Universidade Estadual de Londrina

JADER OTAVIO DALTO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU POR MEIO DO MODELO DA EQUIVALÊNCIA DE ESTÍMULOS

Londrina
2012

JADER OTAVIO DALTO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU POR MEIO DO MODELO DA EQUIVALÊNCIA DE ESTÍMULOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Verônica Bender Haydu.

Londrina
2012

Catalogação Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

D152e Dalto, Jader Otavio.
Ensino e aprendizagem de função do primeiro grau por meio do modelo da equivalência de estímulos / Jader Otavio Dalto. – Londrina, 2012.
130 f. : il.

Orientador: Verônica Bender Haydu.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Educação matemática – Teses. 3. Comportamento – Avaliação – Teses. 4. Psicologia da aprendizagem – Teses. 5. Funções (Matemática) – Teses. I. Haydu, Verônica Bender. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

JADER OTAVIO DALTO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU POR MEIO DO MODELO DA EQUIVALÊNCIA DE ESTÍMULOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jair Lopes Júnior
UNESP – São Paulo – SP

Prof. Dr. João dos Santos Carmo
UFSCAR – São Paulo – SP

Profa. Dra. Márcia Cristina C. Trindade Cyrino
UEL – Londrina – PR

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
UEL – Londrina – PR

Profa. Dra. Verônica Bender Haydu
UEL – Londrina – PR

Londrina, 30 de março de 2012.

Dedico esse trabalho a meus pais, Ruben (in memoriam) e Vera Lúcia, que nunca mediram esforços para que esse e tantos outros sonhos fossem realizados.

AGRADECIMENTOS

Na perspectiva da Análise do Comportamento, o ambiente no qual o sujeito se insere tem papel fundamental na determinação de seu comportamento. Igualmente importantes são as interações estabelecidas entre o sujeito e o ambiente. Assim, considero que esse trabalho só foi possível devido ao ambiente no qual me inseri e as diversas interações entre outros sujeitos, os quais devo minha gratidão.

Agradeço à Verônica pelo excelente arranjo de contingências que me permitiu conhecer um pouco melhor essa área da Psicologia. Obrigado por esses quatro anos de interlocução, pela paciência, pelo zelo, pelo carinho dispensados em todos os momentos.

Também agradeço à Regina, não apenas pelas contribuições enquanto membro da banca do Exame de Qualificação e da Defesa, mas sobretudo por ter arranjado contingências para que eu desistisse de me matricular em outra graduação e que ingressasse no doutorado.

Aos demais professores que participaram da banca do Exame de Qualificação e/ou da Defesa: Prof. Jair, Prof. João, Profa. Márcia, Profa. Ângela, obrigado pelo respeito e cuidado com o qual avaliaram esse trabalho, bem como pelas valiosas sugestões e contribuições.

Quero agradecer também a minha família, pelo apoio sem o qual esse trabalho não seria realizado; aos meus amigos, em particular à Adriana, à Denise e à Marisol, que sempre fizeram o possível para que eu pudesse ir a Londrina quando necessitava; aos participantes do grupo de estudos em Análise do Comportamento, coordenado pela Profa. Verônica; à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES), pela concessão de auxílio financeiro, ... , enfim, agradeço a todos aqueles que, mesmo indiretamente, contribuíram para que esse trabalho fosse realizado.

A verdadeira viagem da descoberta consiste não em buscar novas paisagens, mas em ter olhos novos.

Marcel Proust

DALTO, Jader Otavio. **Ensino e aprendizagem de função do primeiro grau por meio do modelo da equivalência de estímulos**. 2012. 130 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

RESUMO

Nesta investigação, procurou-se analisar o ensino e aprendizagem de função do primeiro grau na perspectiva da Análise do Comportamento, mais especificamente, por meio do Modelo da Equivalência de Estímulos. Ao considerar-se Álgebra Escolar como sendo o domínio matemático que lida com relações entre grandezas e regularidades numéricas que se constituem enquanto estruturas em um nível simbólico, procurou-se verificar se o Modelo da Equivalência de Estímulos é eficiente e eficaz no ensino e na aprendizagem de função do primeiro grau. Procurou-se fazer com que os participantes da pesquisa formassem classes de estímulos equivalentes entre diferentes elementos da linguagem algébrica (gráficos, tabelas e expressões de funções afins); analisar o processo de formação das classes de estímulos equivalentes e verificar se a formação de classes de estímulos equivalentes entre gráfico, tabela e expressão de funções afins específicas possibilita a generalização de estímulos, ou seja, se faz com que o estudante seja capaz de identificar gráficos de outras funções afins que não fizeram parte das classes anteriores. Para atingir esses objetivos, foi desenvolvido, no software Equivalência, um procedimento de ensino de discriminações condicionais entre elementos da linguagem algébrica relacionados a funções do primeiro grau da forma $y=ax+b$, com $a=1$. O procedimento de ensino consistia em uma etapa de ensino, uma de verificação das relações emergentes entre os elementos da linguagem algébrica e uma etapa de verificação da generalização de estímulos. Esse procedimento foi aplicado a dois estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental e, apesar de ter sido demonstrada a formação das classes de equivalência e a generalização de estímulos para ambos, um deles necessitou da intervenção do pesquisador para aprender as relações entre os elementos da linguagem algébrica. Assim, o procedimento de ensino foi modificado e aplicado a nove estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental, juntamente com um Pré-teste e um Pós-teste escritos. Como resultados principais, tem-se que as modificações realizadas no procedimento de ensino foram satisfatórias, uma vez que foi verificada a formação das classes de equivalência e a generalização de estímulos para sete dos nove participantes. Além disso, sete participantes apresentaram uma grande diferença no desempenho dos testes escritos, sendo que cinco deles também apresentaram aumento de desempenho no Pós-teste com o software. Esses resultados são consistentes com os apresentados na literatura no que se refere à efetividade da utilização do Modelo da Equivalência de Estímulos como mais uma estratégia de ensino e de aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Educação matemática. Análise do comportamento. Equivalência de estímulos. Função do primeiro grau. Ensino e aprendizagem de álgebra escolar.

DALTO, Jader Otavio. **Teaching and learning of first-degree function using stimulus equivalence**. 2012. 130 f. Thesis (Doctorate Graduate Studies in Science Teaching and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

ABSTRACT

This study intended to analyse teaching and learning of first-degree function in the context of Behavior Analysis, particularly using Stimulus Equivalence Model. We considered Scholar Algebra as the mathematics domain that deals with relations between numerical quantities and regularities that constitute structures in a symbolic level. It made us verify if Stimulus Equivalence is efficient and effective in teaching and learning first-degree function. We tried to make the research participants to form classes of equivalent stimuli between different elements of the algebraic language (graphs, tables and algebraic expressions of functions); to analyze the process of formation of the equivalent classes, and verify if the formation of classes equivalent stimuli between graph, table and algebraic expression of specific functions enables stimulus generalization, i.e, if it makes the student able to identify other graphics, tables and algebraic functions that were not part of previous classes. In order to achieve these goals, we developed, using Equivalence software, a teaching procedure of conditional relations between elements of the algebraic language related with first-degree functions like $y = ax + b$ with $a = 1$. The teaching procedure consisted of one stage of teaching, verification of emergent relations between the elements of the algebraic language and verification of stimulus generalization. This procedure was applied to two students of the fifth grade of elementary school and, despite having been shown the formation of equivalence classes and stimulus generalization for both students, one of them required the intervention of the researcher to learn the relations between the elements of algebraic language. Thus, the teaching procedure was modified and applied to nine students of eighth grade of elementary school, and written pre-test and post-test were used. As main results, we have that the modifications made at the teaching procedure were satisfactory, since it was observed the formation of the equivalence classes and the stimulus generalization for seven out nine participants. In addition, seven participants showed a great difference in the performance of written tests, five of them also showed increased performance in the post-test with the software. These results are consistent with those presented in the literature regarding the effectiveness of using the Stimulus Equivalence Model as another strategy for teaching and learning of Mathematics.

Keywords: Mathematics education. Behavior analysis. Stimulus equivalence. First-degree function. Teaching and learning of scholar algebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Acredito que muitos dos leitores desse trabalho, ao se depararem com a expressão *Análise do Comportamento* e, principalmente, com o termo *Behaviorismo* devem se questionar acerca do porquê de uma tese de doutorado em um Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática versar sobre essa subárea da Psicologia que vem, nos últimos anos, sendo esquecida na área da Educação. Estou habituado a esse estranhamento e/ou questionamento, uma vez que, nesses quatro anos de doutorado, sempre que eu mencionava os termos *Behaviorismo* e principalmente *Skinner*, faziam-me perguntas do tipo: é aquele negócio do cão que salivava? Do estímulo-resposta? É aquilo que os professores de Psicologia da Educação criticam? Por quê você escolheu isso? Não poderiam te orientar em outra coisa?

Geralmente procurava responder aos questionamentos da melhor forma possível. Entretanto, deixei aquele que para mim é o mais importante, para ser respondido na apresentação desse trabalho, até mesmo porque acredito ser o questionamento mais comum: *Por que você* escolheu isso? Uma resposta mais breve poderia ser: controle de estímulos; ações, sob certas condições, tiveram consequências que geraram novas ações, que por sua vez tiveram novas consequências... Obviamente não relatarei todas essas ações e consequências a partir do início, até mesmo porque não sei onde tudo isso iniciou-se de fato. Posso afirmar que o gosto pela matemática, a curiosidade sobre o como as pessoas aprendem e, mais ainda, sobre o como estudar o como as pessoas aprendem sempre existiu.

Meu primeiro contato com Psicologia foi na graduação em Matemática - Licenciatura. Na disciplina de Psicologia da Educação, ministrada na segunda série do curso, em 1999, sempre surpreendia-me com as explicações dadas pelas diferentes abordagens para o sucesso/fracasso dos processos de ensino e de aprendizagem. A partir daí, o gosto pela Psicologia lentamente foi aumentando. Entretanto, até o Mestrado, em 2007, não havia tido ainda a oportunidade de conciliar meus estudos acadêmicos com meu interesse pela Psicologia. Foi por isso que, no término do Mestrado, decidi que era hora de retornar à graduação para, dessa vez, cursar Psicologia. Informei a decisão à minha orientadora de mestrado, Profa. Regina Buriasco, que me aconselhou a não fazer isso, já que iniciar uma graduação depois de terminar o mestrado seria um retrocesso na minha formação enquanto pesquisador. Foi então que ela me sugeriu fazer um pré-projeto de pesquisa para o doutorado que envolvesse algo da Psicologia.

Defendi a dissertação do mestrado e resolvi deixar de lado tanto a ideia da graduação em Psicologia quanto a do doutorado. No final de 2007, o Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática abriu processo seletivo, com quatro vagas e, para minha surpresa, uma professora da área de Psicologia iria ofertar uma vaga para orientando de doutorado. Fiquei bastante animado com isso, apesar de não conhecer ainda a Verônica e não saber os temas de pesquisa com os quais ela trabalhava. Consultei o currículo dela na Plataforma Lattes e, ao ler a expressão *Behaviorismo Radical*, imediatamente pensei "estava muito bom para ser verdade". Para mim, Behaviorismo era a psicologia do estímulo-resposta, da repetição e não havia, naquele momento, qualquer possibilidade de desenvolver uma pesquisa com essa abordagem.

Depois de alguns dias, consultei novamente o currículo da Verônica, mais especificamente os trabalhos publicados em periódicos e deparei-me com um que tratava do ensino de operações aritméticas com o modelo da Equivalência de Estímulos a crianças do primeiro ano do Ensino Fundamental. Imprimi o trabalho e resolvi estudá-lo com cuidado. Fiquei surpreso com os resultados que foram alcançados e, sobretudo, em saber que o Behaviorismo não era apenas a psicologia do estímulo-resposta. Algumas ideias surgiram e, a partir delas, escrevi um pré-projeto de pesquisa sobre ensino de álgebra com o modelo da Equivalência de Estímulos. Fiz a seleção para ingresso no doutorado e fui aprovado.

Diante do que relatei, fica claro que não escolhi desenvolver essa investigação. Uma série de ações em determinados contextos me levaram a desenvolver esse trabalho. Um dos resultados desses quatro anos de estudo é esse trabalho, que está estruturado em três capítulos. No primeiro deles, apresento a Fundamentação Teórica e a caracterização da pesquisa. Inicio o capítulo com algumas definições de Álgebra Escolar, seguidas de uma caracterização da linguagem algébrica e de algumas considerações sobre Funções. Apresento os conceitos principais da Análise do Comportamento, o Modelo da Equivalência de Estímulos e alguns estudos que o utilizam como procedimento de ensino de matemática. O capítulo finaliza com a caracterização da pesquisa, com o problema e os objetivos.

No Capítulo 2, apresento os procedimentos metodológicos de um primeiro estudo por mim desenvolvido – estudo piloto, os resultados da aplicação desse procedimento, bem como uma discussão dos mesmos. No Capítulo 3, descrevo os procedimentos metodológicos e as alterações efetuadas decorrentes da discussão do capítulo anterior, os resultados da aplicação do procedimento de ensino e discussão. Por fim, apresento as considerações finais desse trabalho.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

O conceito de função é de fundamental importância na aprendizagem de matemática (SELDEN; SELDEN, 1992; HITT, 1998; PONTE, 1992). Verifica-se seu uso nos mais variados campos dessa área bem como sua aplicabilidade na modelagem de fenômenos de outras áreas da realidade. Entretanto, o ensino e a aprendizagem desse e de muitos outros conceitos algébricos são difíceis. Esse talvez seja o motivo pelo qual Ensino de Álgebra Escolar1 seja um tema recorrente em muitas pesquisas da Educação Matemática.

Embora não haja dúvidas de que função é um conteúdo que se insere nos domínios da Álgebra, não há consenso, na literatura, sobre o que é Álgebra, o que é pensar algebricamente e qual a relação entre Aritmética e Álgebra. Uma definição encontrada na literatura é a de Ameron (2002, p. 4, tradução nossa), que a define como “o domínio matemático que lida com relações gerais entre quantidades em um nível simbólico” 2 . Entretanto, para a autora, mesmo essa definição não faria justiça às múltiplas funções ou atividades da Álgebra.

Carraher, Martinez e Schliemann (2008, p. 6, tradução nossa) procuram definir Álgebra relacionando-a com a aritmética, considerando-a como sendo

> uma aritmética generalizada de números e quantidades e a substituição de cálculos com números e medidas particulares por um pensamento que envolve relações entre conjuntos de números, além de tratar as operações aritméticas como funções[3.]

No estudo de Bednarz, Kieran e Lee (1996), verifica-se que esses autores, discutem sobre as diferentes abordagens da introdução da Álgebra no currículo escolar e afirmam que as diferentes formas de introdução dos conceitos dessa área podem estar associadas a diferentes formas de entender Álgebra, a saber: estudo de uma linguagem e da sua sintaxe; estudo de procedimentos para resolução de certas classes de problemas; estudo de regularidades que governam relações numéricas e o estudo de relações entre quantidades que variam.

---

[1] A fim de evitar repetições, em todo o texto “Álgebra” deve ser entendida como “Álgebra Escolar”

[2]“ it is the mathematical domain dealing with (general) relationships between quantities on a symbolic level”.

[3] “as a generalized arithmetic of numbers and quantities and as a move from computations on particular numbers and measures toward thinking about relations among sets of numbers, thus treating arithmetic operations as functions”.

Definir Álgebra não é uma tarefa que pode ser feita facilmente, uma vez que a Álgebra que é ensinada na Educação Básica é um tanto quanto diferente daquela que é ensinada em cursos superiores de Matemática (USISKIN, 1995). Entretanto, esse autor aponta quatro maneiras pelas quais a Álgebra pode ser entendida. Na primeira delas, a Álgebra é entendida como aritmética generalizada, de modo que por meio da análise de casos particulares, propriedades e/ou relações numéricas são generalizadas. Além dessa forma, Álgebra pode ser entendida como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. De acordo com essa forma de entendê-la, a generalização de propriedades e/ou relações numéricas e a "tradução" de um problema para a linguagem matemática é apenas o início de uma série de procedimentos que possibilitam a resolução de problemas.

A terceira forma de entender Álgebra apresentada por Usiskin (1995) é considerá-la como estudo de relações entre grandezas. Nessa visão, ao contrário de considerar letras ou símbolos como incógnitas ou constantes, passa-se a considerá-las como variáveis, sendo que "fórmulas" como $A = bh$ expressam um tipo diferente de generalização da apresentada na primeira forma de entendê-la . Nesse caso, não há incógnitas para as quais se deva encontrar o valor numérico "correto", mas existe um modelo que precisa ser generalizado. Considerar Álgebra como estudo de estruturas é a quarta forma apresentada por Usiskin (1995) de entendê-la.

As formas de entender Álgebra não se esgotam por aqui. Não é objetivo deste estudo listar todas elas, mas pelo que foi até aqui apresentado, pode-se verificar que, apesar de não haver um consenso sobre a existência de uma forma de defini-la, existem similaridades entre as definições apresentadas. Com o intuito de facilitar a comparação entre as formas de entender Álgebra apresentadas, segue o Quadro 1, com as diferentes definições e algumas palavras-chave identificadas.

Quadro 1 – Algumas definições e formas de entender Álgebra encontradas na literatura

Autor(es)	Definição	Palavras-chave
Ameron (2002)	Domínio matemático que lida com relações gerais entre quantidades em um nível simbólico	• relações • simbolismo
Bednarz, Kieran e Lee (1996)	Estudo de uma linguagem e da sua sintaxe	• Linguagem • sintaxe
	Estudo de procedimentos para resolução de certas classes de problemas	• Processo • Resolução de problemas
	Estudo de regularidades que governam relações numéricas	• Regularidades • Relações
	Estudo de relações entre quantidades que variam.	• Relações
Usiskin (1995)	Aritmética generalizada	• Aritmética generalizada
	Estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas	• Processo • Resolução de problemas
	Estudo de relações entre grandezas	• Relações
	Estudo de estruturas	• estruturas
Carraher, Martinez e Schliemann (2008)	Uma aritmética generalizada de números e quantidades e a substituição de cálculos com números e medidas particulares por um pensamento que envolve relações entre conjuntos de números, além de tratar as operações aritméticas como funções.	• aritmética generalizada • relações

Uma análise do Quadro 1 permite observar pontos comuns como, por exemplo, o fato de ser considerada como estudo de relações entre grandezas, conjuntos numéricos, quantidades que variam; a linguagem e seus aspectos semânticos e sintáticos, bem como seu caráter simbólico.

No que se refere ao que é pensar algebricamente, Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) consideram que o pensamento algébrico é caracterizado pela capacidade de estabelecer relações ou comparações entre expressões numéricas ou padrões; reconhecer e expressar estruturas aritméticas, produzindo vários significados para elas; produzir mais de um modelo aritmético para uma situação-problema; interpretar como equivalentes duas grandezas ou expressões numéricas em uma igualdade; transformar expressões aritméticas em outras equivalentes; desenvolver algum tipo de generalização; expressar e perceber regularidades ou invariâncias; utilizar/criar/desenvolver uma linguagem mais concisa ou sincopada para expressar seu pensamento (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005).

Para Lins e Gimenez (1997, p. 151), o pensamento algébrico possui três características fundamentais. A primeira delas é o aritmeticismo, que de acordo com os autores, é a capacidade de “produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas”. Uma segunda característica desse pensamento é o internalismo, que se caracteriza como o fato de se considerar operações e números de acordo com suas propriedades. A terceira característica é a analiticidade, que seria a capacidade de operar sobre números desconhecidos como se fossem números conhecidos.

Ao analisar as definições apresentadas por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) e Lins e Gimenez (1997), verifica-se a utilização de verbos, que indicam ação em suas definições. Assim, a definição de pensamento algébrico é feita em termos de competências/habilidades, que faz com que a verificação do pensamento algébrico seja feita a partir da observação de certas ações do estudante.

A relação entre Aritmética e Álgebra vem sendo discutida há muito tempo na comunidade da Educação Matemática. De modo geral, há uma ideia, que para Linz e Gimenez (1997) é prejudicial e equivocada, de que primeiro deve-se aprender Aritmética e depois Álgebra. Entretanto, estudos como o de Lins e Gimenez (1997) Ameron (2002) Schliemann, Carraher e Brizuela (2007), Kieran (2004) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) abordam a relação entre Aritmética e Álgebra, e afirmam que, em circunstâncias adequadas, os estudantes podem ser capazes de aprender a notação algébrica e desenvolver conceitos algébricos durante os primeiros anos da escolarização básica.

1.1 Álgebra e Linguagem

Pode-se considerar que a aprendizagem da Álgebra está diretamente relacionada à forma como as ideias e os conceitos dessa área são comunicados, ou seja, ao sistema simbólico utilizado para expressar essas ideias e conceitos abstratos. Nessa direção, Matos e Ponte (2008, p. 198) consideram que

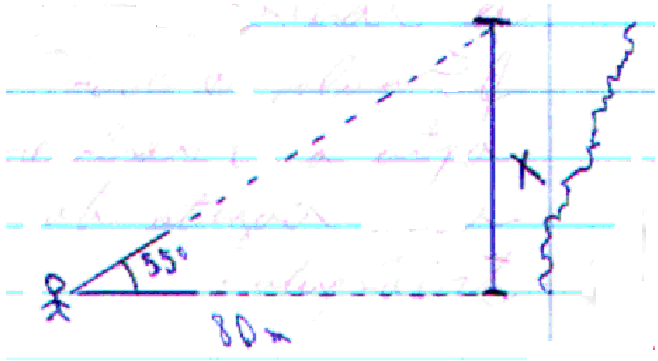
> a representação de relações funcionais, a resolução de problemas e equações dos 1º e do 2º graus, o estudo de equações literais e a generalização e demonstração de propriedades válidas em certos conjuntos numéricos são exemplos de situações onde a linguagem algébrica assume um papel essencial.

Assim, considerando a linguagem algébrica como ferramenta para a comunicação e criação de ideias matemáticas (DROUHARD; TEPPO, 2004), especial atenção deve ser dada ao que é a linguagem algébrica e como é aprendida pelos estudantes. De acordo com esses autores, para analisar a linguagem algébrica, pode-se recorrer aos textos dos livros didáticos, cujos elementos impressos podem ser categorizados em linguagem natural, escritos simbólicos e representações combinadas[4].

São considerados, por Drouhard e Teppo (2004), elementos da linguagem natural, frases ou sentenças escritas em português, inglês, ou qualquer outro idioma, como, por exemplo, sentenças do tipo *o número que elevado ao quadrado é nove* ou *uma função é uma relação de A em B de modo que todo elemento do conjunto A está relacionado a um único elemento do conjunto B.* Escritos simbólicos são as expressões que se utilizam exclusivamente de símbolos matemáticos, como, por exemplo, $x + y = 20$ ou ainda $f(x) = x^3 - 9x^2 - 3x + 5$. São consideradas representações combinadas os gráficos, os desenhos, os esquemas, que podem incluir tanto elementos da linguagem natural como escritos simbólicos. Esses elementos caracterizam, de acordo com Drouhard e Teppo (2004), a linguagem algébrica, que é composta, dessa forma, pela linguagem natural e por um sistema simbólico (escritos simbólicos e representações combinadas). Muitas vezes, para o mesmo objeto matemático, existem elementos da linguagem natural, escritos simbólicos e representações combinadas que são equivalentes, os quais os estudantes devem ser capazes de utilizar esses diferentes elementos da linguagem algébrica para resolver problemas, conforme a necessidade. Por exemplo, diante da seguinte questão: Um alpinista deve calcular a distância de uma encosta que vai escalar. Para isso, afasta-se horizontalmente 80 metros do pé da encosta e visualiza o topo desta sob um ângulo de 55º com o plano horizontal. Qual a altura da encosta? O estudante, para solucioná-la, pode lançar mão de uma representação combinada como a da Figura 1 para, a partir desse elemento da linguagem algébrica, representar a situação, anteriormente apresentada em linguagem natural, em escritos simbólicos que, por sua vez, possibilita a identificação de outros escritos simbólicos equivalentes que fornecem a solução da questão.

[4] “Natural language”, “symbolic writings” e “compound representations” no original.

Figura 1 – Uma representação combinada e um escrito simbólico que podem ser utilizados para a representação de uma situação em linguagem natural.



$\Leftrightarrow \; tg55^o = \dfrac{x}{80}$

Fonte: Dalto (2010).

1.2 FUNÇÕES

Na Educação Básica, o conteúdo de Funções insere-se no bloco de conteúdos Números e Operações para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1997) e Álgebra: números e funções, para o Ensino Médio (BRASIL, 2002). No Ensino Fundamental, alguns aspectos da álgebra já podem ser desenvolvidos desde os anos iniciais, sendo ampliados nos anos finais. O trabalho com atividades que possibilitem generalização de padrões aritméticos, estabelecimento de relações entre grandezas e resolução de problemas, que podem possibilitar a exploração do conceito de função no final desse nível de ensino. Entretanto, de acordo com as recomendações curriculares, “a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio” (BRASIL, 1997, p. 51).

De acordo com as orientações curriculares para o Ensino Médio, o estudo de funções deve ter como ênfase o conceito, suas propriedades em relação às operações, a interpretação de seus gráficos e aplicações. Por meio do estudo desse conceito, o estudante apropria-se da linguagem algébrica, considerando-a como linguagem da ciência, “necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema” (BRASIL, 2002, p. 121). Nesse documento está escrito que, embora o ensino desse conteúdo possa ser iniciado diretamente pela noção de função a partir de situações contextualizadas, tradicionalmente considera-se o estudo dos números reais, conjuntos e operações como pré-requisitos para o ensino desse conteúdo (BRASIL, 2002). Essa ordenação tradicional pode ser causada, na maioria das vezes, pela sequência sugerida nos livros didáticos adotados pelos professores que geralmente não são considerados como apoio didático, mas sim como manuais de ensino. As diferentes funções trabalhadas no Ensino Médio são quase sempre tratadas independentemente, sem conexão alguma entre elas ou entre outros conceitos matemáticos. Em geral, o ensino de função resume-se na construção de tabelas de valores numéricos de uma função a partir de sua expressão algébrica para, a partir dessa construção, marcar no plano cartesiano os pares ordenados obtidos para a construção de seu gráfico.

De acordo com as orientações curriculares, as habilidades a serem desenvolvidas com o trabalho nesse tema seriam:

> reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática; compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana; associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes; ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas; identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis. (BRASIL, 2002, p. 122-123).

Um dos aspectos das habilidades apresentadas anteriormente que merece ser destacado está relacionado com a linguagem algébrica. Além de ser considerada como ferramenta para o estabelecimento de relações entre grandezas de fenômenos internos e externos à Matemática, é objetivo do ensino de Matemática fazer com que o estudante seja capaz de relacionar os diferentes elementos da linguagem algébrica, sejam expressões de funções, seus respectivos gráficos, tabelas, etc. A esse respeito, Ponte (1992) afirma que muitos estudantes, ao ingressarem no ensino secundário, apresentam muitas dificuldades de pensamento abstrato e, por isso, lidar com gráficos no sistema de coordenadas cartesianas e expressões algébricas de funções não é uma tarefa fácil. Para enfrentar essa situação, o autor sugere que o ensino desse conteúdo necessita uma articulação das três mais importantes formas de representar funções: a numérica (que pode ser considerada como uma tabela contendo alguns pares ordenados que pertencem à função), a gráfica e a algébrica. Para ele, isso se justifica por dois motivos principais: primeiro porque, historicamente, nos séculos XVII e XVIII, matemáticos ocupavam grande parte do seu tempo à procura de padrões e relações e o faziam por meio de operações aritméticas. Além disso, construir e analisar tabelas com valores numéricos de funções pode fazer com que muitas das dificuldades que os estudantes enfrentam, advindas da utilização predominante de elementos algébricos abstratos, possam ser superadas.

Para Ponte (1992), a utilização de elementos por ele considerados como numéricos no ensino de funções não implica que o trabalho com elementos algébricos seja desnecessário ou menos importante. Segundo ele, a habilidade de manipular expressões algébricas é importante, mas fundamental é que os estudantes compreendam o significado de tais expressões em situações concretas, o que pode ser obtido por meio da articulação das três formas de representar funções.

Percebe-se, pelo que foi exposto nas seções anteriores, a importância da linguagem algébrica e da articulação entre os diferentes elementos que a constitui para a aprendizagem de conteúdos da área da Álgebra, como o de função do primeiro grau. A articulação desses elementos de modo a garantir a aprendizagem, é analisada nessa investigação por meio da Análise do Comportamento, cuja caracterização e princípios de aprendizagem derivados dessa abordagem em Psicologia são apresentados nas sessões seguintes.

1.3 A Análise do Comportamento

A Análise do Comportamento é a subárea da Psicologia cujo objeto de estudo são as interações organismo-ambiente (TODOROV, 1982) e que tem como sustentação teórica, histórica e filosófica o Behaviorismo Radical de Skinner. Todas as interações que os organismos estabelecem com o ambiente são consideradas, de acordo com essa abordagem, como sendo determinadas por contingências. Contingências são definidas, de acordo com Catania (1999, p. 394), como "as probabilidades condicionais que relacionam alguns eventos a outros". De forma mais simples, pode-se entendê-las como relações de dependência entre eventos ambientais ou entre eventos ambientais e o comportamento (CATANIA, 1999). Assim, pode-se citar, como exemplo, que a chuva é contingente, entre outras coisas, à evaporação da água de rios e mares – relação de dependência entre eventos ambientais – e que o comportamento de surfar é contingente à ocorrência de ondas no mar – relação de dependência entre o comportamento e eventos ambientais. Além do conceito de contingência, outro importante termo que precisa ser conceituado para que se compreenda a noção de comportamento é o de ambiente. O ambiente é entendido como sendo o conjunto de estímulos capazes de entrar em relação funcional com o organismo. Em outras palavras, pode-se dizer que é tudo que é externo à ação, ao comportamento, podendo ser interno ou externo ao organismo.

Comportamento é definido como sendo as interações que o organismo estabelece com o ambiente, sendo determinado por meio de um processo de seleção e não de forma mecânica (CATANIA, 1999). Basicamente, os comportamentos dos organismos humanos e não humanos podem ser identificados como sendo: (a) encobertos ou privados, quando observados apenas pelo organismo que apresenta esse comportamento. Por exemplo, o pensamento, os sentimentos e os sonhos; (b) abertos ou públicos, se observados por outros organismos, além daquele que o emite.

Além disso, os comportamentos podem ainda ser identificados, em função da contingência entre: (a) eventos antecedentes e respostas – comportamento respondente, quando o comportamento é determinado por uma contingência de estímulo-resposta, ou seja, quando um estímulo antecedente (evento ambiental) elicia, evoca uma determinada resposta. Por exemplo, o comportamento de salivar é eliciado pela presença de alimento na boca do organismo; (b) respostas e consequências - comportamento operante, quando a contingência que determina o comportamento é a contingência de resposta-estímulo, sendo que na presença de um determinado estímulo antecedente, a emissão de determinada resposta do organismo tende a ser mais ou menos provável, dependendo da consequência que é contingente à resposta. Em outras palavras, pode-se afirmar que a consequência de um determinado comportamento afeta a probabilidade da sua ocorrência em situações similares. Por exemplo, na presença da situação “prova” (estímulo antecedente), o comportamento de estudar (resposta) tende a ser mais provável quando o estudante obtém uma boa nota em provas anteriores para as quais estudou (consequência direta da emissão da resposta de estudar na presença da situação “prova”). Diz-se, nesse caso, que uma boa nota na prova reforça o comportamento de estudar.

Os comportamentos respondentes, também denominados na bibliografia da área como comportamentos reflexos, diferenciam-se dos comportamentos operantes basicamente porque os primeiros são comportamentos estabelecidos na evolução filogenética, ou seja, por contingências relacionadas à herança genética do indivíduo, sendo respostas eliciadas por estímulos específicos, enquanto que os últimos são estabelecidos ontogeneticamente, ou seja, por contingências relacionadas ao indivíduo e as variáveis presentes na sua vida, sendo mantidos pelas suas consequências.

Para os comportamentos operantes, a consequência de um determinado comportamento pode produzir um aumento na probabilidade de ocorrência desse comportamento. Se isso ocorrer, diz-se que o comportamento foi reforçado. Se a consequência do comportamento emitido fizer com que a probabilidade de sua ocorrência, em condições futuras semelhantes, seja diminuída, diz-se que o comportamento foi punido.

Assim, uma consequência que seja contingente à emissão de um determinado comportamento é considerada como reforço quando aumenta a probabilidade da ocorrência do comportamento, ao passo que é considerada como punição quando faz com que a emissão desse comportamento, por parte do organismo, seja menos provável em condições semelhantes. Utilizando o exemplo citado anteriormente, no qual o comportamento de estudar para a prova tende a ser mais provável quando o aluno obtém uma boa nota para a prova que estudou, tem-se que a boa nota é um reforço para o comportamento de estudar. Da mesma forma, o efeito analgésico também é um reforço para o comportamento de tomar remédio na presença de dor de cabeça, pois o analgésico, ao aliviar a dor, aumenta a probabilidade da ocorrência futura desse comportamento em situações semelhantes. Quando o comportamento de brigar entre irmãos é seguido de uma bronca dos pais, pode ocorrer uma diminuição da emissão futura desse comportamento. Nesse caso, diz-se que esse comportamento foi punido e que a bronca dos pais tem caráter de estímulo aversivo para as crianças.

Aprender é considerado como comportamento e a aprendizagem é entendida como todo e qualquer processo de interação entre um organismo vivo e seu meio ambiente social e não-social, que produz alteração no repertório comportamental, podendo envolver a aquisição ou a extinção de um comportamento (HAYDU, 2009), podendo ocorrer por meio de processos de condicionamento operante e respondente. Como já foi citado anteriormente, a contingência que determina um comportamento respondente é uma contingência de dois termos, na qual um evento antecedente elicia uma resposta. Por exemplo, o comportamento de espirrar quando pimenta entra em contato com a mucosa nasal. Nos casos em que o comportamento é filogeneticamente determinado, tem-se um comportamento reflexo incondicional. Em muitos casos, os comportamentos reflexos podem ser aprendidos quando ocorre um procedimento de emparelhamento de estímulos. Nesse caso, tem-se o que é denominado de comportamentos reflexos condicionais.

Para um melhor entendimento sobre como os reflexos condicionais são adquiridos, pode-se basear na seguinte situação, (Figura 2): o ser humano emite o comportamento de salivar quando uma porção de alimento entra em contato com a boca. Nesse caso, o comportamento de salivar é considerado como reflexo incondicional, pois é determinado pela evolução genética da espécie e o alimento é considerado como estímulo incondicional. Se, seguidas vezes, um som for apresentado juntamente com a colocação do alimento na boca do indivíduo, o som, que antes era um estímulo neutro, pois não evocava a resposta de salivar, adquire a função eliciadora. O comportamento de salivar, nesse caso, é considerado um comportamento reflexo condicional, pois foi determinado por meio de uma contingência ontogenética, ou seja, foi aprendido. O som, que antes era um estímulo neutro, passa a ser considerado como estímulo condicional, uma vez que passa a eliciar o comportamento de salivar.

Figura 2 – Esquema de aquisição do comportamento de salivar diante de um estímulo neutro por emparelhamento de estímulos

$$\underset{\text{Alimento}}{S^{I}} \rightarrow \underset{\text{salivação}}{R}$$

$$\underset{\text{Alimento}}{S^{I}} \underset{+}{+} \underset{\text{som}}{S^{C}} \rightarrow \underset{\text{salivação}}{R}$$

$$\underset{\text{som}}{S^{C}} \rightarrow \underset{\text{Salivação}}{R}$$

A aprendizagem pode ocorrer, também, por meio de um processo de condicionamento operante, determinado por uma contingência de três termos. De acordo com essa contingência, na presença de determinada condição – denominada de estímulo discriminativo – uma determinada resposta tende a ser mais ou menos provável dependendo da sua consequência. É importante destacar que o estímulo discriminativo não elicia a resposta, mas sim estabelece a ocasião para que a resposta seja reforçada (CATANIA, 1999), caracterizando o que é denominado por comportamento discriminativo. A aquisição desse tipo de comportamento ocorre quando uma resposta é reforçada na presença de um estímulo discriminativo S^D e não é reforçada (extinta) ou é punida na presença de outro estímulo discriminativo S^{Δ}. O fato de o comportamento ser reforçado na presença do S^D e não o ser na presença do S^{Δ} faz com que haja um aumento na frequência da resposta na presença do estímulo S^D e a não emissão dessa resposta na presença do estímulo discriminativo S^{Δ}.

Por meio desse procedimento, estabelece-se uma correlação positiva entre o S^D e o reforço e uma correlação negativa entre o S^{Δ} e a resposta, uma vez que a ausência do reforço para a resposta diante do S^{Δ} leva a extinção da resposta na presença desse estímulo discriminativo. Assim, após algumas tentativas, o indivíduo passa a emitir a resposta especificada somente diante do S^D (CATANIA, 1999). Esse processo é denominado de discriminação de estímulos.

Um exemplo desse procedimento está relacionada ao comportamento de atender ao telefone. Na presença do telefone tocando, a resposta de atendê-lo e dizer “alô” é reforçada, uma vez que será possível falar com alguém, ao passo que a resposta de atender ao telefone quando o mesmo não está tocando não é reforçada, pois não será possível falar com alguém nessas condições. O diagrama da Figura 3 ilustra essa situação.

Figura 3 – Esquema representativo da contingência de três termos referente ao comportamento de atender ao telefone

S^D → R → C

Toque do telefone   Atender   Reforço

S^Δ → R →

Ausência do toque   Atender   Extinção

Pode-se notar que, na aprendizagem operante, existem dois tipos de consequência que podem ser contingentes a um determinado comportamento: reforço e punição. Ao mesmo tempo, para cada um desses tipos de consequência, existem dois tipos de relações entre elas e o comportamento: positiva e negativa (BAUM, 2006), ou seja, pode-se falar em reforço positivo, reforço negativo, punição positiva e punição negativa. Sempre que a consequência contingente a um comportamento for reforçadora, ocorre um aumento da probabilidade da emissão desse comportamento.

Quando o comportamento é seguido de uma consequência e ocorre o aumento na frequência desse comportamento, diz-se que ocorreu um processo denominado reforço positivo. Como exemplo, pode-se citar que, estando privado de alimento, o comportamento de cozinhar pode ser reforçado por produzir alimento. Nesse caso, a consequência, por ser contingente a um comportamento, faz com esse seja reforçado. Quando um comportamento é reforçado devido à remoção de um estímulo aversivo, diz-se que ocorreu um reforço negativo. Como exemplo, pode-se citar que o comportamento de tomar remédio na presença de dor de cabeça é reforçado pelo efeito analgésico do medicamento, Tem-se, nesse caso, uma consequência que envolve o término de um estímulo de forma contingente ao comportamento.

No caso da punição positiva observa-se uma redução na frequência do comportamento por ser esse seguido por um evento ambiental com características aversivas. Um exemplo de punição positiva é quando um indivíduo cai ao andar em uma superfície escorregadia. Nesse caso, o comportamento tende a ser menos provável, pois é seguido de uma consequência negativa. Entretanto, quando um comportamento é punido devido à remoção de um evento que tem valor reforçador, tem-se o que é chamado de punição negativa. Pode-se observar esse processo, por exemplo, quando uma criança é proibida de ver televisão durante uma semana por ter quebrado um vaso da sala.

1.3.1 O Comportamento Verbal

Os comportamentos operantes sempre alteram o ambiente. Em alguns casos, essa alteração ocorre de maneira direta. Esses comportamentos foram definidos como sendo não verbais. Por outro lado, existem comportamentos que modificam o ambiente de maneira indireta pela mediação de outra pessoa. Tais comportamentos foram identificados por Skinner (1957) como sendo comportamentos verbais. Para ele, comportamento verbal é o "comportamento reforçado pela mediação de outras pessoas" [5] (SKINNER, 1957, p. 2, tradução nossa), consideradas ouvintes, que são especialmente treinadas para reagirem ao comportamento do falante. Como esse comportamento é adquirido, mantido e extinto da mesma forma que os demais comportamentos operantes, é também considerado como um comportamento operante que altera o ambiente e é modificado por essas alterações. Assim, é um comportamento mantido por consequências que são mediadas por ouvintes que, por sua vez, fazem parte de uma comunidade verbal (SKINNER, 1957). É importante salientar que o comportamento verbal não se refere somente à fala, mas sim:

> a própria ação do falante (e não a expressão de uma idéia mental ou de uma representação) em interação com ouvintes, falando, escrevendo, gestualizando a partir do controle de estímulos (coisas, acontecimentos, eventos, palavras faladas, lidas ou ouvidas, outras pessoas ou propriedades desses "objetos" ou pessoas) e conseqüências providas por ouvintes dessa interação (BORLOTI et al., 2008, p. 103).

Assim como para qualquer comportamento, para compreender o comportamento verbal, é necessário recorrer à análise funcional do comportamento, que é definida como a "análise do comportamento em termos das relações com as consequências do responder" (BARROS, 2003, p. 74). Assim, na análise funcional do comportamento verbal, busca-se especificar o comportamento que produz a resposta verbal (fala, escrita, expressões

[5] "behavior reinforced through the mediation of the other persons", no original.

faciais, gestos etc.), ou seja, analisa-se a função dos eventos antecedentes e consequentes que são contingentes à resposta e que a determina.

A título de ilustração, pode-se fazer uma análise funcional da forma descrita no exemplo a seguir. Supondo que uma sala de aula esteja pouco iluminada e com as luzes apagadas, o que dificulta a leitura dos alunos, a pouca luminosidade na sala atua como uma operação estabelecedora que pode favorecer a emissão da resposta operante não verbal do professor de ir ao interruptor e acender as luzes alterando, dessa forma, o ambiente. Essa resposta é um operante não verbal, pois alterou diretamente o ambiente e é mantida por essas consequências. Ela é uma resposta que foi reforçada ao longo da história do indivíduo, supondo que muitas vezes a resposta de acender as luzes foi emitida teve como consequência a ocorrência do estímulo luminoso. Entretanto, o professor poderia ter dito a um aluno: “João, por favor, acenda as luzes da sala”. Essa solicitação poderia resultar nas mesmas alterações do ambiente citadas anteriormente. Porém, tal operante alteraria o ambiente indiretamente, isto é, seria preciso a mediação de outra pessoa para que a sala ficasse iluminada. O comportamento de dizer “João, por favor, acenda as luzes da sala” é um operante verbal reforçado pelo atendimento feito pelo aluno à solicitação do professor. Assim, o ouvinte tem papel crucial no desenvolvimento e manutenção do comportamento verbal, sem o qual esse comportamento não poderia ser adquirido. As ações do ouvinte proveem reforço para as verbalizações dos falantes (BAUM, 2006), ao mesmo tempo em que os falantes alteram o comportamento dos ouvintes, o que caracteriza, de acordo com Catania (1999), um reforço verbal e social.

1.3.2 Ensino, Aprendizagem e Análise do Comportamento

No ambiente da sala de aula, os diferentes sujeitos e elementos que a constitui estão em constante interação. Dependendo da forma como as contingências estão estabelecidas entre sujeitos e ambiente, os comportamentos de ensinar e aprender podem ou não estar ocorrendo. Conforme já foi mencionado anteriormente, Aprendizagem pode ser considerada como todo e qualquer processo de interação ente o organismo vivo e o ambiente que produz alteração no repertório comportamental, podendo envolver a aquisição ou extinção de um comportamento (HAYDU, 2009). Assim, em uma situação de ensino e aprendizagem, quando ocorre a alteração do repertório comportamental do aluno, pode-se dizer que ocorreu aprendizagem. Essa alteração do repertório comportamental do aluno só ocorre devido às interações que esse estabelece com o ambiente. Tais relações, em geral, são delineadas pelo professor, caracterizando o comportamento de ensinar.

Ensinar é, de acordo com Skinner (1972, p. 4), "simplesmente arranjar contingências de reforço [...] é o ato de facilitar a aprendizagem; quem é ensinado aprende mais rapidamente do que quem não é." Para esse autor, o conjunto de contingências de reforço possui três partes essenciais, representantes de três formas que, na época em que o trabalho foi publicado, eram consideradas como formas tradicionais, erradas e incompletas de caracterização da aprendizagem e do ensino. Uma delas é o *aprender fazendo*, que evidencia a resposta. O *aprender pela experiência* acentua a ocasião na qual a resposta ocorre e *aprender por ensaio e erro* evidencia as consequências que são contingentes a determinada resposta em um ambiente.

De modo geral, se após um período de ensino de determinado conteúdo, o estudante obtém um desempenho insatisfatório em um teste ou prova, considera-se que o mesmo não aprendeu, que não se apropriou do conhecimento, que não conseguiu lembrar do conteúdo, ou seja, em geral a "falha" dos estudantes são devidas a problemas de memória, atenção ou assimilação que, em geral, são tratados como processos mentais internos. De acordo com Etzel (1997), termos como memória, resolução de problemas, atenção, assimilação, conhecimento, pensamento, apesar de terem "significado", apenas podem ser inferidos, uma vez que não é possível observá-los diretamente ou mensurá-los. São termos criados para explicar determinados comportamentos, considerados como comportamentos cognitivos, que podem ser observados e mensurados. Em geral, a inferência sobre esses termos não fornece informações sobre como alterá-los.

Dois ramos da ciência comportamental lidam com esse tipo de comportamento: a ciência cognitivista e a análise do comportamento, diferenciando-se nos pressupostos teóricos e na forma como explicá-los. Os analistas do comportamento entendem comportamentos cognitivos como passíveis de serem observados e mensurados. Após observá-los e medi-los, procuram relacioná-los com o ambiente no qual ocorrem ou ocorreram, em busca de verificar eventos ambientais que sistematicamente antecedem esses comportamentos, com o intuito de verificar se tais eventos evocam os comportamentos. Da mesma forma, buscam eventos ambientais que sistematicamente seguem os comportamentos cognitivos, de forma a verificar se tais comportamentos cognitivos são mantidos ou não pelos comportamentos que os seguem. Assim, em uma situação de ensino, o analista do comportamento tenta delinear um ambiente no qual a aprendizagem, aqui entendida como alteração do repertório comportamental do aprendiz, possa ocorrer. A princípio, o analista deve definir que eventos ambientais evocariam as habilidades cognitivas e estabelecer contingências de modo que isso ocorra. Além disso, cabe ao analista do comportamento definir quais eventos ambientais manteriam os comportamentos cognitivos quando forem sistematicamente consequentes a eles (ETZEL, 1997).

De modo geral, após uma situação de ensino, se ocorre a aprendizagem, diz-se que o estudante possui conhecimento sobre o que lhe foi ensinado. Conhecimento é entendido, nessa linguagem cotidiana, como algo interno ao indivíduo, que está em sua mente. Nesse sentido, considera-se que um estudante possui conhecimento de fração e que o exibe quando, por exemplo, é capaz de somar e subtrair números racionais na forma fracionária. O conhecimento de fração seria a justificativa para a emissão do comportamento de somar e subtrair frações. Mas o que seria esse conhecimento que permite a emissão de comportamentos como o de somar frações?

Os analistas do comportamento, em vez de considerar o conhecimento como algo que explica o comportamento, analisam o termo focalizando as condições sobre as quais ocorre (BAUM, 2006). Assim, por ser verbo, conhecer pressupõe uma ação, portanto, também é considerado comportamento, mais especificamente, o comportamento de discriminar (ETZEL, 1997). Conhecer uma coisa é ser capaz de distingui-la de outras, saber em quais categorias ela se inclui ou se aplica. Para Skinner,

> o comportamento matemático é geralmente considerado não como um repertório de respostas contendo números e operações, mas como prova de inteligência matemática ou do poder da razão. É bem verdade que as técnicas que estão emergindo do estudo experimental da aprendizagem não foram concebidas para “desenvolver a mente” ou promover algum vago “entendimento” das relações matemáticas. Foram planejadas, ao contrário, para estabelecer os próprios repertórios que são tomados como provas da existência de processos ou estados mentais. (SKINNER, 1972, p. 25).

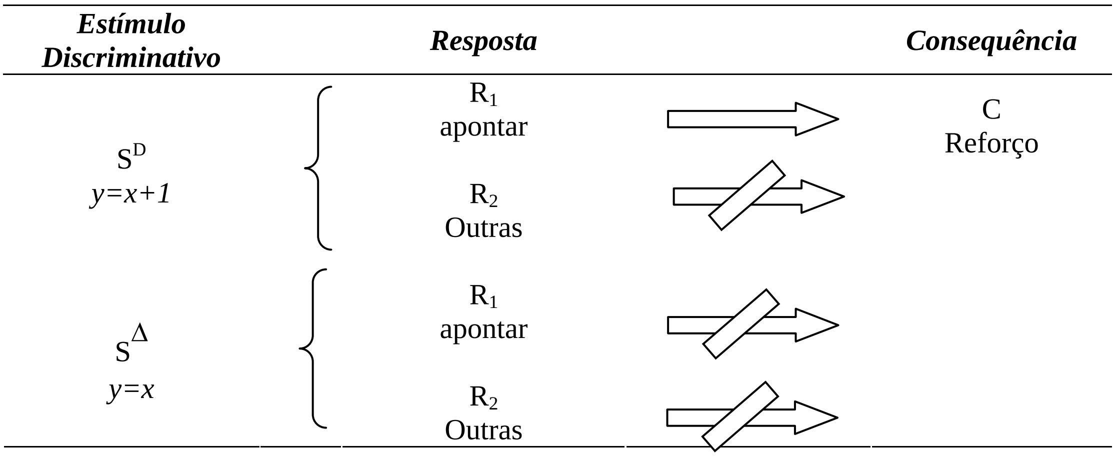
Responder diferencialmente a estímulos é o processo fundamental para o estabelecimento de comportamentos cognitivos. Tais comportamentos podem ser estabelecidos por meio de discriminações condicionais arranjadas de forma a possibilitar a emergência de novas relações, caracterizando o que foi denominado como Equivalência de Estímulos, que será tratado na seção seguinte.

1.3.3 Equivalência de Estímulos

Todo comportamento, seja ele respondente ou operante, ocorre em um determinado contexto. Em particular, comportamentos operantes são determinados não apenas pelo fato de certas consequências seguirem determinados comportamentos, mas sobretudo pelo fato dessas relações ocorrerem de forma sistemática em um determinado contexto, o que é denominado controle de estímulos. Tem-se, dessa forma, que os comportamentos mudam à medida que o contexto muda (BAUM, 2006). O processo de controle de estímulos é caracterizado pela contingência de três termos: estímulo discriminativo, resposta e consequência. Essa discriminação de estímulos pode mudar à medida que o contexto muda, ou seja, pode também estar sob o controle de estímulos do ambiente.

Por exemplo, na presença de duas expressões de função do primeiro grau *y=x+1* e *y=x*, um estudante pode aprender a apontar para a expressão *y=x+1* se uma consequência reforçadora foi contingente a essa resposta, enquanto que a resposta de apontar para a expressão *y=x* ou qualquer outra resposta relacionada a essa expressão estão em extinção, ou seja, não tem consequência reforçadora. Tem-se, nessa situação, uma discriminação simples, que pode ser representada pelo esquema apresentado na Figura 4.

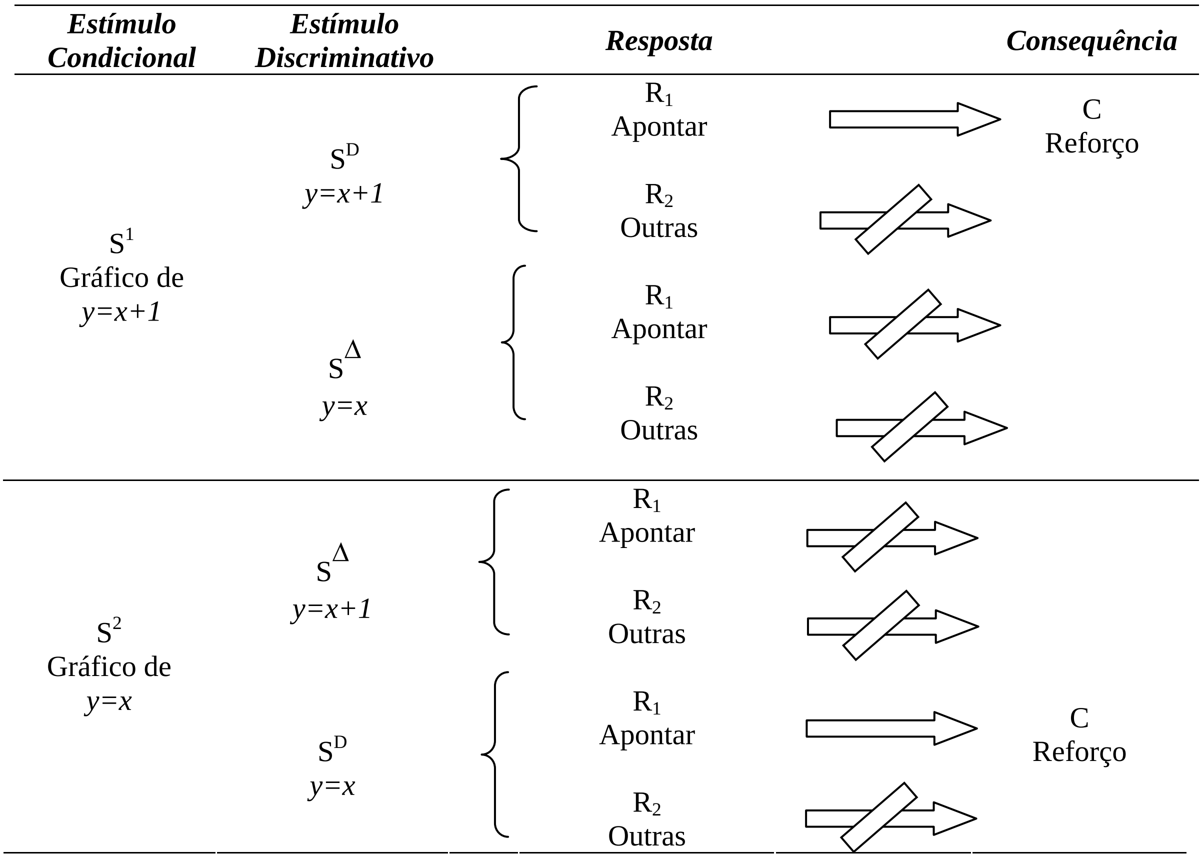
Figura 4 – Diagrama de uma discriminação simples.



Fonte: Baseado em Sidman (2000).

No diagrama da Figura 4, o estímulo discriminativo S^D é aquele diante do qual a resposta é reforçada e o estímulo S^Δ é aquele diante da qual a resposta não é reforçada ou é seguida por uma consequência punitiva. Essa discriminação, denominada discriminação simples, pode estar sob o controle de estímulos ambientais quando, por exemplo, a resposta de apontar a expressão *y=x+1* na presença do gráfico dessa função for reforçada, enquanto outras respostas estarão em extinção; e apontar a expressão *y=x* na presença do gráfico dessa função for reforçado e outras respostas não. Nesse caso, ao acrescentar o estímulo gráfico da função *y=x+1* e gráfico da função *y=x* a essa contingência, ela passa a ser considerada como uma contingência de quatro termos ou discriminação condicional (estímulo condicional – estímulo discriminativo – resposta – consequência). Os novos estímulos que integram a contingência são denominados estímulos condicionais, pois são responsáveis por ativar determinada discriminação. Assim, o esquema do exemplo citado anteriormente seria o que está representado na Figura 5.

Figura 5 – Diagrama de uma discriminação condicional.



Fonte: Baseado em Sidman (2000).

É importante notar que o estímulo condicional define sob qual condição haverá uma correlação positiva entre o estímulo discriminativo e a consequência. No exemplo citado, na presença do gráfico da função *y=x+1*, a expressão *y=x+1* é o S^D, enquanto que na presença do gráfico da função *y=x*, a expressão *y=x* é o S^Δ. O processo de aprendizagem dessa discriminação condicional pode se dar por meio de um procedimento denominado escolha de acordo com o modelo – *matching to sample* (MTS) (SIDMAN, 1994). Para isso, é preciso que se tenham, no mínimo, dois estímulos condicionais diferentes, que serão considerados estímulos-modelo e dois estímulos discriminativos diferentes, denominados estímulos de comparação.

Assim, ao serem apresentados um estímulo-modelo e os estímulos de comparação, as respostas são reforçadas diferencialmente de acordo com as contingências estabelecidas entre o estímulo-modelo e o estímulo de comparação. No exemplo da Figura 5, o gráfico da função *y=x+1* e o gráfico da função *y=x* atuam como estímulos-modelo e determinam quando a resposta de apontar para a expressão *y=x+1* ou a expressão *y=x* será reforçada ou colocada em extinção.

Esse processo de discriminação condicional é, de acordo com Sidman (1994, 2000) a matéria prima para que seja possível responder a relações entre estímulos que não foram diretamente ensinadas. Ao serem ensinadas relações arbitrárias entre estímulos, os estímulos envolvidos nessas relações podem fazer parte do que Sidman denominou "classe de estímulos equivalentes". Para que isso ocorra, deve-se ensinar pelo menos duas discriminações condicionais entre três estímulos, sendo que um estímulo deve ser comum às duas discriminações condicionais. Para que esses estímulos formem uma classe de estímulos equivalentes, Sidman (1994, 2000) propôs critérios baseados na definição de relações de equivalência da Teoria dos Conjuntos. Temos que se A for um conjunto não vazio, uma relação R em A é considerada relação de equivalência se for, simultaneamente, reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja,

(i) $\forall a \in A, (a,a) \in R$

(ii) $\forall (a,b) \in R,\ \ (a,b) \Rightarrow (b,a)$

(iii) $\forall (a,b) \in R$ e $\forall (b,c) \in R,\ (a,c) \in R$

Por exemplo, no ensino de números racionais, pode-se ensinar a um estudante o número decimal das frações ¼ e ½ por um procedimento como o descrito a seguir. O conjunto A da definição anterior seria formado por seis elementos: figura com metade do círculo pintado de preto (estímulo A1[6]), figura com 1/4 do círculo pintado de preto (estímulo A2), as frações ½ (estímulo B1) e ¼ (estímulo B2) e os números decimais 0,5 (estímulo C1) e 0,25 (estímulo C2). Primeiramente, ocorre o reforço diferencial:

[6] Em geral, cada estímulo é denominado por um código alfanumérico. A letra representa o grupo de estímulos a qual pertence. Nesse caso, A representa o conjunto dos estímulos pictóricos, B o conjunto dos estímulos fracionários e C o conjunto dos estímulos decimais. O número representa a classe a qual o estímulo pertence. Nesse exemplo, o número 1 representa a classe do número racional 0,5 e o número 2 a classe do número racional 0,25.

1. diante da fração ½, escolher a figura com metade do círculo pintado de preto é reforçado, enquanto que outras respostas estão em extinção (relação B1-A1[7]);
2. diante da fração ¼, escolher a figura com ¼ do círculo pintado de preto é reforçado, enquanto que outras respostas estão em extinção (relação B2-A2);
3. diante da figura com metade do círculo pintado de preto escolher 0,5 é reforçado, e outras respostas estão em extinção (relação A1-C1);
4. diante da figura com ¼ do círculo pintado de preto, escolher 0,25 é reforçado, e outras respostas estão em extinção (relação A2-C2).

Se as relações seguintes, consideradas como emergentes, forem verificadas sem a necessidade de ensino prévio, considera-se que houve a formação de duas classes de estímulos equivalentes.

1. reflexivas: na presença da figura com metade do círculo pintado de preto, o estudante escolhe a figura com metade do círculo pintado de preto (relação A1-A1); na presença da figura com ¼ do círculo pintado de preto, o estudante escolhe a figura com ¼ do círculo pintado de preto (relação A2-A2); na presença da fração ½, o estudante escolhe a fração ½ (relação B1-B1); na presença da fração ¼, o estudante escolhe a fração ¼ (relação B2-B2); na presença do número 0,5, o estudante escolhe o número 0,5 (relação C1-C1) e na presença do número 0,25, o estudante escolhe o número 0,25 (relação C2-C2);
2. simétricas: na presença da figura com metade do círculo pintado de preto, o estudante escolhe a fração ½ (relação A1-B1); na presença da figura com ¼ do círculo pintado de preto, o estudante escolhe a fração ¼ (relação A2-B2); na presença do número 0,5, o estudante escolhe a figura com metade do círculo pintado de preto (relação C1-A1) e na presença do número 0,25, o estudante escolhe a figura com ¼ do círculo pintado de preto (relação C2-A2);

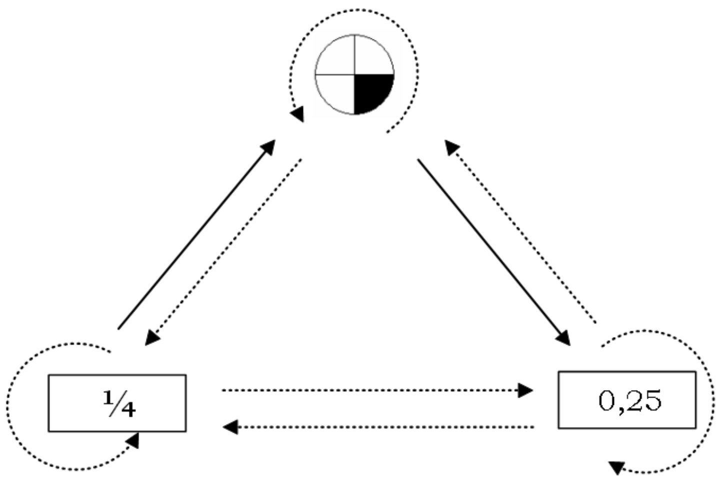
---

[7] As relações entre dois estímulos são representadas pelos seus códigos alfanuméricos, sendo que o primeiro código representa o estímulo-modelo e o segundo o estímulo de comparação.

3.transitivas: na presença da fração ½, o estudante escolhe o número 0,5 (relação B1-C1); na presença da fração ¼, o estudante escolhe o número 0,25 (relação B2-C2); na presença do número 0,5, o estudante escolhe a fração ½ (relação C1-B1) e na presença do número 0,25, o estudante escolhe a fração ¼ (relação C2-B2).

As relações ensinadas e testadas para demonstrar a formação de classes de equivalência podem ser representadas por meio de um diagrama como o da Figura 6, no qual está um exemplo relativo ao número racional 0,25. Nessa figura, as relações representadas pelas setas contínuas são as ensinadas e as relações representadas pelas setas pontilhadas são as relações emergentes e, quando isso ocorre, diz-se que os três estímulos formam uma classe de equivalência ou uma classe de estímulos equivalentes.

Figura 6 – Diagrama esquemático das relações ensinadas e emergentes referente ao número racional 0,25.



É importante destacar mais uma vez que, para que seja possível a formação de uma classe de equivalência de três estímulos, é preciso que sejam ensinadas pelo menos duas discriminações condicionais entre eles, sendo que sempre deve haver um estímulo comum (nódulo) a essas relações. Nesse caso, tem-se que o total de relações é nove, das quais duas foram ensinadas e sete emergiram, ou seja, a criança é capaz de responder de acordo com essas relações sem ensino direto.

Para ampliar o número de elementos de uma classe, basta que se relacione um dos elementos da classe a um novo estímulo (SPRADLIN; SAUNDERS; SAUNDERS, 1992). Por exemplo, se na situação anterior for ensinada a relação entre 50% e a fração ½, o número de relações aumenta, conforme pode ser verificado no Quadro 2. Observa-se nesse quadro que, com o aumento do número de estímulos da classe, aumenta também a diferença entre o número de relações que devem ser ensinadas e número de relações que são emergentes, o que demonstra uma "economia" no ensino de relações arbitrárias entre estímulos.

Quadro 2 – Número de relações totais, ensinadas e emergentes de classes de equivalência de diferentes números de estímulos.

Estímulos	***Total de relações***	***Relações ensinadas***	***Relações emergentes***
3	9	2	7
4	16	3	13
5	25	4	21
n	n^2	$n - 1$	$n^2 - n + 1$

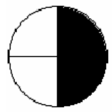
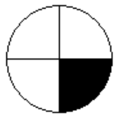
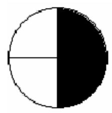
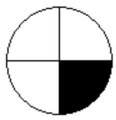
Conforme já foi especificado anteriormente, para se formar uma classe de estímulos equivalentes, as relações entre os estímulos devem ser cuidadosamente organizadas. O ensino pode ser feito pelos procedimentos de escolha de acordo com o modelo, cujas relações podem ser arranjadas por meio de um arranjo de ensino denominado CaN (comparison as node). Nesse arranjo de ensino, os estímulos comuns são os estímulos de comparação. Por exemplo, no ensino dos números racionais 0,5 e 0,25, estariam sendo formadas duas classes com três estímulos cada: figura, fração e número decimal. Se o arranjo de ensino for do tipo CaN, os estímulos de comparação devem ser os nódulos, ou seja, os estímulos comuns. Assim, as relações ensinadas poderiam ser fração → figura e número decimal → figura, conforme Figura 7.

Figura 7 – Exemplo de relações entre estímulos em um arranjo de ensino do tipo CaN

	Relações entre fração e figura	***Relações número decimal e figura***
Estímulo modelo	½	0,5
Estímulos de comparação		
Estímulo modelo	¼	0,25
Estímulos de comparação		

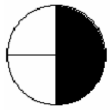
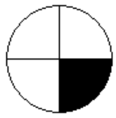
Outra forma de arranjar o ensino destas relações poderia ser do tipo SaN (*sample as node*), de modo que os estímulos-modelo seriam os estímulos comuns às relações que são ensinadas. Assim, as relações de ensino dos números racionais 0,5 e 0,25, se arranjadas no modo SaN, poderiam ser *fração* → *figura* e *fração* → *número decimal*, conforme Figura 8.

Figura 8 – Exemplo de relações entre estímulos em um arranjo de ensino do tipo SaN

	Relações entre fração e figura	***Relações entre fração e número decimal***
Estímulo modelo	½	½
Estímulos de comparação	 	0,5 0,25
Estímulo modelo	¼	¼
Estímulos de comparação	 	0,5 0,25

O ensino das relações entre os estímulos pode se dar por meio de um arranjo do tipo LiN (linear). De acordo com esse arranjo, os nódulos são os estímulos centrais, de modo que os estímulos comuns alternam-se na posição de estímulos modelo e comparação. Assim, para a formação das classes de equivalência dos números racionais 0,5 e 0,25, as relações estariam arranjadas de forma linear se fossem *fração → figura* e *figura →número decimal*, conforme especificado na Figura 9.

Figura 9 – Exemplo de relações entre estímulos em um arranjo de ensino do tipo LiN

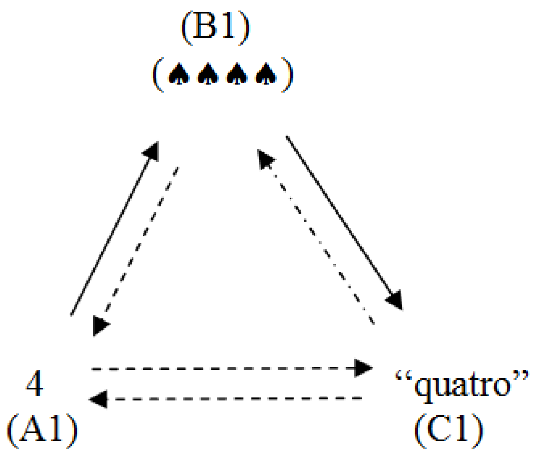
	Relações entre fração e figura	***Relações entre figura e número decimal***
Estímulo modelo	½	
Estímulos de comparação		0,5 0,25
Estímulo modelo	¼	
Estímulos de comparação		0,5 0,25

É importante salientar que as possibilidades de arranjos das relações entre os estímulos não se esgotam nessas três possibilidades. Em casos nos quais o número de estímulos da classe é maior do que três, pode-se ter arranjos de ensino do tipo misto, nos quais parte das relações pode ser de um tipo de arranjo e parte de outro tipo.

1.3.3.1 Equivalência de estímulos e significado

O modelo da Equivalência de Estímulos pode também ser útil na compreensão do que vem a ser significado das palavras, conceitos e expressões matemáticas. Quando se tem uma classe de estímulos equivalentes, os estímulos que constituem essa classe têm o mesmo significado ou ainda pode-se considerar que um estímulo é significado do outro (SIDMAN, 1986), possuindo a propriedade de substituir uns aos outros dependendo do contexto. Por exemplo, considere a classe de estímulos equivalentes do número quatro, conforme representado na Figura 10.

Figura 10 – Diagrama esquemático que representa a formação da classe de equivalência correspondente ao número 4.



Em uma classe como a representada na Figura 10, se todas as relações indicadas forem verificadas, os estímulos que a formam são equivalentes, o que significa que são três formas diferentes de um mesmo objeto ou conceito matemático que é definido por meio desses estímulos e dessas relações. Além disso, as “classes de estímulos formadas por uma rede de relações de equivalência estabelecem a base para o significado referencial”[8] (SIDMAN; TAILBY, 1982, p. 20, tradução nossa).

Assim, pode-se considerar que os estímulos de uma classe de equivalência tornam-se significados um do outro. No caso que foi ilustrado anteriormente, o significado da palavra impressa “quatro” são os demais estímulos que fazem parte da classe equivalente (a figura e a palavra impressa). Por conseguinte, pode-se encontrar o significado de uma palavra em seus sinônimos, considerando-as como pertencentes a uma mesma classe de estímulos equivalentes. No caso de expressões matemáticas, seus significados serão todos os demais estímulos – outras expressões, palavras faladas, impressas, etc. – que formam uma classe de equivalência.

Essa maneira de entender significado é, de acordo com Sidman (1994), uma das variáveis que não foram identificadas por Skinner (1957) e que seriam relevantes para a explicação do comportamento verbal. Ao discutir sobre o comportamento verbal, Skinner (1957) critica as concepções tradicionais de linguagem, nas quais termos como “significado” e “ideia” são entendidos como algo que é expresso e comunicado por uma expressão vocal.

8 “stimulus classes formed by a network of equivalence relations establish a basis for referential meaning”

De acordo com essas concepções, as expressões vocais são emitidas pelo falante a partir das ideias e imagens mentais do mesmo e, quando entram em contato com o ouvinte, ativam nele as mesmas ideias e imagens mentais do falante. Como alternativa de interpretação, Skinner (1957) aponta a análise funcional do comportamento verbal que vai de encontro a tais especulações que recorrem a causas fictícias para explicá-lo, que se constituem como "construtos hipotéticos" derivados de comportamentos e utilizados para explicá-los (NELSON, 2001). Para Skinner (1957), uma análise funcional do comportamento verbal pode esclarecer a questão do significado das palavras, quando se analisam o "uso" das mesmas. De acordo com ele, Skinner (1957, p. 29), "o significado não é uma propriedade do comportamento enquanto tal, mas das condições sob as quais o comportamento ocorre". Nesse sentido, os significados "devem ser buscados entre as variáveis independentes numa explicação funcional e não como propriedades da variável dependente". Assim, quando alguém discrimina o significado de uma determinada resposta está, na verdade, inferindo algumas das variáveis das quais a resposta é função (SKINNER, 1957). No que se refere às ideias e expressões matemáticas, pode-se considerar que seus significados estão entre as variáveis que as determinam.

Enquanto que, para Skinner (1957), o significado é visto como aquilo que explica o comportamento verbal, para Sidman (1994), o significado não explica o comportamento. Em uma comparação dos conceitos destes autores feita por Nelson (2001), pode-se perceber que as propostas de Skinner (1957) e Sidman (1994) têm em comum o fato de serem contrárias à ideia de significado como algo que causa o comportamento. Para Skinner (1957), o significado é considerado como sendo determinado pelas variáveis controladoras de resposta, ou seja, foca as variáveis que controlam o comportamento, inclusive as variáveis históricas. Assim, o significado está na história de exposição às contingências, na qual situações similares tiveram o mesmo papel, enquanto que Sidman interessa-se por investigar as relações que são estabelecidas na produção de repertórios verbais e as relações – ou correspondências – que se estabelecem entre as coisas do mundo e os estímulos verbais.

De acordo com Nelson (2001), uma diferença básica entre as propostas de Skinner (1957) e de Sidman (1994) pode ser facilmente entendida quando se analisam os significados das palavras no dicionário. Para Skinner (1957), ao procurar uma palavra no dicionário, a pessoa já deve ir até ele provida de significado, pois o dicionário não fornece significados para as palavras, mas sim palavras que elas possuem significados comuns. Já Sidman (1994) considera que o dicionário pode fornecer o significado para as palavras desde que a palavra que está sendo procurada no dicionário e a palavra dada como sinônimo façam parte de uma classe de estímulos equivalentes.

1.3.3.2 Equivalência de estímulos e o ensino de matemática

Atualmente, o tema “formação de classes de equivalência” tem sido alvo de grande interesse dos analistas do comportamento, os quais vêm descobrindo contribuições significativas para o ensino de leitura, escrita e matemática (HAYDU et al., 2006; ROSSIT; FERREIRA, 2003). No que se refere ao ensino de matemática, alguns estudos referem-se ao ensino de número, do processo de resolução de problemas aritméticos, (CARMO, 2000; CAPOVILLA et al., 1997; HAYDU et al., 2001; IÉGAS, 2003) ao ensino de relações entre fração e decimal de números racionais (LYNCH; CUVO, 1995), ao ensino de transformações de funções quadráticas, exponenciais e trigonométricas (NINNES et al., 2009, 2006, 2005)[9] e o ensino da técnica de inferência estatística teste de hipótese (FIENUP; CRITCHFIELD; COVEY, 2010). Dos trabalhos encontrados na literatura, optou-se por detalhar alguns aspectos dos trabalhos seguintes, uma vez que, como esta investigação trata do ensino de repertórios matemáticos mais complexos do que os aritméticos, os procedimentos e materiais utilizados nesses trabalhos são mais relevantes aos propósitos dessa investigação.

No estudo desenvolvido por Lynch e Cuvo (1995), participaram sete alunos de quinta e sexta série (11 a 13 anos de idade) que foram identificados por seus professores como tendo dificuldades em relacionar números racionais na forma fracionária com a forma decimal. Para isso, por meio de um procedimento de escolha de acordo com o modelo sucessivo, foram estabelecidas discriminações condicionais, por meio de um *software*, entre números racionais na forma de fração e figuras que representavam a fração (e.g., o número ½ com uma figura de uma barra dividida em duas partes, sendo uma parte pintada e a outra em branco) e números racionais na forma de fração e sua número decimal. Os pesquisadores tomaram como questões norteadoras da investigação, se o desempenho dos participantes em relacionar números racionais na forma de fração com suas respectivas representações decimais melhoraria após o estabelecimento de discriminações condicionais entre números racionais na forma de fração e uma figura equivalente e entre figura e número decimal; se

[9] Nesses estudos, os autores utilizam a Teoria dos Quadros Relacionais (Relational Frame Theory - RFT) como embasamento teórico. Essa teoria pode ser considerada como uma teoria que engloba o modelo da equivalência de estímulos. Para Ninnes et al. (2005), na RFT, responder de acordo com relações entre estímulos inclui não apenas a relação de igualdade que a equivalência de estímulos pressupõe, mas também outras propriedades como implicação mútua, implicação combinatória e transformação de função.

seria verificada a formação das classes de estímulos equivalentes e se os participantes seriam capazes de relacionar corretamente novos números racionais, diferentes dos que foram utilizados nas classes de equivalência, na forma de fração com suas representações decimais e vice-versa.

O procedimento delineado por Lynch e Cuvo (1995) iniciava com um pré-teste, no qual todas as relações que seriam ensinadas por meio de um reforço diferencial e as emergentes foram verificadas. Grande parte dos participantes apresentou um desempenho abaixo de 50% em todas as relações testadas. O pré-teste também incluía um pré-teste escrito, no qual o participante deveria escrever a número decimal de números racionais a partir da fração. Após o ensino de discriminações condicionais e os testes de simetria, transitividade e de equivalência (teste que combina as propriedades de simetria e de transitividade), era testada a habilidade do participante em escrever a número decimal de números racionais familiares (aqueles cujas relações entre as formas que os representam já haviam sido estabelecidas anteriormente) a partir de sua fração. Este teste foi denominado pelos autores como sendo generalização de estímulos. Em seguida, foram estabelecidas discriminações condicionais entre outras formas fracionárias dos números racionais das classes já verificadas, foi testada, a emergência das relações de simetria e transitividade e, em seguida, foi testada a capacidade de o participante estabelecer relações entre fração e decimal de novos números racionais.

Apesar de ter sido observada a formação de classes de estímulos equivalentes, três participantes tiveram um desempenho inferior a 4% de acerto no teste de generalização escrito e quatro obtiveram um desempenho de 50% a 63%. A esse respeito, os autores argumentam que esse desempenho pode ser devido a várias razões, como a baixa probabilidade de acerto ao acaso e a não obtenção de *feedback* imediato em tarefas escritas. Para eles, os resultados desse teste sugerem a necessidade de procedimentos de ensino adicionais que facilitariam a generalização de estímulos. Em relação aos testes de generalização realizados no *software*, apenas três dos quatro participantes obtiveram um desempenho próximo do que os autores consideravam adequado (o critério de acerto era de 96,5%). Lynch e Cuvo (1995) consideram que um desempenho melhor dos participantes em responder corretamente a relações entre estímulos novos, apresentados no teste de generalização, pode ocorrer se os participantes forem ensinados a desenvolver regras gerais durante o ensino e os testes. Além disso, os autores sugerem que os testes de generalização sejam aplicados mais de uma vez.

Em relação aos conteúdos de Álgebra, Ninnes et al. (2005) realizaram um estudo envolvendo 11 participantes com idades entre 15 e 37 anos, incluindo estudantes universitários, funcionários de um hospital ou membros de suas famílias, que não apresentavam familiaridade com a identificação de expressões de funções com gráficos. O objetivo da investigação era fazer com que os participantes estabelecessem relações entre diferentes expressões algébricas de funções e entre essas expressões e seus gráficos. Para esses autores, o procedimento de escolha de acordo com o modelo não é eficiente para o ensino de relações verbais complexas em contexto acadêmico. Por isso, utilizam um procedimento interativo-computacional com o MTS e incluíram instruções prévias. Antes de serem submetidos ao procedimento computacional, foi apresentado aos participantes expressões que definem funções e gráficos. Os participantes foram instruídos que, por exemplo, a expressão $y = \sqrt{-x-2}$ pode ser transformada na expressão fatorada equivalente $y = \sqrt{-(x+2)}$, uma vez que, para os autores, é menos complicado identificar o gráfico da expressão fatorada do que da primeira.

Além desse tipo de instrução, os participantes foram informados de que “o sinal negativo no interior do radical de uma expressão faz com que seu gráfico seja refletido em relação ao eixo y”[10] (NINNES et al. 2005, p. 9, tradução nossa) e que “uma constante positiva dentro do radical ou dos parênteses move a função na direção oposta ao longo do eixo x”[11] (NINNES et al. 2005, p. 9, tradução nossa). Todas essas instruções foram acompanhadas por uma apresentação de exemplos.

Feito isso, os participantes foram submetidos ao procedimento em um *software* programado especificamente para a investigação. Esse procedimento iniciava com a apresentação, na tela do computador, das mesmas instruções apresentadas anteriormente que eram lidas oralmente pelo participante e gravadas. Em seguida, eram estabelecidas discriminações condicionais entre expressões de funções e expressões fatoradas equivalentes (e.g. $y = \sqrt{-x-2}$ e $y = \sqrt{-(x+2)}$) e entre expressões fatoradas e gráficos, de modo a formar quatro classes de três estímulos cada. Após a verificação das relações emergentes, os participantes eram submetidos a um teste de generalização[12], que avaliava a capacidade do participante em relacionar corretamente 40 novas expressões que definem funções a seus

[10] Negative sign inside the radical is reflected over in the y-axis.
[11] a positive constant inside the radical or the parentheses moves the function in the opposite direction along the x-axis.
[12] No artigo, os autores referem-se a esse teste como “assessment of novel relations”.

respectivos gráficos. Foram utilizados, nesse teste, expressões e gráficos de 40 funções diferentes daquelas cujas classes de equivalência foram verificadas na etapa de ensino.

Dez participantes completaram o procedimento e foi verificada a formação das classes de estímulos equivalentes para esses participantes. Em relação ao teste de generalização, o índice de acerto dos participantes variou de 67,5% a 100% das relações do teste. Para os autores, seis participantes tiveram um desempenho perfeito ou quase perfeito (apresentaram acerto igual ou superior a 92,5% das relações do teste), dois apresentaram índice próximo de 85% de acerto, um acertou 77,5% das relações e outro acertou 67,5%. Os autores afirmam que o alto índice de acerto nesse teste para a maioria dos participantes foi devido ao fato de que eles não estavam simplesmente relacionando fórmulas específicas a gráficos específicos, mas sim identificavam as relações entre esses tipos de estímulos. Eles concluíram que, aprender a relacionar expressões de funções específicas com expressões fatoradas equivalentes e relacioná-las a seus gráficos possibilita o estabelecimento de relações entre novas expressões de funções e gráficos, demonstrando a habilidade generalizada de relacionar expressões de funções mais complexas a seus gráficos.

Em um outro estudo, Ninnes et al. (2006) aplicaram o mesmo procedimento do estudo anterior e a 10 estudantes universitários que não eram capazes de identificar corretamente gráficos de funções a partir de suas expressões, com o intuito de analisar a transformação de função de estímulos. As etapas do procedimento eram as mesmas do estudo anterior. Dos oito participantes que conseguiram completar o estudo, sete deles demonstraram uma melhora substancial no desempenho do teste de generalização das 40 novas funções. Após esse teste, os participantes foram submetidos a uma nova série de 10 tentativas entre gráficos de funções e expressões. Para cada uma dessas tentativas, dentre as seis expressões de funções que constituíam os estímulos de comparação, duas delas estavam corretas para cada um dos gráficos apresentados, sendo que uma era uma expressão fatorada e a outra uma expressão padrão. Os resultados desse teste mostram que os participantes tendem a escolher as expressões de funções na sua forma fatorada, em detrimento à forma padrão, uma vez que, para os autores, as expressões na forma fatorada fornecem mais informações sobre as características de seus gráficos. Em seguida, os participantes eram informados verbalmente por um dos pesquisadores sobre a importância de ser capaz de reconhecer a expressão padrão de uma função.

Dez novas tentativas similares às anteriores foram apresentadas para os participantes. Nessa etapa de teste, observou-se uma tendência dos participantes em selecionar as expressões padrões equivalentes dos gráficos apresentados. Em seguida, participantes foram informados de que, nas 10 tentativas seguintes, selecionar a expressão fatorada equivalente ao gráfico faria com que os mesmos fossem recompensados em dobro em cada acerto13. Foi observada, nessa etapa, uma preferência na seleção de expressões fatoradas de funções, mostrando que as escolhas estavam de acordo com o estímulo contextual em vigor. Os autores concluem que a preferência por escolher a forma fatorada ou padrão de uma expressão que representa uma função alterna-se de acordo com instruções vigentes, independentemente de contingências prévias. Além disso, as relações estabelecidas entre os estímulos no procedimento de ensino parecem ser adequadas para facilitar o estabelecimento de novas relações matemáticas mais complexas.

Mais recentemente, Ninnes et al. (2009) realizaram um estudo que difere dos anteriores por incorporar conceitos matemáticos mais complexos que implicam no estabelecimento de relações "o mesmo que" e "oposto a". Foram realizados dois experimentos envolvendo relações entre diferentes representações de funções trigonométricas. No primeiro experimento, o foco foi o ensino e a verificação de relações emergentes de funções trigonométricas em termos da amplitude e frequência de seus gráficos, conforme alteração de parâmetros das expressões algébricas que definem as funções, seguidos de testes de generalização. No segundo experimento, o foco residiu nas relações de identidade e nas relações inversas. Por exemplo, tem-se que a função $y = sen\ x$ é inversa a função $y = cosec\ x$, e que $y = cosec\ x$ é inversa da função $y = \frac{1}{cosec\ x}$. Entretanto, $y = \frac{1}{cosec\ x}$ é idêntica a $y = sen\ x$. Os resultados mostraram que os participantes apresentaram melhora significativa na identificação das relações de identidade e nas relações inversas não apenas das funções ensinadas, mas também as relações referentes a outras funções (generalização).

O modelo da equivalência de estímulos tem se mostrado útil também no estudo do comportamento simbólico. Apesar de não haver uma definição consensual por parte dos pesquisadores (BARROS et al., 2005) do que seja comportamento simbólico, pode-se considerar que esse comportamento se caracteriza como sendo controlado por relações arbitrárias que são estabelecidas entre os diferentes estímulos – objetos e representações/símbolos - de modo que símbolos e referentes sejam equivalentes entre si, exercendo a mesma função no controle dos comportamentos. Sendo assim, podem ser

[13] No estudo, havia 70 tentativas de teste de generalização. Os participantes recebiam $8,00 por sua participação, com 10 centavos por cada resposta correta nas primeiras 60 tentativas e 20 centavos para cada resposta correta nas 10 últimas tentativas.

utilizados os mesmos procedimentos para estudar a formação de classes equivalentes e o comportamento simbólico. (BARROS et al., 2005).

1.4 Caracterização da Pesquisa

Esta investigação procura olhar para o ensino e aprendizagem de função do primeiro grau sob uma perspectiva analítico-comportamental. Ensino está sendo considerado como a organização de contingências que propiciam a aprendizagem, entendida como a alteração do repertório comportamental do sujeito. Por se tratar de um conteúdo que se insere nos domínios da Álgebra e, como foi exposto nas considerações iniciais desse trabalho que não há um consenso sobre o que é essa área, cabe aqui um posicionamento sobre como ela está sendo considerada. Álgebra, nessa investigação, é o domínio matemático que lida com relações entre grandezas e regularidades numéricas que se constituem enquanto estruturas em um nível simbólico. Para que as relações entre quantidades e as regularidades numéricas possam ser constituídas enquanto estruturas, faz-se uso de uma linguagem algébrica, aqui entendida como sendo composta pela linguagem natural e por um sistema simbólico.

É importante salientar que Álgebra não está sendo considerada como uma linguagem, nem que seus objetos sejam apenas os elementos da linguagem algébrica. Está-se considerando que os objetos algébricos são os elementos da linguagem algébrica <u>e</u> as relações estabelecidas entre eles. Todo objeto algébrico é constituído por um conjuntos de elementos da linguagem algébrica cujas relações entre eles determina uma classe de equivalência e, ao mesmo tempo, esses elementos da linguagem algébrica relacionam-se a outros elementos por uma relação diferente daquela que determina a classe de equivalência.

Por exemplo, um gráfico da função do primeiro grau $y=x$ é um elemento da linguagem algébrica que constitui o que está sendo considerado como objeto função do primeiro grau $y=x$, mas, por si só, não é esse objeto. O objeto função do primeiro grau $y=x$ é constituído por todos os elementos da linguagem algébrica que fazem parte da classe de estímulos equivalentes, pelas relações estabelecidas entre eles e pelas relações estabelecidas entre esses elementos e outros que formam classes de estímulos equivalentes diferentes.

Aprender função é ser capaz de discriminar entre si os diferentes elementos da linguagem algébrica que a constituem, bem como discriminar elementos da linguagem algébrica que constituem diferentes funções. É considerar, por exemplo, como funcionalmente equivalentes um gráfico da função $y=x+1$ e a expressão da função $y=x+1$, utilizando um ou outro elemento da linguagem algébrica de acordo com a situação. Nesse sentido, entende-se que as relações que são estabelecidas entre os diferentes elementos da linguagem algébrica – língua natural, representações combinadas e escritos simbólicos – possibilitam ao estudante a constituição dos objetos matemáticos. Ninnes et al., (2006), argumentam que aprender a relacionar o gráfico de uma função específica a sua expressão algébrica envolve mais do que relacionar dois estímulos específicos. Tais elementos da linguagem algébrica são compostos de múltiplos estímulos que se relacionam uns aos outros de modos específicos, de modo que relacionar gráficos de função a suas expressões envolve relacionar um conjunto de relações a outro conjunto de relações.

As relações entre os diferentes elementos da linguagem algébrica podem ser estabelecidas via um procedimento que estabelece discriminações condicionais com um elemento em comum, o que possibilita a formação de classes de estímulos equivalentes. A utilização desse modelo para o ensino de conteúdos de Álgebra tem se mostrado efetiva nos trabalhos de Ninnes et al. (2009, 2006, 2005), uma vez que evidenciam que, após o ensino de discriminações condicionais entre expressões que definem funções (escritos simbólicos) e gráficos (representações combinadas), novas relações entre expressões e gráficos dessas funções foram estabelecidas pelos participantes sem ensino direto, bem como relações entre expressões e gráficos de outras funções que não foram anteriormente ensinadas emergiram.

Entretanto, os participantes dos trabalhos de Ninnes et al. (2009, 2006, 2005) eram adultos que, apesar de não apresentarem familiaridade com o conteúdo a ser ensinado, já haviam sido ensinados sobre o assunto quando frequentaram os bancos escolares. No trabalho de Lynch e Cuvo (1995), os participantes são aqueles que foram identificados pelo professor com dificuldade no conteúdo, ou seja, são participantes que já haviam frequentado aulas de matemática sobre o conteúdo e, mesmo assim, apresentavam dificuldades em relacionar números racionais na forma fracionária com a forma decimal. Assim, não há resultados na literatura sobre o ensino de conteúdos algébricos na Educação Básica por meio do modelo da equivalência de estímulos a estudantes que estão aprendendo esse conteúdo pela primeira vez. Por esse motivo, nessa investigação, procurou-se utilizar participantes com essa característica, o que fez com que fossem considerados como participantes estudantes do Ensino Fundamental, até mesmo porque, de acordo com as orientações curriculares, no final do Ensino Fundamental o conteúdo de função pode ser trabalhado de uma forma mais informal.

Em relação ao conteúdo, optou-se por trabalhar com o conceito de função porque entende-se que, por ser um tipo de relação, esse seja um dos principais conceitos da definição de álgebra que está sendo adotada nesse trabalho. Além disso, para esse conceito é possível a utilização de diferentes elementos da linguagem algébrica e o estabelecimento de relações de equivalência entre eles. Foram consideradas apenas as relações entre os elementos da linguagem algébrica que constituem função do primeiro grau da forma $y=ax+b$ com $a=1$, de modo que o coeficiente angular não variasse, uma vez que existe a hipótese de que, uma vez verificada a eficiência do modelo de ensino para esse caso, quando variar-se também o parâmetro a, o modelo pode ser igualmente eficiente.

Diante dessas considerações, realizou-se uma pesquisa experimental que tem como pressuposto teórico o modelo da equivalência de estímulos e a formação de classes de estímulos equivalentes entre elementos simbólicos relacionados a funções do primeiro grau, de modo a verificar se o modelo da equivalência de estímulos é eficaz e eficiente para o ensino e aprendizagem desse conteúdo a estudantes do Ensino Fundamental.

No que se refere especificamente a funções, está sendo considerado nessa investigação que, um estudante que compreende o conteúdo de funções, emite pelo menos os seguintes comportamentos:

a) identificar as coordenadas de pontos esboçados no plano cartesiano;
b) localizar pontos no plano cartesiano a partir de suas coordenadas;
c) relacionar o gráfico de uma função a sua expressão algébrica e a tabelas que contenham alguns de seus pontos;
d) relacionar uma tabela que contenha alguns dos pontos da função à sua expressão algébrica;
e) relacionar gráficos, tabelas e expressões algébricas a situações descritas em língua natural.

Baseando-se nesses comportamentos, são objetivos da pesquisa:

a) possibilitar aos participantes da pesquisa a formação de classes de estímulos equivalentes entre gráficos, tabelas e expressões algébricas de funções afins;
b) analisar o processo de formação das classes de estímulos equivalentes entre gráficos, tabelas e expressões algébricas de funções do primeiro grau da forma $y=ax+b$, com $a=1$;
c) verificar se a formação de classes de estímulos equivalentes entre gráfico, tabela e expressão de funções afins possibilita a generalização de estímulos, ou seja, se faz com que o participante seja capaz de identificar

gráficos de outras funções afins que não fizeram parte das classes anteriores;

Para atingir esses objetivos, inicialmente um procedimento de ensino foi delineado e aplicado, cujos resultados e discussão encontram-se no capítulo seguinte.

2 O ESTUDO I

O ensino e a aprendizagem de função do primeiro grau, cujos pressupostos teóricos foram expostos no capítulo anterior, foram analisados a partir de um procedimento de ensino elaborado e aplicado a estudantes do Ensino Fundamental, com o objetivo de verificar se, após o ensino de discriminações condicionais entre elementos da linguagem algébrica relacionados a função do primeiro grau da forma $y=ax+1$, com a=1, ocorre a formação de classes de estímulos equivalentes e a generalização de estímulos. O procedimento de ensino, bem como os procedimentos metodológicos deste estudo, seus resultados e uma discussão dos mesmos serão apresentados a seguir.

2.1 PARTICIPANTES

Participaram do Estudo I dois estudantes do sexo feminino, com 10 anos de idade, matriculadas no 5º ano do Ensino Fundamental em uma escola da rede privada de uma cidade do interior do Estado de Mato Grosso do Sul e que não apresentavam nada que sugerisse atraso no desenvolvimento intelectual. Optou-se por escolher estudantes dessa idade pelo fato do conteúdo matemático a ser trabalhado pelo procedimento de ensino não ser conhecido por elas e, pelo que mostra a literatura, os estudantes são capazes de aprender alguns elementos da notação algébrica durante os primeiros anos da escolarização básica, bem como conteúdos a eles relacionados.

O convite para participar do estudo foi feito aos estudantes e a seus pais que concordaram com os termos da pesquisa e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B).

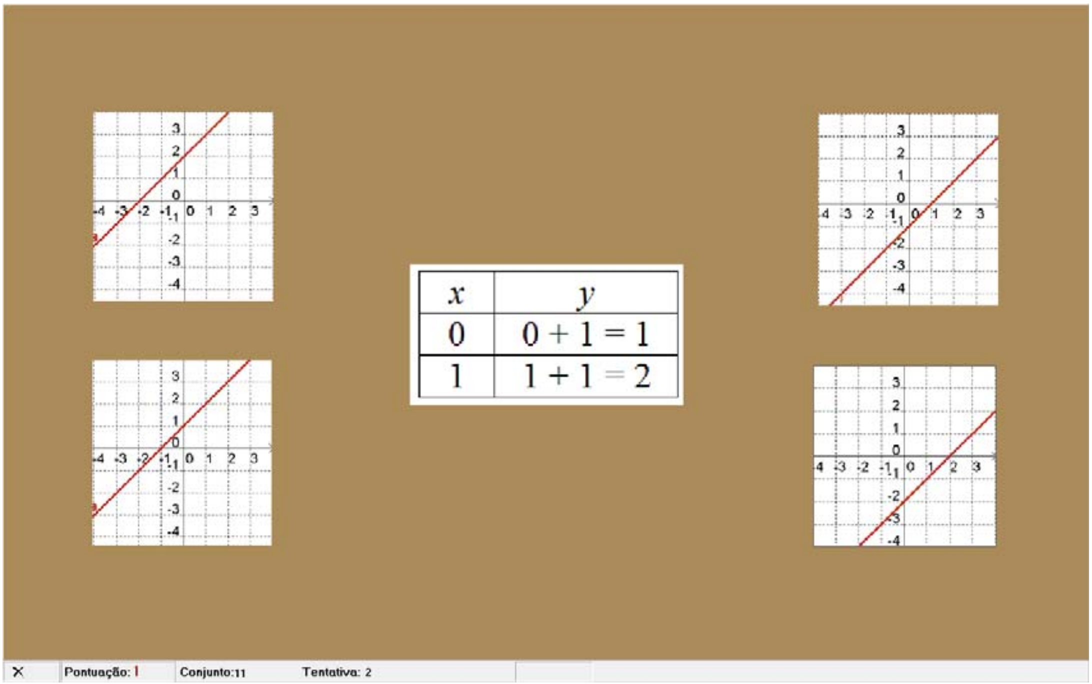
2.2 MATERIAIS E LOCAL

A programação das relações entre os diferentes elementos da linguagem algébrica das classes de equivalência, bem como a coleta de dados, foram realizadas utilizando-se de um *notebook* Pentium Dual Core, com monitor de 14 polegadas e o *Software Equivalência* (SANTOS, 2001), programado em Delphi para estudos sobre formação de classes de estímulos equivalentes.

O *software Equivalência* permite com que se elaborem tarefas de escolha de acordo com o modelo. De modo geral, em cada uma das tentativas, um estímulo-modelo é apresentado no centro da tela e, ao mesmo tempo, são apresentados três ou quatro estímulos de comparação nos cantos da tela, conforme Figura 11. A tarefa do participante era clicar sobre o estímulo de comparação correto para cada um dos estímulos-modelo apresentados. Cada resposta pode ser ou não ser seguida de um *feedback* que, geralmente, resume-se a uma mensagem que aparece na tela do computador informando ao participante se a resposta emitida está correta ou incorreta. Após a emissão da resposta de clicar com o *mouse* sobre a figura ou estímulo de comparação que o participante considera ser o correto, uma nova tentativa é apresentada, ou seja, um novo estímulo-modelo é apresentado no centro da tela simultaneamente a outros quatro estímulos de comparação apresentados nos cantos. Em cada tentativa, além de registrar as respostas dos participantes, o *software* registra ainda o tempo de reação do participante, ou seja, o tempo entre a apresentação dos estímulos na tela e a emissão da resposta.

A coleta de dados foi realizada nas dependências do Campus de Aquidauana da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, em uma sala de acesso restrito, de modo que as participantes permanecessem isoladas do ambiente externo durante a coleta de dados.

Figura 11 – Tela do *software Equivalência* que representa uma tentativa.



2.3 PROCEDIMENTO

O Estudo I foi desenvolvido em quatro etapas, em todas elas utilizou-se do *software Equivalência*: Pré-teste, Ensino de discriminações condicionais, verificação das relações emergentes e da formação das classes de estímulos equivalentes e Generalização. O objetivo do Pré-teste foi verificar quais relações que se queriam que as participantes estabelecessem entre os diferentes elementos da linguagem algébrica – relações alvo – já eram de conhecimento das mesmas. Nas etapas de Ensino, várias discriminações condicionais entre esses elementos foram estabelecidas por meio de um reforço diferencial das respostas das participantes. Na etapa de testes para verificação da formação de classes de equivalência, as relações ensinadas e as emergentes foram verificadas.

Na etapa de Generalização, elementos da linguagem algébrica diferentes dos utilizados nas etapas de ensino foram apresentados às participantes, com o intuito de se verificar se, após a formação de classes de estímulos equivalentes entre elementos da linguagem algébrica referentes a algumas funções do primeiro grau, as participantes eram capazes de estabelecer relações corretas entre elementos da linguagem algébrica de funções diferentes daquelas que foram ensinadas.

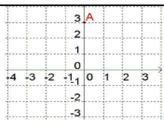
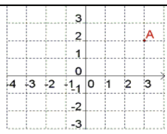
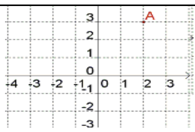
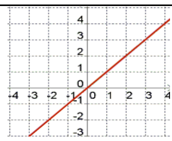
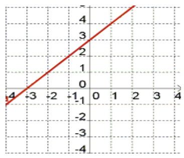
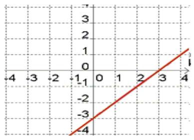
2.3.1 Pré-Teste

Foram avaliadas, nessa etapa, as discriminações condicionais entre os diferentes elementos da linguagem algébrica que são apresentados no Quadro 3. Em cada coluna desse quadro são apresentados os diferentes tipos de estímulos que se queria verificar se os participantes formavam classes de estímulos equivalentes com eles e, em cada uma das linhas, são apresentadas as classes de acordo com os diferentes estímulos. Assim, GA1 é o estímulo "*y* é igual a *x*", ou seja é o estímulo língua natural da classe número 1, da mesma forma que M2 é o estímulo escrito simbólico da segunda classe ($y = x + 3$) desse conjunto de estímulos.

No Pré-teste, tem-se três conjuntos de estímulos e três classes para cada um desses conjuntos. No primeiro conjunto de estímulos, língua natural (GA), representações combinadas (GB) e escrito simbólicos (GC), são os três tipos de elementos da linguagem algébrica (estímulos) que poderiam formar as seguintes classes de equivalência: GA1, GB1 e GC1; GA2, GB2 e GC2; GA3, GB3 e GC3.

No segundo conjunto de estímulos, a figura de um ponto no plano cartesiano (G), a representação combinada (H) e a representação de um ponto por meio de suas coordenadas (I) formam as seguintes classes de equivalência: G1, H1 e I1; G2, H2 e I2; G3, H3 e I3. Da mesma forma, os escritos simbólicos (M), as tabelas (N) e os gráficos (O) do terceiro conjunto de estímulos formam as seguintes classes de equivalência: M1, N1 e O1; M2, N2 e O2; M3, N3 e O3.

Quadro 3 – Elementos da linguagem algébrica utilizados no Pré-teste

Classe	*Estímulos*		
	GA	*GB*	*GC*
1	y é igual a x	x | y 0 | 0 1 | 1	$y = x$
2	y é igual a x menos 3	x | y 0 | $0 - 3 = -3$ 1 | $1 - 3 = -2$	$y = x - 3$
3	y é igual a x mais 4	x | y 0 | $0 + 4 = 4$ 1 | $1 + 4 = 5$	$y = x + 4$
	G	*H*	*I*
1		$x = 0$ e $y = 3$	A (0,3)
2		$x = 3$ e $y = 2$	A (3,2)
3		$x = 2$ e $y = 3$	A (2,3)
	M	*N*	*O*
1	$y = x$	x | y 0 | 0 1 | 1	
2	$y = x + 3$	x | y 0 | $0 + 3 = 3$ 1 | $1 + 3 = 4$	
3	$y = x - 3$	x | y 0 | $0 - 3 = -3$ 1 | $1 - 3 = -2$	

As discriminações condicionais foram avaliadas por meio de um procedimento de escolha de acordo com o modelo, de modo que todos os estímulos apareceram em pelo menos um dos arranjos de tentativas e que cada tipo de relação foi apresentado uma única vez. No centro da tela, aparecia o estímulo-modelo e nos cantos da tela, os três estímulos de comparação. Era dito a cada uma das participantes que, nessa etapa, iria aparecer uma figura no centro da tela do computador e, ao mesmo tempo, outras três figuras nos cantos. A tarefa delas era escolher, clicando com o *mouse* sobre uma das figuras dos cantos da tela que considerava ser a relacionada com a figura central. Além disso, era dito às participantes que, nessa primeira etapa, elas não seriam informadas se suas escolhas estavam ou não corretas.

Era avaliado se, na presença de cada um dos estímulos apresentados no Quadro 3, a resposta emitida pela participante estava de acordo com a classe de equivalência, a qual o estímulo pertence. Por exemplo, para o conjunto de estímulos língua natural (GA), tabela (GB) e expressão matemática (GC) era verificado se as participantes eram capazes de, na presença do estímulo GA1 como estímulo-modelo e dos estímulos GB1, GB2 e GB3 como estímulos de comparação, indicar como resposta o estímulo GB1. O Quadro 4 apresenta todas as 27 relações que foram avaliadas na etapa do Pré-teste.

Quadro 4 – Relações entre os elementos da linguagem algébrica utilizados nas classes de equivalência do Pré-teste

<table>
<tr><th>Etapa</th><th colspan="5">Relações envolvidas</th><th>Número de Tentativas</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Pré-teste</td><td>GA1-GB1</td><td>GA2-GB2</td><td>GA3-GB3</td><td>GB1-GC1</td><td>GB2-GC2</td><td rowspan="6">27</td></tr>
<tr><td>GB3-GC3</td><td>GA1-GC1</td><td>GA2-GC2</td><td>GA3-GC3</td><td>G1-H1</td></tr>
<tr><td>G2-H2</td><td>G3-H3</td><td>H1-I1</td><td>H2-I2</td><td>H3-I3</td></tr>
<tr><td>I1-G1</td><td>I2-G2</td><td>I3-G3</td><td>M1-N1</td><td>M2-N2</td></tr>
<tr><td>M3-N3</td><td>N1-O1</td><td>N2-O2</td><td>N3-O3</td><td>O1-M1</td></tr>
<tr><td>O2-M2</td><td>O3-M3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Cada uma das relações do Quadro 4 representa uma tentativa, sendo formadas por dois estímulos do Quadro 3. O primeiro estímulo de cada uma das relações representa o estímulo-modelo, ou seja, aquele que aparecia no centro da tela e o segundo estímulo representa o estímulo de comparação correto para o estímulo-modelo. Assim, na tentativa G3-H3, por exemplo, o estímulo G3 aparecia no centro da tela (estímulo-modelo) e os estímulos H1, H2 e H3 apareciam nos cantos da tela (estímulos de comparação). A participante respondia corretamente se clicasse com o *mouse* sobre a figura do estímulo H3.

No pré-teste não foram testadas todas as relações possíveis entre os elementos da linguagem algébrica. A escolha das relações inseridas nesse teste foi totalmente arbitrária e foi levado em consideração que, conforme já foi mencionado, cada um dos elementos da linguagem algébrica do pré-teste deveria aparecer pelo menos uma vez em uma das relações desse teste.

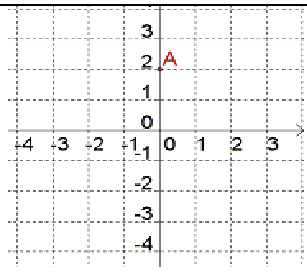
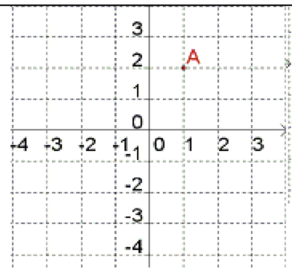
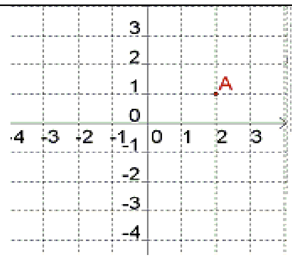
2.3.2 Ensino das Discriminações Condicionais entre os Elementos da Linguagem Algébrica

Da mesma forma que no Pré-teste, o ensino das discriminações condicionais e os testes para a verificação da formação das classes de equivalência foram realizados por meio do procedimento de escolha de acordo com o modelo. Às participantes foi dito: "irá aparecer no centro da tela do computador uma figura e nos cantos outras três. Você deve clicar com o mouse sobre a figura do canto da tela do computador que você considera correta para a figura do centro". Além disso, foi dito a elas: "algumas vezes você será informada se sua resposta estará correta ou não. Fique atenta para descobrir o porquê". Isso deve-se ao fato de que cada resposta das participantes nos blocos de ensino foi reforçada diferencialmente, ou seja, foi seguida de *feedback* positivo, no caso de responder de acordo com as relações apresentadas no Quadro 7 ou foi seguida de *feedback* negativo para os demais casos.

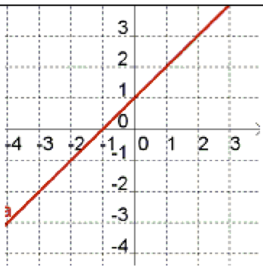
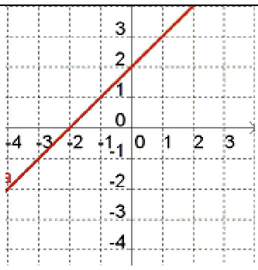
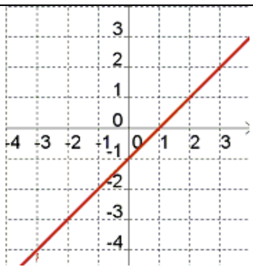
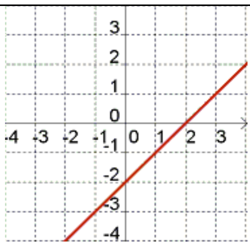
O primeiro bloco dessa etapa foi o Bloco de Ensino 1, cujos estímulos estão listados no Quadro 5 e as relações envolvidas entre eles no Quadro 7. Para que o procedimento avançasse de um bloco a outro da etapa de ensino, foi estabelecido um critério mínimo de acerto cinco das seis tentativas do bloco, o que corresponde, para esses blocos, a 83,3% de acerto. Após o bloco de Ensino 1, as relações aprendidas e as relações emergentes eram testadas. Atingido o critério mínimo de acerto, a participante era submetida ao bloco de Teste de Linha de Base 1, no qual as relações apresentadas no bloco anterior eram novamente apresentadas. A participante deveria escolher, da mesma forma, o estímulo de comparação correspondente ao estímulo-modelo, mas não era informada se sua resposta estava correta ou incorreta. Em seguida, a participante era submetida ao bloco Teste de Simetria 1, no qual os estímulos-modelo tornavam-se estímulos de comparação e os estímulos de comparação tornavam-se estímulos-modelo, ou seja, verificavam-se as relações simétricas. Em todos os blocos de teste, não foi programado reforço diferencial para as respostas.

Se o critério mínimo de acerto das tentativas do bloco Teste de Simetria fosse atingido, a participante era submetida ao bloco de Teste de Equivalência 1, no qual as relações transitivas entre os estímulos eram testadas. Caso a participante não atingisse o critério de acerto de qualquer um desses blocos, retornava ao Bloco de Ensino 1. Após o bloco de Teste de Equivalência, atingido o critério, a participante era submetida ao bloco de Teste de Generalização 1. Nos blocos de Teste de Generalização, as respostas das participantes também não eram reforçadas diferencialmente e não havia critério mínimo de acerto definido para o mesmo.

Quadro 5 – Elementos da linguagem algébrica utilizados nas Fases de Ensino 1 e 2.

Fase 1: Ensino 1			
Classe	***A***	***B***	***C***
1	y é igual a x mais dois	x | y 0 | 0+2 = 2 1 | 1+2 = 3	$y = x + 2$
2	y é igual a x mais um	x | y 0 | 0+1 = 1 1 | 1+1 = 2	$y = x + 1$
3	y é igual a x mais três	x | y 0 | 0+3 = 3 1 | 1+3 = 4	$y = x + 3$
Fase 2: Ensino 2			
	D	***E***	***F***
1	$x = 0$ e $y = 2$	A (0,2)	
2	$x = 1$ e $y = 2$	A (1,2)	
3	$x = 2$ e $y = 1$	A (2,1)	

Quadro 6 – Elementos da linguagem algébrica utilizados nas Fases de Ensino 3 e 4.

<table>
<tr><th colspan="4">Fase 3: Ensinos 3 e 4</th></tr>
<tr><th></th><th>J</th><th>K</th><th>L</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>$0 + 1 = 1$</td></tr><tr><td>1</td><td>$1 + 1 = 2$</td></tr></table></td><td>$y = x + 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>$0 + 2 = 2$</td></tr><tr><td>1</td><td>$1 + 2 = 3$</td></tr></table></td><td>$y = x + 2$</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>$0 – 1 = -1$</td></tr><tr><td>1</td><td>$1 – 1 = 0$</td></tr></table></td><td>$y = x – 1$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>$0 – 2 = -2$</td></tr><tr><td>1</td><td>$1 – 2 = -1$</td></tr></table></td><td>$y = x – 2$</td></tr>
</table>

Na Fase 2, o procedimento era semelhante ao da Fase 1 (ver Quadro 7). Na Fase 3, após o bloco de Ensino 3, havia um bloco Teste de Linha de Base e Simetria 3, seguido de outro bloco de ensino, denominado Ensino 4 que, por sua vez, era seguido de um novo bloco Teste de Linha de Base e Simetria 4 e, por fim, era feito o bloco Teste de Equivalência 3. Após o bloco de Teste de Equivalência, as participantes eram submetidas a um novo bloco Teste de Generalização. Cabe ressaltar, mais uma vez, que em todos os blocos de teste de todas as três fases, as respostas das participantes não eram reforçadas diferencialmente. Além disso, sempre que o critério mínimo de acerto não fosse atingido em cada um dos blocos da Fase de Ensino 2, reaplicava-se o bloco Ensino 2. Na Fase 3, uma vez não tendo atingido o critério de acertos em qualquer um dos blocos dessa fase, o procedimento retorna ao bloco Ensino 3.

Para a definição da estrutura de ensino a ser adotada, levou-se em consideração a discussão apresentada por Haydu e Paula (2008). Essas autoras revisaram a literatura sobre as diferentes estruturas de ensino e verificaram que, quando os participantes são portadores de necessidades especiais, a estrutura de ensino CaN tem se mostrado mais efetiva do que as demais. Entretanto, com participantes universitários, os resultados dos estudos são divergentes. Há estudos que mostram que, para classes com sete estímulos, a estrutura CaN mostrou ser mais efetiva, enquanto que para classes com cinco estímulos ambas as estruturas de ensino são igualmente eficientes. Sendo assim, escolheu-se arbitrariamente a estrutura SaN – *sample as node*, ou seja, o estímulo-modelo foi o estímulo comum entre as relações ensinadas. Por exemplo, no bloco Ensino 1 (ver Quadro 7), as relações iniciam-se sempre com os estímulos A, ou seja, as relações entre os estímulos A e B foram ensinadas de modo que os estímulos A fossem os estímulos-modelo e os estímulos B fossem estímulos de comparação, assim como, nas relações entre os estímulos A e C, os estímulos A continuavam sendo estímulos-modelo e os estímulos C os de comparação. O estímulo-modelo é o estímulo comum entre os elementos das classes em todos os blocos de ensino.

2.3.3 Generalização

Na Etapa de Generalização, os elementos da linguagem algébrica apresentados no Pré-teste eram novamente apresentados para verificar se, após a formação de classes de estímulos equivalentes de funções especificas, o controle de estímulos estabelecido era verificado diante de outras funções do 1o grau.

As relações envolvidas em cada uma das fases da Etapa de Ensino e da Etapa de Generalização, bem como a ordem dos blocos de ensino, de testes de linha de base, de simetria, de equivalência e de generalização são as apresentadas no Quadro 7.

Quadro 7 – Relações entre os elementos da linguagem algébrica estabelecidas nas classes de equivalência das Etapas de Ensino e Generalização.

Fase	Etapa	Blocos	Relações envolvidas						Tentativas
Fase 1	Ensino	1. Ensino 1	A1-B1	A2-B2	A3-B3	A1-C1	A2-C2	A3-C3	18
	Verificação das relações de equivalência	2. Teste Linha de Base 1	A1-B1	A2-B2	A3-B3	A1-C1	A2-C2	A3-C3	6
		3. Teste Simetria 1	B1-A1	B2-A2	B3-A3	C1-A1	C2-A2	C3-A3	6
		4. Teste Equivalência 1	B1-C1	B2-C2	B3-C3	C1-B1	C2-B2	C3-B3	6
	Generalização	5. Teste de Generalização 1	GA1-GB1 GA3-GC3 GC2-GA2 GC1-GB1	GA2-GB2 GB1-GC1 GC3-GA3 GC2-GB2	GA3-GB3 GB2-GC2 GB1-GA1 GC3-GB3	GA1-GC1 GB3-GC3 GB2-GA2	GA2-GC2 GC1-GA1 GB3-GA3		18
Fase 2	Ensino	6. Ensino 2	D1-E1	D2-E2	D3-E3	D1-F1	D2-F2	D3-F3	18
	Verificação das relações de equivalência	7. Teste Linha de Base 2	D1-E1	D2-E2	D3-E3	D1-F1	D2-F2	D3-F3	6
		8. Teste Simetria 2	E1-D1	E2-D2	E3-D3	F1-D1	F2-D2	F3-D3	6
		9. Teste Equivalência 2	E1-F1	E2-F2	E3-F3	F1-E1	F2-E2	F3-E3	6
	Generalização	10. Teste de Generalização 2	G1-H1 H1-G1 H1-I1	G2-H2 H2-G2 H1-I2	G3-H3 H3-G3 H3-I3	G1-I1 I1-G1 I1-H1	G2-I2 I2-G2 I2-H2	G3-I3 I3-G3 I3-H3	18
Fase 3	Ensino	11. Ensino 3	K1-J1	K2-J2	K3-J3	K4-J4			16
	Verificação das relações de equivalência	12. Teste Linha de Base e Simetria 3	K1-J1 J3-K3	K2-J2 J4-K4	K3-J3	K4-J4	J1-K1	J2-K2	8
	Ensino	13. Ensino 4	K1-L1	K2-L2	K3-L3	K4-L4			16
	Verificação das relações de equivalência	14. Teste Linha de Base e Simetria 4	K1-L1 L3-K3	K2-L2 L4-K4	K3-L3	K4-L4	L1-K1	L2-K2	8
		15. Teste de Equivalência 3	J1-L1 L3-J3	J2-L2 L4-J4	J3-L3	J4-L4	L1-J1	L2-J2	8
	generalização	16. Teste de Generalização 3	M1-N1 O1-M1 O1-N1	M2-N2 O2-M2 O2-N2	M3-N3 O3-M3 O3-N3	N1-M1 M1-O1 N1-O1	N2-M2 M2-O2 N2-O2	N3-M3 M3-O3 N3-O3	18

Nos Blocos 1 e 6 (Ensinos 1 e 2), as relações do Quadro 5 foram repetidas três vezes, e nos Blocos 11 e 13 (Ensinos 3 e 4) foram repetidas quatro vezes, fazendo com que o número de tentativas desses blocos fossem 18, 18, 16 e 16, respectivamente. Isso se deve ao fato de que, como nos dois primeiros blocos de ensino havia três estímulos de comparação, em cada nova repetição da relação, a figura referente ao estímulo de comparação correto para o estímulo-modelo ocupava, na tela do computador, uma posição diferente da posição do estímulo correto na última vez que a relação foi apresentada. No caso dos Blocos 11 e 13, como existiam quatro estímulos de comparação, era necessário que cada relação fosse apresentada quatro vezes, de modo que o estímulo de comparação correto ocupasse as quatro possíveis posições na tela.

Para que se investigasse acerca das variáveis que podem ter afetado as respostas das participantes em cada uma das etapas da pesquisa, foi solicitado que elas relatassem oralmente, em cada um dos blocos, o que as levou a escolher os estímulos selecionados em algumas das tentativas. As respostas dadas pelas participantes foram registradas pelo pesquisador.

2.4 RESULTADOS

A Participante 1 concluiu todos os blocos e fases do procedimento em uma única sessão de 50 minutos e 8 segundos. A Participante 2 necessitou duas sessões, com um intervalo de 38 minutos entre elas, totalizando 3 horas e 45 minutos para completar todos os blocos e etapas do procedimento. Apesar da necessidade de um intervalo entre as sessões, a Participante 2 formou as classes de estímulos equivalentes referentes a funções do primeiro grau assim como a outra participante, bem como apresentou um desempenho superior a 88% de acerto das relações corretas em todos os Testes de Generalização.

No Pré-teste, o índice de acertos da Participante 1 foi 66,7% (18 relações) enquanto que o índice da Participante 2 foi 59,3% (16 relações). A quantidade de erros em cada tipo de relação, durante o Pré-teste, estão representadas na Tabela 1. Pode-se observar nessa tabela que a quantidade de respostas incorretas apresentadas pelas participantes é semelhante e que ambas responderam incorretamente na tentativa de teste de uma das discriminações condicionais entre os tipos de estímulos, exceto as relações entre representação combinada/tabela e escritos simbólicos (GB-GC) e entre representações combinadas e escritos simbólicos (H-I), as quais elas responderam corretamente. Além disso, a Participante 1 respondeu corretamente as três relações entre representação combinada/tabela e representação combinada/gráfico (N-O).

Tabela 1 – Quantidade de respostas incorretas apresentadas pelas participantes no bloco de Pré-teste

Relações testadas	Quantidade de relações incorretas	
	Participante 1	**Participante 2**
GA-GC (Linguagem natural e Escritos simbólicos)	1	1
GA-GB (Linguagem natural e Representações combinadas)	2	2
G-H (representação combinada/gráfico e representação combinada)	2	2
I-G (escritos simbólicos e representação combinada/gráfico)	2	1
M-N (escritos simbólicos e representação combinada/tabela)	1	2
N-O (representação combinada/tabela e representação combinada/gráfico)	0	1
O-M (representação combinada/gráfico e escritos simbólicos)	1	2
Total	**9**	**11**

Na Tabela 2, pode-se verificar o número de vezes que cada um das participantes foram submetidas a cada um dos blocos do procedimento. A Participante 1 completou todo o procedimento com mais de 80% de acertos em todos os blocos, sem a necessidade de repetição. A tarefa foi mais difícil para a Participante 2 no Bloco 6 (Ensino 2) e Bloco 11 (Ensino 3).

Chama a atenção o número de vezes que a Participante 2 foi submetida ao Bloco 11 (Ensino 3), uma vez que repetiu esse bloco 25 vezes por não atingir o critério de acertos nas tentativas desse bloco e duas vezes por não atingir o critério no Bloco 15 (Teste de Equivalência), o que fez com que, de acordo com o procedimento, houvesse repetição dos Blocos 12 (Teste Linha de Base e Simetria), 13 (Ensino 4) e 14 (Teste de Equivalência).

Tabela 2 –Número de vezes em que as participantes foram submetidas a cada um dos blocos do procedimento piloto e porcentagens de acertos na ultima repetição..

		Participante 1		Participante 2	
Nº	Bloco	Número de vezes	% de acertos na última repetição	Número de vezes	% de acertos na última repetição
1	Ensino 1	1	100%	1	100%
2	Teste Linha de Base 1	1	100%	1	100%
3	Teste Simetria 1	1	100%	1	100%
4	Teste Equivalência 1	1	100%	1	100%
5	Teste Generalização 1	1	100%	1	100%
6	Ensino 2	1	94,4%	2+3*	88,8%
7	Teste Linha de Base 2	1	100%	1+1	100%
8	Teste Simetria 2	1	100%	1+1	100%
9	Teste Equivalência 2	1	100%	1	100%
10	Teste Generalização 2	1	88,9%	1	88,9%
11	Ensino 3	1	81,3%	26+1+1	100%
12	Teste Linha de Base e Simetria 3	1	100%	1+1+1	100%
13	Ensino 4	1	100%	1+1+1	100%
14	Teste Linha de Base e Simetria 4	1	100%	1+1+1	100%
15	Teste de Equivalência 3-4	1	100%	1+1+1	100%
16	Teste Generalização 3-4	1	100%	1	100%
17	Pós-teste	1	92,6%	1	88,9%

Fonte: Dados da pesquisa realizada.

* Nesse caso, o bloco foi repetido uma vez porque a participante atingiu o critério de acertos das relações do próprio bloco, depois uma vez por não atingir o critério de acertos de um dos testes seguinte, e três vezes novamente por não atingir o critério de acertos das relações do bloco. Isso é valido para os demais números expressos por meio de soma.

Nos Blocos de 1 (Ensino 1) a 5 (Teste de Generalização 1), ambas as participantes obtiveram índice de acertos de 100%. No que se refere às relações envolvendo os elementos D (representações combinadas como “x=0 e y=2”) e F (representações combinadas/gráficos), a distribuição das respostas incorretas de cada uma das participantes no Bloco 6 (Ensino 2), Bloco 7 (Teste de Linha de Base) e Bloco 8 (Teste de Simetria) está expressa na Tabela 3.

Tabela 3 –Relações incorretas apresentadas pelas participantes nos Blocos 6, 7 e 8.

Relações	**Quantidade de respostas incorretas**	
	Participante 1	**Participante 2**
D1-F2	0	2
D2-F1	0	4
D3-F1	0	2
D3-F2	0	12
F2-D3	0	2
D2-F3	1	2

Fonte: Dados da pesquisa realizada.

No Bloco 9 (Teste de Equivalência 2), as participantes apresentaram índice de acertos de 100%. No Bloco 10 (Teste de Generalização 2), ambas apresentaram a relação incorreta G3-I1 (ponto no plano cartesiano e expressão analítica de ponto) e a Participante 2 apresentou ainda a relação incorreta H3-G2 (representação combinada de ponto e ponto no plano cartesiano). No que se refere ao Bloco 11 (Ensino 3), as relações incorretas estão apresentadas na Tabela 4. Nos demais Blocos (12, 13 e 14), ambas as participantes responderam corretamente a 100% das relações apresentadas. No Bloco 15 (Teste de Equivalência 3-4), a Participante 2 apresentou as seguintes relações incorretas J1-L3 (gráfico e expressão da função) (2 vezes), L2-J4 (expressão e gráfico de função) (2 vezes) e J2-L4 (gráfico e expressão da função) (1 vez). No Bloco 16 (Teste de Generalização 4), ambas as participantes apresentaram índice de acerto de 100%. Apesar de não ter sido programado de início, após o Bloco Teste de Generalização 4, o *software* apresentou novamente as tentativas do Pré-teste. Nesse pós-teste, as participantes apresentaram a relação incorreta GA1-GC1 (língua natural e expressão de função). Além disso, a Participante 1 apresentou a relação I3-G2 (forma analítica de ponto e gráfica) e a Participante 2 apresentou as relações G3-H2 (representação gráfica e combinada de ponto) e I2-G3 (forma analítica de ponto e gráfica).

Tabela 4 – Relações incorretas apresentadas pelas participantes no Bloco 11.

Relações	Quantidade de respostas incorretas	
	Participante 1	**Participante 2**
K1-J2	1	29
K1-J3	0	20
K1-J4	0	27
K2-J1	0	16
K2-J3	0	23
K2-J4	0	33
K3-J1	0	29
K3-J2	0	19
K3-J4	0	35
K4-J1	0	31
K4-J2	0	19
K4-J3	2	30

Fonte: Dados da pesquisa realizada.

Ao término da sessão, algumas relações foram mostradas às participantes para que relatassem o que elas tinham levado em consideração para emitir suas respostas nos blocos, nos quais houve repetição por parte de pelo menos uma das participantes, com o intuito de verificar o que controlou as respostas das mesmas. No Bloco 6 (Ensino 2), a Participante 1 identificou corretamente os valores da abscissa e da ordenada de cada um dos pontos, enquanto que a Participante 2, no início, contou o número de unidades que o ponto estava distante dos eixos, mas trocou abscissa pela ordenada. Contudo, depois de algumas tentativas, relatou que conseguiu observar o porquê dos erros. No Bloco 11 (Ensino 3), a Participante 1 relatou que o número que "está junto com o y é onde a linha passa na reta do y", ou seja, foi capaz de identificar o coeficiente linear da função como sendo o valor da ordenada na qual o gráfico da função intercepta o eixo das ordenadas. A Participante 2, a princípio, procurava ver quais os números estavam "cercando" (*sic*) o gráfico e daí procurava esses números nas tabelas. Como essa estratégia não produzia respostas corretas, a participante passou a responder arbitrariamente, o que pode ser observado nos tempos de reação das respostas desse bloco e confirmado pelo seu relato. Por conta disso, a sessão necessitou ser interrompida.

2.5 DISCUSSÃO

Este Estudo I investigou se o modelo da equivalência de estímulos é eficaz e eficiente para o ensino de funções do 1º grau. Para isso, optou-se por relacionar os diferentes elementos da linguagem algébrica (língua natural, escritos simbólicos e representações combinadas) referentes ao conceito de função do 1º grau. Os resultados do Estudo I, realizado com duas estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, permitem observar que, apesar de o desempenho das participantes no Pré-teste e no Pós-teste ter sido semelhante não apenas no que se refere ao número de relações corretas entre os diferentes elementos da linguagem algébrica utilizados, mas também ao tipo das relações incorretas por elas estabelecidas, o processo de aquisição dos comportamentos alvo foram diferentes para cada uma das participantes.

A Participante 1 conseguiu atingir o critério de acertos em todos os blocos do procedimento na primeira vez que foi submetida a esses blocos, enquanto que o procedimento retornou algumas vezes para a Participante 2 nos Blocos 6 e 11 (Ensinos 2 e 3, respectivamente). No Bloco 6, a relação incorreta mais frequente foi a relação D3-F2 (expressão combinada do ponto (2,1) e gráfico do ponto (1,2). Segundo o relato da participante, no início ela pensou que, como no estímulo D3 tem-se "*x=2*", então o ponto deveria estar "próximo do número 2" no gráfico, o que explica o alto índice de relações D3-F2, uma vez que no gráfico do estímulo F2, o ponto A encontra-se próximo da abscissa 2. Apesar de a participante passar a responder corretamente às relações desse bloco depois de quatro repetições, esse fato mostra que o Bloco 6 (Ensino 2) deveria ser repensado, com o intuito de evitar entendimentos equivocados como os relatados.

No Bloco 11 (Ensino 3), depois que o pesquisador observou que a participante estava repetindo o mesmo pela vigésima segunda vez, a sessão foi interrompida e a participante foi questionada acerca do que estava levando em consideração para escolher cada estímulo de comparação. Pelo que relatou, não conseguia identificar como os pontos das tabelas relacionavam-se com os gráficos das funções. Isso pode ser confirmado ao se analisar o índice de respostas incorretas apresentadas pela participante. De todas as relações incorretas, a maior parte delas envolveu o estímulo de comparação J4 (gráfico de $y=x+2$). No caso das relações K1-J4 (tabela da função $y=x+1$ e gráfico da função $y=x-2$) e K3-J4 (tabela da função $y=x-1$ e gráfico de $y=x-2$), pelo relato da participante, ela entendeu que o gráfico deslocava-se na diagonal o número de casas "*que repete na coluna y*", ou seja, como nos estímulos K1 e K3 o número 1 repetia-se na coluna *y*, então a figura correta seria aquela na qual o gráfico estava a uma distância de uma unidade em diagonal. Já para a relação K2-J4 (tabela de $y=x+2$ e gráfico de $y=x-2$), o que controlava a resposta era o fato de perceber que o gráfico estava a uma distância de duas unidades em relação ao eixo das abscissas. Diante desses esclarecimentos, o pesquisador procurou auxiliá-la para que conseguisse estabelecer as relações entre os estímulos K (tabela) e J (gráfico). Foi explicado à participante que nos casos nos quais, na coluna de *y* da tabela, tem-se um número e "+ 1", a reta do gráfico estaria a uma distância de uma unidade para cima em relação a *y*. A partir disso, a Participante 2 conseguiu fazer essa relação. Essa tentativa foi apresentada pelo *software,* a participante selecionou o estímulo J1(gráfico de $y=x+1$) como resposta e recebeu a mensagem de que a resposta estava correta. Em seguida, foi-lhe apresentado o estímulo-modelo K3 (tabela de $y=x-1$) e a participante prontamente escolheu o estímulo J3 (gráfico de $y=x-1$) como resposta, recebendo novamente a mensagem do *software* de que a resposta estava correta.

As respostas da Participante 2 foram controladas por essa regra para a relação K1-J1 (tabela e gráfico de $y=x+1$) e houve a generalização da regra, com as devidas adaptações, para as demais relações. Entretanto, essa generalização não ocorreu de forma rápida, pois foram necessárias mais cinco repetições do bloco para que o critério mínimo de acerto fosse atingido. O procedimento pode ter sido mais difícil para a Participante 2 pelo fato de não ter percebido como o Bloco 6 (Ensino 2) e o Bloco 11 (Ensino 3) se relacionavam. Para minimizar essa dificuldade, pode-se indicar nos estímulos J (gráficos) os pontos que são indicados nos estímulos K (tabelas). Ao fazer a intervenção, o pesquisador instruiu a participante sobre como os elementos da linguagem algébrica relacionavam-se uns aos outros. Após a instrução, foi necessário que as respostas da participante fossem reforçadas diferencialmente para que houvesse a generalização de estímulos. Esse fato indica que a apresentação de instruções anteriores ao processo de discriminação condicional pode evitar que os participantes apresentem dificuldades como as apresentadas por essa participante.

Algumas considerações sobre o desempenho das participantes no Pré-teste merecem ser feitas. Pode-se considerar que as relações entre GA (língua natural), GB (tabelas) e GC (expressões de funções) já eram de conhecimento das participantes e, por representarem um terço do total de relações de todo o teste, contribuíram para que o desempenho dos mesmos não fosse baixo, conforme o esperado para estudantes dessa faixa etária e do 5º ano do Ensino Fundamental. Assim, se fossem considerados apenas as relações entre escritos simbólicos (M), representações combinadas/tabela (N) e representações combinadas/gráfico (O), que são as relações que se queria que as participantes, ao final de todos os blocos, respondessem corretamente, nota-se um desempenho, no Pré-teste, um pouco maior para a Participante 1 (77,8%) e um pouco menor para a Participante 2 (44,4%). Assim, para que o Pré-teste realmente cumpra sua função, faz-se necessário um ajuste das relações de modo que sejam colocadas mais relações que se quer que os participantes estabeleçam.

Apesar de as estudantes não aprenderem uma definição formal de função do 1º grau, aquela que está presente nos livros didáticos, a formação de classes de estímulos equivalentes referentes a elementos da linguagem algébrica de algumas funções do 1º grau, bem como os resultados observados nos testes de generalização mostram que as participantes são capazes de relacionar a expressão que define uma função do 1º grau com seu gráfico e com uma tabela que contenha alguns de seus pontos. Assim, esses diferentes elementos da linguagem algébrica, por fazerem parte de uma mesma classe de estímulos equivalentes, tornam-se significados uns dos outros (SIDMAN, 1986).

Vale salientar que, apesar de o processo de aquisição dos comportamentos alvo terem sido diferentes para as participantes, a formação de classes de estímulos equivalentes foi verificada, além de um alto desempenho de ambas nos testes de generalização. Esse resultado permite sugerir que o ensino de discriminações condicionais entre estímulos referentes a elementos da linguagem algébrica de algumas funções do 1º grau possibilita a formação de classes de estímulos equivalentes com esses estímulos, o estabelecimento de relações corretas entre os elementos da linguagem algébrica referentes a funções do 1º grau da forma $y = 1x + b$ que não fizeram parte das etapas de ensino, bem como a formação de classes de equivalência.

Os resultados desse estudo demonstram, da mesma forma como mostram os estudos de Ninnes et al. (2005, 2006, 2009), que o arranjo de contingências possibilitado pelo modelo da equivalência de estímulos permite a formação de relações de estímulos equivalentes entre elementos da linguagem algébrica que constituem funções do primeiro grau da forma $y=1x+b$, bem como a generalização dessas relações para diferentes funções. Da mesma forma, os resultados mostram que algumas modificações mereciam ser feitas no procedimento, como a adequação da escolaridade dos participantes e a inclusão de instruções nos procedimentos de ensino com o *software*. O capítulo seguinte mostra as alterações feitas nesse procedimento, os resultados de sua aplicação e uma discussão.

3 **O ESTUDO II**

De acordo com a análise dos resultados do Estudo I, alguns aspectos do procedimento foram modificados, conforme relatado no capítulo anterior. Objetivo de tais modificações foi minimizar as dificuldades enfrentadas pelos participantes na aprendizagem das discriminações condicionais de modo que possam formar classes de estímulos equivalentes entre gráficos, tabelas e expressões de funções do primeiro grau. Além disso, pretendia-se verificar se a formação de classes de estímulos equivalentes entre gráfico, tabela e expressão de funções afins específicas contribuía para que o participante fosse capaz de identificar gráficos de outras funções afins que não fizeram parte das classes anteriores.

Uma das principais modificações no procedimento foi a introdução, a exemplo de Lynch e Cuvo (1995), de um teste escrito que foi aplicado antes e depois do procedimento com o *software*. Outra modificação foi a ampliação das tentativas dos blocos da Etapa 1, incluindo telas de instrução, de acordo com o proposto por Ninnes et al. (2005).

Além das modificações no software, como as orientações curriculares (BRASIL, 1997, 2002) consideram que o ensino e aprendizagem de funções podem ocorrer no final do Ensino Fundamental, optou-se por realizar o estudo com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de uma cidade do interior do Estado de Mato Grosso do Sul.

3.1 PARTICIPANTES

Participaram do estudo nove estudantes, sendo cinco do sexo feminino e quatro do sexo masculino. O convite para participar do estudo foi feito aos estudantes pelo pesquisador, que receberam uma carta explicativa do teor do estudo e o Termo de Consentimento Livre em Esclarecido (Apêndice B), que foram assinados pelos seus pais ou responsáveis legais e entregues ao pesquisador na data da coleta de dados.

Para garantir o anonimato dos participantes, cada um deles recebeu uma denominação composta pela letra A e por um número que varia de 1 a 9. Foram obtidas, de cada um dos participantes, a idade, a disciplina que mais gosta e a que menos gosta de estudar, e como cada um deles considera suas notas em Matemática, assinalando os seguintes itens: ótimas, boas, regulares, ruins ou muito ruins. O Quadro 8 esboça tais informações.

Quadro 8 – Caracterização dos participantes da pesquisa

Participante	*Idade*	*Disciplina que mais gosta*	*Disciplina que menos gosta*	*Notas*
A1	13 anos	Matemática	Geografia	boas
A2	12 anos	Português, Ed. Física	História, Geografia	regulares
A3	12 anos	Português, Inglês	Matemática, Ciências	regulares
A4	15 anos	Inglês	Geografia	regulares
A5	13 anos	Geografia, Matemática, Inglês	Ciências	ruins
A6	13 anos	Matemática	nenhuma	ótimas
A7	14 anos	Matemática	Inglês	ótimas
A8	12 anos	Matemática	Português	regulares
A9	13 anos	Matemática	Geografia	boas

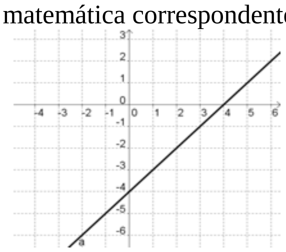
Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada

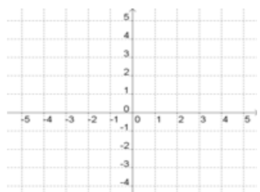
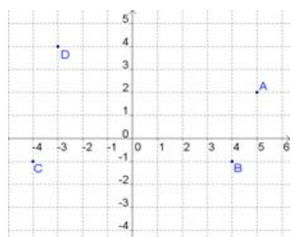
3.2 MATERIAIS E LOCAL

A programação das relações entre os diferentes elementos da linguagem algébrica das classes de equivalência, bem como a coleta de dados, foram realizadas utilizando-se de quatro computadores HP Compaq LE1911, com monitores de 19 polegadas e do *Software Equivalência* (SANTOS, 2001).

O teste escrito (Apêndice A), aplicado antes e depois do procedimento com o *software*, era composto por sete questões abertas – ou discursivas. As questões e os comportamentos esperados dos participantes – descritores – para cada uma delas estão apresentadas no Quadro 9.

Quadro 9 – Questões do teste escrito e seus descritores

<table>
<tr><th colspan="2">Questão</th><th>Descritor</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>Uma máquina transforma o número x (número de entrada) que o usuário escolhe em um número y (número de saída), dependendo da programação. A máquina está programada para que o número de saída seja o número de entrada mais cinco.
a. Escreva a expressão matemática dessa transformação</td><td>Escrever a expressão algébrica de uma função do primeiro grau que representa uma situação.</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>Complete a tabela seguinte
<table><tr><td>x</td><td>y</td><td>(x,y)</td></tr><tr><td>0</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr></table></td><td>Completar uma tabela, calculando a imagem de alguns elementos do domínio de uma função do primeiro grau</td></tr>
<tr><td>1c</td><td>Faça o gráfico que representa essa transformação.
</td><td>Esboçar o gráfico de uma função do primeiro grau.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Escreva a expressão matemática correspondente a esse gráfico
</td><td>Escrever uma expressão algébrica de uma função do primeiro grau a partir do esboço de seu gráfico.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Escreva a expressão matemática correspondente a essa tabela.
<table><tr><td>x</td><td>y</td><td>(x,y)</td></tr><tr><td>0</td><td>0 + 4 = 4</td><td>(0,4)</td></tr><tr><td>1</td><td>1 + 4 = 5</td><td>(1,5)</td></tr><tr><td>2</td><td>2 + 4 = 6</td><td>(2,6)</td></tr></table></td><td>Escrever uma expressão algébrica de uma função do primeiro grau a partir de uma tabela que contenha alguns de seus pontos</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Marque os pontos seguintes no plano cartesiano:

A(3, 1) B(4, -2) C(-2, -3) D(-1, 3)
</td><td>Localizar, no plano cartesiano, pontos a partir de suas coordenadas.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Dê as coordenadas dos pontos do gráfico.

A(_____, ___) B(______,______) C(_____, _____)
D(_____, ______)</td><td>Escrever as coordenadas de pontos esboçados no plano cartesiano.</td></tr>
</table>

A coleta de dados foi realizada no Laboratório de Ensino de Matemática do Campus de Aquidauana da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, sendo que os Participantes A2, A3, A5 e A6 realizaram todas as etapas do procedimento no período da tarde do 1º dia e os demais no período da manhã do 2º dia da coleta de dados.

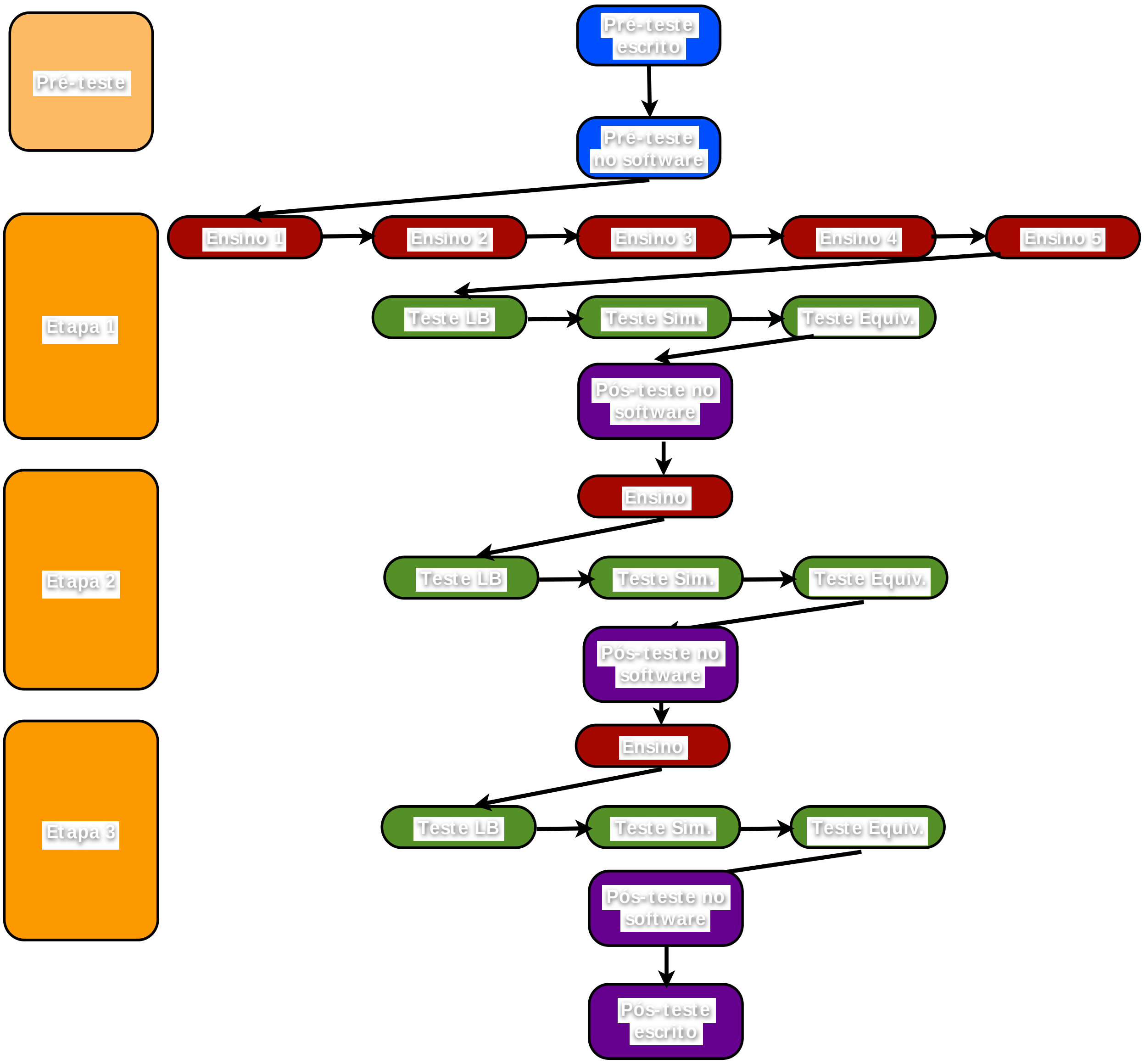
3.3 PROCEDIMENTO

O procedimento foi dividido em duas fases. Uma fase escrita, que consistia em Pré-teste e um Pós-teste escritos, e a fase realizada no computador com o *Software Equivalência*, que consistia em um Pré-teste no *software* e em três etapas. Cada uma dessas etapas foram divididas em blocos de ensino de discriminações condicionais (Blocos Ensino), blocos de verificação das relações emergentes (Blocos Teste) e blocos de avaliação da generalização de estímulos (Blocos Pós-teste), conforme Figura 12.

O ensino das discriminações condicionais e os testes para a verificação das relações emergentes foram realizados por meio do procedimento de escolha de acordo com o modelo (MTS) simultâneo. Durante as fases de ensino, as respostas dos participantes eram reforçadas diferencialmente.

Nos Blocos Ensino, o *software* apresentava, no centro da tela, um elemento da linguagem algébrica e, nos cantos, quatro outros elementos da linguagem algébrica de tipo diferente do central (e.g., no centro era apresentado um gráfico e nos cantos tabelas). Ao escolher um dos elementos apresentados no canto da tela, os participantes eram informados, por meio de uma mensagem na tela do computador, se sua escolha estava correta ou incorreta. Caso o participante conseguisse atingir o critério de acertos de pelo menos 80% das relações dos Blocos Ensino, o mesmo era submetido aos blocos de verificação das relações emergentes. Se o critério de acertos não fosse atingido, o participante retornava no Bloco Ensino. Esse procedimento era feito até que o participante conseguisse atingir o critério de acertos no bloco. O protocolo utilizado em todos os blocos foi o SaN – *sample as node* – isto é, o elemento comum as relações de cada um dos blocos era o estímulo modelo – aquele que era apresentado no centro da tela. A escolha desse protocolo foi baseada nas considerações feitas por Haydu e Paula (2008), conforme relatado no capítulo anterior.

Figura 12 – Representação esquemática dos blocos e etapas do procedimento de investigação.



Havia, em todas as etapas, três tipos de Blocos Teste. O primeiro deles é o Bloco Teste LB (Teste de Linha de Base). Nesse bloco, as relações estabelecidas nos Blocos Ensino eram apresentadas ao participante, que precisaria acertar pelo menos sete das oito tentativas do bloco (o que correspondia a 87,5% de acertos) para passar para o Bloco Teste seguinte. Caso o critério não fosse atingido nesse bloco, o procedimento retornava ao Bloco Ensino. Atingido o critério, o participante era submetido ao Bloco Teste Simetria. Nesse bloco, as figuras representando os elementos da linguagem algébrica que apareciam no centro da tela (estímulos-modelo) tornavam-se as figuras do canto da tela (estímulos-comparação) e vice-versa. Ao atingir o critério de acertos nesse bloco, o participante era submetido ao Teste

Equivalência, no qual era verificada a formação das classes de equivalência quando o participante acertava no mínimo sete das oito relações do bloco. Cabe ressaltar que em todos os Blocos Teste, o *software* não apresentava *feedback*, ou seja, aos participantes não era informado se a escolha do estímulo de comparação estava correta ou não. Além disso, caso o critério de acertos não fosse atingido em qualquer um desses Blocos Teste, o procedimento retornava ao Bloco Ensino.

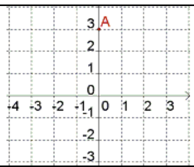
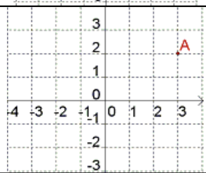
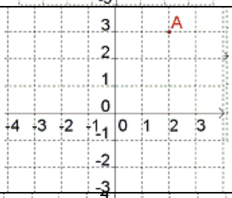
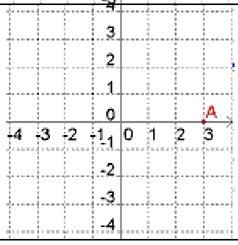
Após a verificação da formação das classes de equivalência, o participante era submetido a um Bloco Pós-teste com o *software*. Nesse bloco, os elementos da linguagem algébrica que foram apresentados no Pré-teste com o *software* foram novamente apresentados para verificar se, após a formação das classes de estímulos equivalentes de funções do primeiro grau específicas, a formação de classes de estímulos equivalentes de elementos da linguagem algébrica de outras funções seria verificada. Serão apresentados, a seguir, os elementos da linguagem algébrica utilizados em cada um dos blocos e etapas do procedimento dessa investigação.

3.3.1 Pré-teste Escrito e o Apresentado pelo *Software*

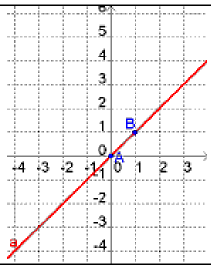
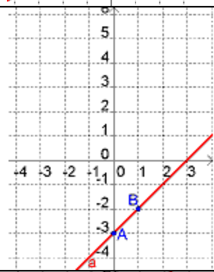
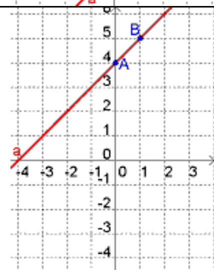
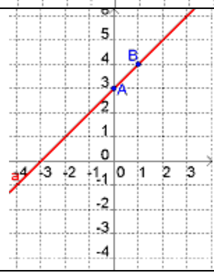
O Pré-teste escrito foi realizado utilizando-se do formulário de teste descrito na seção anterior (Quadro 9). Os participantes receberam esse formulário e foram solicitados a responder as questões da forma como considerariam ser correta. As questões do Pré-teste escrito foram resolvidas à caneta pelos participantes e não foi permitido o uso de folha de rascunho nem de calculadora ou outro material, com o intuito de fazer com que o participante deixasse o máximo de registros possíveis no formulário de teste.

Após o Pré-teste escrito, cada um dos participantes ocupou um computador e foram submetidos ao Pré-teste com o software. As discriminações condicionais desse bloco de teste no software, e os diferentes elementos da linguagem algébrica que foram utilizados estão apresentados nos Quadros 10 e 11.

Quadro 10 – Elementos da Linguagem Algébrica utilizados no Pré-teste.

Classe	*A*	*B*	*C*
1	y é igual a x	x | y | (x,y) 0 | 0 | (0, 0) 1 | 1 | (1, 1)	$y = x$
2	y é igual a x menos 3	x | y | (x,y) 0 | 0 - 3 = -3 | (0, -3) 1 | 1 - 3 = -2 | (1, -2)	$y = x - 3$
3	y é igual a x mais 4	x | y | (x,y) 0 | 0 + 4 = 4 | (0, 4) 1 | 1 + 4 = 5 | (1, 5)	$y = x + 4$
4	y é igual a x mais 3	x | y | (x,y) 0 | 0 + 3 = 3 | (0, 3) 1 | 1 + 3 = 4 | (1, 4)	$y = x + 3$
Classe	*D*	*E*	*F*
1		$x = 0$ e $y = 3$	A (0,3)
2		$x = 3$ e $y = 2$	A (3,2)
3		$x = 2$ e $y = 3$	A (2,3)
4		$x = 3$ e $y = 0$	A (3,0)

Quadro 11 – Elementos da Linguagem Algébrica utilizados no Pré-teste.

<table>
<tr><th>Classe</th><th>G</th><th>H</th><th>I</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\boxed{y = x}$</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>(x,y)</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>A(0, 0)</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>B(1, 1)</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\boxed{y = x - 3}$</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>(x,y)</th></tr><tr><td>0</td><td>0 - 3 = -3</td><td>A(0, -3)</td></tr><tr><td>1</td><td>1 - 3 = -2</td><td>B(1, -2)</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\boxed{y = x + 4}$</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>(x,y)</th></tr><tr><td>0</td><td>0 + 4 = 4</td><td>A(0, 4)</td></tr><tr><td>1</td><td>1 + 4 = 5</td><td>B(1, 5)</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\boxed{y = x + 3}$</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>(x,y)</th></tr><tr><td>0</td><td>0 + 3 = 3</td><td>A(0, 3)</td></tr><tr><td>1</td><td>1 + 3 = 4</td><td>B(1, 4)</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

Durante o ensino das discriminações condicionais realizado meio de do MTS, todos os estímulos apareceram em pelo menos um dos arranjos de tentativas e que cada tipo de relação foi apresentada uma única vez. No centro da tela, aparecia o estímulo-modelo e nos cantos da tela os quatro estímulos de comparação. O Quadro 12 descreve as relações envolvidas na etapa do Pré-teste.

Quadro 12 – Relações entre os elementos da linguagem algébrica utilizados no Pré-teste no *software.*

Etapa	**Relações envolvidas**	**Número de Tenta-tivas**
Pré-teste	A1-B1, A2-B2, A3-B3, A4-B4, B1-C1, B2-C2, B3-C3, B4-C4, A1-C1, A2-C2, A3-C3, A4-C4, D1-E1, D2-E2, D3-E3, D4-E4, E1-F1, E2-F2, E3-F3, E4-F4, F1-D1, F2-D2, F3-D3, F4-D4, G1-H1, G2-H2, G3-H3, G4-H4, H1-G1, H2-G2, H3-G3, H4-G4, H1-I1, H2-I2, H3-I3, H4-I4, I1-H1, I2-H2, I3-H3, I4-H4, G1-I1, G2-I2, G3-I3, G4-I4, I1-G1, I2-G2, I3-G3, I4-G4	48

3.3.2 Etapa 1

Essa etapa foi composta de nove blocos, sendo cinco Blocos Ensino, três Blocos Teste e um Bloco Pós-Teste, envolvendo os elementos língua natural, escritos simbólicos e representações combinadas. Os Blocos Ensino eram formados por telas de instrução, blocos de relações numéricas e blocos de relações entre elementos algébricos.

No Bloco Ensino 1, havia quatro telas de instrução. A instrução aparecia no centro da tela como estímulo-modelo e no canto inferior direito aparecia uma figura com a palavra “Prosseguir”. Os participantes foram orientados a ler com atenção o que era apresentado no centro da tela para e somente depois clicar na palavra “prosseguir”. As instruções desse primeiro bloco eram as representadas no Quadro 13.

Quadro 13 – Telas de instrução apresentadas no Bloco Ensino 1.

Tela	*Instrução (estímulo-modelo)*	*Estímulos-comparação*
1	Uma máquina transforma todo número escolhido pelo usuário em outro número	PROSSEGUIR ➡
2	A transformação depende da programação que Renato faz	PROSSEGUIR ➡
3	Renato programou a máquina para que o número de saida fosse o número de entrada mais um	PROSSEGUIR ➡
4	Escolha uma expressão do canto da tela que está correta com o número de saida apresentado no centro da tela	PROSSEGUIR ➡

Em seguida, o *software* apresentava relações entre elementos numéricos e operações relacionadas às instruções apresentadas. Tais elementos numéricos são apresentados no Quadro 14.

Quadro 14 – Tentativas de relações numéricas apresentadas no Bloco Ensino 1

Tentativa	*Estímulos-Modelo*	*Estímulos-comparação*
1	3	2 + 1
2	1	0 + 1
3	2	1 + 1
4	4	3 + 1

O objetivo das tentativas apresentadas no Quadro 13 era fazer com que os participantes percebessem que as operações indicadas como estímulos-modelo estavam de acordo com a programação da instrução, ou seja, o número de entrada mais um. Essas tentativas foram apresentadas quatro vezes, totalizando 16 tentativas, sendo que em cada uma delas a figura correta estava localizada em uma posição diferente da tela do computador. Em seguida, nesse mesmo Bloco Ensino 1, eram apresentadas tentativas que envolviam elementos da linguagem algébrica, conforme Quadro 15.

Quadro 15 – Tentativas que envolviam elementos algébricos no Bloco Ensino 1

Tentativa	*Estímulos-Modelo*	*Estímulos-comparação*
1	y	$x+1$
2	x ➔ número de entrada y ➔ número de saída	$x+1$
3	$y=x+1$	<table><tr><td>x</td><td>y</td><td>(x,y)</td></tr><tr><td>0</td><td>$0+1=1$</td><td>A(0, 1)</td></tr><tr><td>1</td><td>$1+1=2$</td><td>B(1, 2)</td></tr></table>

Essas tentativas foram apresentadas quatro vezes no bloco, sendo que em cada uma delas a figura correta apresentava-se em uma posição diferente da tela do computador. Como pode ser observado, as instruções, os elementos da linguagem algébrica e as relações estabelecidas entre eles no Bloco Ensino 1 estavam relacionados à função *y=x+1*.

O Bloco Ensino 2, Bloco Ensino 3 e Bloco Ensino 4 estão estruturados da mesma forma que o Bloco Ensino 1. Entretanto, as instruções, os elementos da linguagem algébrica e as relações estabelecidas entre eles referiam-se à função *y=x+2*, no Bloco Ensino 2; *y=x-1*, no Bloco Ensino 3; e *y=x-2*, no Bloco Ensino 4. No Bloco Ensino 5, eram ensinadas discriminações condicionais entre língua natural (estímulos W, como estímulos-modelo) e escritos simbólicos (estímulos R, como estímulos comparação), conforme Quadro 16.

Quadro 16 – Elementos da linguagem algébrica que foram utilizados nas relações do Bloco Ensino 5

Classe	*W*	*R*
1	número de saída igual ao número de entrada mais um	$y = x + 1$
2	número de saída igual ao número de entrada mais dois	$y = x + 2$
3	número de saída igual ao número de entrada menos um	$y = x - 1$
4	número de saída igual ao número de entrada menos dois	$y = x - 2$

Uma vez atingido o critério de acertos de 80% das relações dos Blocos Ensino, os participantes eram submetidos aos Blocos Teste, para a verificação da formação das classes de equivalência, compostas pelos elementos do Quadro 17. Após o Bloco Teste de Equivalência, os participantes eram submetidos ao Pós-Teste, que consistia na apresentação das relações envolvendo os estímulos A, B e C do Pré-teste no *software*. As relações verificadas em cada um desses testes estão apresentadas no Quadro 18.

Quadro 17 – Elementos da linguagem algébrica que formam as classes de equivalência da Etapa 1

Etapa 1			
Classe	***J***	***R***	***Q***
1	*y* é igual a *x* mais um	$y = x + 1$	<table><tr><td>x</td><td>y</td><td>(x,y)</td></tr><tr><td>0</td><td>$0 + 1 = 1$</td><td>A(0, 1)</td></tr><tr><td>1</td><td>$1 + 1 = 2$</td><td>B(1, 2)</td></tr></table>
2	*y* é igual a *x* mais dois	$y = x + 2$	<table><tr><td>x</td><td>y</td><td>(x,y)</td></tr><tr><td>0</td><td>$0 + 2 = 2$</td><td>A(0, 2)</td></tr><tr><td>1</td><td>$1 + 2 = 3$</td><td>B(1, 3)</td></tr></table>
3	*y* é igual a *x* menos um	$y = x - 1$	<table><tr><td>x</td><td>y</td><td>(x,y)</td></tr><tr><td>0</td><td>$0 - 1 = -1$</td><td>A(0, -1)</td></tr><tr><td>1</td><td>$1 - 1 = 0$</td><td>B(1, 0)</td></tr></table>
4	*y* é igual a *x* menos dois	$y = x - 2$	<table><tr><td>x</td><td>y</td><td>(x,y)</td></tr><tr><td>0</td><td>$0 - 2 = -2$</td><td>A(0, -2)</td></tr><tr><td>1</td><td>$1 - 2 = -1$</td><td>B(1, 1)</td></tr></table>

Quadro 18 – Relações entre os elementos da linguagem algébrica utilizados nos testes da Etapa 1.

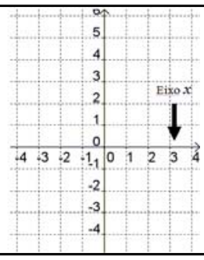
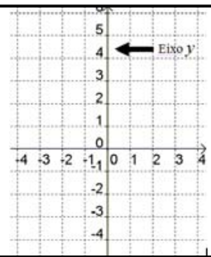
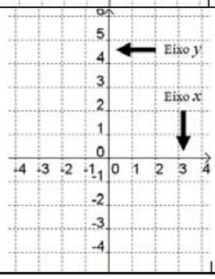
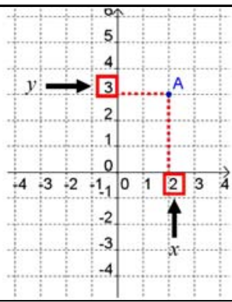
	Blocos	**Relações envolvidas**	**Número de Tentativas**
Blocos Teste	Teste LB	J1-K1 J2-K2 J3-K3 J4-K4 J1-L1 J2-L2 J3-L3 J4-L4	8
	Teste Simetria	K1-J1 K2-J2 K3-J3 K4-J4 L1-J1 L2-J2 L3-J3 L4-J4	8
	Teste Equivalência	K1-L1 K2-L2 K3-L3 K4-L4 L1-K1 L2-K2 L3-K3 L4-K4	8
Pós-teste	Teste de Generalização	A1-B1 A2-B2 A3-B3 A4-B4 B1-C1 B2-C2 B3-C3 B4-C4 A1-C1 A2-C2 A3-C3 A4-C4 B1-A1 B2-A2 B3-A3 B4-A4 C1-B1 C2-B2 C3-B3 C4-B4 C1-A1 C2-A2 C3-A3 C4-A4	24

3.3.3 Etapa 2

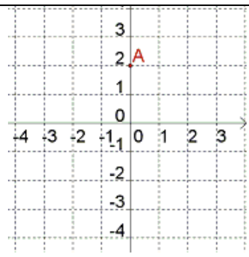
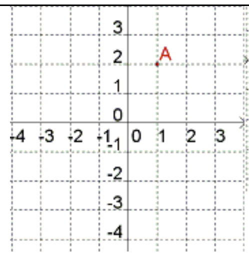
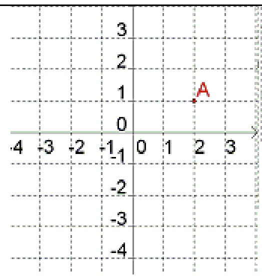
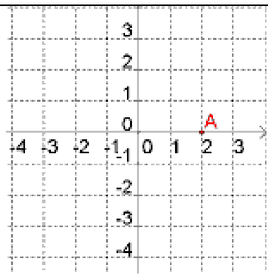
Essa etapa tinha o objetivo de fazer com que os participantes fossem capazes de estabelecer relações entre pares ordenados e o plano cartesiano. Assim como na etapa anterior, essa etapa foi divida em um Bloco Ensino, três Blocos Teste e um Bloco Pós-teste. As primeiras oito telas apresentadas pelo software continham instruções, conforme mostra o Quadro 19

Após as telas de instrução, esse bloco apresentava aos participantes 32 tentativas envolvendo os elementos da linguagem algébrica esboçados no Quadro 20. As relações dessa etapa envolviam apenas pontos localizados sobre os eixos e no primeiro quadrante. As relações envolvidas em cada um dos Blocos dessa etapa estão no Quadro 21. Sempre que o participante não atingisse o critério de acertos no Bloco Ensino ou nos Blocos Teste LB, Teste Simetria e Teste Equivalência, o software retornava para o Bloco Ensino. Após o Teste de Equivalência, os participantes eram submetidos ao Pós-teste, que era composto pelas relações do Pré-teste no software que envolviam os elementos D, E e F.

Quadro 19 – Telas de instrução apresentadas no bloco Ensino da Etapa 2

Tentativa	*Instrução (estímulo-modelo)*	*Estímulos-comparação*
1	Podemos representar os números de entrada (*x*) e saída (*y*) no Plano Cartesiano	PROSSEGUIR
2	Nesse plano, o eixo horizontal representa o número de entrada (*x*)	PROSSEGUIR
3		PROSSEGUIR
4	O eixo vertical representa o número de saída (*y*)	PROSSEGUIR
5		PROSSEGUIR
6		PROSSEGUIR
7	Se o número de entrada for dois (*x* = 2) e o número de saída for três (*y* = 3), a representação cartesiana será o ponto A(2,3)	PROSSEGUIR
8		PROSSEGUIR

Quadro 20 – Elementos da linguagem algébrica que formam as classes de equivalência da Etapa 2.

Etapa 2			
	M	***N***	***O***
1	$\boxed{x = 0 \text{ e } y = 2}$	$\boxed{\text{A } (0,2)}$	
2	$\boxed{x = 1 \text{ e } y = 2}$	$\boxed{\text{A } (1,2)}$	
3	$\boxed{x = 2 \text{ e } y = 1}$	$\boxed{\text{A } (2,1)}$	
4	$\boxed{x = 2 \text{ e } y = 0}$	$\boxed{\text{A } (2,0)}$	

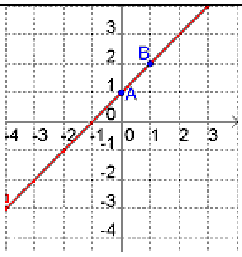
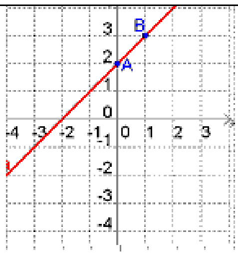
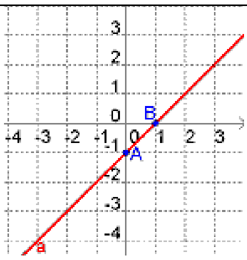
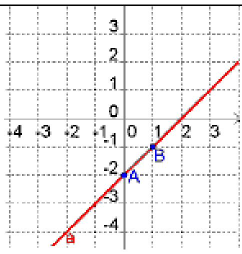
Quadro 21 – Relações entre os elementos da linguagem algébrica utilizados nos blocos Ensino e de testes da Etapa 2.

	Blocos	**Relações envolvidas**	**Número de Tentativas**
Bloco Ensino	Ensino	M1-N1 M2-N2 M3-N3 M4-N4 M1-O1 M2-O2 M3-O3 M4-O4	32
Blocos Teste	Teste LB	M1-N1 M2-N2 M3-N3 M4-N4 M1-O1 M2-O2 M3-O3 M4-O4	8
	Teste Simetria	N1-M1 N2-M2 N3-M3 N4-M4 O1-M1 O2-M2 O3-M3 O4-M4	8
	Teste Equivalência	N1-O1 N2-O2 N3-O3 N4-O4 O1-N1 O2-N2 O3-N3 O4-N4	8
Pós-teste	Teste de Generalização	D1-E1 D2-E2 D3-E3 D4-E4 E1-F1 E2-F2 E3-F3 E4-F4 F1-D1 F2-D2 F3-D3 F4-D4 E1-D1 E2-D2 E3-D3 E4-D4 F1-E1 F2-E2 F3-E3 F4-E4 D1-F1 D2-F2 D3-F3 D4-F4	24

3.3.4 Etapa 3

Na Etapa 3 os participantes eram ensinados a estabelecer relações entre três elementos da linguagem algébrica característicos de funções do primeiro grau da forma $y=1x+b$: escritos simbólicos (expressão que define uma função) e representações combinadas (tabelas e gráficos). Nessa etapa, não havia telas de instrução. As respostas dos participantes no Bloco Ensino foram reforçadas diferencialmente e as dos testes eram submetidos à extinção. Os elementos da linguagem algébrica que formaram as quatro classes de equivalência dessa etapa e as relações envolvidas nos diferentes blocos estão esboçadas nos Quadros 22 e 23.

Quadro 22 – Elementos da linguagem algébrica que formam as classes de equivalência da Etapa 3.

<table>
<tr><th colspan="4">Etapa 3</th></tr>
<tr><th></th><th>P</th><th>Q</th><th>R</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>(x,y)</th></tr><tr><td>0</td><td>0 + 1 = 1</td><td>A(0, 1)</td></tr><tr><td>1</td><td>1 + 1 = 2</td><td>B(1, 2)</td></tr></table></td><td>$\boxed{y = x + 1}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>(x,y)</th></tr><tr><td>0</td><td>0 + 2 = 2</td><td>A(0, 2)</td></tr><tr><td>1</td><td>1 + 2 = 3</td><td>B(1, 3)</td></tr></table></td><td>$\boxed{y = x + 2}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>(x,y)</th></tr><tr><td>0</td><td>0 – 1 = -1</td><td>A(0, -1)</td></tr><tr><td>1</td><td>1 – 1 = 0</td><td>B(1, 0)</td></tr></table></td><td>$\boxed{y = x - 1}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>(x,y)</th></tr><tr><td>0</td><td>0 – 2 = -2</td><td>A(0, -2)</td></tr><tr><td>1</td><td>1 – 2 = -1</td><td>B(1, 1)</td></tr></table></td><td>$\boxed{y = x - 2}$</td></tr>
</table>

Quadro 23 – Relações entre os elementos da linguagem algébrica utilizados nos blocos Ensino e de testes da Etapa 3.

	Blocos	Relações envolvidas	Número de Tentati-vas
Bloco Ensino	Ensino	Q1-P1 Q2-P2 Q3-P3 Q4-P4 Q1-R1 Q2-R2 Q3-R3 Q4-R4	32
Blocos Teste	Teste LB	Q1-P1 Q2-P2 Q3-P3 Q4-P4 Q1-R1 Q2-R2 Q3-R3 Q4-R4	8
	Teste Simetria	P1-Q1 P2-Q2 P3-Q3 P4-Q4 R1-Q1 R2-Q2 R3-Q3 R4-Q4	8
	Teste Equivalência	P1-R1 P2-R2 P3-R3 P4-R4 R1-P1 R2-P2 R3-P3 R4-P4	8
Pós-teste	Teste de Generalização	G1-H1 G2-H2 G3-H3 G4-H4 H1-G1 H2-G2 H3-G3 H4-G4 H1-I1 H2-I2 H3-I3 H4-I4 I1-H1 I2-H2 I3-H3 I4-H4 G1-I1 G2-I2 G3-I3 G4-I4 I1-G1 I2-G2 I3-G3 I4-G4	24

3.3.5 Pós-Teste Escrito

Após o procedimento apresentado pelo *software*, os participantes receberam novamente o formulário de teste (conforme descrito no Quadro 9) e responderam as questões sem o uso de calculadora, rascunho ou qualquer material. Vale ressaltar que os elementos da linguagem algébrica que foram apresentados no formulário de teste não apareceram em nenhuma das etapas do procedimento no *software*.

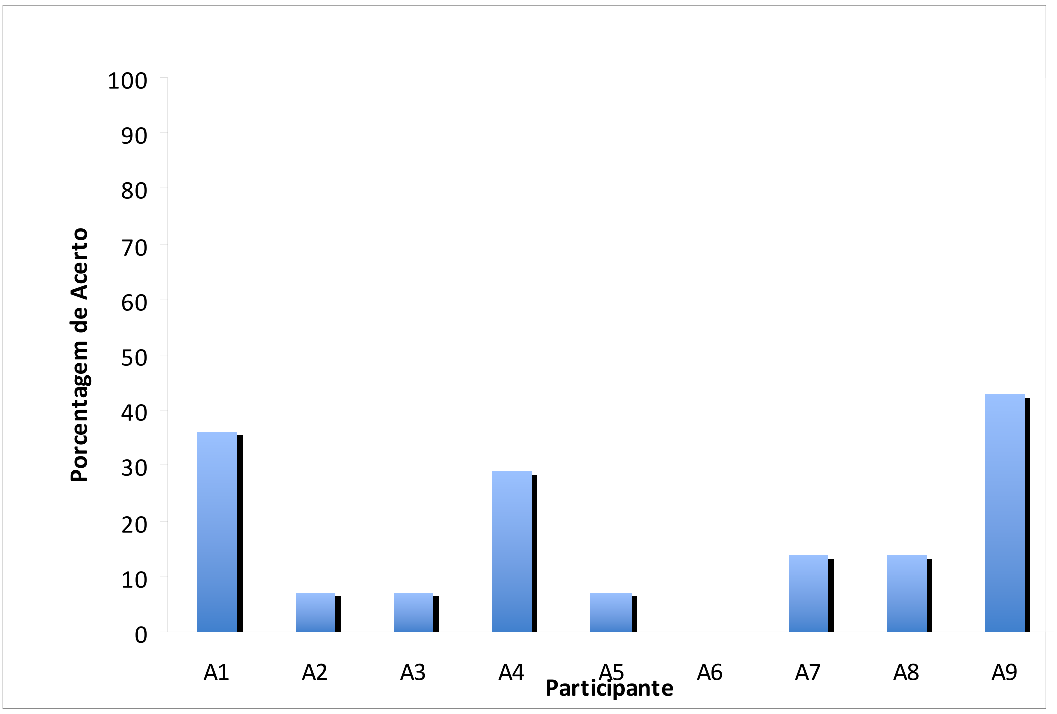
3.4 Resultados

Todos os participantes necessitaram de apenas uma única sessão, cujo tempo de duração variou de 1h45min a 3h45min para que resolvessem o Pré-teste e o Pós-teste escrito e para que realizassem as tarefas no computador. Primeiramente, são apresentados os resultados por etapa e bloco do procedimento. Em seguida, os desempenhos individuais dos participantes em todas as etapas do procedimento serão apresentados e discutidos.

3.4.1 Pré-Teste

Conforme descrito anteriormente, o Pré-teste foi realizado em duas etapas: uma escrita e outra no *software*. Antes de iniciar o procedimento com o *software*, foi solicitado aos participantes que respondessem as questões do teste escrito à caneta e sem a utilização de calculadora. A produção escrita dos participantes nesse teste foi analisada e as resoluções das questões foram classificadas em quatro grupos: correta, parcialmente correta, incorreta, em branco. Para cada um desses grupos, foram atribuídas as seguintes pontuações: 2, caso a resolução e resposta estivessem corretas; 1, caso a resposta e/ou resolução estivessem parcialmente incorretas e 0 caso a resolução e resposta estivessem incorretas ou em branco. Por meio dessa pontuação, foi calculado o desempenho percentual dos participantes nesse teste, conforme ilustra a Figura 13.

Figura 13 – Porcentagens de acertos dos participantes no Pré-teste escrito



Fonte: Dados obtidos no Pré-teste escrito.

O desempenho dos participantes variou de 0 a 42,9%, sendo que grande parte das resoluções estava parcialmente correta, incorretas ou em branco. Foram consideradas como completamente correta apenas uma produção escrita referente às Questões 1a, 1b e 5 e duas resoluções referentes a Questão 4. A classificação das resoluções e respostas às questões está na Tabela 5.

Tabela 5 – Classificação das resoluções das questões do pré-teste escrito.

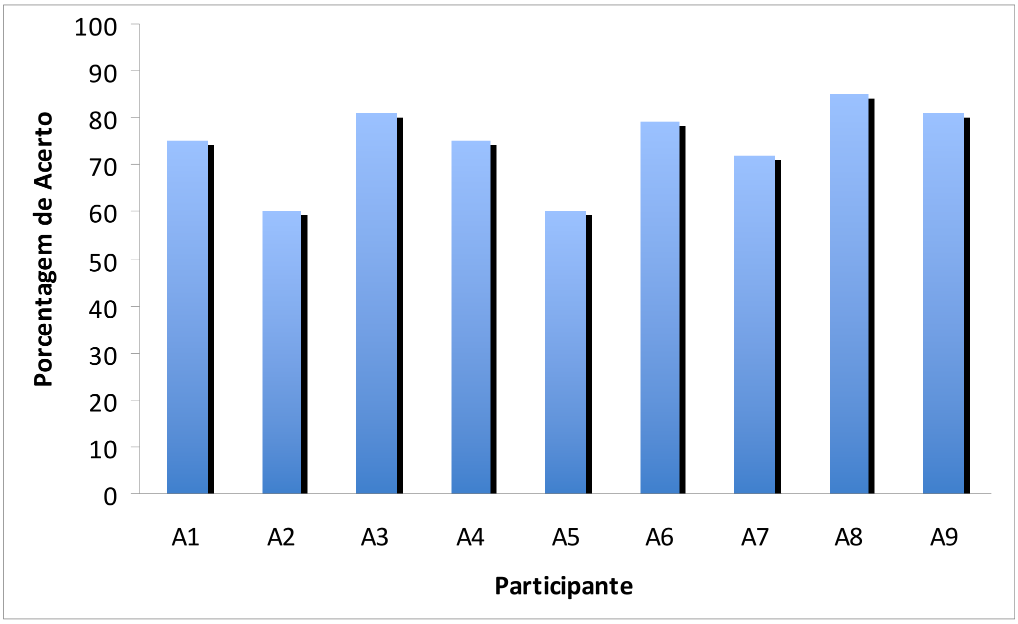
Questão	*Correta*	*Parcialmente correta*	*Incorreta*	*Em branco*
1a	1	0	7	1
1b	1	4	3	1
1c	0	0	2	7
2	0	0	4	5
3	0	0	4	5
4	2	3	4	0
5	1	5	3	0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

Cerca de 8% das resoluções do total de questões foi considerada como correta, 19% parcialmente correta, 43% como incorreta e cerca de 30% estavam em branco. Em três das quatro resoluções classificadas como parcialmente corretas para a Questão 1b foi verificado que os participantes preencheram a tabela como se fosse a função y=x+4, pois existia uma tabela dessa função na Questão 2. O erro mais comum verificado nas resoluções das Questões 4 e 5 foi devido à troca do valor da abscissa pelo valor da ordenada na identificação das coordenadas do ponto no plano ou ao esboçar o ponto no plano cartesiano dada suas coordenadas.

Em seguida, os participantes iniciaram o Pré-teste no *software*. O desempenho de todos os participantes no Pré-teste no *software* não foi tão baixo como no Pré-teste escrito. A Figura 14 ilustra o desempenho de cada um deles no pré-teste.

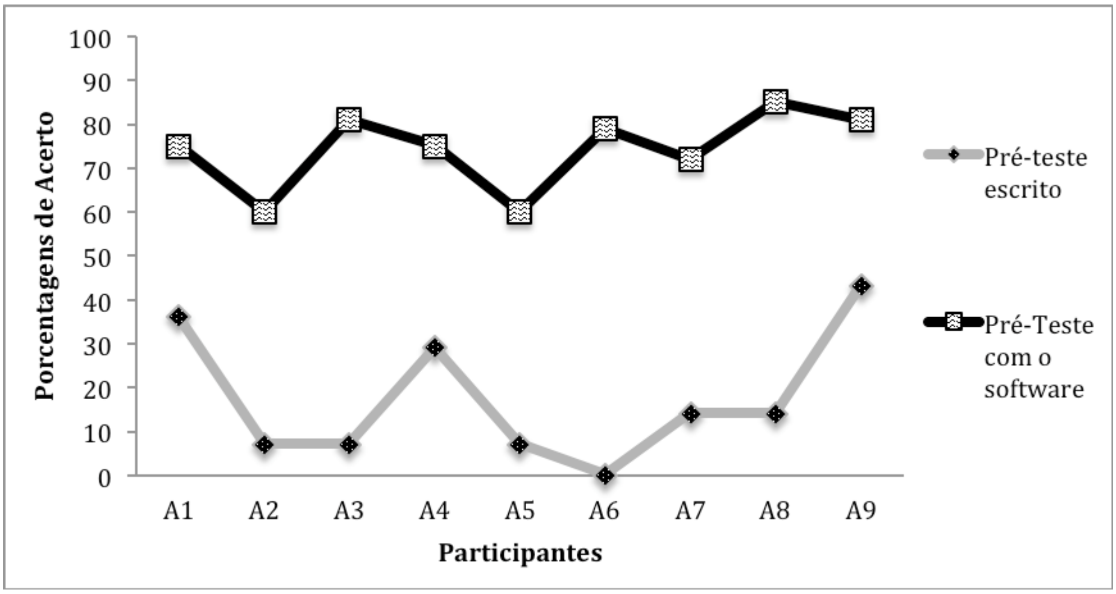
Figura 14 – Porcentagens de acertos dos participantes no Pré-teste apresentado no *software*



Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

Como pode ser observado na Figura 14, o desempenho no Pré-teste no *software* variou de 60% a 85%, o que corresponde respectivamente a 29 e 41 acertos em um total de 48 relações. Entretanto, o desempenho no Pré-teste escrito foi muito baixo. A Figura 15 permite uma comparação do desempenho dos participantes nos dois tipos de Pré-testes. De modo geral, percebe-se uma mesma tendência entre os desempenhos dos participantes nesses testes, uma vez que, exceto para os participantes A3, A4, A6 e A9, os que apresentaram um desempenho baixo em relação aos demais no Pré-teste escrito também foram os que apresentaram um baixo desempenho em relação aos demais no Pré-teste com o *software*.

Figura 15 – Comparação das porcentagens de acertos dos participantes no Pré-teste escrito e no Pré-teste com o *software*



Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

3.4.2 Etapa 1

Nessa etapa, foi solicitado aos participantes que estabelecessem relações entre os estímulos língua natural, representações combinadas (tabela) e escritos simbólicos. A fase de ensino dessa etapa foi dividida em cinco blocos, cujo desempenho por participante no ensino e nos testes está apresentado na Tabela 6.

Tabela 6 – Porcentagens de acertos dos participantes nos blocos da primeira etapa do procedimento.[14]

Bloco	*Porcentagens de acertos em cada bloco*								
	Participantes								
	A1	*A2*	*A3*	*A4*	*A5*	*A6*	*A7*	*A8*	*A9*
Ensino 1	92,9	96,4	100,0	92,9	**85,7**	89,3	82,1	92,9	92,9
Ensino 2	85,7	96,4	89,3	92,9	**89,3**	89,3	**100,0**	100,0	100,0
Ensino 3	**100,0**	100,0	96,4	92,9	92,9	85,7	96,4	100,0	100,0
Ensino 4	89,3	92,9	89,3	89,3	82,1	100,0	96,4	100,0	92,9
Ensino 5	**100,0**	100,0	100,0	93,8	**93,8**	**100,0**	100,0	**100,0**	100,0
Teste LB	**100,0**	100,0	100,0	87,5	100,0	**100,0**	100,0	**100,0**	87,5
Teste Sim.	**100,0**	100,0	100,0	100,0	100,0	87,5	100,0	100,0	100,0
Teste Equiv.	100,0	100,0	87,5	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
Teste Gen.	100,0	100,0	95,8	100,0	41,7	87,5	100,0	100,0	100,0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

Os Participantes A2, A3, A4 e A9 atingiram o critério de acertos na primeira vez que foram submetidos aos blocos. Cabe salientar que todos os participantes demonstraram a formação das classes de estímulos equivalentes, bem como um desempenho superior a 87% no Teste de Generalização, exceto o Participante A5.

O Participante A1 repetiu o bloco Ensino 3 uma vez e respondeu incorretamente todas as oito relações envolvendo o estímulo Y, que era uma figura contendo a letra y e o estímulo D, que indicava que “x é o número de entrada” e “y é o número de saída”. (ver Quadro 15). Analisando a Tabela 6, que contém o desempenho do participante em todos os blocos, pode-se inferir que o mesmo estava sob controle das regras por ele criadas nos blocos anteriores, pois de oito respostas incorretas nesse bloco, cinco são referentes as respostas corretas para os blocos de Ensino 1 e 2, cujas funções eram $y=x+1$, e $y=x+2$. Por não atingir o critério de acertos do bloco de teste de simetria, o participante retornou ao Bloco Ensino 5 e apresentou, nesse e nos demais blocos dessa etapa, desempenho de 100% das relações corretas.

[14] As porcentagens em negrito indicam que o participante repetiu pelo menos uma vez o bloco para atingir tal desempenho.

Tabela 7 –Desempenho do Participante A1 em todos os blocos a que foi submetido na Etapa 1[15]

Bloco	*Porcentagens de acertos*		
Ensino 1	92,9		
Ensino 2	85,7		
Ensino 3	71,4	**100,0**	
Ensino 4		89,3	
Ensino 5		100,0	**100,0**
Teste LB		87,5	**100,0**
Teste Simetria		75,0	**100,0**
Teste Equivalência			100,0
Teste Generalização			100,0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

Nas tabelas que contém o desempenho dos participantes nas diferentes etapas do procedimento, o número de colunas de porcentagens de acertos menos um indica o número de vezes que o procedimento retornou para algum bloco. A Tabela 7 mostra que o Participante A1, por não atingir o critério de acertos no Bloco Ensino 3, retornou ao início desse bloco, apresentando100% de acertos. Depois, por não atingir o critério no Bloco Teste Simetria, foi submetido ao Bloco Ensino 5 e seu desempenho está registrado na terceira coluna das porcentagens de acertos.

Na primeira etapa do estudo, o Participante A5 foi o que mais necessitou repetir os blocos para atingir o critério de acertos. De acordo com a Tabela 8, ele foi submetido ao bloco Ensino 1 três vezes por não atingir o critério de acertos duas vezes desse bloco. Na primeira vez, os erros concentraram-se nas relações envolvendo os estímulos Y (figura contendo a letra y), D (figura indicando que x é o número de entrada e y o número de saída) e R (expressões algébricas como y=x+1). Na segunda vez, as relações incorretas envolveram os estímulos Y e D.

[15] As porcentagens em negrito indicam que o participante repetiu pelo menos uma vez o bloco para atingir tal desempenho.

Tabela 8 –Desempenho do Participante A5 em todos os blocos que foi submetido na Etapa 1[16]

Bloco	*Porcentagens de acertos*				
Ensino 1	60,7	75,0	**85,7**		
Ensino 2			75,0	**89,3**	
Ensino 3				92,9	
Ensino 4				82,1	
Ensino 5				75,0	**93,8**
Teste LB					100,0
Teste Simetria					100,0
Teste Equivalência					100,0
Teste Generalização					41,7

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

No Bloco Ensino 2, as relações incorretas também envolveram os estímulos Y e D. No Bloco Ensino 5, não foi possível identificar um padrão de erros de relações. Vale ressaltar que, apesar de nos testes seguintes ao Bloco Ensino 5 o desempenho do participante ter sido de 100%, o desempenho no Teste de Generalização das relações desse bloco foi muito baixo, inclusive menor do que no pré-teste no *software*.

A Tabela 9 apresenta o desempenho dos Participantes A6, A7 e A8, que necessitaram retornar nos blocos apenas uma vez por não atingir o critério de acertos no Bloco Ensino 2 (Participante A7) e no bloco Teste de Linha de Base (Participantes A6 e A8). O maior índice de erros do Participante A7 no bloco Ensino 2 envolveu as relações entre os estímulos Y e D, da mesma forma como os Participantes A1 e A5. As respostas dadas pelo participante no Bloco Ensino 2 estavam de acordo com o bloco anterior, que era referente à função $y=x+1$, o que indica que o mesmo estava respondendo sobre o controle de estímulos estabelecido pelas relações do bloco anterior.

[16] As porcentagens em negrito indicam que o participante repetiu pelo menos uma vez o bloco para atingir tal desempenho.

Tabela 9 – Desempenho dos Participantes A6, A7 e A8 em todos os blocos que foi submetido na Etapa 1[17]

Bloco	*Porcentagens de acertos*					
	A6		*A7*		*A8*	
Ensino 1	89,3		82,1		92,9	
Ensino 2	89,3		71,4	**100,0**	100,0	
Ensino 3	85,7			96,4	100,0	
Ensino 4	100,0			96,4	100,0	
Ensino 5	100,0	**100,0**		100,0	100,0	**100,0**
Teste LB	75,0	**100,0**		100,0	75,0	**100,0**
Teste Simetria		87,5		100,0		100,0
Teste Equivalência		100,0		100,0		100,0
Teste Generalização		87,5		100,0		100,0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

3.4.3 Etapa 2

Nessa etapa, os participantes foram, inicialmente, instruídos a localizar os pontos no plano cartesiano, bem como a identificar as coordenadas de um ponto representado nesse plano. As primeiras 11 tentativas do bloco de ensino eram telas de instrução e as demais envolviam os seguintes elementos: figura de um ponto representado no plano cartesiano e figura com suas coordenadas. As porcentagens de respostas corretas apresentadas pelos participantes nessa segunda etapa do procedimento está na Tabela 10.

Tabela 10 – Porcentagens de acertos dos participantes nos blocos da segunda etapa do procedimento[18]

Blocos	***Porcentagens de acertos***								
	Participantes								
	A1	*A2*	*A3*	*A4*	*A5*	*A6*	*A7*	*A8*	*A9*
Ensino	100,0	**93,8**	81,3	**87,5**	**90,6**	96,9	**84,4**	**87,5**	90,6
Teste LB	87,5	**100,0**	87,5	**100,0**	**100,0**	100,0	100,0	**87,5**	100,0
Teste Sim.	100,0	100,0	87,5	**100,0**	**87,5**	100,0	100,0	100,0	100,0
Teste Equiv.	100,0	100,0	87,5	**100,0**	87,5	100,0	100,0	87,5	100,0
Teste Gen.	95,8	87,5	83,3	100,0	100,0	95,8	83,3	100,0	95,8

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

[17] As porcentagens em negrito indicam que o participante repetiu pelo menos uma vez o bloco para atingir tal desempenho.

[18] As porcentagens em negrito indicam que o participante repetiu pelo menos uma vez o bloco para atingir tal desempenho.

Nessa etapa, os Participantes A1, A3, A6 e A9 conseguiram atingir o critério de acertos na primeira vez que foram submetidos aos blocos. O Participante A2, conforme pode ser visto na Tabela 11, necessitou repetir o Bloco Ensino três vezes, duas por não atingir o critério de acertos das relações deste bloco e outra por não atingir o critério no Teste LB.

Tabela 11 – Desempenho do Participante A2 em todos os blocos que foi submetido na Etapa 2

Bloco	*Porcentagens de acertos*			
Ensino	68,8	75,0	93,8	**93,8**
Teste LB			75,0	**100,0**
Teste Simetria				100,0
Teste Equivalência				100,0
Teste Generalização				87,5

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

Os erros do Participante A5 nas duas primeiras vezes que foi submetido ao Bloco Ensino e ao Bloco Teste de Linha de Base são nas relações envolvendo os estímulos M (descrição das coordenadas dos pontos no plano cartesiano, como por exemplo “x=0 e y=2”) e O (figura com pontos indicados no plano cartesiano. Ver Quadro 20). Esses erros ainda persistiram na quarta vez que o participante foi submetido ao Bloco Ensino, uma vez que apresentou duas relações incorretas envolvendo esses elementos da linguagem algébrica.

O Participante A4 repetiu o Bloco Ensino oito vezes, sendo cinco por não atingir o critério do próprio bloco e três por não atingir o critério em algum dos testes. Grande parte dos erros do participante são em relações que envolvem os estímulos M e O. Apesar dos erros e da necessidade de repetição dos blocos, a formação da classe de equivalência foi verificada, bem como o desempenho de 100% de acertos no Teste de Generalização.

Tabela 12 – Desempenho do Participante A4 em todos os blocos que foi submetido na Etapa 2[19].

Bloco	*Porcentagens de Acertos*								
Ensino	53,1	65,6	68,8	65,6	62,5	81,3	93,8	87,5	**87,5**
Teste LB						87,5	87,5	100,0	**100,0**
Teste Sim.						87,5	100,0	37,5	**100,0**
Teste Equiv.						50,0	75,0		**100,0**
Teste Gen.									100,0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

O Participante A5 repetiu o bloco ensino cinco vezes, sendo duas por não ter atingido o critério de acertos no bloco e três vezes por não atingir o critério de acertos em algum dos testes. Os Participantes A7 e A8 repetiram o Bloco Ensino três vezes. O Participante A7 o fez por não atingir o critério de acertos no próprio bloco e o Participante A8 repetiu duas vezes por não atingir o critério de acertos no bloco e uma vez por não atingir o critério no Teste LB.

Tabela 13 – Desempenho do Participante A5 em todos os blocos que foi submetido na Etapa 2[20]

Bloco	*Porcentagens de Acertos*					
Ensino	71,9	90,6	87,5	68,8	90,6	**90,6**
Teste LB		75,0	87,5		75,0	**100,0**
Teste Simetria			62,5			**87,5**
Teste Equivalência						87,5
Teste Generalização						100,0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

[19] As porcentagens em negrito indicam que o participante repetiu pelo menos uma vez o bloco para atingir tal desempenho.
[20] As porcentagens em negrito indicam que o participante repetiu pelo menos uma vez o bloco para atingir tal desempenho.

Tabela 14 – Desempenho dos Participantes A7 e A8 em todos os blocos que foi submetido na Etapa 2

Bloco	*Porcentagens de acertos*							
	A7				*A8*			
Ensino	71,9	65,6	75,0	**84,4**	65,6	78,1	81,3	**87,5**
Teste LB				100,0			75,0	**87,5**
Teste Sim.				100,0				100,0
Teste Equiv.				100,0				87,5
Teste Gen.				83,3				100,0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

De modo geral, os erros dos participantes nessa etapa são referentes a relações entre os estímulos M (descrição das coordenadas dos pontos no plano cartesiano, como por exemplo “x=0 e y=2”) e O (figura com pontos indicados no plano cartesiano. Ver Quadro 20).

3.4.4 Etapa 3

Nessa etapa, os participantes estabeleceram relações entre elementos da linguagem algébrica referentes a funções do primeiro grau da forma y=1x+b, foi verificado se ocorreu a formação das classes de equivalência e se ocorreu generalização de estímulos. Dos nove participantes, três necessitaram repetir pelo menos uma vez um ou mais de um dos cinco blocos dessa etapa. O desempenho dos participantes é apresentado na Tabela 15.

Tabela 15 – Porcentagens de acertos dos participantes nos blocos da terceira etapa do procedimento[21]

Blocos	*Porcentagens de acertos*								
	A1	*A2*	*A3*	*A4*	*A5*	*A6*	*A7*	*A8*	*A9*
Ensino	90,6	**96,9**	**93,8**	90,6	96,9	*	**93,8**	100,0	87,5
Teste LB	100,0	**100,0**	**100,0**	100,0	100,0	*	**87,5**	100,0	87,5
Teste Sim.	100,0	**100,0**	**100,0**	87,5	100,0	*	100,0	100,0	100,0
Teste Equiv.	87,5	**87,5**	**100,0**	100,0	100,0	*	100,0	87,5	100,0
Teste Gen.	100,0	100,0	95,8	100,0	66,7	54,2	95,8	100,0	100,0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

* Devido a um erro do banco de dados, não foi possível recuperar as informações referentes ao desempenho do Participante A6 nos blocos Ensino, Teste de Linha de Base, Teste de Simetria e de Equivalência. Não foi possível verificar se a classe de estímulos equivalentes foi formada.

Com exceção do Participante A6, cujas informações não puderam ser recuperadas, foi verificada a formação de classes de equivalência para os demais e um desempenho superior a 66% nos Testes de Generalização. Conforme pode ser observado na Tabela 16, o baixo desempenho no teste de equivalência foi responsável por fazer com que o Participante A2 repetisse uma vez os blocos Ensino, Teste LB, Simetria e Equivalência.

Tabela 16 – Desempenho do Participante A2 em todos os blocos que foi submetido na Etapa 3

Bloco	*Porcentagens de Acertos*	
Ensino	87,5	**96,9**
Teste LB	100,0	**100,0**
Teste Simetria	100,0	**100,0**
Teste Equivalência	50,0	**87,5**
Teste Generalização		100,0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

O Participante A3 repetiu os blocos uma vez por não ter atingido o critério de acertos no Teste Simetria e três vezes por não atingir o critério no Teste de Equivalência. Não foram verificados erros sistemáticos nas relações estabelecidas por ele nos blocos dessa etapa. O Participante A7, repetiu o Bloco Ensino sete vezes ou por não atingir o critério de acertos do bloco ou por não atingir o critério no Bloco Teste LB. Analisando as respostas

[21] As porcentagens em negrito indicam que o participante repetiu pelo menos uma vez o bloco para atingir tal desempenho.

desse participante, verifica-se a ocorrência sistemática da relação Q1-P4 (tabela que contém valores referentes à função y=x+1 e o gráfico da função y=x-2) e Q4-P1 (tabela que contém valores referentes à função y=x-2 e o gráfico da função y=x+1) no Bloco Ensino e no Bloco Teste LB, sendo que as mesmas foram responsáveis pelo baixo desempenho do participante em quatro vezes que repetiu o Bloco Teste LB.

Tabela 17 – Desempenho do Participante A3 em todos os blocos que foi submetido na Etapa 3[22]

Participante A3	*Porcentagens de Acertos*				
Ensino	87,5	96,9	96,9	93,8	**93,8**
Teste LB	100,0	100,0	100,0	100,0	**100,0**
Teste Simetria	62,5	87,5	100,0	100,0	**100,0**
Teste Equivalência		62,5	25,0	75,0	**100,0**
Teste Generalização					95,8

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

Tabela 18 – Desempenho do Participante A7 em todos os blocos que foi submetido na Etapa 3

Bloco	*Porcentagens de Acertos*							
Ensino	90,6	81,3	81,3	68,8	81,3	75,0	87,5	75,0	**93,8**
Teste LB	75,0	75,0	62,5		75,0		75,0		**87,5**
Teste Sim.									100,0
Teste Equiv.									100,0
Teste Gen.									95,8

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

Embora o procedimento tenha retornado várias vezes para alguns participantes, é importante salientar que a formação de classes de equivalência ocorreu sem que fosse necessária qualquer intervenção por parte do pesquisador junto aos participantes.

---

[22] As porcentagens em negrito indicam que o participante repetiu pelo menos uma vez o bloco para atingir tal desempenho.

3.4.5 Pós-Teste Escrito

Após encerrar o procedimento com o *software*, aos participantes foram entregues o teste contendo as mesmas questões do Pré-teste, com o intuito de se verificar se houve diferença nas produções escritas dos mesmos para as questões. Da mesma forma que no Pré-teste escrito, as resoluções e respostas foram classificadas em corretas, parcialmente corretas e incorretas, sendo atribuídos os Pontos 2, 1 e 0, respectivamente. Os resultados dessa classificação mostram que, de modo geral, o desempenho dos participantes variou de 50% a 100%.

Tabela 19 – Classificação das resoluções das questões do pós-teste escrito.

Questão	*Correta*	*Parcialmente correta*	*Incorreta*	*Em branco*
1a	8	0	0	1
1b	6	0	2	1
1c	7	0	2	0
2	3	0	5	1
3	6	0	2	1
4	5	4	0	0
5	3	6	0	0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

A Tabela 19 mostra que a maior parte, cerca de 60%, das resoluções dos participantes no pós-teste está correta. Aproximadamente 16% foram classificadas como parcialmente corretas, 18% como incorretas e 6% estavam em branco. É importante destacar que oito dos nove participantes foram capazes de escrever a expressão a função que representa uma situação (o que foi solicitado na Questão 1a), sete foram capazes de esboçar o gráfico cartesiano da função e seis foram capazes de completar uma tabela que continha alguns de seus pontos.

Além disso, seis participantes identificaram a expressão matemática de uma função representada em forma de uma tabela, mas apenas três escreveram a expressão matemática de uma função a partir do gráfico. Cabe destacar também que, assim como no Pré-teste escrito, o erro mais comum verificado nas resoluções das Questões 4 e 5 foi do tipo troca do valor da abscissa pelo valor da ordenada na identificação das coordenadas do ponto no plano ou ao esboçar o ponto no plano cartesiano dado suas coordenadas.

3.4.6 Desempenho Geral dos Participantes

A Tabela 20 mostra o desempenho dos participantes em todas as etapas do procedimento com o *software*, a Figura 16 os desempenhos dos participantes no Pré e no Pós-teste com o *software* e a Figura 17 os desempenhos no Pré e no Pós-teste escritos. Houve um aumento no percentual de acertos de todos os participantes do Pré para o Pós-teste, sendo que a diferença de desempenho foi pequena apenas para o Participante A6.

Tabela 20 – Porcentagens de acertos dos participantes nos diferentes blocos do procedimento no *software*[23].

Blocos	***Porcentagens de acertos***								
	A1	***A2***	***A3***	***A4***	***A5***	***A6***	***A7***	***A8***	***A9***
Ensino 1	92,9	96,4	100,0	92,9	**85,7**	89,3	82,1	92,9	92,9
Ensino 2	85,7	96,4	89,3	92,9	**89,3**	89,3	**100,0**	100,0	100,0
Ensino 3	**100,0**	100,0	96,4	92,9	92,9	85,7	96,4	100,0	100,0
Ensino 4	89,3	92,9	89,3	89,3	82,1	100,0	96,4	100,0	92,9
Ensino 5	**100,0**	100,0	100,0	93,8	**93,8**	**100,0**	100,0	**100,0**	100,0
Teste LB	**100,0**	100,0	100,0	87,5	100,0	**100,0**	100,0	**100,0**	87,5
Teste Sim.	**100,0**	100,0	100,0	100,0	100,0	87,5	100,0	100,0	100,0
Teste Equiv.	100,0	100,0	87,5	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
Teste Gen.	100,0	100,0	95,8	100,0	41,7	87,5	100,0	100,0	100,0
Ensino	100,0	**93,8**	81,3	**87,5**	**90,6**	96,9	**84,4**	**87,5**	90,6
Teste LB	87,5	**100,0**	87,5	**100,0**	**100,0**	100,0	100,0	**87,5**	100,0
Teste Sim.	100,0	100,0	87,5	**100,0**	**87,5**	100,0	100,0	100,0	100,0
Teste Equiv.	100,0	100,0	87,5	**100,0**	87,5	100,0	100,0	87,5	100,0
Teste Gen.	95,8	87,5	83,3	100,0	100,0	95,8	83,3	100,0	95,8
Ensino	90,6	**96,9**	**93,8**	90,6	96,9	*	**93,8**	100,0	87,5
Teste LB	100,0	**100,0**	**100,0**	100,0	100,0	*	**87,5**	100,0	87,5
Teste Sim.	100,0	**100,0**	**100,0**	87,5	100,0	*	100,0	100,0	100,0
Teste Equiv.	87,5	**87,5**	**100,0**	100,0	100,0	*	100,0	87,5	100,0
Teste Gen.	100,0	100,0	95,8	100,0	66,7	54,2	95,8	100,0	100,0

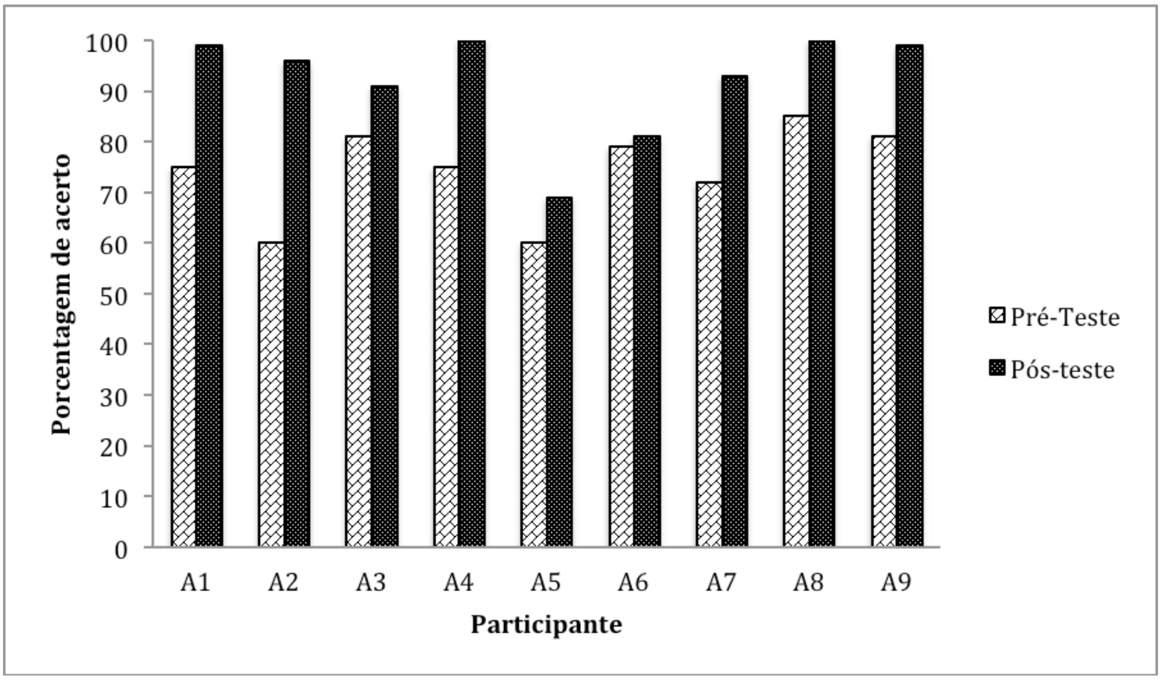
Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

O Participante A1 repetiu alguns dos blocos apenas na Etapa 1 do procedimento. Nas demais etapas, o critério de acertos foi atingido na primeira vez que foi submetido em cada um dos blocos. Apesar de o desempenho no Pré-teste no *software* desse

[23] As porcentagens em negrito indicam que o participante repetiu pelo menos uma vez o bloco para atingir tal desempenho.

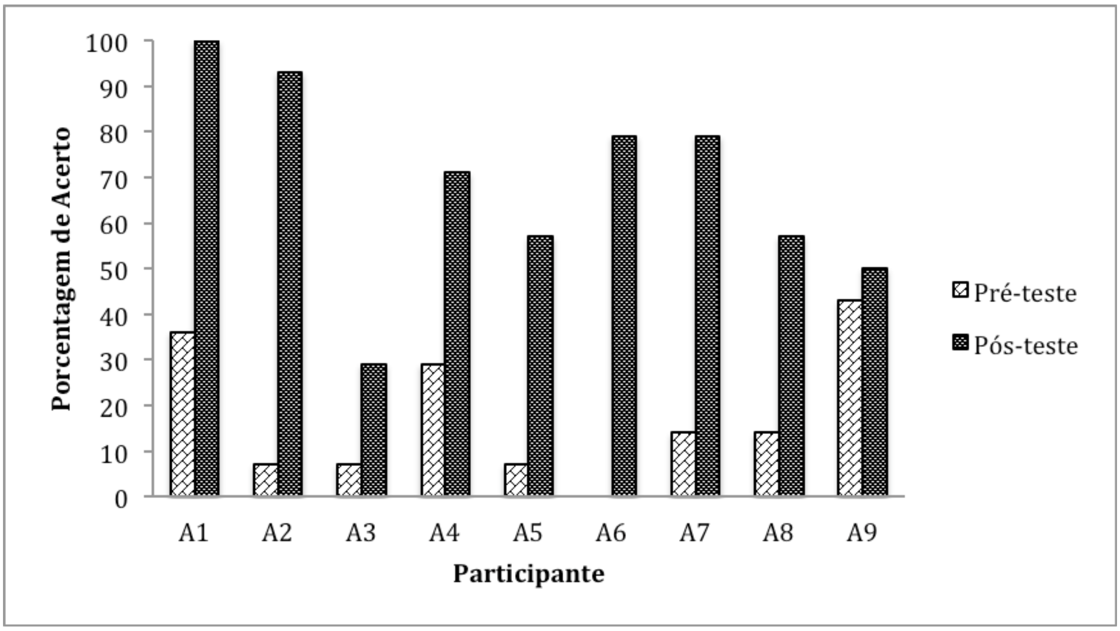
participante ter sido superior a 70%, no Pré-teste escrito, o desempenho foi baixo – cerca de 35%. Nesse teste, esse participante foi capaz de identificar corretamente a função da Questão 1a, marcou corretamente os pontos A e B no plano cartesiano (Questão 4) e identificou corretamente as coordenadas dos pontos A e B na Questão 5. Após ter sido submetido ao procedimento no *software*, o desempenho no Pós teste aumentou, sendo que tal aumento foi considerável no Pós-teste escrito, atingindo 100% de acertos.

Figura 16 – Desempenho dos participantes no Pré e Pós-teste com o *software*



Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

Figura 17 – Desempenho dos participantes no Pré e Pós-teste escrito



Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

O Participante A2 foi um dos que apresentou maior diferença de desempenho no Pós-teste escrito. O desempenho neste teste escrito aumentou de 7% para 93%, sendo que todas as questões foram respondidas corretamente no Pós-teste, exceto a Questão 5, na qual o participante trocou o valor da abscissa pela ordenada na identificação das coordenadas do ponto C.

O desempenho do Participante A3 no Pré-teste e Pós-teste com o *software* não mudou muito. Entretanto, houve uma maior diferença no desempenho no Pós–teste escrito, mesmo esse sendo inferior a 30%. Durante o procedimento no *software*, o baixo desempenho no Teste de Simetria ou no Teste de Equivalência fez com que o procedimento retornasse quatro vezes na Etapa 3. Mesmo sendo verificadas a formação das classes de equivalência e um alto desempenho no pós-teste no *software*, esse participante foi capaz, no Pós-teste escrito, apenas de: identificar corretamente a função referente a Questão 1a; marcar corretamente no plano cartesiano os pontos B e C da Questão 4, trocando a abscissa pela ordenada nos pontos A e D e identificar corretamente apenas as coordenadas do ponto D na Questão 5. Pode-se considerar que, qualitativamente, não houve grande diferença na forma como as questões foram resolvidas, conforme pode ser observado na Tabela 21.

Tabela 21 – Descrição das resoluções do Participante A3 no pré e no pós-teste escrito.[24]

Questão	*Pré-teste*	*Pós-teste*
1a	0. escreve “x+y+5”	2. escreve corretamente "y=x+5"
1b	0. escreve "4, y, y" e "(0,4), (3,y), (1,y)”	0. “5, 5, 5” e “(0,5), (3,5), (1,5)”
1c	9. em branco	0. faz apenas alguns traços correspondentes com os pontos (0,5), (3,5), (1,5)
2	0. escreve "4a"	0. escreve "-5, 4"
3	0. escreve "x+y+4+1,5+2,6"	0. escreve "x+y+4+1,5+2,6"
4	1. marca corretamente no plano cartesiano os pontos B e C. Troca abscissa pela ordenada nos pontos A e D	1. marca corretamente no plano cartesiano os pontos B e C. Troca abscissa pela ordenada nos pontos A e D
5	0. faz um traço unindo os pontos para tentar formar uma figura.	1. escreve corretamente apenas as coordenadas do ponto D. Troca abscissa pela ordenada nos demais pontos

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

No Pré-teste Escrito, o Participante A4 completou a tabela da Questão 1b como se a função fosse y=x+4, marcou corretamente no plano cartesiano todos os pontos da Questão 4 e identificou corretamente as coordenadas dos pontos A, B, C na Questão 5. Seu desempenho nos testes escritos aumentou de 29% para 71,4%. Na Etapa 2 no *software,* o Bloco Ensino das discriminações condicionais foi repetido oito vezes. Apesar disso, a formação das classes de equivalência foi verificada e o participante acertou 100% das relações nos Pós-testes de todas as três etapas. No Pós-teste Escrito, o participante identificou corretamente a função da Questão 1a, mas não preencheu corretamente a tabela da Questão 1b. Esboçou corretamente o gráfico da função na Questão 1c, identificou corretamente a expressão de uma função a partir de seu gráfico (Questão 2) e a partir de uma tabela que contenha alguns pontos (Questão 3). O participante marcou corretamente no plano cartesiano o ponto A na Questão 4 e escreveu corretamente as coordenadas A, B e C na Questão 5, trocando para os demais, os valores da abscissa pela ordenada.

O Participante A5 não apresentou grande diferença de desempenho nos testes no *software,* mas sim nos testes escritos, uma vez que o desempenho aumentou de 7% para 51%. No Pré-teste Escrito, o participante apenas foi capaz de escrever corretamente as coordenadas dos pontos B e C na Questão 5, trocando os valores da abscissa pela ordenada nos demais pontos. Verifica-se que, no *software,* houve a necessidade de repetição de blocos nas Etapas 1 e 2, mas não na Etapa 3. No Pós-teste com o *software,* o desempenho foi de

[24] Os números que antecedem as descrições das resoluções indicam como cada uma delas foi considerada: 2 – correta; 1 – parcialmente correta; 0 – incorreta e 9 – em branco

93,1%. No Pós-teste escrito, esse participante escreveu corretamente a expressão da função da Questão 1a, bem como esboçou corretamente seu gráfico (Questão 1c). Além disso, marcou corretamente todos os pontos no plano cartesiano na Questão 4 e escreveu corretamente as coordenadas de todos os pontos na Questão 5.

O desempenho do Participante A6 praticamente foi o mesmo nos testes no *software*. Entretanto, nos testes escritos, o desempenho passou de 0% para 78,6%. Como não foi possível de serem recuperados os dados referentes as respostas na Etapa 3, não se sabe se as classes de equivalência foram formadas nessa etapa para esse participante. O baixo desempenho no Pós-teste no *software* da Etapa 3 dá indícios de que a formação dessas classes não foi verificada. Ao contrário da maioria dos demais participantes, no Pré-teste Escrito, esse participante deixou apenas uma questão em branco. A Tabela 22 estabelece um paralelo entre as descrições das resoluções desse participante no Pré-teste e no Pós-teste escrito.

Tabela 22 – Descrição das resoluções do Participante A6 no Pré e no Pós-teste escrito.

Questão	***Pré-teste***	***Pós-teste***
1a	0. escreve "x=y 5x"	2. escreve corretamente "y=x+5"
1b	0. escreve "y, y, y, (0,y), (3,y), (1,y)"	2. completa corretamente os dados da tabela
1c	9. em branco	2. esboça uma reta que intercepta os eixos nos pontos (0,5) e (-5,0) e marca os pontos da tabela do item anterior
2	0. escreve "a=(-5, -4)"	0. escreve "A=(-5, 4)"
3	0. escreve "x+y=4"	2. responde corretamente "y=x+4"
4	0. marca os pontos sobre os eixos de acordo com a abscissa e ordenada.	1. marca no plano cartesiano corretamente os pontos B, C, D. Troca a abscissa pela ordenada no ponto A.
5	0. escreve o nome dos pontos no local da abscissa e ordenada	2. escreve corretamente as coordenadas de todos os pontos

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

O Participante A6 foi um dos que apresentou uma maior diferença qualitativa nas resoluções das questões, conforme pode ser observado na Tabela 22, exceto pela Questão 2, que foi resolvida da mesma forma e pela Questão 4, cuja resolução foi considerada parcialmente correta por trocar o valor da abscissa pelo valor da ordenada no ponto A. Uma análise dos resultados do Pós-teste Escrito permite concluir que, ao contrário do que se inferiu anteriormente, as classes de equivalência da Etapa 3 foram formadas.

O desempenho do Participante A7 aumentou nos testes escritos e nos testes no *software*. Na Etapa 3 do procedimento no *software*, para a formação das classes de equivalência, foi necessário que esse participante repetisse o Bloco Ensino das discriminações condicionais oito vezes e o Bloco Teste de Linha de Base cinco vezes. Mesmo assim, o desempenho no Pós-teste no *software* foi de 93,1% e no Pós-teste Escrito de 78,3%. Pode-se considerar também que, qualitativamente, houve uma grande diferença entre o desempenho no Pré e no Pós-teste escrito, conforme pode ser observado na Tabela 23.

Tabela 23 – Descrição das resoluções do Participante A7 no Pré e no Pós-teste escrito.

Questão	***Pré-teste***	***Pós-teste***
1a	0. escreve "Y+5=x"	2. escreve corretamente "y=x+5"
1b	0. escreve "5, 5, 5 (0,5), (3,5), (1,5)"	2. completa corretamente os dados da tabela
1c	0. faz alguns traçados no plano cartesiano	2. esboça uma reta que intercepta os eixos nos pontos (0,5) e (-5,0) mas faz outros traçados no plano
2	0. escreve "a=-5 + 4"	0. escreve "y=x+3"
3	0. escreve "x+y=0,4+1,5+2,6"	2. responde corretamente "y=x+4"
4	1. marca no plano cartesiano os pontos A, B, D corretamente	2. marca no plano cartesiano corretamente todos os pontos
5	1. escreve corretamente as coordenadas do pontos A, B, D. Troca abscissa por ordenada no ponto C	1. escreve corretamente as coordenadas do pontos A, B, D. Escreve zero como ordenada do ponto C

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

O Participante A8 apresentou uma pequena diferença de desempenho nos testes no *software* e uma diferença um pouco maior nos testes escritos. No pós-teste no *software*, verificou-se um desempenho de 100% das relações dos testes. A Tabela 24 mostra a descrição das resoluções desse participante nos testes escritos.

Tabela 24 – Descrição das resoluções do Participante A8 no Pré e no Pós-teste escrito.

Questão	***Pré-teste***	***Pós-teste***
1a	0. escreve "x+5=y+5"	0. escreve "x=y+5"
1b	1. completa a tabela como se a função fosse y=x+4	2. completa corretamente os dados da tabela
1c	9. em branco	2. traça uma reta que passa sobre o ponto (0,5) e (1,6)
2	9. em branco	9. em branco
3	9. em branco	2. responde corretamente "y=x+4"
4	0. faz alguns traçados no plano cartesiano	1. marca corretamente o ponto A no plano cartesiano
5	1. escreve corretamente as coordenadas do pontos A, C. Troca abscissa por ordenada no ponto D.	1. escreve corretamente as coordenadas do pontos A, C. Troca abscissa por ordenada no ponto D

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

Apesar de o Participante A8 não ter identificado corretamente a expressão da função referente a Questão 1a, foi capaz de completar corretamente a Tabela da Questão 1b e esboçar corretamente seu gráfico (Questão 1c), bem como escrever a expressão de uma função a partir de uma tabela (Questão 3), marcar um ponto no plano cartesiano dadas suas coordenadas (Questão 4) e escrever as coordenadas de um ponto esboçado no plano cartesiano (Questão 5). Entretanto, não houve diferença na Questão 2, que foram deixadas em branco e na Questão 5, que foram respondidas da mesma forma pelo Participante.

O Participante A9 foi o que, no software, atingiu o critério de acertos em todos os blocos na primeira vez que foi submetido a eles. O desempenho, no software, aumentou de 81,3% no Pré-teste para 98,6% no Pós-teste. Entretanto, pode-se considerar que não houve diferença no desempenho dos testes escritos, conforme mostra o quadro seguinte. Apenas a Questão 1a apresentou uma grande diferença em sua resolução.

Tabela 25 – Descrição das resoluções do Participante A9 no Pré e no Pós-teste escrito.

Questão	***Pré-teste***	***Pós-teste***
1a	0. escreve x=y+5=x	2. responde corretamente "y=x+5"
1b	2. preenche corretamente a tabela	2. preenche corretamente a tabela
1c	0. traça duas retas entre os pontos (0,5) e (5,5); (5,0), (5,5)	0. traça uma reta que passa pelos pontos (0,5) e (5,0)
2	0. escreve "-5y+4x"	0. escreve 4x=-5y
3	0. escreve "x+4y+1x+5y+2x+6y"	0. escreve x=0 y=4, x=1 y=5 x=2 y=6
4	2. marca no plano cartesiano todos os pontos corretamente	2. marca no plano cartesiano todos os pontos corretamente
5	2. escreve corretamente as coordenadas de todos os pontos	1. escreve corretamente as coordenadas dos pontos A, B, C. Troca abscissa pela ordenada no ponto D

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada.

3.5 DISCUSSÃO

De modo geral, nessa investigação observou-se a formação das classes de equivalência referentes a elementos da linguagem algébrica relacionados à função do primeiro grau para todos os participantes em todas as etapas, exceto para o Participante A6 na Etapa 3, bem como a generalização de estímulos, que consiste no estabelecimento de relações entre elementos da linguagem algébrica diferentes dos previamente ensinados para a maioria dos participantes. Mais especificamente, os resultados obtidos nessa investigação e que serão discutidos a seguir, podem ser assim resumidos:

a) o tempo que os participantes necessitaram para passar por todo o procedimento variou de 1h45min a 3h45min;
b) houve uma baixa porcentagem de acertos no Pré-teste escrito, sendo que 73% das questões estavam incorretas ou em branco e uma porcentagem de acertos mais alta (de 60% a 85% de acertos) no Pré-teste com o *software*;
c) na Etapa 1, o procedimento foi reaplicado mais de uma vez para dois participantes, sendo que seis apresentaram um desempenho perfeito (100% de acertos) no Pós-teste e outros dois acima de 87%;
d) o procedimento foi reaplicado mais de uma vez para cinco participantes na Etapa 2, sendo que seis participantes apresentaram um desempenho perfeito ou quase perfeito (100% e 95,8% de acertos) no Pós-teste com o *software*;
e) na Etapa 3, o procedimento retornou mais de uma vez para dois participantes. Sete dos participantes apresentaram um desempenho perfeito ou quase perfeito no Pós-teste com o *software*;
f) no Pós-teste escrito, apenas 24% das questões estavam incorretas ou em branco e cerca de 60% foram consideradas corretas;
g) sete participantes apresentaram uma grande diferença no desempenho dos testes escritos, sendo que cinco deles também apresentam aumento no desempenho do Pós-teste no software.

Mesmo havendo a necessidade de o procedimento retornar mais de uma vez para alguns participantes, o tempo necessário para a conclusão de todo o procedimento foi relativamente curto, quando comparados como outros estudos como o de Lynch e Cuvo (1995), no qual os participantes necessitaram de duas a cinco sessões de 16 a 20 minutos cada, durante cinco semanas, para completar todo o procedimento. Esse fato, associado aos resultados dos testes, mostra que as adequações realizadas no procedimento de ensino e a utilização de participantes matriculados no final do Ensino Fundamental fizeram com que as dificuldades apresentadas por um dos participantes do Estudo I fossem evitadas.

O Pré-teste escrito mostrou que os participantes não estavam familiarizados com o conteúdo a ser ensinado, uma vez que a média de acertos dos participantes foi de 17,5%, enquanto que o Pré-teste com o *software* parece contradizer essa afirmação. O desempenho relativamente alto no Pré-teste com o *software* pode ser devido ao fato de que parte das relações desse teste serem relações entre língua natural e escritos simbólicos (por exemplo, "y é igual a x mais um" e "y=x+1"), ou seja, são relações que caracterizam-se apenas pela leitura. Além disso, conforme argumentam Lynch e Cuvo (1995), o teste escrito avalia a generalização de estímulos na ausência de estímulos de comparação em um meio diferente de apresentação dos elementos da linguagem algébrica, meio esse mais próximo ao utilizado nas aulas de matemática.

No Pré-teste com o *software*, a probabilidade de o participante acertar a resposta sem saber se a mesma é a correta é de 25% para cada tentativa. Entretanto, essa probabilidade tende a aumentar quando o participante escolhe uma resposta eliminando outras. Por exemplo, uma das quatro alternativas de resposta apresentadas como estímulos de comparação pelo *software* já foi escolhida pelo participante em telas anteriores, o que faz com que apenas uma das outras três seja a resposta correta. Nessas condições, a probabilidade de acerto aumenta para 33,3%. Esse fato pode ter contribuído para que a porcentagem de acertos dos participantes no Pré-teste com o *software* não tenha sido tão baixa quanto no Pré-teste escrito. Assim, a utilização do Pré-teste escrito foi efetiva na verificação da não familiaridade dos participantes com o conteúdo, o que não seria possível apenas com a utilização do Pré-teste com o *software.*

De modo geral, a formação das classes de equivalência referentes aos elementos da linguagem algébrica na Etapa 1 foi verificada para os participantes da pesquisa, tendo em vista os resultados do pré-teste no *software*. As relações estabelecidas nos Blocos Ensino 1 a 4 auxiliaram no estabelecimento das relações no Bloco Ensino 5. A maior parte dos erros cometidos pelos participantes nessa etapa de ensino refere-se a relações envolvendo os estímulos Y, que era uma figura contendo a letra *y* e o estímulo D, uma figura que indicava que x é o número de entrada e y é o número de saída. (ver Quadro 15). De acordo com o procedimento, quando algum participante não atingia o critério de acertos em algum bloco de teste, o procedimento retornava ao Bloco Ensino 5, bloco esse que não apresentava relações envolvendo os estímulos Y e D. Todas as vezes que foi necessário retornar ao Bloco Ensino 5, os participantes conseguiram atingir o critério de acertos no bloco e nos testes que se seguiam. Sendo assim, as relações envolvendo os estímulos Y e D parecem ter sido desnecessárias e até mesmo podem ter sido uma dificuldade a mais para os participantes. Tal fato pode ser inferido a partir da análise das respostas do Participante A5 nos Blocos Ensino, Teste e Generalização da Etapa 1.

Com exceção do Participante A5, todos os demais tiveram um desempenho acima de 87% no Teste de Generalização, o que confirma a hipótese de que a formação de classes de estímulos equivalentes referentes a elementos da linguagem algébrica de funções específicas contribui para que sejam estabelecidas discriminações condicionais entre elementos da linguagem algébrica referentes a outras funções, o que foi verificado em oito dos nove participantes.

Na Etapa 2 verificou-se a formação das classes de equivalência e um desempenho superior a 83% no Pós-teste para todos os participantes. O número de vezes que alguns participantes repetiram alguns blocos pode ser devido ao fato de eles não se atentarem às instruções iniciais do Bloco Ensino ou até mesmo não as lerem. Este fato pode ser constatado quando se analisa o tempo de reação dos mesmos nas telas de instrução. Na primeira vez a que foram submetidos ao bloco, o tempo entre o momento que a instrução aparece na tela e o momento em que o participante clica em “prosseguir” é maior do que nas demais vezes que o participante repetiu o bloco. Para garantir que o participante lesse a instrução, poder-se-ia ter utilizado a estratégia de Ninnes et al. (2005) de solicitar que os participantes lessem as instruções dadas em voz alta, que eram gravadas em um arquivo de áudio no computador. Entretanto, não se pode garantir que pronunciar as palavras de uma frase implique necessariamente na sua compreensão.

Na Etapa 3 não foram apresentadas telas de instrução. Assim, o comportamento de responder corretamente a relações entre elementos da linguagem algébrica – gráfico, tabela e expressão – que caracterizam o que está sendo considerado como função do primeiro grau foi totalmente modelado pelas consequências. Foi verificada a formação das classes de estímulos equivalentes para oito participantes, sendo que apenas um deles apresentou um desempenho no Pós-teste inferior a 95,8%. Analisando o desempenho dos participantes nessa etapa, pode-se inferir que essa foi a etapa na qual menos participantes necessitaram retornar algum bloco para completar o procedimento de ensino, o que mostra que a tarefa desse bloco foi de menor dificuldade do que a dos blocos anteriores. Isso sugere que as etapas anteriores forneceram todos os elementos necessários para que os participantes não apenas identificassem relações específicas entre o gráfico, tabela e expressão das funções $y=x+1$, $y=x+2$, $y=x-1$ e $y=x-2$, mas sim entre gráficos, tabelas e expressões de funções do primeiro grau da forma $y=1x+b$ em geral.

No Pós-teste escrito, percebe-se que muitos participantes apresentaram grande parte do repertório comportamental que está sendo considerado nessa investigação como os que demonstram o conhecimento de função do primeiro grau, uma vez que cerca de 60% das resoluções das questões foram classificadas como corretas e apenas 24% como incorretas ou em branco. A questão com maior índice de resoluções incorretas (Questão 2), que solicitou aos participantes que escrevessem a expressão algébrica de uma função a partir do gráfico, mostra a necessidade de adequações no procedimento de ensino utilizado nesse estudo de modo a fazer com que os participantes sejam capazes de identificar a expressão de uma função a partir de seu gráfico.

As alterações no repertório comportamental dos participantes que caracterizam a aprendizagem de função do primeiro grau podem ser verificadas comparando-se os desempenhos dos mesmos no Pré-teste e no Pós-teste apresentados pelo *software*. Entretanto, essa alteração fica mais evidente quando são comparados os resultados do Pré-teste e do Pós-teste escritos.

A comparação da produção escrita dos participantes no Pré-teste e no Pós-teste escrito permite verificar que houve uma melhora no desempenho de todos os participantes da investigação no Pós-teste. Foi verificada uma grande diferença no desempenho de sete dos nove participantes. Esses resultados sugerem que a formação de relações de equivalência entre elementos da linguagem algébrica referentes a função do primeiro grau possibilita a generalização de estímulos. Isso significa que aprender a relacionar tabela, gráfico e expressão de funções do primeiro grau específicas por meio do procedimento desenvolvido nesta investigação faz com que seja possível relacionar gráfico, tabela e expressão de outras funções do primeiro grau.

Pode-se considerar que a generalização de estímulos ocorre porque os elementos da linguagem algébrica utilizados como estímulos em todos os blocos do procedimento são compostos de vários elementos que se inter-relacionam, fazendo com que a aprendizagem da relação entre, por exemplo, um gráfico e uma tabela, represente, na verdade, a aprendizagem da relação entre um conjunto de relações e um outro conjunto de relações, conforme argumenta Ninnes et al. (2006).

Muitos participantes, no Pós-teste Escrito, apresentaram dificuldade em responder corretamente as Questões 4 e 5, que solicitava que fossem relacionados pontos localizados no plano cartesiano com suas coordenadas. Um erro comum verificado foi a troca do valor da abscissa pelo valor da ordenada na identificação das coordenadas do ponto no plano ou ao esboçar o ponto no plano cartesiano dado suas coordenadas. Pode ter contribuído para isso o fato de, no procedimento no *software*, todos os elementos da linguagem algébrica utilizados estarem relacionados a pontos localizados no primeiro quadrante. Não haviam tentativas que envolvessem pontos nos demais quadrantes. Isso indica que é necessário ampliar os elementos da linguagem algébrica e as relações entre eles, de modo a contemplar pontos de todos os quadrantes do plano cartesiano.

Apesar de, no geral, os resultados dos testes escritos e dos de generalização mostrarem a efetividade do procedimento de ensino para os propósitos dessa investigação, os resultados de alguns participantes parecem contraditórios. Os participantes A5 e A6, apesar de terem praticamente o mesmo desempenho no Pré e no Pós-teste no *software,* apresentaram um grande aumento de desempenho no Pós-teste escrito. Além disso, o participante A9 apresentou praticamente o mesmo desempenho nos testes escritos e um desempenho melhor no Pós-teste no *software* do que no Pré-teste. Esse tipo de contradição merece ser investigada em pesquisas futuras, nas quais pode-se solicitar aos participantes que falem o que estão levando em consideração ao escolherem as respostas, possibilitando uma análise desse discurso.

Ao se considerar a linguagem algébrica como sendo formada pela linguagem natural e por um sistema simbólico e, ao serem ensinadas relações entre alguns desses elementos que constituem funções do primeiro grau, fez-se com que os participantes reconhecessem esta linguagem como forma de expressão da relação entre grandezas e entre variáveis, conforme preconizam as orientações curriculares (BRASIL, 2002). Além disso, o procedimento da investigação pode fazer com que a dificuldade dos estudantes do início do ensino secundário, apresentada por Ponte (1992), de lidar com gráficos no sistema de coordenadas cartesianas e relaciona-los com suas expressões algébricas sejam minimizadas.

Ponte (1992) afirma que o ensino do conteúdo de função necessita de uma articulação entre três formas diferentes de expressar funções: a numérica, a gráfica e a algébrica. De certa forma, isso já acontece na escola quando o professor solicita aos alunos que calculem a imagem de alguns valores do domínio de uma função, que marquem esses pontos no plano cartesiano e que tracem o gráfico da função. Entretanto, o procedimento desta investigação rompe a perspectiva linear pela qual este conteúdo é geralmente trabalhado nas escolas, uma vez que fez com que a maioria dos participantes fosse capaz de identificar o gráfico de uma função a partir de sua expressão algébrica e vice-versa sem a necessidade de relacionar expressão algébrica a tabela e tabela com alguns pontos ao gráfico.

A partir da articulação entre os três tipos de elementos da linguagem algébrica – o gráfico, o numérico e o algébrico – os estudantes podem atribuir significado as expressões algébricas (PONTE, 1992). Essa visão é, de certa forma, condizente com as considerações de Sidman (1994) sobre o significado. Sidman (1994) considera o significado enquanto uma classe de estímulos equivalentes, de modo que os diferentes estímulos de uma classe são significados uns dos outros. Nessa perspectiva, o procedimento adotado nessa investigação de relacionar os elementos da linguagem algébrica contribuiu para que o significado das expressões algébricas fosse constituído pelos participantes, da forma com considera Ponte (1992) e para que os diferentes elementos da linguagem algébricas utilizados como estímulos equivalentes das classes fossem, da forma como considera Sidman (1994), significados uns dos outros.

Pode-se afirmar que atribuir significado a uma expressão algébrica de uma função está diretamente relacionado ao que se considera como “possuir conhecimento” de função. De modo geral, possuir conhecimento de algo é considerado como o que permite a emissão de determinados comportamentos. Por exemplo, escrever a expressão de uma função a partir de um gráfico só é possível se o emissor desse comportamento possuir o conhecimento de função. Entretanto, o procedimento de ensino desenvolvido e utilizado nessa investigação estabeleceu nos participantes muitos dos repertórios comportamentais que, ao invés de serem considerados como provas da existência de processos mentais internos (SKINNER, 1972) que justificam tais comportamentos, são comportamentos que permitem afirmar que o emissor possui conhecimento de função do primeiro grau, conforme mostram os resultados do Pós-teste escrito e com o *software*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, procurou-se analisar o ensino e aprendizagem de função do primeiro grau na perspectiva da Análise do Comportamento, mais especificamente, por meio do Modelo da Equivalência de Estímulos. Por ser um conteúdo que se insere nos domínios da Álgebra Escolar e, como foi verificado que não há um consenso sobre o que é Álgebra, neste estudo ela foi considerada como sendo o domínio matemático que lida com relações entre grandezas e regularidades numéricas que se constituem enquanto estruturas em um nível simbólico. Assim, uma função do primeiro grau é uma estrutura ou objeto algébrico que relaciona duas grandezas numéricas de acordo com certas propriedades. A relação entre essas grandezas efetiva-se quando se faz uso da linguagem algébrica, entendida como sendo formada pela língua natural e por um sistema simbólico.

Para uma mesma estrutura, existem diferentes elementos da linguagem algébrica que se relacionam de modo a se tornarem funcionalmente equivalentes. São os elementos da linguagem algébrica e as relações entre eles que constituem as estruturas, bem como seu significado. Por exemplo, $y=x$ é um dos elementos da linguagem algébrica que constituem o objeto função do primeiro grau $y=x$. Além desse, outros elementos da linguagem algébrica como o gráfico da função, uma tabela que contenha alguns de seus pontos, entre outros, são funcionalmente equivalentes a ele, ou seja, fazem parte de uma mesma classe de estímulos equivalentes.

O Modelo da Equivalência de Estímulos possibilita o ensino de discriminações condicionais entre diferentes estímulos e, ao se ensinarem discriminações condicionais entre esses estímulos comuns, pode haver a emergência de relações não ensinadas previamente. Assim, optou-se por realizar esse estudo por meio desse modelo de modo a verificar se o ensino de discriminações condicionais entre elementos da linguagem algébrica de funções do primeiro grau possibilita a formação de classes de estímulos equivalentes e se, após a verificação da formação das classes de equivalência, ocorre a generalização de estímulos. Para isso, foi desenvolvido um procedimento de ensino de discriminações condicionais entre elementos da linguagem algébrica relacionados a funções do primeiro grau da forma $y=ax+b$, com a=1. Optou-se por considerar o parâmetro a fixo, uma vez que, como o procedimento foi eficiente nessas condições, supõe-se que será igualmente eficiente se o parâmetro a for variável, pelo menos para os casos nos quais $a>0$ e $a<0$. Entretanto, isso é algo que merece ser investigado.

O procedimento inicial foi aplicado a duas estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental e, apesar de ter sido demonstrada a formação das classes de equivalência e a generalização de estímulos para as duas estudantes, uma delas necessitou da intervenção do pesquisador para aprender as relações entre os elementos da linguagem algébrica. Esse fato mostrou que o procedimento de ensino deveria ser modificado para ser utilizado com estudantes desse nível de ensino. Além disso, considerando que as orientações curriculares nacionais (BRASIL, 1997, 2002) afirmam que o ensino de funções pode se dar no final do Ensino Fundamental, optou-se por realizar adequações no procedimento para estudantes do oitavo ano desse nível de ensino.

Foram duas as mudanças principais para adequação do procedimento de ensino. A primeira delas consistiu na incorporação, a exemplo de Lynch e Cuvo (1995) de um Pré-teste e Pós-teste escrito, que permitiu uma melhor avaliação da eficácia do procedimento de ensino. Entretanto, diferentemente de Lynch e Cuvo, os elementos da linguagem algébrica que constituíam os testes escritos não fizeram parte de qualquer etapa do procedimento com o *software*. A segunda mudança consistiu na ampliação dos blocos de ensino, de modo a incluir telas de instrução, baseando-se na discussão apresentada por Ninnes et al. (2005). De acordo com os resultados, pode-se inferir que essa adequação foi positiva, uma vez que auxiliou os participantes na formação das classes de equivalência não apenas nas Etapas 1 e 2 nas quais haviam instruções, mas também na Etapa 3 que não apresentava qualquer tentativa com instrução. Além disso, verificou-se um desempenho superior a 95,8% de acertos em sete dos oito participantes nos testes de generalização sem a necessidade de qualquer intervenção por parte do pesquisador, o que não aconteceu com uma das participantes do Estudo I.

Os resultados desse estudo são consistentes com os apresentados na literatura (NINNES et al., 2005, 2006, 2009; HAYDU et al., 2006; ROSSIT; FERREIRA, 2003; CARMO, 2000; CAPOVILLA et al., 1997; HAYDU et al., 2001; IÉGAS, 2003; LYNCH; CUVO, 1995; FIENUP; CRITCHFIELD; COVEY, 2010) no que se refere à efetividade da utilização do Modelo da Equivalência de Estímulos como estratégia de ensino e de aprendizagem de matemática, propiciando aos participantes repertórios comportamentais que, em geral, são considerados como “provas da existência de processos ou estados mentais internos” (SKINNER, 1972, p.25)

Uma das dificuldades enfrentadas no desenvolvimento deste estudo está relacionada ao *software* utilizado. Tal sistema não foi desenvolvido para trabalhar com gráficos e expressões matemáticas que necessitam uma melhor definição visual para que sejam apresentados na tela do computador de forma clara e legível, o que permite aos participantes perceber as diferenças entre eles. Assim, foi necessário tratar as imagens de modo que fossem necessários menos *Kb* para armazená-las, mas sem perder a qualidade visual. Mesmo assim, em alguns casos, a qualidade visual dos estímulos não foi muito boa, o que pode ter contribuído para o baixo desempenho de alguns dos participantes. Outro problema enfrentado em relação ao software foi que, várias vezes, o *software* travava e perdiam-se as informações sobre as respostas dos participantes. Assim, em pesquisas posteriores, pode-se trabalhar no desenvolvimento de um *software* mais adequado às especificidades do ensino de conteúdos de álgebra que demandam a utilização de estímulos com alta definição visual.

Este estudo mostra a importância da linguagem algébrica na aprendizagem das estruturas algébricas pelos estudantes, assim como afirma Ponte (1992). Isso é algo que já vem sendo discutido na área da Educação Matemática por abordagens cognitivistas. Por exemplo, Duval (2003) mostra que, objetos abstratos como função do primeiro grau, são passíveis de serem comunicados e aprendidos pelos estudantes por meio das diferentes formas de representá-los, ou seja, por meio de diferentes registros de representação semiótica, da conversão e do tratamento que podem ser realizadas com eles. Apesar de parecer haver alguma similaridade entre a forma como Duval (2003) considera a aprendizagem de objetos matemáticos abstratos, a abordagem teórica adotada nessa investigação e a deste autor são epistemologicamente diferentes, o que impossibilita uma integração das mesmas.

O Modelo da Equivalência de Estímulos enquanto estratégia de ensino não fez com que todos os participantes obtivessem um desempenho de 100% de acertos em todos os Pós-testes. Entretanto, como mostrou ser efetivo para a maioria deles, esse modelo se configura como uma possibilidade metodológica a mais para o ensino de função do primeiro grau, assim como são a Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, entre outras. É por esse motivo que não se pretende sugerir que o ensino desse ou de qualquer outro conteúdo na escola resuma-se a um tipo de procedimento de ensino como o adotado nessa investigação. O procedimento de ensino delineado nesse estudo pode ser incorporado ao que hoje já é feito pelo professor nas aulas de matemática e, para verificar como pode ocorrer tal incorporação, novas investigações podem ser feitas no contexto da sala de aula.

Outra questão que merece também ser investigada é a questão do significado. Nesse sentido, a Equivalência de Estímulos pode ser útil, uma vez que considera que, em uma classe de estímulos equivalentes, cada um dos estímulos que a formam pode ser considerado como significado uns do outro. Entende-se, assim, que o significado da expressão $y=x$ são todos os elementos da classe de estímulos equivalentes que estão relacionados a ela, como, por exemplo, um gráfico e uma tabela. Quando se ensinam discriminações condicionais entre diferentes elementos da linguagem algébrica estão sendo ensinados os significados de cada um deles. Entretanto, o significado também pode ser entendido como as variáveis controladoras de resposta e, para que sejam conhecidos, é necessário uma analise funcional. Assim, como alternativa de investigação, poder-se-ia analisar a produção escrita dos participantes em um teste ou o relato dos participantes após serem submetidos ao procedimento de ensino, o que resultaria em uma análise comportamental do discurso (cf. DOUGHER, 1993; BORLOTI; IGLESIAS; DALVI; SILVA, 2008).

Poucas são as pesquisas sobre formação de classes de estímulos equivalentes aplicadas ao ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos relacionados à Álgebra. Os estudos encontrados na literatura (NINNES et al., 2005, 2006, 2009), apesar de mostrarem a efetividade do modelo da equivalência de estímulos para os propósitos desse trabalho, foram desenvolvidos por psicólogos e tiveram como participantes pessoas adultas e/ou adolescentes que, mesmo tendo demonstrado desconhecimento do conteúdo nos pré-testes desenvolvidos antes de cada um dos estudos, eram pessoas as quais os conteúdos já haviam sido ensinados na escola. Assim, esse é o primeiro estudo dentre os que foram localizados pela revisão bibliográfica feita sobre a utilização desse modelo no ensino e na aprendizagem de função do primeiro grau a estudantes que estão sendo submetidos ao ensino de função do primeiro grau pela primeira vez.

Mais importante do que os resultados dessa pesquisa, que indicam a possibilidade do procedimento de ensino delineado nessa investigação como uma estratégia metodológica a mais para o ensino e aprendizagem de função do primeiro grau, é a possibilidade de iniciar a discussão de um problema complexo como o ensino e a aprendizagem de Álgebra sob outras perspectivas teóricas, indo além do Cognitivismo, do Sócio-interacionismo, etc. Sabe-se que a Educação Matemática, considerada uma prática social que se encontra a caminho de sua constituição enquanto campo autônomo de investigação e de formação (MIGUEL, 2003), tem-se caracterizado pelas interlocuções com outras áreas do conhecimento, como a Sociologia, a História, a Filosofia, a Antropologia, a Psicologia, entre outras.

Este estudo contribui com a área de Educação Matemática no sentido de ampliar ainda mais essa interlocução, iniciando a discussão do ensino e da aprendizagem de Álgebra sob a perspectiva da Análise do Comportamento, uma subárea da Psicologia, cujos princípios de aprendizagem vêm sendo esquecidos na área da Educação como um todo. Como bem coloca Marcel Proust, citado na epígrafe deste trabalho, “a verdadeira viagem da descoberta consiste não em buscar novas paisagens, mas em ter olhos novos”. O problema do ensino e da aprendizagem de Álgebra é “uma velha e conhecida paisagem” dos profissionais envolvidos com a Educação Matemática, para o qual a Análise do Comportamento pode contribuir para seu enfrentamento, sendo mais um dos “olhos novos”.

REFERÊNCIAS

AMERON, B. A. V. **Reinvention of early algebra**: developmental research on the transition from arithmetic to algebra. Utrecht: Proefschrift Universiteit Utrecht, 2002

BARROS, R. S. et al. Variáveis de procedimento na pesquisa sobre classes de equivalência: contribuições para o estudo do comportamento simbólico. **Revista Brasileira de Análise do Comportamento**. v. 1, n. 1, p. 15-27, 2005.

BARROS, R. S. Uma introdução ao comportamento verbal. **Revista Brasileira de Terapia Comportamental e Cognitiva.** v.5, n. 1, p. 73-82, 2003.

BAUM, W. **Compreender o Behaviorismo:** comportamento, cultura e evolução. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. Approaches to algebra: perspectives for researching and teaching. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to algebra:** perspectives for researching and teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p.3-12.

BORLOTI, E. et al. Análise comportamental do discurso: fundamentos e Métodos. **Psicologia:** teoria e pesquisa, v. 24, n. 1. p. 101-110, 2008.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **PCN+:** Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

CAPOVILLA, F. C. et al. Equação-Equilíbrio: o modelo da balança e a análise da resolução de problemas aritméticos em escolares do ensino fundamental. **Torre de Babel:** Reflexões e Pesquisa em Psicologia, v. 4, p. 189-215, 1997.

CARMO, J. S. O conceito de número como rede de relações. In: KERBAUY, R. R. (Org.). **Sobre Comportamento e Cognição.** 1. ed. São Paulo: SET, 2000, v. 5, p. 97-113.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM Mathematics Education**, v. 40, p. 3-22. 2008.

CATANIA, A. C. **Aprendizagem:** comportamento, linguagem e cognição. 4. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

DALTO, J. O. Estudo da produção escrita em matemática: um instrumento de avaliação. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 10., Salvador. **Anais...** Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010.

DOUGHER, M. J. Interpretative and hermeneutic research methods in the contextualistic analysis of verbal behavior. In: HAYES, S. C.; HAYES, L. J.; REESE, H. W.; SARBIN, T. S. (Org.), **The varieties of scientific contextualism**. Reno: Context, 1993, p. 147-159.

DROUHARD, J.-P.; TEPPO, A. R. Symbols and Language. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Ed.). **The future of teaching and learning of algebra**. Melbourne: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 227-264.

DUVAL, Raymond. registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-34.

ETZEL, B. C. Environmental appoaches to the development of conceptual Behavior. In: BAER, D. M.; PINKSTON, E. (Org.). **Environment and Behavior**. Oxford: Westview Press, 1997, p. 52-79.

FIENUP, D. M.; COVEY, D. P., & CRITCHFIELD, T. S. Teaching brain-behavior relationships economically with stimulus equivalence technology. **Journal of Applied Behavior Analysis**, v. 43, p. 19-33, 2010.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR. Lisboa. **Anais...** Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. 2005, p. 1-22.

HAYDU, V. B. Compreendendo os Processos de Interação do Homem com seu Meio Ambiente. IN: SOUZA, S. R.; HAYDU, V. B. (Org.). **Psicologia comportamental aplicada:** avaliação e intervenção nas áreas do esporte, clínica, saúde e educação. Londrina: EDUEL, 2009.

HAYDU, V. B. et al. Resolução de Problemas Aritméticos: efeito de relações de equivalência entre três diferentes formas de apresentação dos problemas. **Psicologia:** Reflexão e Crítica, v. 19, n. 1, p. 44-52, 2006.

HAYDU, V. B., et al. Dificuldades e facilidades produzidas pela forma de apresentação de problemas aritméticos com a incógnita em diferentes posições. In: MARQUEZINE, M. C. et al. (Org.). **Perspectivas Multidisciplinares em Educação Especial II**. Londrina: EDUEL, 2001, p.593-601.

HAYDU, V. B.; PAULA, J. B. C. Efeitos do Tamanho da Classe na Manutenção de Relações Equivalentes. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, v. 21, p. 233-251, 2008.

HITT, F. Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. **Journal of Mathematical Behavior.** n. 17, v. 1, p. 123-134, 1998.

IÉGAS, A. F. **Software para a resolução de problemas aritméticos:** o modelo da balança**.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Londrina. Londrina, PR, 2003.

KIERAN, C. Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? **The Mathematics Educator**, v.8, n.1, p.139-151. 2004.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LYNCH, D. C.; CUVO, A. J. Stimulus equivalence instruction of fraction-decimal relations. **Journal of Applied Behavior Analysis**, v. 28, p. 115–126, 1995.

MATOS, A.; PONTE, J. P. O Estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8º. ano. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa**. v. 11, n. 2, p. 195-231, 2008.

MIGUEL, A. O projeto de disciplinarização da prática social em educação matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPEd, 26., 2003, Poços de Caldas. **Anais...** Poços de Caldas: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2003.

NELSON, T. **A noção de significado em b. f. Skinner e em m. Sidman**. 2001. 216 p. Dissertação (Mestrado em Teoria e Pesquisa do Comportamento) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2001.

NINNES, C et al. A functional analytic approach to computer-interactive mathematics. **Journal of Applied Behavior Analysis,** n. 38, p. 1-22, 2005.

NINNES, C., et al. Constructing and deriving reciprocal trigonometric relations: a functional analytic approach. **Journal of Applied Behavior Analysis**, v. 42, n. 2, p.191-208. 2009.

NINNES, C., et al. Transformations of mathematical and stimulus functions. **Journal of Applied Behavior Analysis**, v. 39, n. 3, p. 299 - 321. 2006.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. **The Mathematics Educator.** v. 2, n. 3, p. 3-11, 1992.

ROSSIT, R. A. S.; FERREIRA, P. R. S. Equivalência de estímulos e o ensino de pré-requisitos monetários para pessoas com deficiência mental. **Temas em psicologia da SBP**, v. 11, n. 2, p. 97-106, 2003.

SANTOS, E. C. **Equivalência**: software e manual do softwares não publicados, 2001.

SELDEN, A; SELDEN, J. Research perspectives on conceptions of functions: summary and overview. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Org.). **The concept of function:** aspects of epistemology and pedagogy. New York: MAA, 1992, p. 1-16.

SIDMAN, M.; TAILBY, W. Conditional discrimination vx matching to sample: an expansion of the testing paradigm. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior.** v. 37, p. 5-22, 1982.

SIDMAN, M. **Equivalence relations and Behavior**: a research story. Boston: Authors Cooperative Publishers, 1994.

SIDMAN, M. Equivalence relations and the reinforcement contingency. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior.** 74, p. 127–146, 2000.

SIDMAN, M. Functional analysis of emergent verbal classes. In: THOMPSON, T; ZEILER, M. D. (Eds.). **Analysis and integration of behavioral units.** Hildale, NJ: Erlbaum, 1986, p. 213-245.

SKINNER, B. F. **Tecnologia do ensino.** São Paulo: EDUSP, 1972.

SKINNER, B. F. **Verbal Behavior.** New York: Apleton-Century-Crofts, 1957.

SPRADLIN, J. E.; SAUNDERS, K. J.; SAUNDERS, R. R. The stability of equivalence classes. In HAYES, S. C. ; HAYES (Ed.), L. J. **Understanding verbal relations**. Reno, NV: Context, 1992, p. 29-42.

TODOROV, J. C. Behaviorismo e análise experimental do comportamento. **Cadernos de Análise do Comportamento**. n.3, p. 10-23, 1982.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações de variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Ed.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Nome: ____

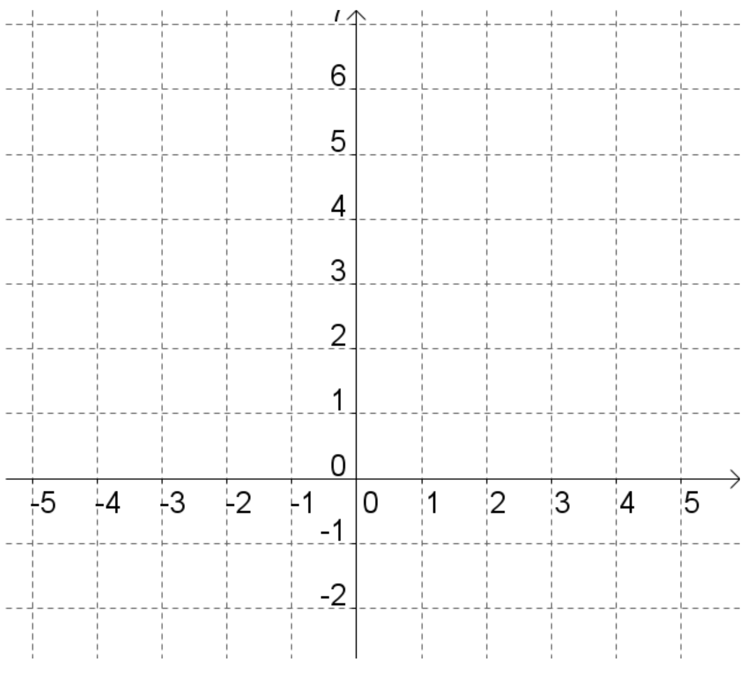
1. Uma máquina transforma o número x (número de entrada) que o usuário escolhe em um número y (número de saída), dependendo da programação. A máquina está programada para que o número de saída seja o número de entrada mais cinco.
   a. Escreva a expressão matemática dessa transformação.

   ____

   b. Complete a tabela seguinte:

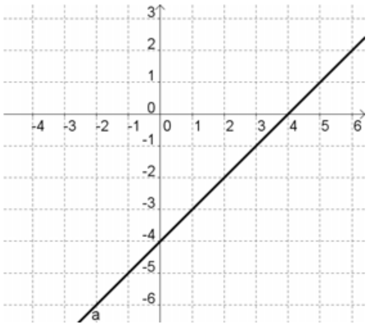
x	y	(x,y)
0		
3		
1		

   c. Faça o gráfico que representa essa transformação.



2. Escreva a expressão matemática correspondente a esse gráfico.

____



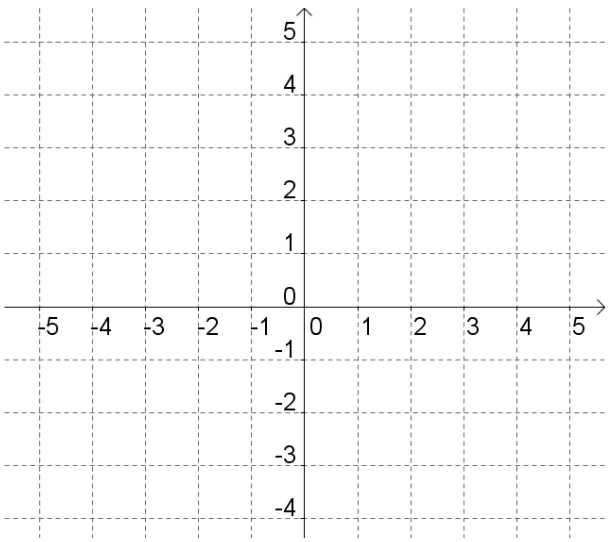
3. Escreva a expressão matemática correspondente a essa tabela.

x	*y*	(*x*,*y*)
0	0 + 4 = 4	(0,4)
1	1 + 4 = 5	(1,5)
2	2+4 = 6	(2,6)

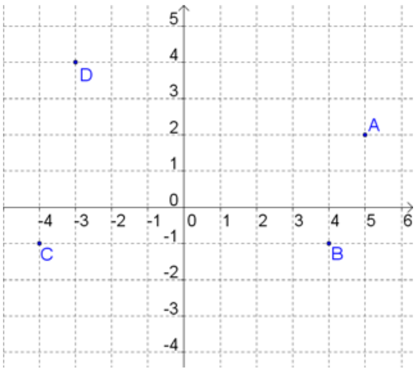
____

4. Marque os pontos seguintes no plano cartesiano:

A(3, 1) B(4, -2) C(-2, -3) D(-1, 3)



5. Dê as coordenadas dos pontos do gráfico.



A(______, ______)   B(_______,_______)   C(______, ______)   D(______, _______)

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do Projeto: LINGUAGEM E COMPORTAMENTO ALGÉBRICOS: UM ESTUDO ANALÍTICO-COMPORTAMENTAL
Pesquisador Responsável: Jader Otavio Dalto
Instituição a que pertence o Pesquisador Responsável: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Telefones para contato: (67) 3241 0437 - (67) 8162 2493

Nome do participante:____

Idade: _____________ anos
Responsável legal (pai ou mãe): ____

R.G. Responsável legal: _________________________

Prezado(a) Senhor(a),

Seu filho (a) está sendo convidado(a) a participar do projeto de pesquisa “Linguagem e Comportamento Algébricos: um estudo analítico comportamental”, de responsabilidade do pesquisador Jader Otavio Dalto.

Este projeto tem como objetivo verificar a eficiência e a eficácia de um procedimento de ensino do conteúdo de funções do primeiro grau a alunos da educação básica. Esse procedimento de ensino consiste na aprendizagem de relações entre gráficos, expressões e tabelas, que serão estabelecidas utilizando-se de um programa de computador. Serão analisados o desempenho dos participantes e poderão ser feitas entrevistas que serão gravadas. É importante ressaltar que:

a) a participação é voluntária;
b) o procedimento de ensino não oferece qualquer risco ao participante;
c) todas as informações geradas (dados do programa de computador e gravação das entrevistas) serão utilizadas na pesquisa e, em hipótese alguma, serão citados os nomes dos participantes ou qualquer outra informação que possam identificá-los;
d) A coleta de dados (ensino por meio do programa de computador e entrevistas) poderá ser realizada na escola na qual o participante frequenta ou na Unidade II do Campus de Aquidauana da UFMS, em horário e local previamente agendado.
e) Em caso de quaisquer dúvidas, o(a) Sr(a). poderá contatar, a qualquer tempo, o pesquisador Jader Otavio Dalto pelo telefone (67) 8162 2493 ou 3241 0437

Eu, ____, RG nº _______________________, responsável legal por (pai, mãe ou responsável pelo participante)

____________________________________(nome do participante) declaro ter sido informado e concordo com a sua participação, como voluntário, no projeto de pesquisa acima descrito.

Aquidauana, _____ de ____________________________ de 2011.

____
Nome e assinatura do responsável legal do participante

__________________________________ __________________________________
Testemunha Testemunha