresentamos a seguir as respostas de um questionário[9] pelos participantes do curso de formação que antecedeu a experimentação em sala de aula. Esse questionário foi respondido no início do curso.

Optamos por apresentar as respostas de duas perguntas que consideramos nos permitirem fornecer informações a respeito das alternativas metodológicas para o ensino dos números inteiros relativos, que são Q1 e Q5. Apresentamos as outras respostas por meio de descrição apontando as percentagens com que algumas unidades de registros foram assinaladas.

Q1: Escreva o que você sabe sobre os números inteiros relativos.

Q5: Você acha que existe outra maneira mais fácil de ensinar os números inteiros relativos, para além da sugerida no programa e no livro do aluno? Explique a sua resposta.

Na primeira questão, Q1, pretendíamos coletar informações sobre o que realmente aqueles participantes sabiam do tema. Na quinta questão, o nosso objetivo era identificar as vias alternativas que o professor recorre para ensinar os números inteiros relativos. O quadro a seguir evidencia as respostas dos dez professores participantes do curso. Nele incluímos as respostas mais frequentes que surgiram das questões Q1 e Q5.

---

[9] Esse questionário foi respondido no início do curso de formação de professores.

Quadro 8 – Respostas dos inquiridos nas questões Q1 e Q5

Questões	**Respostas dadas pelos professores inquiridos**
Q1	Os números inteiros são constituídos dos números naturais: 0, 1, 2,3,... e dos seus simétricos: 0, -1, -2, -3,... Ou então os números inteiros são constituídos dos números naturais incluindo o zero e todos os números negativos. Para mim, os números inteiros são aqueles que podem ser positivos ou negativos, desde que não sejam decimais nem fracionários. Os números inteiros são números usados na contagem de entes não fracionados, isto é, frações inteiras. Número inteiro é todo aquele que representa uma quantidade, por exemplo, de carros. São expressos sem vírgula.
Q5	Complicado, a ideia de dívida (saldo negativo) é aparentemente melhor para a introdução. No caso de multiplicação e divisão é mais difícil ter alternativas. Existe sim, porque pode-se ensinar os números inteiros negativos partindo de dívidas, como por exemplo: o Sr. Antonio me emprestou uma galinha para aproveitar a raça que tenho, só que havíamos combinado que depois da galinha chocar eu precisaria de 4 pintos, mas após isso a galinha conseguiu apenas 3 pintos, ele não tinha como cumprir o combinado, passou-me primeiro os 3 pintos que tinha, restando um pinto em dívida. Isso é linguagem matemática, posso traduzir da seguinte maneira: 3-4 = -1. E aí explicar que todos os números que se encontram à esquerda do zero são chamados números negativos como o -1 se encontra à esquerda do zero é negativo. De fato, podemos começar com uma história de alguém que empresta uma galinha para posteriormente devolver depois de dar pintos [...]. Como é do conhecimento dos atores do processo de ensino e aprendizagem, o programa e o livro do aluno dão diretrizes de como abordar os números inteiros. Mas por PEA ser dinâmico em dadas circunstâncias podem criar-se mecanismos para ajudar no ensino desses números. Por exemplo, procurando exemplos associados à vida real do aluno.

Fonte: organizado pelo autor

As respostas apresentadas no quadro anterior evidenciam que os inquiridos sentem a necessidade de outras alternativas para abordagem dos números inteiros relativos, por referir que os Processos de Ensino e Aprendizagem são dinâmicos. Porém, suas respostas mostram que não as conhecem ao afirmar que *como é do conhecimento dos atores do processo de ensino e aprendizagem, o programa e o livro do aluno dão diretrizes de como abordar os números inteiros. Mas por PEA ser dinâmico em dadas circunstâncias podem criar-se mecanismos para ajudar no ensino desses números. Por exemplo, procurando exemplos associados à vida real do aluno.*

Os exemplos apresentados revelam ainda que para o sucesso no ensino e na aprendizagem dos números inteiros relativos é necessário o recurso a situações que sejam familiares aos alunos. Por outro lado reconhecem que nem tudo é possível recorrendo a tais situações, por isso fala das dificuldades com as operações da divisão e multiplicação com esses números. Constatamos, a partir dos argumentos desses inquiridos, que a necessidade de uma proposta de ensino que viabiliza tais intenções pode contribuir para o entendimento desse conteúdo matemático.

As respostas dos inquiridos revelam-nos que o tratamento dos números inteiros relativos é feito a partir das sugestões do PEM, associando a exemplos familiares. Eles concebem os números inteiros como a união do conjunto dos números naturais com os números negativos. Ao confrontarmos suas falas com o PEM percebemos que, embora haja essa recomendação, este não apresenta alternativas para justificar as regras das operações da divisão e da multiplicação e, ainda não chama atenção sobre os cuidados a ter quando se estabelece a conexão entre os números inteiros relativos e os contextos sugeridos. Esses dados são apoiados ainda quando constatamos que 40% dos inquiridos mencionam o dinheiro como situação familiar ao aluno que pode ser um potencial para a contextualização desse tema. Reconhecemos o esforço empreendido por aqueles inquiridos e apoiamos que uma proposta adicional sobre o ensino desse tema pode fornecer subsídios para uma compreensão mais ampla sobre o assunto.

Assim, da análise das respostas do questionário (Q1, Q2, Q3, Q4 e Q5) pudemos constatar que 40% dos inquiridos assinalam o uso do dinheiro (débito e créditos), 10% refere o uso do nível médio das águas do mar como referência, 20% lembra o uso da temperatura, 10% aponta o uso do elevador para contextualização e 20% indica o uso de deslocamento (estrada) como analogia da reta numérica. Essas situações são apontadas como sendo propícias para o tratamento com os números inteiros relativos.

As respostas (40%) obtidas sugerem a necessidade de dar prosseguimento na utilização do dinheiro para contextualização sobre os números inteiros relativos. Assim sendo, as respostas dos inquiridos podem revelar a necessidade de potenciarmos mais no estudo deste tema, apresentando uma proposta que contenha igualmente possibilidades diversificadas para a sua abordagem, com destaque para as quatro operações.

Apresentamos a seguir a inserção de algumas tarefas digitalizadas do questionário dos participantes do curso.

1. Escreva o que você sabe sobre os números inteiros.

Os números inteiros são constituídos dos números naturais {0,1,2,3,...} e dos seus simétricos {0,-1,-2,-3,...} ou então os números inteiros são constituídos dos nºs naturais incluindo o zero (0,1,2,...) e todos números negativos.

Esta foi a resposta comum dos participantes da formação. E em relação à pergunta Q5, apresentamos as respostas a seguir.

5. Você acha que existe outra maneira mais facíl de ensinar os números inteiros negativos, para além da sugerida no programa e no livro do aluno? Explica a sua resposta

Como é do conhecimento dos atores do processo de ensino aprendizagem, o programa e o livro do aluno dão diretrizes como abordar os números inteiros. Mas por PEA, ser dinâmico em dadas circunstâncias podem criar-se mecanismos para ajudar no ensino desses números. Por exemplo procurando exemplos associados a vida real.

5. Você acha que existe outra maneira mais facíl de ensinar os números inteiros negativos, para além da sugerida no programa e no livro do aluno? Explica a sua resposta

Complicado, a ideia da dívida (saldo negativo) é aparentemente a melhor para a introdução. No caso das operações de multiplicação e divisão é mais complicado ter alternativas.

O reconhecimento de que a abordagem dos números inteiros é complicada pode ser um indicativo de os participantes enfrentarem dificuldades no tratamento desse tema com os alunos. Notamos uma limitação nas respostas dos inquiridos, sinal que pode denotar uma ausência de alternativas didáticas para o tratamento desse tema. Embora alguns inquiridos tenham referido a situação de dívida para a introdução dos números inteiros relativos, reconhecem as consequências desta ao abordar a multiplicação e divisão.

Os participantes foram unânimes ao afirmar que o MEC deveria organizar cursos como este, pois no entender deles seria mais valia, tendo em conta que constituem um momento de troca de experiências entre colegas. Eles reconhecem a falta de obras para consulta, o que limita a criatividade. Conforme atestam as declarações desse professor: *uma discussão antecipada das matérias é importante, porém, há falta de livros [...]. O que naturalmente poderia ajudar a compreensão deste assunto* [...]. *Por meio de leitura de livros e outros documentos, visto que os livros que temos estão muito resumidos*. *Alguns não trazem quase nada*. Para este professor, *alguns livros não trazem nada* no sentido de que não há riqueza na apresentação dos conteúdos. Portanto, os conteúdos são apresentados de uma forma simplificada e muitas vezes sem relação com o contexto local. Esses depoimentos remetem-nos à necessidade de que os conteúdos dos livros didáticos sobre os números inteiros precisam ser examinados e ampliados quanto às abordagens desse tema.

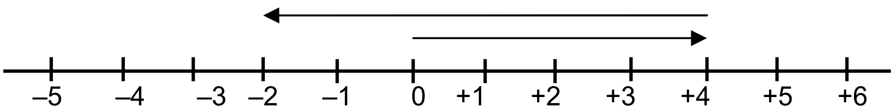
Deste modo, alguns professores apontam o desejo de ver alguma mudança depois da formação que tiveram: *sinto agora que preciso começar a ver os conteúdos a partir de outras perspectivas, recorrendo à internet e outros meios* [...]. Os textos discutidos, agora na posse deles, podem auxiliar nas suas leituras, minimizando a carência de livros especializados: *esses textos vão me ser úteis para preparar as minhas aulas [...]. Ler sobre as dimensões e mais a partir desses textos.* Recorda que *agarrar somente os livros didáticos é muito cansativo porque eles não dizem quase nada. Os conteúdos são muito resumidos. [...] Isso implica que você deve ter outros conhecimentos*. Esses depoimentos indicam a mudança do ensino baseado no livro didático para um ensino que aponta a necessidade de buscar mais situações de aprendizagem recorrendo a outros documentos.

Alguns professores disseram que só se baseavam nas tarefas propostas nos livros didáticos, pois não tinham alternativas, embora cientes das limitações destes, apontando para ocorrência de mudança na visão sobre o tema. *Eu só me baseava nos exercícios do livro [...]. Era só pedir aos alunos para resolver. Agora vejo que tenho que relacionar com outras ideias* [...]. As tarefas referidas na sua maioria são destinadas para a consolidação das matérias. São tarefas que pela sua natureza podem não permitir que o aluno aja, relacione, argumente, manipule ou ainda crie situações como forma de contextualização do conhecimento, dando maior atenção nos processos algorítmicos do que nas reflexões que tais tarefas podem desencadear ao serem discutidas.

Dando continuidade, elaboramos algumas tarefas que depois foram aplicadas na sala de aula com alunos da 8ª classe. O nosso movimento para elaboração destas tarefas foi a partir das falhas e ausências que constatamos nos livros didáticos, por exemplo, não vimos tarefas que pudessem remeter em várias dimensões de conhecimento ou ainda que levassem o aluno à argumentação, a raciocinar, e, enfim, a questionamentos.

Apresentamos a seguir uma parte das tarefas elaboradas com os participantes do curso.

Qual é a operação que pode ser representada pelas setas:



Represente na reta numérica a operação dada por: (-5) + (+6)

Construa um contexto utilizando palavras que podem ser representadas pela seguinte operação: (-5) + 7 = 2

Na tarefa 1 o nosso objetivo era à transição da dimensão da reta para a dimensão abstrata. Esta tarefa visa conduzir o aluno a manipular, pensar, falar, analisar e inferir. Na tarefa 2, pretendíamos induzir ao aluno a construção de conhecimentos da dimensão abstrata para a dimensão da reta, fazendo algumas manipulações (desenhando). Já na tarefa 3, o nosso objetivo é levar o aluno a criar situações da sua autoria (problematizar) que refletem na vida real. Essa autoria pode-lhe conferir um impulso para o questionamento e construção do conhecimento.

Prosseguindo, o aluno ao trabalhar com sucesso nessas tarefas estaria a construir conhecimentos da dimensão abstrata para a dimensão do contexto. Ao mesmo tempo pode compreender que há uma variedade de situações que surge a partir das operações dadas, ou seja, ele também pode ser capaz de criar Matemática.

Dando continuidade, planejamos algumas aulas com as tarefas elaboradas durante a formação, procurando perceber algumas eficácias destas. No início de cada planejamento, cada professor comentava as aulas anteriores, sobre dinâmica no processo de aprendizagem, concretamente, como os alunos encaravam as tarefas, quais as dificuldades encontradas e apontadas pelos alunos.

Apresentamos a seguir o comentário do professor (P2): *"As minhas aulas na 8ª B decorreram num ritmo normal, houve muita participação dos alunos". As aulas foram interativas, os alunos conseguiam relacionar os conteúdos aprendidos com o seu saber adquirido no meio social onde vivem* […]". *Discutiram e resolveram com colegas, apresentando dúvidas.*

Outro professor (P1) comenta*: "Para mim, no início da aula tive algumas dificuldades porque a sala estava superlotada. Mas depois os alunos se organizaram, daí comecei a trabalhar. Como eram duas aulas (90 minutos), tive muito tempo de discursar fazendo com que pelo menos as primeiras aulas da semana não tivessem grande impacto nos alunos e levassem eles a refletir sobre a Matemática no dia após dia* […]". Este professor, adiante, faz uma comparação ao relacionar os alunos dos anos anteriores com os deste ano: *"Os alunos desse ano são muito participativos em relação aos dos anos anteriores*" *(2012 e 2013).* Essa comparação mostra a dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem.

Os depoimentos permitem nos inferir que os professores não absorvem o conhecimento curricular, usam-no para reformular e enriquecer os conteúdos da disciplina que ensinam. Portanto, o curso pode ter servido para provocar mais dúvidas e questionamentos com vistas à organização das tarefas para o aprendizado dos seus alunos.

A mesma posição foi reforçada pelo professor P3, ao argumentar que: *no nosso ensino verificamos que os livros escolares de Matemática da 8ª classe não trazem contextos ligados à vida real do aluno que podem ajudá-los na compreensão dos assuntos tratados. Por isso, vejo que uma articulação das tarefas com três dimensões [...] de conhecimentos está sendo produtiva. A gente ensinava* *somente as regras e nada mais. Agora sim, a gente senta para pensar. Por exemplo, nas minhas aulas sobre adição dos números inteiros relativos, os alunos deram exemplos de amendoim podre, peixe podre, desaparecimento de algo importante na vida, perda de dinheiro, de galinha, ser roubado algo importante etc., como algumas aplicações desses números na vida real.* Esses depoimentos apontam o abandono da concepção do ensino baseado em regras para um ensino que requer uma problematização das situações de aprendizagens. Percebemos deste modo que, embora esses exemplos constituíssem contextos fictícios podem ajudar aos alunos o entendimento da matéria.

Ainda importa referir que das sessões de planejamento das aulas que participamos, percebemos que há imensas dificuldades por parte dos professores em lidar com o Programa da disciplina da Matemática, fato que pode contribuir para o fracasso na adaptação dos métodos do ensino. Por exemplo, os professores se limitam ao preenchimento das fichas que recebem da direção pedagógica, fazendo o vulgo *"copy past*" dos temas e dos objetivos específicos presentes em cada unidade temática, visto que esses já foram previamente estabelecidos pelo Ministério da Educação e Cultura de Moçambique.

Apresentamos a seguir, a título de exemplo, o comentário do professor (P2): *"As minhas aulas na 8ª B decorreram num ritmo normal, houve muita participação dos alunos. As aulas foram interativas, os alunos conseguiam relacionar os conteúdos aprendidos com o seu saber adquirido no meio social onde vivem* […]".

Assim, para esses professores os números inteiros relativos podem ser ensinados com sucesso se houver mais possibilidades de abordagem.

A mesma posição foi reforçada pelo professor P3, ao argumentar que: *no nosso ensino verificamos que os livros escolares de Matemática da 8ª classe não trazem contextos ligados à vida real do aluno que podem ajudá-los na compreensão dos assuntos tratados. Por isso, vejo que uma articulação das tarefas com três dimensões [...] de conhecimento está sendo produtiva. A gente ensinava somente as regras e nada mais. Agora sim, a gente senta para pensar, por exemplo, nas minhas aulas sobre adição dos números inteiros relativos, os alunos deram exemplos de amendoim podre, peixe podre, desaparecimento de algo importante na vida, perda de dinheiro, de galinha, ser roubado algo importante etc., como algumas aplicações desses números na vida real.* Embora esses exemplos sejam fictícios, ajudam os alunos a entender e relacionar a matéria.

A análise dos dados sobre professores evidenciou-nos as seguintes dificuldades: a limitação dos exemplos sobre abordagem do tema, o desconhecimento de outras vias de acesso aos números inteiros relativos, levando--nos a inferir a insuficiência de alternativas para o tratamento do tema, ausência de conhecimento sólido para a justificação das regras de sinais, a tendência de atribuir o sinal menos a perda/dívida; o positivo ao ganho/crédito.

Diante destes constrangimentos, uma forma de minimizar a carência de livros e criar oportunidades para discussão do tema poderia ser apresentação de uma proposta de ensino que atenda as diversidades de abordagens do tema.

3.2 Análise do Programa de Ensino da Matemática da 8ª Classe

A função da escola é preparar os alunos de modo a torná-los cidadãos ativos e responsáveis na família, no meio em que vivem (cidade, aldeia, bairro, comunidade) ou no trabalho. Para atingir este objetivo, o professor necessitará colocar desafios aos seus alunos, envolvendo-os em tarefas ou projetos, colocando problemas reais e complexos. A preparação do aluno para a vida passa por uma formação em que o ensino e as matérias lecionadas tenham sentido para a vida do aluno e possam ser aplicados a circunstâncias reais (INDE, 2010, p. 6).

Assim, o PEM (2010) recomenda ao professor que mostre ao aluno a necessidade do aparecimento de um determinado domínio numérico a partir de uma problematização envolvendo a impossibilidade da subtração em N.

> Para isso, sugerimos ao professor que apresente situações problemáticas em que o aluno não consiga obter a solução no domínio em que esteja a trabalhar. Os problemas devem refletir a vida quotidiana dos alunos (INDE, 2010, p. 22).

O PEM igualmente sugere como exemplos para abordagem dos números inteiros relativos situações cotidianas para que o aprendizado possa fazer sentido para os alunos:

> O caso da venda de mercadorias pode resultar em lucro ou prejuízo. O caso da altitude de um determinado lugar (acima ou abaixo do nível médio das águas do mar). O tempo (antes e depois de Cristo ou, antes e depois da independência). A temperatura (negativa ou positiva) (INDE, 2010, p. 20).

Assim, compreendemos que há um esforço no sentido de que sejam diversificados os contextos para o tratamento dos números inteiros relativos.

Reforça ao mesmo tempo os exemplos acima, associando um caso concreto da aplicação das sugestões apresentadas:

> [...] no inverno é normal através dos órgãos de informação ouvir que a temperatura da cidade de Maputo é de 21 graus acima de zero, a de Johanesburgo é de zero grau, a de Paris é de 6 graus abaixo de zero, a de Durban é de 6 graus acima de zero. Como se pode ver, o registro das temperaturas é feito em relação a zero grau, para cima de zero grau, ou para baixo de zero grau (INDE, 2010, p. 26).

Contudo, o PEM não faz referência às limitações da utilização desses contextos na sala de aula. Por exemplo, a introdução dos números inteiros relativos a partir de uma escala de temperatura, extratos bancários, permite ensinar adição, mas constituem um obstáculo para o uso corrente da regra de sinais para a multiplicação.

Quanto às operações aritméticas com os números inteiros relativos, o PEM sugere que a sua introdução seja iniciada obedecendo à sequência: adição, subtração, multiplicação e divisão. Porém, essa sequência pode funcionar perfeitamente para operações no conjunto dos números naturais. Por exemplo, a operação a-(-b), apesar de envolver a subtração, só será compreendida pelos alunos depois da multiplicação, visto que abarca a utilização da regra dos sinais da multiplicação. Portanto, a sequência de tratamento das operações com números inteiros relativos sofre uma mudança, ou seja, passaria a ser: adição, multiplicação, divisão e subtração. Só depois da multiplicação é que a subtração pode ser abordada (MORETTI, 2012).

O PEM toma o exemplo apresentado no quadro 9 para a introdução da ordem dos números inteiros. E sugere que os dados do quadro sejam visualizados na reta numérica para facilitar a comparação pelos alunos. Entendemos que há uma intenção de levar o aluno à construção de conhecimento da dimensão do contexto para a dimensão da reta. Porém, constatamos que o contrário não é sugerido, ou seja, da dimensão da reta à dimensão de contexto.

Quadro 9 – Saldos em milhares de meticais em função do tempo

Anos	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Saldos em milhares de meticais	-5	-2	0	3	7	1

Fonte: INDE, 2010, p. 22.

Encontramos também outro exemplo inerente aos saldos bancários. Desta vez, compreendemos que o programa pretende levar o aluno a consolidar a relação de ordem dos números inteiros relativos. E ainda aproveita este exemplo para mostrar aos alunos o papel do banco e as diversas tarefas que o mesmo desenvolve, procurando situar as aplicações da Matemática na vida real do aluno, o que é fundamental para o ensino, pois essa intenção vem sendo defendida por vários autores como: Borba, 1998; Bruno, 1997; Vergnaud, 2009; Carraher, 1990; Freudenthal, 1983, entre outros.

Quadro 10 – Saldos bancários em milhões de meticais

Bancos	A	B	C	D	E
Saldos	-5	-1	3	0	5

Fonte: INDE, 2010, p. 23.

Com relação às tarefas são apresentados nove itens para o aluno. Porém, nos interessam somente duas porque as demais eram bem compreensíveis.

a. Qual é o banco com maior prejuízo?
b. Qual é o banco com menor prejuízo?

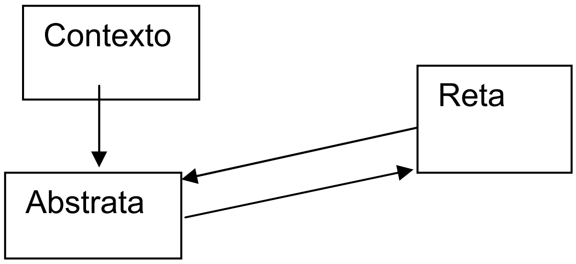
O INDE (2010, p. 22) propõe essa tarefa com vistas a conduzir o aluno à compreensão das relações de ordem dos números inteiros relativos. Todavia, ao questionar “qual é o banco com maior prejuízo?”, subentendemos que o banco A apresenta de fato maior prejuízo, pois tem maior “negatividade”. Assim, essa tarefa merece uma discussão com alunos para evitar a confusão quando abordarmos a comparação dos números inteiros relativos. Ainda, da questão b entendemos que ela pode ser utilizada para identificar o banco com menor prejuízo, ou seja, com menor negatividade. Associando as duas questões em análise, podemos inferir que elas merecem um tratamento especial para os alunos, pois entendemos que se não forem devidamente discutidas antes da sua aplicação na sala de aula podem provocar confusão nos alunos ao tentar utilizar os sinais de comparação. Deste modo, podemos compreender que essa situação carece de discussão intensa, pois uma tarefa para aprendizagem deve ser analisada com atenção antes da sua aplicação quanto aos efeitos que podem resultar.

O PEM não faz menção aos obstáculos à aprendizagem dos números inteiros relativos. Por se tratar de um documento orientador percebemos que poderia trazer alguns exemplos de obstáculos didáticos e epistemológicos para que fossem apresentados e discutidos com os professores. Assim, o reconhecimento desses obstáculos pelo professor pode ajudar a rever as suas escolhas metodológicas para abordagem desse conteúdo matemático.

Quanto à abordagem histórica do tema, o programa igualmente não indica o caminho a ser seguido com vistas à discussão do desenvolvimento histórico do tema, embora mencione a necessidade do seu uso em sala de aula. Entendemos que essa discussão poderia provocar reflexões conducentes à mudança da configuração sobre o tratamento do tema. Ademais, tais reflexões podem antever aos professores as consequências quando da abordagem do tema em sala de aula.

No PEM constatamos a presença das três dimensões de conhecimento, nomeadamente a de abstrata, da reta e do contexto. Porém, não há suficiência de informações que permite a construção de conhecimento entre elas.
Os exemplos e as sugestões apresentados no PEM nos levam ao entendimento de que podem ocorrer construções de conhecimentos no sentido apontado na figura a seguir.

Figura 8 – Síntese das transferências de conhecimentos entre as dimensões de conhecimentos no PEM



Fonte: organizado pelo autor

Posto isso, apresentamos na seção a seguir a forma como são tratados os números inteiros relativos nos quatro livros analisados, verificando se são cumpridas as recomendações emanadas no PEM e quais as abordagens mais utilizadas.

3.3 Análise da Unidade Temática sobre Números Inteiros Relativos nos Quatro Livros Didáticos da 8ª Classe

Como dissemos no capítulo anterior, os livros foram codificados em L1, L2, L3 e L4. Os conteúdos foram analisados partir das codificações e unidades de registros: A1 – negócios – acomoda as sugestões referentes a compras, perdas e ganhos e as vendas de produtos nos mercados informais pelas populações. A2 – a altitude – acomoda situações ou exemplos que focalizam o nível das águas do mar como referência para o tratamento dos números inteiros relativos. A3 – cronologia – acomoda situações que usam o tempo como referência para o ensino dos números inteiros relativos. A4 – temperatura – acomoda situações sobre temperaturas abaixo e acima do zero como referencial. A5 – a reta graduada – acomoda situações que usam a reta graduada para o tratamento dos números inteiros relativos. A6 – acomoda a introdução dos números inteiros via impossibilidade da subtração em N. A7 – acomoda o uso da História da Matemática. A8 – acomoda do método extrapolatório do Freudenthal nas operações com números inteiros relativos. E A9 – acomoda o uso de diagrama de Vergnaud para as operações de adição e subtração dos números inteiros relativos. Os dados estão apresentados em quadros e por meio de uma descrição. A seguir passamos a descrever os resultados parciais.

No L1 os números inteiros relativos são introduzidos por meio da impossibilidade da subtração em IN, isto é, de situações problemáticas em que o aluno não consegue obter resposta no domínio em que se encontrar a trabalhar. Por exemplo, calcule o valor de 2+(-3). A seguir utiliza exemplos envolvendo temperaturas, comércio e altitude. Porém, nas tarefas propostas essas situações não são aprofundadas, limitando-se a apresentar listas de tarefas descontextualizadas.

Como dissemos no parágrafo anterior, ao longo do desenvolvimento dos conteúdos é utilizada a ideia de comércio (A1). Nesse momento são empregadas as designações de lucro e prejuízo, ganho e perda. Também é usada a ideia de altitude (acima ou abaixo do nível médio das águas do mar) (A2). Mais tarde, também aparece a ideia de temperaturas (negativa e positiva) (A4). Portanto, encontramos as categorias: A1, A2, A4, A5 e A6. Embora estas categorias estejam presentes neste livro, elas são apresentadas de uma maneira breve, isto é, simplificada.

Esse livro não contém tarefas em que o aluno é solicitado a criar um contexto. Não surgem tarefas envolvendo reta numérica em que se pede para o aluno construir operações a partir de um resultado apresentado numa reta. A reta é utilizada para mostrar a união dos conjuntos dos números inteiros relativos com o dos números naturais (A5). Nesse caso é utilizada a reta numerada para visualização da posição relativa de cada número comparando com a origem (zero). Muito cedo ela é abandonada. Por exemplo:

> *Considere um eixo orientado positivamente da esquerda para a direita e em que se escolhe o ponto 0 para origem das abcissas. Tomando, então, para unidade 1cm: a) marca os pontos de abcissas (-3) e (+4); b) assinala em vermelho a região do eixo onde se situam os pontos com abcissas superiores a (+4); c) assinala em azul a região do eixo onde se situam os pontos com abcissas inferiores a (-3); d) assinala todos os pontos cujas abcissas são números inteiros compreendidos entre (-3) e (+4)* (SAPATINHA; GUIBUNDANA, 2008, p. 7).

São abordados os subconjuntos do conjunto dos números inteiros relativos; números simétricos, módulo de um número inteiro, as operações da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, bem como as suas propriedades. O tratamento das quatro operações é feito seguindo a ordem: adição; subtração, multiplicação e divisão.

Por exemplo, neste livro aparece o seguinte*:*

> *seja (-4).(-3). Já sabemos calcular (-4)(+3). Adicionando os dois fatores: (-4).(-3)+(-4).(+3)= 0, porque os números (-4).(-3) e (-4).(+3) são simétricos. Como já sabemos que (-4).(+3) =, então (+4)(-3)=(+12).Conclusão: o produto de dois negativos é um número positivo cujo valor absoluto é o produto dos valores absolutos dos fatores.* (SAPATINHA; GUIBUNDANA, 2008, p. 27).

A justificação das regras de sinais é feita com base na regra usual, conforme o quadro a seguir.

Quadro 11 – Regras de sinais da Multiplicação no L1

X	+	-
+	+	-
-	-	+

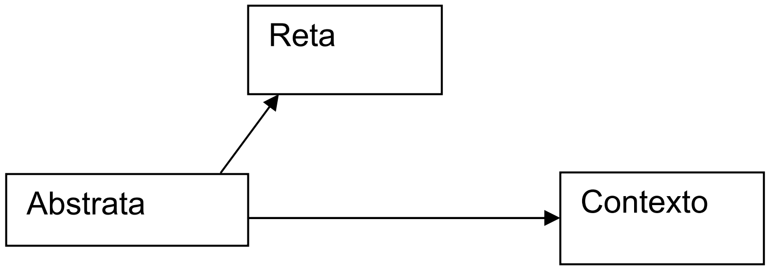
Fonte: Sapatinha e Guibundana (2008, p. 28)

Neste livro não há explicação sobre a regra dos sinais. Possivelmente as discussões podem acorrer em aula. Elas são impostas ao aluno, pois não há um desenvolvimento que pode ajudar-lhe a entender a constituição dessas regras.

A A8 não aparece nesse livro, ou seja, o método extrapolatório de Freudenthal (1973) para as operações nos números relativos. Também constatamos ausência de A9, a utilização do diagrama de Vergnaud.

Apesar do Programa de Matemática enfatizar o uso da História da Matemática (A7), nesse livro não encontramos indicativos da sua utilização quer por meio das tarefas apresentadas quer por meio da abordagem introdutória do tema. Assim, com base nas informações obtidas da análise deste livro, a transferência de conhecimento entre as dimensões parece ocorrer no sentido indicado na figura abaixo.

Figura 9 – Transferência de conhecimento no L1



Fonte: organizado pelo autor

A linguagem empregada no tratamento do tema é prática, clara, apropriada ao nível da escolaridade dos alunos[10] e articula linguagem formal com a linguagem matemática de um modo simples.

Todavia, pela maneira como os conteúdos são expostos, vemos que não obedece a ideia de multidimensionalidade, no sentido de que pode não ocorrer articulação entre as três dimensões quer por meio das abordagens introdutórias quer por meio das tarefas sugeridas ao longo do desenvolvimento do tema. As referências a A1, A2, A4, A5 e A6 são muito abreviadas, o que pode não contribuir para a compreensão do tema pelos alunos, isto é, constatamos uma forma simplificada de abordagem dos conteúdos nessa unidade temática.

No L2 os números inteiros relativos são introduzidos via impossibilidade da subtração em N, tomando como ponto de partida: qual será o resultado de 5-6 =? (LANGA; CHUQUELA, 2011, p. 10), isto é, são introduzidos via abstrata (A6). Numa fase posterior usa a temperatura (A4), tempo (A3) e nível médio das águas do mar (A2). A reta é usada para indicar a origem (zero) (A5), mostrando a união do conjunto dos números inteiros relativos com os números naturais, não são feitas as distinções entre o zero absoluto e zero como origem. Muito cedo a reta é abandonada. São utilizadas as regras de sinais[11] para justificar a multiplicação de dois números negativos, depois de ter tomado o número negativo como dívida (A1). As regras são apresentadas aos alunos e depois aplicadas em tarefas concretas. Elas são apresentadas nesse livro sem exemplos suficientes para que os alunos possam estudar e discuti-las antes da sua generalização. Notamos ausência de

[10] Alunos de 12 a 13 anos de idade.
[11] Baseadas em jogo de sinais.

espaço para discussões destas regras. As quatro operações são abordadas na ordem: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Para a introdução das operações da multiplicação e divisão são sugeridas as seguintes tarefas: recorda que 3x4= 4+4+4; (+2).(-3)= (-3)+(-3) (LANGA; CHUQUELA, 2011, p. 22). Já para a divisão, aparece somente um esclarecimento do tipo “a divisão é a operação inversa da multiplicação, como tal, as regras dos sinais são as mesmas” (p. 25). A seguir são apresentadas tarefas sobre a operação da divisão. Assim, podemos perceber que a multiplicação é concebida como adição de parcelas iguais. E no caso da multiplicação de dois números inteiros negativos, essa regra já não funciona.

Desse modo, vemos que são utilizadas situações que contemplam as unidades de registros A1, A2, A3, A4, A5 e A6, de uma maneira simplificada. São abordados os subconjuntos do conjunto dos inteiros; números simétricos, módulo de um número inteiro, as operações da adição, subtração, multiplicação, divisão, bem como suas propriedades. A multiplicação é tratada juntamente com a divisão. Como dissemos anteriormente, as regras de sinais somente são apresentadas ao aluno sem qualquer discussão como forma de problematizá-las e justificar as operações decorrentes. Elas são apresentadas de modo que o aluno possa memorizar, conforme o quadro a seguir.

Quadro 12 – Regras de sinais da multiplicação no L2

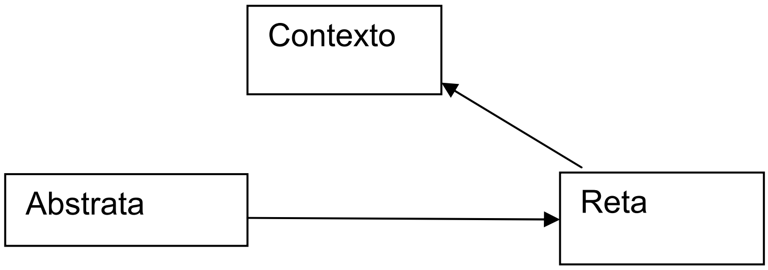
X	+	-
+	+	-
-	-	+

Fonte: Langa e Chuquela (2011, p. 22)

A linguagem empregada no tratamento do tema é prática, clara, apropriada ao nível da idade dos alunos e pouca articulação da linguagem formal com a linguagem matemática de um modo simples. O desenvolvimento do tema é caracterizado pela presença de muitas tarefas sem teorias e exemplos que reflete na vida cotidiana do aluno. Da página 17 a 26 deste livro, encontramos tarefas do tipo calcule; efetue ou determine. Por exemplo: efetue a) 5-4 +3-7; b) 7-(-2)-4 (LANGA;

CHUQUELA, 2011, p. 21). A transferência de conhecimento dentro das dimensões aponta para um único sentido, conforme mostra a figura seguinte.

Figura 10 – Transferência de conhecimento no L2



Fonte: organizado pelo autor

Da análise que efetuamos, compreendemos que tanto no L1 quanto no L2, os autores não utilizam devidamente a ideia de multidimensionalidade de conhecimento dos números inteiros relativos. Constatamos igualmente que o método extrapolatório de Freudenthal (A8), a história dos números inteiros relativos (A7) bem como o diagrama de Vergnaud, não são utilizados (A9). Constatamos ainda a incompatibilidade do tempo da introdução por necessidades de adaptação e as justificações aceitáveis dos conceitos e procedimentos correspondentes quanto às operações da multiplicação e divisão, pois não há espaço para discussões das regras antes da sua generalização. Os exemplos que constam são simplificados, o que nos leva a perceber que o aluno é atribuído às regras para sua memorização com vistas à sua utilização posterior.

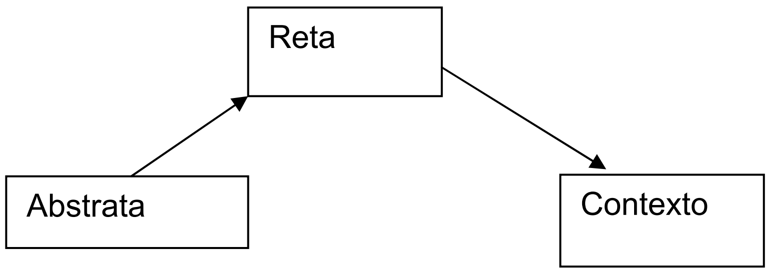
No L3 também é utilizada a impossibilidade da subtração em $\mathbb{N}$ para introdução dos números inteiros relativos (A6). A reta numérica é usada para diferenciar os novos números dos antigos (A5). Ela é utilizada para mostrar a união do conjunto dos números inteiros relativos com o dos números naturais. Mais tarde, ela é usada para as operações da adição e da subtração. Por exemplo, para resolver a tarefa 2-(-3), são feitos alguns cálculos intermediários, como 2-(-3)=2+3 e, em seguida, a operação é representada na reta numérica. Todavia, há pouco destaque no uso de tarefas que envolvem a utilização da reta numérica. As quatro operações aritméticas dos números inteiros são tratadas na seguinte ordem: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Ao longo do desenvolvimento dos conteúdos são introduzidos os conceitos de débito e crédito (A1), bem como o da temperatura *negativa* e positiva nas tarefas expostas nesse livro (A4). Nesse momento, os números inteiros negativos e os positivos são rotulados. Há maior evidência na utilização de A6 e pouco destaque nas unidades de registros A1 e A5. As expressões numéricas são descontextualizadas em toda a unidade temática (A6). A tradução de enunciados da linguagem natural para a linguagem matemática raramente ocorre. São usadas as regras de sinais para justificar a multiplicação de dois números negativos (A6). A linguagem é objetiva e adequada ao nível de escolaridade dos alunos. Os exemplos são muito formais, apesar do uso de situações envolvendo negócios.

Nesse livro também não aparecem situações envolvendo a história da Matemática (A7), embora seja importante e que o PEM enfatize esse uso. O método extrapolatório do Freudenthal (A8) e o diagrama de Vergnaud (A9) também não são referenciados.

Pela forma como os conteúdos são abordados, podemos inferir que as transferências de conhecimento entre as dimensões nesse livro podem ocorrer, conforme mostra a figura seguinte.

Figura 11 – Transferência de conhecimentos no L3



Fonte: organizado pelo autor

Portanto, nesse livro aparece A1, A4, A5 e A6 e as três dimensões de conhecimento não são articuladas.

No L4 os números inteiros relativos são introduzidos a partir de referências às temperaturas (A4). Em seguida apresenta o conceito de saldos bancários, lucro e prejuízo (A1). Depois é usada a reta para indicação das direções para esquerda e para direita tomando o zero como origem (A5), mostrando que a reta é usada para apontar a união do conjunto dos números inteiros relativos com o dos números naturais. Mais tarde são abordadas as operações da adição e subtração usando a reta e em seguida sem o uso desta. Nas tarefas propostas nessa unidade, encontramos exemplos que referem à temperatura (negativa e positiva) (A4) para reforçar a ideia de saldos bancários. As quatro operações da aritmética são tratadas na sequência: adição, subtração, multiplicação e divisão.

A multiplicação é introduzida, começando por verificar que as propriedades desta no conjunto dos números naturais se mantêm na multiplicação dos números inteiros relativos. Em seguida relembra que 3.7=7+7+7=21. Então, qual será o valor de 3.(-7)? Explica que 3.(-7)=(-7)+(-7)+(-7)=-21. Conclui que 3.(-7)=-(3.7)= -21.

Dando continuidade, aproveita a ideia anterior para esclarecer a multiplicação de dois números negativos e questiona: qual será o valor de(-3).(-5)? E explica que (-3).(-5)=-[3.(-5)]=-(-21)=+21. Deste modo conclui que:

> o valor absoluto do produto de dois números é igual ao produto dos valores absolutos dos fatores. O sinal do produto de dois números com o mesmo sinal é positivo. O sinal do produto de dois números com sinais contrários é negativo (NHEZE; NHABIQUE; JOÃO, 2010, p. 23).

As operações sobre a multiplicação são justificadas na base das regras de sinais que a seguir apresentamos:

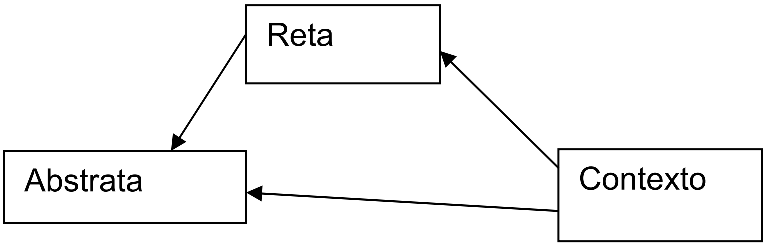
Quadro 13 – Regras de sinais da multiplicação no L4

-	X	-	=	+
-	X	+	=	-
+	X	-	=	-
+	X	+	=	+

Fonte: Nheze, Nhabique e João (2010, p. 23)

A linguagem é clara, objetiva e adequada ao nível de escolaridade dos alunos. A transferência de conhecimento entre as dimensões dos números inteiros pode ocorrer no sentido indicado na figura seguinte.

Figura 12 – Transferência de conhecimento no L4



Fonte: organizado pelo autor

Nesse livro não encontramos indicações do uso do método extrapolatório de Freudenthal (A8), do diagrama de Vergnaud (A9), bem como a história dos números inteiros relativos (A7). Portanto, são utilizadas as unidades de registros A1, A2, A4, A5 e A6.

Da análise dos quatro livros concluímos que a abordagem dos números inteiros relativos é feita, sobretudo, do abstrato ao abstrato. Portanto, a aprendizagem desse tema pode ocorrer dentro de uma dimensão, podendo resultar na percepção da matemática como uma disciplina que não depende de outras e sem utilidade prática.

Ao analisar os quatro livros didáticos (L1, L2, L3 e L4), constatamos que há incompatibilidade do tempo da introdução dos conceitos e procedimentos correspondentes às quatro operações dos números inteiros relativos; as operações dos números inteiros relativos são generalizadas antes que os alunos resolvam tarefas suficientes, pois os exemplos apresentados são muito limitados; o número negativo é rotulado como sendo dívida e o positivo como crédito (com predominância nesses exemplos). Isso cria uma imagem confusa ao aluno, pois esses entes podem ser interpretados de diferentes maneiras; os conteúdos são muito simplificados e, a maior atenção prestada aos processos algorítmicos (regras) com uma generalização antecipada. Constatamos igualmente que os livros decretam as regras sobre operações com números inteiros relativos, pois essas não são justificadas.

Geralmente os livros didáticos de Matemática são produzidos com base das diretrizes emanadas no Programa do Ensino de Matemática (PEM). Apesar disso, verificamos que as recomendações não são satisfeitas. Averiguamos também que há poucas alternativas para o tratamento dos números inteiros relativos nesses livros, conforme sugerido no PEM.

Apresentamos a seguir uma análise das tarefas nos quatro livros escolhidos. O nosso objetivo consistiu em verificar a presença das três dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos (reta, contexto e abstrata) e suas articulações nas tarefas propostas.

3.4 Análise das Tarefas Propostas nos Quatro Livros Didáticos da 8ª Classe

Como dissemos anteriormente, nas tarefas verificávamos as articulações com as três dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos. Analisamos 559 tarefas nas unidades sobre números inteiros nos quatro livros didáticos.

Apresentamos a seguir, a título de exemplo, algumas tarefas que podem induzir transferências entre dimensões de conhecimento dos números inteiros relativos nos quatro livros.

Tarefa 1 (AA):

Calcule: a) (+10) + (+20) b) (-50) + (-60).

Tarefa 2 (CA):

Tenho 20 mil meticais e devo 10 mil. Escreve esses números utilizando números inteiros relativos.

Utilize os números inteiros para representar as seguintes situações: lucro de 12 contos; prejuízo de 5 contos.

Tarefa 3 (CR):

Desenhe e indique num termômetro as seguintes temperaturas:

10°C; -10°C; 25°C; -15°C.

Utilize a reta para representar a seguinte situação: A temperatura de certa região pela manhã era de 7°C abaixo de zero. E ao meio-dia era de 10°C acima do zero.

Tarefa 4 (AR)

Calcule com ajuda da reta numérica: a) (+8) +(– 6)   b) (+1) +(– 8)

Assim, do estudo sobre os números inteiros relativos, constatamos que os Livros L1; L2; L3 e L4 possuem respectivamente 151; 90; 225 e 93 tarefas, conforme mostra o quadro 14. No L1, 108 das tarefas remetem a transferência de conhecimentos da dimensão abstrata ao abstrato, 29 remetem a transferência de conhecimentos da dimensão abstrata à da reta; 13 a transferência de conhecimentos da dimensão abstrata ao contexto, apenas 1 remete do contexto ao abstrato. No L2, 75; 12 e 3 remetem respectivamente transferência de conhecimentos da dimensão do abstrato para o abstrato, do abstrato ao contexto e, do contexto ao reta. No L3 constatamos que 210, 13 e 2 das tarefas remetem respectivamente a transferência de dimensão abstrata ao abstrato, do abstrato à reta e do contexto ao reta. Já no L4 verificamos que75 das tarefas recaem do abstrato ao abstrato, 6 do contexto à reta, 5 do contexto ao abstrato e 7 de reta ao abstrato.

No quadro a seguir apresentamos a síntese desses resultados, nele os números referem à quantidade de tarefas para cada dimensão. A primeira letra indica o começo e a segunda o fim da trajetória nas transferências de conhecimentos, conforme explicitamos anteriormente.

Quadro 14 – Transferências de conhecimento entre as dimensões da reta, do contexto e do abstrato nas tarefas analisadas.

Livros	**AA**	**AR**	**AC**	**CR**	**CA**	**RA**	**RC**
L1	108	29	13	0	1	0	0
L2	75	0	12	3	0	0	0
L3	210	13	0	0	0	0	2
L4	75	0	0	6	5	7	0

Fonte: organizado pelo autor

Da análise do quadro anterior, pudemos verificar a concentração dos elementos AA na primeira coluna, isso significa que há maior ênfase na transferência de conhecimento dentro da mesma dimensão abstrata. Essa concentração de tarefas pode ser o motivo da não compreensão dessa temática pelos alunos da 8ª classe. Isso pode ser evidenciado pelas concentrações nas casas L1AA (108), L2AA (75), L3AA (210) e L4AA (75). Igualmente pudemos constatar que há ênfase em L1AR (29), L1AC (13), L2AC (12), L3AR (13). As transferências se concentram na primeira coluna do quadro. Assim, por meio dos dados das colunas AR e CR podemos compreender que a ênfase no uso da reta é restringida. Verificamos que ela é usada somente para mostrar a união dos números inteiros relativos com os naturais separando-os por meio do zero.

Os dados do quadro anterior assinalam que as três dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos estão presentes nos quatro livros analisados, porém, não há articulação com as tarefas propostas. Essa afirmação pode ser sustentada pelo fato de que os quatro livros analisados não apresentam tarefas que remetem ao mesmo tempo às transferências RA e RC. Assim, entendemos as consequências disso, quando Bruno (1997) fala da necessidade de transferência de conhecimentos entre as dimensões da reta, do contexto e do abstrato.

Da análise dos livros didáticos, constatamos que a maneira como os números inteiros relativos são apresentados pode não permitir a construção de conhecimentos entre as dimensões da reta, de contexto e abstrata, de modo que o ciclo seja completado. Essas dimensões constam nos livros analisados, porém, são tratadas de maneira isolada, o que pode não facilitar o aprendizado. A nossa constatação coloca em causa as pretensões do INDE (2010), pois no final desta unidade o aluno:

> [...] aplica os diferentes significados dos números naturais, inteiros, racionais e das operações para resolver problemas em contextos sociais, matemáticos ou outras áreas do conhecimento. Resolve situações-problema por meio da interpretação das operações numéricas. Analisa a resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais [...] (INDE, 2010, p. 29--30).

Sendo que, a ideia de multidimensionalidade pode contribuir para o entendimento dos números inteiros relativos, uma vez que está atrelada na condição de que as tarefas elaboradas devem possibilitar que o aluno percorra as três dimensões de conhecimentos. Essa trajetória pode levá-lo à compreensão de vários vínculos do conteúdo estudado com a sua realidade.

Apresentamos a seguir o quadro síntese das unidades de registros nos quatro livros didáticos analisados.

Quadro 15 – Unidades de Registros nos livros didáticos analisados

Unidades de registros	**Presentes nos livros didáticos**	**%**
A1 – Negócios	L1; L2; L3; L4	100
A2 – A altitude	L1; L2; L4	75
A3 – Cronologia	L1; L2	50
A4 – A temperatura	L1; L2; L3; L4	100
A5 – Reta graduada	L1; L2; L3; L4	100
A6 – Impossibilidade da subtração em N	L1; L2; L3; L4	100
A7 – Uso da História da Matemática	______	0
A8 – Método extrapolatório do Freudenthal	______	0
A9 – Uso de diagrama de Vergnaud	______	0

Fonte: organizado pelo autor

A partir da leitura do quadro anterior podemos constatar que são poucas alternativas que constam nos livros analisados sobre os números inteiros relativos.

A maior frequência de A6 pode ser compreendida quando Freudenthal (1973) argumenta que os números inteiros devem ser tratados de forma abstrata, pois a noção do número negativo não surgiu de situações do cotidiano envolvendo magnitudes dirigidas, mas dentro da própria Matemática. Esse conceito passou por muitas controvérsias, só mais tarde é que foi reconhecido e aceito como número por razões puramente matemáticas. Pudemos observar igualmente que A1 aparece em 100% dos livros analisados. Essa frequência pode ser o indicativo de que é significativo para abordagem dos números inteiros relativos no contexto educacional moçambicano. A menor frequência registrada em relação a A3 (50%) pode denotar o desconhecimento da utilização desses aspectos para o tratamento do tema. A maior frequência registrada em relação a A3 evidencia que os autores dos livros didáticos não relacionam a Matemática com outras disciplinas, visto que o conceito de cronologia é largamente utilizado na disciplina da História desde a 4ª classe do Ensino Primário, sendo que essa informação pôde servir de âncora para abordagem desse tema. Pudemos constatar igualmente que a A7, A8 e A9 não surgem em todos os livros analisados (100% dos livros). Essa ausência pode nos relevar que os autores dos livros didáticos não conhecem a história do desenvolvimento dos números inteiros relativos ou não a incluem por outras razões.

Como assinalamos anteriormente, essa ausência pode manifestar a insuficiência ou dificuldade da utilização desses subsídios no tratamento dos números inteiros relativos. As maiores frequências registradas em A1, A4, A5 e A6

(100% dos livros analisados) mostram que é expressivo introduzir os números inteiros relativos utilizando essas unidades de registros. Todavia, o fato de A1, A4, A5 e A6 se encontrarem presentes em todos os livros analisados, o seu uso não é intensivo ao longo do desenvolvimento do tema. Constatamos que os conteúdos presentes nesse livro não articulam as três dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos.

A análise dos quatro livros didáticos, L1, L2, L3 e L4 permitiu-nos compreender que há predomínio da simbologia, que pode dificultar os alunos a estabelecerem ligação entre os números e a sua utilização em contextos cotidianos, com mais destaque nas regras do que nos significados, pois esses são denotados como dívida/perda e crédito/ganho. Os conteúdos são apresentados de forma simplificada, o que pode implicar limitações no desenvolvimento desse tema. Assim, o uso excessivo dos símbolos pode levar o aluno à sua memorização, com ênfase na dimensão abstrata, pois a maioria das tarefas analisadas se situa nessa dimensão. Uma implicação disso reside no fato de que o aluno não será capaz de relacionar os conteúdos que aprende com situações concretas da vida real.

Para complementarmos essas informações, a seguir apresentamos a análise dos resultados dos alunos.

3.5 Análise dos Resultados do Estudo com os Alunos

Como dissemos anteriormente, o resultado do curso de formação de professores foi a elaboração de tarefas que viriam a ser utilizadas em turmas da 8ª classe.

Nessa seção, apresentamos os dados obtidos da aplicação da proposta de tarefas com alunos. Os dados não estão em ordem de acontecimentos. Eles foram inseridos de modo que a partir do subtítulo do quadro seja possível a sua leitura. O procedimento que adotamos para a sua apresentação e análise compreendeu várias formas distintas, desde a identificação das respostas dadas, dos procedimentos e estratégias usados e das explicações e argumentações e a interpretação dos resultados. A seguir apresentamos os acertos e erros ocorridos com a mudança do sinal posicional.

Quadro 16 – Exemplos de operações construídas pelos alunos envolvendo números inteiros (n=140)

Operação cuja resposta é -6			**%**
2-8=;	10-16= ;	4-10=	33.8
2 + 4 = ;	1+5= ;	3 + 3 =	23.1
(-2) + (-4)= ;	(-3) - (+3) = ;	(-5) + (-1) =	30.8
(-12) : (+2) =;	(+24) : (-4) =		7.7
(-3) .(+2) = ;	(-2) + (-2) + (-2) =		4.6

Fonte: organizado pelo autor

Nossa intenção era conduzir os alunos à capacidade criadora e conscientizá-los de que é possível uma operação ter várias soluções. Isso amenizaria o mito de que a matemática só admite uma única solução.

Um aspecto importante nesta tarefa é o fato de que cada aluno fazia o cálculo sozinho e em seguida procedia à validação das suas escolhas com colegas. Nos cadernos era frequente observar borrões resultantes de mudança de escolha de operações a realizar de modo que o resultado fosse (-6). Nesta tarefa ocorreu um episódio que nos chamou bastante atenção: *Professor, eu estou tentando encontrar dois números cuja soma é esta (apontando -6). Mas estou a encontrar vários números [...]. Será que essa conta tem solução?* (Aluno da turma A).

Apresentamos no quadro a seguir as situações utilizadas pelos alunos para responder a tarefa (-5) + 7 = 2.

Quadro 17 – Define uma situação utilizando palavras que podem ser representadas pela seguinte operação: (-5) + 7 = 2.

Situação utilizada (n = 368 alunos)	**%**
Dinheiro (perda, ganho) – com referência a negócios	66.3
Temperatura (congelador)	18.3
Deslocamentos (andar ao longo da estrada)	10.4
Elevador (subir, descer)	5.0

Fonte: organizado pelo autor

Com essa tarefa pretendíamos conduzir o aluno à construção do conhecimento da dimensão abstrata para a dimensão do contexto. As palavras:

comprou, morreram, ganhei, podre, maduras, caracterizam a presença de números inteiros relativos àquele grupo de alunos. As respostas dos alunos permitem-nos inferir que um contexto adequado para abordagem dos números inteiros relativos pode ser o negócio (66.3%). Exemplos do tipo: *Paulo comprou sete laranjas, depois verificou que cinco não estavam maduras* eram frequentes nas respostas dos alunos. O uso da temperatura vem assinalado nas situações criadas pelos alunos (18.3%) com a citação do congelador. Por exemplo, encontramos nas respostas dos alunos o seguinte: *Ontem pela manhã a temperatura do nosso congelador era de 5 graus abaixo de zero. Às 12 horas a temperatura do mesmo congelador era de 2 graus acima de zero. Qual foi a variação da temperatura?*

Do mesmo modo constatamos que 10.4% das respostas dos alunos apontavam situações envolvendo o uso da ideia de deslocamento ao longo da estrada. Por exemplo, encontramos resposta como: *a Ana andou cinco passos para trás. Depois andou sete passos para frente, seguindo a mesma estrada.*

Apesar das respostas dadas, pudemos compreender durante a realização dessa tarefa uma inquietação dos alunos, do tipo, [...] *afinal é para fazer o que mesmo nessa conta?* Essa inquietação pode ser o resultado de ausência desse tipo de tarefas nos livros didáticos. É tradição no ensino o aluno não formular enunciados, apenas recebê-los já prontos, resolvendo-os de acordo com os pedidos. Essa ideia pode ser sustentada pelo fato de que, quer autores dos livros didáticos quer os professores de Matemática não solicitam que alunos formulem tarefas a partir de um enunciado em linguagem Matemática.

Propomos ainda a tradução de uma tarefa em linguagem corrente para a linguagem matemática por entendermos que isso possibilita a ampliação do horizonte do aluno. Entendemos que se o aluno conhecer várias possibilidades para a manipulação de uma situação, poderá encarar como mais valia. O quadro a seguir evidencia o resultado de uma tarefa na qual os alunos foram solicitados para definir a operação correspondente à situação dada.

Quadro 18 – Define uma operação que pode resolver a seguinte situação:
Ângelo perdeu 9 meticais pela manhã quando ia para a escola. Na tarde do mesmo dia perdeu 12 meticais. Qual é o prejuízo total do Ângelo nesse dia?

Operações definidas (n =130 alunos)	**%**
(-9) +(-12)	61.5
(-9) - (+12)	20.4
(+9) +(+12)	10.3
(-9) -(-12)	7.8

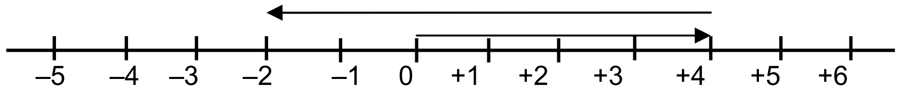
Fonte: organizado pelo autor

O objetivo dessa tarefa era conduzir o aluno à construção do conhecimento entre a dimensão do contexto e a dimensão abstrata.

Observando as frequências das operações construídas, notamos que 61,5% definem a operação (-9) + (-12) como sendo a que melhor traduz a situação de temperatura em Paris. Todavia, observamos que a operação (-9) - (+12) também é solução da tarefa dada. Isso revela que os significados que a adição e a subtração recebem como sendo acrescentar e tirar, respectivamente, no conjunto dos números naturais, mudaram no dos números inteiros relativos. Em todos os casos observamos que as parcelas constituintes das restantes operações são as mesmas diferindo dos sinais posicionais e operacionais.

No quadro a seguir apresentamos uma tarefa que visava à condução dos alunos na transição da dimensão da reta para a dimensão abstrata. As respostas ora apresentadas permitiram-nos compreender a necessidade de uma visualização (62.5%). Apesar de alguns alunos apresentarem problemas na identificação da operação correspondente, podemos observar que a taxa de erros foi de 37.5%. Todavia, as operações indicadas nesses casos mostram uma tendência em iniciar o movimento a partir do 0 a +4 ou de 0 a -2, ou seja, eles desconfiam desses números. Isso foi possível por conta da visualização.

Quadro 19 – Qual é a operação que pode ser representada pela reta:



Operações construídas (n= 600 alunos)	**%**
(+4) + (-6)	**62.5**
0 + (+4)	**15.0**
(+4) + (-2)	**9.2**
(-2) + 0	**7.5**
(-2) + (+2)	**5.8**

Fonte: organizado pelo autor

Assim, percebemos a necessidade da utilização da reta no tratamento dos números inteiros. Tal intenção foi defendida por Freudenthal (1973). O surgimento do (-6) na operação (+4) + (-6) indica que os alunos contaram as unidades marcadas a partir do (+4). Tomaram como ponto de partida o +4 e contaram seis unidades para esquerda de +4.

O quadro a seguir evidencia o resultado de uma tarefa que aplicamos aos alunos, em que foram solicitados para representar a operação na reta numérica. O nosso objetivo foi verificar se eles eram capazes de fazer a transição da dimensão abstrata para a dimensão da reta.

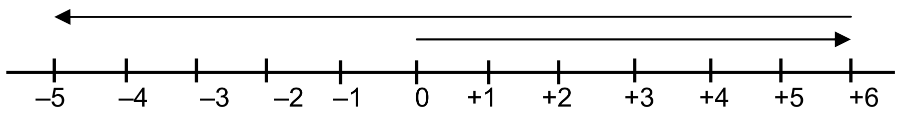
Das respostas obtidas foi possível distinguirmos três tipos: I, II e III. No tipo I (25.0%), os alunos desenharam uma reta em que nos dá a impressão de que a operação correspondente seria (+6) + (-11), no tipo II (36.7%) seriam as expressões (+6) e (-5). Já no tipo III, surge o movimento onde esperava-se que os alunos fizessem (38.3%), conforme as evidências abaixo. Essa taxa de acerto pode revelar a menor ênfase dada às representações dos números inteiros relativos nos livros didáticos da 8ª classe do ensino moçambicano via reta numérica, conforme vimos na seção sobre análise dos livros didáticos.

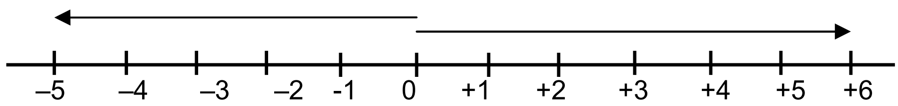
Quadro 20 – Represente na reta numérica a operação dada por: (-5) + (+6)

Respostas obtidas (n=600 alunos)	**%**
I	25.0
II	36.7
III	38.3

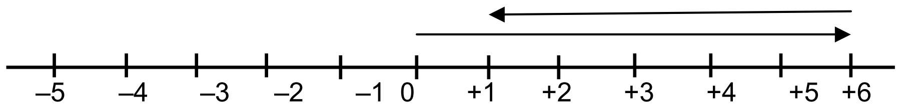
Fonte: organizado pelo autor

Nesta tarefa, os alunos apresentaram as respostas I), II) e III), conforme ilustrações abaixo:

I) 

II) 

III)



Dos resultados dessa tarefa pudemos compreender que o processo de transição de uma dimensão para outra ainda é problemático, havendo a necessidade de enfatizar que as tarefas elaboradas para os alunos podem articular as dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos.

Os resultados obtidos nessa aplicação mostram que uma proposta de tarefas que articula as dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos pode promover a aprendizagem desse tema.

Nas tarefas em que os alunos foram solicitados a criar contextos a motivação foi maior. Podemos atestar isso pela diversidade de situações evocadas nas réplicas apresentadas. Em algumas tarefas propostas, houve indícios de tentativas de construção de conhecimento de uma dimensão para outra.

Assim sendo, a partir dos resultados obtidos emergiu a nossa proposta de formação de professores estruturada a partir dos documentos oficiais, livros didáticos e literatura especializada sobre o assunto. Os resultados dessa aplicação apontam que quando as tarefas são bem articuladas com as dimensões de conhecimentos dos números inteiros, podemos amenizar as dificuldades dos alunos sobre esse tema. O uso de contextos reais enriquece os números de significados. Embora fossem aplicados a casos excepcionais, vale ressaltarmos que podem criar bases para o entendimento dos números inteiros relativos.

Das observações das aulas constatamos que os alunos conversavam sobre a matemática, perguntando sobre o que os incomodava, relacionavam os números inteiros relativos com a vida, dando exemplos do seu dia a dia. Os alunos foram capazes de criar situações-problema a partir das operações que eram dadas. As respostas verbais descrevendo situações envolvendo matemática eram muito frequentes. Nas respostas escritas, embora houvesse alguns erros, muitas delas eram corretas. Também verificamos que as tarefas envolvendo situações imaginárias foram bem resolvidas pelos alunos.

Constatamos ainda que nas tarefas em que os alunos foram solicitados a criar contextos a motivação era maior. Podemos atestar isso pela diversidade de situações evocadas nas réplicas apresentadas. Em todas as tarefas propostas, houve indícios de tentativas de construção de conhecimentos de uma dimensão para outra.

Contudo, observamos que os alunos tiveram dificuldades na construção de conhecimento da dimensão abstrata para a dimensão de contexto, e da dimensão do contexto (questões práticas) para a dimensão da reta.

Assim sendo, a partir dos resultados obtidos emergiu a nossa proposta de formação de professores estruturada a partir dos documentos oficiais, livros didáticos e literatura especializada sobre o assunto. Os resultados dessa aplicação apontam que quando as tarefas forem bem articuladas com as dimensões de conhecimentos dos números inteiros, poderemos amenizar as dificuldades dos alunos sobre esse tema.

Em face das dificuldades constatadas com os alunos e com a melhoria em algumas tarefas, apresentamos na seção seguinte uma nova proposta de ensino contendo tarefas diversificadas que podem garantir o aprendizado segundo a literatura analisada. Com as tarefas apresentadas nessa seção, pretendemos que a partir do seu estudo possam suscitar mais curiosidades para os participantes interessados pelo assunto, lançando mão da busca de soluções em outras referências teóricas, ao mesmo tempo em que reflitam sobre a sua prática pedagógica ou ainda se conscientizem da relevância de um estudo aturado. Essas curiosidades podem servir de mote para que os professores investiguem a discussão dos números inteiros e que possam tomar outras formas do ensino deste tema.

4 A PESQUISA: INDICADORES PARA UMA PROPOSTA DE ENSINO

Como vimos, a abordagem dos números inteiros relativos no sistema educacional de Moçambique ainda é problemática. São poucas as alternativas apresentadas, quer por meio dos livros didáticos quer pelo PEM. As implicações destas limitações resultam na ausência de criatividade dos professores, quando pretendem ensinar este tema.

Este capítulo encontra-se dividido em duas seções: na primeira apresentamos a proposta de ensino e na segunda efetuamos a sua descrição.

A concepção dos números inteiros relativos baseados na essencialidade da multidimensionalidade (a da reta, de contexto e a abstrata) pode contribuir para a exploração das ideias matemáticas a respeito do tema. Por isso, as três dimensões de conhecimentos devem ser consideradas pelos professores e pelos autores dos livros didáticos.

Para dar prosseguimento, as nossas tarefas serão organizadas em torno de seis grupos de construção de conhecimentos dentro das dimensões acima mencionadas.

As tarefas que iremos apresentar nesta proposta foram concebidas a partir das reflexões promovidas com professores e com os alunos, considerando as dificuldades apontadas e visando um enfrentamento destas. Buscamos subsídios nos trabalhos de Borba (1998); Freudenthal (1973); Bruno (1997); entre outros. Igualmente adaptamos algumas tarefas da proposta de Cyrino e Pasquini (2010) sobre a multiplicação e a divisão por meio de segmentos para a elaboração da nossa proposta de tarefas para o ensino. Nosso esforço com relação a esta elaboração de proposta é para que ela promova reflexões e discussões com professores em formação, podendo garantir que eles possam lidar com problemas relacionados aos números inteiros relativos.

Ao discutir tarefas que envolvem as três dimensões de conhecimento (reta, contexto e abstrata), muitas situações e exemplos serão discutidos e avaliados de modo a auxiliar os professores a anteverem dificuldades e sucessos que seus alunos poderão ter no tratamento desse tema. Tendo conhecimento sobre o que foi exposto, o professor pode procurar estratégias viáveis para o ensino deste conteúdo.

Essas tarefas foram concebidas procurando amenizar os obstáculos apontados pela literatura, recorrendo a diversas abordagens do tema. Assim, aspectos relacionados ao desenvolvimento histórico serão discutidos na multiplicação e divisão usando o método geométrico de Descartes e Hilbert. Com este método, tanto a multiplicação como a divisão serão visualizadas, permitindo que sejam observadas as características dos produtos e dos quocientes. Uma discussão sobre esses resultados pode auxiliar na dedução das regras de sinais. Esta abordagem contribui para a construção de conhecimentos da dimensão da reta para a abstrata. Assim, acreditamos que as diferentes abordagens sugeridas pela literatura, como sendo potenciais para o tratamento desse tema, podem ser problematizadas em sala de aula com vistas a conduzir o professor a compreender e apropriar os conhecimentos necessários para o ensino das quatro operações envolvendo os números inteiros relativos.

Apresentamos a seguir a nova proposta de ensino dos números inteiros relativos para a 8ª classe.

4.1 Proposta de Ensino dos Números Inteiros Relativos

1. Uma substância que se encontrava a 7°C foi arrefecida até atingir a temperatura de 2°C. Qual foi a variação da sua temperatura?

2. As temperaturas registradas num determinado dia em algumas cidades do mundo são apresentadas na tabela[12] abaixo:

Cidade	Londrina	Roma	Pretória	Londres	Curitiba	Harare
Temperatura em graus Celsius (°C)	-5	4	-7	0	-3	-6

a) Coloque por ordem decrescente as temperaturas registradas nesse dia.
b) Qual foi a cidade mais quente? Indique a temperatura dessa cidade.
c) Qual foi a cidade mais fria? Indique a temperatura dessa cidade.

[12] Adaptada de Nheze, Nhabique e Fabião, 2010, p. 32.

3. Resolva as seguintes operações usando a reta numérica:

a) 3+ 2 =

b) 6 + 3 =

c) (+7) + (+4) =

d) (+9) + (+6) =

e) (+12) + (+4) =

f) (+4) + (-5) =

g) (-10) + (-5) =

h) (-6) + (-9) =

i) (-5) + (+4) =

j) (-6)+(-5)

4. Pensem em alguns contextos em que as seguintes operações podem ser representadas:

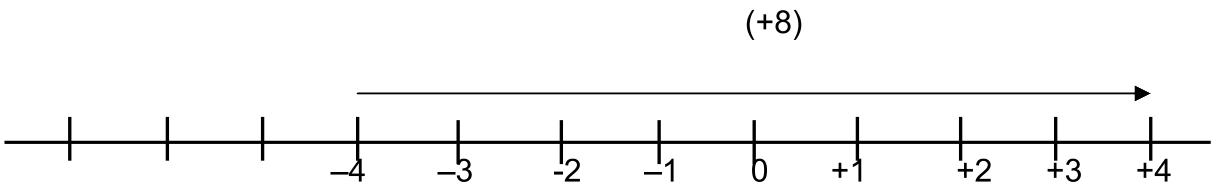
a) (-6) + (+5) = (-1)

b) (+ 12) + (-13) = (-1)

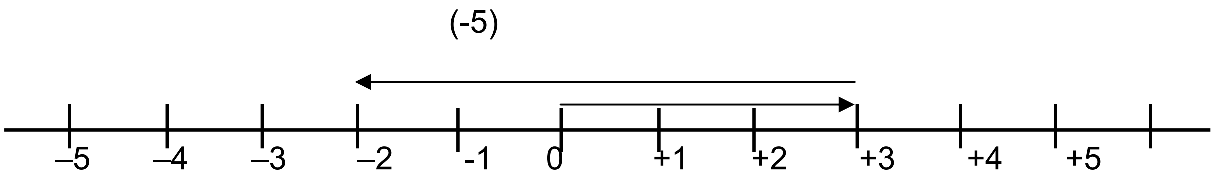
c) (-7) + (-8) = (-15)

d) (+ 150) + (+50) = (+200)

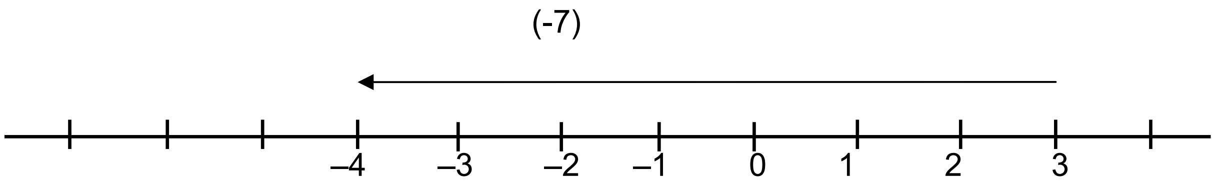
5. Construa um contexto em que pode ser representado da seguinte forma:



6. Qual é a operação que pode ser representada pelas setas:



7. Qual é a operação que pode ser representada pela seta



8. O Ângelo tinha 50 meticais no bolso e comprou rebuçados de 15 meticais. Pediu 20 meticais à sua mãe para ir ao cinema. Pagou o bilhete com 24 meticais. Com quanto dinheiro ficou?

9. Um taxista sai dos correios com encomendas. Percorre uma distância de 3km e entrega uma parte das encomendas na casa número 1.235 e continua ainda até a casa número 1.590, que fica a 5km da primeira. Qual é a distância total percorrida pelo taxista?

10. Um elevador encontrava-se inicialmente no 5º piso abaixo do subsolo e, depois, subiu 7 pisos. Qual é a posição depois dessa subida? Represente essa situação na reta numérica.

11. Na quinta-feira, pela manhã, João fez um depósito de 250 meticais no seu cofre. À tarde, fez um levantamento de algum dinheiro, tendo obtido um saldo de 150 meticais. De quanto foi o levantamento?

12. Um comboio está parado em frente aos caminhos de ferro. Para efetuar manobra, ele avança 3km e em seguida recua 2km. Represente o movimento desse comboio por meio da reta numérica.

13. Observe a tabela abaixo e calcule:

3.(+3) =	(-3).(+4) =
2.(+3) =	(-3).(+3) =
1.(+3) =	(-3).(+2) =
0.(+3) =	(-3).(+1) =
(-1).(+3) =	(-3).0 =
(-2).(+3) =	(-3).(-1) =

14. Represente geometricamente o produto de cada item em um sistema de coordenadas.

a) (+2)(+4)=

b) (-2)(+4)=
c) (-2)(-4)=
d) (+2).0 =

15. Represente geometricamente o quociente de cada item em um sistema de coordenadas.

a) (+6÷(+2)=
b) (-6÷(+2)=
c) (-9)÷(-3)=

16. Aurora retirou 100,00 meticais da sua conta no banco. Ela ficou devendo 50,00 meticais ao banco. Qual a quantia que tinha antes de fazer a retirada?

17. Um agricultor contraiu um empréstimo de 5000 meticais[13] para a compra de uma motobomba. No fim do 2º ano pagou ao banco 2500 meticais; no 3º pagou 1500 meticais; no 4º pagou 1000 meticais e no 5º e último ano da duração do empréstimo, 500 meticais.

a) Quanto devolveu, no total, ao banco?
b) Qual foi o lucro do banco no negócio?
c) Qual era o saldo do agricultor depois de pagar a 2ª prestação?
d) E qual foi o saldo do agricultor depois da última prestação? Explique o significado desse saldo

18. Com ajuda da reta numérica, calcule:

a) (-6) – (-4)
b) (-9) – (- 11)
c) (-10)-(+8)
d) (+4)+(-16)
e) 8-3
f) (-3) - (-3)
g) -5- (-2)
h) (+7)- (-3)

[13] Adaptado de Nheze, Nhabique e Fabião, 2010, p. 28.

i) -3-5

19. Sem usar a reta numérica, calcule:

a) (-20) –(+40)

b) (+150) – (-50)

c) (-2014) - (-2013)

d) 20-50

e) -45-(-30+5)-10

f) (-4) + (-8) –(-10) +(-10)

20. Sem usar as construções geométricas, calcule:

a) 21÷(-7)

b) -100÷ (+20)

c) 75÷(-3)

d) (-25) ÷5

e) [2.(-5)] ÷(-5)

f) (-3-7) ÷2

4.2 Descrição da Proposição das Tarefas Propostas

1. Uma substância que se encontrava a 7°C foi arrefecida até atingir a temperatura de 2°C. Qual foi a variação da sua temperatura?

Objetivo:

- Explicar a necessidade do surgimento dos números inteiros a partir do seu significado na vida real.

Comentários:

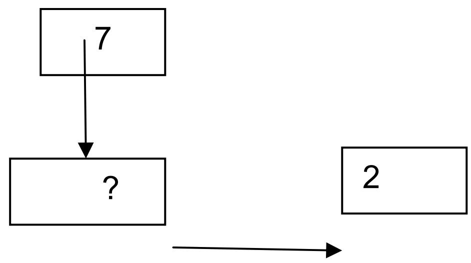
O professor propõe a tarefa aos alunos e pede que cada um resolva no seu caderno individualmente. Para garantir o sucesso nessa tarefa o professor deverá relembrar os alunos o conceito de variação que aprenderam na 7ª classe. No decurso da tarefa, o professor acompanhará o desenvolvimento desta e anotará as dúvidas que forem surgindo. Ao final, o professor poderá solicitar que alguns alunos apresentem suas respostas na lousa. Essas respostas poderão servir de ponto de partida para promover uma discussão com a turma. A ênfase deverá ser a definição do conceito de variação, explicitando que ela é a diferença entre a temperatura final e a temperatura inicial. É possível que alguns alunos alcancem a resposta esperada

(-5) e outros verifiquem que a operação não tem solução. Essas constatações deverão constituir um ponto de partida para que o professor fale da necessidade de um novo conjunto em que as operações da subtração sempre têm solução.

Podemos esperar várias respostas, dependendo do nível de percepção de cada aluno. Por exemplo, poderemos encontrar respostas como: 7-2 =5; 2-7 = Não tem solução; 2+7 =9; 2-7 = -5. Os alunos que apresentarem como resposta 5, significa que perceberam que não se pode subtrair 7 de 2. Porém, não há alternativa senão apresentar 5 como variação da temperatura solicitada. E os que apresentarem 2-7 = não tem solução, estes entendem o conceito de variação e percebem igualmente que não se pode subtrair 2 de 7, daí que a operação não tenha solução no domínio que se encontra.

Outros que apresentarem 2+7 =9 como resposta, mostram que não têm a noção da variação. Nessa altura, o professor poderá sistematizar essa tarefa representando o contexto descrito na reta numérica ou no diagrama de Vergnaud. A seguir ilustramos pelo diagrama de Vergnaud e pela reta numérica.

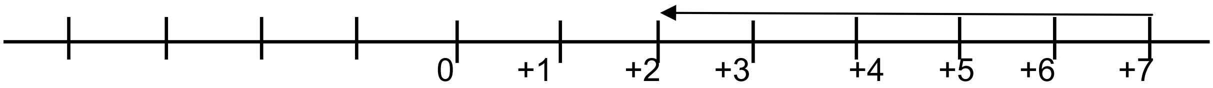
Figura 13 – Representação da variação da temperatura pelo diagrama de Vergnaud



Fonte: organizado pelo autor

Operação envolvida: 7+? = 2, de onde concluímos que ? = 2 -7. A seguir é fundamental que o professor apresente os novos números na reta numérica, enfatizando o papel do zero nessa representação. Uma representação simples para mostrar que houve uma variação de 5°C poderá ser a que segue:

Figura 14 – Representação na reta numérica da variação da temperatura



Fonte: organizado pelo autor

Deste modo, fica convencionado que os valores à direita do zero são valores positivos, antecedidos do sinal (+) e os valores à esquerda do zero são negativos, precedidos do sinal (-). Como o sentido da seta aponta para a esquerda, significa que há diminuição, neste caso, de 5 unidades. Logo podemos concluir que 2-7=-5. Assim sendo, o professor pode dar a definição de números inteiros relativos (positivos e negativos), o conceito de números simétricos e o valor absoluto. Ele, o professor, pode sistematizar dizendo que os números inteiros relativos são constituídos pelos números positivos e negativos incluindo o zero, designando-o por Z={..-3,-2,-1,0,+1, +2,+3,...}. Desta maneira, caminhamos para a introdução da comparação e da ordenação desses números usando a reta numérica numa primeira fase e sem o uso desta na segunda fase. Neste momento as relações de equivalências e de ordem são fundamentais, por isso, o professor precisa de recordá-las.

Essa tarefa quando for bem encaminhada poderá contribuir para a construção de conhecimento da dimensão contextual para a dimensão abstrata, daí a sua importância para a constituição do conceito de número negativo.

2. As temperaturas registradas num determinado dia em algumas cidades do mundo são apresentadas na tabela abaixo:

Cidade	Londrina	Roma	Pretória	Londres	Curitiba	Harare
Temperatura em graus Celsius (°C)	-5	4	-7	0	-3	-6

a) Represente na reta numérica as temperaturas da tabela anterior.
b) Coloque por ordem decrescente as temperaturas registradas nesse dia.

c) Qual foi a cidade mais quente? Indique a temperatura dessa cidade.
d) Qual foi a cidade mais fria? Indique a temperatura dessa cidade.

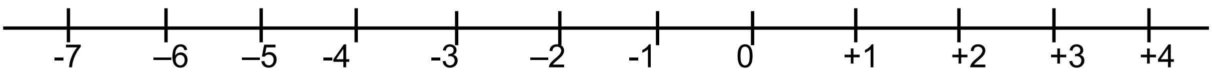
Objetivos:

- Representar o número inteiro relativo na reta graduada, associando-o a um ponto da reta.
- Ordenar e comparar números inteiros relativos usando a reta numérica.

Comentários:

O professor apresenta a tarefa na lousa e em seguida solicita aos alunos que efetuem a leitura da tabela. Para promover discussão e possibilitar que todos os alunos se expressem a respeito da tarefa, o professor deverá pedir que eles respondam oralmente os itens c e d. Em seguida solicitará que os alunos representem os números na reta numérica. Esta representação constituirá a primeira tentativa de ordenação desses números. Dando prosseguimento, o professor deverá chamar atenção do papel que o zero preenche nessa representação, pois antes este era concebido como ausência de algo e, agora tem outro papel, é a origem. Ele, o zero, separa os números positivos dos negativos. Assim sendo, a representação deverá ser constituída, examinada e discutida.

Figura 15 – Representação dos números inteiros relativos na reta numérica



Fonte: organizado pelo autor

A partir do exame da reta numérica anterior, o aluno poderá colocar as temperaturas na ordem decrescente e indicar que a cidade mais quente foi a de Roma com a temperatura de 4°C e a mais fria foi a de Pretória com a temperatura de 7°C abaixo de zero. Para perceber se os alunos compreenderam, o professor deverá propor uma tarefa sobre a ordenação das temperaturas em ordem crescente.

3. Resolva as seguintes operações usando a reta numérica:

a) 3+ 2 =
b) 6 + 3 =
c) (+8) + (+4) =

d) (+9) + (+6) =
e) (+12) + (+4) =
f) (+4) + (-5) =
g) (-5) + (+4) =
h) (-6) + (-5) =
i) (-10) + (-5) =

Objetivos

- Efetuar operações com números inteiros relativos usando a reta numérica.
- Deduzir as regras da adição dos números inteiros relativos.

Material necessário: Régua e papel quadriculado

Comentários:

O professor deverá solicitar aos alunos que efetuem as operações usando a reta numérica, descrevendo os movimentos que forem realizar. Para tal, os sinais (–) e (+) exercem um papel basilar na localização do sentido dos movimentos. Durante o andamento da tarefa o professor acompanhará o desenvolvimento desta e anotará as dúvidas que os alunos apresentarem. Ao final, o professor poderá convocar alguns alunos para apresentar suas construções na lousa. A partir das construções feitas, promover uma discussão e, por fim, as respostas devem ser identificadas, discutidas e validadas pela turma, isto é, a turma deverá chegar a um consenso.

O professor deve reativar nos alunos as capacidades adquiridas na classe anterior a respeito do conceito de números naturais. Isto poderá ser feito apresentando aos alunos os itens 3a e 3b.

Numa fase posterior sugerimos que o professor explique o significado das regras na base de exemplos que relacionam contextos reais da vida dos alunos. Esse esforço visa evitar o ensino das regras de forma mecanizada em que o aluno procura decorá-las sem perceber o seu significado.

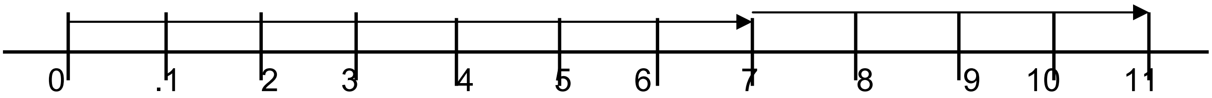
Nesta tarefa iremos apresentar a resolução de três itens 3c 3i e 3j – usando a reta, sendo que um item envolve adição com todas as parcelas com sinais positivos, outro com parcelas de sinais negativos e o último com parcelas de sinais contrários. Outros itens apresentam a mesma exigência, daí que não seja necessário apresentar todas as resoluções.

Respostas esperadas:

Primeiro caso c) (+7) + (+4) =?

A partir da origem, marcamos 7 unidades para a direita e, a partir da extremidade da seta correspondente, marcamos 4 unidades para a direita. O resultado deve ser lido na extremidade da última seta. Logo: (+7) + (+4) = (+11).

Figura 16 – Representação da soma de 7 por 4 na reta numérica



Fonte: organizado pelo autor

O professor deve insistir que os alunos observem bem o que acontece com o sentido das setas quando se adicionam dois números com os mesmos sinais e, quando se adicionam dois números com sinais contrários.

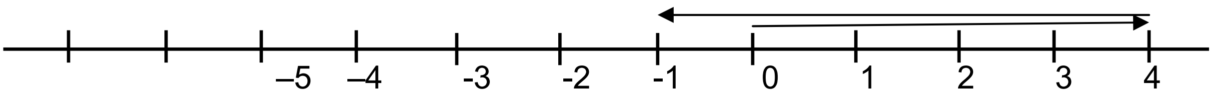
Outras possibilidades:

Segundo caso: i) (-5) + (+4)

Passos a discutir com os alunos:

A partir do zero marcamos 4 unidades para a direita e, a partir da extremidade da seta correspondente, marcamos 5 unidades para esquerda (atrás). O resultado deve ser lido na extremidade da última seta: (-5) + (+4) = -1

Figura 17 – Representação da soma de -5 por 4 na reta numérica



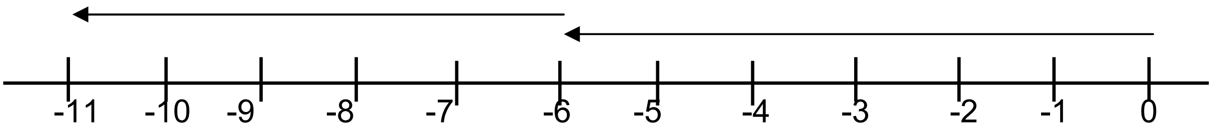
Fonte: organizado pelo autor

Tendo em conta que se trata de adição de dois números com sinais diferentes, o professor deve chamar atenção aos sentidos das setas para que os alunos tentem construir a regra.

Terceiro caso: j) (-6) +(-5) = ?

A partir da origem, marcamos 6 unidades para esquerda e, a partir da extremidade da seta correspondente, marcamos 5 unidades para a esquerda. O resultado deve ser lido na extremidade da última seta. Logo: (-6) + (-5) = (-11). Também obtemos o mesmo resultado começando por marcar 5 unidades para a esquerda a partir da origem e, a partir da extremidade da seta correspondente, marcamos 6 unidades para a esquerda, isto é, (-5)+(-6) =(-11). Na figura a seguir mostramos o primeiro movimento.

Figura 18 – Representação da soma de -5 por -6 na reta numérica



Fonte: organizado pelo autor

Ao final, as regras e as propriedades da adição devem ser constituídas e discutidas com os alunos. Uma possível sistematização poderia ser a seguinte:

- A soma de dois números inteiros relativos do mesmo sinal é um terceiro número relativo do mesmo sinal e cujo valor absoluto é a soma dos valores absolutos das parcelas.
- A soma de dois números inteiros relativos de sinais contrários é um terceiro número relativo, cujo valor absoluto é a diferença dos valores absolutos das parcelas e cujo sinal é o da parcela de maior valor absoluto.
- A soma de dois números simétricos é zero.
- Adição dos números inteiros relativos é comutativa.
- O zero é elemento neutro da adição.

O professor deverá chamar atenção dos alunos dizendo que adição nos números inteiros relativos é um prolongamento da adição nos números naturais.

4. Pensem em alguns contextos em que as seguintes operações podem ser representadas:

a) (-6) + (+5) = (-1)
b) (+ 12) + (-13) = (-1)
c) (-7) + (-8) = (-15)
d) (+ 150) + (+50) = (+200)

Objetivos:

- Construir contextos da vida real que podem ser descritos por meio das operações aritméticas apresentadas.
- Identificar diferentes contextos sobre os quais podem ser aplicadas as operações com números inteiros relativos.

Comentários:

Essa tarefa foi concebida de modo que os alunos pudessem se expressar, refletir e evoluir por iniciativas próprias visando a aquisição de novos conhecimentos. Para tal, o professor deverá solicitar que os alunos apresentem exemplos de contextos da vida real que podem ser descritos usando as operações apresentadas. Ao fazer isso os alunos deverão identificar diversos contextos aplicados aos números inteiros relativos.

Nessa ordem de ideia, para a sistematização dos conhecimentos, o professor deverá levar em conta as respostas (ações) dadas pelos alunos, suas tentativas e suas conjunturas, promovendo debates de confrontação das respostas apresentadas. É importante que o professor respeite as diferenças de percepções de cada aluno.

Assim sendo, o nosso esforço é no sentido de garantir que o aluno possa formular tarefas em linguagem natural em vez de encontrar já prontas nos livros didáticos. Entendemos que essa formulação de tarefas poderá conferir a autoria aos próprios alunos.

A seguir apresentamos dois exemplos, visto que nos restantes itens o procedimento é o mesmo.

Exemplos:

- (-6) + (+5) = (-1)

Aurora contraiu uma dívida de 6 meticais com seu irmão Ângelo. Ela conseguiu 5 meticais e decidiu devolver esse valor a Ângelo. Então, falta 1 metical para acabar a sua dívida.

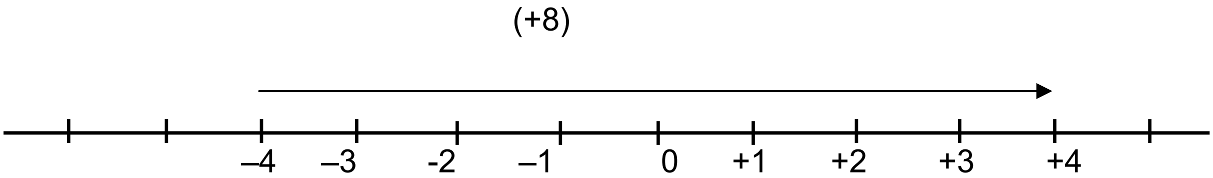
- (-7) + (-8) = (-15)

Ângelo pediu emprestado 7 meticais à mãe e 8 meticais à sua irmã. Agora ficou com uma dívida de 15 meticais ao todo.

Nessa tarefa solicitamos ao aluno a construção de contextos visando a atribuição de significado aos números inteiros relativos. Nas próximas tarefas de 8 a 13, nossa intenção será a construção de operações matemáticas a partir dos contextos apresentados.

Na próxima tarefa pretendemos construir contextos a partir das representações na reta numérica das operações com números inteiros relativos, isto justifica a proposição da tarefa 5.

5.Construa um contexto em que pode ser representado da seguinte forma:



Objetivos

- Efetuar leitura na reta numérica.
- Construir contexto a partir da operação representada na reta numérica.

Comentários

O professor deve solicitar que os alunos apresentem exemplos de contextos nos quais podem aplicar o conhecimento dos números inteiros relativos para descrever a representação dada na reta numérica. Ele deverá igualmente solicitar que os alunos façam a leitura, análise e a interpretação da reta (visualização) obedecendo ao sentido da seta. A partir das respostas dos alunos, o professor poderá buscar uma sistematização, procurando adequá-las à representação dada. Chamamos atenção ao professor no sentido de que essa tarefa pode ser interpretada usando vários contextos, daí que seja importante respeitar as propostas dos alunos. O professor deve deixar claro que neste momento estamos a considerar conjunto discreto para facilitar a contagem das unidades na reta numerada. Por isso, o professor necessita de revisar o conceito de conjunto discreto e o contínuo com vista a minimizar a confusão no uso da reta envolvendo distância. Aqui, apresentamos a título de exemplo um caso.

Como dissemos anteriormente, há várias possibilidades a serem utilizadas nessa tarefa: uma descrição utilizando contexto pelo diagrama de Vergnaud e o uso de equação. Nossa intenção é utilizar um contexto para descrevê--la.

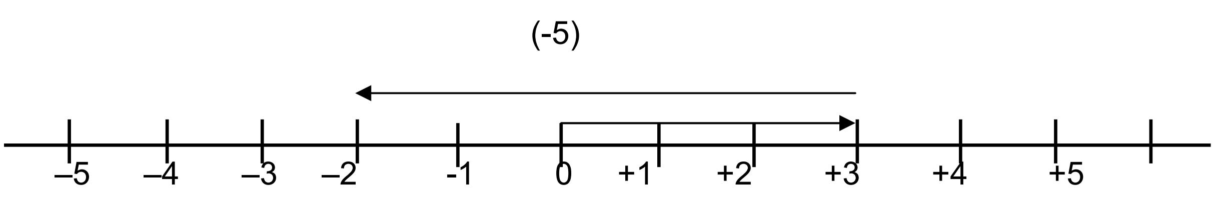
Uma descrição utilizando contexto: Ângelo saiu da sua casa a pé para a casa de um amigo que fica ao longo da mesma rua. Ele, primeiro, andou 4km. E em seguida na mesma direção andou mais 4km até chegar à casa do amigo. Ao todo Ângelo andou 8km.

O professor deve intervir de modo que não possa prejudicar a participação dos alunos, isto é, deverá intervir com naturalidade respeitando as diferenças entre diversos alunos da turma. E os erros que surgirem devem ser corrigidos ao longo do desenvolvimento da tarefa. Ao final, todas as alternativas sugeridas devem ser analisadas e discutidas de modo a tirar conclusões.

Enquanto nessa tarefa solicitamos a construção de contextos, isto é, da dimensão da reta para a do contexto, nas tarefas 5 e 6 a seguir iremos solicitar a construção de operações aritméticas a partir de suas representações nas retas numéricas, ou seja, da dimensão da reta para a da abstrata. Deste modo, a proposição da tarefa 5 visa conduzir os alunos a efetuarem leitura a partir das setas apresentadas com vistas à constituição da operação solicitada.

A tarefa 6 é mais delicada, visto que ela traz uma seta, o que a diferencia da tarefa 5 embora o objetivo seja o mesmo. Chamamos a atenção do professor para que enfatize o papel do sentido da seta e do zero como origem para a constituição das operações aritméticas solicitadas.

6. Qual é a operação que pode ser representada pelas setas:



Objetivos:

- Identificar a operação correspondente à resposta representada na reta numérica; e,
- Construir a respectiva operação a partir da representação dada.

Comentários

O professor deve solicitar aos alunos que efetuem a leitura da tarefa, chamando atenção aos sentidos das setas. Para tal pede que os alunos identifiquem a operação correspondente por meio dos movimentos que podem ser realizados sobre a reta. Um gesto com o dedo pode ajudar os alunos a verem a origem e o fim do movimento. Deste modo, a leitura deve ser feita obedecendo ao sentido das setas. Essa tarefa pode ajudar a construção do conhecimento da dimensão da reta para a da abstrata.

Podemos esperar que os alunos apresentem algumas possibilidades, por exemplo:

1ª Possibilidade:

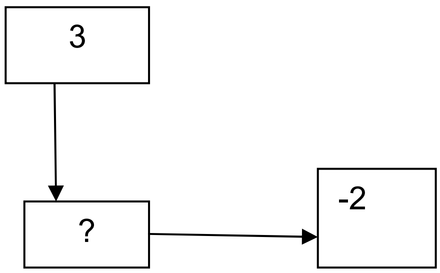
Se o aluno olhar as extremidades das setas e pensar na adição dos valores encontrados aí, terá como resposta: $x + 3 = -2$

2ª Possibilidade (não foi pedido no enunciado é facultativa):

Pode imaginar um contexto: O João está no 3º piso acima do nível do chão. Em seguida, ele desce cinco pisos. Em que posição se encontra agora? Resposta esperada: 2º piso debaixo do nível do chão. Logo: $(+3) + (-5) = (-2)$

3ª Possibilidade: utilizando o diagrama de Vergnaud.

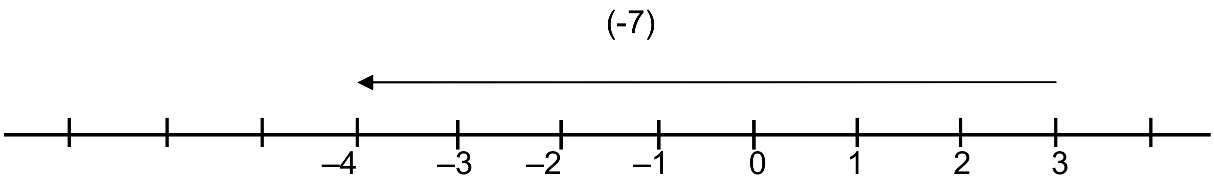
Figura 19 – Representação do movimento de João no diagrama de Vergnaud



Fonte: organizado pelo autor

A operação deve ser discutida e formalizada: 3+? = -2, de onde? =-5 Tal como fizemos na tarefa 6, na tarefa a seguir (tarefa 7) apresentamos as possibilidades que os alunos podem apresentar. Não iremos apresentar de novo os comentários, pois são válidos os comentários anteriores.

7. Qual é a operação que pode ser representada pela seta.



Objetivo:

- Construir uma operação a partir da representação na reta numérica.

Possibilidades:

1ª Possibilidade:

X + 3 = -4

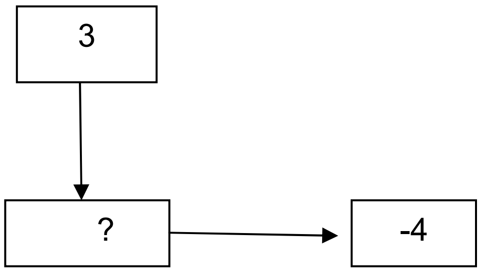
2ª Possibilidade (facultativa visto que não atende o pedido):

Manuel está no 3º piso acima do nível do chão. Ele decide descer sete pisos. Em que posição se encontra agora? Resposta esperada: 4º piso abaixo do nível do chão. A operação correspondente é: (-7)+(+3) =(-4).

Esta tarefa tem uma particularidade importante: a seta não começa do zero! Ela tem como origem do movimento no ponto 3. O professor deverá chamar atenção a este aspecto, dizendo que a origem nem sempre coincide com o zero.

3ª Possibilidade: utilizando o diagrama de Vergnaud

Figura 20 – Representação do movimento no diagrama Vergnaud



Fonte: organizado pelo autor

A operação deve ser discutida e construída: 3+ ? = -4

Objetivo das tarefas 8 a 13

- Interpretar os contextos nelas contidos utilizando operações com números inteiros relativos.

Comentários:

O professor deverá solicitar aos alunos para interpretar o enunciado utilizando conhecimentos matemáticos, fazendo o acompanhamento das diferentes etapas da realização da tarefa, observando e corrigindo-os durante o processo. A ênfase deverá ser na identificação das três fases: estado inicial, intermediário e final. O professor pode verificar a partir das ações concretas se os alunos estão compreendendo cada tarefa proposta, identificando elementos essenciais para a composição das operações aritméticas correspondentes. Nas tarefas 9, 10 e 12 sugerimos que o professor insista com os alunos no uso da reta numérica.

Ao final, o professor precisa terminar cada tarefa, convidando alguns alunos para apresentar suas resoluções na lousa. As propostas destes deverão servir de ponto de partida para sistematizar os resultados obtidos.

A seguir apresentamos a proposta de resolução das tarefas 8, 9, 10, 11, 12 e 13. Ressalvamos que pode haver mais possibilidades/caminhos para a resolução das mesmas tarefas.

8.Ângelo tinha 50 meticais no bolso e gastou 15 meticais com rebuçados. Pediu 20 meticais à sua mãe para ir ao cinema. Pagou o bilhete com 24 meticais. Com quanto dinheiro ficou?

Proposta da resolução:

$$
\begin{aligned}
(+50) + (-15) + (+20)+(-24) &=(+50) +(+20)+ (-15) + (-24)\\
&=(+70)+(-39)\\
&=(+31)
\end{aligned}
$$

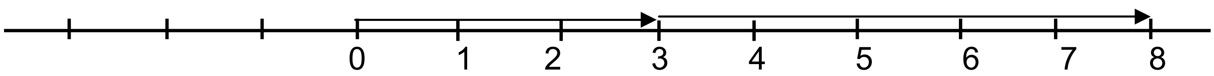
Ângelo ficou com 31 meticais.

9. Um taxista sai dos correios com encomendas. Percorre a partir dos correios uma distância de 3km e entrega uma parte das encomendas na casa número 1235 e continua na mesa direção até a casa número 1590, que fica a 5km da casa número 1235. Qual é a distância total percorrida pelo taxista?

Proposta de resolução: (+3) +(+5) = (+8)

A distância percorrida foi de 8km. A sua representação na reta numérica é ilustrada na figura a seguir:

Figura 21 – Representação na reta numérica da soma de 3 por 5



Fonte: organizado pelo autor

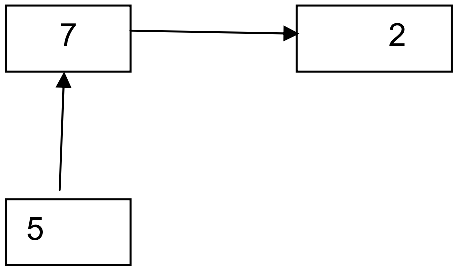
10. Um elevador encontrava-se inicialmente no 5º piso debaixo do subsolo e, depois, subiu 7 pisos. Qual é a posição depois dessa subida? Represente essa situação na reta numérica.

Comentário adicional:

O professor solicitará aos alunos para que desenhem um esquema de um prédio na situação descrita pelo enunciado. Em seguida solicite que indiquem a posição inicial nesse esquema. A partir dessa posição contem 7 unidades para cima e vejam em que andar do prédio terminou a contagem. Naturalmente, o professor deve desenhar na lousa a reta na posição vertical. Do mesmo modo, o professor deve chamar atenção para o papel que desempenha o termo “chão” nessa tarefa. Ele é usado no sentido de origem da contagem.

Pelo diagrama de Vergnaud:
Posição inicial = 5º piso debaixo do subsolo;
Subiu 7 pisos. Qual a posição depois dessa subida?

Figura 22 – Representação do movimento do elevador pelo diagrama de Vergnaud



Fonte: organizado pelo autor

Operação envolvida: -5+7 = 2
O elevador estará no 2º piso acima do subsolo.

Como equação:
Seja x a posição atual do elevador. Então, 5 + x = 7, donde x = 7-5, o que resulta em x = 2

Em termos de deslocamento:
João está no 5º piso debaixo do nível do chão. Ele decide subir 7 pisos em dois momentos. Primeiro sobe até o nível do chão e em seguida sobe mais até no 2º piso acima do nível do chão. Ao todo subiu 7 pisos (5 +2 =7).

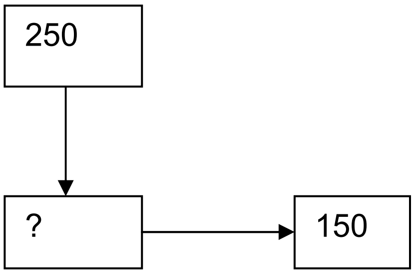
11. O João tinha inicialmente 250 meticais no seu cofre. À tarde, fez um levantamento de algum dinheiro, tendo obtido um saldo de 150 meticais. De quanto foi o levantamento?

Proposta de resolução:

Seja x a quantidade do dinheiro que João levantou, então: 250 –x = 150, donde x =250-150, o que resulta em x =100, portanto, João levantou 100 meticais.

A seguir ilustramos a situação pelo diagrama de Vergnaud.

Figura 23 – Representação do depósito e de levantamentos pelo diagrama de Vergnaud.



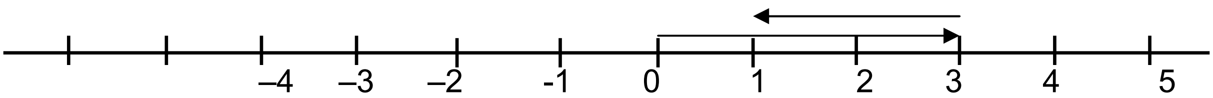
Fonte: organizado pelo autor

A operação deve ser constituída e discutida: 250 -? = 150

12. Um comboio está parado em frente dos caminhos de ferro. Para efetuar manobra, ele avança 3km e em seguida recua 2km. Represente o movimento desse comboio na reta numérica.

Proposta da solução:

Figura 24 – Representação do movimento do comboio na reta numérica



Fonte: organizado pelo autor

13.Observe a tabela abaixo e calcule:

Quadro 21 – Sequência de construção de regras pelo método exploratório de Freudenthal

3.(+3) = (+9)	(-3).(+4) =(-12)
2.(+3) =(+6)	(-3).(+3) =(-9)
1.(+3) =(+3)	(-3).(+2) =(-6)
0.(+3) =0	(-3).(+1) =(-3)
(-1).(+3) =(-3)	(-3).0 =0
(-2).(+3) =(-6)	(-3).(-1) =(+3)
....	....

Fonte: organizado pelo autor com referência a Freudenthal

Objetivos:

- Efetuar as operações da multiplicação;
- Analisar os padrões e regularidades dos resultados de cada coluna das operações; e,
- Inferir a partir desses resultados a respeito da multiplicação com sinais diferentes e com o mesmo sinal.

Comentários:

A partir dos conhecimentos anteriores que os alunos possuem sobre a multiplicação dos números naturais, o professor deve solicitar-lhes que efetuem as operações e analisem os produtos obtidos. Nessa tarefa, o professor deverá dar ênfase aos fatores de modo que os alunos possam observar que na primeira coluna o primeiro vai diminuindo em uma unidade enquanto o segundo é constante. O produto das operações nessa coluna vai diminuindo à medida que o primeiro fator diminui. Já na segunda coluna, o primeiro fator mantém-se constante e o segundo vai diminuindo em uma unidade. O produto nessa coluna aumenta à medida que o segundo fator vai diminuindo. O professor poderá chamar atenção aos alunos para não analisar os fatores de cada coluna de forma isolada, pois isto pode dificultar a construção das regras de sinais.

A partir das respostas obtidas pelos alunos, o professor busca sistematizar as regras dos sinais com eles, dizendo que: a multiplicação de dois números inteiros relativos com os mesmos sinais resulta em um número inteiro relativo com sinal positivo. E a multiplicação de dois números inteiros relativos com sinais diferentes resulta num número inteiro relativo com sinal negativo. O professor poderá propor aos alunos novas tarefas com vistas a consolidar as regras da multiplicação.

14. Represente geometricamente o produto de cada item em um sistema de coordenadas.

a) (+2)(+4)=
b) (-2)(+4)=
c) (-2)(-4)=
d) (+2).0 =

Objetivos:

- Realizar uma construção geométrica que represente o produto de dois números inteiros relativos com o mesmo sinal e com sinais diferentes;
- Identificar a localização do produto em relação aos eixos do x (acima ou abaixo dele) e,
- Consolidar as regras de sinais para a multiplicação.

Material: régua, lápis de carvão e papel quadriculado.

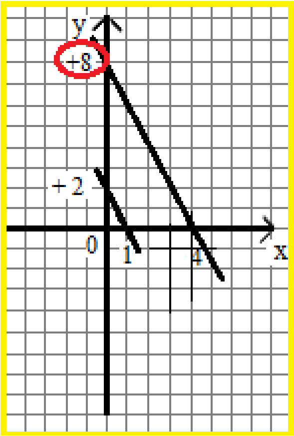
Comentários:

O professor deve solicitar que os alunos, utilizando régua, lápis de carvão e o papel quadriculado, realizem as construções. Primeiro, os alunos devem desenhar o sistema cartesiano ortogonal. Segundo, marcar os fatores nos dois eixos, um no do y e outro no do x. Quanto à localização dos fatores, vai depender do sinal de cada (- ou +) fator. Terceiro, marcar a unidade no eixo do x; ela sempre é positiva e deve estar localizada no 1º quadrante. Quarto, unir essa unidade com um dos fatores localizado no eixo do y, formando-se um segmento da reta. Quinto, tomar outro fator que ainda não foi utilizado e uni-lo com um dos pontos no eixo do y, de modo a formar segmentos paralelos com o primeiro. Na interseção do segundo segmento com o eixo do y é onde estará localizado o produto da multiplicação dos dois fatores.

Ao longo do desenvolvimento da tarefa, o professor deverá fazer o acompanhamento, observando as ações concretas com os alunos e chamando atenção da localização do produto quando se trata da multiplicação de dois fatores com o mesmo sinal e com sinais diferentes. Ao final, o professor deve relembrar aos alunos das conclusões que tiveram na tarefa 13. A seguir apresentamos as construções para os itens propostos nesta tarefa.

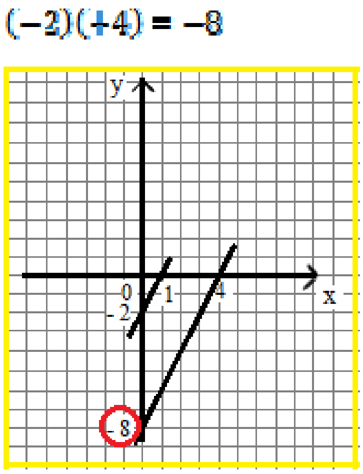
Figura 25 – Construção geométrica do produto de 4 por 2

(+4). (+2)= (+8)



Fonte: organizado pelo autor

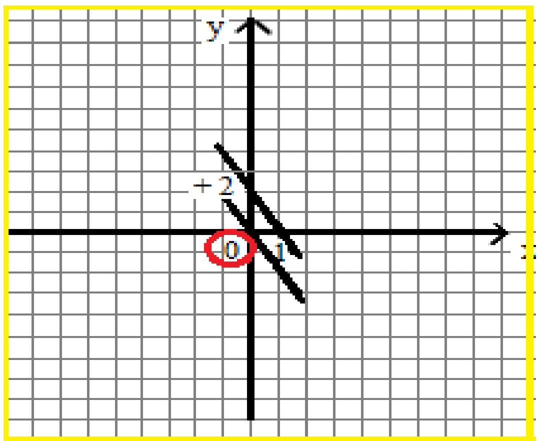
Figura 26 – Construção geométrica do produto de 4 por -2



Fonte: organizado pelo autor

Figura 27 – Construção geométrica do produto de 2 por 0

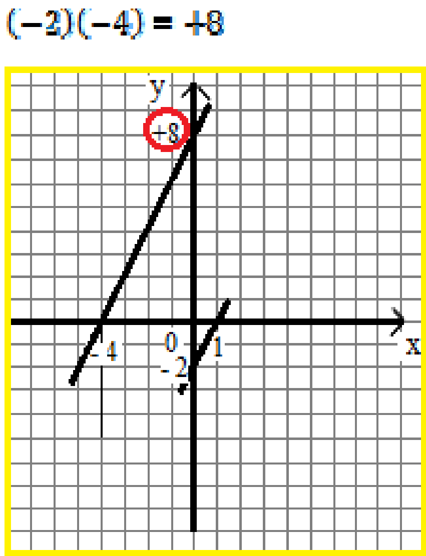
(+2).0=0



Fonte: organizado pelo autor

Notamos que o 2º fator coincide com o produto e é zero.

Figura 28 – Construção geométrica do produto de -4 por -2



Fonte: organizado pelo autor

Assim, para a sistematização das regras, o professor poderá solicitar aos alunos que preencha o esquema a seguir as partir da análise do produto. Ele, o professor, deverá dar ênfase a localização do produto em relação ao eixo dos x (acima ou em baixo dele) em duas situações: 1º quando todos os fatores tiverem os mesmos sinais (todos positivos ou ambos negativos) e, 2º quando os fatores tiverem sinais diferentes. Nesse momento é fundamental que haja interação entre professor e alunos, promovendo um diálogo com a turma.

Nessa altura, os alunos poderão observar a diferença de localização do produto nas situações apontadas no parágrafo anterior. O professor deverá solicitar aos alunos para escrever algumas conclusões. Um exemplo poderia ser: se todos fatores tiverem os mesmos sinais, o produto situa acima do eixo dos x. E se os fatores tiverem os mesmos sinais, o produto situa abaixo dos eixos dos x. A partir das constatações dos alunos, o professor com ajuda de um esquema irá anunciar parcialmente as regras de sinais da multiplicação.

Ao final, o professor deverá propor outras tarefas com números pequenos, pois, quando se envolve os grandes pode dificultar as construções geométricas. Só depois dos alunos compreender a lógica das construções e das regras estabelecidas, poderá propor tarefas envolvendo números grandes com vista a conduzi-los abandonar gradualmente as construções geométricas do produto.

O mesmo procedimento vale para a divisão que a seguir iremos apresentar na tarefa 15.

15. Represente geometricamente o quociente de cada item em um sistema de coordenadas.

(+6÷(+2)=

(-6÷(+2)=

(-9)÷(-3)=

Objetivos:

- Representar a construção do quociente de cada operação,
- Identificar a localização do quociente em relação aos eixos do x (acima ou abaixo dele).

Comentários:

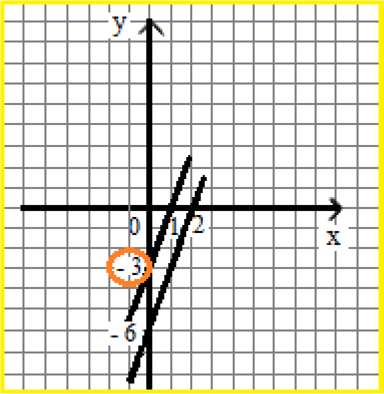
Na divisão de números inteiros relativos, primeiro traçamos um segmento que une o dividendo com o divisor. E, em seguida, a partir da unidade, traçamos um segmento paralelo ao primeiro que irá intersectar o eixo do y. Na interseção desse segmento com o eixo do y localiza-se o quociente. Para tal, o professor deverá solicitar aos alunos para representar o quociente de todos os itens propostos, identificando a sua localização em relação aos eixos do x.

Assim sendo, os alunos poderão concluir quanto à localização do quociente de dois números com os mesmos sinais do dividendo e do divisor e com sinais diferentes.

A seguir apresentamos a proposta de construção de cada item.

Figura 29 – Construção geométrica da divisão de -6 por 2

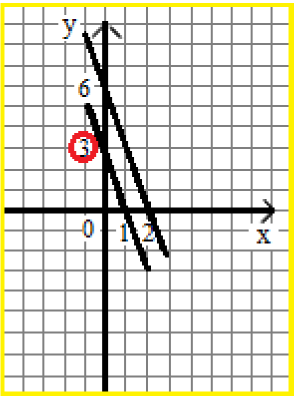
(-6)÷ (+2)= (-3)



Fonte: organizado pelo autor

Figura 30 – Construção geométrica da divisão de 6 por 2.

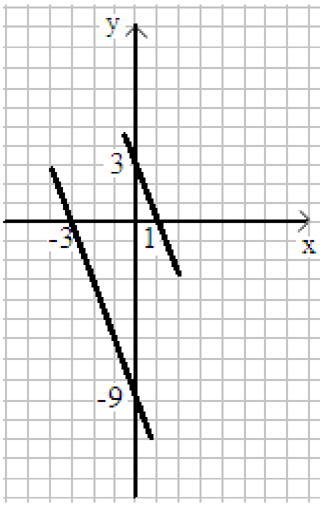
(+6) ÷(+2) =



Fonte: organizado pelo autor

Figura 31 – Construção geométrica da divisão de -9 por -3

(-9)÷(-3)=



Fonte: organizado pelo autor

Depois das construções geométricas do produto e do quociente dos números inteiros relativos, vamos fazer retomadas nas próximas tarefas sobre o uso de contextos para a construção das operações aritméticas. Nosso esforço é no sentido de garantir que os alunos percebam a ligação entre este conteúdo da matemática e os contextos reais.

16. Aurora retirou 100,00 meticais da sua conta no banco. Ela ficou devendo 50,00 meticais ao banco. Qual a quantia que tinha antes de fazer a retirada?

Objetivo:

- Consolidar aplicação dos números inteiros relativos na vida real.

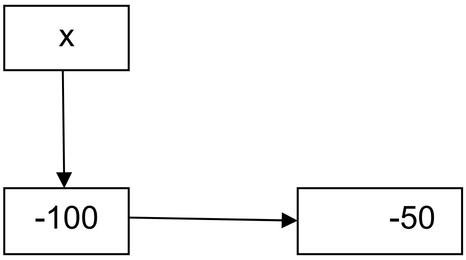
Comentários:

Nas tarefas 16 e 17 não iremos apresentar novos comentários, pois vale os das tarefas 8 e 11. Com essas tarefas pretendemos levar o aluno a consolidar o uso dos números inteiros relativos em situações da vida real.

Do mesmo modo utilizamos o diagrama de Vergnaud para visualização da tarefa.

Estado 1 = x, estado 2 = -100 e estado 3 = - 50

Figura 32 – Representação da situação pelo diagrama de Vergnaud



Fonte: organizado pelo autor

A operação deve ser discutida e formalizada: x -100 = -50 ou x = 100 – 50

X=50

Antes de retirada Aurora tinha 50 meticais na sua conta.

O professor deverá fazer perguntas que busquem compreender o modo como os alunos pensam e como resolvem certa tarefa e qual a sua ideia a respeito do resultado obtido.

17. Um agricultor contraiu um empréstimo de 5000 meticais para a compra de uma motobomba. No fim do 2º ano pagou ao banco 2500 meticais; no 3º pagou 1500 meticais; no 4º pagou 1000 meticais e no 5º e último ano da duração do empréstimo, 500 meticais.

a) Quanto devolveu, no total, ao banco?
b) Qual foi o lucro do banco no negócio?
c) Qual era o saldo do agricultor depois de pagar a 2ª prestação?
d) E qual foi o saldo do agricultor depois da última prestação? Explique o significado desse saldo.

Objetivo:

- traduzir um contexto utilizando o conhecimento dos números inteiros relativos.

Proposta da resolução:

a) Total a devolver = 1ª prestação + 2ª prestação + 3ª prestação + 4ª prestação

= 2500+1500+1000+500

= 5500 Meticais

Ao todo devolveu 5500 meticais ao banco.

b) Lucro do banco = total devolvido + o valor emprestado (=dívida)

=(+5500)+(-5000)

= 500 meticais.

O lucro do banco foi de 500 meticais nesse negócio.

c) Saldo depois da 2ª prestação = total devolvido – (1ª prestação + 2ª prestação)

= 5500- (2500+1500)

=5500-4000

=1500 meticais.

Depois da 2ª prestação, o agricultor tinha o saldo de 1500 meticais.

d) Depois da última prestação, o saldo do agricultor era de: 5500-5500 =0, ou seja, ele já não tem dívida com o banco.

18. Com ajuda da reta numérica, calcule:

a) (-6) – (-4)

b) (-9) – (- 11)

c) (-10)-(+8)

d) (+4)+(-16)

e) 8-3

f) (-3) - (-3)

g) -5- (-2)

h) (+7)- (-3)

i) -3-5

Objetivo:

- Efetuar adições e subtrações simples de números inteiros usando a reta numérica;
- Consolidar as regras de sinais da multiplicação.

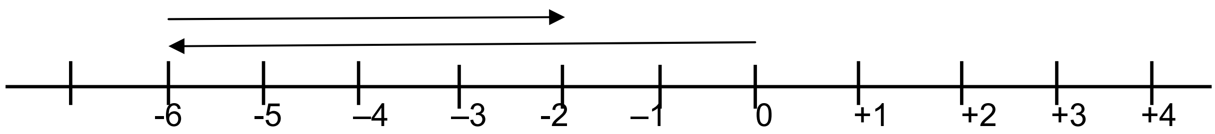
Comentários:

Depois de abordarmos a multiplicação dos números inteiros relativos, nessa altura podemos tratar a subtração desses números, visto que as regras de sinais já foram tratadas. Iremos apresentar os resultados dos itens a), b) e c), visto que os demais poderão ser tratados da mesma maneira.

Como operar com a) (-6) – (-4)?

Neste caso, o professor deve relembrar aos alunos as regras de sinais da multiplicação, com vistas a efetuar as transformações intermediárias. Neste caso teremos: (-6) – (-4) = (-6) + (+4). A partir desse momento o professor solicita aos alunos representar a operação na reta numérica, podendo ser descrito em termos de movimento. Por exemplo, marca-se 6 unidades para a esquerda a partir do zero. E como sabemos pelas regras de sinais que –(-4) = 4, logo, em seguida, a partir da extremidade da seta, marca-se 4 unidades para a direita, o que resulta: (-6) – (-4) = -2. A figura a seguir ilustra a sua representação na reta numérica.

Figura 33 – Representação de (-6) – (-4) na reta numérica



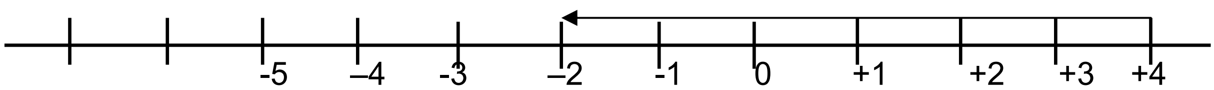
Fonte: organizado pelo autor

Outra forma de interpretar a mesma operação pode ser:

(-6) – (-4) = (-6) + (+4)

João esteve no quarto andar acima do subsolo. Em seguida desce seis andares. Agora, ele está no segundo andar do subsolo. Ilustramos esse movimento na figura a seguir.

Figura 34 – Outra possibilidade da representação de (-6) – (-4) na reta numérica



Fonte: organizado pelo autor

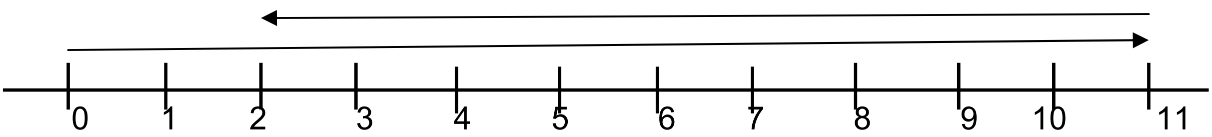
O professor deve cuidar para que os alunos percebam a diferença entre as demais tarefas propostas. Do mesmo modo, deve chamar atenção dos alunos ao utilizar a reta numérica para representar a operação que, apesar dos cálculos intermediários efetuados, não se trata de uma nova representação da situação.

O professor deve insistir que os alunos expliquem os procedimentos que forem utilizar nas tarefas propostas.

Como operar com b) (-9) – (-11)?

Este tipo de subtração exige o conhecimento das regras de sinais da multiplicação, por isso, o professor pode solicitar que os alunos façam os cálculos intermediários. Assim sendo, (-9) – (- 11) = (-9) + (+11). Aqui, chamamos atenção pois muitas vezes a operação de subtração não encontra uma referência contextual. Por exemplo, como fica a contextualização de (-9) – (- 11): uma dívida de 9 meticais subtraída de uma dívida de 11 meticais se torna 9 dívidas somadas a 11 créditos, o que dá 2 créditos? Depois dessa transformação, podemos contextualizar da seguinte maneira: o saldo bancário de Ângelo é de 11 meticais. Ele decide retirar 9 meticais. O seu saldo atual é de 2 meticais. A seguir ilustramos a sua representação na reta numérica.

Figura 35 – Representação de (-9) – (- 11) na reta numérica



Fonte: organizado pelo autor

O professor deve chamar atenção dos alunos, pois esta não se trata de uma nova situação.

Ao final, o professor deve encerrar a tarefa com uma discussão com a turma com vistas a (re)organizar, sistematizar e resumir os resultados obtidos, chamando atenção das transformações intermediárias quando se trabalha com a subtração. E, ainda, que a reta numérica pode ser utilizada, num primeiro momento, para adição e, depois da multiplicação, a reta também pode ser utilizada com a subtração.

Como operar com c) (-10)-(+8)?

O professor deve relembrar os alunos das regras de sinais da multiplicação que podem ajudá-los a fazer cálculos intermediários. Neste caso, a operação (-10)-(+8) transforma-se em (-10)+(-8). A partir desta última operação, o professor pode convocar os alunos para aplicar os procedimentos anteriores tanto da representação na reta quanto na contextualização dessa operação.

19. Sem usar a reta graduada, calcule:

a) (-20) –(+40)
b) (+150) – (-50)
c) (-2014) - (-2013)
d) 20-50
e) -45-(-30+5)-10
f) (-4) + (-8) –(-10) +(-10)

Objetivo: efetuar adições e subtrações simples de números inteiros sem a reta numérica.

O professor deverá solicitar aos alunos a efetuar as operações dadas sem o uso da reta numérica. Essa tarefa poderá ser feita em pequenos grupos com vista a promover discussões entre alunos. Durante a realização da tarefa, o professor deverá percorrer entre as carteiras, observando o que os alunos fazem e ajudando no que for necessário. Ao final, deverá solicitar alguns alunos para apresentar as suas respostas na Lousa. As respostas deverão ser analisadas e discutidas e posteriormente tiradas as conclusões.

20. Sem usar as construções geométricas, calcule:

a) 21÷(-7)
b) (-100)÷ (+20)
c) 75÷(-3)
d) (-25) ÷5
e) [2.(-5)] ÷(-5)
f) (-3-7) ÷2

Objetivo:

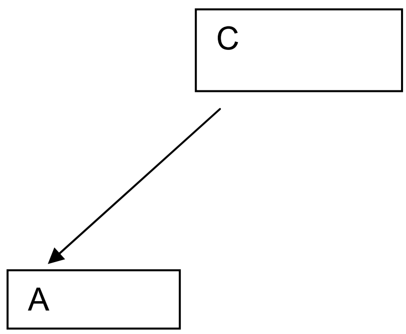
- efetuar as operações da divisão e de multiplicação dos números inteiros relativos sem construções geométricas.

Comentários

O professor deverá solicitar aos alunos a efetuar as operações dadas sem o recurso ao método geométrico. Nessa altura, o professor deverá acompanhar o desenvolvimento da tarefa, observando as ações concretas e ajudando no que for necessário. A ênfase deverá ser a condução dos alunos à utilização das regras de sinais da multiplicação com vista a obtenção de respostas corretas. Ao final, o professor poderá solicitar alguns alunos para apresentar as suas resoluções na Lousa. Estas, deverão servir de ponto de partida para as discussões e consolidação das regras de sinais.

Ressalvamos que na proposição das tarefas 1 a 20, à luz da multidimensionalidade do conhecimento dos números inteiros relativos, tivemos em conta seis grupos que envolvem as construções seguintes: AR, AC, CR, RA, CA e RC. A nossa ênfase foram as dimensões da reta e do contexto. Essa escolha justifica-se pelo fato de que os livros didáticos e o PEM analisados dão mais ênfase à dimensão abstrata. Para ilustrarmos isto, organizamos as nossas tarefas em função das construções de conhecimentos entre as dimensões que podem ocorrer. A seguir apresentamos os diferentes casos dessas construções.

Figura 36 – Construções de conhecimentos entre as dimensões CA

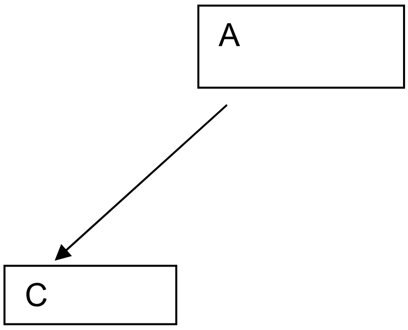


Fonte: organizado pelo autor

A proposição das tarefas 1; 2; 8; 9; 11; 16 e 17 visam a construção de conhecimentos entre as dimensões de contextos e do abstrato (figura anterior).

A tarefa 4 visa a construção de conhecimento da dimensão abstrata para a do contexto, conforme ilustramos na figura a seguir.

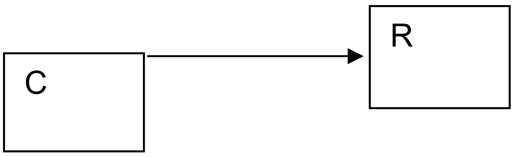
Figura 37 – Construções de conhecimentos entre as dimensões AC



Fonte: organizado pelo autor

A proposição das tarefas 10 e 12 visa a construção de conhecimentos entre as dimensões de contexto e da reta, conforme ilustramos a seguir.

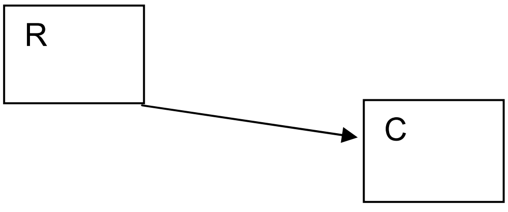
Figura 38 – Construções de conhecimentos entre as dimensões CR



Fonte: organizado pelo autor

A proposição da tarefa 5 visa a construção de conhecimento da dimensão da reta contextual. A figura abaixo ilustra essa situação.

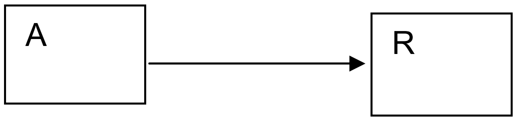
Figura 39 – Construções de conhecimentos entre as dimensões RC



Fonte: organizado pelo autor

A nossa intenção ao propor as tarefas 3; 14; 15 e 18 é no sentido de um esforço para que possa ocorrer construções de conhecimentos entre as dimensões abstratas e da reta. Esboçamos esta situação no quadro abaixo.

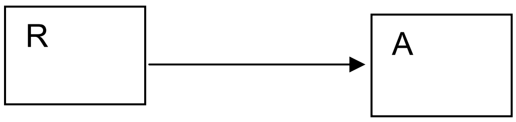
Figura 40 – Construções de conhecimentos entre as dimensões AR



Fonte: organizado pelo autor

Visando à construção de conhecimentos a partir da reta ao abstrato, propomos as tarefas 6 e 7, cujo esboço apresentamos abaixo.

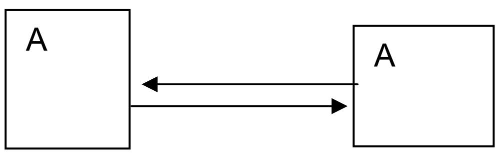
Figura 41 – Construções de conhecimentos entre as dimensões RA



Fonte: organizado pelo autor

A proposição das tarefas 13, 19, e 20 visa essencialmente a consolidação das regras para o trabalho com as quatro operações que envolvem os números inteiros relativos. Isto pode ser feito, sobretudo, na dimensão abstrata. É a partir do trabalho desenvolvido nessa dimensão que se pode generalizar as regras das operações discutidas nas tarefas anteriores. A seguir ilustramos esta situação no quadro abaixo.

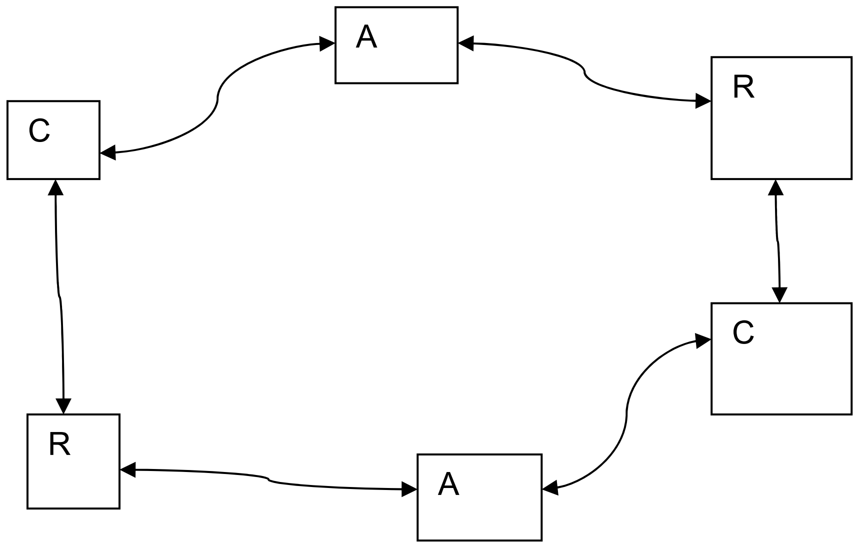
Figura 42 – Construções de conhecimentos entre as dimensões AA



Fonte: organizado pelo autor

Compondo as ilustrações dos quadros anteriores correspondentes às tarefas 1 a 20, podemos resumir as construções de conhecimentos entre as dimensões dos números inteiros relativos no esboço abaixo:

Figura 43 – As articulações entre tarefas na multidimensionalidade de conhecimento



Fonte: adaptado de Bruno (1997)

A partir da figura anterior, podemos observar que não há um lugar predefinido para começar uma tarefa de ensino. Cada um dos pontos num retângulo pode constituir um ponto de partida para a introdução dos números inteiros relativos. Nossa intenção é de que o ciclo precisará se fechar de modo que o conhecimento construído possa articular as três dimensões. Assim sendo, nosso esforço é no sentido de que o ensino e a aprendizagem desse conteúdo matemático possam ocorrer se possível de um modo efetivo.

A seguir apresentamos as considerações finais desta pesquisa, destacando os aspectos relevantes e apontando as sugestões para um programa de formação de professores e para futuras pesquisas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O nosso objetivo nessa pesquisa foi elaborar uma proposta de ensino para o trabalho com números inteiros relativos para a educação escolar que articula as dimensões de conhecimento dos números relativos, conforme Bruno (1997) criando assim a partir desta proposição uma oportunidade para promover reflexões e discussões a respeito do ensino dos números inteiros relativos.

Para alcançarmos esses objetivos, investigamos um grande número de textos especializados sobre o tema sintetizando o que fazia parte do nosso objeto do estudo. A leitura desses textos nos auxiliou para delinearmos um curso de formação de professores que ensina Matemática na 8ª classe. Nesse curso discutimos as diferentes vias de acesso que os textos especializados apontam como sendo potenciais para o ensino dos números inteiros relativos.

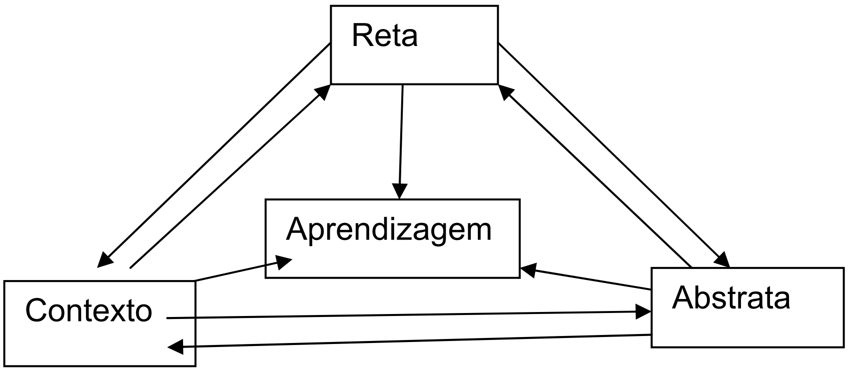
A partir dos assinalamentos nesses textos e das vivências dos professores, elaboramos uma proposta de tarefas que numa fase de estudo piloto foi aplicada em 4 turmas da 8ª classe, no final, com base nas dificuldades e sucessos obtidos durante a aplicação, elaboramos uma proposta de tarefas sobre números inteiros relativos.

Acreditamos que o conteúdo proposto é a base para o início da aprendizagem da Matemática do Ensino Secundário geral (8ª à 12ª classe) e que o entendimento dessa matéria pode auxiliar o aluno na compreensão de outros conteúdos da Matemática. Esse assunto pertence à primeira unidade temática da Matemática da 8ª classe e, é nessa classe que o processo de abstração se torna cada vez mais complicado, pois a ideia de álgebra começa efetivamente com a introdução do número inteiro relativo. O êxito para as classes posteriores pode depender da apropriação desse conteúdo. Por isso, entendemos que quando sistematizado de forma adequada o ensino dessa matéria, tem-se a possibilidade de os alunos compreenderem os conteúdos subsequentes sem grandes sobressaltos.

O nosso esforço é no sentido de que o professor perceba a necessidade de diferentes abordagens para o ensino dos números inteiros relativos.

Nessa ordem de ideia, a multidimensionalidade de conhecimento para a construção dos números inteiros relativos através das considerações que apresentamos nessa pesquisa constitui um indicador fundamental e pode ser esquematizada conforme ilustrado na figura a seguir.

Figura 44 – Proposta de Ensino dos números inteiros relativos



Fonte: reorganizado pelo autor com referência a Bruno, 1997

No primeiro momento, o professor propõe algumas tarefas que podem auxiliar o aluno na elaboração de conhecimentos da dimensão da reta para a de contexto e vice-versa (RC/CR) e solicita que os alunos individualmente resolvam as tarefas, o que justifica a proposição das tarefas 5, 10 e 12 da nova proposta. Durante essa fase o professor poderá observar a participação destes. Depois, pede a um ou dois alunos para apresentar suas respostas. Essas respostas poderão ser discutidas e tiradas as conclusões.

No segundo momento, o professor propõe outras tarefas que envolvam a construção de conhecimentos da dimensão abstrata para a de contexto e vice-versa (AC/CA), explicando desse modo a relevância da proposição das tarefas 1, 2, 4, 8, 9, 11, 16 e 17. No terceiro momento, o professor pode propor mais tarefas que envolvam a elaboração de conhecimentos da dimensão abstrata para a da reta e vice-versa (AR/RA), aclarando a proposição das tarefas 3, 6, 7, 14, 15 e 18. Essas tarefas podem ser resolvidas durante o decorrer das aulas ou recomendadas como trabalho para casa. Em todo o caso, elas devem ser realizadas em duas fases: primeiro o aluno resolve individualmente e, na segunda fase, se junta a colegas de grupos para debater as respostas obtidas. Depois, as respostas deverão ser apresentadas aos demais colegas da turma. Isso visa buscar respostas corretas e corrigir aquelas erradas justificando o porquê de estar erradas. Sob o ponto de vista do ensino, esse procedimento poderá ser benéfico, visto que confere autoria ao aluno. Nossa intenção é assegurar que o resultado desses três momentos possa resultar na aprendizagem dos números inteiros relativos, conforme ilustrado na figura anterior.

Assim sendo, para que a aprendizagem dos números inteiros relativos tenha sentido, julgamos ser imprescindível que o ensino institua situações que possam levar o aluno à elaboração de conhecimentos dentro das três dimensões de conhecimentos (reta, abstrata e contexto). Se o ensino abandonar uma das dimensões então poderá haver problemas porque ele poderá ser incapaz, por exemplo, de dar sentido aos números inteiros, de generalizar as propriedades desses números e de fazer a sua visualização como forma de reduzir o grau de abstração desse conteúdo matemático. A proposta foi esquematizada no sentido de garantir a construção de conhecimentos entre as dimensões de conhecimentos.

Observamos igualmente que os problemas aditivos são uma fonte para a construção de conhecimento entre dimensões, visto que esses se baseiam em transformações de estados, daí que esse aspecto mereceu atenção na proposição da proposta. Assim sendo, as tarefas elaboradas envolvem contextos que podem ajudar os alunos a movimentarem-se dentro das dimensões. As tarefas foram elaboradas no sentido de garantir que o aluno possa agir, refletir, relacionar e comparar.

As tarefas nas dimensões do contexto e abstrata devem ter reflexo na reta. Por isso, ao elaborarmos as tarefas para a proposta tivemos em conta a observância das exigências da multidimensionalidade do conhecimento. Isso pode permitir que a construção de conhecimento entre dimensões seja feita de tal modo que as regras operatórias novas, que se situam na dimensão abstrata tenham uma clara translação em dimensões do contexto e da reta (Bruno, 1997).

Ao buscarmos a ideia de multidimensionalidade pensamos na possibilidade de contribuirmos com os professores em formação na acepção de auxiliá-los a explicitar os procedimentos que podem ser usados na realização de tarefas e na compreensão das dificuldades que os alunos encontram na aprendizagem dos números inteiros relativos.

Apontamos também que para o bom funcionamento das transferências entre dimensões, pode ser interessante ao professor elaborar e fazer questionamentos que visam direcionar o aluno a esse propósito. A ideia por trás dessa multidimensionalidade consiste em conduzir os alunos a verem o mesmo objeto Matemática de diferentes maneiras. Essa visão pode contribuir para que alunos analisem, comparem e verifiquem suas táticas de resolução das tarefas enquadrando-as em contextos diversificados. Isso no sentido de que pode ampliar as suas capacidades matemáticas.

Para o desenvolvimento dessa proposta, há necessidade de promover cursos de capacitação aos professores de Matemática do Ensino Secundário Geral. Essa preparação pode começar com os professores em formação que são os mentores dos processos de ensino e de aprendizagem, conferindo-lhes subsídios necessários para o exercício das suas funções.

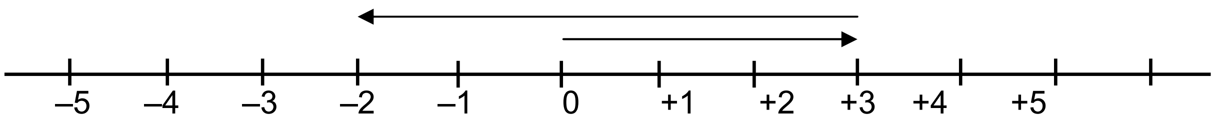
Com essa proposta pretendemos trazer por meio das tarefas elaboradas uma reflexão para o ensino, esperando que esse documento possa incentivar os professores na busca de diferentes abordagens dos números inteiros para a 8ª classe.

O estudo que efetuamos sobre os livros didáticos de Matemática da 8ª classe do ensino moçambicano e o PEM revelou-nos que as três dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos estão presentes. Todavia, a maioria das tarefas propostas não favorece a articulação com tais dimensões. As três dimensões ocorrem de forma desarticulada nos quatro livros didáticos e no PEM. Nesses livros constatamos um excesso de tarefas que remetem à construção de conhecimento dentro da dimensão abstrata. São tarefas que envolvem as manipulações destituídas de criatividade, que na sua maioria não estimula a imaginação. Verificamos ainda a ausência de tarefas de natureza contextual que poderia mostrar as aplicações da matemática no dia a dia. Portanto, constatamos a falta de preocupação no sentido de colocar conexões com outras matérias.

Assim sendo, verificamos que a abordagem dos números inteiros relativos é baseada essencialmente num estudo das operações via abstrata, caracterizada pela predominância de tarefas na dimensão abstrata. O uso da reta e de contextos é relegado ao segundo plano. Igualmente constatamos que os livros didáticos não possuem tarefas em que os alunos são solicitados a fazer interpretações de expressões numéricas, ou seja, a contextualizar a partir de uma operação dada.

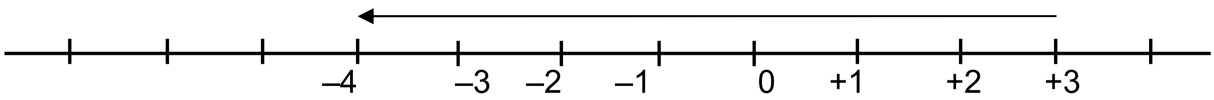
Nosso esforço é no sentido de que quando as tarefas propostas forem devidamente aplicadas podem promover a capacidade de raciocinar, de identificar, de visualizar, de analisar e de interpretar situações de aprendizagem, explorando a conexão entre a Matemática e a vida diária do aluno.

A tarefa abaixo é um exemplo típico das poucas que aparecem nos livros didáticos. Ela apresenta uma vantagem pelo fato de que pode levar o aluno a verbalizar, a manipular e, enfim, a agir.



Para um sucesso, a tarefa abaixo exige que o aluno discorra, experimente, manipule, analise e relacione o resultado com os dados. Esse tipo de tarefa não aparece nos quatro livros didáticos analisados.

Qual é a operação que pode ser representada pela seta:



Como podemos ver a partir da construção anterior, para o sucesso nessa tarefa, o aluno precisa contar as unidades, relacionar o ponto de partida e o de chegada orientando-se com o sentido da seta. Durante esse movimento, ele pode descobrir muitas possibilidades para se chegar ao mesmo resultado.

O nosso esforço é no sentido de assegurar que a proposta que apresentamos possa constituir uma contribuição que pode ser utilizada pelos formadores de professores de Matemática, constituindo um instrumento para discussão com os alunos nas aulas de matemática.

Essa proposta pode ser um indicador para que os formuladores das políticas dos planos nacionais da Educação de Moçambique possam seguir. Em detalhe, essa proposta apresenta os seguintes benefícios em relação ao ensino moçambicano:

- Serve de um indicador para os formuladores das políticas nacionais dos planos de estudos para refletir sobre a abordagem deste tema e de outros nos livros didáticos;
- Um indicador para programar e direcionar a realização de cursos de capacitação dos professores em exercício e em formação inicial e continuada;

- Constitui uma trajetória que pode ser inspirada para formação de professores de matemática de outros níveis de escolaridades (1ª a 7ª classe);
- Um indicador para a seleção dos livros didáticos de Matemática para a 8ª classe;
- Pode promover um ciclo que permite ao aluno interconexão com outros assuntos, o que pode facilitar a aprendizagem;
- Pode promover o ensino desta matéria ao professor, uma vez que este estará conscientizado das relações necessárias entre tarefas a elaborar e as dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos;
- Replicar a proposta para outras matérias da 8ª ou outras classes, desde que obedeça a ideia de multidimensionalidade;
- Enfatiza a necessidade de diversificar as situações para o ensino dos números inteiros relativos.

Essa proposta representa uma organização de proposições didáticas para esse conteúdo, visto que são raras as pesquisas que estudam as articulações de tarefas com as dimensões de conhecimentos dos números inteiros relativos, conforme Bruno (1997).

Devido ao poder de visualização que o método geométrico possui e o fato de os alunos terem o gosto pelo desenho, o uso desse método para o ensino dos números inteiros relativos pode contribuir para a justificação das regras de sinais com alunos da 8ª classe (ver tarefas 14 e 15 da nova proposta).

Antes da introdução do tema, o professor pode solicitar aos alunos que forneçam exemplos de situações ilustrando os diferentes aspectos relacionados ao uso das operações da adição com os números naturais, com vistas a dar significado a tais operações e, a partir dessas verificar quais as situações que são privilegiadas por aqueles alunos. Esse entendimento pode ajudar o professor a preparar tarefas considerando tais contextos.

Os professores e os autores dos livros didáticos deveriam criar oportunidades de modo que, a partir dos modelos, símbolos e algoritmos sejam mostradas as ligações desses com as experiências dos alunos, de maneira que possam ser atribuídos significados na vida real.

Propomos que no PEM seja incorporada uma parte da história dos números inteiros relativos que tragam alguns obstáculos didáticos e epistemológicos que foram enfrentados sobre o desenvolvimento dos números inteiros relativos por entendermos que o professor deveria compreender a gênese desse tema, o que pode auxiliá-lo a prever as dificuldades e, consequentemente, acautelar-se das escolhas das estratégias para o ensino dessa matéria.

Assim sendo, procuramos proporcionar subsídios de reflexão que possam motivar os professores a buscarem alternativas para o ensino em vez de se limitar às informações que os livros didáticos e o PEM apresentam. Igualmente, sugerimos que as operações aritméticas com os números inteiros relativos sejam apresentadas quer nos livros, quer no PEM, em três momentos que a seguir pontuamos:

- Em primeiro lugar, abordar a operação da adição dos números inteiros relativos;
- Em segundo lugar, tratar as operações da multiplicação e da divisão dos números inteiros relativos; e,
- Em terceiro lugar, abordar a operação da subtração dos números inteiros relativos.

Essa ordenação justifica-se da necessidade de atender a subtração do tipo a-(-b) que encontra explicação depois de tratamento da multiplicação, tendo em conta que as transformações intermediárias decorrentes desta operação só podem ser explicadas a partir do entendimento das regras de sinais da multiplicação. É preciso neste momento referenciar que a subtração nem sempre tem explicação contextual. Por exemplo, que significado contextual pode atribuir à operação 4 –(-3)? De um crédito de 4 meticais subtrair uma dívida de 3 meticais resulta num crédito de 7 meticais (MORETTI, 2012).

Por fim, o mais importante aspecto que pode constar no PEM são as diferentes abordagens desse tema (multidimensionalidade do conhecimento). Assim, o professor terá maior possibilidade de escolher a via que mais se adequa à realidade dos seus alunos, tendo em conta que essa escolha dependerá muito da formação do professor, seus conhecimentos acerca do tema, dos materiais e dos objetivos.

Assim, percebemos que podemos ensinar os números inteiros relativos utilizando vários caminhos: podemos começar por ensinar aos alunos as operações desse conjunto de forma isolada, isto é, sem contexto numa primeira fase, para depois apresentar essas mesmas operações com contextos reais, em seguida fazemos a sua visualização gráfica.

Para futuras investigações, sugerimos uma discussão com professores a respeito das tarefas com vista a dar continuidade da pesquisa.

Ao finalizar essa tese, muitas inquietações surgiram, por exemplo: o que realmente significa ser Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática? E agora, qual é o desafio a seguir?

Um convênio entre a Universidade Estadual de Londrina e a Universidade Pedagógica de Moçambique, poderia ser uma oportunidade para que os estudantes do Programa de Ensino de Ciências e Educação Matemática possam visitar, conhecer e participar de estágio em cursos de graduação e pós-graduação. Igualmente pode constituir oportunidade para que professores de ambas Universidades possam trocarem experiências no âmbito da docência, pesquisa e extensão.

REFERÊNCIAS

AFRIMAP e SOISA. **A prestação efetiva de serviços públicos no sector da educação.** Um relatório publicado pelo AfriMAP e pela Open Society Initiative for Southern Africa. Disponível em: <http://www.afrimap.org/english/images/report/AfriMAP_Mocambique_Educ_main_PT.pdf>. Acesso em: 8 ago. 2012.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico:** contribuições para uma psicanálise do conhecimento. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999.

BARDIN, E., BAGNI.G T., GRUGNETTI, L., KRONFELLNER M., LAKOMA, E., MENGHINI, M. Integrating History: research perspectives, In: FAUVEL, J.; MAANEN, J. V. (Orgs.). **History in Mathematics Education**: The ICMI Study. London: Kluwer Academic Publisher, P. 63-90, 2000.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2011.

BELL, A. Ensenanza por diagnostico. Algunos problemas sobre numeros enteros. Shell centre for Mathematics Education, University of Nothinghan: **Investigation y experiencias didacticas,** 1986.

BORBA, R. E.S. R. O ensino e a compreensão de números relativos. In: SCHLIEMANN, Analúcia e CARRAHER, David (Orgs.). **A compreensão de conceitos aritméticos:** ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998, p. 121-151.

BOGDAN, C. R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Ed. Porto. 1994. Tradução de Qualitative research for education.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, 1991.

BRUNO, A. La ensiñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. Números**. Revista de didática de la Matemática**, Universidad de La Laguna, n. 29, Marzo 1997. p. 5-18.

CAJOR, F. **Uma História da matemática.** Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciências Moderna Ltda., 2007.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. ed. Portugal: Lisboa, 1970.

______. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. ed., Lisboa: Gradiva, 2003.

CARRAHER, T. N. Negative numbers without minus sign. In: **Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. July 15-20, v. III. México, 1990.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCON, J. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CYRINO, M. C. C. T.; PASQUINI, R. C. G. **Multiplicação e divisão de números inteiros**: uma proposta para a formação de professores de Matemática. (Orgs.) Iran Abreu Mendes e Miguel Chaquiam. Londrina: SBHMat, 2.ed., 2010. (Coleção História da Matemática para professores, 14).

D'AMORE, B. **Epistemologia e didática da matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonomi Barufi. São Paulo: Escrituras, 2005. (Coleção Ensaios Transversais).

D'AMBRÓSIO, U. **Matemática. Da teoria à prática.** 4.ed. Campinas: Papirus, 1998. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures***.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.

______. **Mathematics as an educational task.** D. Reidel, Dordrecht, 1973.

GLAESER, G. Epistemologia dos números negativos. **Boletim do GEPEM**, n. 17, p. 29-124, 1985.

INDE. Resumo do relatório diagnóstico do ensino secundário Geral. MEC/INDE, Maputo: 2004.

______. **Programa da Matemática da 8ª classe**. MEC/INDE, Maputo, 2010.

KLEINE, M. **O fracasso da matemática moderna**: Tradução de Leônidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

LINTZ, R. G. **História da Matemática**. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

MARÍ, J. L. G. **El campo conceptual de los números naturais relativos**. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1995.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva**. Ijuí: Editora UNIJUÍ, 2011.

MORETTI, M. T. A regra dos sinais para a multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v.26, n.42B, p.691-714, abr. 2012.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001

______. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades. **Revista Pró-Posições**. Campinas, SP, Unicamp, v. 4, n. 1[10], p. 60--72, mar. 1993.

TROVON, A. Obstáculos epistemológicos e didáticos. Disponível em: <http://people.ufpr.br/~trovon/cursos/especializacao2009/obstaculos.pdf>. Acesso em: 3 mar. 2014.

VERGNAUD, G. Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação. **Psycologie Française**, 30 (3-4), 1985.

______. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da Matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Curitiba: Ed. UFPR, 2009.