UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

JADER OTAVIO DALTO

A Produção Escrita em Matemática:

análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002

LONDRINA

2007

JADER OTAVIO DALTO

A Produção Escrita em Matemática:

análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito para obtenção do Título de Mestre.
Orientadora: Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco.

LONDRINA

2007

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

D152p Dalto, Jader Otavio.

A produção escrita em matemática : análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio da AVA/2002 / Jader Otavio Dalto. – Londrina, 2007.

100f. : il.

Orientador : Regina Luzia Corio de Buriasco.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2007.

Bibliografia : f. 85–88.

1. Educação matemática – Teses. 2. Matemática – Avaliação da aprendizagem – Teses. 3. Produção escrita em matemática – Teses. 4. Matemática – Acertos e erros – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós–Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

JADER OTAVIO DALTO

A Produção Escrita em Matemática:
análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito para obtenção do Título de Mestre.
Orientadora: Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco.

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Profª. Drª. Ângela Marta P. das D. Savioli
Universidade Estadual de Londrina

____
Profª. Drª. Helena Noronha Cury
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

____
Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, ___ de ________________ de 2007.

A meus pais *Vera Lúcia*
e *Rubens*, nos quais me espelho.

AGRADECIMENTOS

De todas as coisas que tenho aprendido durante minha vida, a mais importante é que nada somos sem os outros. Tudo que somos e tudo que sabemos é resultado de nossas interações com as pessoas que nos cercam. Assim, mesmo que pudesse, não conseguiria listar todas elas que, direta ou indiretamente, me ensinaram algo que me fizesse ‘crescer’ e me tornar uma pessoa melhor. A todas estas pessoas, muito obrigado.

Em especial, meus sinceros agradecimentos:

A Deus, pela vida, sabedoria, perseverança;

Aos meus pais e à minha família pelo apoio e compreensão nos momentos em que estive ausente;

À Regina, mais que orientadora, pela atenção, paciência, dedicação, amizade dispensadas durante todo tempo;

À Profª. Tiemi Matsuo, pelo auxílio estatístico na composição da amostra;

As Professoras Ângela Marta e Helena que gentilmente fizeram parte da Banca Examinadora do Exame de Qualificação e da Defesa, trazendo valiosas contribuições para este trabalho;

A todos os amigos que fiz durante o Mestrado, em especial aos participantes do GEPEMA.

Há quem passe por um bosque e só veja
lenha para a fogueira.

Leon Tolstoi

DALTO, Jader Otavio. **A Produção Escrita em Matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 2007. 100 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina.

RESUMO

Este trabalho estuda a produção escrita presente na Questão Aberta Comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação do Rendimento Escolar do Estado do Paraná – AVA/2002. Pretendeu-se, com esse trabalho, encontrar respostas para algumas questões, tais como: quais as estratégias/procedimentos utilizados pelos alunos dessas séries para resolver uma questão comum? Tais estratégias/procedimentos são os mesmos? Que tipos de erros são encontrados? Esses erros são os mesmos, independente da série? Existe compatibilidade de marcas de conteúdo matemático na produção escrita encontrada? A abordagem metodológica adotada é predominantemente qualitativa, orientando-se pelas técnicas da análise de conteúdo como ferramenta de compreensão e inferência da produção escrita dos alunos em uma amostra, determinada por procedimentos estatísticos, de todas as provas aplicadas no Estado do Paraná. Além disso, identificam-se quatro categorias de resolução da questão comum. Em cada uma destas categorias, inferem-se os enunciados de problemas que os estudantes parecem ter compreendido e resolvido a partir da interpretação que fizeram do enunciado da questão original. Como resultados principais, tem-se que: a) o desempenho dos estudantes da 3ª série do Ensino Médio é melhor que o desempenho dos estudantes da 8ª série do Ensino Fundamental; b) na grande maioria das Provas verifica-se a utilização de uma estratégia aqui considerada aritmética (operações aritméticas sobre números, como adição, subtração, multiplicação e divisão), mesmo nas Provas da 3ª série; c) analisando as produções escritas, parece que a maior dificuldade enfrentada pelos estudantes foi compreender o enunciado da questão; d) as maneiras pelas quais a questão foi resolvida não diferem muito de uma série para outra.

Palavras-chave: Educação Matemática; Avaliação da Aprendizagem em Matemática Escolar; Produção escrita; Acerto e Erro em Matemática.

DALTO, Jader Otavio. **The Written Production in Mathematics:** An Interpretative Analysis of the Open-ended Question common to grade 8th of Fundamental Teaching and to grade 3rd of Medium Teaching of AVA/2002. 2007. 100 p. Dissertation Thesis (Master Degree in Science Teaching and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina.

ABSTRACT

This work studies the written production at the Open-ended Question which is common to grade 8th of Fundamental Teaching and to grade 3rd of Medium Teaching of the Mathematics Open-Ended Question's Test of the School Revenue Assessment of Parana State - AVA/2002. We intended, with that work, to find answers for some questions, such as: which strategies/procedures do the students use to solve the common open-ended question? Are such strategies/procedures the same ones? What kind of mistakes can we find? Are those mistakes the same ones, independent of the grades? Are there compatibility marks of mathematical content in the written production? The adopted methodological approach is predominantly qualitative. We have guided by the techniques of the content analysis as an understanding and inference tool of the students' written production in some tests, which were chosen by statistical procedures of all Parana State's tests. Moreover, four resolution's categories of the common question are identified. In each one of these categories, we infer the statements of problems that the students might understood from the interpretation that they had made of the statement of the original question. As main results, we have: a) the students of grade 3rd had better performance than the grade 8th ones; b) most of the students used an arithmetical strategy (arithmetic operations on numbers, as addition, subtraction, multiplication and division) to solve the question, even at the grade 3rd tests; c) analyzing the written production, we can infer that the largest difficulty faced by the students was to understand the statement of the question; d) the ways that the question was solved by the students of grade 8th are not quite different from the way grade 3rd students did.

Key-words: Mathematics Education; Learning Assessment in School Mathematics; Written Production; Right and Mistake in Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Aprender Matemática é uma tarefa considerada por muitas pessoas como sendo não muito fácil. Ao longo dos anos, apesar de ser uma das disciplinas com a maior carga horária curricular, a Matemática tem sido apontada como causa de muitas reprovações, sendo considerada a 'vilã' dos meios escolares.

Mas o que indica a reprovação? Pode-se considerar que o aluno é reprovado porque o conhecimento construído/apropriado por ele durante um certo período – bimestre, trimestre, ano, etc. – é insuficiente para que possa prosseguir em sua escolaridade, ou para que possa viver, exercendo sua cidadania. Assim, um aluno é reprovado porque ainda lhe 'falta' aprender algo, ainda lhe 'falta' alguma competência e/ou habilidade que o cidadão 'ideal' ou que o aluno 'ideal' da série seguinte deve possuir. Percebe-se, então, que na maioria das vezes realiza-se a avaliação pela falta, desvalorizando o conhecimento que o aluno já construiu.

Na escola, aprovação ou reprovação parecem ser tomadas como sentenças irrevogáveis, feitas por meio de um julgamento de valor das informações obtidas durante o processo avaliativo. Nesse sentido, se aprender e ensinar Matemática são tarefas nada fáceis, avaliar a aprendizagem matemática parece ser mais difícil ainda.

Durante toda minha vida escolar, dois fatos sempre me incomodaram:

1. por que tantas pessoas têm dificuldade em aprender Matemática?
2. até que ponto os resultados da avaliação efetivamente refletem o quanto um aluno conhece de determinado conteúdo?

No que diz respeito à avaliação, estas questões têm conduzido minha vida acadêmica. São, também, preocupações presentes não apenas no movimento Educação Matemática, mas também nos discursos dos que conduzem os sistemas de ensino.

O Estado do Paraná, segundo documentos oficiais (PARANÁ, 1995; PARANÁ, 1997), com intuito de conhecer as reais condições do Sistema Estadual de Ensino, as condições em que a educação está sendo realizada, bem como seu nível de qualidade, implantou o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado do Paraná – AVA. As primeiras edições do AVA continham apenas questões de múltipla escolha. Entretanto, na edição de 2002, um terço dos alunos da 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio foram submetidos a uma Prova de Questões Abertas de Matemática. Esta Prova[1] é composta por 3 ou 4 questões abertas, também chamadas discursivas. Neste tipo de questão, como não são apresentadas alternativas de resposta, o aluno deve ler a questão, compreender e interpretar o enunciado, escolher uma estratégia ou procedimento que considera resolver a questão, registrar seu raciocínio, seus cálculos ou o que for necessário para somente então apresentar a resposta.

Os resultados das aferições anteriores a 2002 revelaram que, de um modo geral, o desempenho dos estudantes em Matemática manteve-se abaixo do esperado. Esses resultados não garantem respostas a perguntas tais como: Que "Matemática" os alunos conhecem? Como eles utilizam esse conhecimento na resolução de problemas, apresentando ou não uma solução correta?

Esta investigação faz parte de um programa de pesquisa, cujo objeto de estudo é a produção escrita de alunos e professores na Prova de Questões Abertas de Matemática-AVA/2002. Um dos objetivos deste programa é articular pesquisas a serem realizadas por acadêmicos do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, alunos do Curso de Especialização em Educação Matemática e da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Como resultado dessa articulação, seis dissertações já foram defendidas e, além desta, uma outra está em andamento, além de dois trabalhos de iniciação científica (ver Anexo 1).

---

[1] No decorrer do trabalho, "Prova" deve ser entendida como Prova de Questões Abertas de Matemática do AVA/2002

Procurou-se, assim, a partir de uma amostra das Provas aplicadas em todo o Estado, analisar a produção escrita dos alunos na questão comum à 8ª série do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio, tendo como base as seguintes questões norteadoras: quais as estratégias/procedimentos utilizados pelos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio para resolver a questão comum a essas séries? Tais estratégias/procedimentos são os mesmos? Que tipos de erros são encontrados? Esses erros são os mesmos, independente da série? Existem marcas diferentes de conteúdo matemático presentes na produção escrita referente à questão comum das Provas da 8ª série do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio?

Além disso, tem-se como objetivos específicos:

a) compreender como os alunos utilizam as informações contidas no enunciado da questão;
b) identificar e inventariar os erros mais freqüentes, sua natureza e as estratégias/procedimentos utilizados; e
c) estabelecer um paralelo entre as resoluções dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e os da 3ª série do Ensino Médio.

Este trabalho encontra-se estruturado em três capítulos. No primeiro capítulo, são apresentados os referenciais teóricos que fundamentam esta investigação. O segundo capítulo aborda os procedimentos metodológicos adotados. No terceiro capítulo, são apresentadas as descrições da produção escrita, bem como uma análise interpretativa das mesmas. Por fim, apresentam-se algumas considerações acerca da investigação.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Situando a Avaliação

A avaliação é uma prática complexa que vem sendo objeto de estudo dos pesquisadores da área da educação há muitos anos. Em suas investigações, pesquisadores desta área (ABRANTES, 1995; HADJI, 2001; ESTEBAN, 2002, BURIASCO, 2002), por um lado, têm apontado que, de um modo geral, a avaliação pouco tem contribuído para o processo de ensino e de aprendizagem. Por outro lado, esses pesquisadores afirmam que a avaliação deve estar a serviço da ação pedagógica, ou seja, deve ser um mecanismo de regulação do processo educativo. Tem-se aqui, por conseguinte, um problema.

Apesar de a avaliação ter feito parte dos pontos comuns das reformas do ensino de Matemática, nos anos 80 e 90, de países como França, Estados Unidos, Itália, Inglaterra, Japão, Portugal, Espanha, Holanda, Brasil (PIRES, 2000), percebe-se que, ainda hoje, muitas pessoas olham-na de uma maneira simplista, ou seja, há uma preocupação muito mais intensa com o ato de medida do que com as reais funções da avaliação. Nesse sentido, muitos consideram 'prova escrita' e 'avaliação' como sinônimos, o que não é verdadeiro, pois a prova escrita é apenas um dos muitos instrumentos utilizados para recolha de informações durante o complexo processo avaliativo. Essas informações obtidas pelos instrumentos avaliativos, geralmente provas escritas, são tomadas como base para determinar o destino acadêmico dos estudantes: apto ou inapto; aprovado ou reprovado.

Desde os anos 80, vem-se percebendo um grande número de propostas e idéias novas acerca do ensino e da aprendizagem de Matemática. Contudo, tais mudanças não foram acompanhadas de mudanças significativas das práticas avaliativas. Apesar de estas práticas parecerem muito resistentes à mudança, pode-se considerar que o conceito de avaliação vem sendo alterado, ao longo dos anos, graças às novas idéias e teorias sobre o processo de ensino e de aprendizagem (ABRANTES, 1995).

Sacristán (1998) atribui esse fato à evolução das funções que a escola vem assumindo na sociedade e no mercado de trabalho ao longo dos anos, bem como a maneira como o conhecimento é validado, entre outras coisas. Para ele, avaliação é:

> *[...] qualquer processo por meio do qual alguma ou várias características de um aluno/a, de um grupo de estudantes, de um ambiente educativo, de objetivos educativos, de materiais, professores/as, programas, etc., recebem a atenção de quem avalia, analisam-se e valorizam-se suas características e condições em função de alguns critérios ou pontos de referência para emitir um julgamento que seja relevante para a educação* (1998, p. 298).

Esse autor considera que avaliar é emitir um juízo de valor sobre algo, tendo como critério alguns pontos de referência. Vem ao encontro desse conceito a definição do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) dos Estados Unidos, que a avaliação em Matemática pode ser entendida como o

> *[...] processo que inclui a recolha de evidência sobre o conhecimento matemático de um aluno, a sua aptidão para o usar; e sua predisposição para a matemática, e também o estabelecimento de inferências, a partir desta evidência, para propósitos variados* (NCTM, 1991, p. 04).

Também os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática - PCN, consideram

> *[...] fundamental que os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação, sejam eles provas, trabalhos, registros das atitudes dos alunos [...] forneçam ao professor informações sobre as competências de cada aluno em resolver problemas, em utilizar a linguagem matemática adequadamente para comunicar suas idéias, em desenvolver raciocínios e análises e em integrar todos esses aspectos no seu conhecimento matemático* (BRASIL, 1998, p.54).

Pode-se considerar que estas definições enfatizam a avaliação como reguladora do processo ensino-aprendizagem. Esta é a perspectiva de avaliação que se pretende delinear neste trabalho.

No entanto, tem-se ainda hoje, de acordo com Esteban (2002), uma avaliação sob a ótica do exame, baseada apenas na verificação do rendimento escolar. Em suas pesquisas, esta autora vem observando que a avaliação na lógica do exame não tem sido muito eficaz no processo de ensino e de aprendizagem, uma vez que não possibilita a observação de um processo tão complexo como esse. Tal avaliação atende às exigências administrativas da escola, de modo que seus resultados revelam apenas o que o aluno sabe e o que não sabe. De certa forma esta avaliação parece ser coerente com a atividade escolar, uma vez que a "*a dicotomia entre erro e acerto, conhecimento e ignorância, saber e não-saber é assumida como fio condutor da atividade escolar*" (ESTEBAN, 2002, p. 103).

O problema da avaliação na lógica do exame parece não residir na avaliação em si, mas sim na maneira como a mesma é encarada. Estabelece-se um padrão que é utilizado como instrumento de comparação, classificação, diferenciação e, sobretudo, de exclusão (ESTEBAN, 2002).

Apesar de a escola ter a função de certificar, sua função principal é escolarizar (PARO, 2000). Assim, a avaliação escolar tem a função de regular o processo de ensino e de aprendizagem. Quando seletiva e classificatória, apesar de não impedir o acesso físico à escola, a avaliação escolar parece se tornar um obstáculo para os estudantes concluírem a escolarização básica, uma vez que, da maneira como vem sendo realizada, pouco tem contribuído para o sucesso do processo de ensino e de aprendizagem podendo, isto sim, estar contribuindo para a exclusão. Seguindo esse raciocínio, Sacristán (1998) afirma que a função seletiva da avaliação é cumprida em todos os níveis de ensino. Acrescenta, ainda, que esta prática hierarquizadora é anti-social na medida em que a educação obrigatória não tem o objetivo de selecionar e classificar os alunos em aptos e inaptos, mas sim de oportunizar condições para que todos adquiram a cultura básica, definida pela sociedade.

Esteban bem coloca que "*a avaliação escolar funciona como um sistema de oferta e suspensão dos direitos, tantos nos fatos cotidianos da sala de aula como em relação às possibilidades futuras*" (2002, p. 107), além de *"disciplinar não só o corpo, mas também o pensamento, a vontade e as disposições"* (2002, p. 108, grifo da autora).

Contudo, pode-se considerar que a avaliação não tem exercido com êxito sua função disciplinadora, uma vez que, em meio a tantas privações sociais, como alimentação, habitação, saúde, trabalho, a privação ao direito de aprender é apenas uma privação a mais (ESTEBAN, 2002).

Tendo em vista a superação do fracasso escolar, é preciso uma mudança de perspectiva avaliativa, no sentido de que a prática avaliativa possa, efetivamente, auxiliar educadores e estudantes no processo de construção do conhecimento, integrando-se a esse processo.

Talvez o primeiro passo nessa direção seja a mudança na forma como os erros dos alunos são encarados. Pesquisadores da área da Educação têm dado muita atenção aos erros cometidos pelos estudantes (RADATZ, 1980; BORASI, 1987; RICO, 1995; BURIASCO, 2000; ESTEBAN, 2001; HADJI, 2001, CURY, 2004)

Historicamente, as pesquisas acerca dos erros dos estudantes seguiam a teoria educacional vigente na época (CURY, 2004). Esta autora apresenta três fases pelas quais passaram essas pesquisas. Na primeira fase, a preocupação centrava-se nos aspectos técnicos dos erros. Já na segunda fase, influenciada pelo enfoque da Teoria da Informação, a preocupação estava na forma de pensar dos estudantes. A terceira fase, influenciada pelo Construtivismo, considera que os erros são ferramentas de aprendizagens.

Borasi (1987) considera que os erros podem, entre outras coisas, ser utilizados como ponto inicial para exploração matemática. Esta autora apresenta seis formas diferentes de utilização dos erros no processo de ensino e aprendizagem. Essas seis formas diferentes são agrupadas em duas categorias, tendo em vista o intuito da utilização do erro:

a) diagnóstico e remediação: nesta categoria o foco da utilização dos erros reside sobre o diagnóstico das causas que levam ao erro e sobre os mecanismos que possam levar à superação dos mesmos, de forma que tais causas possam ser evitadas futuramente com outros estudantes;

b) investigação: nesta categoria, os erros são utilizados como mecanismos motivacionais para a investigação sobre o conteúdo matemático relacionado ao erro, a natureza da Matemática e ao próprio processo de ensino e de aprendizagem.

Seguindo o raciocínio de Borasi, referente ao item a, Rico (1995) afirma que se os erros forem considerados como elementos que podem naturalmente aparecer durante o processo de construção do conhecimento matemático, é preciso que, durante esse processo, tais erros sejam detectados, diagnosticados e superados por meio de atividades que promovam aos estudantes o exercício crítico sobre suas próprias produções.

Para que isso ocorra, é preciso que se perceba o potencial educacional dos erros. Borasi (1987) afirma que os erros têm se mostrado muito estimulantes mesmo nos casos em que se duvida do seu potencial no momento em que se inicia o trabalho com os mesmos. Para que o trabalho com os erros seja satisfatório, é preciso que se escolham erros apropriados à situação e aos objetivos da sua utilização. Além disso, é fundamental que se leve em consideração o interesse e a preparação dos estudantes com os quais esta atividade será realizada. (BORASI, 1987).

Contudo, o trabalho com os erros pode ser dificultado por alguns obstáculos. De acordo com Borasi (1987), um deles está associado ao fato de que os professores, bem como os estudantes, possuem concepções pré-existentes de erro, de Matemática, de conhecimento e de aprendizagem. Para que tais concepções não interfiram nos resultados do trabalho com os erros, não se pode desconsiderar sua existência. Fazer com que os estudantes se tornem cientes de suas crenças é o principal passo para uma possível modificação delas.

Um outro obstáculo pode estar relacionado à maneira como a avaliação é realizada pelo professor, uma vez que o tratamento dado aos erros pode ser, muitas vezes, resultado de um processo avaliativo. Cury

(2002) conjectura que *"os docentes apresentam uma tendência a avaliar segundo suas concepções a respeito do que seja a Matemática"* (p.39). Assim, se um professor concebe a Matemática como uma ciência pronta e acabada, uma prática profissional voltada para a eliminação do erro é coerente com sua concepção. Nesse caso, pode-se considerar que o erro, para esse professor, representa a ausência de conhecimento. Por outro lado, um professor que considera a Matemática como uma ciência falível e corrigível, tende a encarar o erro como algo inerente ao processo de ensino e de aprendizagem. Sua prática, dessa forma, está voltada para a utilização do erro como oportunidade de aprendizagem. Nesse caso, o erro não representa ausência de conhecimento, mas sim a existência de um conhecimento parcial.

Cury (2002) considera que, apesar de muito se ter questionado sobre as formas de avaliar os estudantes, pode-se considerar que não existe forma que seja melhor ou pior. O importante é que se leve em consideração o objetivo com o qual um determinado instrumento avaliativo é utilizado, bem como a maneira pela qual analisar-se-ão as informações oriundas desses instrumentos.

Assim, ao corrigir uma prova escrita, se o professor considera apenas a resposta da questão como totalmente certa ou errada, estará perdendo uma ótima oportunidade de verificar os conhecimentos que seu estudante já construiu e aqueles que estão em processo de construção; os erros cometidos pelos estudantes, o que pode fornecer importantes informações sobre o processo de ensino e de aprendizagem.

Tendo em vista a natureza da questão que se está analisando nesta investigação, optou-se pela classificação de Movshovitz-Hadar e colaboradores (1987). Essa classificação foi resultado da análise das respostas dos estudantes em um exame geral anual sobre Matemática em Israel. Os pesquisadores definiram, a partir da análise de uma amostra das provas, as seguintes categorias:

a) utilização equivocada de informações do problema: os erros desta categoria estão relacionados às discrepâncias existentes entre os dados fornecidos no enunciado do problema e a maneira como foram utilizados pelos alunos na resolução. Neste caso, o estudante compreende a situação, retira os dados do problema, mas emprega essas informações erroneamente;

b) interpretação equivocada da linguagem: nesta categoria os erros geralmente estão relacionados à tradução incorreta de situações em linguagens diferentes. Neste caso, o que se expressa na linguagem verbal, por exemplo, e aquilo que o estudante “traduziu” para a linguagem simbólica têm significados diferentes. Da mesma forma, incluem-se nesta categoria erros referentes à interpretação equivocada de símbolos e gráficos. Pode-se considerar, também, que o estudante compreende incorretamente ou compreende em parte o que é pedido em uma questão;

c) inferências logicamente inválidas: os erros desta categoria estão geralmente relacionados a falácias, inferências ou informações indevidamente consideradas como verdadeiras a partir de outras do enunciado. Em outras palavras, o estudante considera como verdadeiras suposições que não podem ser logicamente consideradas como tal;

d) distorções na utilização de definições ou teoremas: o estudante altera um princípio, uma definição uma regra ou um teorema de modo que seja aplicável à situação do problema;

e) não verificação de soluções: nos erros desta categoria, os estudantes geralmente escolhem uma estratégia que não resolve o problema e a desenvolve corretamente. Contudo, o resultado obtido não é solução para o problema que deveria ser resolvido;

f) erros técnicos: os erros desta categoria estão relacionados a erros na execução de algoritmos, de procedimentos

> passo-a-passo, na retirada de informações de tabelas e até mesmo na manipulação de símbolos algébricos elementares. Tais erros geralmente podem ser resultados de distração.

A classificação dos erros pode ser uma importante atividade quando se deseja utilizar todo esse potencial para o processo de ensino e de aprendizagem de Matemática. Isso não quer dizer que é importante errar ou que o erro é essencial para que a aprendizagem possa ocorrer. É importante considerar que, como elemento que pode, naturalmente, aparecer durante o processo de ensino e de aprendizagem, o erro deve ser encarado, caso apareça, não apenas como um obstáculo ou como uma dificuldade, mas sim como um mecanismo que auxilie e promova a aprendizagem.

1.2 A Álgebra e a Educação Algébrica

Conforme já foi citado na seção anterior, avaliações nacionais e internacionais do rendimento escolar têm mostrado que os alunos, no geral, apresentam um baixo rendimento em Matemática, em especial no que se refere à álgebra. As causas desse baixo rendimento parecem não estar relacionadas ao fato de que não se ensina álgebra nos ensinos Fundamental e Médio, uma vez que grande parte do currículo de Matemática está voltada para essa área. Assim, o problema do baixo rendimento parece residir na maneira como a álgebra é trabalhada nas escolas.

Alguns estudos mostram que a álgebra que se ensina no ensino secundário não tem mudado muito nos últimos anos (AMERON, 2002). Para esta autora, a álgebra escolar tradicional é apresentada aos alunos como um sistema rígido, abstrato e pré-determinado, com poucas ligações com o mundo real. Assim, o ensino tradicional de álgebra inicia-se com suas regras sintáticas, com a linguagem simbólica que rapidamente é formalizada, ou seja, tem-se o contexto matemático como ponto de partida, em detrimento às aplicações da álgebra.

Diante das dificuldades referentes à apropriação do conhecimento algébrico, os alunos tendem, de acordo com Kieran (1995) a recorrer à memorização de procedimentos e regras, o que os conduz a ter uma idéia equivocada de que a memorização é a essência da álgebra.

Não há consenso por parte dos pesquisadores da área acerca do que é álgebra ou o que a álgebra deveria ser (AMERON, 2002). No que se refere à álgebra escolar, esta autora afirma que, apesar de se conhecer de imediato o que os alunos aprendem sobre álgebra, defini-la é uma tarefa não muito fácil.

Dentre as inúmeras atividades nas quais os alunos se envolvem durante o processo de ensino e de aprendizagem de álgebra, esta autora afirma que se podem encontrar atividades relacionadas ao pensamento algébrico e à simbolização algébrica. Assim, com o intuito de se obter uma plena compreensão da álgebra, é necessário que os alunos adquiram competências relacionadas ao pensamento e à linguagem algébrica. Analisando os resultados das pesquisas de Vigotski sobre pensamento e linguagem, esta idéia pode ficar mais clara. Vigotski (2005) em suas pesquisas, concluiu que a relação existente entre pensamento e palavra é produto do desenvolvimento histórico da consciência humana. Tal relação "*não é uma coisa, mas um processo, um movimento contínuo de vaivém do pensamento para a palavra e vice-versa*" (VIGOTSKI, 2005, p. 156). Assim, conclui-se que pensamento e linguagem são interdependentes, uma vez que "*o pensamento nasce através das palavras. Uma palavra desprovida de pensamento é uma coisa morta, e um pensamento não expresso por palavras permanece uma sombra*" (id. ib., p.190).

A linguagem, além de expressar o pensamento, é também um mecanismo de seu desenvolvimento. Nesse sentido, pode-se considerar que tal característica também se aplica à relação existente entre a linguagem algébrica e o pensamento algébrico. Esta pode ser, então, uma justificativa para o desenvolvimento de competências relacionadas à linguagem e ao pensamento algébrico, de modo que uma possa auxiliar o desenvolvimento do outro.

Historicamente, a linguagem algébrica desempenhou importante função para o desenvolvimento da álgebra. Foi a partir da etapa simbólica, que se iniciou com Viète (1540 – 1603) que o conhecimento algébrico começou a crescer em um ritmo acelerado. Tal crescimento só foi possível graças à utilização de letras para a representação de quantidades e incógnitas, que possibilitaram a generalização. Em outras palavras, o simbolismo algébrico foi de fundamental importância para o desenvolvimento do conhecimento algébrico.

Kieran (1995, p.2) considera que, ao se analisar o desenvolvimento histórico da álgebra, pode-se considerá-la como "*la rama de las matemáticas que trata la simbolización de relaciones numéricas generales y de estructuras matemáticas así como de la operación sobre esas estructuras*[2]".

Na mesma direção, para Usiskin (1995), a álgebra pode ser entendida como:

a) aritmética generalizada;

b) estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas:

c) estudo de relações entre grandezas;

d) estudo das estruturas.

Em cada uma das categorias anteriores, Usiskin (1995) identificou que as letras – ou os símbolos – assumem diferentes funções. Quando se concebe a álgebra como aritmética generalizada, as letras são consideradas como generalizadoras de modelos. Na segunda categoria, as letras são tidas como incógnitas. Na terceira categoria, as letras são consideradas como argumentos ou parâmetros. Na concepção de álgebra como estudo de estruturas, as letras são consideradas como objetos arbitrários de uma estrutura estabelecida por certas propriedades.

Bednarz et al. (*apud* AMERON, 2002) distingue quatro tendências principais em relação às pesquisas e ao desenvolvimento

---

[2] "O *ramo da matemática que trata da simbolização de relações numéricas e de estruturas matemáticas assim como da operação sobre essas estruturas*" (tradução livre feita pelo autor).

curricular de álgebra: generalização, resolução de problemas, modelagem e funções. Para Ameron (2002), a aceitação de uma ou outra classificação é relevante para o tipo de programa de ensino que será utilizado. Neste sentido, é fundamental que a concepção do professor acerca da álgebra seja coerente com sua prática pedagógica.

Contudo, Kieran (1995) afirma que as poucas investigações realizadas com professores de álgebra sugerem que, apesar das concepções desses professores serem estruturais, apenas poucos alunos desenvolvem completamente a concepção estrutural de álgebra.

Uma concepção estrutural de álgebra ou de qualquer noção matemática abstrata é estática, instantânea e integradora. Refere-se a um conjunto de operações que se fazem sobre as expressões algébricas. Já a concepção procedimental de álgebra refere-se às expressões aritméticas que se fazem sobre números para se obter números. É uma concepção dinâmica, seqüencial e detalhada. Desta forma, quando se concebe uma noção ou ente matemático abstrato estruturalmente, concebe-se tal ente como objeto real, uma estrutura estática existente no tempo e espaço. Em contrapartida, quando se concebe uma noção ou ente abstrato procedimentalmente, está-se concebendo-o como processo, como uma entidade em potencial cuja existência se deve a um conjunto de ações (KIERAN, 1995). Por exemplo, considere a expressão $25-6$. Quando se concebe essa expressão procedimentalmente, está se concebendo-a como o número 19, resultado da operação de subtração entre 25 e 6, ou seja, o objeto existe graças a um processo, uma ação. Quando se concebe tal expressão estruturalmente, a expressão – ou o objeto – já possui um significado, ou seja, existem no tempo e no espaço independentemente de se realizar ou não a operação de subtração. Nesse sentido, o aspecto procedimental, por ser considerado menos abstrato, deve, necessariamente, preceder o aspecto estrutural (SFARD apud LINS & KAPUT, 2004).

Retomando o desenvolvimento histórico da álgebra, Kieran (1995) afirma que uma análise histórica do desenvolvimento do simbolismo algébrico mostra que a mudança de uma perspectiva procedimental para uma perspectiva estrutural foi facilitada pelo desenvolvimento do simbolismo algébrico. A autora afirma ainda que da mesma forma que se pode ver, historicamente, uma evolução procedimento-estrutura, pode-se conceber a álgebra escolar como uma série de ajustes processo-objeto que os estudantes devem realizar a fim de compreender todo o aspecto estrutural da álgebra.

Nesta abordagem, pode-se considerar que uma concepção processual corresponde a uma concepção aritmética, ao mesmo tempo em que uma concepção estrutural corresponde a uma concepção algébrica, uma vez que em aritmética enfatiza-se a ação sobre números, ao passo que em álgebra opera-se sobre objetos. Seguindo esse raciocínio, Lins e Kaput (2004) consideram que a álgebra, por requerer um pensamento formal, mais abstrato e, como esse pensamento se dá em um estágio mais avançado de desenvolvimento, pode ser posterior à aritmética.

Sendo assim, um dos caminhos para o desenvolvimento do pensamento algébrico seria por meio de atividades que promovessem uma série de ajustes processo-objeto, ou ainda, aritmética-álgebra. Ameron (2002) considera que a linha divisória entre aritmética e álgebra não está clara, mas que a tentativa de demarcá-la tem fornecido idéias sobre atividades que proporcionam os ajustes aritmética-álgebra.

Em relação ao pensamento algébrico, Fiorentini et al. (2005) tomam, como principal referência para identificar seu desenvolvimento, a análise das produções ou resoluções dos estudantes. Para esses autores, o pensamento algébrico pode ser classificado em três fases: a pré-algébrica, a de transição e a do pensamento algébrico mais desenvolvido. O pensamento algébrico de um aluno encontra-se, segundo estes autores, na fase pré-algébrica quando é possível ver em suas produções a utilização de algum ou outro elemento que é considerado algébrico, mas que se percebe que o aluno não o concebe como um ente algébrico, por exemplo, como um número generalizado.

Já na fase de transição, são possíveis de se perceber alguns processos de generalização utilizando ou não a linguagem simbólica. O aluno atinge a fase do pensamento algébrico mais desenvolvido quando é possível se perceber em suas resoluções que é capaz de pensar e se expressar genericamente, usando ou não a linguagem simbólica para representar e operar com grandezas numéricas abertas ou variáveis. Fiorentini et al. (2005) afirmam ainda que, na medida em que o aluno vai desenvolvendo a linguagem mais apropriada ao pensamento algébrico, esse pensamento vai sendo potencializado.

Pode-se considerar que classificar o pensamento algébrico do estudante, utilizando-se da sua produção escrita, nessa ou naquela fase de desenvolvimento do pensamento algébrico, não é uma tarefa muito fácil, por pelo menos dois motivos: primeiro, porque se está considerando apenas a produção escrita do estudante, ou seja, aquilo que o estudante deixou registrado ao resolver um problema ou questão; em segundo lugar, a categorização apresentada por Fiorentini et al. (2005) parece possuir uma zona nebulosa entre as linhas divisórias existentes entre essas categorias, o que dificulta o trabalho de classificação. Em outras palavras, apenas por meio da análise da produção escrita dos estudantes pode não ser possível classificar, com segurança, o pensamento algébrico do estudante em uma dessas três fases.

Assim, poder-se-ia ter maior segurança, na classificação do pensamento algébrico por meio da produção escrita, se fossem utilizadas apenas duas categorias: algébrico e pré-algébrico – ou aritmético. Neste sentido, pode-se dizer que o pensamento de um estudante se encontra numa fase pré-algébrica – ou aritmética – se não for possível de se verificar em sua produção escrita qualquer processo de generalização. Neste caso, verifica-se apenas operações sobre números. Já na fase algébrica, é possível de se verificar na produção escrita do estudante algum processo de generalização, a presença de incógnitas e/ou variáveis, utilizando-se corretamente ou não a linguagem simbólica.

Diante do que foi apresentado até aqui, pode-se ter a idéia de que, tendo em vista o desenvolvimento do pensamento algébrico, parece que o ideal seria que primeiro se aprendesse aritmética e depois álgebra. Entretanto, Lins e Gimenez (1997) propõem que se faz necessário iniciar o trabalho com álgebra mais cedo do que se inicia hoje, de modo que aritmética e álgebra se desenvolvam em conjunto, uma vez que, para esses autores, a diferença existente entre aritmética e álgebra é uma diferença "*de tratamento, de foco*".

Quando os estudantes iniciam o estudo da álgebra, eles se deparam com algumas dificuldades. Booth (1995) afirma que, para se descobrir por que a álgebra se torna tão difícil para esses estudantes, pode-se identificar os tipos de erros que eles freqüentemente cometem e as causas que levam os estudantes a cometê-los. Tem-se, aqui, que os erros são utilizados com os propósitos de diagnóstico e de remediação (BORASI, 1987), uma vez que a intenção é de se conhecer os mecanismos que estão produzindo esses erros e proporcionar meios para que eles sejam superados.

Um dos obstáculos apontados por Wheeler (1996), referente à aprendizagem de álgebra, está relacionado à linguagem. Como linguagem, a álgebra incorpora muitas das palavras e símbolos que os estudantes já conhecem quando estão estudando aritmética. Dessa forma, é natural que os estudantes considerem que tais símbolos ou palavras em álgebra têm os mesmos significados que em aritmética. Assim, é comum em aritmética conceber que "$3a$" representa três abelhas, assim como "$10m$" refere-se a dez metros. Em álgebra, entretanto, a pode ser considerado "número de abelhas", da mesma forma que m pode-se referir a "número de metros". Além desses exemplos, pode-se citar a função que os sinais desempenham em aritmética e em álgebra. Em aritmética, o sinal "+", indica uma ação, a de somar, assim como os sinais de subtração, divisão e multiplicação expressam as idéias básicas a eles relacionadas. Da mesma forma, o sinal "=" indica a ação "dar a resposta". Contudo, em álgebra, o sinal de adição pode indicar o resultado de uma operação. O sinal "=", em álgebra, não é concebido pelos estudantes em geral como sendo representante de uma relação de equivalência entre duas expressões. Assim, influenciados por esse entendimento, os estudantes cometem erros do tipo "$2+a=2a$" ou ainda "$x+3=2=x=2-3=-1$".

Diante de situações que envolvem a utilização de variáveis, Booth (1995) afirma que muitas vezes as crianças consideram que as letras sempre representam um número, como no caso da equação "$2x-4=12$".

Assim, ao se depararem com expressões do tipo “$y = 2x$”, os estudantes tendem a considerar que cada uma dessas letras representa apenas um número, o que se quer descobrir, ao invés de considerá-las como variáveis. Dessa forma, quando os estudantes se defrontam com expressões como “$y = 2x$”, o que geralmente fazem é tentar descobrir o valor de x. Assim, erros como “$y = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$” podem surgir na produção escrita dos alunos.

Portanto, se for considerado que um dos objetivos de se trabalhar com álgebra nos Ensino Fundamental e Médio é fazer com que os estudantes se apropriem desse conhecimento e que desenvolvam o raciocínio algébrico, é fundamental que esses e os demais tipos de erros, quando surgirem, sejam detectados, superados ou aproveitados como oportunidades para explorações matemáticas. Em geral, os erros, bem como os obstáculos e os demais mecanismos produtores dos mesmos, podem ser detectados durante o processo avaliativo, desde que esse processo esteja voltado para a aprendizagem do aluno. Assim, num processo avaliativo, cuja perspectiva seja a de contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem, a produção escrita do estudante pode fornecer informações sobre o grau de desenvolvimento do seu pensamento algébrico, sua concepção sobre álgebra, bem como a maneira com que o estudante mobiliza o conhecimento – algébrico e/ou aritmético – que possui para a resolução de problemas.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Tendo em vista o problema e os objetivos dessa investigação, a abordagem metodológica predominante neste estudo é de natureza qualitativa, uma vez que o mais importante é a compreensão de um fenômeno complexo. De acordo com Borba (2004), o que se entende por pesquisa qualitativa é algo que ainda "*está em movimento*". Para Garnica (2004), a pesquisa qualitativa tem as seguintes características:

> *(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma análise a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de se estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.* (p. 86).

Esta investigação possui todas as características descritas por Garnica (2004), uma vez que não se pode garantir que os resultados aqui apresentados sejam generalizáveis e não-transitórios; não se identificou uma hipótese que se quisesse comprovar ou refutar; na análise interpretativa, as inferências, realizadas durante todo o processo de análise, estão impregnadas das "perspectivas e filtros vivenciais" deste pesquisador. Assim, neste estudo realizou-se uma pesquisa de cunho interpretativo, uma vez que, para a realização de inferências, foi necessário descrever e compreender a produção escrita dos alunos, de modo que se pudesse conhecer, por meio da análise da sua produção escrita, o conhecimento matemático que mostraram possuir, bem como a maneira como este conhecimento foi mobilizado na resolução de problemas.

Assim, como o objeto de estudo dessa investigação foi a produção escrita de alunos em Matemática, referentes à Questão[3] comum da 8ª série do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002, para a análise dos instrumentos optou-se pela orientação presente na análise de conteúdo, que consiste em um conjunto de técnicas que pretende analisar as formas de comunicação verbal e não verbal.

Freitas e Janissek (2000) consideram esse conjunto de técnicas como um método de observação indireto, pois, das várias formas de comunicação, é apenas a expressão verbal ou escrita que será observada.

Bardin (1977, p. 42) define a análise de conteúdos como sendo:

> *[...] o conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção / recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.*

Analisando a definição apresentada por Bardin, ficam claros dois processos: a descrição e a inferência. É na descrição que se explora o texto na medida em que o mesmo vai sendo 'desconstruído'. Feito isso, parte-se para a etapa da categorização, momento em que, seguindo certos critérios definidos pelo analista, o texto é novamente reconstruído. Após a categorização, parte-se para a inferência. É neste momento que se atribui, por meio de deduções lógicas e justificadas, significado ao discurso.

Desta forma, obtêm-se novas informações a respeito do discurso sob análise, completando as informações que não ficam tão visíveis à primeira vista.

Para Freitas e Janissek (2000), a análise de conteúdo é um processo objetivo, sistemático e quantitativo. Acrescentam ainda que, a partir de dados qualitativos, realiza-se um agrupamento quantitativo que possibilita uma análise qualitativa novamente.

---

[3] Neste trabalho, a expressão Questão deve ser entendida como a questão comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da Prova de Questões Abertas da AVA/2002

2.1 O objeto da investigação

A edição da AVA de 2002 foi a primeira a fazer uso de questões abertas. Assim, procurou-se utilizar questões que fizessem com que os estudantes, em um tempo limitado para resolução, demonstrassem uma produção escrita que fosse possível de ser avaliada. Foram escolhidas, portanto, questões de diferentes níveis de complexidade, que exigiam, para sua resolução, desde o reconhecimento e utilização de um procedimento simples como a execução de um algoritmo, por exemplo, até o estabelecimento de conexões entre diferentes conteúdos matemáticos. (BURIASCO, CYRINO E SOARES, 2003).

Esta investigação tem como objeto de pesquisa a produção escrita dos alunos na Questão Comum à 8ª série do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio, que é a seguinte: *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de* $R\$60{,}00$ *mais* $R\$18{,}00$ *por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de* $R\$24{,}00$ *mais* $R\$36{,}00$ *por hora de trabalho. Sendo* t *o tempo, medido em horas, para quais valores de* t *o encanador A fica mais barato que o B?*

Assim como as demais questões que são comuns a duas ou mais séries, um dos objetivos desta Questão é verificar se os estudantes das diferentes séries abordam-na de maneira diferente, uma vez que, em um nível maior de escolaridade, os estudantes tendem a conhecer um número maior de estratégias e/ou conteúdos matemáticos que podem ser mobilizados para resolver uma questão (BURIASCO, CYRINO E SOARES, 2003).

Para cada questão foram definidos seus descritores. Os descritores estão relacionados às competências dos estudantes, tendo em vista seu nível de escolaridade. Assim, para as questões comuns, os descritores não são os mesmos para todas as séries nas quais foram aplicadas, pois se espera que os estudantes abordem a questão utilizando-se de estratégias e desenvolvendo procedimentos que sejam coerentes com seu nível de escolaridade.

O quadro a seguir relaciona os descritores dessa Questão definidos por Buriasco, Cyrino e Soares (2003) para a 8ª série do Ensino Fundamental e para 3ª série do Ensino Médio com as respectivas resoluções esperadas.

Descritor	Resolução esperada
8ª Série do Ensino Fundamental: "identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema. Resolver problema envolvendo um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas". (p. 7)	O preço cobrado pelo encanador A pode ser obtido por $A(t) = 60 + 18t$ Para o encanador B, tem-se $B(t) = 24 + 36t$ Assim, pode-se encontrar o valor de t que satisfaz a igualdade $A(t) = B(t)$ $60 + 18t = 24 + 36t$ $36 = 18t$ $t = 2$ Ou seja, quando $t = 2$, os custos para ambos os encanadores são os mesmos. Assim, como o coeficiente de t da função A é menor que o respectivo coeficiente da função B, tem-se que para $t < 2$, A é mais caro; para $t = 2$, o custo é o mesmo e para $t > 2$, A é mais barato. Portanto, o encanador A será mais barato para qualquer valor de $t > 2$
3ª Série do Ensino Médio "identificar a inequação do 1º grau que representa um problema expresso por texto. Resolver problema significativo envolvendo uma inequação do 1º grau" (p.7)	O preço cobrado pelo encanador A pode ser obtido por $A(t) = 60 + 18t$ Para o encanador B, tem-se $B(t) = 24 + 36t$ Deve-se determinar o valor de t de modo que $A(t) < B(t)$, ou seja, $60 + 18t < 24 + 36t$ $36 < 18t$ $t > 2$ Assim, o encanador A será mais barato para qualquer valor de $t > 2$

Quadro 1- Resoluções esperadas em cada série de acordo com seus descritores.

Fonte: Manual de Correção de Questões Abertas

Além destas duas resoluções, esta Questão pode ser resolvida por meio das operações de adição e multiplicação, de modo que sejam calculados os custos para ambos os encanadores para serviços de uma, duas, três, quatro, cinco horas; também pode-se escrever as leis das funções que descrevem os custos dos serviços dos encanadores, conforme foi feito no quadro anterior, e calcular as imagens da função para $t=1$, $t=2$ e $t=3$.

Esta investigação baseou-se em uma amostra das Provas aplicadas em todo o estado do Paraná, que foi determinada da seguinte forma: em cada sala de aula do estado, no momento em que os alunos entregavam a Prova resolvida, a quinta entregue era separada das demais, formando assim uma amostra que foi enviada para a SEED[4].

A partir dessa amostra geral, foi colhida uma amostra menor, representativa para todo o estado, de cada série avaliada, contendo um total de 1047 Provas das três séries. No entanto, considerando o tempo no qual este estudo foi realizado, não seria possível fazê-lo utilizando esta amostra inteira. Assim, foi preciso definir uma nova amostra de Provas a partir da amostra de 1047 Provas.

O primeiro passo nessa direção foi verificar o que havia nos registros escritos na amostra de 1047 Provas. Antes de se iniciar o processo de seleção da nova amostra com a qual seria desenvolvido este estudo, todas as Provas foram corrigidas utilizando-se para isso o Manual para Correção das Provas com Questões Abertas de Matemática – AVA/2002 [5] (BURIASCO, CYRINO E SOARES, 2003).

A nova amostra selecionada para este estudo, consiste, então, em uma amostra definida por conveniência, selecionada a partir das 422 Provas da 8ª série do Ensino Fundamental e das 402 Provas da 3ª série do Ensino Médio. Com o auxílio da consultora[6] de Estatística do programa de

---

[4] Secretaria de Estado da Educação

[5] Este manual foi elaborado pelas professoras Regina Luzia Corio de Buriasco, Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino e Maria Tereza Carneiro Soares a partir da correção de aproximadamente 1100 Provas, que se deu em dois encontros: um em Curitiba e outro em Londrina, nos quais participaram um total de aproximadamente 180 professores de Matemática de escolas estaduais paranaenses.

[6] Professora Dra. Tiemi Matsuo, docente do Departamento de Estatística da Universidade Estadual de Londrina.

pesquisa do qual este estudo faz parte, optou-se por estudar a produção escrita de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio que estivessem com a relação idade/série adequada. Assim, todas as Provas que foram estudadas são de alunos que, até o dia da realização da Prova, estavam freqüentando pela primeira vez a 8ª série do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio. Desta forma, foram excluídas 178 Provas da 8ª série do Ensino Fundamental e 152 Provas da 3ª série do Ensino Médio.

Observando as 244 Provas da 8ª série que restaram, percebeu-se que havia poucas Provas, apenas 7, que estavam com a questão 4 resolvida por inteiro. Sendo assim, decidiu-se por selecionar estas 7 Provas, para que houvesse uma garantia de que a produção escrita da questão 4 também pudesse ser estudada. Das 237 Provas da 8ª série que restaram, retiraram-se todas as que apresentavam ao menos uma ou mais questões totalmente em branco, sendo excluídas, assim, 99 Provas. Utilizando este mesmo critério para a seleção das Provas da 3ª série do Ensino Médio, foram excluídas 30 Provas, restando 221.

Como a intenção era de trabalhar com uma amostra de aproximadamente 50 Provas para cada série, realizou-se uma amostragem sistemática com a constante de amostragem k=5 para a 3ª série do Ensino Médio e k=3 para a 8ª série do Ensino Fundamental. Pelas respectivas funções aleatórias, foram sorteados os números 4 para a 3ª série do Ensino Médio e o número 1 para a 8ª Série do Ensino Fundamental. Assim, para a 8ª série, as Provas foram selecionadas, a partir da primeira, de três em três, resultando em 46 Provas que, adicionadas às 7 outras Provas selecionadas anteriormente, formaram a amostra de 53 Provas da 8ª série. Para a 3ª série do Ensino Médio, as Provas foram selecionadas, a partir da 4ª Prova, de cinco em cinco e deste processo resultou a amostra de 44 Provas. Sendo assim, a amostra utilizada neste estudo consiste em um total de 97 Provas.

O primeiro procedimento realizado com as Provas foi a correção, de acordo com a proposta do Manual de Correção de Questões Abertas (BURIASCO, CYRINO e SOARES, 2003). Em seguida, procurou-se realizar uma correção mais apurada, com o intuito de verificar não apenas se as resoluções estavam corretas ou não, mas sim de se verificar as maneiras pelas quais os estudantes abordaram a Questão. Em seguida, para facilitar o processo de descrição e a inferência, conforme propõe a Análise de conteúdo, as resoluções dos estudantes foram agrupadas de acordo com suas particularidades. Os resultados de todo esse trabalho, bem como uma descrição mais detalhada desses procedimentos, serão apresentados no capítulo seguinte.

3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Nesse capítulo apresenta-se a descrição do que foi encontrado na produção escrita dos estudantes referente à questão comum à 8ª série do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio da Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA/2002, bem como, uma análise interpretativa de tal produção.

O primeiro procedimento realizado com as Provas foi corrigir a Questão. A correção foi feita tendo como base o sistema de créditos utilizados no *Manual para Correção de Provas* (BURIASCO, CYRINO E SOARES, 2003). Este manual foi elaborado com o intuito de estabelecer procedimentos e critérios básicos para a correção da Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA/2002, sendo que uma das intenções era evitar que as questões das Provas fossem corrigidas apenas como corretas ou incorretas, o que contraria um dos objetivos desse tipo de questão, que é verificar, por meio da produção escrita do estudante, o conhecimento matemático que ele possui. Assim, foi proposto no Manual separar as resoluções dos estudantes em: resolução correta - crédito completo (2); resolução parcialmente correta – crédito parcial (1); resolução incorreta – nenhum crédito (0); questão sem resolução (em branco) - nenhum crédito (9).

Num primeiro momento da correção das Provas, foram atribuídos, para a Questão, os seguintes créditos: 2, 1 e 0, conforme indicado no Manual. O crédito 0 foi atribuído a todas as questões que apresentavam uma resolução completamente incorreta. Àquelas que apresentavam resolução parcialmente correta, foi atribuído crédito 1. Nas questões que apresentavam resolução completamente corretas, foi atribuído crédito 2. Os resultados desse primeiro levantamento quantitativo estão dispostos na Tabela 1:

Tabela 1: Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos estudantes por série

Série	Totalmente correta (2)		Parcialmente Correta (1)		Incorreta (0)		Total	
	N	%	N	%	N	%	N	%
8ª E. Fund.	7	13,2	9	17,0	37	69,8	53	100,0
3ª E. Médio	12	27,3	10	22,7	22	50,0	44	100,0
Total da amostra	19	19,6	19	19,6	59	60,8	97	100,0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada

Observando os dados da Tabela 1 é possível verificar que, basicamente, a produção escrita dos estudantes sugere uma pequena diferença no desempenho destes, quando comparados por série, sendo que é um pouco melhor o desempenho dos estudantes da 3ª série do Ensino Médio. Assim, num segundo momento, com o intuito de se verificar a existência de diferenças qualitativas na produção escrita apresentada pelos estudantes nas Provas, foi iniciada nova etapa de correção, etapa essa mais detalhada. Para a primeira correção, não houve preocupação com o tipo de estratégia apresentada pelo estudante, apenas procurou-se verificar se as resoluções estavam corretas, parcialmente corretas ou incorretas. Já na segunda correção, procurou-se descrever a produção escrita de cada estudante, explicitando a estratégia e o procedimento[7] utilizado ao abordar o problema. Os resultados dessa etapa encontram-se no Apêndice 1.

Na Tabela 2, apresentam-se os processos de resolução das questões, independente do crédito que foi atribuído à mesma. Considerou-se como processo aritmético toda produção escrita na qual existiam apenas operações aritméticas sobre números tais como adição, subtração, multiplicação, divisão. Considerou-se como algébrica a produção escrita que apresentava pelo menos indícios da utilização de incógnitas ou variáveis e a utilização de entes algébricos como equações, inequações, funções. Foram considerados como 'outro processo' a produção escrita que não se enquadrava em nenhuma das classificações anteriores, como por exemplo

[7] Considera-se, nesse trabalho, *estratégia* como a maneira pela qual o estudante abordou o problema. Por exemplo, para resolver um problema um estudante pode utilizar uma estratégia algébrica, uma aritmética, etc. Já o *procedimento* relaciona-se ao processo de desenvolvimento da estratégia. Por exemplo, se um estudante utiliza-se de uma estratégia algébrica para resolver um problema, um dos procedimentos que pode ser utilizado é a equação, função, sistemas de equações, etc.

aquela produção escrita que não apresentava qualquer registro de cálculo, mas apresentava uma resposta para o problema.

Tabela 2 – Distribuição dos processos de resolução, independente do crédito atribuído à questão

Série \ Processo	Aritmético	Algébrico	Outro
8ª E. Fundamental	43	06	04
3ª E. Médio	34	07	03
Total	77	13	07

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada

Pode-se verificar, analisando a Tabela 2 e aplicando o Teste Qui-quadrado, excluindo a categoria “outro”, que não existe diferença quantitativa significativa ($p = 0{,}5164$) referente ao processo registrado pelos estudantes em suas produções escritas quando comparados por série, indicando que a escolha do processo de resolução independe da série, ou seja, não se pode afirmar que, por estarem em um nível mais elevado de escolaridade, mais estudantes da 3ª série do Ensino Médio escolheram uma estratégia algébrica. Analisando a produção escrita dos estudantes referente à Questão, não se pode afirmar que a maioria dos estudantes não sabe resolver problemas algebricamente, uma vez que o simples fato de ter escolhido uma estratégia aritmética não revela que o estudante desconheça uma estratégia algébrica que resolva o problema. O que se pode inferir é que a produção escrita dos estudantes revela que os mesmos sentem-se mais seguros quando utilizam uma estratégia aritmética.

Após a segunda etapa de correção, procurou-se agrupar as produções escritas da questão sob análise em nove grupos excludentes, uma vez que cada Prova foi classificada em apenas um grupo, conforme critérios apresentados no Quadro 2. Contudo, é importante destacar que, em algumas Provas, verifica-se a ocorrência de características de dois grupos. Por exemplo, em uma das Provas a produção escrita do estudante mostra que ele calcula corretamente o valor de um serviço de uma hora para ambos os encanadores (G6) e também apresenta outros cálculos que não resolvem a questão (G8), ou seja, esta Prova poderia ser classificada em qualquer um desses grupos. No entanto, como a resposta apresentada pelo estudante baseia-se no cálculo do serviço de uma hora de trabalho para ambos os encanadores, optou-se por enquadrar essa Prova no Grupo G6. Assim, para enquadrar uma Prova nesse ou naquele grupo, optou-se por considerar aquilo que o estudante utilizou para responder a questão.

Grupo	Critério de agrupamento	8ª série	3ª série
G1 04 Provas	Calcula o valor do serviço dos encanadores considerando apenas o valor cobrado por hora	02	02
G2 09 Provas	Subtrai o preço cobrado por hora pelo encanador B do preço cobrado por hora pelo encanador A	05	04
G3 04 Provas	Apenas retira as informações do problema.	01	03
G4 09 Provas	Não apresenta cálculo algum e responde incorretamente	06	03
G5 13 Provas	Calcula corretamente o valor da primeira hora de trabalho para ambos os encanadores, enfatizando a diferença de R$ 18,00 entre eles	09	03
G6 13 Provas	Calcula o valor da primeira hora ou de alguma hora específica de trabalho e responde incorretamente	09	05
G7 25 Provas	Calcula aritmeticamente o valor das primeiras horas de trabalho, consecutivas ou não	11	14
G8 10 Provas	Apresenta outros cálculos que não resolvem o problema	05	05
G9 08 Provas	Apresenta as leis das funções que descrevem os custos do serviço dos dois encanadores	05	05

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada

Quadro 2 – Agrupamento de resoluções de acordo com as estratégias encontradas

A seguir, apresentam-se as descrições das produções escritas das Provas enquadradas nos grupos citados acima.

<u>Grupo G1: 04 Provas</u>

Série	Crédito completo	Crédito Parcial	Nenhum Crédito
8ª série Ensino Fundamental	0	0	2
3ª série Ensino Médio	0	0	2

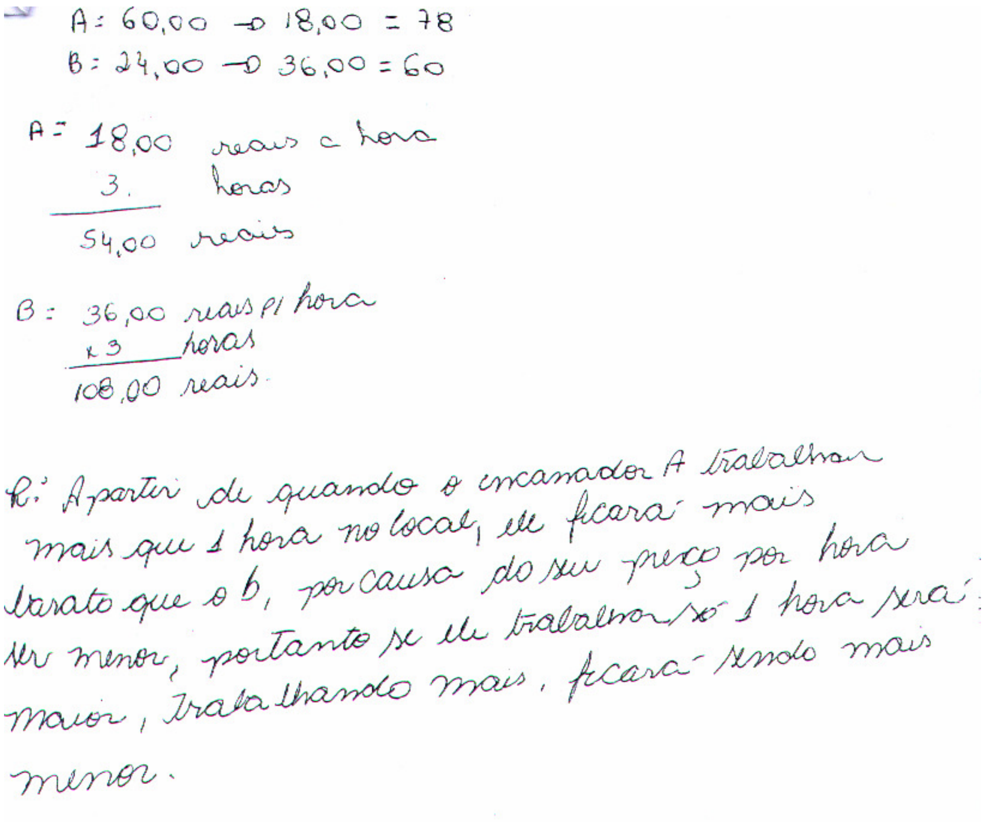
As provas do Grupo G1 apresentam, como característica principal, o cálculo do valor do serviço dos encanadores, considerando apenas o valor cobrado por hora. Ao se analisar a produção escrita presente nas Provas desse grupo, pode-se considerar que os estudantes cujas Provas se enquadram neste grupo resolveram um problema diferente daquele Problema Proposto[8] na Prova. No Problema Resolvido, os estudantes desconsideraram o preço fixo cobrado por cada encanador para serviços de qualquer hora de duração. Tal fato pode ser claramente verificado nas respostas apresentadas nas Provas. A resposta apresentada em uma delas da 3ª série do Ensino Médio foi a seguinte: *"A partir do momento que ao contratarmos o encanador A por horas se tornará mais barato por que ele cobra $R\$18{,}00$ a hora e o encanador B cobra $R\$36{,}00$"*. Pode-se inferir que o estudante que a escreveu pode ter compreendido que se poderia contratar os encanadores por hora ou pelo preço fixo. Assim, a resposta apresentada pelo estudante está adequada para o Problema Resolvido, mas não para o Problema Proposto.

Em uma das Provas da 8ª série verifica-se a seguinte resposta: *"o encanador A sempre ficará mais barato se for cobrado só pelo tempo de trabalho"*. Assim como na resposta anterior, o estudante que a escreveu pode ter compreendido que os encanadores cobrariam o serviço por um preço fixo, independente do tempo gasto ou por hora de trabalho. Analisando as respostas apresentadas por esses estudantes, pode-se inferir que eles teriam resolvido o seguinte problema, que será denominado Problema Resolvido 1: *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de $R\$60{,}00$ <u>ou</u> $R\$18{,}00$ por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de $R\$24{,}00$ <u>ou</u> $R\$36{,}00$ por hora de trabalho. Em qual das opções o encanador A fica mais barato?* Pode-se considerar que este problema e o Problema Proposto referem-se a situações diferentes, mas escritas de maneiras muito semelhantes. Portanto, o que levou estes estudantes a solucionarem o Problema Resolvido 1 e não o Problema Proposto pode ter

[8] Considera-se, nesse trabalho, **Problema Proposto** aquele que constava originalmente na Prova e que se esperava que fosse resolvido pelo estudante e **Problema Resolvido** aquele que se inferiu, mediante a produção escrita, que cada estudante resolveu como resultado da interpretação que fez do Problema Proposto.

sido a desatenção no momento da leitura do problema. Entretanto, não se pode deixar de considerar que em geral muitos estudantes apresentam dificuldade em compreender o que de fato está escrito, conforme demonstra este trabalho. É importante destacar que a análise da produção escrita destes estudantes mostra que eles são capazes de resolver problemas como o Problema Resolvido 1.

A Figura 1 apresenta a produção escrita de um estudante da 8ª série



A: 60,00 → 18,00 = 78
B: 24,00 → 36,00 = 60

A = 18,00 reais a hora
3. horas
54,00 reais

B: 36,00 reais p/ hora
x3 horas
108,00 reais.

R: Apartir de quando o encanador A trabalhar mais que 1 hora no local, ele ficará mais barato que o B, por causa do seu preço por hora ser menor, portanto se ele trabalhar só 1 hora será maior, Trabalhando mais, ficará sendo mais menor.

Figura 1 – Resolução apresentada na Prova 8L04109 da 8ª série que recebeu crédito 0

Como pode ser visto na figura anterior, este estudante apresentou o valor correto cobrado pelos encanadores A e B, mas desconsiderou tais resultados quando deu a resposta do problema. Analisando a produção escrita desse estudante, infere-se que o mesmo pode ter entendido que o custo de um serviço de uma hora seria obtido por meio da adição do preço fixo com o preço cobrado por uma hora de trabalho. Para serviços com mais de uma hora de duração, os encanadores cobrariam somente o preço por hora. Dessa forma, pode-se considerar que o problema que este estudante resolveu foi o problema seguinte, que será denominado Problema Resolvido 2: *Um encanador A cobra, por um serviço de uma hora, um valor fixo de* $R\$60{,}00$ *mais* $R\$18{,}00$ *e, para serviços com mais de uma hora, um valor de R\$* $R\$18{,}00$ *por hora. Um outro encanador B cobra, por um serviço de uma hora, um valor fixo de* $R\$24{,}00$ *mais* $R\$36{,}00$ *e, para serviços com mais de uma hora, um valor de* $R\$36{,}00$ *por hora de trabalho. Em qual das opções o encanador A fica mais barato?*

Esta inferência pôde ser feita ao se analisar a resposta apresentada na resolução da Questão. Além disso, tal resposta indica que o estudante percebeu que a diferença entre os preços cobrados pelos encanadores A e B, nas condições do Problema Resolvido 2, sempre aumentaria, pois afirma que "[...] *se ele* [encanador A]*trabalhar só uma hora* [o custo] *será maior, trabalhando mais ficará sendo mais menor*"(sic).

Grupo G2: 09 Provas

Série	Crédito completo	Crédito Parcial	Nenhum Crédito
8ª série Ensino Fundamental	0	0	5
3ª série Ensino Médio	0	1	3

Todas as Provas deste grupo apresentam o cálculo da diferença existente entre o preço cobrado por hora pelo encanador B do preço cobrado por hora pelo encanador A. Em três das cinco Provas da 8ª série, além de apresentarem o cálculo referido anteriormente, apresentam o valor correto de um serviço de uma hora de duração para ambos os encanadores. Entretanto, analisando as respostas apresentadas pelos estudantes, conclui-se que este cálculo foi considerado pelo estudante como algo irrelevante. Um dos estudantes afirma que "*para resolver esta questão foi necessário subtrair o preço pago para ao encanador B, em relação ao encanador A, por tempo medido em horas*". Além disso, este estudante inicia sua resposta afirmando que "*o encanador A sendo o t medido em horas fica* $R\$18{,}00$ *reais mais barato que o encanador B*".

Oito das nove Provas desse grupo apresentam na resposta o valor da diferença entre os preços cobrados por hora de trabalho. Assim, pode-se inferir que estes estudantes solucionaram o Problema Resolvido 3: *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de* $R\$60{,}00$ *mais* $R\$18{,}00$ *por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de* $R\$24{,}00$ *mais* $R\$36{,}00$ *por hora de trabalho. Sendo* t *o valor cobrado por hora de trabalho, quantos reais a hora do encanador A é mais barata que do B?*

Assim, parece que estes estudantes compreenderam o trecho da questão "*sendo* t *o tempo, medido em horas,* (...)" como se fosse para considerar, na resolução do problema, apenas o preço cobrado por hora de trabalho para ambos os encanadores para, então, calcular a diferença entre os preços dos dois encanadores. Esta inferência pode também ser feita a partir da resposta apresentada a seguir, de um aluno da 8ª série:

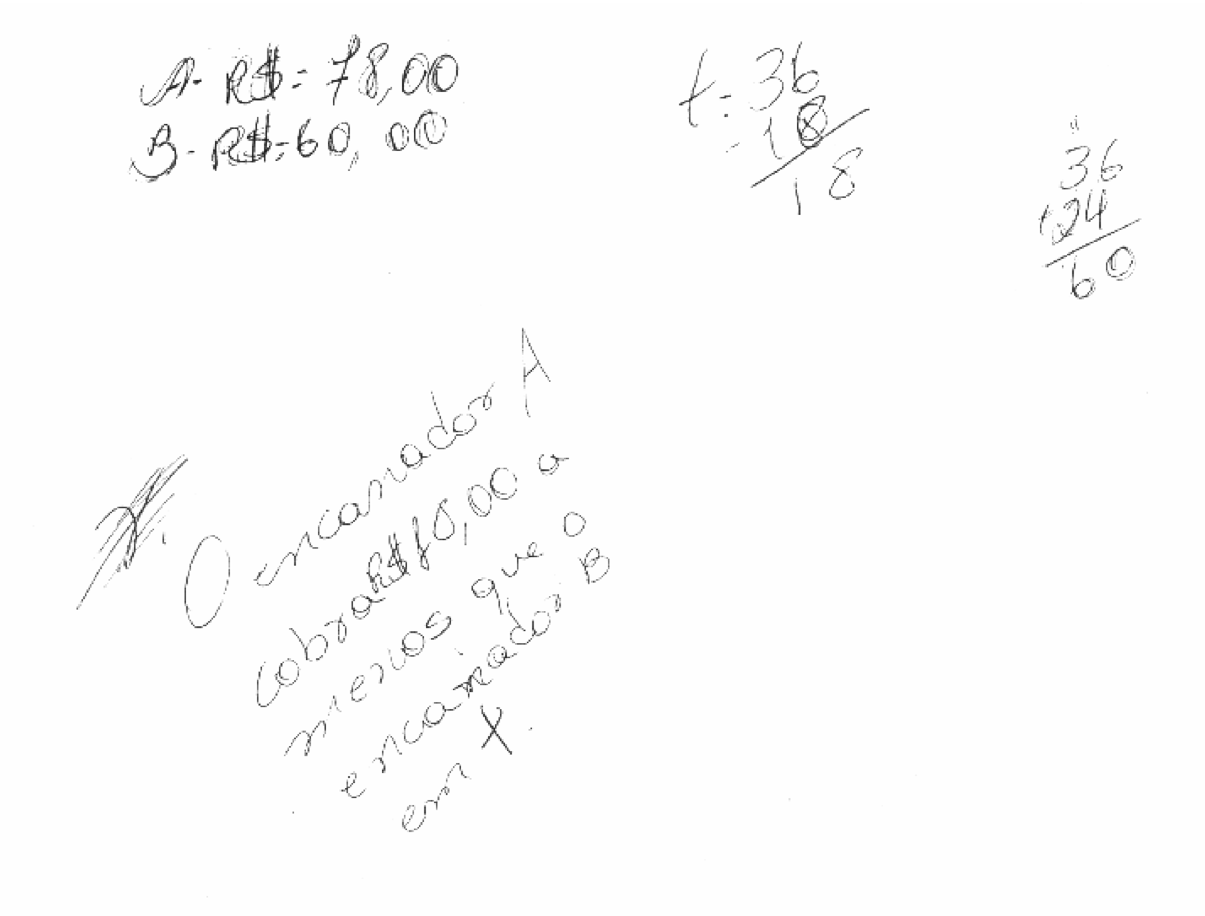


Figura 2 – Resolução apresentada na Prova 8L09205 da 8ª série que recebeu crédito 0

Para este estudante, t é o valor da diferença entre os preços das horas de trabalho dos encanadores, uma vez que escreve $t = 36 - 18$. Assim "*em t*", ou seja, considerando apenas o preço das horas de trabalho, "*o encanador A cobra R\$18,00 a menos que o encanador B*", o que representa uma resposta correta para o Problema Resolvido 3.

Em duas das Provas da 3ª série do Ensino Médio aparece um erro na utilização do algoritmo ao efetuar a operação $36 - 18$, fazendo com que a diferença entre os preços cobrados por hora fosse maior que a diferença correta (veja figura seguinte)

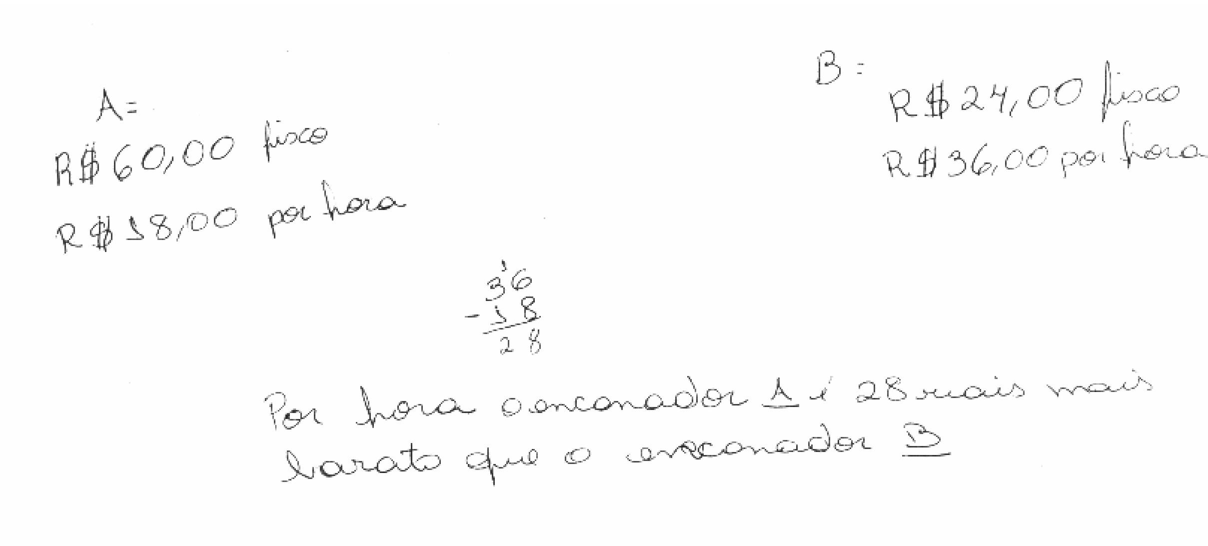


Figura 3 – Resolução apresentada na Prova 3C03039 da 3ª série que recebeu crédito 0

A Prova seguinte destaca-se entre as demais do grupo. Apesar de efetuar a operação $36 - 18 = 18$, este resultado parece não ter sido utilizado para escrever a resposta do problema.

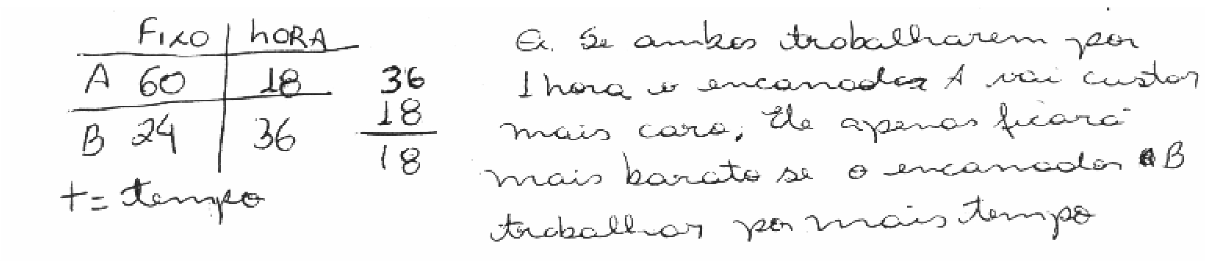


Figura 4 – Resolução apresentada na Prova 3L07038 da 3ª série que recebeu crédito 1

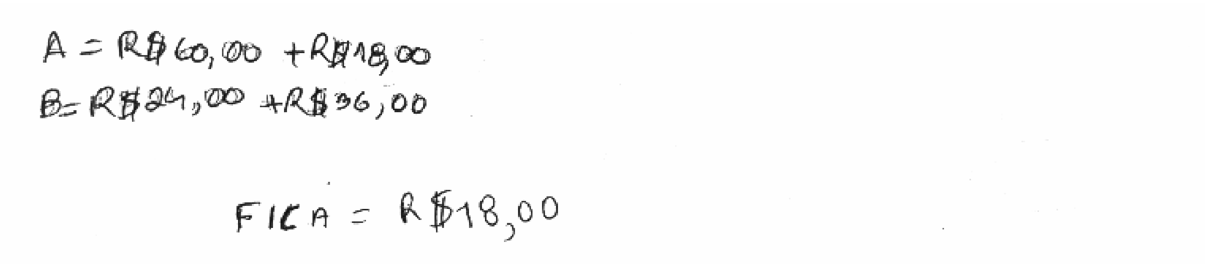
Como pode ser visto anteriormente, o que se apresenta na resposta do problema é coerente com o Problema Proposto, apesar de não respondê-lo. Assim, esta questão recebeu crédito parcial. O estudante deve ter feito cálculos mentais para concluir que a diferença entre os custos dos encanadores diminui, apesar do preço do encanador A ser menor que o preço por hora de B e, para um certo valor de t, que o estudante não apresenta, o custo de A se torna menor que o custo de B.

Na maioria das Provas deste grupo, é possível de se verificar que os estudantes não compreenderam que o que se pedia era a partir de quantas horas o custo do encanador A se torna menor que o custo do serviço do encanador B. Assim, para estes estudantes, t não foi considerada como a variável independente, mas sim uma abreviação para a palavra *tempo,* que, por ser *"medido em horas"*, foi associada ao valor cobrado por hora de trabalho pelos encanadores. Essa é uma das dificuldades, relacionadas à linguagem algébrica, apontadas por Wheeler (1996), uma vez que em álgebra se incorporam algumas palavras ou símbolos que já são utilizados em aritmética, mas com significados diferentes. Estes estudantes parecem estar concebendo t com seu significado em aritmética. Em outros casos, t foi considerado como a incógnita que representa a diferença, em reais, entre os preços cobrados por hora pelos encanadores.

Grupo G3: 4 Provas

Série	Crédito completo	Crédito Parcial	Nenhum Crédito
8ª série Ensino Fundamental	0	0	1
3ª série Ensino Médio	0	0	3

Nas Provas deste grupo, a produção escrita dos estudantes mostra que eles apenas retiraram corretamente as informações do problema, conforme figura seguinte, que mostra a resolução de um estudante da 3ª série do Ensino Médio:

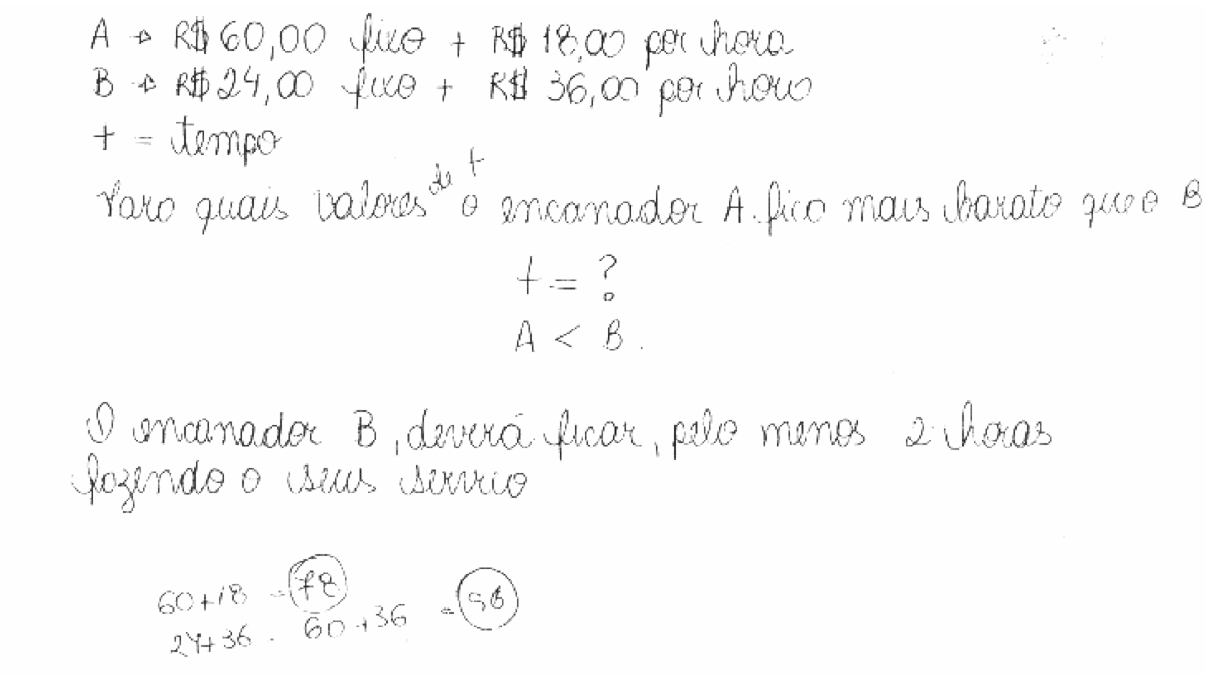

A = R$60,00 + R$18,00
B= R$24,00 + R$36,00

FICA = R$18,00

Figura 5 – Resolução apresentada na Prova 3C05036 da 3ª série que recebeu crédito 0

Parece que "*fica* = $R\$18{,}00$" é a resposta apresentada pelo estudante. Contudo, como não há nenhum cálculo escrito registrado na Prova, não é possível de afirmar se esse é resultado da diferença entre os preços cobrados por hora ($36-18=18$) ou se é a diferença entre os preços dos custos dos serviços dos encanadores referentes a uma hora de trabalho ($78-60=18$).

A Figura 6 mostra que o estudante da 3ª série do Ensino Médio compreendeu o Problema Proposto, uma vez que foi capaz de representá-lo de uma outra forma, utilizando a linguagem sincopada, ou seja, utiliza algumas abreviaturas incógnitas, mas ainda assim os cálculos se desenvolvem na linguagem natural (MALISANI, 1999). Ele inicia a execução de uma estratégia que resolve o problema, calculando o valor de um serviço de uma hora para o encanador A e de uma e duas horas para o encanador B, mas parece que abandona esta estratégia, pois apresenta uma resposta que não é resultado dos procedimentos relativos à estratégia.



A → R$ 60,00 fixo + R$ 18,00 por hora
B → R$ 24,00 fixo + R$ 36,00 por hora
t = tempo
Para quais valores de t o encanador A fico mais barato que o B
t = ?
A < B.

O encanador B, deverá ficar, pelo menos 2 horas fazendo o seus serviço

60+18 = 78
24+36 = 60+36 = 96

Figura 6 – Resolução apresentada na Prova 3C03119 da 3ª série que recebeu crédito 0

Em uma outra Prova da 3ª série do Ensino Médio, pode-se verificar que o estudante que a resolveu retira as informações do problema, ou seja, identifica que os custos dos serviços para os encanadores são obtidos adicionando um custo fixo com um custo por hora de trabalho. Entretanto, assim como no grupo G2, este estudante parece associar a variável t ao preço da hora de serviço, uma vez que responde que *"o A fica mais barato porque o B cobra o dobro"*.

A Prova da 8ª Série do Ensino Fundamental que faz parte deste grupo apresenta uma resposta interessante. Assim como nas demais Provas desse grupo, é possível de se verificar que o estudante que a resolveu retirou corretamente as informações do enunciado da questão. Entretanto, apesar de não apresentar cálculo algum, apresenta uma resposta que, mesmo não respondendo o Problema Proposto, é coerente. A resposta é a seguinte: "(o encanador A) *sairá mais barato quanto maior for o tempo trabalhado"*. Não foi possível inferir, na produção escrita, como o estudante que a resolveu chegou a esta conclusão.

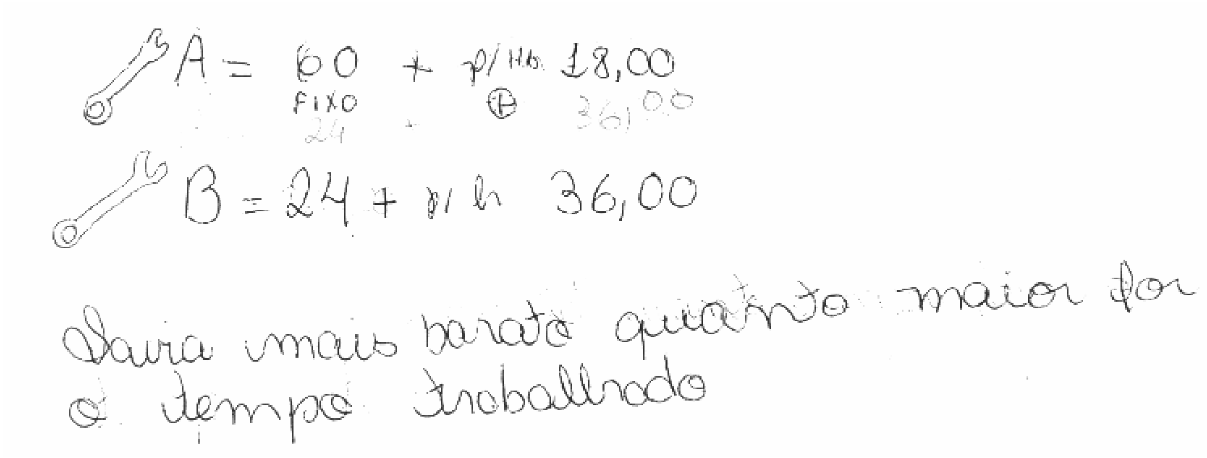


Figura 7 – Resolução apresentada na Prova 8L05014 da 8ª série que recebeu crédito 0

De um modo geral, as Provas deste grupo mostram que os estudantes compreenderam a situação do Problema Proposto. Contudo, alguns não conseguiram escolher e/ou desenvolver uma estratégia que o resolvesse.

<u>Grupo G4: 9 Provas</u>

Série	Crédito completo	Crédito Parcial	Nenhum Crédito
8ª série Ensino Fundamental	0	0	6
3ª série Ensino Médio	1	0	2

As Provas do grupo G4 têm como característica principal a ausência de cálculos escritos, mas todas apresentam uma resposta.

A Prova que recebeu crédito completo é de um estudante da 3ª Série do Ensino Médio. Apesar de não demonstrar cálculo algum, apresenta como resposta "*para todos os valores acima de 2:00 h, sendo que, a cada hora de trabalho acrescentada, a diferença do preço de B em relação a A aumenta*". Percebe-se que o estudante, além de responder corretamente o problema, ainda conclui corretamente que acima de duas horas, a diferença entre os preços dos encanadores vai aumentando, ou seja, o encanador B vai ficando cada vez mais caro quando maior for a duração do serviço. Este estudante parece ter chegado a esta conclusão fazendo cálculos, mas os apagou.

Outra Prova da 3ª série do Ensino Médio apresenta seguinte resposta: *"Quando A cobra o serviço medido em horas"*. De acordo com a resposta, parece que o estudante que a escreveu compreendeu que, assim como um dos estudantes do grupo G1 concluiu, poder-se-ia contratar os encanadores por um preço fixo ou por um preço proporcional ao número de horas trabalhadas. Assim, como o preço por hora do encanador A é menor que o respectivo preço cobrado pelo encanador B, o encanador A sairia mais barato quando fosse contratado por hora.

A resposta apresentada em outra Prova da 3ª série do Ensino Médio foi:

> *Por que o encanador cobra* $R\$18{,}00$ *por hora ou seja o dia lhe é garantido e a hora pode ser duradoura ou não no caso se ele trabalhar 2 horas e terminar o serviço ganhará* $R\$36{,}00$*, menos do que trabalho fixo mas porém obtém maior lucro.* (Prova 3C03120)

Parece que, assim como o estudante citado anteriormente, o estudante que escreveu essa resposta compreendeu que se poderia contratar o encanador A por um valor fixo ou por um valor por hora de trabalho. Entretanto, é difícil de entender como é possível o encanador A ganhar um valor menor que o preço fixo e ainda assim ter maior lucro.

Uma das Provas da 3ª série do Ensino Médio, cuja resolução recebeu crédito zero, apresenta como resposta: *"Se o encanador A e o B ter 4 horas de serviço o encanador A ficará sempre mais barato por hora"*. O estudante que a escreveu parece ter considerado, assim como alguns desse grupo, que se poderia contratar os encanadores por um preço fixo ou por hora de trabalho. Em uma outra Prova da 8ª série apenas aparece a resposta: *"os dois tem o mesmo preço"*

Grupo G5: 12 Provas

Série	Crédito completo	Crédito Parcial	Nenhum Crédito
8ª série Ensino Fundamental	0	0	9
3ª série Ensino Médio	0	0	3

As Provas enquadradas nesse grupo têm, como característica comum, a apresentação do cálculo aritmético do custo de um serviço de uma hora de trabalho para ambos os encanadores. A maioria delas, nas respostas, enfatiza a diferença de $R\$18{,}00$ existente entre os preços cobrados pelos encanadores, referentes a um serviço de uma hora de duração. A maioria das produções desse grupo é de estudantes da 8ª Série do Ensino Fundamental. Em todas elas verificam-se as operações $60+18=78$ e $24+36=60$.

Três das Provas da 8ª série apresentam as mesmas operações, indicando como resposta que o encanador A fica mais barato. Como o encanador A pode ficar mais barato se, pelos cálculos apresentados, o custo de A é maior do que o custo de B? Talvez esses estudantes tenham apenas se distraído ou consideraram que, como a diferença entre os preços de A e B foi positiva, A é mais barato. Não se pode inferir a respeito do motivo que levou estes estudantes a apresentarem aquela resposta.

A produção escrita de uma outra Prova da 8ª série desse mesmo grupo apresenta alguns aspectos interessantes. Assim como os demais, o estudante que a produziu obtém aritmeticamente o valor de um serviço de uma hora de trabalho para ambos os encanadores. Da maneira como sua produção escrita está disposta na folha, tudo indica que essa foi a primeira etapa a ser feita. Em seguida, subtrai, do preço de um serviço de uma hora do encanador A, o preço de um serviço de uma hora do encanador B, indicando que "*B fica mais barato por apenas* $R\$18{,}00$ *amais* (sic) *do que o encanador A*". Essa afirmação é contraditória, uma vez que ao mesmo tempo em que afirma que B fica mais barato, pode-se entender que B cobra $R\$18{,}00$ a mais do que o encanador A, o que não é verdade. Feito isso, a próxima operação feita pelo estudante foi $78+60=138$. Na sua produção escrita não se pode verificar que o estudante utilizou esse resultado.

Uma outra Prova da 8ª série apresenta a resposta *"fica mais barato se o encanador cobrar só uma hora"*. Assim como outros estudantes do grupo G1 e G4, o estudante que a escreveu parece ter compreendido que se poderia contratar os serviços dos encanadores por um preço fixo ou por hora de trabalho. Este fato também pode ser percebido na resposta apresentada por outro estudante da 8ª série: "*o encanador B é mais barato ele fica uma hora mais barato*", ou seja, a diferença ($R\$18,00$) entre os custos dos serviços de uma hora entre os encanadores A e B corresponde ao valor cobrado por hora de trabalho pelo encanador A.

Outras três Provas da 8ª série e uma das Provas da 3ª série desse grupo apresentam como resposta que o encanador B é mais barato. Para chegar a esta conclusão, parece que estes estudantes calcularam aritmeticamente o custo de um serviço de uma hora de trabalho para ambos os encanadores e compararam os resultados. Assim, estes estudantes concluíram que, como o custo do encanador B para um serviço de uma hora é menor que o respectivo custo para o encanador A, este comportamento repetir-se-ia para qualquer serviço de qualquer duração.

Em duas das Provas de estudantes da 3ª série do Ensino Médio, verifica-se o cálculo aritmético correto de um serviço de uma hora de duração para ambos os encanadores, mas as respostas apresentadas diferem das demais desse grupo. Uma delas afirma que "*O valor de* $t = 18,00$ *que fica mais barato*". Já a outra responde: "*sim, porque ele cobra 18 reais por hora*". O que estas duas respostas parecem ter em comum é o fato de que ambos os estudantes que as escreveram, apesar de calcularem corretamente os custos de um serviço de uma hora, consideraram que a diferença entre os preços dos encanadores apenas está relacionada ao valor cobrado por hora de trabalho. O primeiro estudante parece ter compreendido que a variável t era o valor cobrado por hora e não o tempo, medido em horas. De acordo com esta compreensão, o encanador A é mais barato. Assim, pode-se considerar que esses estudantes solucionaram corretamente o seguinte problema, ora denominado Problema Resolvido 4: *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de* $R\$60,00$ *mais* $R\$18,00$ *por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de* $R\$24,00$ *mais* $R\$36,00$ *por hora de trabalho. Sendo* t *o valor cobrado por hora de trabalho, qual valor de* t *é mais barato?*

Grupo G6: 14 Provas

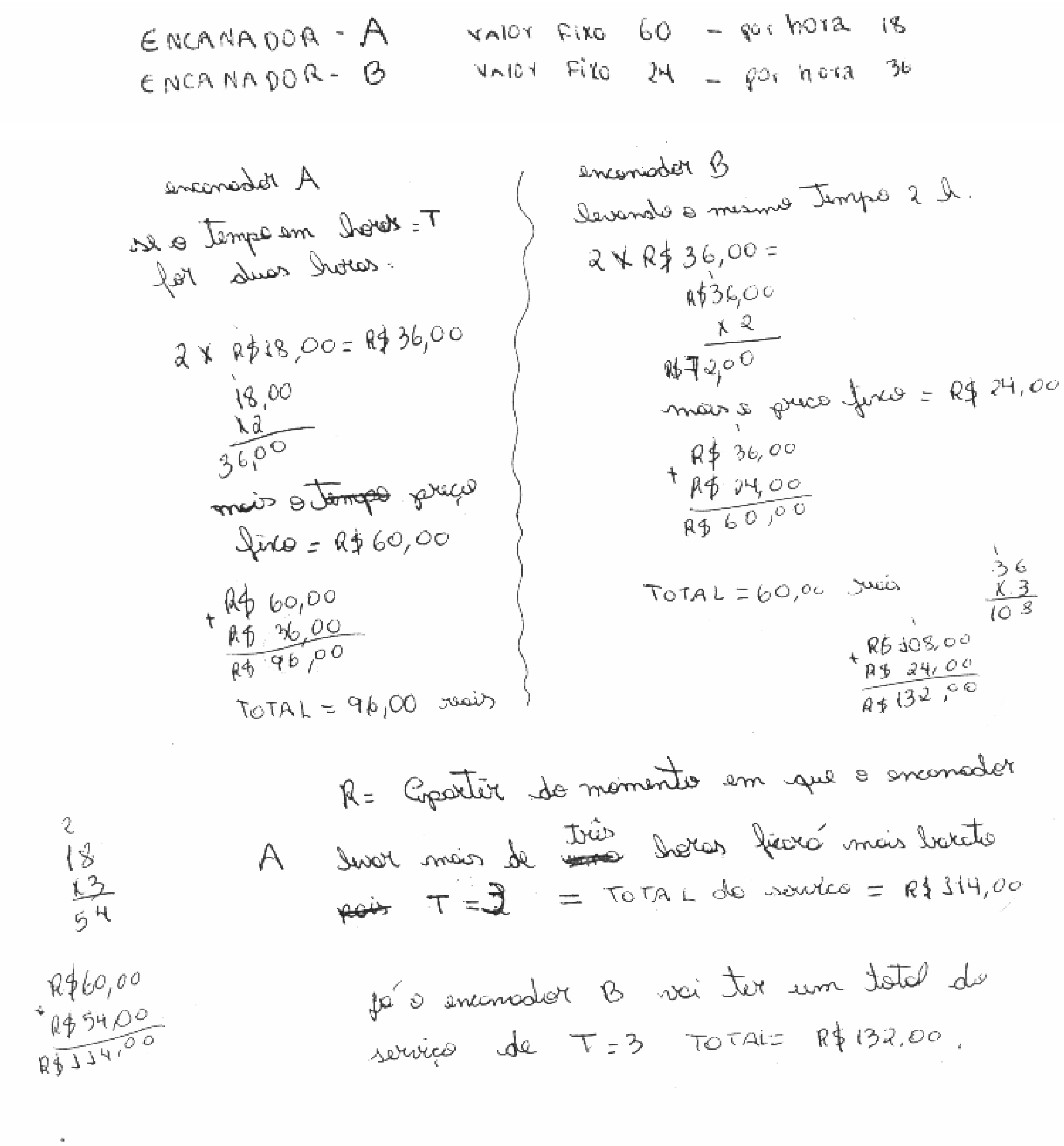
Série	Crédito completo	Crédito Parcial	Nenhum Crédito
8ª série Ensino Fundamental	0	2	7
3ª série Ensino Médio	0	1	4

As Provas enquadradas neste grupo têm como principal característica a apresentação do cálculo do valor das primeiras horas de trabalho ou de alguma hora específica para ambos os encanadores, apresentando uma resposta incorreta.

Duas da Provas que receberam crédito parcial são da 8ª série. Uma delas apresenta o cálculo correto do valor de um serviço de três horas para ambos os encanadores, apresentando como resposta do problema: *"o encanador A cobrará o v.f. (*$R\$60{,}00$*) + o valor por 3 horas (*$R\$54{,}00$*) e terá cobrado um total* $R\$114{,}00$*. O cobrador B, apesar do v.f. ser baixo terá cobrado muito pelas 3 horas e no total vai sair por* $R\$132{,}00$*"*.

Pela resposta apresentada pelo estudante, verifica-se que ele conseguiu perceber que a diferença entre os preços dos serviços dos encanadores diminuiria quando o tempo do serviço aumentava, pois percebeu que o que determinaria o preço de um serviço longo não era o valor fixo, mas sim o valor cobrado por hora de trabalho.

A estratégia apresentada pelo estudante na outra Prova deste grupo da 8ª série que também recebeu crédito parcial, é semelhante à anterior. Nesta, o estudante apresenta os cálculos corretos de um serviço de duas e três horas de trabalho para os encanadores A e B, conforme figura seguinte:



ENCANADOR - A VALOR FIXO 60 - por hora 18
ENCANADOR - B VALOR FIXO 24 - por hora 36

encanador A
se o tempo em horas = T
for duas horas.
2 x R$ 18,00 = R$ 36,00
18,00
x2
36,00
mais o ~~tempo~~ preço fixo = R$ 60,00
R$ 60,00
+ R$ 36,00
R$ 96,00
TOTAL = 96,00 reais

encanador B
levando o mesmo tempo 2 h.
2 x R$ 36,00 =
R$36,00
x 2
R$72,00
mais o preço fixo = R$ 24,00
R$ 36,00
+ R$ 24,00
R$ 60,00
TOTAL = 60,00 reais

36
x 3
108
R$ 108,00
+ R$ 24,00
R$ 132,00

2
18
x3
54

R$60,00
+ R$54,00
R$114,00

R= A partir do momento em que o encanador A levar mais de três horas ficará mais barato ~~pois~~ T = 3 = TOTAL do serviço = R$ 114,00

já o encanador B vai ter um total do serviço de T = 3 TOTAL = R$ 132,00.

Figura 8 – Resolução apresentada na Prova 8L10179 da 8ª série que recebeu crédito 1

Contudo, a natureza da resposta apresentada por este estudante é diferente da apresentada pelo estudante anterior. Este estudante apresenta uma resposta para o problema, afirmando que o encanador A será mais barato se o serviço “*levar mais de três horas*”. Entretanto, o próprio estudante, pelos cálculos e pela resposta que apresentou, parece ter percebido que já para um serviço de três horas, o encanador A se mostra mais barato. Dessa forma, pode-se supor que houve apenas um equívoco na escrita da resposta.

A Prova da 3ª série do Ensino Médio que recebeu crédito parcial apresenta o cálculo aritmético do valor de um serviço de três horas para os encanadores A e B e, como resposta, que A é mais barato que B, apresentado, assim, que para um serviço de três horas, A se mostra mais barato. Pela resposta apresentada, pode-se considerar que o estudante que a escreveu solucionou o seguinte Problema Resolvido 5: *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de* $R\$60{,}00$ *mais* $R\$18{,}00$ *por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de* $R\$24{,}00$ *mais* $R\$36{,}00$ *por hora de trabalho. Sendo* t *o tempo, medido em horas, dê um valor de* t *para o qual o encanador A fica mais barato que o B.*

Em outras sete Provas deste grupo – cinco da 8ª série e duas da 3ª série – os estudantes apresentam o cálculo do custo do serviço de uma, duas, três ou seis horas de trabalho e se baseiam nesses resultados para dar a resposta do problema, conforme mostra a figura seguinte:

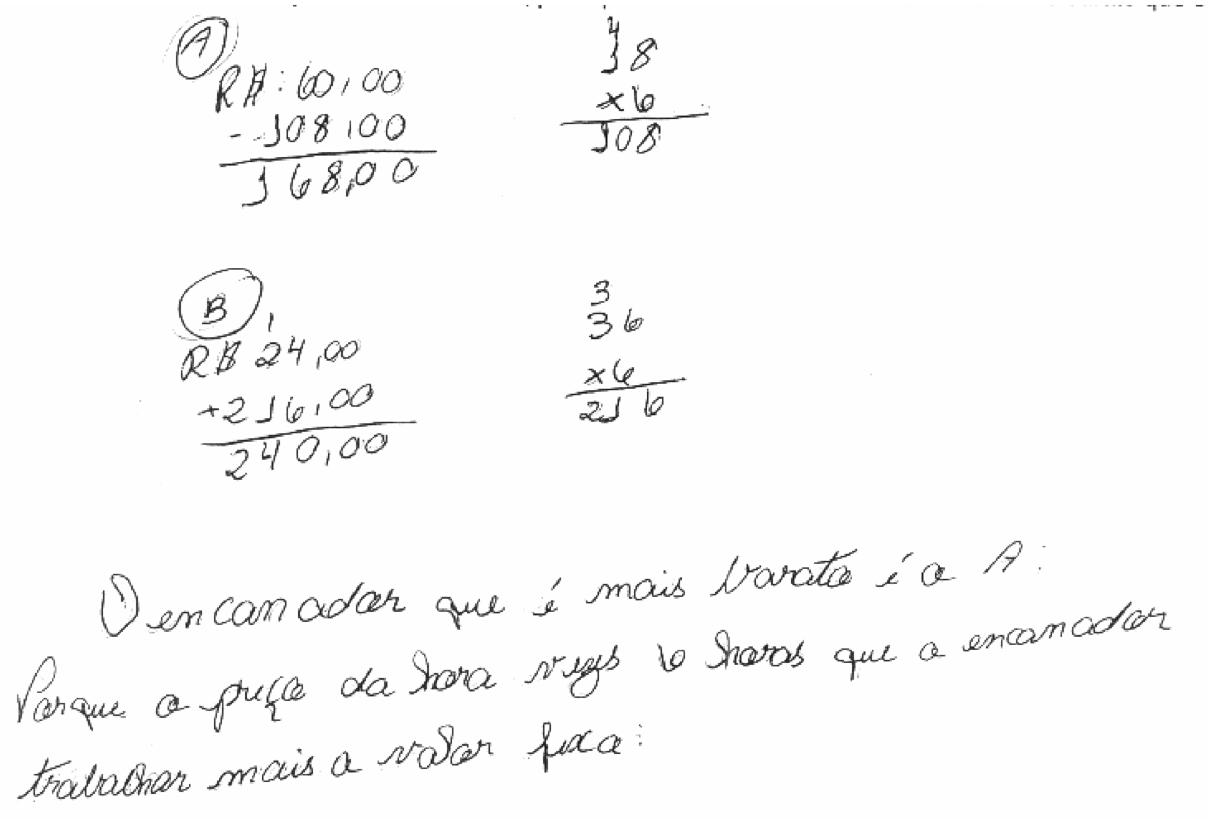


Figura 9 – Resolução apresentada na Prova 8L08163 da 8ª série que recebeu crédito 0

Este estudante encontrou corretamente o custo de um serviço de seis horas para ambos os encanadores e respondeu que o encanador A é mais barato. Pode-se inferir que este estudante também solucionou corretamente o Problema Resolvido 4. Em uma das Provas da 3ª série do Ensino Médio, o estudante calcula corretamente o custo de um serviço de uma hora de duração para os encanadores A e B, respondendo que *"ficará mais barato se o encanador A fizer apenas um serviço"*. Antes de apresentar essa resposta, o estudante escreveu que *"cada hora de trabalho realizado o encanador A cobrará menos pelo serviço"*, mas riscou esta frase. Parece que este estudante, de início, considerou esta frase, a riscada, como sendo a resposta do problema, mas parece ter percebido que tal resposta não era satisfatória, o que o levou a apresentar outra resposta. De fato a resposta apresentada pelo estudante é coerente, mas não é a resposta correta para o Problema Proposto.

Outra Prova da 8ª série apresenta o cálculo correto do valor de um serviço de cinco horas de duração e, como resposta o valor da diferença, em reais, do custo do encanador B em relação ao A. Pode-se considerar que este estudante também solucionou corretamente o Problema Resolvido 4.

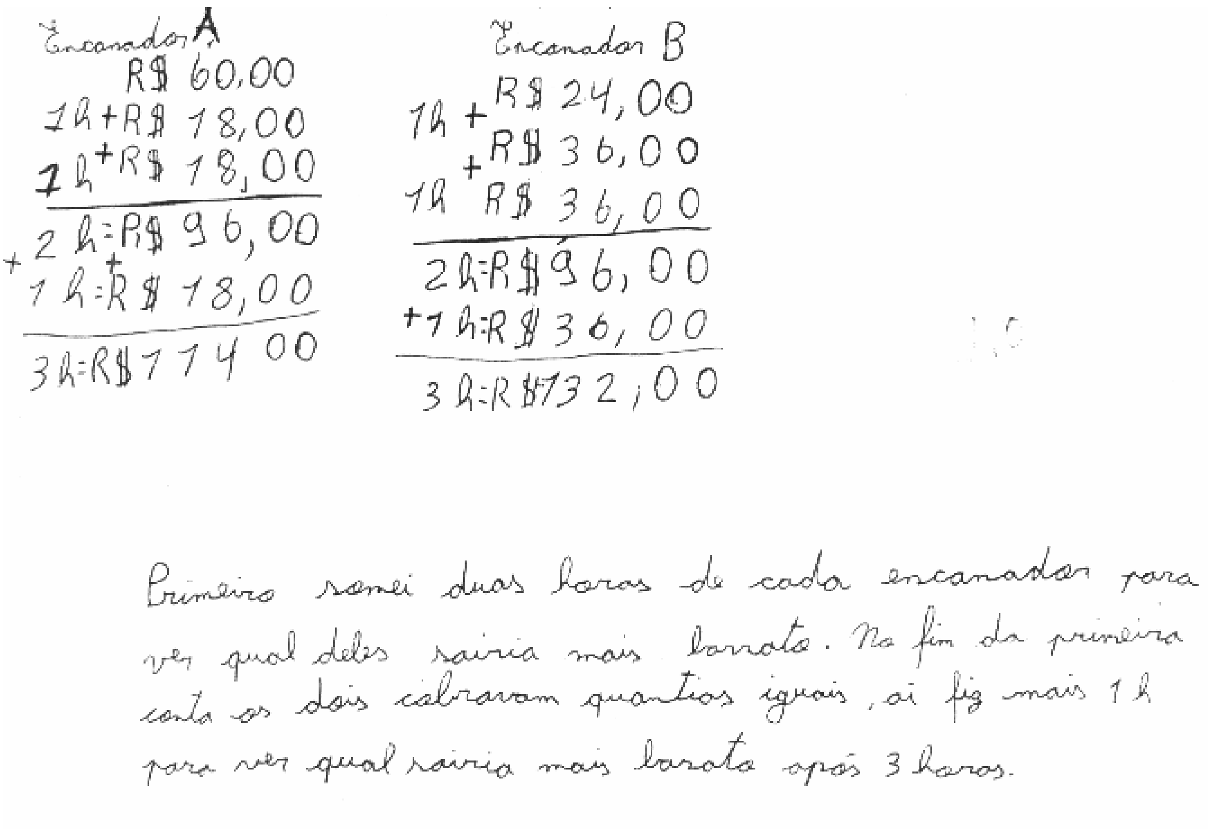
Em uma Prova da 8ª série verifica-se o cálculo do custo um serviço de uma hora de duração corretamente atribuído para o encanador A e incorretamente para o encanador B, apresentando como resposta que o encanador A mostra-se mais barato cobrando por hora de trabalho. Assim como em outras Provas de outros grupos, este estudante parece ter compreendido que se poderia pagar pelos serviços dos encanadores por um preço fixo, independente do tempo de duração, ou por um valor por hora de trabalho. Dessa forma, pode-se considerar que este estudante solucionou corretamente o Problema Resolvido 1. Este fato também ocorreu com outro estudante da 8ª série, pois apresenta o cálculo correto de um serviço de uma hora de duração e a seguinte resposta *"mesmo com o valor de t sendo o tempo, o encanador B fica mais barato"*.

Grupo G7: 25 Provas

Série	Crédito completo	Crédito Parcial	Nenhum Crédito
8ª série Ensino Fundamental	5	6	0
3ª série Ensino Médio	8	6	0

Neste grupo encontram-se as Provas que apresentam o cálculo aritmético de um serviço de uma, duas, três, quatro, cinco horas de duração para os encanadores A e B. É o grupo com uma maior freqüência, indicando que esta foi a estratégia utilizada pela maioria dos estudantes da amostra.

A figura seguinte mostra a resolução apresentada em uma das Provas da 8ª série do Ensino Fundamental que recebeu crédito parcial.



Encanador A
R$ 60,00
1h + R$ 18,00
1h + R$ 18,00
2h: R$ 96,00
+ 1h: R$ 18,00
3h: R$ 114 00

Encanador B
1h + R$ 24,00
+ R$ 36,00
1h + R$ 36,00
2h: R$ 96,00
+ 1h: R$ 36,00
3h: R$ 132,00

Primeiro somei duas horas de cada encanador para ver qual deles sairia mais barato. No fim da primeira conta os dois cobravam quantias iguais, aí fiz mais 1 h para ver qual sairia mais barato após 3 horas.

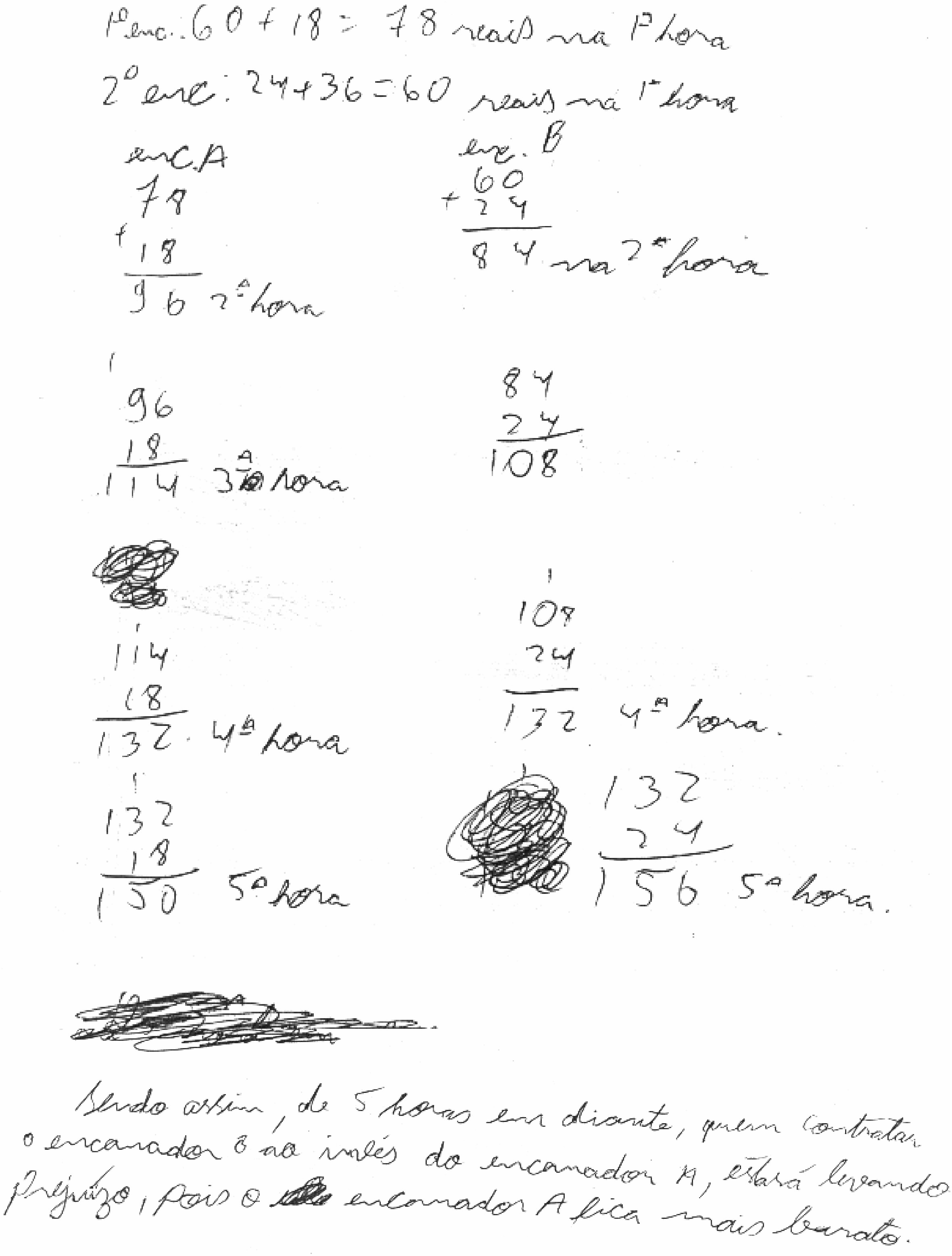
Figura 10 – Resolução apresentada na Prova 8C07014 da 8ª série que recebeu crédito 1

Analisando a resposta apresentada na Prova, pode-se verificar que o estudante que a resolveu, além de deixar registrados os cálculos, ainda explicita seu raciocínio. Parece, ainda, que este estudante compreende a idéia de recorrência presente no cálculo do valor do serviço dos encanadores em função do tempo de trabalho.

Outra Prova da 3ª série do Ensino Médio apresenta os custos corretos dos serviços dos encanadores A e B referentes a uma, duas e três horas. Apresenta como resposta: *"o único valor de t em que o encanador A fica mais barato que o B é o de 1 hora de serviço"*. Para apresentar tal resposta, o estudante pode ter se distraído ao escrever a resposta, uma vez que pelos cálculos por ele apresentados, para um serviço de uma hora, o custo do encanador A é maior que o custo do encanador B.

Em duas das Provas da 8ª série que receberam crédito parcial, verifica-se uma estratégia que possibilita encontrar a resposta correta do problema. Os estudantes calculam aritmeticamente os custos dos serviços dos encanadores A e B, mas cometem erros referentes ao algoritmo da soma, como $24+36=58$ e $24+36=90$. Parece que esses erros foram decorrentes de distração, uma vez que estes estudantes apresentam outras adições efetuadas corretamente. No primeiro caso, parece que o estudante somou a dezena da 1ª parcela com a unidade e a dezena da 2ª parcela, o que resulta no número 58. Já no segundo caso, parece que o estudante somou a unidade da 2ª parcela com a unidade da 1ª parcela e com a dezena da 1ª parcela, obtendo 90. Assim, devido a estes erros, as respostas apresentadas pelos estudantes não são satisfatórias.

Em uma das Provas da 3ª série também se verifica uma estratégia que possibilita encontrar a resposta correta. Contudo, o estudante considera que o valor fixo cobrado pelo encanador B é $R\$36{,}00$ e o valor cobrado por hora é $R\$24{,}00$. Nessas condições, sua resolução, bem como a resposta apresentada pelo mesmo, é perfeitamente coerente, conforme pode ser visto na figura seguinte:



1º enc.: 60 + 18 = 78 reais na 1ª hora

2º enc: 24+36=60 reais na 1ª hora

enc. A

78 + 18 = 96 2ª hora

114 = 96 + 18 3ª hora

132 = 114 + 18 4ª hora

150 = 132 + 18 5ª hora

enc. B

84 = 60 + 24 na 2ª hora

108 = 84 + 24

132 = 108 + 24 4ª hora.

156 = 132 + 24 5ª hora.

Sendo assim, de 5 horas em diante, quem contratar o encanador B ao invés do encanador A, estará levando prejuízo, pois o encanador A fica mais barato.

Figura 11 – Resolução apresentada na Prova 3L04014 da 3ª série que recebeu crédito 1

Pode-se considerar que este estudante é capaz de resolver problemas como o Problema Proposto, pois apesar de apresentar uma resposta que não é adequada para o problema, mostra que consegue escolher e desenvolver uma estratégia adequada, bem como interpretar seus resultados para apresentar a resposta.

Em sete das Provas de estudantes deste grupo que também receberam crédito parcial (três da 8ª série e quatro da 3ª série), verifica-se o desenvolvimento correto de uma estratégia que resolve o problema. Entretanto, o que difere tais resoluções é a interpretação feita pelos estudantes referentes aos resultados obtidos. Como exemplo, pode-se citar a resolução apresentada a seguir:

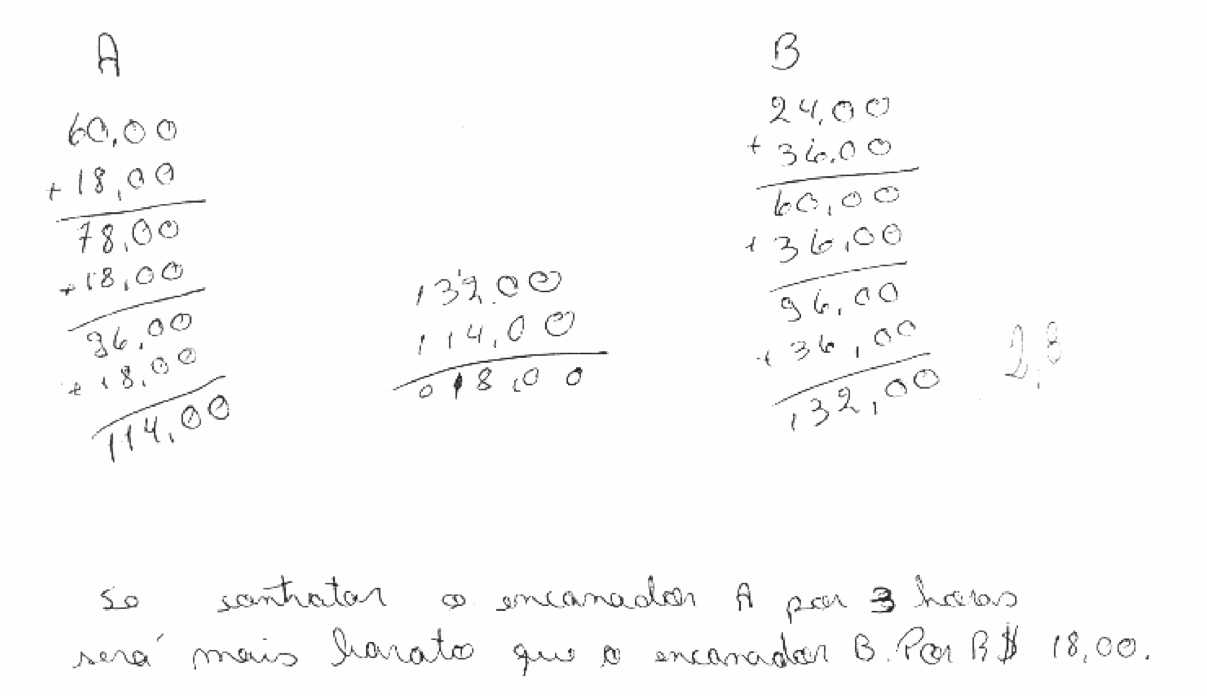


Figura 12 – Resolução apresentada na Prova 8C07012 da 8ª série que recebeu crédito 1

Este estudante efetua os cálculos dos serviços de uma, duas e três horas de duração para ambos os encanadores, obtendo que o custo do encanador A referente a um serviço de três horas é menor que o respectivo custo do encanador B. Assim, considera que se o encanador A for contratado para um serviço de três horas, o custo será $R\$18{,}00$ a menos que o custo do encanador B. Assim, apesar de apresentar uma resposta que faz sentido, esta não pode ser considerada uma resposta válida para o Problema Proposto. Respostas dessa mesma natureza foram verificadas nas demais seis Provas: *“quando ele trabalhar 3 horas de serviço”; “são necessários 3 horas”,* etc.

Estes estudantes podem ter compreendido que se deveria encontrar, apenas, o primeiro valor de t em que o serviço do encanador A fosse mais barato. Nessas condições, pode-se considerar que os estudantes solucionaram o seguinte Problema Resolvido 6: *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de* $R\$60{,}00$ *mais* $R\$18{,}00$ *por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de* $R\$24{,}00$ *mais* $R\$36{,}00$ *por hora de trabalho. Sendo* t *o tempo, medido em horas, quantas horas são necessárias para que o encanador A fique mais barato que o B?*

As demais treze Provas deste grupo (cinco da 8ª série e oito da 3ª série do Ensino Médio) receberam crédito completo. Em todas elas verifica-se o cálculo aritmético do custo do serviço de uma a quatro horas de duração para ambos os encanadores, conforme ilustra a figura seguinte:

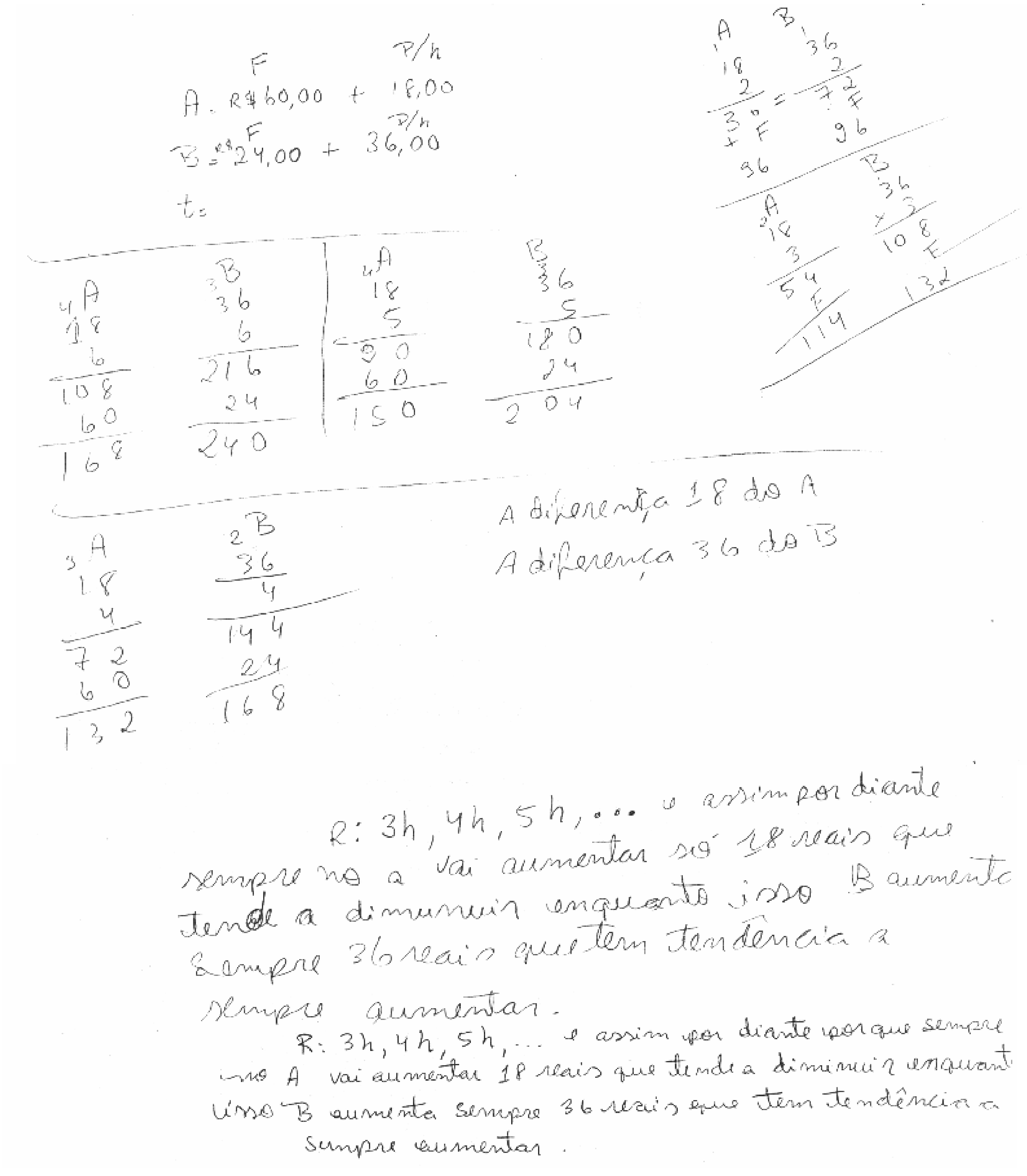


Figura 13 – Resolução apresentada na Prova 8L08161 da 8ª série que recebeu crédito 2

Este estudante, além de concluir que o encanador A é mais barato quando o tempo do serviço for maior ou igual a três horas, percebe que a diferença entre os custos dos encanadores vai aumentando conforme o tempo vai aumentando.

As respostas apresentadas pelos demais estudantes formam dois grupos: as relacionadas à expressão "*o encanador A se mostra mais* *barato acima de duas horas”* ou à expressão “*a partir de três horas o encanador A é mais barato”*.

Grupo G8: 25 Provas

Série	Crédito completo	Crédito Parcial	Nenhum Crédito
8ª série Ensino Fundamental	0	0	5
3ª série Ensino Médio	0	0	5

As Provas enquadradas neste grupo têm como característica principal a apresentação de cálculos variados que não levam à resposta do Problema Proposto. Tais cálculos não possibilitam que as Provas sejam enquadradas em qualquer dos outros grupos. Em uma delas, o estudante da 8ª série subtrai o valor fixo cobrado pelo encanador B do valor fixo cobrado pelo encanador A, subtraindo, também, os respectivos valores cobrados por hora de trabalho, encontrando a diferença daqueles valores.

Outro estudante da 8ª série divide 36 por 18, obtendo 2 e respondendo que o encanador A fica *“mais barato por 2 h”*. A figura seguinte apresenta a resolução de outro estudante da 8ª série:

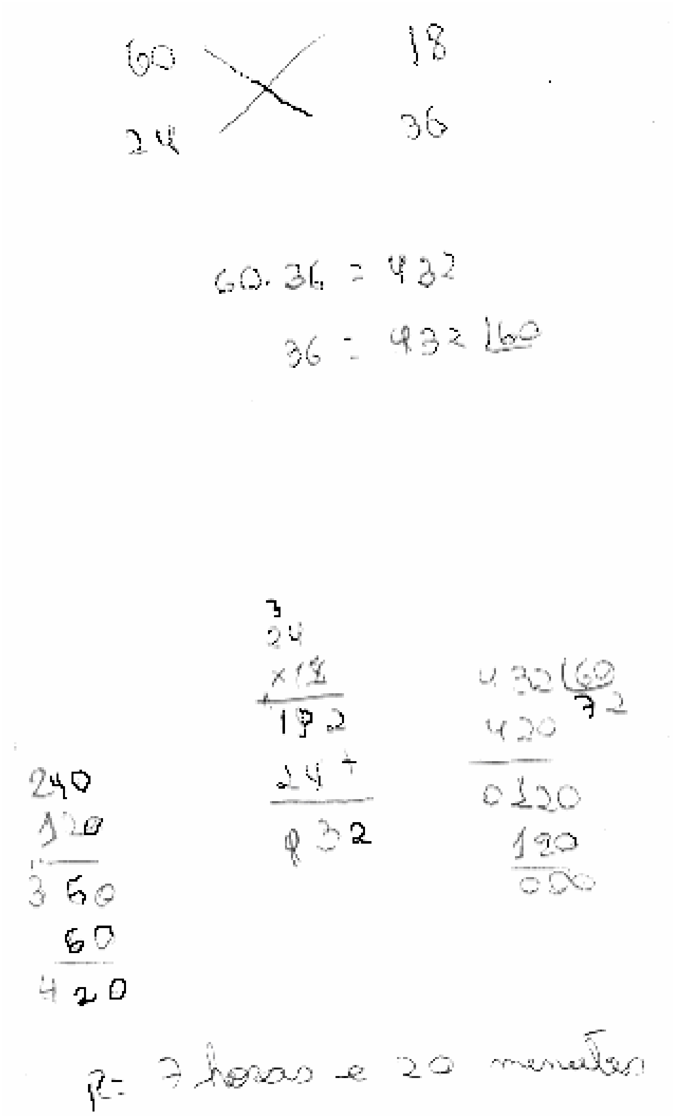


Figura 14 – Resolução apresentada na Prova 8L05063 da 8ª série que recebeu crédito 0

O estudante parece ter tentado utilizar uma regra de três, pois pode ter considerado que os preços fixos e os cobrados por hora de cada encanador eram proporcionais. Outro estudante efetua $18+18=36$ e responde que o preço por hora de trabalho do encanador B é duas vezes o preço por hora do encanador A. Outro estudante da 8ª série apresenta a operação 60×24 e obtém como resultado “*14 reais*”.

Outro estudante da terceira série apresenta o custo correto de um serviço de uma hora para cada encanador; em seguida, subtrai o respectivo valor cobrado por hora do valor fixo de cada encanador e efetua corretamente a operação 12×18, apresentando como resposta "$18,00$ *mais barato*".

Grupo G9: 10 Provas

Série	Crédito completo	Crédito Parcial	Nenhum Crédito
8ª série Ensino Fundamental	2	1	2
3ª série Ensino Médio	3	2	0

O critério utilizado para enquadrar as produções escritas dos estudantes nesse grupo foi a verificação das leis das funções que descrevem os custos dos encanadores A e B, independente da utilização correta da linguagem simbólica. Das Provas desse grupo, cinco delas receberam crédito completo (2), três delas receberam crédito parcial (1) e outras duas nenhum crédito (0).

As Provas que receberam crédito 0 são de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Em uma delas, o estudante escreve as leis das funções que fornecem os custos dos encanadores, calcula a imagem de $t=1$ e responde que "*o encanador B fica mais barato*". Este estudante pode ter inferido que, como para um serviço de uma hora, o encanador B fica mais barato, esse comportamento se repetiria para qualquer serviço cuja duração fosse superior a uma hora. Este fato também pôde ser percebido na outra Prova enquadrada nesse grupo, cuja resolução está incorreta. Nela, o estudante calcula o valor de um serviço de duas horas e responde "*em nada os dois cobram o mesmo preço*".

Uma das Provas que recebeu crédito parcial, da 3ª série do Ensino Médio, mostra o cálculo das imagens da função que descreve os custos dos serviços dos encanadores para $t=2$ e $t=3$ e, como resposta, que "*o encanador A se mostra mais barato a partir de 2 horas de serviço*", o que não é verdade, uma vez que para um serviço de 2 horas, o custo do serviço é o mesmo para ambos os encanadores. Contudo, verificando os cálculos efetuados pelo estudante, pode-se considerar que ele percebeu que, para um serviço de duas horas de duração, os custos dos encanadores são iguais. Portanto, pode-se inferir que quando o estudante afirma "*a partir de*

2 horas”, ele não está incluindo um serviço de 2 horas. A segunda Prova desse grupo que recebeu crédito incompleto é de um estudante da 8ª série do Ensino Fundamental. Da maneira como os cálculos estão dispostos na folha, parece que a primeira etapa feita foi o cálculo das imagens da função para $t=1$, $t=2$ e $t=3$ para ambos os encanadores. Em seguida, esse estudante subtrai, da expressão da função que fornece o custo do serviço do encanador B, a expressão da função que fornece o custo do serviço do encanador A e não iguala a nada. Contudo, da maneira como ele opera, implicitamente este estudante iguala esta expressão a zero. Resolvendo-a corretamente, ele obtém como resposta “$t=2$”. Pode-se considerar que este estudante não se deu conta de que esse resultado refere-se ao tempo no qual a diferença entre os custos dos encanadores é zero. Esse fato já tinha sido verificado pelo estudante ao calcular, anteriormente, a imagem de $t=2$ para ambos os encanadores. Contudo, tudo indica que esse estudante não relacionou estes dois fatos.

Um erro pôde ser percebido quando o estudante efetuou $18-36=-22$. O estudante parece ter efetuado, separadamente, $8-6=2$ e $1-3=-2$, assim como se estivesse utilizando o algoritmo da subtração para a operação $36-18$. Contudo, ao utilizar esse resultado na equação, este estudante percebeu que o resultado da subtração estava incorreto.

Talvez pelo fato de o enunciado do problema afirmar que *“o encanador A fica mais barato que B?”,* este aluno pode ter pensado que: como se quer descobrir o tempo em que o encanador A fica mais barato, então se deve fazer a operação A menos B. Este fato pode evidenciar a prática de alguns professores de incentivarem seus alunos a “retirar” as “palavras-chave” dos problemas para se descobrir quais operações ou estratégias podem ser utilizadas para resolver o problema.

Em três das Provas desse grupo que receberam crédito completo pode-se verificar o cálculo do valor do serviço de uma, duas, três, quatro, cinco horas para ambos os encanadores, conforme Figura 15, para responder que o encanador A fica mais barato quando o tempo é maior ou igual a três horas. Um desses estudantes efetuou a diferença entre os preços cobrados por hora pelos encanadores, conforme Figura 16, apresentando inclusive a resposta. Pode-se inferir que, de acordo com o que está registrado na Prova, este estudante, após escrever a resposta, realizou a verificação do problema e percebeu que a resposta apresentada por ele não era satisfatória, o que o levou a buscar e desenvolver uma nova estratégia. Este estudante escreveu as leis das funções que descrevem os custos dos encanadores e calculou as imagens da função para $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$ para ambos os encanadores, respondendo que o encanador A *"é mais barato quando t é igual ou maior que 3 horas"*.

A = 60,00 + 18,00 p/hora
B = 24,00 + 36,00 p/hora

T = t horas

A	B
t(1) = 60+18 = 78,00	t(1) = 24+36 = 60,00
t(2) = 60+36 = 96,00	t(2) = 24+72 = 96,00
t(3) = 60+54 = 114,00	t(3) = 24+108 = 132,00
t(4) = 60+72 = 132,00	t(4) = 24+144 = 168,00
⋮	⋮

R: O encanador A fica mais barato sendo os valores de $t \geq 3$.

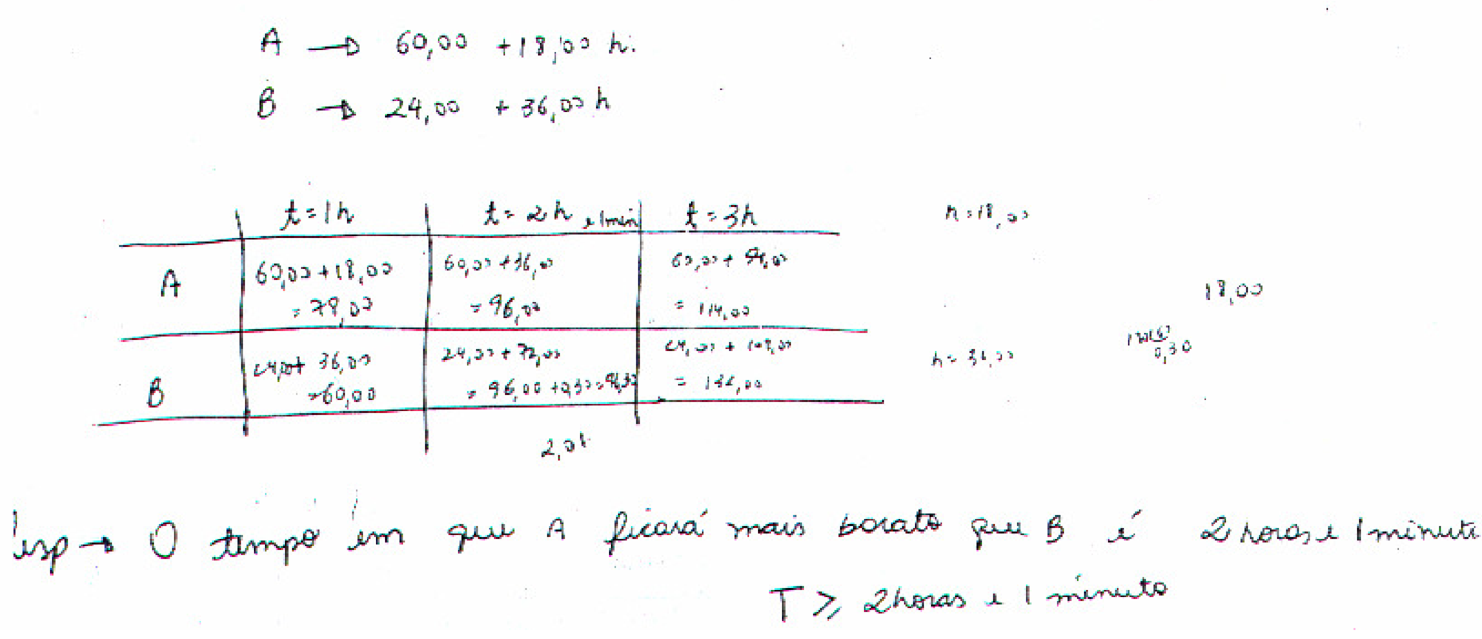
Figura 15 – Resolução apresentada na Prova 3L06077 da 3ª Série do Ensino Médio que recebeu crédito completo

(~~A=18,00.t~~) (~~B=24,00.t~~)
(~~A=B~~) (~~B=A~~)
(~~18,00~~) (~~24,00=18,00=6,00~~)

(~~R= O encanador A fica mais barato que B, R$6,00 por hora~~)
Uma hora

Figura 16 – Parte da resolução apresentada na Prova 8C03122 da 8ª Série do Ensino Fundamental que recebeu crédito 2

Um outro estudante da 3ª série do Ensino Médio também apresenta as expressões das leis das funções. Entretanto, percebe-se que o mesmo não utiliza corretamente a linguagem simbólica, uma vez que, conforme Figura 17, apresenta h como variável independente da função, mas acaba considerando t como sendo a variável. Ressalta-se o fato deste estudante ter calculado o custo do serviço de duas horas e um minuto. Este estudante parece ter percebido que, como os custos de um serviço de duas horas eram os mesmos para ambos os encanadores e que o encanador A ficava mais barato quando o tempo do serviço era de 3 horas, então resolveu calcular o preço de um serviço de duas horas e um minuto para o encanador B. Para tanto, dividiu corretamente o preço cobrado por hora pelo encanador B por 60 minutos, obtendo o valor de $R\$0{,}30$ por minuto. Dessa forma, quando o tempo é de 2 horas e um minuto, o custo do serviço do encanador B é de $R\$96{,}30$. O estudante concluiu, assim, que A ficará mais barato quando t for maior ou igual a duas horas e um minuto, mesmo sem calcular o serviço de mesmo tempo de duração para o encanador A.


A → 60,00 + 18,00 h.
B → 24,00 + 36,00 h

	t = 1h	t = 2h, 1min	t = 3h
A	60,00 + 18,00 = 78,00	60,00 + 36,00 = 96,00	60,00 + 54,00 = 114,00
B	24,00 + 36,00 = 60,00	24,00 + 72,00 = 96,00 + 0,30 = 96,30	24,00 + 108,00 = 132,00

h = 18,00
18,00
h = 36,00
0,30
2,01

resp → O tempo em que A ficará mais barato que B é 2 horas e 1 minuto
T ≥ 2 horas e 1 minuto

Figura 17 – Resolução apresentada na Prova 3C05028 da 3ª Série do Ensino Médio que recebeu crédito 2

Uma Prova da 3ª série do Ensino Médio apresenta, também, as expressões das leis das funções que fornecem os custos dos serviços dos encanadores e o problema corretamente por meio de inequação, obtendo como resposta, "$t > 2$". De acordo com a classificação de Fiorentini *et al.* (2005), a produção escrita deste estudante mostra que o mesmo se encontra na fase do pensamento algébrico mais desenvolvido, uma vez que foi capaz de utilizar uma ferramenta algébrica para resolver o problema, além de demonstrar conhecimentos relacionados à linguagem simbólica e às operações com incógnitas.

Após a descrição dos grupos, definiram-se quatro categorias, a partir das estratégias utilizadas pelos estudantes ao abordarem o problema. A seguir apresenta-se uma descrição das categorias:

Categoria Custo Não Variável – o custo do serviço de um encanador sempre será menor que o do outro, independente do tempo de duração do serviço - nesta categoria estão as resoluções (G1, G5, G6, G9[9]) nas quais são utilizados procedimentos aritméticos ou algébricos para encontrar o custo de um serviço de uma duração específica, não obrigatoriamente o custo de um serviço de uma hora. Em parte das Provas dessa categoria, verifica-se a utilização dos valores fixos e dos valores cobrados por hora de ambos os encanadores para encontrar o custo de um serviço para ambos os encanadores. Destas resoluções infere-se que os estudantes compreenderam que bastava encontrar o custo de um serviço de uma hora específica de duração e verificar qual dos encanadores teria menor custo para aquele determinado serviço. Das categorias de erros apontadas por Movshovitz-Hadar (1987), o mais comum está relacionado à não verificação de soluções, uma vez que se estes estudantes tivessem verificado suas soluções, certamente perceberiam que as referentes aos problemas por eles resolvidos não eram satisfatórias para o Problema Proposto. Em outra parte das Provas desta categoria, verifica-se a utilização apenas do valor cobrado por hora de trabalho para calcular o valor de um serviço para ambos os encanadores. De acordo com os registros das Provas desse grupo,

[9] Partes das Provas do Grupo G9 enquadram-se na categoria Custo Não-Variável e a outra parte na categoria Custo Variável

parece que os estudantes apenas consideraram os valores cobrados por hora de trabalho para calcular os custos dos serviços dos encanadores A e B. O erro mais comum presente nessa categoria está relacionado com a utilização equivocada de informações do problema (MOVSHOVITZ-HADAR, 1987), uma vez que alguns destes estudantes desconsideram o valor fixo cobrado por cada encanador. Outros parecem ter considerado o valor fixo apenas para um serviço de uma hora de duração.

Categoria Custo Variável – o custo de um dos encanadores não é sempre menor que o custo do outro - nesta categoria estão as resoluções (G7, G9) nas quais são utilizados, por meio de procedimentos aritméticos ou algébricos, os valores fixos e os valores cobrados por hora para calcular o valor de serviços de diferentes horas de duração para ambos os encanadores, consecutivas ou não. Infere-se, a partir da produção escrita dos estudantes presente nas Provas, que desenvolveram uma estratégia que resolve o problema proposto, pois calcularam os custos dos encanadores para serviços de diferentes durações, sendo que a maioria calculou o custo referente a serviços de uma, duas e três horas de duração. Alguns erros técnicos (MOVSHOVITZ-HADAR, 1987) foram verificados, mais especificamente, erros relacionados aos algoritmos da soma e multiplicação. Em parte das Provas dessa categoria, verifica-se a utilização de funções para calcular o custo dos encanadores A e B. Infere-se, a partir das resoluções apresentadas nas Provas, que os estudantes desenvolveram uma resolução que se considera, nesse trabalho, como uma resolução algébrica do Problema Proposto. Baseando-se na classificação do desenvolvimento do pensamento algébrico de Fiorentini *et al.* (2005), pode-se inferir, por meio da análise da produção escrita desses estudantes, que eles se encontram na fase algébrica, uma vez que mesmo não utilizando a linguagem simbólica corretamente, percebe-se que os estudantes foram capazes de escrever as expressões das funções que descreviam os custos dos serviços dos encanadores A e B, o que demonstra algum processo de generalização.

Categoria Diferença - um encanador é mais barato que o outro dependendo da diferença dos preços cobrados por hora por eles - nesta categoria estão as resoluções (G2) nas quais se subtrai do preço cobrado por hora pelo encanador B o respectivo preço do encanador A. De acordo com a produção escrita registrada nas Provas, pode-se inferir que os estudantes consideraram que se deveria apenas calcular quantos reais o valor cobrado por hora do encanador A é mais barato que o respectivo valor cobrado pelo encanador B. Percebe-se, assim como na categoria custo não variável, a utilização equivocada de informações do problema, pois os estudantes desconsideraram informações relevantes para a solução do problema proposto.

Categoria Outros - nesta categoria estão outras resoluções (G3, G4, G8) que não solucionam o problema. Estas Provas apresentam estratégias diversas. Em algumas delas, apenas verifica-se a resposta, em outras, verifica-se alguns cálculos como já foi descrito.

O quadro a seguir permite uma melhor compreensão das categorias anteriormente definidas.

Categoria	Descrição
Custo não-variável *o custo do serviço de um encanador sempre será menor que o do outro, independente do tempo de duração do serviço*	Nesta categoria estão as resoluções nas quais são utilizados procedimentos aritméticos ou algébricos para encontrar o custo de um serviço de uma duração específica, não obrigatoriamente o custo de um serviço de uma hora. Exemplos: a) verifica-se as operações $60+18\cdot 2=96$ e $24+36\cdot 2=96$ e responde que os dois tem ou mesmo preço; b) verifica-se $18\cdot 3=54$ e $36\cdot 2=72$, respondendo que o encanador A é mais barato
Custo variável *o custo de um dos encanadores não é sempre menor que o custo do outro*	Nesta categoria estão as resoluções nas quais são utilizados, por meio de procedimentos aritméticos ou algébricos, os valores fixos e os valores cobrados por hora para calcular o valor de serviços de diferentes horas de duração para ambos os encanadores, consecutivas ou não. Exemplo: efetua $24+36\cdot 1=60$, $24+36\cdot 2=96$, $24+36\cdot 3=132$ $60+18\cdot 1=78$, $60+18\cdot 2=96$, $60+18\cdot 3=114$, respondendo que o encanador A é mais barato para serviços com duração superior a duas horas.
Diferença *um encanador é mais barato que o outro dependendo da diferença dos preços cobrados por hora por eles*	Nesta categoria estão as resoluções nas quais se subtrai do preço cobrado por hora pelo encanador B o respectivo preço do encanador A. Exemplo: efetua $36-18=18$ e responde que o encanador A é 18 reais mais barato que o encanador B
Outros	Nesta categoria estão outras resoluções que não solucionam o problema. Exemplos: a) apenas verifica-se a resposta “o encanador A é mais barato”; b) apenas efetua $36\div 18=2$

Quadro 3 - Categorias definidas a partir das resoluções apresentadas nas Provas.

O quadro seguinte relaciona as categorias acima definidas com o que pôde ser inferido em relação aquilo que o estudante demonstra ser capaz de fazer quando se analisou sua produção escrita referente à Questão.

Categoria	**Problema que se infere que o estudante tenha solucionado a partir do Problema Proposto:** *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$60,00 mais R$18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$24,00 mais R$36,00 por hora de trabalho. Sendo t o tempo, medido em horas, para quais valores de t o encanador A fica mais barato que o B?*	**O que foi possível inferir que o estudante sabe**
Custo Não Variável	Problema resolvido 1. *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$ 60,00 ou R$ 18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$ 24,00 ou R$ 36,00 por hora de trabalho. Em qual das opções o encanador A é mais barato?* Problema Resolvido 2. *Um encanador A cobra, por um serviço de uma hora, um valor fixo de R$ 60,00 mais R$ 18,00 e, para serviços com mais de uma hora, um valor de R$ 18,00 por hora. Um outro encanador B cobra, por um serviço de uma hora, um valor fixo de R$ 24,00 mais R$ 36,00 e, para serviços com mais de uma hora, um valor de R$ 36,00 por hora de trabalho. Em qual das opções o encanador A fica mais barato?* Problema Resolvido 4. *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$60,00 mais R$18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$24,00 mais R$36,00 por hora de trabalho. Sendo t o valor cobrado por hora de trabalho, qual valor de t é mais barato?* Problema Resolvido 5. *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$60,00 mais R$18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$24,00 mais R$36,00 por hora de trabalho. Sendo t o tempo, medido em horas, dê um valor de t para o qual o encanador A fica mais barato que o B.*	Somar, multiplicar e subtrair números inteiros.
Custo Variável	Problema Proposto *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$60,00 mais R$18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$24,00 mais R$36,00 por hora de trabalho. Sendo t o tempo, medido em horas, para quais valores de t o encanador A fica mais barato que o B?* Problema Resolvido 6 *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$60,00 mais R$18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$24,00 mais R$36,00 por hora de trabalho. Sendo t o tempo, medido em horas, quantas horas são necessárias para que o encanador A fique mais barato que o B?*	Somar, multiplicar números inteiros; Escrever leis de funções que descrevem uma situação real Calcular a imagem quando a variável assume alguns valores específicos Resolver inequações do primeiro grau Resolver equações do primeiro grau

Categoria	Problema que se infere que o estudante tenha solucionado a partir do Problema Proposto: *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$60,00 mais R$18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$24,00 mais R$36,00 por hora de trabalho. Sendo t o tempo, medido em horas, para quais valores de t o encanador A fica mais barato que o B?*	O que foi possível inferir que o estudante sabe
Diferença	Problema Resolvido 3: *Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$60,00 mais R$18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$24,00 mais R$36,00 por hora de trabalho. Sendo t o valor cobrado por hora de trabalho, quantos reais a hora do encanador A é mais barata que do B?*	Somar e subtrair números inteiros
Outros		Somar, multiplicar, subtrair, dividir números inteiros

Quadro 4 – Quadro-resumo que relaciona as estratégias apresentadas pelos estudantes na resolução da Questão estudada com aquilo que se infere a respeito do que o estudante é capaz de fazer.

Tabela 3 – Distribuição das resoluções dos Problemas Resolvidos inferidos na produção escrita dos estudantes em cada série

Resolução[10] / Problema	8ª série			3ª série		
	2	1	0	2	1	0
Problema Resolvido 1	6	-	-	2	-	-
Problema Resolvido 2	1	-	-	-	-	-
Problema Resolvido 3	5	1	-	3	-	2
Problema Resolvido 4	1	-	-	1	-	-
Problema Resolvido 5	3	-	1	4	1	-
Problema Resolvido 6	2	-	-	2	-	1
Total	18	1	1	12	1	3

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

A Tabela 3 mostra que a grande maioria dos Problemas Resolvidos identificados na produção escrita presente nas Provas apresenta resolução correta. Das 97 Provas em estudo, em 36 delas foram identificadas resoluções referentes a problemas diferentes daquele que foi proposto. Destas 36 Provas, 30 delas apresentam resolução correta para o Problema Resolvido identificado. Esse resultado sugere que o estudante resolve o problema que consegue compreender ao ler seu enunciado. Assim, parece que uma das causas do baixo desempenho dos estudantes está relacionada à dificuldade na compreensão da Questão e não no desconhecimento do instrumental matemático necessário para resolvê-la, assim como apontaram as pesquisas de Perego (2005), Nagy-Silva (2005), Segura (2005), Perego (2006), Alves (2006) e Negrão de Lima (2006).

Tendo em vista o que se inferiu acerca do que o estudante demonstrou ser capaz ao se analisar sua produção escrita referente a uma única questão em um único momento histórico, o quadro seguinte foi construído. Para cada um dos quatro níveis identificados, é apresentada a descrição do que se infere a partir da análise da produção escrita que o estudante de determinado nível mostrou ser capaz de fazer; a porcentagem das Provas da 8ª série, da 3ª série e do total da amostra que se enquadra

[10] O código 2 refere-se a resolução correta; 1 refere-se a resolução parcialmente correta e o código 0 a resolução incorreta.

em cada nível, bem como a fase de desenvolvimento de pensamento algébrico que se encontram.

Nível		1	2	3	4	Não identificável
Inferência que pode ser feita a respeito do que o estudante é capaz de fazer quando se analisou sua produção escrita referente à Questão		Estudantes capazes de resolver adição e/ou subtração envolvendo números inteiros	Estudantes capazes de resolver adição, subtração, multiplicação e/ou divisão envolvendo números racionais	Estudantes capazes de escrever leis de funções que descrevem alguma situação real, bem como calcular o valor da variável dependente, dado um valor para a variável independente	Estudantes capazes de resolver equações e/ou inequações do primeiro grau	
Provas da 8ª série	Porcentagem específica em cada nível	52,9%	26,4%	7,5%	1,9%	11,3%
	Porcentagem total no nível	88,7%	35,8%	9,4%	1,9%	11,3%
Provas da 3ª série	Porcentagem específica em cada nível	34,1%	40,9%	9,1%	2,3%	13,6%
	Porcentagem total no nível	86,4%	52,3%	11,4%	2,3%	13,6%
Total	Porcentagem específica em cada nível	44,3%	33,0%	8,2%	2,1%	12,4%
	Porcentagem total no nível	87,6%	43,3%	10,3%	2,1%	12,4%
Fase do desenv. pensamento algebrico		Pré-algébrica	Pré-algébrica	Algébrica	Algébrica	

Quadro 5 – Níveis identificados a partir da inferência sobre a produção escrita dos estudantes referente à Questão.

Os níveis definidos no Quadro 5 se complementam, ou seja, nas Provas enquadradas no nível 2 também se verificam as capacidades do nível 1, assim como nas Provas do nível 3 se verificam as capacidades dos níveis anteriores (1 e 2). Da mesma forma, nas Provas do nível 4, são verificadas as capacidades inferidas nos níveis 1, 2 e 3. A porcentagem específica do nível mostra o percentual de Provas que apresentavam as características de cada nível. A porcentagem total no nível se refere à soma da porcentagem específica do nível com as respectivas porcentagens específicas dos níveis superiores, uma vez que, por exemplo, as capacidades inferidas no nível 1 são verificadas também nos níveis 2, 3 e 4.

No nível 1 foram enquadradas as Provas que apresentam apenas operações de adição e/ou multiplicação envolvendo números inteiros. Assim, se na Prova fosse verificada uma adição e/ou de subtração correta envolvendo quaisquer das informações relacionadas no problema, a mesma foi enquadrada nesse nível. Se fosse verificada na Prova pelo menos uma operação de multiplicação ou divisão desenvolvida corretamente, ela foi enquadrada no nível 2. No nível 3 foram enquadradas as Provas nas quais foram verificadas pelo menos uma expressão de uma função envolvendo as informações do problema proposto. Já no nível 4, as Provas enquadradas apresentam alguma expressão de uma função, bem como a resolução correta de uma equação ou inequação envolvendo a expressão da função encontrada. As Provas foram enquadradas como "não identificável" quando apenas apresentaram uma resposta para o problema que não possibilitava a inferência de pelo menos uma das capacidades relacionadas aos demais níveis identificados.

Analisando o Quadro 5, verifica-se que a grande maioria das Provas demonstra que muitos estudantes encontram-se na fase pré-algébrica do desenvolvimento do pensamento algébrico (níveis 1 e 2), de acordo com a classificação que está sendo utilizada neste trabalho, baseada na classificação proposta por Fiorentini et al. (2005), uma vez que foram verificadas apenas operações aritméticas envolvendo números, além da ausência de elementos como variáveis ou de qualquer registro escrito que denotasse algum processo de generalização. É importante ressaltar que tal inferência está sendo baseada apenas na análise da produção escrita do estudante referente apenas ao Problema Proposto. Não se pode afirmar que estes estudantes não são capazes de abordar esse problema de uma maneira que está sendo considerada neste trabalho como sendo algébrica. O que se pode afirmar é que, diante de um problema que pode ser resolvido de uma maneira algébrica ou de uma maneira aritmética, a maioria dos estudantes parece sentir-se mais segura abordando o problema aritmeticamente.

Em relação à quantidade de Provas em cada nível, percebe-se que o nível 1 apresenta o maior percentual de Provas para a 8ª série, ao passo que o nível 2 apresenta o maior percentual de Provas para a 3ª série . Como era de se esperar, proporcionalmente, a porcentagem de Provas da 3ª série nos níveis 3 e 4 é um pouco maior que a respectiva porcentagem de Provas da 8ª série. A partir dessa informação, pode-se afirmar que mais estudantes da 3ª série sentem-se mais seguros ao abordarem o Problema Proposto de uma maneira algébrica.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Esta investigação teve como um dos objetivos mostrar algo do que se pode inferir acerca do conhecimento matemático de um estudante ao se analisar sua produção escrita referente à resolução de um problema durante o processo de avaliação. Assim, o referencial teórico baseou-se na avaliação como uma atividade de investigação, uma vez que as informações utilizadas foram provenientes da Avaliação do Rendimento Escolar do Estado do Paraná - AVA/2002. Além disso, por se tratar de um problema que poderia ser resolvido de uma maneira aqui considerada algébrica, na segunda parte do referencial teórico, algumas considerações acerca da álgebra e da educação algébrica foram realizadas.

De um modo geral, ao se analisar a Tabela 1, percebe-se que menos de 20% dos estudantes apresentou uma resolução considerada como correta para a Questão. Entretanto, ainda assim, seria precipitado afirmar que os 80% restantes "*não sabem Matemática*". A ser comparada a Tabela 1 com o Quadro 5, percebe-se em 87,6% das produções escritas dos estudantes a execução de um procedimento capaz de solucionar a Questão. Assim, conclui-se que os resultados da Tabela 1 não são derivados do desconhecimento do instrumental matemático que pode ser utilizado na resolução da Questão, mas que estão fortemente relacionados à compreensão do enunciado da Questão, bem como à identificação do tipo de instrumental mais adequado para resolvê-la.

Este fato ficou claro ao se analisar a produção escrita dos estudantes, principalmente suas respostas, uma vez que muitas delas expressam a diferente compreensão que tiveram do enunciado da Questão, conforme apontaram Nagy-Silva (2005), Perego (2005), Segura (2005), Perego (2006), Negrão de Lima (2006) e Alves (2006). Assim, para o Problema Proposto, foram identificados seis Problemas Resolvidos que apresentam resoluções corretas. O problema do baixo rendimento parece residir, portanto, na compreensão que os estudantes têm do problema, uma vez que se verificou que os problemas inferidos a partir das resoluções dos estudantes foram resolvidos corretamente.

Com exceção da resolução por meio de inequação, todas as demais maneiras pelas quais os estudantes das duas séries abordaram a questão foram verificadas nas séries analisadas, ou seja, não houve nenhuma resolução registrada nas Provas da 8ª série, mas não registrada em qualquer Prova da 3ª série. Pelo Quadro 2, percebe-se que as maiores diferenças quantitativas relacionadas às estratégias desenvolvidas pelos estudantes estão presentes nos grupos G3, G4, G5 e G6. Em G3 percebe-se que mais estudantes da 3ª série compreenderam a Questão e foram capazes de retirar corretamente as informações do seu enunciado. Em G4, mais alunos da 8ª série não apresentaram cálculo e responderam incorretamente a Questão. Em G5, menos alunos da 3ª série calculam apenas o valor da primeira hora de trabalho para ambos os encanadores e enfatizam a diferença de 18 reais entre eles. Em G6 percebe-se que menos alunos da 3ª série calcularam o custo de ambos os encanadores para apenas uma hora específica. Portanto, associando essas informações à Tabela 1 pode-se inferir que há alguma diferença no desempenho dos estudantes das duas séries, sendo melhor o desempenho dos estudantes da 3ª série.

Verificou-se que a maioria dos estudantes, tanto os da 8ª série, quanto os da 3ª série, abordou o problema de uma maneira aqui considerada como aritmética – ou não-algébrica – envolvendo apenas operações de adição, multiplicação de números inteiros. É importante destacar que não se pode concluir que estes estudantes desconhecessem alguma estratégia algébrica que resolva a Questão, mas sim que foram capazes de identificar uma estratégia aritmética adequada, pois pode ser que se sintam mais seguros ao utilizar tal estratégia. Essa é uma das limitações desta investigação, ou seja, não se pode inferir, a partir da análise da produção escrita dos estudantes referentes à Questão, aquilo que eles não são capazes de fazer. Considerando que os estudantes da 3ª série freqüentaram a escola por três anos a mais que os estudantes da 8ª série, e que, por conseguinte, tiveram acesso a mais conteúdos matemáticos, e que a álgebra compreende grande parte de todo o currículo de Matemática, esperava-se que o número de estudantes da 3ª série que escolheram uma estratégia algébrica fosse maior que o respectivo número de estudantes da

8ª série. Por conseguinte, esses resultados levam ao questionamento acerca de como os estudantes estão concebendo o conhecimento algébrico. Apenas como uma simples linguagem desprovida de significado? Que não tem qualquer aplicabilidade na vida cotidiana? Evidencia-se, portanto, um problema para futuras investigações.

É importante destacar que se verificou em apenas uma das Provas dos estudantes da 3ª série a resolução da Questão utilizando inequação, maneira prevista nos descritores para a 3ª Série do Ensino Médio. Ao aplicar a mesma Questão para um grupo de professores de Matemática, Segura (2005) verificou que apenas 25% resolveram-na utilizando inequação. Pode-se considerar, então, que a identificação da inequação como um procedimento de resolução da Questão foi difícil de ser realizada até mesmo para os professores. Uma investigação acerca desse fato seria necessária para se relacionar tais fatos.

Em relação à linguagem simbólica, apenas em algumas das Provas verificou-se o uso correto da mesma. A maioria fez uso da linguagem sincopada, o que parece mostrar que os estudantes que as resolveram estão a caminho do processo de generalização. Nesses casos, o professor pode aproveitar essa oportunidade para que os estudantes, a partir de cálculos aritméticos dos custos dos serviços dos encanadores, possam encontrar as leis das funções que descrevem tais custos. Agindo dessa forma, o professor pode proporcionar aos estudantes mecanismos que possibilitem a transição aritmética-álgebra proposta por Ameron (2002).

Este trabalho não teve como objetivo categorizar o pensamento do estudante em aritmético ou algébrico, pois se sabe que uma atividade como essa é muito complexa e requer mais do que a análise da produção escrita de um estudante referente a uma única questão discursiva presente em uma única Prova. Entretanto, foi possível fazer algumas inferências a respeito do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes utilizando-se da linguagem algébrica, uma vez que a linguagem é, ao mesmo tempo, mecanismo de expressão e de desenvolvimento do pensamento (VIGOTSKI, 2005). Como resultado, a análise da produção escrita dos estudantes mostra que 9,4% da 8ª série e

11,4% da 3ª série estão na fase algébrica. Isso pode significar que são poucos os estudantes que se sentem seguros e que são capazes de identificar e utilizar um procedimento algébrico na resolução de um problema. Tem-se, por conseguinte, outro problema para futuras investigações.

Assim, tentou-se mostrar como esta atividade de classificação pode ser realizada tendo-se como base a produção escrita do estudante, ou ainda, procurou-se mostrar que informações acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico do estudante podem ser inferidas quando se analisa sua produção escrita.

A avaliação vem sendo considerada como a vilã dos meios escolares à medida que se volta apenas para mostrar aquilo que o estudante sabe e, sobretudo, aquilo que não sabe. Com isso, a avaliação pode gerar exclusão, pois os estudantes, diante dos resultados muitas vezes associados ao fracasso, sentem-se profundamente desmotivados. Assim, essa perspectiva simplista e prejudicial de se lidar com a avaliação, ao invés de proporcionar expectativas de superação deste 'fracasso', apenas contribui para a confirmação de mais uma privação enfrentada pelos estudantes, principalmente os das classes menos abastadas – a privação ao direito de aprender, de se apropriar de conhecimento que possa auxiliá-los na mudança de sua condição social e a garantir seus direitos enquanto cidadãos.

Para que a avaliação se torne, efetivamente, um mecanismo de regulação do processo de ensino e de aprendizagem, é preciso que seus resultados possam indicar os caminhos para o estudante percorrer de modo a construir novos conhecimentos.

Este trabalho pretende dar diferente significado ao resultado "*em geral o desempenho dos estudantes referente à Matemática está abaixo do esperado*", amplamente divulgado pela imprensa. A maioria das pessoas associa tal resultado à falta, ao erro. Procurou-se mostrar que o erro não deve, necessariamente, ser considerado como ausência de conhecimento, mas sim como um conhecimento que não coincide ainda com aquele que foi definido histórica e socialmente como sendo correto. Desta forma, o que hoje é considerado como incorreto, amanhã pode não o ser. Essa é a dinâmica da construção do conhecimento científico que coincide com a dinâmica da construção do conhecimento de cada ser humano. Se for considerado que há séculos atrás se admitiam como corretos fatos que hoje são considerados pela comunidade científica como absurdos, não se pode condenar essa dinâmica quando se analisa a construção individual do conhecimento. Em outras palavras, o estudante que 'erra' deve ser considerado 'em processo de aprendizagem'.

Em Matemática, um erro pode ser considerado como uma maneira diferente de resolver um problema, de realizar um cálculo, etc. Muitas vezes o erro aparece devido a uma interpretação equivocada do problema, como já foi mencionado neste trabalho. O que para muitos leitores pode ser considerado como simplesmente um erro, aqui foi mostrado que pode ser derivado de uma maneira diferente de compreender um problema. Assim, uma avaliação, nessa perspectiva, da produção escrita dos estudantes em uma prova de questões discursivas pode contribuir para que os resultados sejam utilizados na tomada de decisões, tendo em vista contribuir para a aprendizagem.

Com o intuito de utilizar o erro como uma ferramenta para aprendizagem, ao invés de dizer ao estudante que ele errou, é mais viável dizer a ele que a solução por ele apresentada não é uma solução para o problema que deveria ser resolvido, mas sim para um outro problema, problema esse que o estudante pode ter sido concebido pelo estudante ao desconsiderar alguma informação do problema proposto ou por uma compreensão equivocada de alguma informação. Esse Problema Resolvido pode ser explicitado pelo aluno, com o auxílio do professor, para que sejam discutidas as semelhanças e as diferenças entre ele e o problema proposto, abrindo portas a atividades de investigação, como propõe Borasi (1987).

Em relação às categorias de erros definidas por Movshovitz-Hadar (1987), deve-se enfatizar que as mesmas não se aplicam totalmente a essa questão, uma vez que tais categorias foram definidas baseadas em provas, apresentadas em diferentes momentos com várias questões que possibilitavam aos estudantes demonstrar uma gama de habilidades ou capacidades, ao passo que neste trabalho analisou-se apenas uma única questão específica apresentada uma única vez. Assim, não foram encontrados erros relacionados a inferências inválidas logicamente, bem como a distorções na utilização de definições ou teoremas, uma vez que a Questão não exigia a utilização de teoremas ou a explicitação de definições para sua resolução. Dos erros encontrados, os mais freqüentes estão associados à não verificação de soluções e à utilização equivocada de informações do enunciado da questão. Tais erros levam os estudantes a resolverem um problema diferente do Problema Proposto, como por exemplo quando o estudante desconsidera um dado relevante do problema e apresenta uma resolução.

Este trabalho iniciou-se com o pensamento do escritor russo Leon Tolstoi: *"Há quem passe por um bosque e só veja lenha para a fogueira"*. Tal epígrafe não foi escolhida ao acaso, pois parece se aproximar muito da maneira simplista pela qual o uso que se faz dos resultados da avaliação vem influenciando o modo como os estudantes estão sendo rotulados – apenas e simplesmente pelos seus 'fracassos'. No entanto, tomando a avaliação como atividade de investigação, este trabalho fornece subsídios que mostram que, *enxergando o bosque*, os resultados da avaliação podem e devem apontar caminhos a serem percorridos pelos envolvidos, na busca de tornarem-se melhores seres humanos, para si mesmos e para o mundo.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. **Avaliação e Educação Matemática**. Rio de Janeiro: MEM/USU GEPEM, 1995.

ALVES, R. M. F. **Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões de matemática**. 2006. 158 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

AMERON, B. A. **Reinvention of early algebra** : developmental research on the transition from arithmetic to algebra [S.l.] : [s.n.], 2002 - Tekst. - Proefschrift Universiteit Utrecht. Disponível em: http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2002-1105-161148/inhoud.htm. Acesso em 31 ago. 2006.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições, 1977. Tradução: Luís Antero e Augusto Pinheiro.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Orgs). **As Idéias da Álgebra.** São Paulo: Atual, 1995, p. 26-36. Tradução: Hygino H. Domingues

BORASI, R. Exploring Mathematics through the Analysis of Errors**. For the Learning of Mathematics**, v.7, n.3, p. 2-8, Novembro, 1987.

BORBA, M. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPEd, 27., 2004, Caxambú. **Anais...** Caxambu: ANPEd, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. Brasília, 1998.

BURIASCO, R. L C. de; CYRINO, M. C. de C. T.; SOARES, M. T. C. **Manual para correção das provas com questões abertas de matemática** AVA – 2002. Curitiba, SEED/CAADI, 2003.

BURIASCO, R. L. C. Algumas Considerações sobre Avaliação Educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n.22, p. 155 –178, 2000.

BURIASCO, R. L. C. Sobre Avaliação em Matemática: uma reflexão.**Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, p. 255-263, 2002.

CURY, H. N. Análise de Erros em Educação Matemática. **Veritati**, Salvador, v. 3, n.4, p. 95-107, 2004.

CURY, H. N. Concepções sobre Matemática e suas relações com os procedimentos avaliativos. In; ENCONTRO REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2002, Ijuí. **Anais ...** Ijuí: UNIJUI, 2002.

ESTEBAN, M. T. (Org). **Avaliação**: uma prática em busca de novos sentidos. 3. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2001.

ESTEBAN, M. T. **O que sabe quem erra?** Reflexões sobre avaliação e fracasso escolar. 3. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F.; CRISTÓVÃO, E. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR, 2005, Lisboa. **Anais...**Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm. Acesso em 13 jan. 2006.

FREITAS, H.; JANISSEK, R. **Análise Léxica e Análise de Conteúdo:** Técnicas complementares, seqüenciais e recorrentes para exploração de dados qualitativos. Porto Alegre: Sagra Luzatto, 2000.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M.C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.77-98.

HADJI, C. **Avaliação desmistificada.** Porto Alegre: ARTMED, 2001. Tradução: Patrícia C. Ramos.

KIERAN, C. **The Learning and Teaching of School Algebra.**, [s.l.]1995, Tradução de Vilma Maria Mesa. Disponível em http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/traducciones/default.html. Acessado em 15/01/2007.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LINS, R. C.; KAPUT, J. The Early development of Algebraic Reasoning: The current State of the Field. In: STECY, K.; CHICK H. & KENDAL M. (Eds). **The future of teaching and learning of algebra:** the 12th ICMI Study. Dordrecht: Kluwer, 2004. p.47-70.

MALISANI, E. Los obstáculos epistemologicos en el desarrollo del pensamiento algebraico: vision historica. **Revista IRICE**, n. 13, p.2-25, 1999.

MOVSHOVITZ-HADAR, N. et al. An empirical classification model for errors in High School Mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 18, n. 1, p. 3-14, 1987.

NAGY-SILVA, M. C. **Do observável para o oculto**: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª. série em questões de matemática. 2005. 123 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) -

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991.

NEGRÃO DE LIMA, R. C. **Avaliação em Matemática**: análise da produção escrita de alunos da 4ª. série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 2006. 201 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Programa de Avaliação do Sistema Educacional do Paraná**. Curitiba, 1995. Projeto Qualidade no Ensino Público do Paraná – 1995 a 1998.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Resumo Informativo do PQE**: Atividades Previstas Inicialmente e Realizadas até Junho. Curitiba, 1997.

PARO, V. H. Educação para a Democracia*:* o elemento que falta na discussão da qualidade do ensino. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPEd, 23., 2000, Caxambu. **Anais...** Caxambú: Associação Nacional de Pesquisa em Educação, 2000. Disponível em: http://www.uol.com.br/novaescola/ed/138_dez00/html/paro_educ.doc . Acesso em 18 maio 2002.

PEREGO, F. **O que a Produção Escrita Pode Revelar?** Uma análise de questões de matemática. 2006. 127 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

PEREGO, S. C. **Questões Abertas de Matemática**: um estudo de registros escritos. 2005. 105 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

PIRES, C. M. C.. **Currículos de Matemática:** da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

RADATZ, H. Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. **For the Learning of Mathematics**, v. 1, n.1, p. 16-19, 1980.

RICO, L. Errores em el aprendizaje de las matemáticas. In: KILPATRICK, J.; GOMES, P.: RICO, L. **Educación Matemática**. Colômbia: Grupo Editorial Iberoamericana, 1995. p.69-108.

SACRISTÁN, J. Gimeno. A avaliação no ensino. In: Sacristán, J. G; PÉREZ GOMES, A. I. **Compreender e transformar o ensino**. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998. cap.10, p. 295-351.

SEGURA, R. O. **Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões Discursivas de Matemática**. 2005. 178 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

USISKIN, Z. Concepções sobre a Álgebra da Escola Média e utilização de variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Orgs). **As Idéias da Álgebra.** São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22. Tradução: Hygino H. Domingues.

VIGOTSKI, L. S. **Pensamento e Linguagem.** 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

WHEELER, D. Backwards and Forwards: Reflections on different approaches to algebra In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L.; (Orgs.). **Approaches to Algebra.** Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 317-326.

APÊNDICE 1

Resultado da Primeira Correção das Provas, baseada no Manual de Correção de Provas (BURIASCO, CYRINO E SOARES, 2003)

Provas[11]	**Descrição**[12]
8C01014, 8C03015, 8C06019, 8C07022, 8L04107, 8L08152, 3C03120, 3C04038,	0.01 – não apresenta cálculo algum e responde incorretamente
8C06012, 8L05063, 8L05071, 3C01011, 3C04013	0.02 - apresenta cálculos que não resolvem o problema e responde incorretamente
8C03059, 8L05044	0.03 - retira as informações do problema. Apresenta cálculos corretos que não resolvem o problema. Não apresenta resposta
8C03083, 8L05014,	0.04 - retira as informações do problema e responde incorretamente

[11] Todas as Provas que compõem a amostra oficial do Estado do Paraná foram nomeadas com sete dígitos. O primeiro dígito se refere à série. O segundo, se refere ao local onde a Prova foi inicialmente corrigida. O terceiro e quarto número são da meso-região e os três últimos números se referem ao numero da Prova dentro da meso-região. Por exemplo, a Prova 3C01004 é uma prova da 3ª série do Ensino Médio, que foi corrigida em Curitiba, da meso-região 01 (Metropolitana), com número 004

[12] Todas as descrições são precedidas de um código numérico composto de três algarismos. O algarismo que precede o ponto refere-se à classificação da resolução presente na Prova. Assim, se a resolução for correta, o primeiro algarismo será 2, se for parcialmente correta, será 1 e se for incorreta, será 0. Os algarismos posteriores ao ponto referem-se ao tipo de resolução em cada grupo, ou seja, uma subclassificação de cada um dos grupos 2, 1 e 0.

3C03119, 3C05036, 3C05003, 3L08103	
8C03069	0.05 - calcula corretamente o valor de um serviço de uma hora para o encanador A e incorretamente para o encanador B. Responde incorretamente
8C03063	0.06 - apresenta cálculos incorretos. Não responde o problema
8C01009	0.07 - calcula os valores de um serviço de uma e duas horas para ambos encanadores, alguns corretos outros incorretos. Responde incorretamente
8C03120	0.08 - calcula corretamente o valor de um serviço de duas horas para ambos os encanadores. Responde incorretamente
8L05012	0.09 - calcula corretamente o valor de serviços de várias horas de duração e responde incorretamente.
8C03028, 8C03040, 8C03090, 8L05001, 8L05054, 8L04086, 8L04110, 8L05009, 8L05045, 8L05065, 3C01013, 3C02007, 3L06062	0.10 - calcula corretamente o valor de um serviço de uma hora e responde incorretamente (enfatiza a diferença entre os valores cobrados por hora)
8C06017, 8L04130, 3C04020	0.11 - calcula corretamente o valor de um serviço de uma hora. Responde

	incorretamente
8C01018, 8C02008, 8L09191, 8L09205, 3C03009, 3L07038, 3L09045, 3C03039	0.12 - subtrai o preço por hora do encanador B do preço por hora do encanador A. Responde incorretamente
8L04109	0.13 - calcula o valor de um serviço de três horas para ambos os encanadores, considerando apenas o valor cobrado por hora. Responde incorretamente
8L08163	0.14 - calcula corretamente o valor de um serviço de seis horas para ambos os encanadores. Responde incorretamente
8L10180	0.15 - calcula o valor de um serviço de uma a três horas, considerando apenas o valor cobrado por hora. Responde incorretamente
3C05018	0.16 - calcula corretamente o valor de um serviço de três horas e nao apresenta resposta
3C04046, 3C05075	0.17 - retira as informações do problema. Apresenta cálculos que não resolvem o problema e responde incorretamente
3C03094	0.18 - calcula o valor de um serviço de duas e quatro horas para ambos os encanadores, considerando apenas o valor do serviço cobrado por hora. Responde incorretamente
3C03070	0.19 - apresenta cálculos que não resolvem o problema e não apresenta resposta
3C03055	0.20 - retira as informações do problema e não apresenta resposta
3L10017, 3L09046	0.21 - calcula corretamente o valor de um serviço de três horas para ambos os encanadores. Responde incorretamente
3L04037	0.22 - calcula corretamente o valor de um serviço de uma hora para ambos os encanadores e nao apresenta resposta

8C03106	1.02 - calcula corretamente o valor de um serviço de três horas para ambos os encanadores mas não apresenta resposta
3C05074, 3L08082, 8C07012, 8L08149, 8L04083, 3C03113, 3L08097, 3C04014	1.03 - calcula corretamente o valor de um serviço de uma, duas e três horas mas responde incorretamente
3L07032	1.04 - calcula corretamente o valor de um serviço de uma a quatro horas, mas nao apresenta resposta
8L04124	1.05 - calcula corretamente o valor de um serviço de cinco horas para ambos os encanadores mas responde incorretamente
8L10179	1.06 - calcula corretamente o valor de um serviço de duas horas para o encanador A e incorretamente para o encanador B. Apresenta resposta incorreta
8C06015	1.07 - apresenta as leis das funções que descrevem os custos dos serviços de ambos os encanadores. Calcula corretamente as imagens de t=1 até t=3. Subtrai a função B da função A. Não apresenta resposta.
8L08145	1.08 - apresenta as leis das funções que descrevem os custos dos serviços de ambos os encanadores. Calcula corretamente a imagem de t=2 mas responde incorretamente
3L04014	1.09 - calcula o valor de um serviço de uma a cinco horas para ambos os encanadores, uns corretos outros incorretos. Responde incorretamente
8C03122, 3C05028, 3C03091, 3L06077	2.01 - apresenta as leis das funções que descrevem o custo para os dois encanadores e calcula as imagens de t=1 até 3 e responde corretamente
8C01011	2.02 - calcula o valor de um serviço de três horas para ambos os encanadores e responde corretamente

8L04093, 8L10173, 3C03052, 3C04037, 3C05057, 3C05062, 3C05068, 3C01023, 3C02010	2.03 - calcula o valor de um serviço de uma, duas e três horas e responde corretamente
8C07014, 8L05080	2.04 - calcula o valor de um serviço de uma, duas, três, quatro e cinco horas e responde corretamente
8L08161	2.05 - calcula o valor de um serviço de duas a seis horas e responde corretamente
8C03102	2.06 - apresenta as leis das funções que descrevem o custo para os dois encanadores e calcula as imagens de t=2 até 5 e responde corretamente
3C03073	2.07 - apresenta as leis das funções que descrevem os custos para ambos encanadores e resolve por inequação. Responde corretamente
3C05041	2.08 – não apresenta cálculo algum e responde corretamente

ANEXO 1

ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE ALUNOS E PROFESSORES NAS PROVAS DE QUESTÕES ABERTAS DE MATEMÁTICA[13]

Regina Luzia Corio de Buriasco
coordenadora do projeto

O projeto é constituído de investigações a serem realizadas por docentes, alunos dos programas de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, de Educação, e, alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, articuladas em torno do eixo temático da Avaliação em Matemática tendo como foco dos estudos a Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA 2002.

Pretende-se desenvolver um estudo qualitativo envolvendo a produção escrita de alunos e professores que ensinam matemática na resolução da Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002.

Os registros que os alunos fazem ao resolver as questões dão valiosas informações sobre o modo como compreenderam e registraram suas idéias a respeito da situação apresentada. Tais informações fornecem rico material para o professor incorporar ao seu repertório no planejamento das aulas e para orientar suas escolhas didáticas, servindo como referência para conversar sobre matemática com o aluno.

Ao analisar uma produção escrita, mantém-se um diálogo com as respostas dadas, indaga-se sua configuração, procura-se encontrar quais as relações que as constituem. O erro, então, não é considerado como algo negativo e sim como um indício importante sobre os conhecimentos, processos de relação das informações, valores, presentes na relação do sujeito com o objeto do conhecimento, quase sempre invisíveis e ignorados na prática educativa escolar.

Pretende-se estudar tanto erros como acertos, pois "tal como o sucesso não é garantia absoluta da existência da competência pretendida, o erro não é a prova absoluta da sua ausência" (HADJI, 1994, p.123), por conseguinte neste estudo todas as respostas e as estratégias utilizadas por quem as obtém serão fontes de investigação.

No caso deste estudo, não se pretende apresentar 'receitas' sobre avaliação

[13] Projeto financiado pela Fundação Araucária, sob protocolo no. 5998 do PROGRAMA DE APOIO À PESQUISA BÁSICA E APLICADA – Chamada de Projetos 06/2003. Modalidade B.

ou correção de provas escritas, mas sim conhecer mais e melhor como alunos e professores lidam com questões abertas de matemática. Dessa forma, buscará subsidiar a realização de uma das tarefas do professor que é a de fazer com que o erro, aos poucos se torne *observável* ao aluno para que este tome consciência daquele. Essa é uma das contribuições possíveis do presente projeto na tentativa de diminuir o fracasso escolar.

Objetivos Gerais

- Analisar a produção escrita de alunos e professores em questões abertas de matemática.
- Aprofundar o conhecimento dos processos de aprender e ensinar matemática, mediante um estudo da produção escrita de alunos e professores.

Material e Participantes

Para o desenvolvimento deste estudo serão utilizadas:

a) uma amostra retirada do universo das provas de Matemática realizadas pelos alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio das escolas públicas que participaram da AVA-2002, atendendo ao sistema de referência estatístico definido para este estudo, de modo a que seja representativa do universo dos participantes da AVA- 2002. Por conseguinte, será levado em conta o total de alunos, séries, dependência administrativa (pública), a amostra aleatória previamente selecionada e turno em que os alunos estavam matriculados. O sistema de referência será estruturado tendo como base as 10 meso-regiões em função da localização geográfica dos municípios. Deste modo, serão selecionadas, por sorteio aleatório, dentro da cota de participação de cada meso-região, sendo 400 provas de 4ª série e 422 provas da 8ª série do Ensino Fundamental e 327 provas da 3ª série do Ensino Médio;

b) uma prova composta por todas as questões da prova estadual de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio a qual será resolvida por professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, da rede pública do estado do Paraná, e, por alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

O presente estudo terá, então, como participantes alunos de escolas públicas paranaenses que realizaram a AVA/2002; alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL; alunos que cursaram, em 2002, a 4ª. série do Ensino Fundamental numa escola municipal de Cambé; professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental e Médio em escolas públicas na região de Londrina.

Indicadores previstos para a análise

Reafirmando que um dos propósitos principais é o de estimar a proficiência matemática examinando, atentamente, toda produção escrita na busca de indícios dos modos e estratégias utilizados na resolução de cada questão, e, devido à natureza da prova, os registros escritos dos alunos e professores serão separados inicialmente em três blocos - "resolve adequadamente a questão" (crédito completo), "resolve parcialmente a questão"(crédito parcial) e "não resolve a questão" (nenhum crédito).

Há duas razões para isto: levar em consideração o grau de compreensão demonstrado pelo aluno/professor na interpretação do enunciado da questão e em sua resolução, sempre, tendo como objetivo identificar o que ele já sabe e o que está a caminho de saber, para que, posteriormente, possa se esclarecer aos professores a existência de respostas que podem receber "crédito completo" mesmo não sendo aquelas 'perfeitas' de acordo com o modelo por eles conhecido.

Relevância Estimada do Projeto

Com relação a esta investigação espera-se que:

- a tradução das descobertas geradas possa contribuir nos programas de formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática, bem como para a área de estudos sobre avaliação em matemática;
- seus resultados e as informações inventariadas possam se converter em subsídios para instrumentalizar a prática pedagógica do professor que ensina matemática;
- possa servir de mote para outros estudos, para a elaboração de material que subsidie a prática pedagógica do professor na busca de superar os obstáculos didáticos por eles encontrados.

Têm-se, ainda, como meta e indício de sua relevância que o presente estudo incorpore e gere produções acadêmicas, especificamente: dissertações de mestrado; trabalhos de iniciação científica; publicações de artigos e apresentações em eventos das áreas de Educação Matemática e de Educação em geral, por exemplo, em eventos como o ENEM, SIPEM, ANPED; ENDIPE e outros similares, nacionais e internacionais.

Até o momento

a)estão concluídas as seguintes dissertações:

PEREGO, Sibéle Cristina. *Questões Abertas de Matemática: um estudo de registros escritos*. [produção de alunos da Licenciatura em Matemática] 2005. Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

NAGY-SILVA, Marcia Cristina. *Do observável para o oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª. série em questões de matemática*. 2005. Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

SEGURA, Raquel de Oliveira. *Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões Discursivas de Matemática*. 2005. Programa de Mestrado em Educação, Depto. de Educação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

PEREGO, Franciele. *O que a Produção Escrita Pode Revelar? Uma análise de questões de matemática*. 2006. Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

NEGRÃO DE LIMA, Roseli Cristina. *Avaliação em Matemática: análise da produção escrita de alunos da 4ª. série do Ensino Fundamental em questões discursivas.* 2006. Programa de Mestrado em Educação, Depto. de Educação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

ALVES, Rose Mary Fernandes. *Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões de matemática.* 2006. Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

b) está em fase de defesa a seguinte dissertação:

João Ricardo Viola dos Santos - este mestrando está investigando a produção escrita de alunos encontrada na questão comum de uma amostra retirada do universo das Provas de Questões Abertas de Matemática da 4ª. e 8ª. séries do Ensino Fundamental e 3ª. série do Ensino Médio, das escolas públicas paranaenses que participaram da AVA-2002, para compreender o sentido/significado que os alunos atribuem às informações contidas nos enunciados das questões e a utilização que fazem delas; inventariar e analisar os acertos e erros mais freqüentes e sua natureza; identificar as estratégias/procedimentos mais utilizados; verificar se a produção escrita destes alunos apresenta marcas de conteúdo matemático compatíveis com o seu nível de escolaridade e, identificar os possíveis fatores intervenientes.

c) está em andamento a investigação:

Magna Natalia Marin Pires - esta colaboradora está iniciando uma investigação sobre a produção escrita de alunos encontrada na questão comum de uma amostra retirada do universo das Provas de Questões Abertas de Matemática da 4ª. e 8ª. séries do Ensino Fundamental, das escolas públicas paranaenses que participaram da AVA-2002, para compreender o sentido/significado que os alunos atribuem às informações contidas nos enunciados das questões e a utilização que fazem delas; inventariar e analisar os acertos e erros mais freqüentes e sua natureza; identificar as estratégias/procedimentos mais utilizados; verificar se a produção escrita destes alunos apresenta marcas de conteúdo matemático compatíveis com o seu nível de escolaridade e, identificar os possíveis fatores intervenientes.

b) estão em andamento os seguintes trabalhos de Iniciação Científica:

Pamela Emanueli Alves Ferreira - com uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo, esta estudante da Licenciatura em Matemática está investigando a produção escrita de alunos contida na questão específica da Prova de Questões Abertas de Matemática da 8ª. série do Ensino Fundamental de uma amostra retirada pela SEED/PR do universo das provas realizadas pelos alunos das escolas públicas paranaenses que participaram da AVA-2002. Com este estudo pretende inventariar e analisar os acertos e erros mais freqüentes e sua natureza; identificar as estratégias/procedimentos mais utilizados.

Sérgio Luis Lima Filho - com uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo, este estudante da Licenciatura em Matemática está investigando a produção escrita de alunos contida na questão específica da Prova de Questões Abertas de Matemática da 3ª. série do Ensino Médio de uma amostra retirada pela SEED/PR do universo das provas realizadas pelos alunos das escolas públicas paranaenses que participaram da AVA-2002. Com este estudo pretende inventariar e analisar os acertos e erros mais freqüentes e sua natureza; identificar as estratégias/procedimentos mais utilizados.