



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LEANDRO MENESES DA COSTA

A COMPREENSÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM
MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE À LUZ DOS REGISTROS DE
REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Londrina

2016

LEANDRO MENESES DA COSTA

A COMPREENSÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM
MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE À LUZ DOS REGISTROS
DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

COSTA, LEANDRO MENESES DA .

A COMPREENSÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE À LUZ DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA / LEANDRO MENESES DA COSTA. - Londrina, 2016.
145 f. : il.

Orientador: LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2016.

Inclui bibliografia.

1. Modelagem Matemática - Tese. 2. Compreensão - Tese. 3. Registros de Representação Semiótica - Tese. I. ALMEIDA, LOURDES MARIA WERLE DE . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

Leandro Meneses da Costa

A COMPREENSÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM
MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE À LUZ DOS REGISTROS DE
REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof.^a Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Orientadora
Universidade Estadual de Londrina
Londrina (PR)

Prof.^a Dra. Karina Alessandra Pessôa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Londrina (PR)

Prof. Dr. Bruno Rodrigo Teixeira
Universidade Estadual de Londrina
Londrina (PR)

Londrina, ____ de 2016.

Dedico este trabalho aos meus pais, que em todos momentos estiveram ao meu lado, incentivando e me apoiando.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela minha vida e pela oportunidade de estar concretizando esse sonho.

Aos amigos do GRUPEMAT, pelo apoio, horas de estudo e, principalmente, pela segunda família que foram esses anos.

À professora Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, pela oportunidade de ser seu orientando, lhe admiro muito. Obrigado pela paciência, críticas e apoio, tudo isso foi fundamental para construção desse trabalho.

À minha família, pela paciência e entendimento nas inúmeras vezes em que fui ausente e impaciente.

Ao professor Dr. Bruno Rodrigo Teixeira, por fazer parte da banca que avaliou este trabalho. Levo você como referência desde a época de graduação e especialização.

À professora Dra. Karina Alessandra Pessôa da Silva, por fazer parte da banca que avaliou este trabalho e por sempre ser uma inspiração para minha pessoa. Obrigado por me incentivar nessa caminhada. Serei sempre grato por tudo.

À minha noiva Géssica Aline Soares, que sempre esteve ao meu lado, entendendo minha ausência e compartilhando comigo desse momento. Se hoje cheguei até aqui, foi graças ao alicerce que foi você em minha vida. Te Amo.

Aos amigos do mestrado pelo companheirismo.

À minha amiga irmã Renata Graciele, que sempre me ajudou, incentivou e compartilhou estudos e discussões.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes” (Marthin Luther King).

COSTA, Leandro Meneses. A Compreensão em Atividades de Modelagem Matemática: Uma Análise à Luz dos Registros de Representação Semiótica. 2016. 143f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação sobre como se dá a compreensão, articulando os aspectos teóricos da modelagem matemática, enquanto alternativa pedagógica e os aspectos metodológicos dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. A pesquisa tem como objetivo investigar como se dá a compreensão da matemática e do problema no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, analisando os registros de representação semiótica produzidos pelos alunos, sob dois pontos de vistas, o matemático e o cognitivo. Para Duval (2012b), a compreensão sob o ponto de vista matemático deve ter como prioridade a análise do conteúdo e dos procedimentos dos alunos em seu uso. Para isso realizamos uma análise matemática das atividades desenvolvidas pelos alunos. Essa análise segundo Duval (2011a) deve ser feita em termos da validade do encaminhamento e do sucesso no desenvolvimento da atividade. Do ponto de vista cognitivo a compreensão reside na capacidade de reconhecer os objetos matemáticos, no que diz respeito à correspondência das unidades de sentidos nas conversões. Na análise cognitiva buscamos inferir sobre a incidência do fenômeno de congruência nas conversões e seus níveis, conforme caracteriza Rosa (2008) e a coordenação dos registros mobilizados pelos alunos. Para buscar evidências sobre nosso objetivo de pesquisa, realizamos a coleta de dados com alunos do segundo ano do Ensino Médio. A partir das análises dos registros produzidos pelos alunos podemos perceber que a compreensão da matemática se dá em conformidade com a compreensão do objeto matemático e suas especificidades representacionais desencadeiam propriedades específicas que precisam ser conceitualizadas pelos alunos. Assim, a compreensão do problema acontece na medida em que os alunos confrontam as informações contidas na situação-problema com a linguagem matemática, seja na fase de inteiração e matematização ou na fase final de interpretação dos resultados.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Compreensão, Registros de Representação Semiótica.

COSTA, Leandro Meneses. Comprehension in Activities of Mathematical Modeling: An Analysis in the Light of Semiotic Representation Registers 2016. 143f. Dissertation (Master's Degree in the Teaching of Science and Mathematical Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ABSTRACT

This work presents an investigation on the process of comprehension, articulating both theoretical aspects of mathematical modeling as a pedagogical alternative and methodological aspects of records of Raymond Duval's semiotic representation. The research aims to investigate the process of mathematical and problem comprehension on the development of mathematical modeling activities, through the analysis of records of semiotic representation produced by the students, from two points of view, mathematical and cognitive. For Duval (2012b), comprehension, from a mathematical point of view, must have as its priority the analysis of both content and students' procedures while they are using them. Therefore, we carried out a mathematical analysis of the students' activities. Such analysis, according to Duval (2011a), must be carried out in terms of both routing validity and success on the activity performance. From the cognitive point of view, comprehension lies in the competence of recognizing mathematical objects, concerning the correspondence of units of sense in conversions. In the cognitive analysis, we aimed to infer on the incidence of congruence in both conversions and their levels, according to Rosa (2008) and the coordination of the students' records. Aiming at finding evidence on our search object, we collected data with students from the second year of High School. Through the analyses of students' records, we could realize that mathematical comprehension takes place according to the comprehension of the mathematical object, and its representational specificities trigger specific properties which need to be conceptualized by the students. Thus, the comprehension of the problem happens as students face the information in the problem situation using mathematical language, either in the level of acquaintance and mathematisation, or in the final level of result interpretation.

Keywords: Mathematical Modeling. Comprehension. Records of Semiotic Representation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Esquema de uma atividade de modelagem matemática.....	21
Figura 2.2: Ações cognitivas nas fases da modelagem matemática.....	24
Figura 3.1: Placa de trânsito.....	33
Figura 3.2: Exemplo de tratamento no registro algébrico.....	34
Figura 3.3: Exemplos de conversões em registros de representação semiótica.....	35
Figura 3.4: Correspondência entre dois registros.....	36
Figura 3.5: Correspondência entre as unidades de sentidos dos registros.....	37
Figura 3.6: Congruência na conversão entre dois registros.....	39
Figura 3.7: Fenômeno de não-congruência na conversão.....	39
Figura 3.8: Esquema dos procedimentos de análise.....	49
Figura 5.1: Variáveis definidas pelos alunos.....	58
Figura 5.2: Registros dos grupos.....	60
Figura 5.3: Conversão do registro gráfico para o numérico.....	61
Figura 5.4: Conversão do registro numérico para o registro gráfico.....	62
Figura 5.5: Registro gráfico construído por G1.....	62
Figura 5.6: Conversão do registro gráfico para o registro algébrico.....	64
Figura 5.7: Tratamentos realizados no registro algébrico.....	64
Figura 5.8: Validação do modelo feita pelos alunos.....	65
Figura 5.9: Resolução do problema e conversão para língua natural.....	66
Figura 5.10: Adequação do registro algébrico por meio de um tratamento.....	67
Figura 5.11: Conversão realizada levando em conta a situação-problema investigada.....	68
Figura 5.12: Gráficos construídos no início da atividade.....	70
Figura 5.13: Construção do modelo algébrico.....	71
Figura 5.14: representação final da situação.....	72
Figura 5.15: Atividades cognitivas identificadas dos grupos na atividade 1.....	79
Figura 5.16: Coordenação dos registros produzidos na primeira atividade.....	80
Figura 5.17: Problemas definidos pelos grupos na atividade.....	84
Figura 5.18: Hipóteses definidas pelos alunos para atividade 2.....	85
Figura 5.19: Variáveis definidas na atividade 2.....	86

Figura 5.20: Esquema numérico da atividade 2.....	87
Figura 5.21: Conversão do registro numérico para o gráfico	88
Figura 5.22: Tratamentos realizados no registro numérico	88
Figura 5.23: Conversão para o registro algébrico na atividade 2.....	89
Figura 5.24: Expressões algébricas construídas por G2 e G3.....	89
Figura 5.25: Tratamento no registro algébrico da atividade de segundo momento	90
Figura 5.26: Resolução do grupo G3	90
Figura 5.27: Resolução do problema dos grupos G1 na atividade 2	91
Figura 5.28: Resposta apresentada por G2 na atividade 2	92
Figura 5.29: O objeto matemático nas hipóteses definidas	93
Figura 5.30: Desenvolvimento da atividade 2 por um dos grupos.....	94
Figura 5.31: Representações finais da situação-problema de cada grupo	95
Figura 5.32: Atividades cognitivas identificadas na atividade 2.....	102
Figura 5.33: Conversão do registro em língua natural para o algébrico.....	105
Figura 5.34: Conversão do registro gráfico para o registro numérico	105
Figura 5.35: Conversão 3 realizada por G1 na atividade do terceiro momento.....	106
Figura 5.36: Conversão do registro gráfico para o algébrico	107
Figura 5.37: Tratamentos realizados para resolver o problema	108
Figura 5.38: Conversão 5 de G1 na atividade do terceiro momento.....	108
Figura 5.39: Execução matemática para encontrar a representação final para os concluintes de licenciatura.....	110
Figura 5.40: Atividades cognitivas de G1 na atividade do terceiro momento.....	115
Figura 5.41: Conversão do registro em língua natural para o registro algébrico.....	117
Figura 5.42: Conversão 2 realizada por G2 na atividade do terceiro momento.....	118
Figura 5.43: Conversão 3 realizada por G2 na atividade do terceiro momento	118
Figura 5.44: Conversão 4 de G2 na atividade do terceiro momento.....	119
Figura 5.45: Procedimentos para construção da representação final de G2.....	121
Figura 5.46: Atividades cognitivas do grupo G2 na atividade do terceiro momento....	125
Figura 5.47: Registros utilizados na fase de matematização	127
Figura 5.48: Desenvolvimento matemático do modelo algébrico na atividade 2.....	128
Figura 5.49: fases da modelagem e as transformações de conversão	132
Figura 6.1: Aspectos que contribuíram para compreensão sob ponto de vista matemático nas atividades de modelagem	137

Figura 6.2: A análise cognitiva..... 138

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Níveis de congruência nas conversões.....	41
Tabela 3.2: Níveis de não-congruência nas conversões.....	42
Tabela 5.1: Aspectos matemáticos identificados em cada grupo.....	73
Tabela 5.2: Conversões realizadas na atividade do 1º momento.....	78
Tabela 5.3: Aspectos matemáticos identificados na atividade desenvolvida pelos grupos	96
Tabela 5.4: Conversões realizadas pelos grupos na atividade 2.....	98
Tabela 5.5: Aspectos matemáticos identificados no desenvolvimento da atividade 3 desenvolvida por G1.....	111
Tabela 5.6: Conversões realizadas por G1 na atividade do terceiro momento.....	113
Tabela 5.7: Aspectos matemáticos identificados na atividade de G2.....	122
Tabela 5.8: Conversões realizadas por G2 na atividade do terceiro momento.....	123
Tabela 5.9: Aspectos matemáticos de cada fase de uma atividade de modelagem.....	129

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1: Classificação dos Registros de Representação Semiótica quanto à natureza.....	32
Quadro 3.2: Questões para análise matemática.....	46
Quadro 4.1: Organização dos alunos nos grupos.....	51
Quadro 4.2: Cronograma das atividades desenvolvidas durante a coleta de dados.....	52
Quadro 4.3: Atividades e objeto matemático que emergiram.....	53
Quadro 4.4: Atividades analisadas.....	55
Quadro 5.1: Relação das atividades analisadas.....	56
Quadro 5.2: Questionário a ser respondido no final de cada atividade.....	57
Quadro 5.3: Texto entregue aos alunos na primeira atividade.....	57
Quadro 5.4: Reapresentação do quadro 3.2.....	69
Quadro 5.5: Texto entregue aos alunos na segunda atividade.....	83
Quadro 5.6: Resposta da questão 3 do questionário.....	94
Quadro 5.7: Atividade de terceiro momento elaborada por G1.....	103
Quadro 5.8: Atividade do terceiro momento de G2.....	116

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	16
INTRODUÇÃO.....	16
OBJETIVO DE PESQUISA	17
ESTRUTURA DO TEXTO	18
CAPÍTULO 2	19
MODELAGEM MATEMÁTICA	19
2.1 Modelagem Matemática na Educação Matemática.....	19
2.2 Atividade de modelagem matemática	21
2.3 Atividade de modelagem matemática na sala de aula: a familiarização dos alunos ...	25
2.4 A modelagem matemática e os registros de representação semiótica.....	26
CAPÍTULO 3	29
ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA: REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.....	29
3.1 As representações.....	29
3.2 Os registros de representação semiótica.....	31
3.2.1 Formação de uma representação identificável	33
3.2.2 O Tratamento	33
3.2.3 A Conversão	34
3.3 A coordenação dos registros de representação semiótica.....	42
3.4 Procedimentos de análise	43
3.4.1 A análise matemática	45
3.4.2 A análise cognitiva	46
3.5 Um panorama dos procedimentos utilizados nas análises.....	48
CAPÍTULO 4	50
O CONTEXTO DA PESQUISA.....	50
4.1 O colégio	50
4.2 A natureza da investigação.....	50
4.3 A turma investigada e o desenvolvimento das atividades	51
4.4 O objeto matemático	52
4.5 A coleta dos dados.....	53
4.6 A análise dos dados.....	54
CAPÍTULO 5	56
DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES.....	56

5.1	Descrição e análise das atividades de modelagem matemática desenvolvidas	56
5.1.1	Atividades 1: “Venda de Smartphones”	57
5.1.1.2	Análise matemática da atividade	69
5.1.1.3	Análise cognitiva da atividade	74
5.1.2	Atividade 2: “ Câncer de Tireóide”	83
5.1.2.1	Análise matemática da atividade	92
5.1.2.2	Análise cognitiva da atividade	97
5.1.3	Atividades do terceiro momento.....	103
5.1.3.1	Atividade: “Projeção de concluintes para 2016: Tecnológico x Licenciatura”	103
5.2.3.1.1	Análise matemática da atividade	109
5.2.3.1.2	Análise cognitiva da atividade	112
5.2.3.2	Atividade: “Mortes por Drogas”	115
5.2.3.2.1	Análise matemática da atividade	119
5.2.3.2.2	Análise cognitiva da atividade	122
5.2	Discussão dos Resultados.....	126
CAPÍTULO 6		134
CONSIDERAÇÕES FINAIS		134
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		141

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Atualmente algumas pesquisas no âmbito da Educação Matemática têm se interessado por questões relativas ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Nesse contexto, a atenção de alguns pesquisadores tem se voltado para a análise do processo de compreensão, no âmbito do desenvolvimento de atividades de ensino, cujo foco está na exploração de aspectos do desenvolvimento dessas atividades.

A compreensão diz respeito aos mecanismos que levam o aluno a aprender qualquer coisa, particularmente, em matemática. Assim, apoiados nas conjecturas de Raymond Duval¹, de que “a compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro de representação” (DUVAL, 2011b, p. 21) e na capacidade que o aluno possui de reconhecer em diferentes registros o mesmo objeto matemático², direcionamos nossa atenção para a análise dos registros que são produzidos pelos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Neste sentido, Duval (2011a) chama a atenção para a condição de se compreender algo em matemática. Para o autor, o aluno só compreende algo em matemática quando desenvolve a capacidade de reconhecer o objeto matemático por meio de seu registro de representação. Esses registros de representação, segundo Damm (2015), servem como auxílio para que os conhecimentos matemáticos sejam mobilizados, isto é, para se aprender, ou executar algo em matemática é preciso considerar a necessidade de se representar.

Dessa forma, compreender está relacionado com a capacidade de saber diferenciar o objeto matemático de suas possíveis representações. Duval (2009) argumenta que a necessidade de se distinguir um objeto de sua representação é importante, pois um mesmo objeto pode ser representado por diferentes registros.

¹ Raymond Duval é um filósofo e psicólogo que desenvolveu seus estudos na área de Educação Matemática em Estambulgo – França - de 1970 a 1995, no Instituto de Pesquisa Em Educação Matemática de Estambulgo.

² Objeto Matemático é — qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na atividade matemática (Godino, Batanero e Font, 2006, p. 5)

Essa diversidade de registros de representação, têm um papel fundamental na compreensão, pois, para Duval (2011b) “a compreensão requer a coordenação dos diferentes registros” (p.29), que são produzidos durante o trabalho matemático no qual o aluno é inserido.

Nesse sentido, Almeida e Vertuan (2011) consideram que

A compreensão em matemática implica em ir além de identificar e saber operar com registros de representação. Implica em reconhecer em diferentes registros o mesmo objeto matemático, bem como saber coordenar estes registros (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p.2).

No entanto, a produção e a coordenação de diferentes registros de representação, associados a um objeto matemático não é, em geral, espontânea. Muitos alunos desenvolvem atividades matemáticas e utilizam diferentes registros sem ao menos saber a relação entre eles. Assim, as atividades de ensino precisam proporcionar ou requerer do aluno este uso de diferentes representações.

É com esta perspectiva que investigamos em nossa pesquisa o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Essas atividades, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) consistem na abordagem de problemas, originados fora do âmbito da matemática, mas cuja resolução está fundamentada na matemática.

OBJETIVO DE PESQUISA

Buscamos com esta pesquisa, apontar elementos relativos a como se dá a compreensão no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, mais especificamente, visamos *investigar, à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica, como se dá a compreensão da matemática e do problema em atividade de modelagem matemática.*

A identificação de elementos que indicam compreensão se dá na análise e na interpretação dos registros de representação semiótica produzidos pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Dessa forma, propomos uma análise pautada em aspectos metodológicos presentes na teoria de Duval (2009, 2011a, 2011b, 2011c, 2012a e 2012b) que, em certa

medida, estão associados ao ponto de vista que adotamos para fazê-la, podendo ser feita sob dois pontos de vista: o matemático e o cognitivo. Assim nossos objetivos específicos se caracterizam em:

1. Analisar do ponto de vista matemático as atividades desenvolvidas pelos alunos, levando em conta a avaliação matemática dos resultados obtidos, explorando os processos utilizados, as propriedades e os argumentos tecidos durante o desenvolvimento da atividade.
2. Analisar do ponto de vista cognitivo capacidade de reconhecer o objeto matemático em diferentes representações e realizar conversões entre essas representações.

Para investigar nosso objetivo de pesquisa desenvolvemos atividades de modelagem com alunos do 2º Ano do Ensino Médio durante um projeto desenvolvido com nove alunos em um colégio particular da cidade de Assaí – PR.

ESTRUTURA DO TEXTO

O texto está estruturado em sete capítulos. No Capítulo 1 está inserida a presente discussão, em que tratamos de um contexto geral de nossa pesquisa e definimos o objetivo de pesquisa. No Capítulo 2 abordamos a modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática. Nossa opção metodológica, sua fundamentação e os aspectos que utilizaremos para desenvolver a pesquisa são descritos no Capítulo 3. No Capítulo 4 descrevemos o contexto no qual a pesquisa foi desenvolvida. No Capítulo 5 constam as análises à luz dos registros de representação semiótica. No capítulo 6 apresentamos considerações finais a respeito do objetivo investigado. E por fim, as referências bibliográficas que utilizamos no desenvolvimento da pesquisa.

CAPÍTULO 2

MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesse capítulo apresentamos considerações com relação ao entendimento da Modelagem Matemática na Educação Matemática, explicitando aspectos de sua caracterização e seu desenvolvimento em aulas de Matemática.

2.1 Modelagem Matemática na Educação Matemática

Com origem na área da Matemática Aplicada, a modelagem matemática se tornou um instrumento para o entendimento de fenômenos de diversas áreas do conhecimento.

No âmbito da Educação Matemática, segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), a modelagem matemática vem merecendo atenção desde o início do século XX, quando matemáticos aplicados se interessaram por formas de ensinar matemática. Segundo Almeida e Vertuan (2011), foi a partir da década de 1980 que as pesquisas realizadas com a modelagem matemática vinculada ao ensino

[...] começaram a apresentar um considerável número de publicações. Desde então, no entanto, foram se estruturando abordagens diferenciadas e, por meio de múltiplos olhares fundamentados em diferentes pressupostos teóricos, foram produzidos caminhos nem sempre convergentes e métodos, por vezes, distintos (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p.19).

Esses múltiplos olhares e o empenho de pesquisadores acabaram por estruturar diversos entendimentos sobre a modelagem matemática os quais fundamentaram diversas caracterizações presentes na literatura no âmbito da Educação Matemática. Podemos citar, por exemplo, neste contexto a caracterização de Bassanezi (2011) de que

[...] a modelagem consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (BASSANEZI, 2011, p. 16).

O autor entende a modelagem matemática como uma atividade humana e o seu desenvolvimento está ligado ao estudo de problemas da vida social.

Barbosa (2003, p.4) se refere à modelagem matemática como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”.

A modelagem matemática, associada a problematizações e investigações conforme descrito por Barbosa (2003), representa uma oportunidade para alunos investigar situações recorrendo à Matemática, sem procedimentos estabelecidos ou fixados previamente pelo professor, possibilitando uma diversidade de encaminhamentos que colaboram com a exploração de diferentes conceitos e ideias matemáticas.

Já Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) compreendem a modelagem matemática

[...] como um caminho para o ensino e a aprendizagem da Matemática ou para o “fazer” Matemática em sala de aula, referindo-se à observação da realidade (do aluno ou do mundo) e, partindo de questionamentos, discussões e investigações, defronta-se com um problema que modifica as ações na sala de aula, além da forma como se observa o mundo (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p.79).

Nessa perspectiva de observar a realidade D’Ambrosio (1986, p.121) entende a modelagem matemática em sala de aula como “um processo muito rico de encarar situações reais”. Segundo o autor, a modelagem matemática viabiliza a solução de um problema real e não apenas a solução de um problema matemático cuja resolução pode se tornar um processo mecânico e ineficiente para a compreensão do aluno.

Considerando essa relação com o ensino e a aprendizagem, nesta pesquisa entendemos a modelagem matemática conforme apontam Almeida e Brito (2005), considerando-a uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem de matemática, na qual fazemos uma abordagem, por meio da matemática, de situações não matemáticas.

A caracterização da modelagem³ como alternativa pedagógica deixa implícita uma forma de se conduzir o desenvolvimento de atividades dessa natureza em sala de aula. Assim, cabe ao professor estipular a melhor forma de inseri-la nas aulas, podendo

³ Usaremos modelagem para nos referir à modelagem matemática.

fazer uso da modelagem matemática para introduzir um assunto (conteúdo), para realizar um estudo extracurricular (projetos), ou mesmo para realizar a aplicação de conteúdos matemáticos já conhecidos pelos alunos.

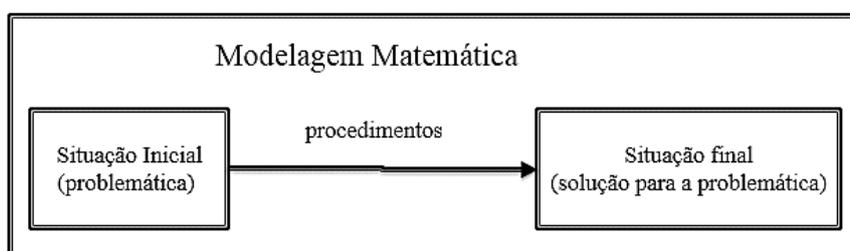
A introdução da modelagem matemática nas aulas vem, nesse sentido, associada a situações-problema que são analisadas e investigadas durante o desenvolvimento da atividade.

2.2 Atividade de modelagem matemática

A atividade de modelagem matemática, conforme indica a figura 2.1, é caracterizada por Almeida, Silva e Vertuan (2012)

[...] em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para situação final (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.12).

Figura 2.1: Esquema de uma atividade de modelagem matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12)

Esse conjunto de procedimentos a que se referem os autores diz respeito à formulação de um problema, à definição de variáveis, à formulação de hipóteses e à elaboração de um modelo matemático e sua interpretação com relação ao problema em estudo.

Nesse sentido, uma atividade de modelagem matemática requer procedimentos criativos e interpretativos que determinam uma estrutura matemática que deve incorporar as características essenciais da situação investigada. Essa estrutura constitui um modelo matemático que pode ser entendido como

[...] um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática e tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 13).

Kehle e Lester (2003) ponderam que o modelo é uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Entretanto, é importante considerar que a construção dos modelos matemáticos,

[...] depende do conhecimento dos fatos e fenômenos, do comportamento reconhecível dos objetos reais e sistemas, normalmente expressos por leis, em sua maioria derivadas empiricamente. Para lidar e tirar benefícios a partir de modelos matemáticos, ferramentas intelectuais são fornecidas pela matemática, considerada um corpo de conceitos e teorias e as regras operacionais para lidar com eles (D'AMBRÓSIO, 2009, p. 92).

Vertuan (2007) destaca que a construção do modelo, mesmo sendo essencial para atividade de modelagem matemática, não pode ser considerada o fim deste tipo de atividade. A atividade de modelagem é “uma alternativa capaz de permitir uma compreensão mais global acerca da situação investigada, buscando uma resposta para o problema” (VERTUAN, 2007, p.34).

Assim, podemos considerar que o desenvolvimento de uma atividade de modelagem faz com que o aluno perpasse por certos caminhos, no que diz respeito ao sair de uma situação inicial (problemática) e chegar à situação final (resposta a essa problemática). Diante disso, tomamos como base a proposta de Almeida, Silva e Vertuan (2012), que associam o desenvolvimento de uma atividade de modelagem a um conjunto de fases que sinalizam os procedimentos realizados pelos modeladores durante o desenvolvimento. Os autores caracterizam quatro fases, descritas como:

a) *inteiração*: representa o primeiro contato do aluno com uma situação-problema que pretende estudar;

b) *matematização*: é a fase em que ocorre transição de linguagens (linguagem materna para a linguagem matemática);

c) *resolução*: consiste na obtenção do modelo matemático que descreve a situação;

d) *interpretação dos resultados e validação*: visa, além da capacidade de construir e aplicar modelos, avaliar o processo de construção do modelo e os diferentes contextos de suas aplicações;

Além dessas quatro fases, os autores destacam também a *comunicação dos resultados*, por meio da qual os responsáveis pela atividade informam os resultados aos demais alunos, apresentando argumentações que subsidiam suas ações na atividade.

Essas fases não indicam uma prescrição rigorosa, ou seja, elas não acontecem necessariamente na ordem apresentada, podendo o modelador realizar idas e vindas, revisitando-as, caso necessário.

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), é o conjunto de ações cognitivas que a atividade demanda, sejam elas implícitas relacionadas a procedimentos no desenvolvimento, ou explícitas, no que diz respeito a representações simbólicas.

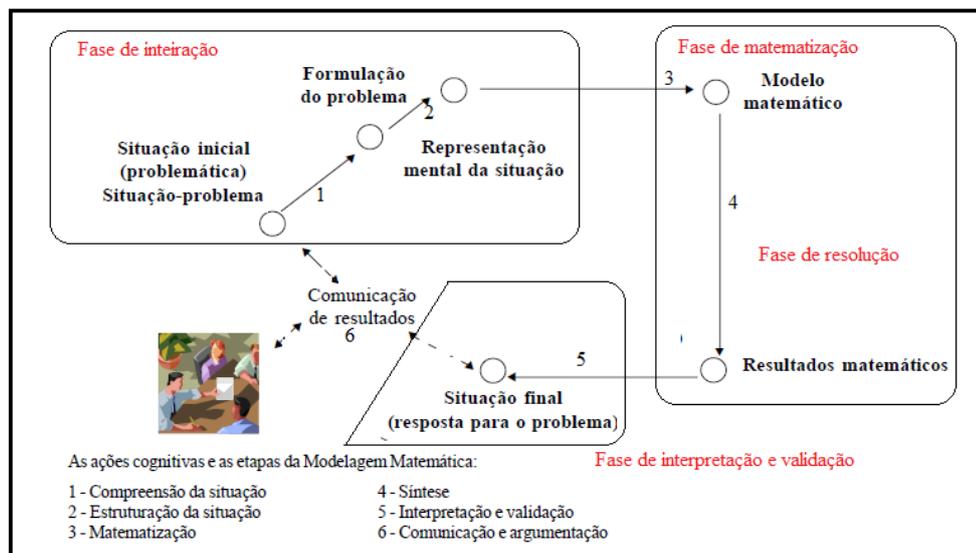
Entender o desenvolvimento de uma atividade de modelagem segundo uma perspectiva cognitivista, conforme aponta Ferri (2006), implica identificar as ações cognitivas nas diferentes fases do desenvolvimento da atividade. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.17-19) descrevem essas ações como:

- Compreensão da situação, que se constitui no entendimento da situação inicial, a interpretação dos fatos e informações e os agrupamentos de ideias.
- Estruturação da situação, presente na identificação do problema, na elaboração de uma questão e na definição de metas para a resolução da atividade.
- Matematização, que consiste na obtenção do modelo matemático e envolve a transição da linguagem natural para a linguagem matemática, mediada por representações.
- Síntese, relaciona-se com o uso de conceitos, técnicas, métodos e representações, com a resolução de problemas específicos usando conhecimentos prévios, com a visão de padrões, com o uso de ideias conhecidas para criar novas ideias e até mesmo com o uso de recursos tecnológicos para a construção do modelo matemático.

- Interpretação e validação corresponde à análise de uma resposta em que o aluno se depara com a necessidade de comparar e distinguir as ideias presentes no desenvolvimento da atividade, generalizar e articular os conhecimentos de outras áreas. Também diz respeito à análise da representação matemática associada ao problema, levando em conta os procedimentos matemáticos envolvidos e a adequação da representação para a situação em estudo.
- Comunicação e argumentação é a ação que implica no desenvolvimento de uma argumentação que possa convencer os modeladores e os demais que terão acesso ao resultado, de que a solução é razoável e consistente. O aluno necessita expor, apresentar e justificar suas escolhas com base em fundamentos consistentes.

A figura 2.2, ilustra as ações cognitivas associadas às fases de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Figura 2.2: Ações cognitivas nas fases da modelagem matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 19)

2.3 Atividade de modelagem matemática na sala de aula: a familiarização dos alunos

Segundo Almeida e Vertuan

Qualquer tentativa de implementar atividades de modelagem matemática em sala de aula vem carregada do que se entende por uma ‘aula de Matemática’, aceção esta construída durante toda uma formação escolar, em que, geralmente, o aluno pouco se depara com atividades investigativas, como é o caso das atividades de modelagem matemática. (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p.09).

Ao relatar suas experiências com a modelagem, Franchi (1993) relata que os alunos podem apresentar dificuldades. Segundo a autora, os alunos

[...] estão acostumados a ver o professor como transmissor de conhecimentos e, portanto, têm uma postura passiva em relação à aula. Esperam receber explicações e participar apenas fazendo perguntas ou resolvendo exercícios. Quando o trabalho coloca o centro do processo de ensino-aprendizagem nos alunos, e quando os resultados dependem da ação deles, a aula passa a caminhar em ritmo lento, pois eles não estão acostumados a agir e nem sempre sabem o que fazer, ou por onde começar (FRANCHI, 1993, p.102).

Silva, Almeida e Gerolamo (2011) sugerem que o aluno precisa viver experiências com atividades de modelagem matemática a fim de “aprender” a desenvolvê-las e fazer com que o desenvolvimento da atividade seja orientado pela busca de uma solução para a situação-problema e seja ele próprio o “resolvedor principal”. Nesse contexto Almeida, Silva e Vertuan (2012) sugerem que a modelagem seja introduzida de forma gradativa por meio de três momentos.

Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que as ações como definição de hipóteses, simplificação, a transição para a linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para análise da situação, são em certa medida, orientadas e avaliadas pelo professor.

Posteriormente, em um segundo momento, uma situação-problema é sugerida pelo professor aos alunos e esses, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para investigação da situação e realizam a definição de variáveis, e a formulação de hipóteses

simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para análise da situação. O que muda, essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante no que se refere à definição de procedimentos extra matemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.

Finalmente, no terceiro momento, os alunos divididos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta e análise dos dados, a obtenção e validação do modelo e seu uso para análise da situação, bem como a comunicação desta investigação para a comunidade escolar (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.26).

A principal argumentação a favor dessa introdução gradativa, segundo Almeida e Vertuan (2014), reside na possibilidade que o aluno tem de desenvolver a “habilidade de fazer modelagem” (p.29). Essa habilidade vai se construindo na medida em que a colaboração do professor, mais intensa no primeiro e segundo momento, vai conferindo ao aluno confiança e independência com relação aos procedimentos associados ao desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

A familiaridade do aluno com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, ao mesmo tempo em que desencadeia a habilidade para fazer modelagem, também desenvolve a possibilidade de transitar entre diferentes representações associadas ao objeto matemático que emerge da atividade. O uso e a construção dessas diferentes representações vêm sendo investigadas à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica.

2.4 A modelagem matemática e os registros de representação semiótica

Buscar aproximações entre a matemática e a teoria dos registros de representação semiótica vem sendo o empenho de diversos pesquisadores, como por exemplo Moretti (2002); Brandt (2005); Colombo, Flores e Moretti (2007); Karrer (2006); Souza (2008); Dionizio e Brandt (2011); Kaleff (2007); Oliveira (2014). De modo geral, as articulações entre a matemática e seus aspectos de ensino com a teoria dos registros de representação semiótica propostos por esses pesquisadores vieram contribuir para investigações sobre a aprendizagem em matemática.

Também no âmbito da modelagem matemática alguns autores se dedicaram a estudar relações entre a modelagem e a teoria dos registros de representação semiótica. Podemos citar alguns autores como Almeida e Vertuan (2011); Rosa e Almeida (2009); Brandt (2010); Vertuan (2007); Rosa (2008); Silva (2008); Costa e Silva (2014), Costa, Almeida, Silva e Passos (2015), que são alguns exemplos de pesquisadores que buscaram articular essa teoria cognitivista com a modelagem matemática.

Nas pesquisas que vislumbram a associação entre a teoria dos registros de representação semiótica e a modelagem matemática, alguns autores partem do princípio de que, devido a característica investigativa da atividade de modelagem, o aluno, ao desenvolvê-la, faz o uso de diferentes registros de representação.

Essa afirmativa pode ser confirmada por Skovsmose (2001). Para o autor, um ponto a se considerar em atividades de modelagem é a transição de diferentes linguagens. Em geral, partindo da linguagem natural, considerando diferentes informações, a atividade requer a transição para a linguagem matemática. Para essa transição de linguagens o aluno faz o uso de diferentes registros de representação. Rosa (2008) argumenta que o aluno só assimila os conceitos presentes nos objetos matemáticos, quando o mesmo os representa.

Para autora, as atividades de modelagem “envolvem diferentes registros de representação de um objeto matemático. Gráficos, relações funcionais, tabelas, figuras geométricas são exemplos dessas representações” (ROSA, 2008, p.44).

Essas diferentes representações também podem ser observadas em Silva e Vertuan (2009). Com objetivo de analisar a possibilidade do desenvolvimento de uma mesma atividade em diferentes níveis de ensino, os autores discutem aspectos sobre a compreensão do objeto matemático e articulam os aportes teóricos da modelagem e a teoria dos registros de representação semiótica.

Para que os alunos possam compreender não somente o objeto matemático, mas todos os aspectos matemáticos envolvidos na atividade por eles desenvolvida, eles devem ir além de identificar e operar os diferentes registros de representação. Para Almeida e Vertuan (2011), o aluno deve reconhecer em diferentes registros o mesmo objeto e ser capaz de coordená-los. Nesse sentido, Duval (2011b) argumenta que “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica” (DUVAL, 2011b, p.15).

Como podemos ver, já há indícios na literatura, de que a modelagem matemática, em certa medida, favorece a produção e articulação de diferentes registros de representação semiótica. Tomando esse fato como base e as indicações metodológicas contidas no livro *“Ver e ensinar a matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica”*, e no artigo *“Quais teorias e métodos para pesquisa sobre o ensino da matemática?”*, ambos escritos por Raymond Duval, é que propomos em nossa pesquisa usar a teoria dos registros de representação semiótica como uma perspectiva metodológica para investigar como se dá a compreensão em atividades de modelagem matemática.

CAPÍTULO 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA: REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Neste capítulo estruturamos os aspectos metodológicos que fundamentam nossa pesquisa e estão embasados na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

No decorrer das primeiras seções deste capítulo apresentamos elementos da teoria de Duval relevantes para nossa pesquisa. Em seguida fundamentamos nossos procedimentos de análise, tendo como pressuposto que a própria teoria oferece instrumentos para que possamos analisar os registros produzidos pelos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

3.1 As representações

O entendimento de como as pessoas aprendem matemática tem merecido a atenção de pesquisadores e professores da área de Educação Matemática. Dessa forma, a fim de tratar da compreensão em matemática, consideramos que, de modo geral ela constitui

[...] um processo que depende de múltiplos fatores, entre os quais se encontram as diversas interações que o estudante tem com o meio, com os professores, com os demais alunos e com as ferramentas a que tem acesso (VERTUAN, 2007, p.18).

Em matemática, particularmente, a natureza simbólica dos objetos matemáticos, faz com que eles sejam “conhecidos não no que eles são, mas apenas em suas propriedades, no que deles se pode dizer” (LINS, 2004, p.96). Assim as interações e as ferramentas a que se refere Vertuan (2007) dizem respeito também às representações dos objetos matemáticos.

Neste contexto, Moretti (2002) salienta que em matemática parece haver uma “dependência entre as formas de representação e a manipulação dos seus objetos” (p.02), uma vez que o acesso a esses objetos e seu uso é mediado pelas suas representações.

Duval (2011a) defende que a função exercida pelas representações é “evocar o que está ausente” e “comunicar” um pensamento para os outros. Entretanto, o autor chama atenção para a necessidade e capacidade de diferenciar a representação do objeto que está sendo representado. Essa capacidade fomenta os mecanismos de compreensão dos conceitos matemáticos. Assim, o reconhecimento das diferentes representações, características do mesmo objeto, pode ser um indicativo de conhecimento com relação ao objeto.

Nesse sentido, a compreensão está subordinada às representações, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Logo, no que se refere à produção dessas representações, a condição de não confundi-las com o objeto representado é essencial, pois elas representam algum aspecto do objeto e não sua totalidade.

Dessa forma, apontamos a necessidade do domínio de diferentes sistemas de representações, uma vez que para se compreender em matemática é necessário identificar e manusear diferentes aspectos do objeto presentes em suas representações.

Assim, surge a extensão ‘semiótica’ no universo das representações, a qual está ligada aos diferentes sistemas semióticos a que recorremos para produzir as representações. Para Duval (2012a), as Representações Semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos⁴ pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. Tais representações são externas e conscientes do ser humano, assim realizam uma função de tratamento intencional, fundamental para a aprendizagem humana.

Para Duval (2009) as representações semióticas caracterizam-se por

[...] serem relativas a um sistema particular de signos, como a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para os sujeitos que as utilizam. (DUVAL, 2009, p. 32).

⁴ Tomamos o signo como algo que, para alguém, toma lugar de outra coisa (o objeto), não necessariamente em todos os aspectos desta coisa. É, portanto, uma representação parcial do objeto, em termos de sua forma ou capacidade (PEIRCE, 2005).

Segundo Duval (2011a), a questão da necessidade de representações semióticas para o conhecimento matemático abrange dois problemas essencialmente distintos: o da referência a um objeto e o da transformação em outras representações semióticas.

A diversidade de tipos de representação semiótica e o modo de funcionamento próprio de cada tipo, são aspectos fundamentais para a atividade matemática e, em grande medida, têm influência sobre a compreensão.

Nas atividades matemáticas, a fim de considerar tanto a representação como a referência ao objeto quanto a sua transformação em outra representação, Duval (2011a), introduz a noção de registro de representação semiótica.

3.2 Os registros de representação semiótica

Para Duval (2011a) um registro de representação semiótica está associado a um “sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como sistema formal. Ele se caracteriza, essencialmente, pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar” (DUVAL, 2011a, p.70).

Segundo o autor, os registros de representação semiótica

[...] são sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos. Para ser um registro um sistema semiótico deve cumprir duas condições. Primeiramente, poder produzir representações que permitem tanto ter acesso a objetos perceptivamente ou instrumentalmente inacessíveis, quanto explorar tudo que é possível. Em seguida, sobretudo, abrir um campo de operações específicas que permitem transformar as representações produzidas em novas representações (DUVAL, 2011a, p.97).

É nesse sentido que, de acordo com Duval (2012a), a compreensão em matemática está intimamente ligada ao uso de diferentes registros de representação de um objeto matemático, ou seja, na capacidade do aluno em manipular diferentes registros de representação.

Para Vertuan (2007)

O termo “registro de representação semiótica” é usado para designar os diferentes tipos de representações semióticas. As representações língua natural, tabular, gráfica, figural e algébrica são exemplos de tipos diferentes de representação. Cada uma delas consiste num registro de

representação diferente (ou sistema de representação) (VERTUAN, 2007, p.21).

Um sistema semiótico constitui um registro de representação semiótica se o mesmo possibilitar a produção de outras representações a partir de transformações realizadas na representação.

Para Duval (2011a) “o que é essencial em uma representação semiótica são as transformações que se pode fazer e não a própria representação” (DUVAL, 2011a, p.68). Segundo o autor, a atividade matemática consiste na transformação das representações semióticas e a mobilização de diferentes representações para o mesmo objeto. Essas representações semióticas podem ter naturezas distintas, dependendo de qual aspecto do objeto matemático queremos evidenciar.

Ao tratar da natureza dos registros de representação semiótica, Duval (2011b) estabelece duas classificações: registros multifuncionais e registros monofuncionais. Estes são associados a representações discursivas e representações não-discursivas, conforme indica o Quadro 3.1.

Quadro 3.1: Classificação dos Registros de Representação Semiótica quanto à natureza

	Representação discursiva	Representação não-discursiva
Registros multifuncionais: os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural: associações verbais (conceituais). Forma de relacionar: - argumentação a partir de observações, de crenças...; - dedução válida a partir de definições ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensões 0, 1, 2 ou 3). - apresentação operatória e não somente perceptiva; - construção com instrumentos.
Registros monofuncionais: os tratamentos são, principalmente, algoritmos	Sistemas de escrita: - numéricas (binária, decimal, fracionária...); - algébricas; - simbólicas (línguas formais); - cálculos.	Gráficos cartesianos: - mudanças de sistemas de coordenadas; - interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2011b, p. 14)

Para Duval (2011b), uma representação é considerada um registro de representação semiótica quando a mesma permite três atividades cognitivas: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão de um registro de representação para outro, de outro sistema de representação.

3.2.1 Formação de uma representação identificável

Quando reconhecemos na representação o objeto que ela representa, dizemos que essa representação é identificável. Para Duval (2009), a formação de uma representação identificável “implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que queremos representar” (DUVAL, 2009, p.53). A figura 3.1 é um exemplo de uma representação identificável.

Figura 3.1: Placa de trânsito



Fonte: o autor

De fato, identificamos nesta figura um objeto, pois ao olhar para este desenho sabemos que ele se refere ao ato do condutor de dar a preferência a outro veículo em um cruzamento. Porém, esta representação não pode ser classificada como um registro de representação semiótica pois, mesmo que identifiquemos o objeto que ela representa, é impossível fazer transformações no registro, uma vez que o novo registro poderia não fazer a indicação do anterior, no que se refere às normas de trânsito.

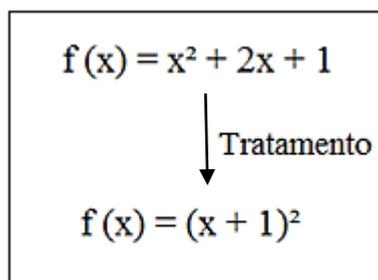
3.2.2 O Tratamento

A atividade cognitiva tratamento está baseada na mudança do registro sem que um novo sistema de representação seja mobilizado. Ou seja, caracteriza uma mudança interna do registro. Para Duval (2011b)

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo sistema de representação: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura seguindo critérios de conexidade e simetria (DUVAL, 2011b, p.16).

Na figura 3.2 exemplificamos um tratamento realizado no registro algébrico, em que o novo registro continua no mesmo sistema representacional. Neste exemplo o registro algébrico é transformado em um registro de mesma natureza e tipo, porém com alterações na sua expressão.

Figura 3.2: Exemplo de tratamento no registro algébrico

Um diagrama contido em um retângulo com uma borda preta. No topo, a equação $f(x) = x^2 + 2x + 1$ é escrita. Abaixo dela, uma seta vertical aponta para baixo, com a palavra "Tratamento" escrita ao lado da seta. Na base do diagrama, a equação $f(x) = (x + 1)^2$ é escrita.
$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

↓ Tratamento

$$f(x) = (x + 1)^2$$

Segundo Duval (2009), a atividade matemática não pode se resumir apenas a tratamentos, uma vez que essa transformação não favorece a visualização de todos os aspectos diferentes do objeto representado.

Na figura 3.2, por exemplo, ainda que o registro original tenha sido transformado, essa transformação não indica avanços, em termos de compreensão, de características da função do segundo grau. Visando isso, outro tipo de transformação precisa ser realizado.

3.2.3 A Conversão

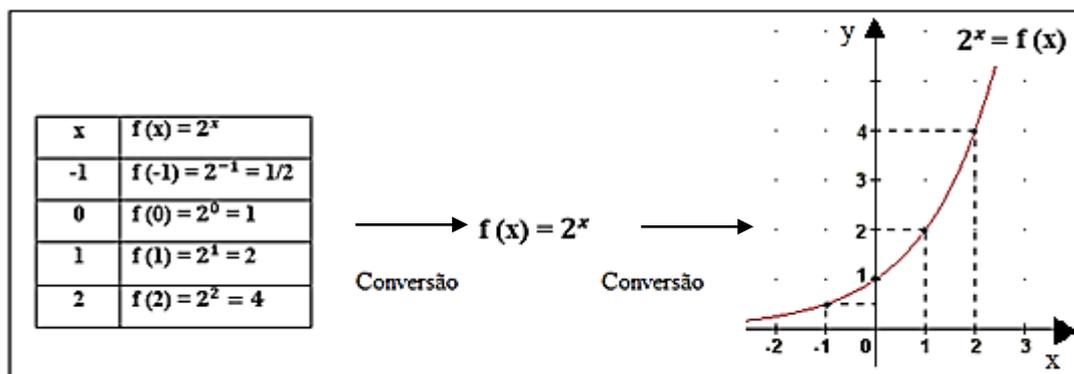
A conversão de uma representação em outra consiste em “transformar um registro de representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada, num registro de representação usando outro sistema de representação” (DUVAL, 2009, p.58).

Assim, a conversão consiste em uma transformação externa do registro em que outros sistemas de representação são mobilizados, conservando o mesmo objeto. Essa transformação, conforme pontua Damm (2015), é fundamental para o trabalho com matemática.

Duval (2012a) afirma que o ato de mudar o sistema de representação de um objeto matemático é um mecanismo que leva à compreensão, uma vez que cada sistema semiótico tem suas particularidades e especificidades representacionais.

A figura 3.3 ilustra uma conversão em que sistemas de representação diferentes são mobilizados para representar o objeto função exponencial.

Figura 3.3: Exemplos de conversões em registros de representação semiótica



Fonte: o autor

Este exemplo ilustra a transformação do registro tabular para o registro algébrico e do registro algébrico para o gráfico. Como ambas as representações pertencem a sistemas semióticos diferentes, o trânsito de uma para outra é possível pela atividade cognitiva de transformá-las, por meio de conversões.

Rosa (2008) afirma que a mudança de um registro semiótico para outro, “não é somente mudar de modo de tratamento, mas é também explicar os diferentes aspectos do mesmo objeto matemático” (ROSA, 2008, p.27), pois, cada sistema semiótico permite a visualização e o entendimento de aspectos diferentes, que se complementam e se relacionam na medida em que o aluno domina essa transformação.

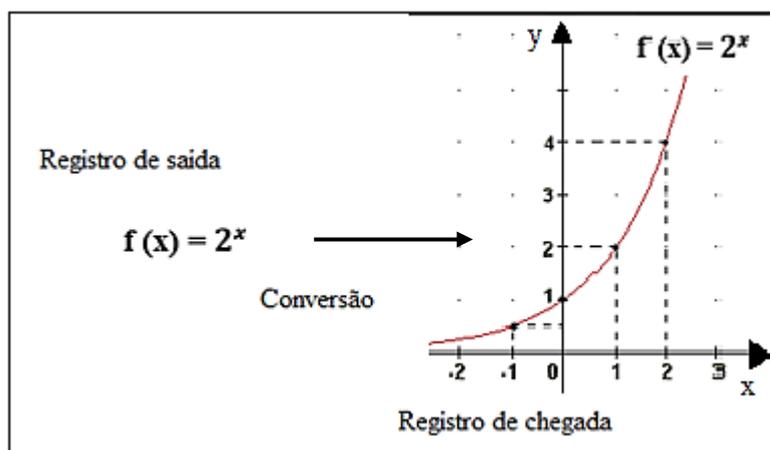
Neste contexto Duval (2011a) aponta que

[...] a mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro (DUVAL, 2011a, p. 100).

Essas unidades de sentido são analisadas conforme fazemos o uso da operação cognitiva de colocar em correspondência, ou seja, quando analisamos num registro de chegada aspectos do registro de saída. Esses aspectos possibilitam o reconhecimento do mesmo objeto em representações diferentes.

Na figura 3.4 colocamos em correspondência dois registros semióticos diferentes, o registro de saída, no caso um registro algébrico, e o registro de chegada, um registro gráfico, ambos representando o mesmo objeto matemático. Identificar, por exemplo, o comportamento e o aspecto de uma função crescente, é uma característica visualmente mais evidente no registro de representação gráfico.

Figura 3.4: correspondência entre dois registros



Fonte: o autor

Segundo Duval (2011c), as unidades de sentido de um registro algébrico correspondem às unidades simbólicas, tais como: símbolos relacionados à igualdade ou desigualdades, símbolos relacionados a operações ou sinais, símbolos referentes às variáveis, expoentes, coeficientes ou constantes.

Já para o registro gráfico as unidades de sentido dizem respeito às variáveis visuais, que levam em conta a discriminação das propriedades figurais de uma representação gráfica. Dessa forma, o autor distingue duas variáveis gerais e três variáveis relativas, que dependem do tipo de traçado do gráfico.

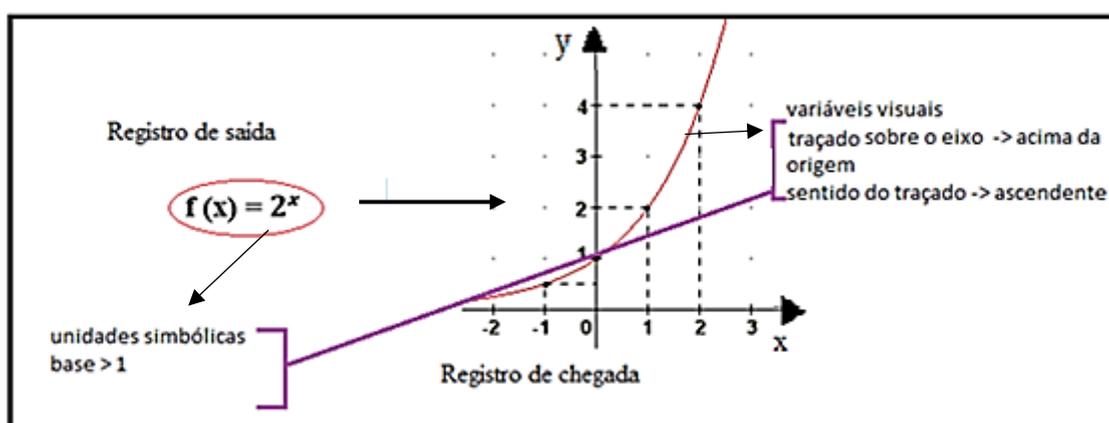
As duas variáveis gerais para Duval (2011c) estão relacionadas a:

- Implantação da tarefa, quer dizer, o que se destaca como figura sobre o fundo: uma linha ou uma zona;
- Relativa à forma da tarefa: linha traçada que delimita ou não uma zona é reta ou curva. Se for curva é aberta ou fechada. (DUVAL, 2011c, p.100).

As variáveis visuais, classificadas como gerais, dizem respeito ao reconhecimento de aspectos fundamentais do registro gráfico. As outras três variáveis visuais, classificadas como relativas, correspondem: ao sentido do traçado do gráfico, ao ângulo do traçado (no caso dos gráficos lineares) e à posição do traçado em relação à origem no plano.

Com base nas assertivas de Duval (2011c), esquematizamos na figura 3.5, as correspondências entre o registro algébrico (saída) e o gráfico (chegada), apresentados anteriormente na figura 3.4

Figura 3.5: Correspondência entre as unidades de sentidos dos registros



Entretanto, não é apenas nas unidades de sentido que uma conversão pode transparecer. Outro fator que permeia essa transformação é a ordem com que ela se dá. Segundo Duval (2009), a ordem das conversões é um aspecto importante, uma vez que o que é expresso em dado sentido pode não ter os mesmos custos cognitivos quando a conversão se dá em sentido contrário.

Esta análise da relação entre registro de chegada, registro de saída e a ordem da conversão, está associada com o que Duval (2011b) denomina de congruência das conversões.

Ao analisar uma conversão, Duval (2011b) diz que duas situações podem ocorrer:

Ou a representação terminal (chegada) transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência (Duval, 2011b, p.19).

Moretti (2002) relata que

[...] o trânsito entre as mais diversas representações possíveis de um objeto matemático em questão é que assume importância fundamental. O custo cognitivo desse trânsito vai depender, e muito, da noção chamada por ele, de congruência semântica (MORETTI, 2002, p.344).

Diversos autores fizeram uso das conversões e dos fenômenos de congruência em seus trabalhos. Para subsidiar essa questão da dificuldade em se converter uma representação para outra, autores como Brandt (2005), Vertuan (2007), Rosa (2008) e Silva (2008), dentre outros, discutiram aspectos que influenciam e colaboram com a compreensão da matemática, em relação aos fenômenos de congruência e não-congruência.

Com base na análise das unidades de sentido podemos inferir sobre o fenômeno de congruência. Duval (2012a) estabelece três condições que devem ocorrer para que uma conversão seja congruente.

- Correspondência semântica entre as unidades significantes das representações, ou seja, correspondência uma a uma. Neste caso, para cada elemento simples no registro de saída, existe um elemento simples correspondente no registro de chegada.
- Unicidade semântica terminal, em que cada unidade significativa no registro de saída tem uma única unidade significativa no registro de chegada.
- Conservação da ordem das unidades significantes, ou seja, mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações.

Caso uma dessas condições não seja satisfeita, a conversão é classificada como não-congruente.

A figura 3.6 ilustra uma conversão congruente de um registro tabular, monofuncional discursivo, para um registro gráfico, monofuncional não discursivo.

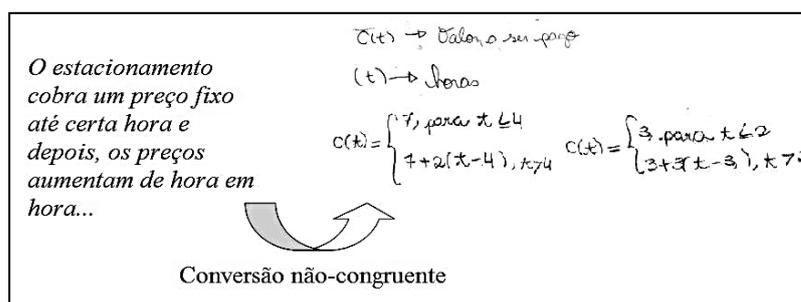
Figura 3.6: Congruência na conversão entre dois registros



A conversão da figura 3.6, é classificada como congruente por satisfazer as três condições estabelecidas por Duval (2012a). Na conversão existe correspondência semântica entre as unidades de sentido, uma vez que os pontos descritos no registro tabular têm correspondência com os representados no registro gráfico. Existe também unicidade semântica terminal, uma vez que as unidades significantes são correspondentes entre ambos os registros. Além disso, a ordem das unidades significantes é estabelecida, ou seja, a conversão inversa entre os registros é possível, pois os valores numéricos, relacionados no registro tabular, correspondem aos valores numéricos utilizados como pares ordenados no registro gráfico.

A figura 3.7 ilustra uma conversão não-congruente entre os registros em língua natural, multifuncional discursiva e o registro algébrico, monofuncional discursivo.

Figura 3.7: Fenômeno de não-congruência na conversão



Fonte: Costa et al (2015, p.11)

Segundo Costa et al (2015), uma conversão entre um registro de natureza multifuncional (língua natural) para um registro de natureza monofuncional (algébrico) é não-congruente, pois o registro de chegada algébrico não deixa transparecer o registro de saída. Segundo os autores

Seguindo os critérios de congruência, a conversão da língua natural para o registro algébrico nesta resolução não possui unicidade terminal, uma vez que podemos encontrar outra forma de representar as variáveis, seja a variável dependente seja a variável independente. Não há também uma ordem requerida para estas variáveis de modo que se mudarmos a ordem das variáveis a representação algébrica também muda. Neste caso, a conversão é não-congruente. (COSTA, ALMEIDA, SILVA e PASSOS, 2015, p. 10-11).

Segundo Duval (2011a), existem alguns fatores que podem influenciar a congruência de uma conversão, tais como a natureza da representação de saída e de chegada, que podem ser monofuncionais e cujos tratamentos são algoritmizáveis, ou multifuncionais, cujos tratamentos não são algoritmizáveis; a forma das representações que podem ser discursivas (sistema de escrita e cálculos) ou não-discursivas (gráficos cartesianos). Para o autor a atividade de conversão pode ser mais complexa ou menos complexa dependendo da natureza das representações.

Com base nesses fatores Rosa (2008) caracterizou níveis de congruência nas conversões realizadas por alunos. Na tabela 3.1, organizamos os níveis de congruência e suas condições, conforme proposta de Rosa (2008).

Tabela 3.1: Níveis de congruência nas conversões

Nível de congruência	Condições a ser observadas
Nível de congruência alto	<ul style="list-style-type: none"> • As três condições de congruência de Duval estão satisfeitas; • Os registros de representação de saída e de chegada possuem a mesma natureza (ambos monofuncionais ou ambos multifuncionais) e possuem a mesma forma, (ambos discursivos ou ambos não discursivos). • Os estudantes que realizam a conversão de algum modo “compreendem” o objeto matemático em estudo.
Nível de congruência médio alto	<ul style="list-style-type: none"> • As três condições de congruência de Duval estão satisfeitas; • Os registros de representação de saída e de chegada possuem a mesma natureza (ambos monofuncionais ou ambos multifuncionais) mas não possuem a mesma forma, (um discursivo e o outro não discursivo);

	<ul style="list-style-type: none"> Os estudantes, para realizar a conversão, precisam usar conhecimentos básicos como para realizar uma atividade de codificação.
Nível de congruência médio baixo	<ul style="list-style-type: none"> As três condições de congruência de Duval estão satisfeitas; Os registros de representação de saída e de chegada possuem a mesma natureza (ambos monofuncionais ou ambos multifuncionais) e possuem a mesma forma, (ambos discursivos ou ambos não discursivos); Os estudantes, para realizar a conversão, precisam usar conhecimentos mais avançados e em maior variedade. Não é somente realizar uma atividade de codificação.
Nível de congruência baixo	<ul style="list-style-type: none"> As três condições de congruência de Duval estão satisfeitas; Os registros de representação de saída e de chegada não possuem a mesma natureza (ambos monofuncionais ou ambos multifuncionais) ou/e não possuem a mesma forma, (ambos discursivos ou ambos não discursivos); Os estudantes, para realizar a conversão, precisam usar conhecimentos mais avançados e não somente realizar uma atividade de codificação.

Fonte: Rosa (2008, p. 49 – 52)

Assim, como as conversões são ditas congruentes quando satisfazem os três critérios de Duval, elas são não-congruentes se não satisfazem a uma dessas condições. Dessa forma, Rosa (2008), também estabelece três níveis de não-congruência nas conversões, conforme organizamos na tabela 3.2.

Tabela 3.2: Níveis de não-congruência nas conversões

Nível de não-congruência	Condições
Nível de não-congruência baixo	Não satisfaz a uma das três condições estabelecidas por Duval.
Nível de não-congruência médio	Não satisfaz a duas das três condições de Duval.
Nível de não-congruência alto	Não satisfaz às três condições de Duval.

Fonte: Rosa (2008, p.53-54)

A conversão pode ter custos cognitivos variados, dependendo do tipo e nível de conversão. Para Duval (2011b), essa transformação está intimamente ligada aos mecanismos que levam à compreensão.

Entretanto, para além de realizar conversões, a compreensão requer a identificação de características do objeto em diferentes registros de representação. Esse fenômeno caracteriza a coordenação.

3.3 A coordenação dos registros de representação semiótica

Segundo Duval (2012a), a utilização de vários registros de representação é uma característica do pensamento humano. Essa característica se deve ao fato de que os registros de representação são responsáveis por manifestar as representações mentais dos indivíduos.

A coordenação, segundo o autor, aparece como condição fundamental para a compreensão, pois para Duval (2011b) a atividade matemática demanda a mobilização de ao menos dois registros de representação e a possibilidade de trocar de registro sempre que for adequado.

Almeida e Vertuan (2011), apoiados na assertiva de Duval (2011b) de que “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica” (p.15), consideram que

[...] a compreensão em Matemática acontece na medida em que o sujeito que aprende, consegue coordenar vários registros de representação associados a um mesmo objeto matemático (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p. 112).

Ainda nesse sentido, Vertuan (2007) relata que essa coordenação não é espontânea. O aluno pode vir a fazer conversões sem perceber nenhuma relação entre os registros. Dessa forma, salientamos que as conversões devem ser estimuladas nas aulas, visto que é condição fundamental para a conceitualização do objeto matemático e a sua compreensão pelo estudante.

Dessa forma, levando em consideração a diversidade da simbologia matemática, associada à construção de modelos para situações não matemáticas, é preciso ponderar que, mesmo que diferentes representações estejam associadas ao fenômeno, a sua compreensão se dá à medida que as diferentes representações se complementam ou mostram características específicas.

Diante disso buscamos analisar os registros produzidos pelos alunos em atividades de modelagem matemática para que possamos fazer inferências de como se dá a compreensão. Com esta finalidade usamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica para estruturar um quadro de análise focado na análise matemática e cognitiva da atividade matemática.

3.4 Procedimentos de análise

Em nossa pesquisa temos como objetivo investigar como se dá a compreensão da matemática e do problema em atividades de modelagem matemática. Dessa forma, considerando que no desenvolvimento de uma atividade de modelagem o aluno produz diferentes registros de representação do objeto matemático que dela emerge, buscamos na teoria dos registros de representação semiótica, o aporte teórico e metodológico, para conduzir nossa investigação.

Duval (2012b) enfatiza que em matemática é necessário compreender para poder aprender. Segundo o autor, aprendemos matemática na medida em que compreendemos, não somente as instruções e os enunciados dos problemas, mas também os procedimentos para resolvê-lo, bem como na medida em que somos capazes de avaliar se aquilo que foi encontrado é verdadeiro ou não.

Tomamos como base a assertiva de Duval (2012b) de que a escolha de uma teoria e de um método para recolher e analisar as produções do aluno depende do ponto de vista com que olhamos para a própria teoria.

Duval (2012b) considera a compreensão sob dois pontos de vista diferentes: o ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo. O ponto de vista matemático é aquele mais voltado para os conteúdos e procedimentos da resolução do aluno indicados em seus registros. Para Duval (2012b), “do ponto de vista matemático, a “compreensão” começa numa explicação que se baseia na utilização de propriedades matemáticas” (p.309). Neste caso a compreensão coincide com o processo de conceitualização, de construção de conhecimento relativo ao uso adequado de cada propriedade do objeto matemático.

Já de um ponto de vista cognitivo, segundo Duval (2012b), “a compreensão é guiada pelo modo de acesso aos objetos estudados” (p. 310). O acesso aos objetos matemáticos, entretanto, é guiado pela produção de representações semióticas, conversões entre elas e de sua coordenação.

À luz dessas indicações de Duval (2012b), investigamos, no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática dos alunos: os procedimentos matemáticos, considerando o uso de propriedades e das regras relativas aos objetos matemáticos a produção, conversão e coordenação dos registros de representação semiótica no desenvolvimento das atividades de modelagem.

Sendo assim, observamos que a compreensão da matemática, sob um ponto de vista cognitivo, reside na capacidade de reconhecer e operar com aspectos do objeto matemático em diferentes representações e é a partir disso que nos embasamos a fazer uma análise cognitiva das produções matemáticas dos alunos.

Duval (2011a) ressalta que essa estruturação do funcionamento cognitivo, em termos de registros, é uma alternativa metodológica que oferece ferramentas para que possamos analisar as condições essenciais para se compreender, fazer ou utilizar a matemática.

O autor afirma que os registros de representação são ferramentas que permitem analisar as produções matemáticas. Dessa forma, estruturamos a análise levando em conta os aspectos matemáticos e cognitivos, visando analisar se o aluno compreende não somente o que a representação semiótica representa, mas também compreende como ela

representa. Assim podemos inferir sobre a compreensão da matemática e do problema no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

3.4.1 A análise matemática

A análise matemática a que se refere Duval (2012b) leva em conta o uso da matemática no desenvolvimento da atividade. Assim tal análise visa explorar os processos utilizados, as propriedades e os argumentos que foram feitos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Segundo Duval (2012b), ao fazer uma análise matemática dos registros dos alunos buscamos olhar

[...] se as respostas ou as soluções “verdadeiras” são explicadas fazendo uso das propriedades pertinentes ou se elas permitem *induzir o conhecimento*. [...] Eles visam à “construção dos conceitos” pelos alunos e colocam em evidência a justificativa de toda resposta (DUVAL, 2012b, p. 317).

Sendo assim é necessário que no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática possamos investigar se os alunos têm consciência das propriedades matemáticas utilizadas e como eles as justificam, levando em conta o conjunto de registros produzidos por eles.

Dessa forma, olhamos para os registros produzidos pelos alunos buscando indícios do uso do objeto e de propriedades relacionadas a esse objeto no desenvolvimento da atividade.

Para levantar informações sobre como os alunos conseguem justificar as propriedades matemáticas, os conceitos e os procedimentos utilizados durante o desenvolvimento da atividade, fizemos uma listagem de algumas questões a serem observadas durante a exploração dos dados coletados na primeira atividade, conforme consta no quadro 3.2.

Quadro 3.2: Questões para análise matemática

Questões sobre o encaminhamento matemático
Qual conteúdo matemático os alunos utilizaram no desenvolvimento da atividade?
Quais propriedades matemáticas são utilizadas para se chegar à representação final da situação?
Qual tipo de registro os alunos utilizaram na representação final da situação-problema?
A execução matemática desenvolvida está correta?

Fonte: o autor

Para Duval (2012b), ao fazer a análise sob o ponto de vista matemático “a prioridade deve ser dada aos conteúdos, quer dizer às propriedades dos objetos matemáticos estudados, assim como a sua utilização” (p.323). Sendo assim, é necessário investigar, não só a execução matemática da atividade, mas também se o aluno tem domínio do conteúdo matemático e da forma como ele o utiliza.

Para que essa análise seja contemplada, buscamos nos registros escritos e nas argumentações dos alunos, indícios de que eles se apropriam do conteúdo matemático escolhido para desenvolver a atividade e responder o problema. Também buscamos nesses registros, identificar as propriedades matemáticas por eles utilizadas, que ajudam não só no entendimento da situação-problema, mas no desenvolvimento dela como um todo.

Segundo Duval (2011a) primeiramente deve ser feita uma “análise matemática, em termos da validade do encaminhamento e do sucesso” (p.106). Assim, na nossa pesquisa a análise sob ponto de vista matemático visa buscar indícios de compreensão da matemática pelo seu uso adequado na atividade.

3.4.2 A análise cognitiva

Como vimos no Capítulo 2, quando o aluno desenvolve uma atividade de modelagem matemática ele produz diferentes registros de representação e esses registros, quando coordenados, são fundamentais para a compreensão do objeto matemático que

emerge da atividade. Essa compreensão relativa ao ponto de vista cognitivo, para Duval (2012b), é guiada pelo modo de acesso aos objetos estudados.

Segundo o ponto de vista cognitivo, a compreensão é antes de tudo a capacidade de reconhecer o objeto matemático em diferentes representações. Esse reconhecimento é baseado na correspondência entre as unidades de sentido presentes no conteúdo das diferentes representações.

A análise das unidades de sentido pode ser contemplada quando investigamos, nos registros produzidos pelos alunos, a incidência ou não do fenômeno de congruência nas conversões, bem como os níveis de congruência e não-congruência. Essa investigação contempla o primeiro estágio da análise cognitiva.

Para analisar as produções dos alunos tendo o critério cognitivo como norteador, Duval (2012b) estabelece que “neste caso, olha-se se os alunos reconhecem um mesmo objeto matemático através das representações diferentes que podem ser dadas e se eles podem reconhecer aquilo que é matematicamente diferente quando se modifica alguma coisa no conteúdo de uma representação” (DUVAL, 2012b, p. 317).

Além de reconhecer o objeto matemático em diferentes representações, é necessário também verificar se o aluno se apropria das características específicas de cada registro mobilizado, e a maneira como eles se complementam. Para que seja possível tal investigação, é necessário verificar se o aluno coordena diferentes registros de representação semiótica durante o desenvolvimento da atividade de modelagem.

A partir disso, buscamos analisar por meio da decomposição dos registros, com base nas transformações realizadas, a complementariedade das representações em relação ao reconhecimento do objeto matemático.

A análise cognitiva assim esquematizada contempla o segundo nível da análise das produções dos alunos descrito por Duval (2012b), que consiste na análise da compreensão, ou seja, da aquisição pelos alunos de margem de autonomia e progressão, sendo que é neste segundo nível de análise, que podemos observar a manifestação dos aspectos para a compreensão ou as fontes de incompreensão dos conceitos matemáticos.

3.5 Um panorama dos procedimentos utilizados nas análises

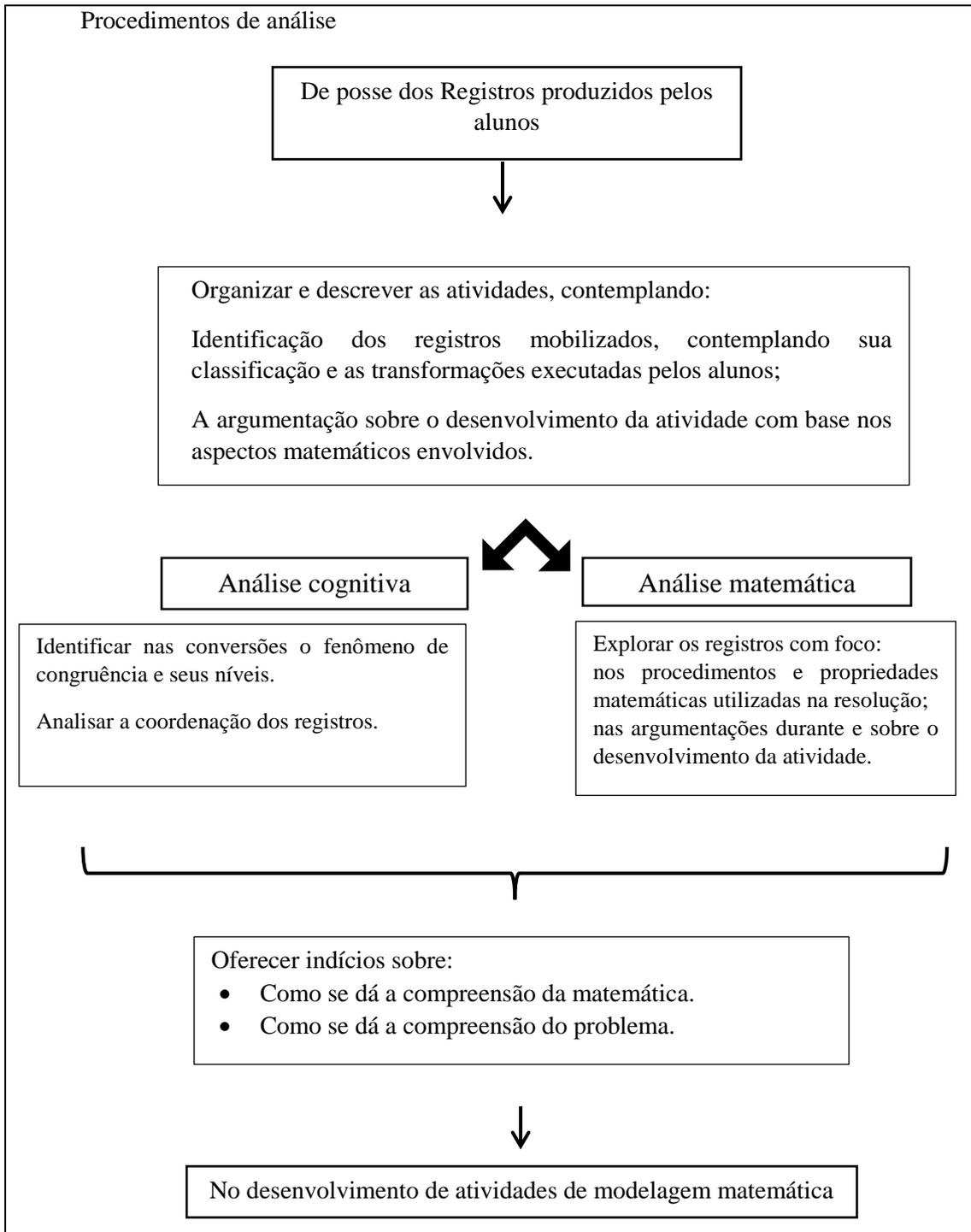
O corpus de investigação na nossa análise são os registros de representação semiótica produzidos pelos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Duval (2011a) enfatiza que essas produções dos alunos podem ser ou não produções matemáticas e possibilitam transparecer não só os processos matemáticos do seu desenvolvimento, mas também possibilitam o acesso a aspectos cognitivos que o aluno demanda na atividade. Daí a necessidade da análise

[...] ser feita em dois níveis com evidentemente, critérios totalmente precisos para cada um deles porque a questão que comanda a análise não é a mesma (DUVAL, 2012b, p.317).

Foi esse motivo que nos levou a investigar, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, como se dá a compreensão da matemática e do problema, investigando os registros de representação semiótica produzidos pelos alunos. Na figura 3.8, ilustramos os procedimentos de análise baseados no ponto de vista matemático e cognitivo.

Figura 3.8: Esquema dos procedimentos de análise



CAPÍTULO 4

O CONTEXTO DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida. Relatamos aspectos gerais sobre o colégio em que fizemos a coleta de dados, a natureza de nossa investigação, a constituição da turma investigada, o desenvolvimento das atividades nas aulas, os procedimentos de coleta de dados e a condução das análises.

4.1 O colégio

O colégio no qual a pesquisa foi realizada situa-se na cidade de Assaí – PR e foi inaugurado no ano de 2012, fazendo parte da rede de colégios privados, cujo foco está em ofertar o Ensino Médio para os filhos de operários das indústrias espalhada pela região em que o colégio está.

Atualmente o colégio atende cerca de 110 alunos que cursam o Ensino Médio. Mais especificamente, o colégio tem hoje cinco turmas, com número de 20 a 24 alunos por sala, distribuídas em dois terceiros, um segundo e dois primeiros anos.

A opção por realizar a coleta de dados no colégio foi do próprio pesquisador que reside em um município vizinho ao qual o colégio está situado, e também devido ao fato de conhecer os professores e administradores do colégio, o que facilitou que cedessem o espaço para a coleta de dados em um curso extracurricular oferecido em período diferente das aulas regulares.

4.2 A natureza da investigação

Buscamos com esta pesquisa evidenciar aspectos relativos à compreensão em atividades de modelagem matemática. A identificação desses aspectos se dá na forma com que analisamos os registros produzidos pelos alunos, mais especificamente, sob o ponto de vista com que analisamos essas produções.

Para tal análise buscamos nos aportes teóricos de Duval (2011a; 2012b) estruturar procedimentos em relação aos aspectos presentes nos registros de representação semiótica, considerando o ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo, conforme pontua Duval (2012b). Sendo assim fazemos da teoria dos registros de representação semiótica o aporte metodológico para a condução da pesquisa.

Nossa investigação é guiada pelo objetivo de investigar a forma com que se dá a compreensão da matemática e do problema no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Para tanto, estabelecemos dois objetivos específicos, os quais norteiam nossa investigação. O primeiro visa analisar, do ponto de vista matemático as atividades desenvolvidas pelos alunos, levando em conta a avaliação matemática dos resultados obtidos, explorando os processos, as propriedades e os argumentos que foram utilizados durante o desenvolvimento da mesma. O segundo busca analisar, do ponto de vista cognitivo, a capacidade de reconhecer o objeto matemático e utilizar os diferentes registros de representação semiótica produzidos.

4.3 A turma investigada e o desenvolvimento das atividades

Os dados que subsidiam nossa pesquisa foram coletados com alunos do segundo ano do Ensino Médio. A composição da turma não foi pré-definida. Convidamos os alunos a participarem de um projeto que visava o ensino de matemática, e seria desenvolvido no período vespertino durante duas horas/aula semanais no período de 10 de março até 12 de maio de 2016.

Os 09 alunos participantes se organizaram em grupos conforme indica o quadro 4.1.

Quadro 4.1: Organização dos alunos nos grupos

Grupo	Quantidade de alunos	Siglas de cada aluno
G1	Três alunos	A1G1; A2G1; A3G1
G2	Três alunos	A1G2; A2G2; A3G2
G3	Três alunos	A1G3; A2G3; A3G3

Para o desenvolvimento das atividades no decorrer das aulas esquematizamos um cronograma, levando em conta que os alunos nunca tinham desenvolvido atividades de

modelagem e necessitavam familiarizar-se com as mesmas. No quadro 4.2 organizamos o cronograma das atividades desenvolvidas.

Quadro 4.2: Cronograma das atividades desenvolvidas durante a coleta de dados

Encontro	Data	Atividade	Tema da atividade
1	10/03/2016	1º momento	Vendas de Smartphones
2	17/03/2016	1º momento	Vendas de Smartphones
3	31/03/2016	1º momento	Vendas de Smartphones
4	07/04/2016	2º momento	Câncer de Tireóide
5	14/04/2016	2º momento	Câncer de Tireóide
6	20/04/2016	Pesquisa de temas para as atividades de 3º momento	
7	28/04/2016	Orientação e execução das atividades de 3º momento	
8	05/05/2016	Execução das atividades do 3º momento	
9	12/05/2016	Apresentação das atividades de 3º momento	Atividade de G1: Projeção de concluintes para 2016: Tecnológico x licenciatura Atividade de G2: Mortes por Drogas G3: não contemplou essa atividade, o grupo teve de se ausentar do projeto.

Fonte: O autor

Conforme indica o quadro 4.2, as atividades de modelagem foram desenvolvidas considerando os momentos de familiarização a que nos referimos no capítulo 2.

4.4 O objeto matemático

Ao usar a modelagem matemática não se pode definir de antemão quais conteúdos matemáticos serão necessários para a abordagem do problema em estudo.

Considerando tanto o uso de algoritmos quanto conceitos matemáticos, os alunos podem usar objetos matemáticos já estudados ou a atividade pode ser uma oportunidade para a introdução de novos objetos.

Nas atividades desenvolvidas pelos três grupos identificamos quatro objetos matemáticos que podemos considerar relevantes em cada atividade, conforme indica o quadro 4.3.

Quadro 4.3: Atividades e objeto matemático que emergiram

Atividade desenvolvida	Objeto matemático
Vendas de Smartphones	Função do segundo grau Função definida por duas sentenças
Câncer de Tireóide	Função exponencial
Projeção de concluintes para 2016: Tecnológico x licenciatura	Função do primeiro grau e função do segundo grau
Mortes por Drogas	Função do primeiro grau

Considerando a grade curricular da disciplina de Matemática do colégio, com suas especificidades, podemos dizer que os objetos matemáticos oriundos do desenvolvimento das atividades de modelagem já eram ou deviam ser conhecidos pelos alunos. No entanto, no decorrer do desenvolvimento das atividades algumas especificidades tiveram de ser sistematizadas, tais como alguns procedimentos matemáticos que foram exigidos, mas os alunos relatavam que os desconheciam. Isso permitiu que desencadeássemos pesquisas e discussões sobre esses procedimentos e assim conseguíssemos sistematizar os objetos matemáticos.

4.5 A coleta dos dados

Nas atividades relativas ao primeiro momento e segundo momento as temáticas das atividades investigadas foram sugeridas pelo professor/pesquisador. Naquelas do terceiro momento os próprios alunos escolheram temas de seu interesse.

A coleta de dados aconteceu durante o desenvolvimento das quatro atividades de modelagem matemática. Para registrar as observações da coleta de dados fizemos uso de aparatos tecnológicos, bem como anotações em diário de campo. Os métodos utilizados para capturar os dados foram:

- Observação dos alunos durante o desenvolvimento das atividades.
- Aplicação de questionário ao fim das atividades.
- A entrega de relatórios pelos alunos com os registros escritos produzidos por eles.
- Uso de áudio e vídeo para gravações durante o desenvolvimento das atividades.
- A elaboração de diário de campo com anotações do professor/pesquisador.

Os dados assim coletados foram organizados de forma a possibilitar seu tratamento. Essa organização contou com a transcrição das gravações de áudio e vídeo, bem como a organização dos registros escritos, questionários e a leitura do diário de campo produzido pelo professor/pesquisador.

A partir dessa organização, tendo a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval como aporte metodológico da pesquisa e a modelagem matemática como aporte teórico, realizamos a análise dos dados.

4.6 A análise dos dados

A análise dos dados coletados foi realizada visando investigar como se dá a compreensão da matemática e do problema no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

No quadro 4.4 listamos as atividades que foram analisadas nesta pesquisa.

Quadro 4.4: Atividades analisadas

Atividade	Momento de familiarização
Vendas de Smartphones	1º momento
Câncer de Tireóide	2º momento
Projeção de concluintes para 2016: Tecnológico x licenciatura	3º momento
Morte por drogas	3º momento

Fonte: O autor

Para obter os resultados visando nosso objetivo, realizamos uma análise local que leva em conta os aspectos metodológicos definidos e descritos no capítulo 3, com base em uma análise matemática e cognitiva, conforme as indicações de Duval (2012b). Essa análise local foi realizada nas quatro atividades, mais especificamente, em uma do primeiro momento e em outra do segundo momento, analisando os grupos envolvidos de modo geral, e nas duas atividades do terceiro momento, analisando o desenvolvimento de cada grupo.

Apresentamos após a análise local uma discussão dos resultados obtidos, considerando o conjunto de atividades desenvolvidas, a fim de discutir a evolução com

que se deu o desenvolvimento das atividades, levando em conta os aspectos matemáticos e cognitivos que levam à compreensão da matemática e do problema no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

CAPÍTULO 5

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Neste capítulo descrevemos e analisamos as atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos. A análise segue os encaminhamentos apresentados em 3.4.

Conforme esquematizado no capítulo 3, a análise versa em torno de dois pontos de vista: o matemático e o cognitivo. Dessa forma, apresentamos nesse capítulo a descrição e a análise de cada atividade. Posteriormente, apresentamos uma discussão dos resultados e nossa reflexão sobre a compreensão em atividades de modelagem matemática.

5.1 Descrição e análise das atividades de modelagem matemática desenvolvidas

Para que possamos buscar indícios de como se dá a compreensão da matemática e do problema em atividades de modelagem matemática, descrevemos e analisamos quatro atividades desenvolvidas durante o período de coleta de dados, conforme consta no quadro 5.1.

Quadro 5.1: Relação das atividades analisadas

Atividade	Momento de familiarização	Grupos que desenvolveram a atividade
Vendas de Smartphones	1º momento	G1, G2 e G3
Câncer de Tireóide	2º momento	G1, G2 e G3
Projeção de concluintes para 2012: Tecnológico x licenciatura	3º momento	G1
Morte por drogas	3º momento	G2

Fonte: O autor

Iniciamos a descrição e a análise pelas atividades de primeiro e segundo momentos, explorando os registros produzidos pelos três grupos, conforme observamos no quadro 5.1. Em seguida, fazemos o mesmo caminho de descrição e análise das duas

atividades do terceiro momento, realizadas por G1 e G2. O grupo G3 não conseguiu concluir a atividade, pois os alunos tiveram de se ausentar do projeto para participar de outro projeto do colégio.

Para ajudar na nossa descrição da atividade bem como, na análise dos dados, fizemos o uso do questionário, presente no quadro 5.2, que tinha por objetivo coletar dados que complementassem os registros capturados, sejam eles, escritos, de áudio e de vídeo.

Quadro 5.2: Questionário a ser respondido no final de cada atividade

- | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none">1) Quais são e como se relacionam as variáveis envolvidas no problema?2) O que presente na atividade, induziu a escolha do conteúdo para desenvolvê-la?3) Como vocês chegaram na expressão matemática para a situação?4) O que vocês aprenderam com a atividade? |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Fonte: O autor

5.1.1 Atividades 1: “Venda de Smartphones”

Esta atividade refere-se ao primeiro momento de familiarização dos alunos com a modelagem. Seu desenvolvimento se estendeu durante três encontros, considerando a empolgação, a ansiedade dos alunos, o tempo limitado dos encontros, a falta de habilidades para com atividades desse tipo, dentre outros aspectos.

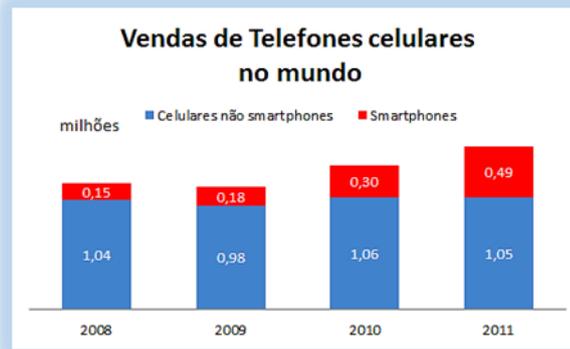
Para o desenvolvimento da atividade, entregamos aos alunos um texto com informações sobre o crescimento das vendas de smartphones, conforme consta no quadro 5.3.

Quadro 5.3: Texto entregue aos alunos na primeira atividade

<p>Os smartphones, principal driver para o crescimento da banda larga móvel no mundo, tiveram lugar de destaque no Mobile World Congress 2012, realizado em Barcelona. As perspectivas apontam que os smartphones devem se tornar o principal dispositivo de acesso à Internet à medida que, com o aumento nas vendas, o preço vai ficando menor.</p>

<p>Podem ser considerados como smartphones, os telefones celulares que possuem um sistema operacional como: Android, iPhone, Blackberry, Symbian ou Windows mobile.</p>

<p>O aumento nas vendas destes equipamentos tem apresentado crescimento desde ano de 2008. Esse crescimento mostrou-se expressivo até o ano de 2011, conforme mostra o gráfico.</p>



Fonte: <http://www.teleco.com.br/comentario/com461.asp>

No que se refere à comparação da quantidade de Smartphones vendidos com a quantidade de outros celulares, o gráfico disponibilizado pela TELECO mostra essa ascensão na quantidade de celulares vendidos.

Problema:

Quando as vendas de smartphones alcançarão o percentual de 100% do número de celulares vendidos no mundo?

Hipóteses

- *H1: o percentual de vendas de smarthphones cresce no máximo até 100%, após isso, estabiliza-se.*
- *H2: um período de tempo corresponde a um ano, ou seja, 12 meses, ou 365 dias.*

A TELECO é uma empresa no ramo de telecomunicação que presta consultoria em Inteligência de Mercado de Telecomunicações, produz estudos, relatórios, bases de dados e workshops.

Fonte: O autor

A partir da discussão das informações no texto, relacionadas à situação-problema, pedimos aos grupos que resolvessem o problema proposto. Verificamos uma certa estranheza dos alunos em relação à estrutura e encaminhamento da atividade. Tendo notado isso, pedimos aos alunos que definissem as variáveis envolvidas na situação, uma vez que definir as variáveis é um passo essencial para o desenvolvimento da atividade.

Diante do problema a ser resolvido, os alunos definiram as variáveis conforme consta na figura 5.1.

Figura 5.1: Variáveis definidas pelos alunos

O aumento nas vendas destes equipamentos tem apresentado crescimento desde ano de 2008. Esse crescimento mostrou-se expressivo até o ano de 2011

Problema:
Quando as vendas de smartphones alcançarão o percentual de 100% do número de celulares vendidos no mundo?

Hipóteses

- *H1: o percentual de vendas de smartphones cresce no máximo até 100%, após isso, estabiliza-se.*
- *H2: um período de tempo corresponde a um ano, ou seja, 12 meses, ou 365 dias.*

conversão 1

Variáveis:

- t - tempo
- $p(t)$ - percentual em relação ao tempo
- i - período de tempo
- $p(i)$ - percentual em relação ao período

Fonte: Registro escrito de G2

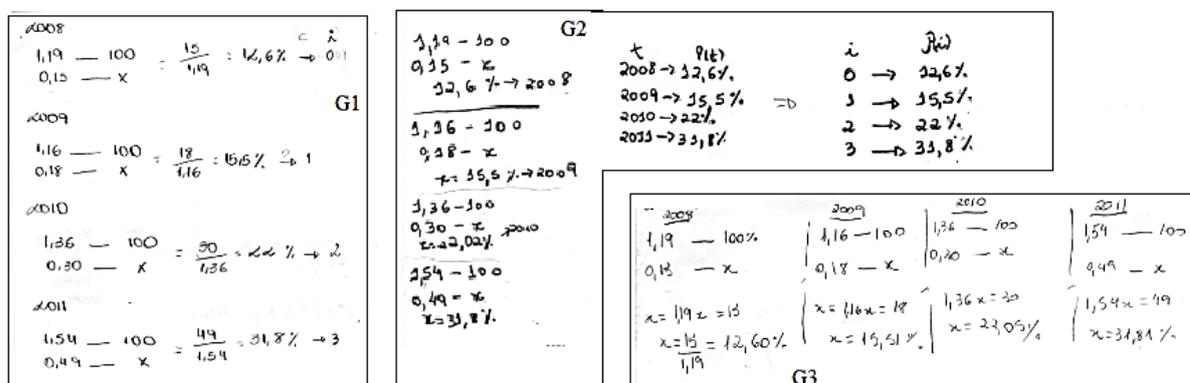
Essa etapa no desenvolvimento da atividade é essencial para a obtenção do modelo, pois é nela que acontece a interpretação dos dados. Observamos que os alunos, inicialmente, definiram as variáveis tempo (t) e percentual em relação ao tempo ($p(t)$). Porém ao iniciarem a resolução se depararam com valores que julgaram serem altos, em relação à variável tempo. Então demos a sugestão a eles de definirem variáveis auxiliares, por exemplo, considerarem os períodos de tempo (i) em que a pesquisa foi realizada e os percentuais associados a esses períodos ($p(i)$).

Essa etapa de definir as variáveis corresponde à uma conversão (conversão 1) realizada pelos alunos, saindo do registro em língua natural, multifuncional discursivo, presente na situação-problema investigada, para o registro algébrico, monofuncional discursivo, conforme consta na figura 5.1.

Estabelecidas as variáveis, os alunos começaram a desenvolver matematicamente a situação em busca de um modelo matemático que representasse e pudesse resolver o problema proposto. Para isso utilizaram registros numéricos monofuncionais discursivos, para associarem a cada período um percentual respectivo.

Na figura 5.2, apresentamos os cálculos desenvolvidos pelos grupos.

Figura 5.2: Registros dos grupos



Fonte: Registros escritos dos grupos

Observamos que os alunos realizam cálculos de regra de três simples para encontrar o percentual correspondente ao número de smartphones vendidos em cada ano ou período. Esses cálculos configuram tratamentos realizados dentro do próprio registro, no caso o numérico, assim como pontua Duval (2011b) quando define a transformação de tratamento.

Observando os registros numéricos, evidenciamos que G1, G2 e G3 esquematizaram uma relação entre o percentual e o período correspondente. Essa organização e a forma com que os cálculos foram realizados determinam uma conversão, que consideramos sendo a conversão 2, do registro gráfico que consta na situação-problema para o registro numérico.

A figura 5.3 ilustra a conversão realizada por G2.

Figura 5.3: Conversão do registro gráfico para o numérico



conversão 2

$$\begin{aligned}
 1,19 - 100 \\
 0,15 = x \\
 12,67\% \rightarrow 2008 \\
 \hline
 1,36 - 100 \\
 0,18 = x \\
 x = 13,24\% \rightarrow 2009 \\
 \hline
 1,36 - 100 \\
 0,30 = x \\
 x = 22,06\% \rightarrow 2010 \\
 \hline
 1,54 - 100 \\
 0,49 = x \\
 x = 31,8\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t & \quad p(i) \\
 2008 & \rightarrow 12,6\% \\
 2009 & \rightarrow 13,5\% \\
 2010 & \rightarrow 22\% \\
 2011 & \rightarrow 31,8\%
 \end{aligned}$$

=>

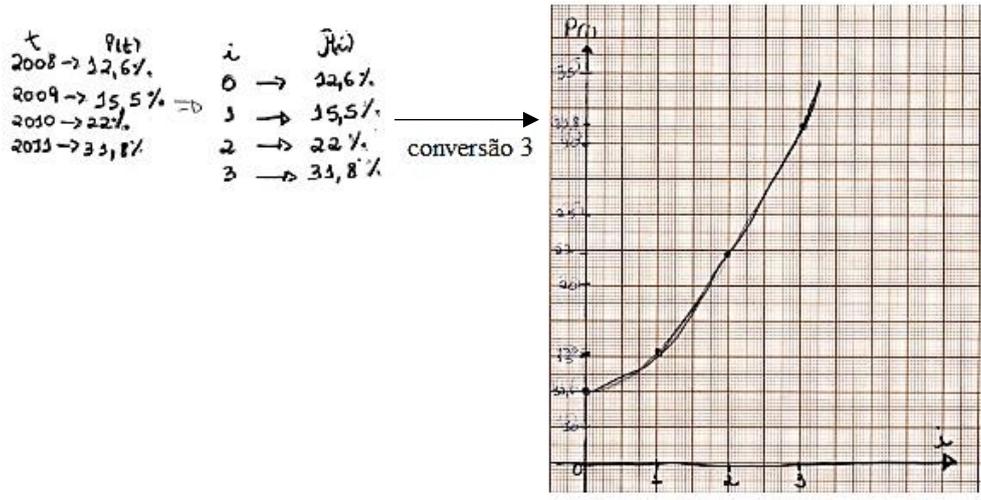
$$\begin{aligned}
 i & \quad p(i) \\
 0 & \rightarrow 12,6\% \\
 1 & \rightarrow 13,5\% \\
 2 & \rightarrow 22\% \\
 3 & \rightarrow 31,8\%
 \end{aligned}$$

Fonte: Registro escrito de G2

Nesta conversão temos dois registros associados. Inicialmente, observamos o registro gráfico, monofuncional não-discursivo. Esse registro presente na situação-problema ilustra a quantidade de smartphones vendidos no decorrer do tempo, que é convertido para o registro numérico, também monofuncional, porém de natureza discursiva, associando o tempo com seus percentuais respectivos. Depois disso os alunos também fizeram outro esquema numérico, associando o período de tempo (i) com o percentual em relação a cada período (p(i)).

A conversão para o registro numérico é um passo fundamental para o desenvolvimento da atividade, pois a partir dela, os alunos realizam uma nova conversão, que consideramos como sendo a conversão 3, do registro numérico para o registro gráfico. Nesta conversão ambos os registros são de natureza monofuncional, mas, o numérico tem natureza discursiva e o gráfico não-discursiva. Podemos observar esta conversão na figura 5.4.

Figura 5.4: Conversão do registro numérico para o registro gráfico



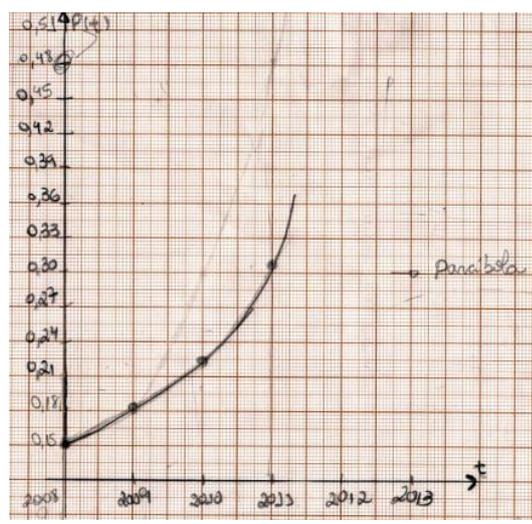
Fonte: Registro escrito de G2

Podemos observar que essa conversão foi um passo fundamental para o desenvolvimento da atividade, pois foi a partir dos aspectos visuais do registro gráfico que os alunos reconheceram e estabeleceram qual objeto matemático e conteúdo utilizar. Tomamos por exemplo o relato de um dos alunos de G1.

AIG1: Esse gráfico, pessoal, é como uma parábola ... que nem do ano passado, só que pela metade.

Na figura 5.5 podemos observar o registro gráfico construído por G1.

Figura 5.5: Registro gráfico construído por G1



Fonte: Registro escrito de G1

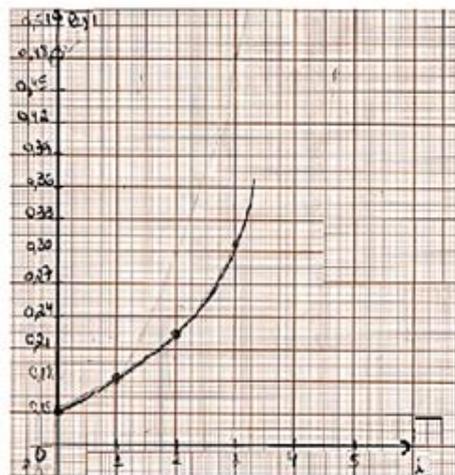
Essa analogia na fala é representada partir do registro gráfico, sinaliza que os grupos conseguiram reconhecer nos aspectos específicos do registro o objeto matemático “função do segundo grau”.

Seguindo o desenvolvimento da atividade, os alunos realizaram a conversão do registro gráfico para o algébrico, porém essa tarefa não foi nada fácil, uma vez que os alunos apresentaram muita dificuldade em ajustar uma função aos pontos descritos no registro gráfico. Percebendo essa dificuldade, aproveitamos a biblioteca do colégio e pedimos aos alunos que fizessem uma pesquisa em livros de matemática do Ensino Médio. Eles pesquisaram sobre como encontrar a expressão algébrica de uma função do segundo grau a partir de seu registro gráfico. O objetivo desta dinâmica era fazer com que eles buscassem as informações e técnicas matemáticas para ajudar no desenvolvimento da atividade.

Aproveitamos essa oportunidade e sistematizamos alguns aspectos do conteúdo função do segundo grau, tais como: informações sobre o comportamento e sua relação com os coeficientes, raízes, vértices, estudo do sinal, a construção da expressão algébrica e do gráfico. Realizado esse aprofundamento sobre o conteúdo, retornamos para nossa atividade, em que os alunos realizaram a conversão 4 do registro gráfico, monofuncional não-discursivo, para o algébrico, de natureza monofuncional e discursiva, conforme indica a figura 5.6.

Nas figuras 5.6 e 5.7 exemplificamos a forma com que G1 e G3 chegaram ao registro algébrico da função. Na figura 5.6 nosso foco está na conversão realizada por G1, do registro gráfico para o algébrico, por meio das propriedades utilizadas e das transformações de tratamentos.

Figura 5.6: Conversão do registro gráfico para o registro algébrico



$(0, 12,6) \Rightarrow A \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 12,6$
 $c = 12,6$
 $(1, 15,5) \Rightarrow A \cdot 1 + b + 12,6 = 15,5$
 $b = 15,5 - A - 12,6$
 $b = 2,9 - A$
 $(2, 22) \Rightarrow$
 $b = 2,9 - 1,8 = 1,1$

$(2, 22) \Rightarrow A \cdot 2^2 + 2(2,9 - A) + 12,6 = 22$
 $4A + 5,8 - 2A + 12,6 = 22$
 $2A + 18,4 = 22$
 $2A = 22 - 18,4$
 $A \cdot A = \frac{3,6}{2} = 1,8$

conversão 4
 $P(x) = 1,8x^2 + 1,1x + 12,6$

Fonte: Registro escrito de G1

Já na figura 5.7 observamos os tratamentos realizados por G3 para a construção da expressão algébrica da função, como o grupo utiliza as transformações internas do sistema semiótico utilizado.

Figura 5.7: Tratamentos realizados no registro algébrico

$P(0) = 12,6$
 $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 12,6$
 $0 + 0 + c = 12,6$
 $c = 12,6$

$P(1) = 15,5$
 $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 15,5$
 $a + b + c = 15,5$

$P(2) = 22$
 $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 22$
 $4a + 2b + c = 22$

$a + b + 12,6 = 15,5$
 $15,5 - 12,6 = 2,9$
 $a + b = 2,9$
 $a = 2,9 - b$

$4(2,9 - b) + 2b + 12,6 = 22$
 $11,6 - 4b + 2b + 12,6 = 22$
 $-2b = 22 - 11,6 - 11,6 = -2,2$
 $b = 1,1$

$a = 2,9 - 1,1 = 1,8$

$P(x) = 1,8x^2 + 1,1x + 12,6$

Fonte: Registro escrito de G3

Definida a função que representa inicialmente a situação, perguntamos aos alunos se tal expressão era a ideal para descrever a situação-problema. Os alunos, em seus devidos grupos, pensaram e deram a entender que não tinham entendido o que perguntamos. Então tivemos que ser mais claros, discutindo com eles alguns aspectos do

que já tinham desenvolvido. Salientamos que, inicialmente, eles relacionaram quatro períodos com seus respectivos percentuais, entretanto escolheram três deles para a construção da expressão algébrica. Sendo assim, como eles sabiam se com esses pontos que foram escolhidos, tinham chegado na melhor aproximação para a função?

Foi aí que um dos alunos de G1, mais especificamente A1G1, de posse de uma calculadora, calculou a imagem do terceiro ponto, no caso para o período 3, obtendo o valor de 32,1, ou seja 32,1%, já que a função relacionava o período com os percentuais. Os alunos então compararam o percentual calculado, a partir da função, com o percentual determinado no registro numérico, que era de 31,8%. Os alunos julgaram a diferença de 0,3% pequena, considerando o modelo algébrico adequado para a situação-problema investigada.

Na figura 5.8, podemos observar essa análise feita por G1 acerca da validade do modelo obtido.

Figura 5.8: Validação do modelo feita pelos alunos

$P(x) = 1,8x + 11,2 + 12,6 = 0$
 $P(3) = 1,8 \cdot 3 + 1,1 \cdot 3 + 12,6 =$
 $P(3) = 14,2 + 3,3 + 12,6 = 32,1 \rightarrow (32,1 - 31,8 = 0,3\% \text{ a mais}). \text{ modelo ok}$

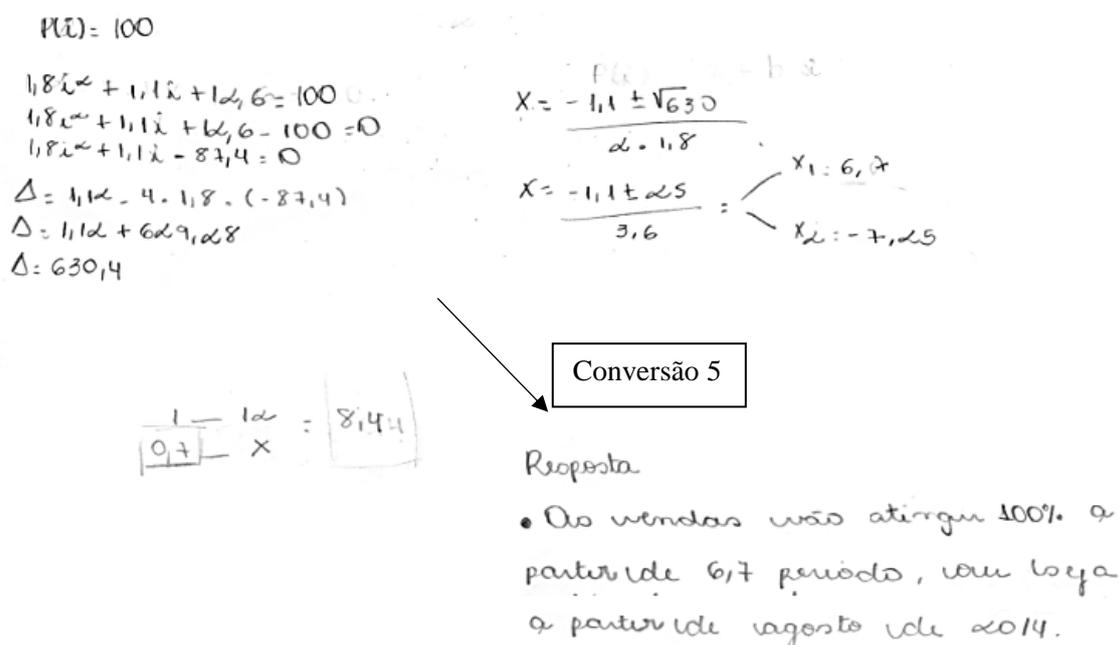
Fonte: Registro escrito de G1

Realizada essa avaliação acerca da validade da expressão algébrica, identificamos nos argumentos dos alunos a forma com que eles validaram a expressão, ou seja, percebemos que se a diferença fosse maior, ou até mesmo se eles julgassem a necessidade, teriam recorrido a uma reestruturação da expressão. Porém, como é uma avaliação do grupo, deixamos os mesmos decidirem sobre tal.

Para responder o problema os alunos realizaram tratamentos no registro algébrico e realizaram a conversão 5, do registro algébrico para o registro em língua natural, no qual escreveram a resposta ao problema, conforme indica a figura 5.9.

Nessa conversão o registro algébrico monofuncional discursivo, é transformado para o registro em língua natural multifuncional discursivo. Na figura 5.9, ilustramos a conversão realizada por G1, na qual o grupo iguala a função a 100, que corresponde a 100% das vendas e encontra o período relacionado a esse percentual de vendas.

Figura 5.9: Resolução do problema e conversão para língua natural



Fonte: Registro escrito de G1

Observamos que os alunos realizaram a associação entre as variáveis tempo e período, ao responderem o problema, conforme observamos na figura 5.9. Instigados a verificar o entendimento dos alunos em relação a essa correspondência, os questionamos sobre como estabeleceram a relação entre o valor de 6,7 períodos obtidos na resolução da equação, com o tempo estimado de agosto de 2014. Assim um dos alunos de G3 deu a seguinte resposta:

A1G3: *É fácil professor, cada período corresponde a 1 ano, que tem 12 meses né. Como a pesquisa começou em 2008, mais seis intervalos, dá o ano de 2014... aí só pegar 70% de um ano que dá aproximadamente 8 meses. Como assumindo que a pesquisa poderia ter sido feita em janeiro, aí dá em agosto do ano de 2014.*

Levando em conta os aspectos assumidos pelos alunos, a resposta e a associação entre as duas variáveis foi feita corretamente. Os alunos, ao compartilhar suas resoluções, achavam que a atividade já estava finalizada, mas pedimos a eles que analisassem o modelo obtido, levando em conta a situação-problema investigada e suas especificidades, avaliando o modelo matemático obtido.

Para exemplificar como se deu essa análise do modelo matemático, trouxemos o diálogo entre o professor/pesquisador com o grupo G1.

Professor: Qual é o domínio da função que construíram?

A1G1: Os valores positivos ... professor pensando nos intervalos... que utilizamos.

A2G1: Mas também não tem período e nem tempo negativo, então só os positivos no mínimo o zero né.

Professor: Entendi, neste caso utilizaram os números reais positivos.

A1G1: Isso que queria dizer ... domínio da função foi os reais positivos professor.

Professor: E o que acontece com o comportamento da função quando as vendas chegarem a 100%?

A2G1: Não cresce mais... ela não vai crescer mais.

A3G1: 100% é o limite.

Professor: Isso, ela vai continuar sempre 100%.

A1G1: Vai ser tipo contínua, depois de 6,7 períodos, aproximadamente...

Professor: Isso, depois de 6,7 intervalos a função passa a ser constante.

Com base no diálogo e na reflexão sobre a relação do modelo com a situação-problema, os alunos realizaram um tratamento no registro algébrico, adequando em relação as especificidades da situação investigada. E por fim, realizaram a conversão do registro algébrico, monofuncional discursivo, para o registro gráfico monofuncional não-discursivo.

Na figura 5.10, podemos conferir o tratamento realizado por G1 no registro algébrico, alterando-o conforme o diálogo apresentado. Já na figura 5.11, apresentamos a conversão realizada do registro algébrico para o gráfico.

Figura 5.10: Adequação do registro algébrico por meio de um tratamento

$$P(x) = 1,8x + 1,1x + 12,6$$

↓ tratamento

$$P(x) = \begin{cases} 1,8x + 1,1x + 12,6, & 0 \leq x \leq 6,7 \text{ períodos} \\ 100\%, & x > 6,7 \end{cases}$$

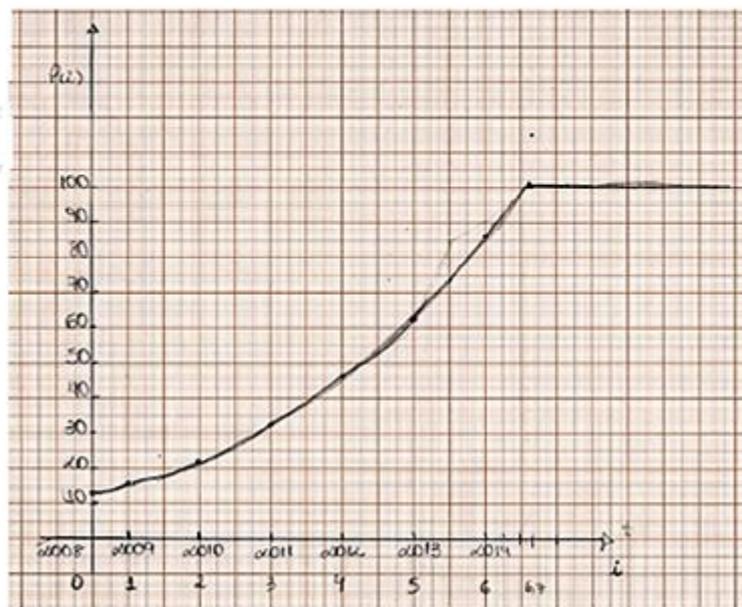
Fonte: Registro escrito de G1

Figura 5.11: Conversão realizada levando em conta a situação-problema investigada

$$P(x) = \begin{cases} 1,18x^2 + 1,11 \cdot x + 12,6, & 0 \leq x \leq 6,7 \text{ p.medios} \\ 100\%, & x > 6,7 \end{cases}$$



conversão 6



Fonte: Registro escrito de G1

Essas transformações foram realizadas pelos três grupos. Mesmo que essa conversão não tendo acontecido de forma espontânea por parte dos alunos e tenha necessitado de uma maior intervenção do professor, os comentários dos integrantes de G1 dão indícios de que os alunos entenderam não apenas o comportamento da função, mas também suas especificidades simbólicas e gráficas que retratam o fenômeno em estudo.

Após a discussão dessas transformações, demos por encerrada essa primeira atividade e pedimos aos alunos que comentassem sobre o que acharam da atividade desenvolvida. A repercussão positiva foi unânime em relação ao desenvolvimento da atividade, uma vez que todos disseram que gostaram e que nunca tinham aprendido matemática dessa forma.

Dando continuidade, após a descrição de como a atividade foi desenvolvida, partimos para análise matemática e cognitiva, levando em conta os registros de

representação semiótica produzidos pelos alunos durante o desenvolvimento da atividade.

5.1.1.2 Análise matemática da atividade

Segundo Duval (2012b), sob um ponto de vista matemático, a compreensão reside na capacidade do aluno de argumentar matematicamente sobre a sua resolução. Ancorados nesse ponto de vista, buscamos investigar os aspectos matemáticos que foram essenciais para a resolução da atividade, explorando as propriedades matemáticas e as argumentações dos alunos no desenvolvimento da atividade.

Para essa investigação fizemos um levantamento dos conteúdos e propriedades matemáticas utilizados, analisando os registros capturados por vídeo e os escritos entregues por cada grupo no final de da atividade.

Conforme podemos observar na descrição dos dados, os grupos G1, G2 e G3, desenvolveram a atividade de forma quase que conjunta, participando mutuamente das discussões, algo que ocasionou um desenvolvimento quase similar entre os grupos, apenas com algumas diferenças relativas às especificidades de cada um dos integrantes, como a maneira de escrita e a organização de ideias.

Dessa forma, para que possamos explorar os aspectos matemáticos nos registros dos alunos realizamos essa análise considerando as quatro questões definidas no capítulo 3, e que para facilitar a visualização, apresentamos novamente aqui.

Quadro 5.4: Reapresentação do quadro 3.2

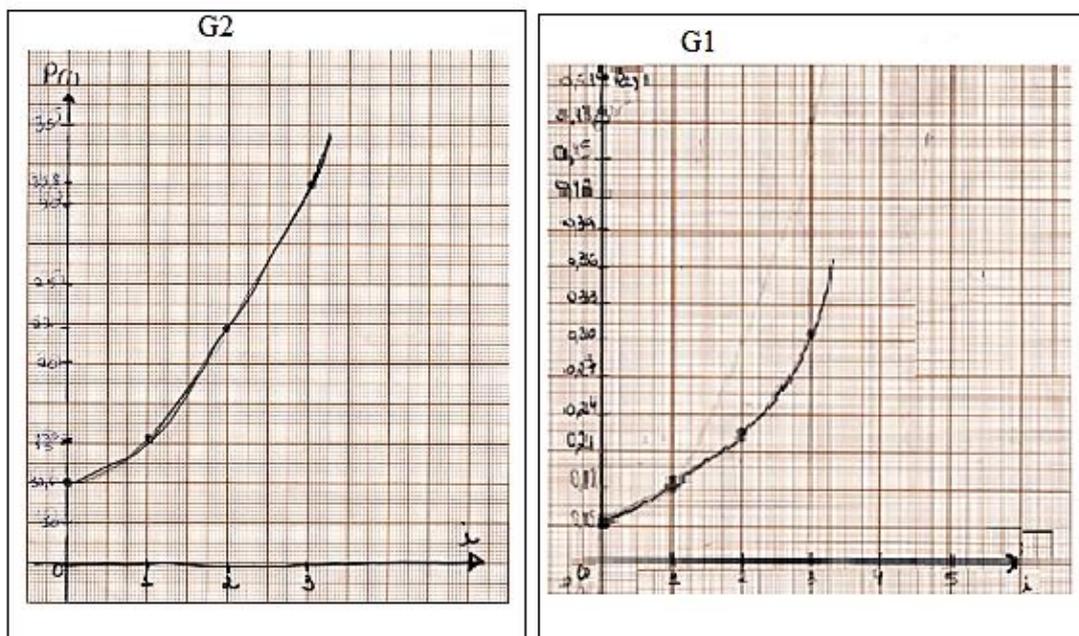
Questões sobre o encaminhamento matemático
Qual conteúdo matemático os alunos utilizaram no desenvolvimento da atividade?
Quais propriedades matemáticas são utilizadas para se chegar à representação final da situação?
Qual tipo de registro os alunos utilizaram na representação final da situação-problema?
A execução matemática desenvolvida está correta?

Considerando a primeira questão, que diz respeito ao conteúdo matemático que utilizaram para o desenvolvimento da atividade, observamos que os alunos recorrem ao objeto matemático “*função do segundo grau*” e “*função definida por duas sentenças*”, explorando inicialmente os aspectos gráficos de comportamento do objeto e, posteriormente, os aspectos algébricos próprios do conteúdo, como a construção da expressão algébrica e a resolução da equação associada ao polinômio por eles definido.

A escolha do conteúdo ou a percepção de qual objeto matemático os alunos utilizaram fica evidente quando questionamo-os, durante a execução da atividade, sobre *o que presente na atividade os induziu ao uso do conteúdo*. Constatamos que todos os alunos se remeteram ao registro gráfico, afirmando que foi a partir dele, associado ao comportamento de uma parábola, que decidiram por qual conteúdo utilizar.

Na figura 5.12 apresentamos os gráficos construídos por dois dos três grupos no início da atividade que desencadearam a escolha do objeto matemático.

Figura 5.12: Gráficos construídos no início da atividade.



Fonte: Registro escrito de G1 e G2

A segunda questão que elencamos, no quadro 5.4, visa observar nas construções dos alunos, as propriedades que eles utilizaram para chegar à representação final da situação. Durante a descrição da atividade, podemos ter uma noção de como os alunos se apropriaram das técnicas necessárias para construir o registro que culminou na

representação final da situação. Por exemplo, na figura 5.13, mostramos a construção do modelo algébrico feito por G1.

Figura 5.13: Construção do modelo algébrico

$$\begin{array}{l}
 (0, 12,5) \\
 (1, 15,5) \\
 (2, 22)
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 A \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 12,6 \\
 c = 12,6 \\
 A \cdot 1 + b + 12,6 = 15,5 \quad \left\{ \begin{array}{l} b = 2,9 - 1,8 = 1,1 \\ b = 2,9 - A \end{array} \right. \\
 b = 15,5 - A \Rightarrow 12,6 \\
 b = 2,9 - A \\
 A \cdot 2 + 2(2,9 - A) + 12,6 = 22 \\
 4A + 5,8 - 2A + 12,6 = 22 \\
 2A + 18,4 = 22 \\
 2A = 22 - 18,4 \\
 A = \frac{3,6}{2} = 1,8
 \end{array}$$

$$P(x) = 1,8x^2 + 1,1x + 12,6 = 0$$

Fonte: Registro escrito de G1

Observamos que G1, inicialmente, organiza três pares ordenados e os associa às representações algébricas, fazendo a construção de três equações com três incógnitas, similares a um sistema, porém não organizado da forma como vemos usualmente nos livros didáticos.

Com as equações realizaram simplificações e substituições para que pudessem encontrar os valores dos coeficientes. Constatamos esses mesmos procedimentos nas resoluções de G2 e G3, os quais partem dos pares ordenados, organizando-os algebricamente, para encontrar os valores dos coeficientes da expressão algébrica.

No momento em que questionamos os alunos, a respeito de quais procedimentos foram necessários para a construção da expressão algébrica que representava a situação, todos os alunos se referiram ao registro gráfico como sendo o desencadeador da percepção do objeto matemático “função do segundo grau”, uma vez que apontaram que a partir dele decidiram qual conteúdo abordar e realizaram a construção da expressão algébrica aproximando uma curva dos pontos. Além disso, usaram a estrutura similar a um sistema de três equações e três incógnitas e o resolveram para chegar na expressão algébrica da função.

Observamos que todos os grupos relataram a forma com que chegaram à expressão algébrica da função do segundo grau, ou seja, os alunos não apenas souberam executar o método de substituição, como também conseguiram argumentar sobre os procedimentos utilizados para resolver a atividade.

Partindo para a terceira questão a ser observada, que diz respeito a uma análise do tipo de representação que os alunos utilizaram para tratar matematicamente a situação, mais especificamente, a que tipo de registro é utilizado na representação final, foi possível constatar que ambos utilizaram o registro algébrico, mesmo quando realizaram a validação e modificaram o registro de forma a atender as especificidades por eles consideradas.

Na figura 5.14 observamos a representação final da situação construída pelo grupo G1, que é similar às representações construídas por G2 e G3.

Figura 5.14: representação final da situação

$$P(x) = \begin{cases} 1,18 \cdot x^2 + 1,1 \cdot x + 12,6, & 0 \leq x \leq 6,7 \text{ p.medos} \\ 100\%, & x > 6,7 \end{cases}$$

Fonte: Registro escrito de G1

A última questão a ser observada, diz respeito a uma avaliação do desenvolvimento da atividade, isto é, se a execução realizada pelos alunos é correta ou não. Inicialmente, observando a construção do primeiro modelo algébrico, exemplificado na figura 5.11, é possível constatar que a resolução é adequada, pois utilizaram o período zero para encontrar um dos coeficientes, algo que facilita a resolução do sistema. Posteriormente, isolaram uma das duas incógnitas que faltava e usaram o método da substituição, para que assim conseguissem encontrar as demais. Esse processo foi bem executado por todos os grupos, algo que sinaliza o entendimento do procedimento. Construída a primeira função, eles realizam cálculos para que pudessem, por meio da equação do segundo grau associada à situação investigada, chegar em um valor que resolvesse a situação.

Ressaltamos que os alunos utilizam a fórmula de Bháskara corretamente e interpretam o resultado também de forma correta, conforme vimos na figura 5.9, que trata a conversão entre o registro algébrico e o registro em língua natural.

Nessa mesma figura, podemos constatar como os alunos de G1, por exemplo, relacionaram a variável auxiliar com a variável tempo. Assim ressaltamos que, mesmo não realizando a troca delas no registro algébrico, eles demonstraram compreender a relação entre as variáveis.

Podemos observar na figura 5.10, que os alunos foram estimulados a avaliar o modelo obtido em relação à situação-problema investigada. Esta avaliação desencadeia uma alteração na expressão para responder o problema por apresentar problemas quando relacionada com a situação investigada. De fato, o domínio não era evidente e a situação não estava adequadamente representada pelo modelo. Esses aspectos foram corrigidos e os alunos conseguiram fazer os ajustes necessários.

Analisando os registros produzidos pelos alunos, levando em conta não somente o conteúdo envolvido no desenvolvimento da atividade, mas os procedimentos e as propriedades matemáticas por eles executadas, buscamos sintetizar os aspectos matemáticos presentes na resolução dos três grupos durante o desenvolvimento da atividade de modelagem, conforme indica a tabela 5.1.

Tabela 5.1: Aspectos matemáticos identificados em cada grupo

Aspectos matemáticos	G1	G2	G3
Conteúdo utilizado	Função do segundo grau e Função definida por duas sentenças.	Função do segundo grau e Função definida por duas sentenças.	Função do segundo grau e Função definida por duas sentenças.
Variáveis relacionadas no modelo	Períodos de tempo e o percentual de vendas	Períodos de tempo e o percentual de vendas	Períodos de tempo e o percentual de vendas
Troca da variável auxiliar	Não	Não	Não
Substituição de variáveis para encontrar o modelo	Sim	Sim	Sim
Uso do registro gráfico para entender o comportamento das variáveis	Sim	Sim	Sim
Adequação da representação final à situação	Sim	Sim	Sim

A análise dos registros e procedimentos dos alunos fornece indícios de que os alunos compreenderam os aspectos matemáticos necessários para o desenvolvimento da atividade.

Assim, considerando que para Duval (2012b) a compreensão do ponto de vista matemático requer a conceitualização e o uso do objeto matemático, podemos inferir que houve compreensão.

No desenvolvimento da atividade 1 podemos observar que os alunos conceituam a função do segundo grau, e, além disso, exploraram características do objeto que influenciaram no desenvolvimento da atividade, construindo estruturas que lhes permitissem associar diferentes aspectos da função.

Percebemos que os alunos exploraram os conceitos e as propriedades presentes nos diferentes sistemas de representação utilizados no desenvolvimento da atividade. Os alunos transitaram por diferentes representações, sendo que cada uma exigiu o domínio de propriedades matemáticas específicas para que tivessem sucesso no desenvolvimento da atividade.

Observamos também que a estrutura da atividade de modelagem matemática colaborou para que os alunos se apropriassem dos procedimentos matemáticos utilizados no desenvolvimento da atividade, uma vez que a cada mudança de registro, novas estruturas matemáticas foram exigidas e diferentes transformações possibilitaram que aspectos específicos da situação-problema fossem complementados.

5.1.1.3 Análise cognitiva da atividade

Sob um ponto de vista cognitivo, Duval (2012b) salienta que a compreensão é guiada pelo modo de acesso aos objetos matemáticos, o qual é realizado por meio dos registros de representação semiótica produzidos pelos alunos.

Nesse sentido, quando descrevemos a resolução da atividade do 1º momento, buscamos evidenciar esses registros e as transformações realizadas, identificando no conjunto de dados, os tratamentos e as conversões, bem como a classificação de cada registro mobilizado pelos alunos.

Para Duval (2011a), diante das produções matemáticas dos alunos, devemos estar em condições, primeiramente, de analisar o reconhecimento das unidades de sentido matematicamente pertinentes no conteúdo das representações mobilizadas. Para o autor, essa é uma das condições essenciais para poder se referir à compreensão.

Esse reconhecimento é possível pela análise das conversões realizadas durante o desenvolvimento da atividade. Para isso nos propomos a analisar, nessas conversões, os critérios de congruência e não-congruência e seus níveis, conforme discutimos no capítulo 3.

Na conversão 1, apresentada na figura 5.1, em que o registro em língua natural relativo à situação investigada é convertido para o registro algébrico, neste caso, se referindo às variáveis que os alunos definiram. Essa conversão é não-congruente, pois não satisfaz duas das condições estabelecidas por Duval (2012a). De fato:

- Não possui unicidade terminal, uma vez que os alunos poderiam ter escolhido de forma diferente as variáveis, isto é, foi escolhido o percentual em relação ao tempo, posteriormente em relação ao período de tempo, mas a relação poderia ser dada de forma contrária, sendo o tempo ou os períodos em função do percentual de vendas de smartphones.
- E, também não possui ordem entre as representações, pois se mudássemos a relação das variáveis, a ordem não seria a mesma.

Com isso, podemos inferir que a conversão 1 possui um nível médio de não-congruência.

A conversão 2, realizada do registro gráfico para o numérico, que pode ser observada na figura 5.3 é congruente, pois satisfaz todas as condições de Duval (2012a).

- Existe correspondência semântica entre as unidades de sentido, uma vez que os valores descritos na legenda do registro gráfico correspondem aos valores numéricos utilizados para os cálculos dos percentuais.
- Existe unicidade semântica entre os valores no registro numérico e os representados no registro gráfico.
- Existe ordem entre as representações, pois as unidades de sentido presentes em cada uma das representações estão em correspondência.

Sendo assim, a conversão 2 é uma conversão com nível de congruência médio alto, pois os registros, embora sejam ambos monofuncionais, não são de mesma forma, sendo o numérico discursivo e o gráfico não-discursivo. Para realizar essa conversão, os estudantes necessitaram apenas fazer uma codificação entre os valores relacionados nas barras do registro gráfico com os valores numéricos presentes nos cálculos dos percentuais.

A conversão 3, indicada na figura 5.4, assim como a conversão 2, também é congruente e satisfaz os três critérios de congruência. Essa conversão também possui nível de congruência médio alto, pois a forma dos registros são diferentes, assim como na conversão 2, e para os estudantes realizarem a construção do registro gráfico, necessitaram apenas de uma codificação entre os valores expressos no esquema numérico que associa os percentuais dos períodos correspondentes com a posição das coordenadas no registro gráfico.

A conversão 4, indicada na figura 5.6, do registro gráfico para o algébrico, é não-congruente pois não satisfaz duas das condições estabelecidas por Duval. O registro algébrico é oriundo de um ajuste de curva que não estabelece unicidade semântica e nem ordem entre os registros, pois se os alunos tivessem escolhido outros pontos para a construção do registro algébrico, uma outra expressão seria construída. Levando em conta o nível de não-congruência, esta conversão tem nível médio, pois não satisfaz duas das condições, conforme já foi descrito.

A conversão 5, apresentada na figura 5.9, em que o registro algébrico é convertido para o registro em língua natural é não-congruente, pois não satisfaz aos três critérios de congruência de Duval:

- Não existe unicidade semântica, pois a resposta em língua natural necessita de uma interpretação que não é contemplada no registro algébrico.
- A correspondência entre as unidades de sentido também não é estabelecida, uma vez que existe inúmeras maneiras de se dar a resposta ao problema, levando em conta o resultado do registro algébrico.

- Também não existe ordem entre as representações, pois em nenhum aspecto do registro em língua natural, pode-se transparecer o registro algébrico.

Sendo assim, a conversão 5 pode ser classificada como um conversão com nível alto de não-congruência, pois não satisfaz as condições estabelecidas por Duval (2012a).

E, por fim, na figura 5.11, podemos observar a conversão 6 do registro algébrico para o gráfico. Essa conversão, diferente da conversão 5, é congruente e satisfaz os três critérios de congruência, pois:

- Existe correspondência semântica entre as unidades de sentido das representações, por exemplo, aspectos crescentes e contínuos na representação gráfica, estão retratadas nos aspectos algébricos presentes nas duas sentenças da representação algébrica.
- Existe unicidade semântica terminal, pois o registro gráfico construído satisfaz as especificidades da representação algébrica.
- Há conservação da ordem entre as representações, pois a conversão inversa pode ser estabelecida.

Observamos que essa conversão possui nível de congruência médio alto, pois satisfaz as três condições de Duval, conforme discutido, porém os registros, embora sejam monofuncionais, possuem formas distintas, o algébrico é discursivo e o gráfico não-discursivo. Assim, para realizar a conversão, os alunos precisariam apenas de uma codificação dos aspectos comportamentais do registro gráfico, como ascensão e continuidade com os valores e sinais expressos no registro algébrico.

De posse dos registros dos alunos durante o desenvolvimento da atividade, podemos constatar que as conversões nas quais a forma dos registros são diferentes, exigiram dos alunos custos cognitivos mais elaborados, corroborando com as assertivas de Duval (2011b) de que o fenômeno de congruência, determina o grau de complexidade nas conversões. Ou seja, observamos que as conversões que possuíram um nível alto de não-congruência foram aquelas que demandaram dos alunos maior dificuldade, ao contrário da conversão com nível de congruência alto, que foi realizada com certa facilidade.

Em síntese, constatamos no desenvolvimento da atividade “Venda de Smartphones”, seis conversões que foram realizadas pelos grupos de alunos, conforme mostra a tabela 5.2.

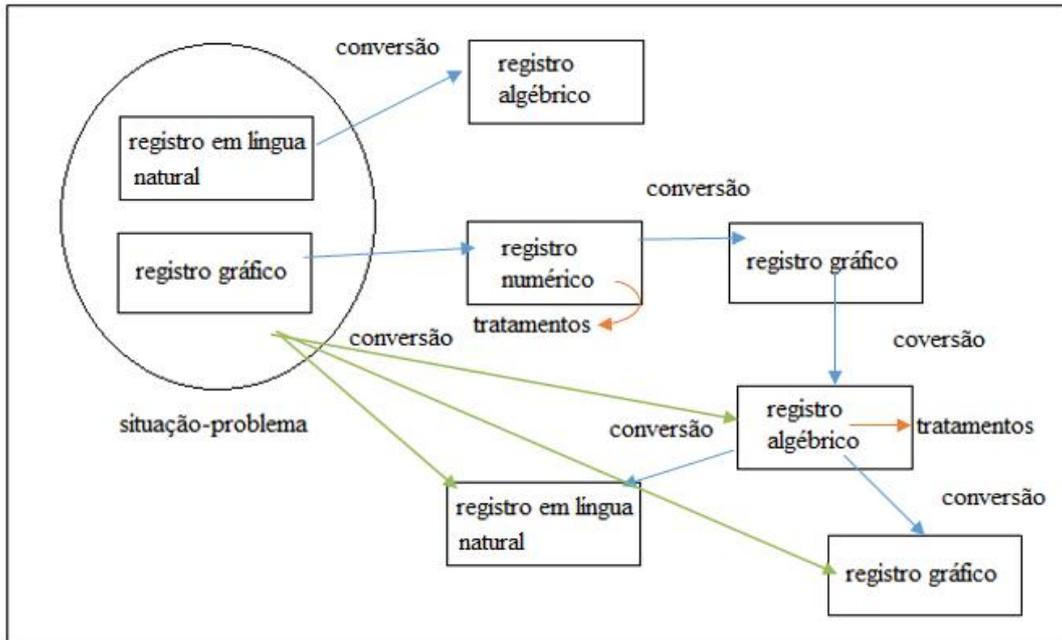
Tabela 5.2: Conversões realizadas na atividade do 1º momento

Conversão	Registro de saída	Registro de chegada
1	Língua natural	algébrico
2	Gráfico	Numérico
3	Numérico	Gráfico
4	Gráfico	Algébrico
5	Algébrico	Língua Natural
6	Algébrico	Gráfico

Fonte: Registros escritos entregues pelos grupos.

Esquematizamos na figura 5.15 as conversões entre os registros que foram construídos pelos alunos no desenvolvimento dessa atividade. Identificamos nesse esquema as atividades cognitivas realizadas pelos alunos nas transformações que foram realizadas.

Figura 5.15: Atividades cognitivas identificadas dos grupos na atividade 1



Fonte: o autor

Observamos que foi com base nas conversões que os alunos tomaram consciência do objeto matemático, uma vez que reconheceram que utilizaram os aspectos específicos de cada registro mobilizado, sinalizando que puderam entender a complementariedade de cada registro, dando indícios de que coordenaram os registros que emergiram da atividade de modelagem.

De posse dos dados coletados, observamos que as transformações foram essenciais no desenvolvimento da atividade de modelagem, principalmente as conversões. Para Duval (2011a) essas transformações levam aos mecanismos subjacentes à compreensão. De fato, essa coordenação dos registros foi o aspecto fundamental para os alunos compreenderem a matemática.

Sendo assim podemos verificar com o desenvolvimento da atividade, que as conversões realizadas foram necessárias para que certas especificidades do objeto matemático pudessem ser exploradas, conforme a necessidade representacional no desenvolvimento da atividade. Isso corrobora com as assertivas de Vertuan (2007) de que as conversões acontecem para se obter um registro em que os tratamentos sejam mais fáceis, ou para obter um registro que melhor responda ao problema.

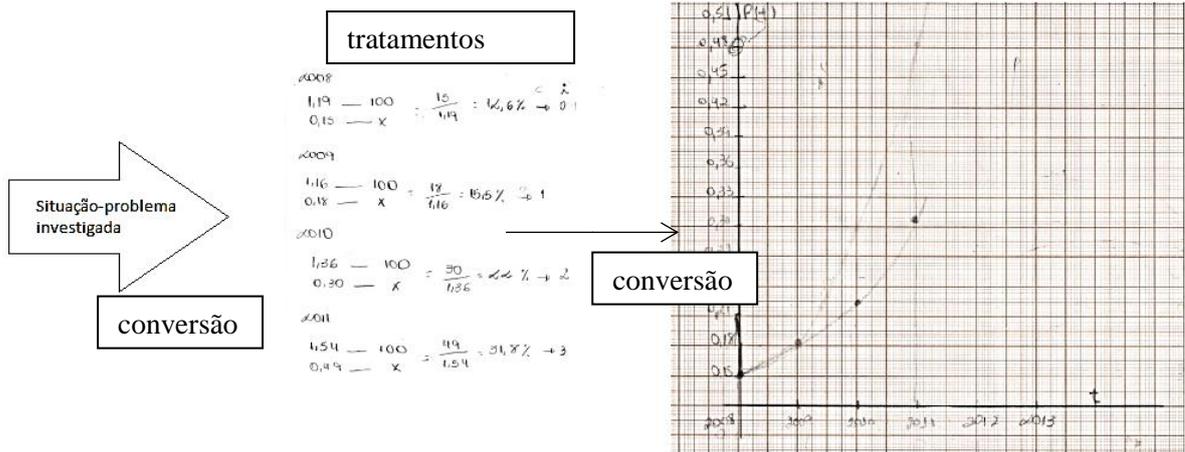
Constatamos que essas transformações realizadas puderam proporcionar a coordenação dos diferentes registros associados ao objeto matemático, uma vez que os

alunos estabelecem e utilizam as interpretações advindas dessa coordenação para refletir sobre a situação, a fim de progredir no desenvolvimento da atividade.

Dessa forma, concluímos que a coordenação dos registros foi fundamental para que chegassem, em não apenas na resposta do problema investigado, mas na reflexão sobre o fenômeno e como interpretá-lo matematicamente.

Na figura 5.16 organizamos os recortes da resolução de G1 a fim de exemplificar a coordenação dos registros produzidos por esse grupo.

Figura 5.16: Coordenação dos registros produzidos na primeira atividade



tratamentos

conversão

$Ax^2 + Bx + C = 0$
 $(0, 12,6)$
 $(1, 15,5)$
 $(2, 22,6)$
 $(0, 12,6) + A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 12,6$
 $C = 12,6$
 $(1, 15,5) + A \cdot 1 + B \cdot 1 + 12,6 = 15,5$
 $b = 2,9 - 1,8 = 1,1$
 $b = 15,5 - A - 12,6$
 $b = 2,9 - A$
 $(2, 22,6) + A \cdot 2 + 2 \cdot (2,9 - A) + 12,6 = 22,6$
 $4 + 5,8 - 2A + 12,6 = 22,6$
 $2A + 18,4 = 22,6$
 $2A = 22,6 - 18,4$
 $A \cdot A = \frac{3,6}{2} = 1,8$
 $P(x) = 1,8x^2 + 1,1x + 12,6$

$P(x) = 100$
 $1,8x^2 + 1,1x + 12,6 = 100$
 $1,8x^2 + 1,1x + 12,6 - 100 = 0$
 $1,8x^2 + 1,1x - 87,4 = 0$
 $\Delta = 1,1^2 - 4 \cdot 1,8 \cdot (-87,4)$
 $\Delta = 1,1^2 + 629,168$
 $\Delta = 630,4$

$x = \frac{-1,1 \pm \sqrt{630}}{2 \cdot 1,8}$
 $x = \frac{-1,1 \pm 25}{3,6}$
 $x_1 = 6,7$
 $x_2 = -7,25$

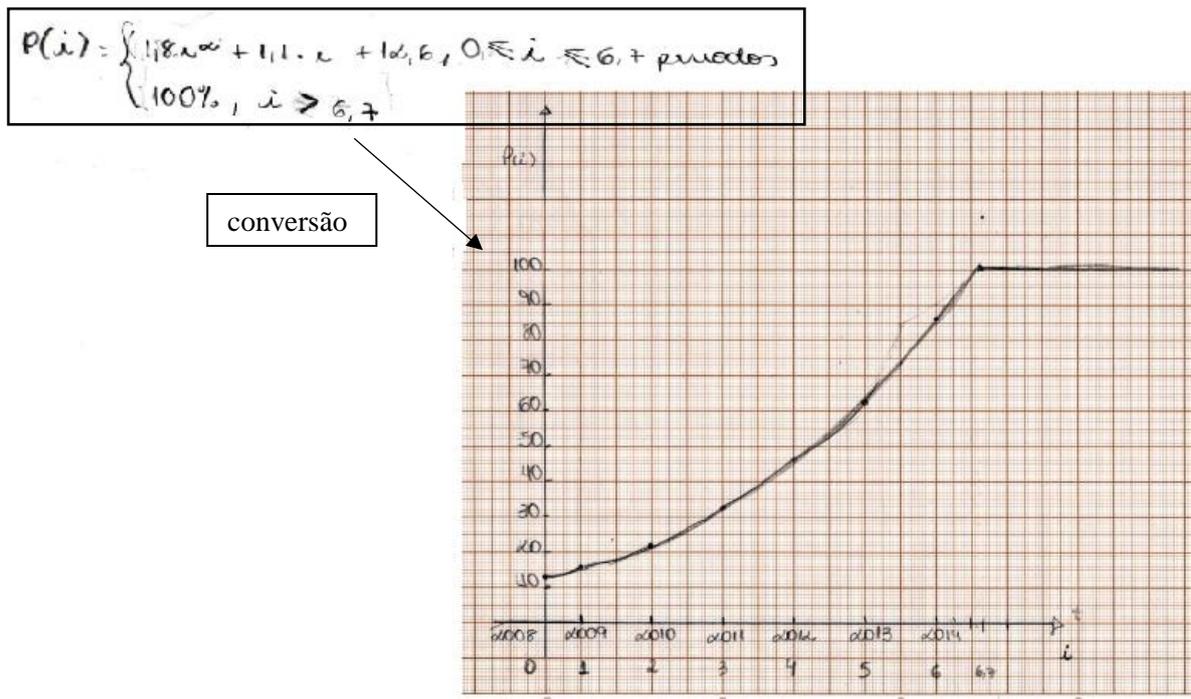
tratamentos

conversão

$\frac{1}{0,7} - x = 8,144$

Resposta

- Os vendas vão atingir 100% a partir de 6,7 período, ou seja a partir de agosto de 2014.



Fonte: Registro escrito de G1

Observamos na resolução entregue por G1 que os alunos utilizaram diferentes registros de representação para desenvolver a atividade. Essa utilização, segundo Duval (2012a), é uma característica do pensamento humano e colabora com a coordenação dos registros produzidos, conforme as finalidades específicas das transformações.

Essa coordenação, segundo o autor, é a condição fundamental para a compreensão, conseqüentemente para a compreensão em matemática, pois para Duval (2011b) a atividade matemática demanda da mobilização de ao menos dois registros de representação e da possibilidade de trocar a todo o momento de registro.

Notamos que ao compreender o objeto matemático e utilizar seus aspectos por meio dos registros de representação semiótica, surgiram indícios de que os alunos compreenderam não somente tal objeto, mas a matemática envolvida nos procedimentos requeridos em cada transformação e o problema investigado, na medida em que avaliaram se os procedimentos matemáticos estavam de acordo com a situação-problema e o fenômeno investigado.

5.1.2 Atividade 2: “ Câncer de Tireóide”

Esta atividade faz referência ao segundo momento de familiarização com a modelagem. Diferentemente da atividade 1, seu desenvolvimento se deu em dois encontros com os alunos, dando a eles o segundo contato com tais atividades.

O texto entregue aos alunos consta no quadro 5.5. O texto contempla apenas a situação sem a construção da sua problemática, que foi construída pelos alunos.

Quadro 5.5: Texto entregue aos alunos na segunda atividade

Para o tratamento do câncer da maioria dos tumores de tireóide, é recomendado ao paciente submeter-se a doses terapêuticas de Iodo-131 (^{131}I). Essas doses são necessárias, sendo um tratamento complementar, após a cirurgia de retirada dos tumores para:

- Tratar restos de tireóide no pescoço;
- Prevenir o reaparecimento do tumor;
- Combater tumores provenientes da tireóide em outras regiões do corpo;

O iodo radioativo tem o objetivo de eliminar os vestígios da glândula da tireóide após a cirurgia em que possíveis tumores possam reaparecer.

As doses ministradas variam de 30 à 150 MCI, dependendo da prescrição do médico responsável pelo tratamento. Administrado em forma líquida, por via oral, o Iodo-131 concentra-se no tecido tireodiano, nas glândulas salivares e no estômago. Tal elemento emite radiação do tipo beta, agindo no organismo principalmente sobre os tecidos (conjuntos de células diferenciadas) tireodianas a serem tratadas.

O tratamento pode variar de uma a várias doses dependendo do indivíduo, e do estágio de evolução que se encontrava a doença, uma vez que com o passar do tempo o nível de radiação vai diminuindo de acordo com o decaimento radioativo do Iodo-131.

Fonte: O autor

De posse dessas informações pedimos aos alunos que pensassem em um problema para ser investigado. Assim eles não poderiam se ater apenas às informações contidas no texto entregue. Nesse momento, percebemos que os alunos já não estranharam tanto a atividade, conforme indica o diálogo do grupo G2.

A1G2: Nossa gente e agora? O texto não diz muita coisa.

A2G2: Vamos listar coisas importantes, olha ... aqui fala que o iodo tem uma dose entre 30 MCI e 150 MCI, a gente viu em química, a nomenclatura dessa unidade de medida. Que mais?

A1G2: Aqui também fala que é decrescente essa concentração, mas não diz o quanto diminuiu.

A3G2: Vamos precisar da meia-vida do iodo.

A2G2: O que mais ... também da concentração para tomar outra dose.

Observamos nesse diálogo que os alunos de G2, por exemplo, identificaram informações que precisariam complementar. Assim, com base em tais informações os alunos determinaram os problemas conforme apresentamos na figura 5.17.

Figura 5.17: Problemas definidos pelos grupos na atividade

<p>O que investigar</p> <p>Com base na primeira dose, qual será o tempo necessário para que o indivíduo que toma uma dose de 30mg, leve para tomar outra?</p>	G3
<p>O que investigar</p> <p>Qual é a relação matemática que descreve o comportamento de uma dose qualquer de iodo no organismo?</p>	G1
<p>O que investigar</p> <p>Como se comporta o iodo no organismo de um indivíduo que ingere uma dose entre 30 a 350mg? Sabendo que um indivíduo ingere uma dose de 120mg, e assumimos que só é possível tomar uma nova dose quando a concentração chegar a 30mg. Quanto tempo levará para que o indivíduo possa tomar uma nova dose?</p>	G2

Fonte: Registros escritos dos grupos

Ao definirem os problemas, os alunos decidiram investigar o comportamento da concentração de iodo no organismo daquele que o ingere. Porém observamos que G1 e G2 também se interessaram em saber o tempo estimado para ingestão de um nova dose, considerando uma dose específica em cada grupo. Além disso, G3 quis determinar uma relação matemática que descreve a situação.

Observamos algumas informações nos problemas que não constavam no texto entregue. Por exemplo, no texto não falamos sobre uma concentração específica, na qual se deve repetir o tratamento, mas os alunos se remeteram a isso. Percebemos que essas informações são complementadas nas hipóteses, conforme podemos observar na figura 5.18.

Figura 5.18: Hipóteses definidas pelos alunos para atividade 2

<p>Hipóteses</p> <ul style="list-style-type: none"> • O medicamento está relacionado a meia vida em que um elemento radioativo leva para cair pela metade • $\frac{1}{2}$ vida do iodo é 8 horas • O comportamento é de uma função exponencial • A outra dose é aplicada quando a concentração for menor do que 1 mCi <p style="text-align: right;">G1</p>
<p>Hipóteses</p> <p>A meia vida do Iodo é de 8 horas</p> <p>A concentração do iodo diminui com o tempo</p> <p>Uma dose nova pode ser aplicada é necessário que a concentração seja menor igual a 1 mCi</p> <p style="text-align: right;">G2</p>

Fonte: Registros escritos dos alunos

Nas hipóteses verificamos as informações que eles pesquisaram com ajuda de telefones celulares e notebooks durante o desenvolvimento da atividade. Encontraram a meia-vida do elemento. Além disso os dois grupos fizeram a mesma consideração em relação à concentração de iodo para que uma nova dose fosse ministrada. Assim, indagamos os alunos a respeito dessa consideração e um dos alunos de G2 nos respondeu:

A2G2: Professor, não encontramos nada sobre o comportamento da concentração para que uma nova dose fosse ministrada a um paciente. Então pensamos em estipular um valor, de preferência baixo, até porque, pensamos que o elemento tem que ser consumido pelo organismo para que o tratamento tenha efeito.

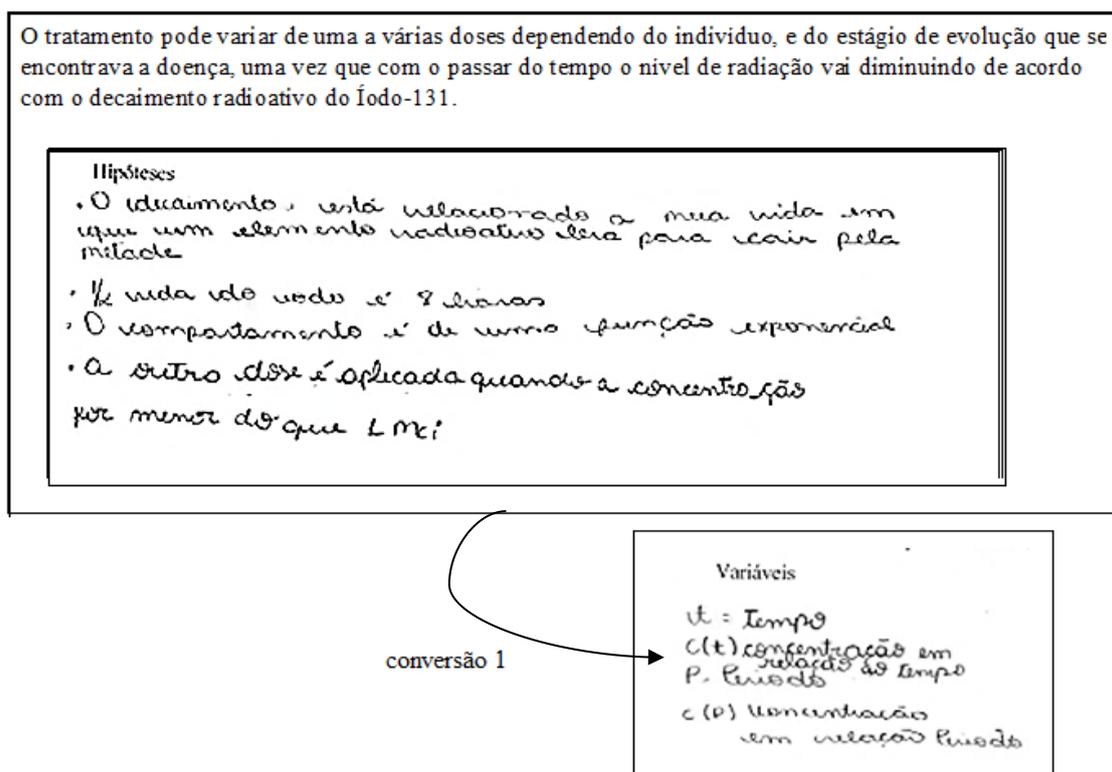
A constatação dos alunos acerca do comportamento do iodo no tratamento não é errada, pois eles partiram de um princípio real para realizar essa simplificação da situação. Sendo assim, consideramos relevante o que fizeram, e como essa simplificação da situação pode colaborar para o desenvolvimento da atividade.

O grupo G3 complementou a situação investigada, elencando como hipótese a meia vida do elemento. Tal informação foi necessária, tendo em vista que o objetivo deles era descrever matematicamente a situação.

Dando continuidade ao desenvolvimento da atividade, os grupos definiram as variáveis envolvidas na situação-problema investigada. Essas variáveis determinaram a conversão 1 em que os registros em língua natural, multifuncionais discursivos, são convertidos para o registro algébrico, monofuncional discursivo.

Na figura 5.19, mostramos essa conversão com as variáveis definidas pelo grupo G1.

Figura 5.19: Variáveis definidas na atividade 2

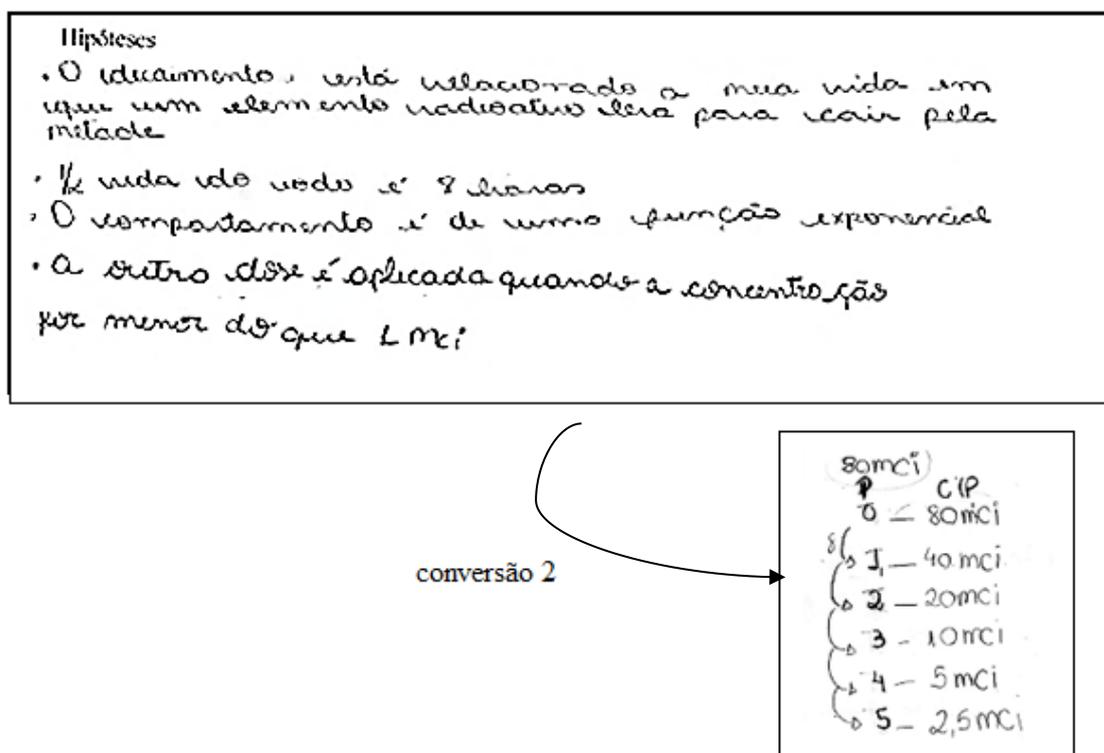


Fonte: Registro escrito de G1

Realizada a definição das variáveis, os alunos realizam outra conversão, que denominamos de conversão 2, do registro em língua natural, multifuncional discursivo, para o numérico, monofuncional discursivo. A conversão realizada por G3 serviu para construir um esquema numérico que associa os períodos de tempo com as concentrações de iodo considerando o decaimento radioativo do elemento.

Na figura 5.20 podemos observar a construção desse esquema numérico e como os alunos deixaram registrados aspectos que estavam contidos na situação-problema investigada.

Figura 5.20: Esquema numérico da atividade 2

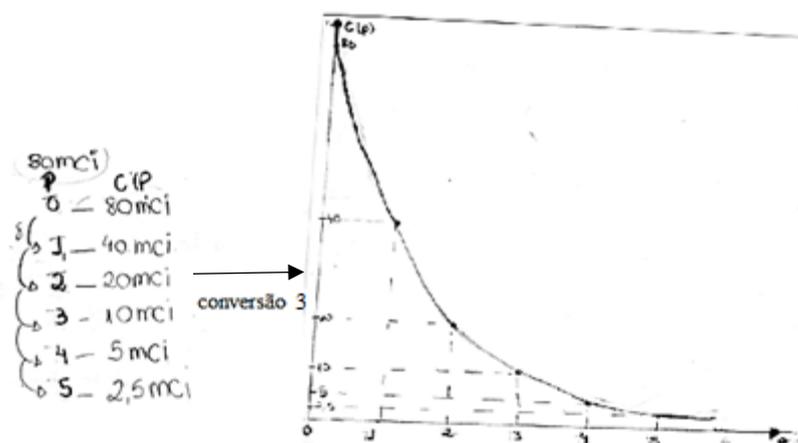


Fonte: Registro escrito de G3

Observamos na figura 5.20 que os alunos estipularam uma concentração específica e assim construíram o esquema numérico relacionando as variáveis. Este esquema também parece indicar que os alunos entendem que cada mudança de período corresponde a uma variação de oito horas.

Os grupos G1 e G2 também construíram esquemas numéricos, assim como G3, porém com valores associados diferentes, conforme constam em seus respectivos problemas. Construído esse esquema numérico, os alunos de G3 realizaram uma nova conversão, do registro numérico, monofuncional discursivo, para o gráfico, também monofuncional não-discursivo. Essa conversão denominamos de conversão 3 e a apresentamos na figura 5.21.

Figura 5.21: Conversão do registro numérico para o gráfico



Fonte: Registro escrito de G3

Realizada essa conversão, os grupos identificaram um comportamento exponencial em relação à situação-problema. Com base no objeto matemático “função exponencial”, os alunos realizaram tratamentos no registro numérico para que pudessem construir a função. Na figura 5.22, destacamos os tratamentos realizados por G1.

Figura 5.22: Tratamentos realizados no registro numérico

$$\begin{array}{l}
 P \text{ — } c(P) \\
 0 \text{ — } 90 \\
 1 \text{ — } 45 = 90 \times 0,5 \\
 2 \text{ — } 22,5 = 45 \times 0,5 = 90 \times 0,5 \times 0,5 = 90 \times 0,5^2 \\
 3 \text{ — } 11,25 = 90 \times 0,5^3 \\
 4 \text{ — } 5,625 = 90 \times 0,5^4 \\
 5 \text{ — } 2,8125 = 90 \times 0,5^5
 \end{array}$$

Fonte: Registro escrito de G1

Nesses tratamentos os alunos utilizaram a recorrência matemática para buscar um padrão de escrita, assim como foi feito por G1 e pelos outros grupos. Ao realizarem esses tratamentos, os alunos conseguiram converter o registro numérico generalizando-o para um registro algébrico. Essa conversão denominamos de conversão 4.

Na figura 5.23, ilustramos a conversão 4 realizada por G1 e na figura 5.24 destacamos os registros algébricos definidos pelos outros dois grupos.

Figura 5.23: Conversão para o registro algébrico na atividade 2.

0h — 90	P — c(P)
8h — 45	0 — 90
16h — 22,5	1 — 45 = 90 × 0,5
24h — 11,25	2 — 22,5 = 45 × 0,5 = 90 × 0,5 × 0,5 = 90 × 0,5 ²
32h — 5,625	3 — 11,25 = 90 × 0,5 ³
40h — 2,8125	4 — 5,625 = 90 × 0,5 ⁴
	5 — 2,8125 = 90 × 0,5 ⁵

Para 90 mi

$c(p) = 90 \times 0,5^p$

Conversão 4

Fonte: Registro escrito de G1

Figura 5.24: Expressões algébricas construídas por G2 e G3

G3 $C(P) = \frac{80}{2^P}$
G2 $C(P) = 120 \left(\frac{1}{2}\right)^P$

Fonte: Registros escritos dos grupos

Tendo estabelecido as expressões algébricas para as funções, levando em conta as especificidades de investigação que cada grupo estabeleceu, os alunos realizaram um tratamento no registro, trocando a variável período para a variável tempo.

Esse tratamento não é fácil, muito pelo contrário, necessita que os alunos reconheçam a equivalência entre as variáveis para que possam realizar essa mudança. Buscamos investigar se os alunos reconheciam essas variáveis e, assim como na primeira atividade, também questionamos os grupos acerca da definição das variáveis e da relação entre elas. Para isso perguntamos ao grupo “*Quais são e como se relacionam as variáveis envolvidas no problema?*”.

G1: Estabelecemos duas variáveis iniciais, o tempo (t), independente, e a concentração de iodo em relação ao tempo c(t), dependente, porém para resolver o problema precisei de uma outra variável que foi o período(p), que usei no lugar do tempo, já que um período correspondia a 8 horas e a concentração então em relação ao período c(p).

Com base na resposta do grupo G1 a questão que podemos perceber é que os alunos entenderam que a cada oito horas passa-se um período de meia vida e que cada hora corresponde a um oitavo de um período correspondente.

A figura 5.25 indica como o grupo G1 realiza essa modificação no registro algébrico.

Figura 5.25: Tratamento no registro algébrico da atividade de segundo momento

The image shows a handwritten mathematical derivation. At the top, the function $C(P) = 90 \cdot 0,5^P$ is written. To its right, there are notes: $P = t$, $1 \rightarrow 8h$, and $2 \rightarrow 16h$. An arrow points down from the function to a box labeled "Tratamento". Below the box, the function is transformed to $C(t) = 90 \times 0,5^{\frac{t}{8}}$. To the right of this transformation, the relationship $P = \frac{t}{8}$ is noted.

Fonte: Registro escrito de G1

Realizada essa mudança nos registros, os alunos começam a resolver seus respectivos problemas. O grupo G3, que visava apenas em descrever matematicamente a situação, realiza uma adequação na expressão algébrica e responde o problema, conforme podemos observar na figura 5.26.

Figura 5.26: Resolução do grupo G3

The image shows a handwritten mathematical derivation and explanation. At the top, it says $C_0 \rightarrow$ concentração de iodo. Below this, the function $C(P) = \frac{C_0}{2^P}$ is written. To the left, there are notes: $1P \rightarrow 8h$ and $2P \rightarrow 16h$. In the center, $P = \frac{t}{8}$ is written. To the right, the function is transformed to $C(t) = \frac{C_0}{2^{\frac{t}{8}}}$. An arrow labeled "tratamento" points from the original function to the transformed one. Below the transformed function, an arrow labeled "conversão" points to a paragraph of text: "A relação matemática que descreve o comportamento de uma dose que se encontra no organismo é dada por $C(t) = \frac{C_0}{2^{\frac{t}{8}}}$ ".

Fonte: Registro escrito de G3

No caso do grupo G3, após realizarem o tratamento no registro algébrico, eles realizaram a conversão 4 para o registro em língua natural, multifuncional discursivo, partindo do registro algébrico, monofuncional discursivo.

Os três grupos G1, G2 e G3 chegaram à expressão matemática da função exponencial oriunda da atividade. Os grupos G1 e G2, por outro lado, definiram problemas mais específicos, os quais necessitaram de mais transformações. Os problemas tinham um aspecto comum que era encontrar o tempo necessário para que a concentração de iodo fosse menor ou igual a 1 MCI, valor determinado pelos grupos. Então eles igualaram a expressão a esse valor e resolveram as equações correspondentes.

Na figura 5.27, exemplificamos o desenvolvimento realizado pelos grupos conforme descrito acima explorando a resolução do grupo G1.

Figura 5.27: Resolução do problema do grupos G1 na atividade 2

$c(t) = 1$
 $90 \cdot 0,5^{t/8} = 1$
 $0,5^{t/8} = \frac{1}{90}$
 $0,5^{t/8} = 0,01$
 $\log 0,5^{t/8} = \log 0,01$
 $\frac{T}{8} \log 0,5 = \log 0,01$
 $\frac{T}{8} = \frac{\log 0,01}{\log 0,5}$
 $\frac{T}{8} = 6,6$
 $t = 6,6 \cdot 8 = 52,8$ / 53 minutos e 48 minutos

tratamentos

Conversão 5

O tempo igual necessário para que a primeira dose de 90 mci reduza a de aproximadamente 53 minutos.

Fonte: Registro escrito de G1

Assim como G1 responde o problema proposto, G2 apresenta sua resolução após ter feito o mesmo procedimento para resolver o problema, igualar a função e resolver a equação exponencial (figura 5.28).

Figura 5.28: Resposta apresentada por G2 na atividade 2

O comportamento da icada no organismo de um indivíduo que ingerir uma dose qualquer entre 30 - 350 MCI é dada pela função: $C(t) = CI \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$
Para um indivíduo que ingerir uma dose de 320 MCI vai levar 56 horas para ser possível tomar uma nova dose

Fonte: Registro escrito de G2

Observamos que ambos, G1 e G2, realizaram a conversão 5 do registro algébrico para a língua natural, porém necessitando realizar mais tratamentos, no registro algébrico para chegar na resposta dos respectivos problemas definidos pelos grupos.

Essa quinta conversão finalizou a atividade. E no momento em que os alunos realizaram a comunicação da atividade, pudemos perceber como G1 e G2 conseguiram trocar mais experiências, visto que suas atividades contemplavam problemas parecidos.

A validação dos modelos obtidos aconteceu quando os alunos tiveram que associar as variáveis tempo e período, ou seja naquele momento eles tiveram de refletir não apenas a questão da relação da variável, mas também a relação com a situação-problema investigada e o problema proposto.

5.1.2.1 Análise matemática da atividade

A análise pautada no ponto de vista matemático visa discutir os aspectos matemáticos do desenvolvimento da atividade de modelagem. Esses aspectos essenciais são no que se remete à compreensão da matemática que emergiu da atividade.

Duval (2012b) salienta que

Somente se pode aprender matemática e concluir atividades propostas se compreendermos não somente as instruções e os enunciados de um problema, mas também aquilo que se pode fazer para buscar resolvê-lo e por que aquilo que se encontra está certo ou errado. (DUVAL, 2012b, p.309).

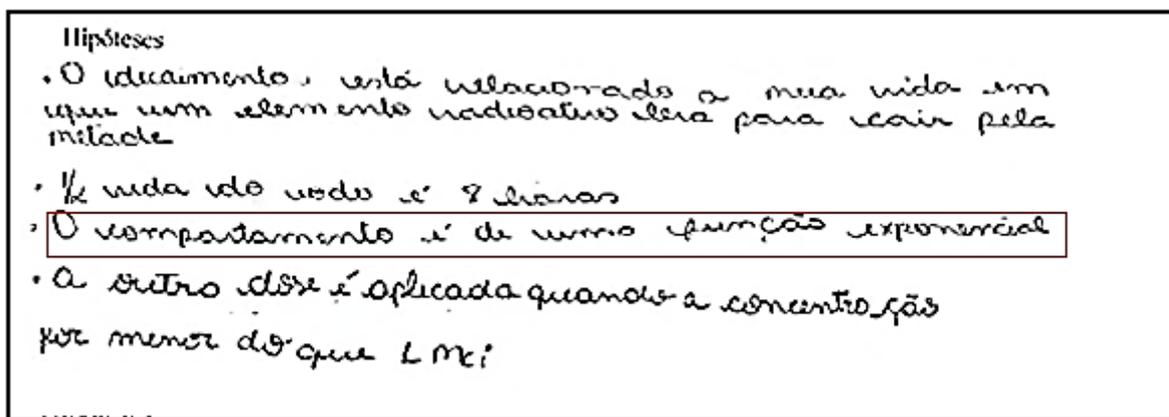
Assim, para Duval (2012b) “é necessário ao menos poder explicar as propriedades utilizadas que “explicam” como se chega à solução de um problema” (p.309). Dessa forma, buscamos nas argumentações dos alunos, indícios de que eles compreenderam as estruturas matemáticas por eles utilizadas para resolver o problema na atividade.

Para essa análise, buscamos realizar observações acerca da atividade desenvolvida por eles, levando em conta não somente os registros do desenvolvimento da atividade, mas também aqueles que foram capturados com auxílio de aparatos de áudio, vídeo e respostas ao questionário no quadro 5.2.

Assim como na análise matemática da atividade 1, na atividade 2 também discutimos os aspectos matemáticos do desenvolvimento da atividade, conforme consta no quadro 5.2, onde estruturamos quatro questões a serem analisadas.

A primeira questão visa observar qual foi o conteúdo que os alunos utilizaram no desenvolvimento da atividade. Observando os dados dos alunos constatamos nas hipóteses de G1, por exemplo, a menção ao objeto matemático função exponencial (figura 5.29).

Figura 5.29: O objeto matemático nas hipóteses definidas



Fonte: Registro escrito de G1

Destacamos na figura 5.29 a parte em que G1 menciona o objeto matemático. Percebemos que os alunos referem-se ao comportamento radioativo e a sua relação com a o conteúdo de função exponencial. Podemos constatar nossa observação com a resposta de G1 à questão 3 do questionário (quadro 5.2), que tinha o objetivo de investigar como os alunos escolheram o conteúdo para desenvolver a atividade, quadro 5.6.

Quadro 5.6: Resposta da questão 3 do questionário

Utilizamos a função exponencial, tendo como base o comportamento da meia vida do iodo, neste caso, lembramos das aulas de química, em que estudamos radiação e utilizamos a função exponencial e o gráfico que fizemos ajudou a visualizar o comportamento exponencial.

Fonte: Registro do grupo A1G1

Outro aspecto importante a ser investigado nessa análise, são as propriedades matemáticas utilizadas no desenvolvimento da atividade que convergiram para a representação final da situação. Os registros produzidos por G1 durante o desenvolvimento da atividade (figura 5.30), indicam os procedimentos dos alunos.

Figura 5.30: Desenvolvimento da atividade 2 por um dos grupos

0h — 90
 8h — 45
 16h — 22,5
 24h — 11,25
 32h — 5,625
 40h — 2,8125

P	c(P)
0	90
1	45 = 90 × 0,5
2	22,5 = 45 × 0,5 = 90 × 0,5 × 0,5 = 90 × 0,5 ²
3	11,25 = 90 × 0,5 ³
4	5,625 = 90 × 0,5 ⁴
5	2,8125 = 90 × 0,5 ⁵

(a)

Para 90 mci

$$c(P) = 90 \cdot 0,5^P$$

$$c(t) = 90 \times 0,5^{\frac{T}{8}}$$

P	t
1	8h
2	16h

$$P = \frac{T}{8}$$

(b)

$c(t) = 1$

$$90 \cdot 0,5^{\frac{T}{8}} = 1$$

$$0,5^{\frac{T}{8}} = \frac{1}{90}$$

$$0,5^{\frac{T}{8}} = 0,01$$

$$\log 0,5^{\frac{T}{8}} = \log 0,01$$

$$\frac{T}{8} \log 0,5 = \log 0,01$$

$$\frac{T}{8} = \frac{\log 0,01}{\log 0,5}$$

$$\frac{T}{8} = 6,6 \quad t = 6,6 \cdot 8 = 52,8 \quad / \quad 52 \text{ minutos e } 48 \text{ minutos}$$

(c)

O tempo igual necessário para que a primeira dose de 90 mci reduza a dose aproximadamente 53 doses.

Fonte: Registro escrito de G1

Analisando as propriedades matemáticas que G1 utilizou, podemos constatar que em (a) o grupo utilizou a recorrência matemática e estabeleceram um padrão, no qual generalizaram para expressão algébrica. Em (b), eles realizaram a troca da variável auxiliar pela variável tempo, adequando o registro algébrico, conforme já discutimos. Em (c), observamos que os alunos resolveram uma equação exponencial e recorreram às propriedades de logaritmo, assim respondendo a situação investigada.

Os demais grupos também realizaram os mesmos movimentos, fizeram um esquema numérico, no qual utilizaram a recorrência matemática, para generalizar a expressão algébrica da função, realizaram a adequação da expressão em relação às variáveis. G2 também resolveu a equação exponencial para que assim conseguissem responder o problema, diferente de G3 que tinha por objetivo descrever matematicamente a situação.

Com esse desenvolvimento, podemos verificar o tipo de registro que os alunos apresentaram na representação final para a situação-problema. Todos os grupos utilizaram o registro algébrico, porém com algumas especificidades próprias de cada um relativas à forma com que escreveram e utilizaram os conceitos matemáticos.

Na figura 5.31, esquematizamos as representações finais de cada grupo, para que possamos observar essas especificidades.

Figura 5.31: Representações finais da situação-problema de cada grupo

$C(t) = 90 \times 0,5^{\frac{t}{2}}$	G1
<p>A concentração em relação ao tempo para qualquer CI</p> $C(t) = CI \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ <p>Para uma dose de 120 mCI:</p> $C(t) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$	G2
<p>C_0 → concentração de iodo</p> $C(t) = \frac{C_0}{2^{\frac{t}{2}}}$	G3

Fonte: Registro escrito dos grupos

Podemos observar que cada grupo escreveu o registro algébrico de acordo com suas especificidades, por exemplo G3 considerou uma concentração C_0 , para representar qualquer concentração de iodo a se adequar a representação algébrica. Já G1 estudou uma concentração estabelecida por eles, o registro algébrico leva em conta essa especificidade, o mesmo com G2, que descreveu matematicamente a situação, também considerando uma

concentração qualquer, que chamam de CI e depois adequam a expressão às especificidades investigadas.

Em relação às nossas observações, julgamos as execuções matemáticas realizadas por cada grupo como corretas. O entendimento prévio do comportamento exponencial ajudou, e muito os alunos no andamento dessa atividade. Conseguimos observar que diferente da atividade 1, na atividade 2, os alunos não precisaram recorrer ao estudo de propriedades do objeto matemático e do conteúdo a ele relacionado.

Foi possível constatar tal entendimento quando perguntamos o que eles tinham aprendido com a atividade (questão 4), muitos deles salientaram a questão do trabalho com a equação exponencial, na qual dois dos grupos recorreram ao logaritmo, mas sem dar ênfase a um novo aprendizado, a uma experiência de verificar a matemática sendo aplicada em outro contexto.

Analisando os registros produzidos pelos alunos, levando em conta não somente o conteúdo envolvido no desenvolvimento da atividade, mas os procedimentos e as propriedades matemáticas por eles executadas, sintetizamos os aspectos matemáticos presentes na resolução dos três grupos durante o desenvolvimento da atividade de modelagem.

Na tentativa de explorar não apenas as singularidades do desenvolvimento dos mesmos, mas também as diferenças de abordagens, conforme apresentamos na tabela 5.3

Tabela 5.3: Aspectos matemáticos identificados na atividade desenvolvida pelos grupos

Aspectos matemáticos	G1	G2	G3
Conteúdo utilizado	Função exponencial	Função exponencial	Função exponencial
Variáveis relacionadas no modelo	Tempo e a concentração de iodo em relação ao tempo	Tempo e a concentração de iodo em relação ao tempo	Tempo e a concentração de iodo em relação ao tempo
Troca da variável auxiliar	Sim	Sim	Sim
Utilizou recorrência para generalizar o modelo	Sim	Sim	Sim
Usou do registro gráfico para entender	Não	Sim	Sim

o comportamento das variáveis				
Adequação a representação final à situação	Sim, quando realiza a mudança da variável período para tempo, e quando consideram que a concentração diminuiria.	Sim, quando realiza a mudança da variável período para tempo, e quando consideram que a concentração diminuiria.	Sim, quando realiza a mudança da variável período para tempo, e quando consideram que a concentração diminuiria.	Sim, quando realiza a mudança da variável período para tempo, e quando consideram que a concentração diminuiria.
Realizou cálculos para além da construção do modelo	Sim	Sim	Sim	Não

Fonte: O autor

Se considerarmos as assertivas de Duval (2012b) de que a compreensão está intimamente ligada aos mecanismos que levam à conceitualização, ou seja, à construção de um conhecimento, no caso às construções matemáticas que desencadeiam o sucesso no desenvolvimento das mais diversas atividades, podemos dizer que os grupos, contemplam essa condição, uma vez que eles realizam construções de estruturas matemáticas que levam ao desenvolvimento correto da atividade.

Com a análise e a construção da tabela 5.3, percebemos que os alunos compreenderam os conceitos matemáticos, por eles requeridos, argumentaram sobre o desenvolvimento e exploraram as propriedades adequadamente, algo que corroborou com as assertivas de Duval (2012b), sobre a compreensão no ponto de vista matemático.

Outro fator que pode ter contribuído para o sucesso dos alunos no desenvolvimento da atividade do segundo momento, se consiste na estrutura da atividade de modelagem, pois seu processo investigativo exigiu dos alunos a capacidade de explorar e manusear diferentes sistemas semióticos, para o estudo da situação-problema.

5.1.2.2 Análise cognitiva da atividade

Para Duval (2011) a atividade matemática não se limita ao uso de um único registro de representação semiótica, segundo o autor “em matemática, não pensamos jamais em um único registro, mas em vários ao mesmo tempo” (p.116).

Essa diversidade de registros e associação deles é fundamental para os mecanismos que levam à compreensão. Nesse sentido, Duval (2012b) se remete ao “fazer matemática”, no sentido de que é necessário ao aluno se apropriar do modo de acesso aos objetos matemáticos, oriundos das atividades desenvolvidas por eles.

Esse acesso se dá por transformações de conversão, em que os registros são transformados mudando o sistema de representação, ou seja, essa transformação faz passagem de um registro em determinado sistema semiótico para outro em um sistema diferente, levando em conta as especificidades do objeto representado.

Nesse sentido, quando descrevemos a resolução da atividade 2, buscamos evidenciar não apenas a classificação de cada registro, mas as transformações que foram realizadas, identificando no conjunto de dados produzidos pelos alunos os tratamentos e as conversões.

Essas conversões são analisadas seguindo os critérios de congruência estabelecidos por Duval (2012a), e também em relação ao níveis de congruência e não-congruência, estabelecidos por Rosa (2008).

Em síntese, durante o desenvolvimento da atividade, “Câncer de Tireóide”, podemos observar cinco conversões realizadas pelos grupos de alunos, conforme mostra a tabela 5.4.

Tabela 5.4: Conversões realizadas pelos grupos na atividade 2

Conversão	Registro de saída	Registro de chegada
1	Língua natural	Algébrico
2	Língua natural	Numérico
3	Numérico	Gráfico
4	Numérico	Algébrico
5	Algébrico	Língua natural

Fonte: o autor

Embora os alunos tenham investigado aspectos diferentes, o número de conversões realizadas por todos foram iguais. A relação entre os registros de saída e entrada também. Verificamos na descrição que G1 e G2, realizaram mais tratamentos que G3.

A conversão 1, exemplificada na figura 5.19 refere-se à definição das variáveis e as hipóteses em que os alunos converteram o registro em língua natural, no caso a situação-problema investigada e as hipóteses, para o registro algébrico. Essa conversão é não-congruente, pois não satisfaz as condições estabelecidas por Duval (2012a). Por exemplo, não possui unicidade semântica terminal, uma vez que os grupos poderiam ter escolhido de forma diferente as variáveis, em vez de ser a concentração em relação ao tempo, poderiam ter estabelecido o tempo em função da concentração.

Como a conversão é não-congruente e não satisfaz as condições de Duval, ela, segundo Rosa (2008), tem um nível de não-congruência alto. Fato esse, segundo a autora, que desencadeia certa dificuldade na realização da conversão, corroborando com as assertivas de Duval (2011b) de que o fenômeno de congruência determina o grau de complexidade ao se realizar uma conversão.

A conversão 2 (figura 5.20), do registro em língua natural (hipóteses) para o numérico, também é não-congruente por não satisfazer nenhuma das três condições de Duval e também tem um nível de não-congruência alto.

Com o desenvolvimento da atividade os alunos realizaram a conversão 3 (figura 5.21) do registro numérico para o registro gráfico. Essa conversão é congruente, pois satisfaz as três condições estabelecidas por Duval.

- Existe correspondência semântica entre as unidades de sentido, uma vez que os valores numéricos correspondem aos pontos marcados nos planos cartesianos, respeitando a disposição das variáveis e dos valores correspondentes.
- Existe unicidade semântica entre os valores no registro numérico e os representados no registro gráfico.
- Existe ordem entre as representações, pois as unidades de sentido presentes em cada uma das representações estão em correspondência.

Logo podemos indicar que a conversão 3 é uma conversão com nível de congruência médio alto, pois os registros, embora sejam ambos monofuncionais, não são de mesma forma, sendo o numérico discursivo e o gráfico não-discursivo. Assim, para realizar essa conversão, os estudantes necessitaram apenas fazer uma codificação entre

os valores relacionados no esquema numérico com os pontos marcados no registro gráfico.

Observando a conversão 4, que podemos visualizar na figura 5.23, do registro numérico para o registro algébrico, essa conversão é congruente com nível de congruência alto, pois satisfaz as três condições estabelecidas por Duval (2012a).

- Existe correspondência semântica entre as unidades de sentido da representação algébrica da função, pois corresponde a uma generalização do registro numérico.
- Existe unicidade semântica já que a generalização é única.
- Existe ordem entre as representações. Para determinar uma lei de formação é necessário que se perceba o comportamento dos dados.

Nesse caso, a conversão aconteceu entre dois registros de mesma natureza e forma, e, além disso, para realizar a conversão, os alunos só precisaram codificar o padrão de comportamento dos dados.

A conversão 5, realizada do registro algébrico para o registro em língua natural, que pode ser verificada nas figuras 5.26 e 5.27, é não-congruente, pois não satisfaz os três critérios de congruência de Duval:

- Não existe unicidade semântica, pois, a resposta em língua natural necessita de uma interpretação que não é contemplada no registro algébrico.
- A correspondência entre as unidades de sentido também não é estabelecida, uma vez que existe várias maneiras de se dar a resposta ao problema, levando em conta o resultado do registro algébrico.
- Também, não existe ordem entre as representações, pois em nenhum aspecto do registro em língua natural, pode-se transparecer o registro algébrico.

Dessa forma, segundo Rosa (2008) a conversão apresenta nível alto de não-congruência, pois não satisfaz as condições estabelecidas por Duval (2012a).

Durante a descrição do desenvolvimento da atividade 2, podemos ter um panorama das atividades cognitivas realizadas pelos alunos. Inicialmente, percebemos duas conversões da língua natural, uma para o registro algébrico e outra para o numérico, conforme descrevemos e analisamos a conversão 1 e 2.

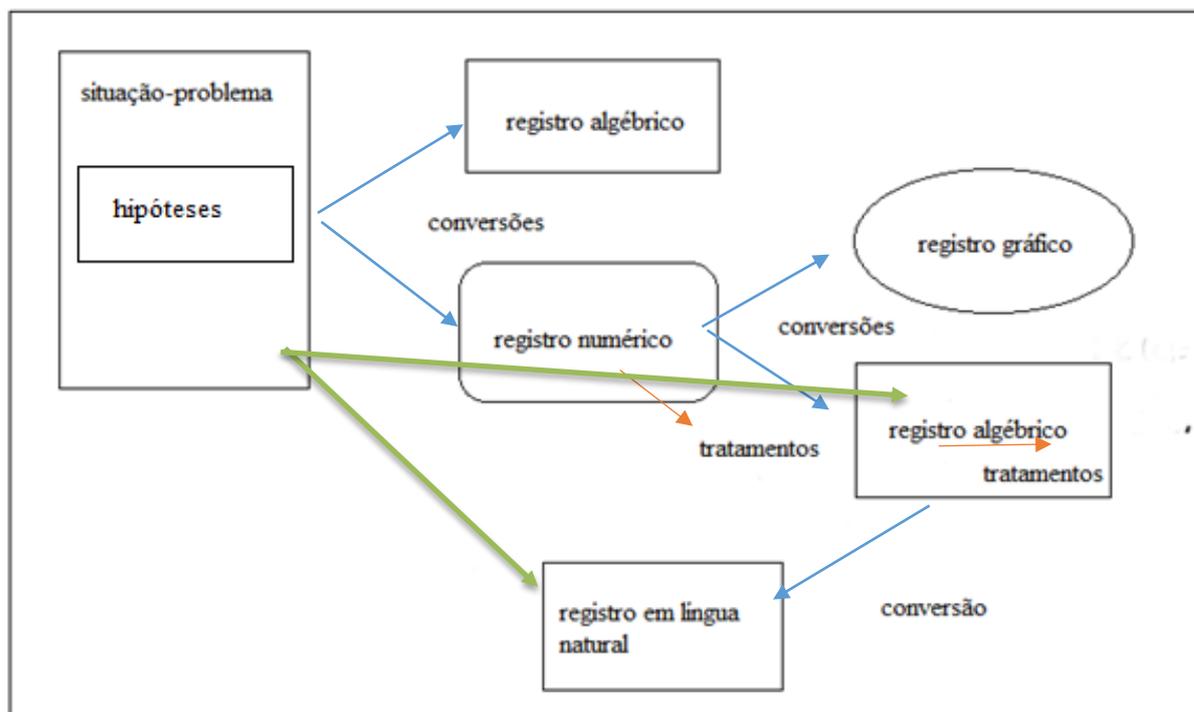
Após realizar essa conversão, os alunos realizaram um tratamento no esquema numérico, mudando a relação para período – concentração, para tempo - concentração. Esse tratamento possibilitou outras duas conversões, uma do registro numérico para o registro gráfico, em que os alunos avaliaram o comportamento do gráfico com as características do objeto função exponencial e outra conversão do mesmo registro numérico para o registro algébrico.

Com o registro algébrico, os alunos desencadearam tratamentos relativos à adequação da expressão em relação à situação-problema investigada, bem como outros tratamentos relativos à obtenção da solução das equações exponenciais por eles construídas. Após realizarem tais tratamentos, os alunos converteram o registro algébrico para o registro em língua natural e responderam o problema investigado.

Essa síntese das atividades cognitivas, leva em consideração o desenvolvimento da atividade pelos três grupos e as transformações de tratamentos e conversões, que incidiram na coordenação dos registros produzidos no desenvolvimento da atividade. A coordenação dos registros pode ser observada na figura 5.32 na qual esquematizamos as ações cognitivas, realizadas pelos grupos, destacando o tipo de registro e as transformações realizadas.

Na figura 5.32, por exemplo, destacamos com uma flecha azul as conversões realizadas, com flechas vermelhas os registros que necessitaram de tratamentos para modificações internas do sistema representacional e com flechas verdes para sinalizar em quais registros ocorreram uma avaliação com a situação investigada.

Figura 5.32: Atividades cognitivas identificadas na atividade 2



Fonte: Registros dos alunos

Realizamos a confecção desse esquema, visando identificar os registros que foram utilizados no desenvolvimento da atividade e como eles se complementaram. Já discutimos no capítulo 2, sobre a questão da atividade de modelagem favorecer a articulação entre diferentes registros de representação semiótica e a sua coordenação.

Duval (2012a) salienta que a coordenação é uma condição fundamental para compreensão. Além disso, podemos verificar que a atividade de modelagem colabora para que essa condição seja satisfeita. Observando o conjunto de dados dos três grupos, constatamos que eles coordenam os registros, na medida em que realizam conversões e tratamentos, para que possam não apenas responder o problema, mas analisá-lo sob uma ótica crítica de quem compreende aquilo que está fazendo e aprende, levando em conta as características do objeto matemático que se quer representar.

A coordenação dos registros sinaliza que os alunos compreenderam os registros produzidos na medida em que avançaram no desenvolvimento da atividade. Com isso, podemos dizer que os alunos compreenderam não apenas o objeto função exponencial, mas a matemática que foi exigida, os conceitos e as propriedades próprias de cada representação.

5.1.3 Atividades do terceiro momento

5.1.3.1 Atividade 3 de G1: “Projeção de concluintes para 2016: Tecnológico x Licenciatura”

Essa atividade foi desenvolvida pelo grupo G1, o qual trouxe o tema a partir de uma discussão realizada na disciplina de Geografia, na qual o professor apresentou um infográfico para discutir a relação do aumento do número de concluintes dos cursos superiores nas suas diferentes habilitações.

Como os alunos julgaram as informações interessantes, pedimos que eles então criassem uma situação-problema para ser investigada. Assim, realizaram pesquisas no laboratório da escola e então montaram a atividade conforme o quadro 5.7.

Quadro 5.7: Atividade de terceiro momento elaborada por G1

Projeção de concluintes para 2016: Tecnológico x Licenciatura

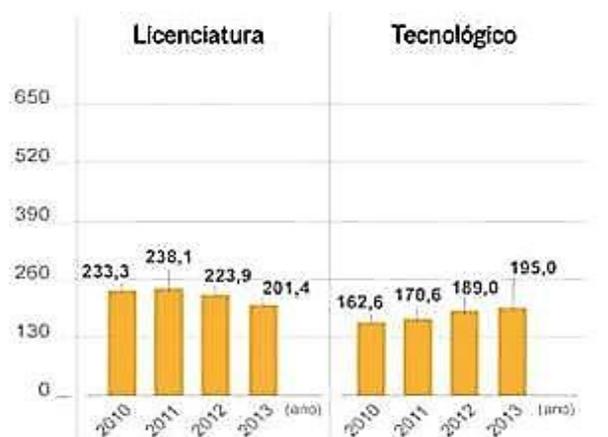
Pesquisa feita pelo MEC divulgada em meados de 2014, apresentou os dados do Censo de Educação Superior, em que a quantidade de concluintes de graduação no Brasil caiu cerca de 5,9% entre os anos de 2012 e 2013. E que em 2013, 991.010 estudantes finalizaram seus cursos, valor esse bem menor que do ano anterior, em que 1.050.413 de pessoas concluíram seus estudos.

O MEC também divulgou que a quantidade de matriculados em cursos superiores de maneira controversa à queda no número de concluintes, cresceu cerca de 2,5% no mesmo período analisado. Segundo os dados divulgados, a maior queda na conclusão das graduações, foi bacharelado (7,1%- com 42 mil pessoas a menos), seguido da licenciatura (11%- com 22 mil concluintes a menos) no período.

Embora existam quedas nos concluintes desses módulos de graduação, uma opção que apresentou aumento considerável no período analisado foi os cursos na área de tecnologia, com 5.927 concluintes a mais que no ano de 2012 (que obteve 194.962 concluintes). Esse aumento de aproximadamente 3% dos concluintes nos cursos da área de tecnológica pode ser justificada pela menor duração dos cursos; de 2 a 3 anos, além de programas educacionais do governo que impulsionaram a ascensão dessa área.

A figura abaixo ilustra a evolução da quantidade de concluintes dos cursos de tecnologia e a diminuição da quantidade de concluintes dos cursos, cuja habilitação é de licenciatura, no período de 2010 até 2013.

Figura: Quantidade de concluintes no Ensino Superior



Fonte: Adaptado de Jornal O Globo.

Fonte: <http://infograficos.oglobo.globo.com/sociedade/educacao/os-numeros-do-censo-da-educacao-superior-2013.html> - acesso em 20 de abril de 2016.

O que vamos investigar:

Levando em conta o comportamento da quantidade de concluintes dos cursos tecnológicos e licenciaturas, qual será a projeção da quantidade de concluintes, respectivamente nessas áreas para esse ano de 2016?

Hipótese:

- Quantidade de concluintes nos cursos de tecnologia aumenta quase que linearmente.
- Quantidade de concluintes nos cursos de licenciatura aumentou até certo ponto e começou a diminuir, de forma não linear.

Varáveis

t – tempo em anos

F(t) – quantidade de concluintes em relação ao tempo

x - períodos de tempo

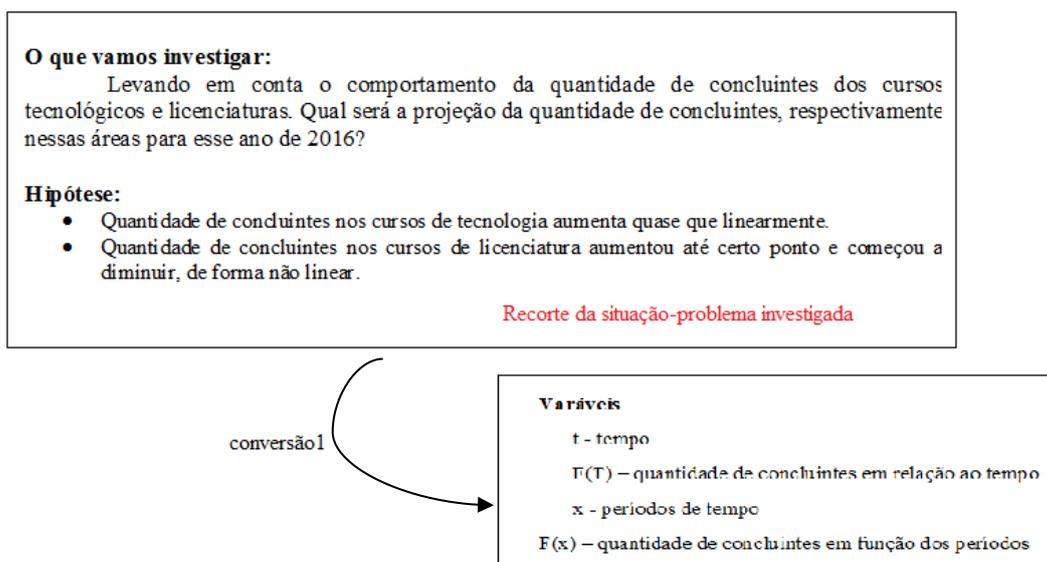
F(x) – quantidade de concluintes em função dos períodos de tempo

Fonte: Registro entregue por G1.

Observamos no quadro 5.7, que os alunos, ao montar a problemática, definiram um problema e realizaram a primeira conversão, quando definiram as variáveis envolvidas na situação. As variáveis definidas caracterizaram a conversão 1, da atividade, em que os alunos converteram o registro em língua natural, multifuncional discursivo, para o registro algébrico monofuncional e não discursivo.

Na figura 5.33 destacamos essa conversão.

Figura 5.33: Conversão do registro em língua natural para o algébrico



Fonte: Registro de G1

Observamos que G1 realiza essa definição com facilidade, pois quando apresentou a sugestão de atividade, já tinha a relação entre as variáveis estabelecidas. Observando as hipóteses que foram definidas, percebemos que os alunos já dão indícios o objeto matemático a ser utilizado em uma das situações a serem investigadas, porém em relação à outra situação, eles não conseguem estipular o objeto matemático apenas observando o padrão dos dados apresentados no registro gráfico da situação-problema.

Então G1 realiza a conversão 2, do registro gráfico monofuncional não-discursivo para o registro numérico monofuncional discursivo, conforme podemos observar na figura 5.34.

Figura 5.34: Conversão do registro gráfico para o registro numérico



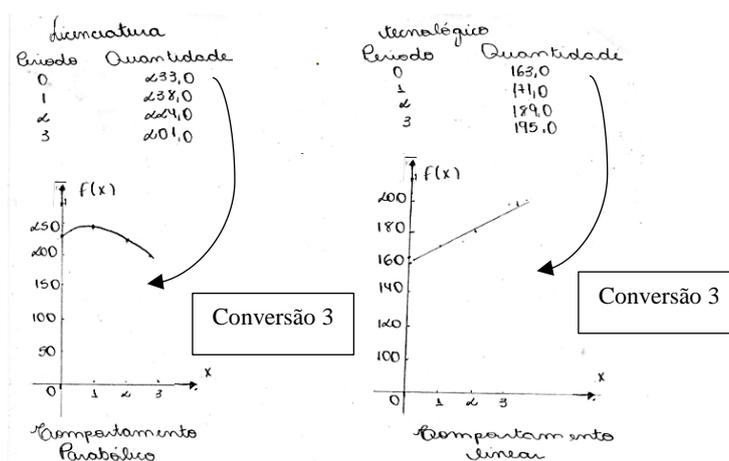
Fonte: Registro escrito de G1

Ao analisar essa conversão, percebemos que os alunos realizaram aproximações nos valores numéricos apresentados no registro gráfico, aproximando-os para valores inteiros convertendo o registro para o registro numérico.

Essa conversão é realizada para poder confirmar o comportamento dos dados. Ao serem questionados sobre como eles definiram os conteúdos matemáticos que utilizaram na atividade, de imediato responderam: “*analisamos o comportamento no gráfico*”, ou seja, os alunos buscaram nos aspectos visuais, associados ao comportamento das variáveis, proximidades com o comportamento de objetos matemáticos conhecidos.

A conversão 3, realizada do registro numérico, monofuncional discursivo para o gráfico também monofuncional, porém não-discursivo, aconteceu para poder identificar o objeto matemático associado ao comportamento da quantidade de concluintes dos cursos de licenciatura. Verificamos essa conversão na figura 5.35.

Figura 5.35: Conversão 3 realizada por G1 na atividade do terceiro momento

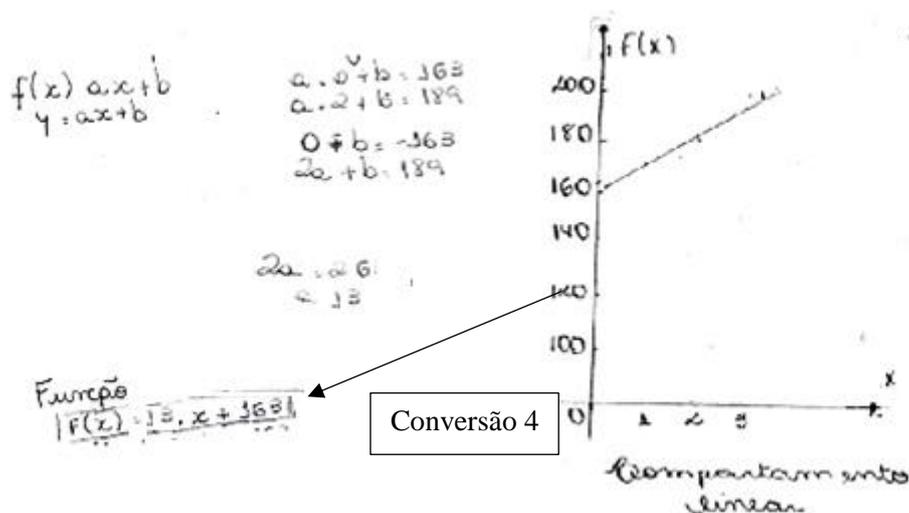
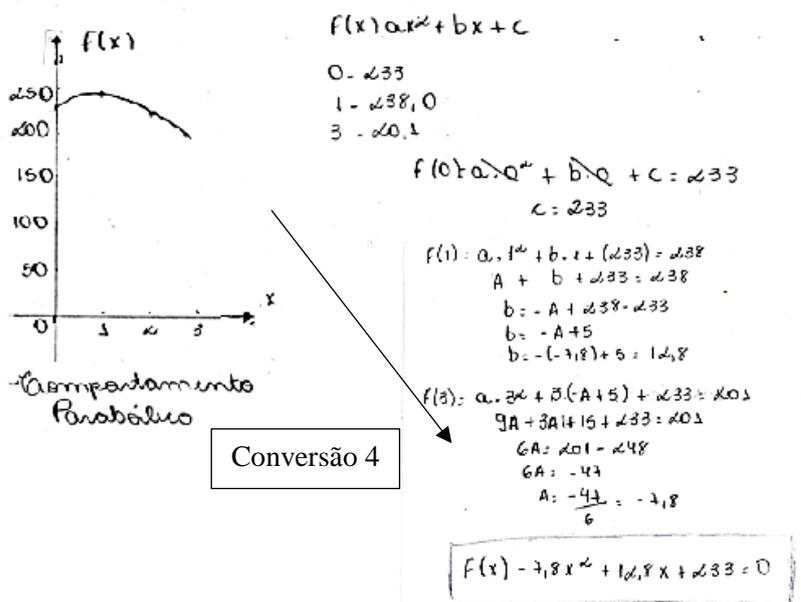


Fonte: Registro escrito de G1

Realizada a conversão 3, para o registro gráfico, os alunos confirmaram os comportamentos em ambas as situações e partiram para a construção do modelo fazendo uma nova conversão.

A conversão 4 do registro gráfico para o registro algébrico, exige dos alunos que mobilizem um registro monofuncional não-discursivo, convertendo-o para um registro monofuncional discursivo, conforme ilustra a figura 5.36.

Figura 5.36: Conversão do registro gráfico para o algébrico



Fonte: Registro escrito de G1

Observamos que a conversão 4 necessita da realização de tratamentos no registro algébrico, para que consigam determinar os coeficientes das expressões algébricas, no caso, das funções do primeiro e segundo grau.

Chegando nessas expressões algébricas, os alunos realizaram transformações de tratamentos para resolver o problema, conforme podemos verificar na figura 5.37.

Figura 5.37: Tratamentos realizados para resolver o problema

2016 - 2010 = 6

Ano de 2016

Tecnologias
 $f(x) = 13x + 163$
 $f(x) = 13 \cdot 6 + 163$
 $f(x) = 241 \text{ mil}$

Licenciatura
 $f(x) = -7,8x^2 + 12,8x + 233$
 $f(x) = -7,8 \cdot 6^2 + 12,8 \cdot 6 + 233$
 $f(x) = -7,8 \cdot 36 + 12,8 \cdot 6 + 233$
 $f(x) = -280,8 + 76,8 + 233$
 $f(x) = 29$

Fonte: Registro escrito de G1.

Feita a resolução do problema, os alunos realizaram a conversão 5, partindo do registro algébrico, monofuncional discursivo, para o registro em língua natural, multifuncional discursivo. Essa conversão levou em conta o cálculo da imagem da função, conforme esquematizado na figura 5.38

Figura 5.38: Conversão 5 de G1 na atividade do terceiro momento

2016 - 2010 = 6

Ano de 2016

Tecnologias
 $f(x) = 13x + 163$
 $f(x) = 13 \cdot 6 + 163$
 $f(x) = 241 \text{ mil}$

Licenciatura
 $f(x) = -7,8x^2 + 12,8x + 233$
 $f(x) = -7,8 \cdot 6^2 + 12,8 \cdot 6 + 233$
 $f(x) = -7,8 \cdot 36 + 12,8 \cdot 6 + 233$
 $f(x) = -280,8 + 76,8 + 233$
 $f(x) = 29$

Conversão 5

A quantidade de condutores para o ano de 2016 nos cursos de tecnologia será de 241 mil e de licenciatura 29 mil

Fonte: Registro escrito de G1

Observamos que na atividade desenvolvida, inteiramente por G1, a validação do modelo, ou até mesmo a análise dele em relação à situação-problema não foi realizada. Durante a comunicação dos dados, momento em que os alunos do grupo apresentaram a atividade desenvolvida, abordamos essa questão, entretanto, o fato de analisarmos a evolução, assim como foi feita pelo grupo, tem por objetivo observar como os alunos conseguiram ou não se tornarem mais autônomos durante o processo de modelagem.

Ressaltamos, porém, que este não foi o caso do grupo G1, que embora tenhamos orientado os alunos a analisarem as expressões, eles não a fizeram, talvez por incompreensão das instruções, na qual pedimos que eles estimassem um intervalo de domínio, o qual poderia ser, por exemplo, de 0 a 6 períodos, algo que adequaria as funções à situação.

5.2.3.1.1 Análise matemática da atividade

Visando fazer uma análise matemática da atividade, levando em conta o conteúdo e as propriedades matemáticas que G1 desencadeou ao resolver a atividade do terceiro momento, buscamos nos aportes teóricos e metodológicos de Duval (2012b), os aspectos a serem observados durante o desenvolvimento da atividade.

Para o autor, a compreensão sob o ponto de vista matemático reside no conteúdo, ou mais especificamente, na forma com que se manipula e se constroem estruturas, utilizando propriedades matemáticas específicas de cada sistema semiótico utilizado. Sendo assim, a compreensão reside no processo de conceitualização.

Para isso, buscamos observar na atividade desenvolvida por G1, as quatro questões presentes no quadro 5.2.

Na primeira questão buscamos indícios da escolha e definição das variáveis definição. Já a segunda questão, diz respeito a qual conteúdo matemático foi abordado na atividade. Observamos que G1 abordou dois: “função do primeiro grau” e “função do segundo grau”. A escolha desses conteúdos se deu na análise do comportamento dos pontos no plano cartesiano.

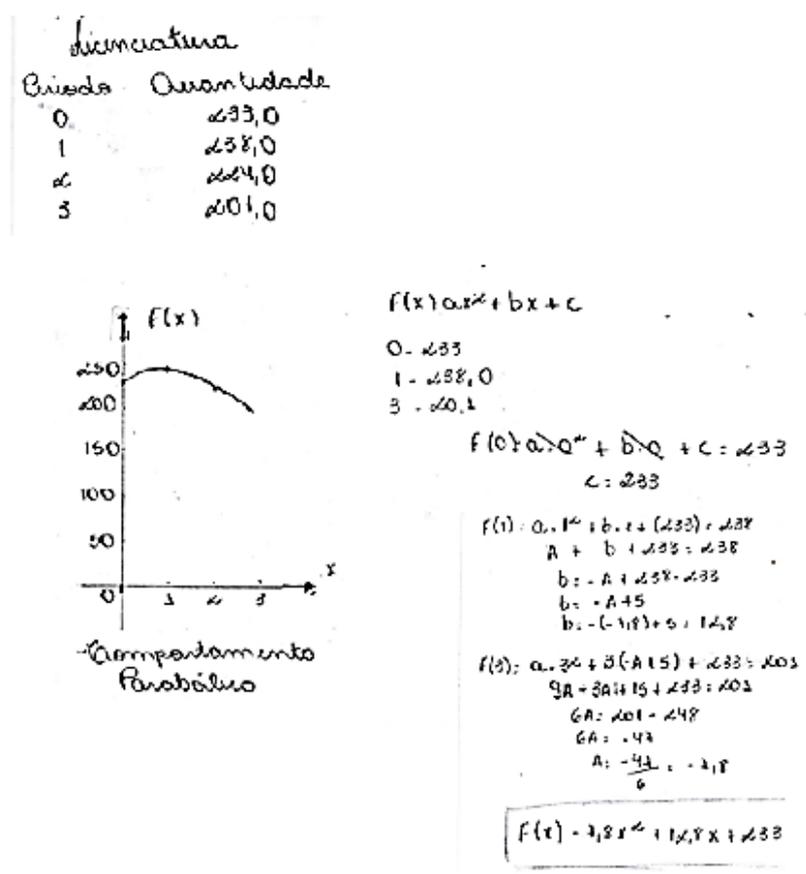
Julgamos essa escolha correta, pois os alunos buscaram ajustar uma função a um conjunto de dados, e, levando em conta a pouca experiência com atividades de modelagem as escolhas foram bem fundamentadas.

O segundo aspecto, diz respeito a uma avaliação dos procedimentos que foram utilizados para construir a representação final. Os alunos reconheceram, no comportamento dos dados, o objeto matemático e utilizaram o esquema numérico para construir gráficos associados às situações. Feito isso, observaram o comportamento de

uma reta em um conjunto de dados e o outro similar a uma parábola. Foi então, por meio dos pares ordenados, que os alunos determinaram expressões algébricas relacionadas com as situações.

Essa execução foi realizada adequadamente pelos alunos de G1, pois utilizaram substituições para encontrar os valores dos coeficiente, como podemos ver na figura 5.39. Na figura exemplificamos como se deu a construção da função do segundo grau, associada ao comportamento da quantidade de concluintes de licenciatura.

Figura 5.39: Execução matemática para encontrar a representação final para os concluintes de licenciatura



Fonte: Registro escrito de G1

O terceiro aspecto a se verificar, sob o ponto de vista matemático, é o tipo de registro que os alunos utilizaram para a representação final. Como podemos ver na figura 5.39, a representação final foi apresentada no registro algébrico.

Entretanto, foi possível observar que as representações algébricas não foram analisadas levando em conta à situação investigada, ou seja, os alunos não realizaram uma avaliação do modelo com a situação-problema investigada.

Eles poderiam ter restringido o domínio da função, levando em conta, por exemplo, o intervalo de $0 \leq x \leq 6$, com x pertencente ao conjunto dos números, ou até mesmo $2010 \leq t \leq 2016$, com t pertencente ao conjunto dos números aos reais. Esse detalhe demonstra uma incompreensão dos alunos em relação ao estudo do domínio das respectivas expressões algébricas das funções por eles construídas.

O último aspecto matemático, diz respeito a uma avaliação da execução matemática, se ela foi ou não correta. Podemos observar que, em se tratando de responder o problema, os alunos responderam adequadamente, porém sentimos falta de um cuidado com a expressão algébrica e a situação investigada, os alunos não relacionaram tais aspectos.

Ao desenvolver uma atividade de modelagem matemática, os alunos deveriam se atentar às especificidades da situação-problema investigada, ou seja, os alunos de G1, ao desenvolverem essa atividade, não validaram o modelo, comprometendo o estudo da aplicação do mesmo para com atividade.

Buscamos com a análise matemática, explorar os aspectos matemáticos na resolução da atividade e com base no que foi analisado construímos a tabela 5.5, que sintetiza os aspectos matemáticos, que julgamos serem essenciais para o desenvolvimento da atividade.

Tabela 5.5: Aspectos matemáticos identificados no desenvolvimento da atividade 3 desenvolvida por G1.

Aspectos matemáticos	G1
Conteúdo utilizado	Função do primeiro grau e função do segundo grau
Variáveis relacionadas no modelo	Períodos de tempo e quantidade de concluintes em relação a esses períodos
Troca da variável auxiliar	Não
Substituição de variáveis para encontrar o modelo	Sim
Utilizou o registro gráfico para entender o	Sim

Comportamento das variáveis	
Adequação da representação final à situação	Não
Realizou cálculos para além da construção do modelo	Sim

Fonte: O autor

Podemos observar que o grupo G1 conceituou alguns aspectos das funções por eles utilizadas, não se atentando ao estudo do domínio, por exemplo. Entretanto, puderam explorar diferentes características do objeto matemático, que influenciaram no desenvolvimento da atividade.

Percebemos que os alunos exploraram conceitos e propriedades presentes nos diferentes sistemas semióticos mobilizados, isso é um indicativo que eles conceitualizaram esses aspectos e compreenderam a matemática por eles utilizada.

5.2.3.1.2 Análise cognitiva da atividade

Visando obter indícios de compreensão sob o ponto de vista cognitivo, analisamos as produções dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Para essa análise dos registros de representação semiótica, levamos em conta as transformações de conversão e o fenômeno de congruência, estabelecidos por Duval (2012a), e complementando esse aporte metodológico, buscamos incrementar nossa análise utilizando as classificações dos níveis de congruência e não-congruência nas conversões.

Durante a descrição tomamos o cuidado de elencar as conversões realizadas pelos alunos, durante o desenvolvimento da atividade. Observamos que G1 realiza cinco conversões, conforme organizamos na tabela 5.6.

Tabela 5.6: Conversões realizadas por G1 na atividade do terceiro momento

Conversão	Registro de saída	Registro de chegada
1	Língua natural	Algébrico
2	Figural	Numérico
3	Numérico	Gráfico
4	Gráfico	Algébrico
5	Algébrico	Língua natural

Fonte: o autor

A conversão 1 e 5 são não-congruentes e não satisfazem os critérios estabelecidos por Duval (2012a). E segundo Rosa (2008), por não satisfazerem nenhum desses critérios, essas conversões tem nível alto de não-congruência.

A conversão 2, do registro gráfico para o registro algébrico, também é não-congruente, pois não satisfaz a um dos critérios de congruência de Duval. A conversão não estabelece ordem entre as representações, pois ao realizar a conversão, os alunos realizam aproximações nos valores numéricos, o que implicaria na conversão, no sentido contrário, caracterizar um outro gráfico, diferente daquele referente ao registro de saída. Como a conversão não satisfaz apenas um dos critérios, ela pode ser classificada com nível de não-congruência baixo.

As conversões 3 e 4 são ambas congruentes, satisfazendo os três critérios de congruência de Duval. Sendo essas conversões congruentes, observamos que os registros são todos monofuncionais, porém os registros algébricos numéricos têm forma discursiva diferente da forma do registro gráfico, que é não-discursiva, fato esse que nos leva a classificar a conversão com nível médio de não-congruência.

Observamos que a incidência de conversões não-congruentes na atividade de G1, foi maior, e, levando em conta as assertivas de Duval (2011b), de que o fenômeno de congruência determina a dificuldade na execução das conversões, constatamos que talvez possa ser esse um dos fatores de G1 não realizar a atividade completamente correta.

Observando essas conversões, podemos ver como se deu as atividades cognitivas dos alunos, durante o desenvolvimento dessa atividade. Assim, G1 realiza duas

conversões para transitar da linguagem materna para a matemática, correspondendo às conversões 1 e 2. Realizada essas conversões, os alunos realizam mais duas, as conversões 3 e 4.

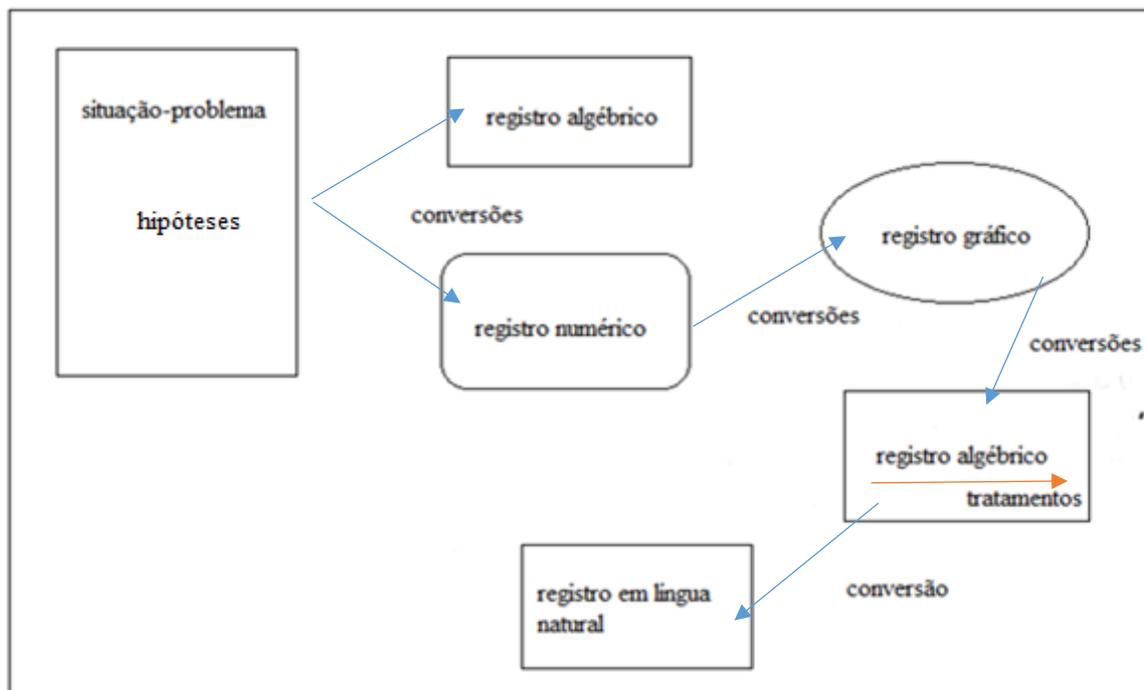
A conversão 3 serviu para que eles pudessem confirmar o objeto matemático a ser referenciado na atividade e a conversão 4 consiste na qual os alunos fizeram a construção do modelo, por meio de tratamentos e construíram o modelo matemático, para resolver o problema. Com o modelo construído, os alunos realizaram mais tratamentos no registro algébrico, e, por fim, converteram e responderam o problema fazendo o uso de um registro em língua natural.

Com essa descrição, foi possível ter noção das atividades cognitivas que G1 despreendeu durante o desenvolvimento da atividade. A forma com que essas atividades foram se complementando e convergindo para a resolução do problema, nos leva a inferir que a coordenação dos registros de representação semiótica mobilizados durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem é um fator essencial para a compreensão.

Assim como pontua Duval (2011b), a coordenação é uma atividade que requer pelo menos a mobilização de duas representações e possibilidade de trocar de representação a todo momento. Essa troca das representações é oportunizada por conversões, que podem oscilar de dificuldade dependendo de sua classificação e nível.

Na figura 5.40, sistematizamos as ações cognitivas de G1 durante o desenvolvimento da atividade do terceiro momento.

Figura 5.40: Atividades cognitivas de G1 na atividade do terceiro momento



Fonte: O autor.

Conforme discutimos, as flechas azuis representam as conversões na ordem em que os alunos descreveram a atividade. A flecha vermelha representa os tratamentos realizados, para construção do modelo e resolução do problema. A ausência de flechas verdes indicam que os alunos não avaliaram as representações construídas com a situação-problema investigada.

Esse fato não descarta a coordenação dos registros e a compreensão dos alunos em relação ao objeto matemático, porém podemos observar que a falta de validação implicou em uma compreensão parcial do fenômeno, mas não da matemática utilizada por eles.

5.2.3.2 Atividade 3 de G2: “Mortes por Drogas”

Esta atividade foi desenvolvida pelo grupo G2, cuja temática diz respeito ao aumento do número de mortos em consequência do uso de drogas. A temática investigada pelos alunos foi sugerida pelo aluno A2G2, o qual faz parte da pastoral da juventude da

cidade, em que o colégio está situado e faz todo um trabalho de conscientização dos jovens em relação ao uso de drogas.

Tendo discutido o tema da atividade, os membros de G1 coletaram informações para construção da situação-problema. Realizaram uma pesquisa sobre o assunto e o estudo com relação a esse tema e organizaram em um texto um conjunto de informações, que consideraram pertinentes para a construção da situação-problema (quadro 5.8).

Quadro 5.8: Atividade do terceiro momento de G2

Atividade: Mortes por Drogas

Droga é toda e qualquer substância, natural ou sintética que, introduzida no organismo, modifica suas funções. O termo droga envolve os analgésicos, estimulantes, alucinógenos, tranquilizantes e barbitúricos, além do álcool e substâncias voláteis. As psicotrópicas são as drogas que têm tropismo e afetam o Sistema Nervoso Central, modificando as atividades psíquicas e o comportamento. Essas drogas podem ser absorvidas de várias formas: por injeção, por inalação, via oral, injeção intravenosa ou aplicada via retal.

O uso de drogas vem tomando proporções cada vez maiores no cenário social, este problema não está restrito apenas as classes de baixa renda, sendo assim, abrange todas as classes sociais do país. Já se tornou comum avistar usuários de drogas em diversos locais públicos e por isso é um problema que preocupa e atinge cada vez mais as famílias brasileiras.

O esforço concentrado no combate às drogas é recente e os números são prova dessa realidade: os índices pularam de 17,3 mil para 22,1 mil, segundo o Departamento de Informática do Sistema Único de Saúde, o DATASUS.

O gráfico abaixo ilustra o número de mortes ocasionadas pelo uso de drogas, no Brasil dos anos de 2003 até 2008. Dados esses que ilustram um crescimento na mortalidade, devido ao uso.

Figura: Mortes por Drogas no país

Ano	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Mortes	17,3	18,2	19,0	20,1	21,0	22,1

Fonte: Adaptada de Gazeta do povo http://www.gazetadopovo.com.br/ra/mega/Pub/GP/p3/2011/12/16/VidaCidadania/Imagens/info_droga_s.jpg

Problema:
Com base nas informações presentes na situação, qual é a previsão de mortes em função do uso de drogas para o presente ano de 2016?

Hipóteses:
H1. Os dados de 2003 até 2008 tem aproximadamente a mesma variação.
H2. A variabilidade dos dados se assemelha a uma variação linear crescente.

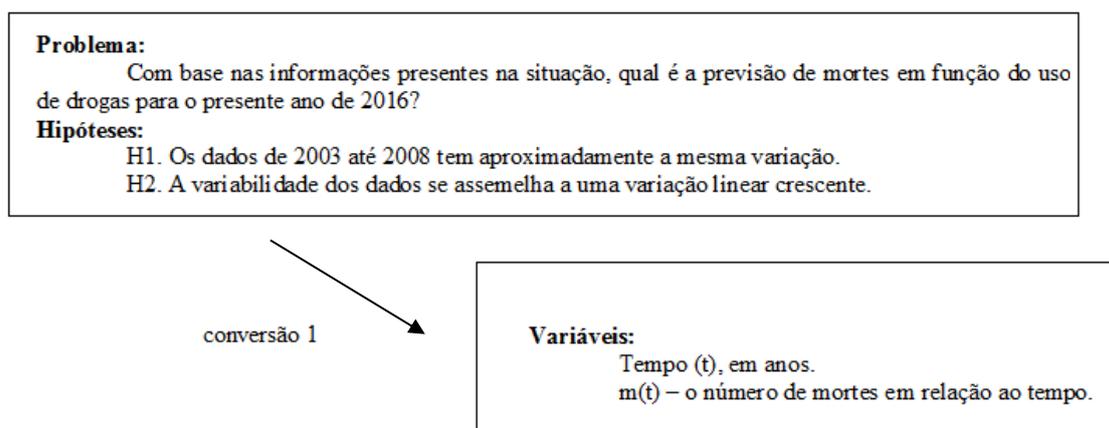
Variáveis:
Tempo (t), em anos.
m(t) – o número de mortes em relação ao tempo.

Resolução:

Fonte: Registro de G2

Iniciamos a descrição da atividade elaborada e desenvolvida por G2, identificando as transformações realizadas e os tipos de registros mobilizados. Podemos iniciar com a primeira conversão realizada por G2, a conversão 1, que pode ser observada na figura 5.41, na qual os alunos definem as variáveis. Essa conversão marca a transição do registro em língua natural, multifuncional discursivo para o registro algébrico de natureza monofuncional discursivo.

Figura 5.41: Conversão do registro em língua natural para registro algébrico



Fonte: Registro de G2

Na figura 5.41 podemos verificar as hipóteses, que foram consideradas relevantes para o desenvolvimento da atividade e nelas constatamos a referência ao objeto matemático que da atividade emergiu.

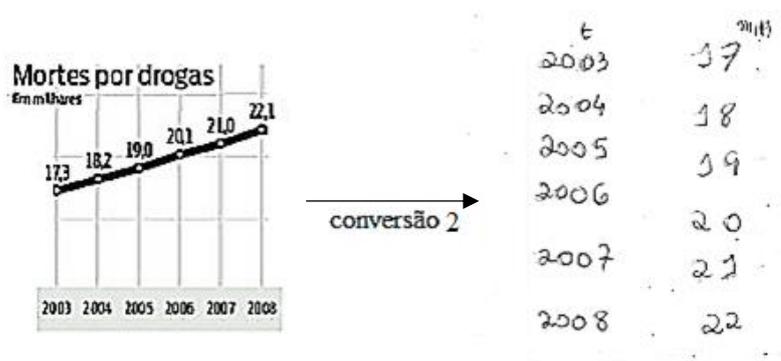
Quando questionamos os alunos, em relação ao que levaram em conta para definir o conteúdo utilizado na atividade, eles relataram que observaram o registro gráfico, pois a forma com que ele foi construído se aproxima de um padrão linear. Assim, perceberam que se fizessem uma aproximação dos valores nele apresentado o padrão linear era confirmado.

Percebemos que os alunos estabeleceram, a partir dos aspectos visuais do registro gráfico, o objeto matemático “função do primeiro grau” e registram essa percepção nas hipóteses presentes no quadro 5.8.

Dessa forma, os alunos se propuseram a investigar qual seria o número de mortes ocasionadas pelo uso de drogas no ano de 2016 e, para responder esse problema, mobilizaram diferentes registros de representação semiótica.

Dando início ao desenvolvimento matemático da situação, G2 realizou a conversão 2, do registro gráfico monofuncional não-discursivo para o registro numérico, também monofuncional só que discursivo. Na figura 5.42, apresentamos essa conversão realizada por G2.

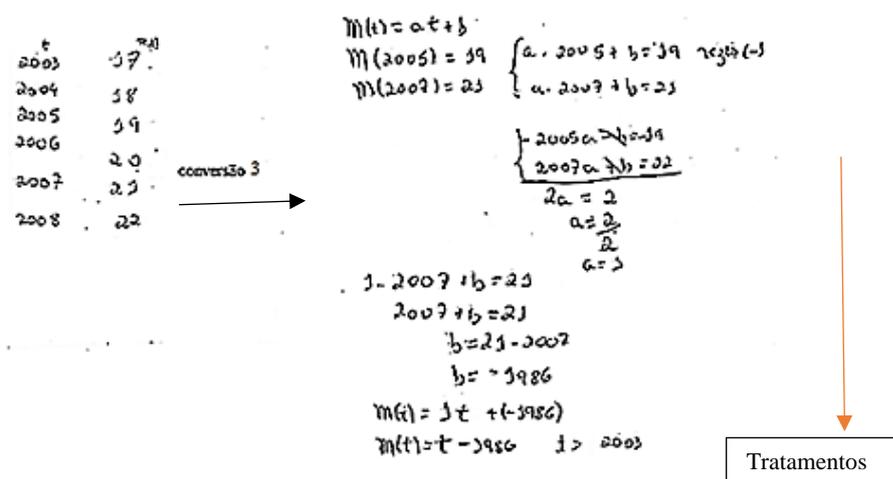
Figura 5.42: Conversão 2 realizada por G2 na atividade do terceiro momento



Fonte: Registro de G2

Após essa conversão os alunos deram início à construção do modelo algébrico para a situação. Sendo assim, os alunos realizaram a conversão 3, partindo do registro numérico, monofuncional discursivo, para o registro algébrico monofuncional e discursivo, conforme consta na figura 5.43.

Figura 5.43: Conversão 3 realizada por G2 na atividade do terceiro momento



Fonte: Registro escrito de G2

Nessa passagem, do registro numérico para o algébrico, observamos que os alunos escolheram dois valores, associando as variáveis t e m(t). Dê posse desses valores, eles

construíram algebricamente um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, para encontrar os coeficientes associados à função do primeiro grau. Para encontrar esses coeficientes, determinaram um sistema linear de duas equações e utilizaram o método da adição juntamente com os resultados, assim chegaram na expressão algébrica para a função.

Com o registro algébrico, os alunos realizaram tratamentos para estipular o número de mortes para o ano de 2016. Para isso, calcularam a imagem da função. Realizado esse procedimento, os alunos realizaram a conversão 4, do registro algébrico para o registro em língua natural, o primeiro monofuncional discursivo e o segundo multifuncional não-discursivo, respondendo o problema proposto na atividade.

Na figura 5.44, podemos observar os tratamentos realizados que levaram à conversão do registro algébrico para o registro em língua natural.

Figura 5.44: Conversão 4 de G2 na atividade do terceiro momento

$M(2016) = 3 \cdot 2016 + (-3986)$
 $M(2016) = 2016 - 3986$
 $M(2036) = 30$

$$\begin{array}{r} 2036 \\ - 3986 \\ \hline 0030 \end{array}$$

conversão 4 → A previsão de mortes por uso de drogas para 2016 segundo nosso modelo será de 30 mil pessoas

Fonte: Registro de G2

Essa conversão determina a finalização da atividade de G2, que relatou interessante poder observar fenômenos por meio da matemática. O grupo ainda salientou que desenvolver essa atividade, inteiramente, desde a construção da situação-problema, até a resolução do problema proposto, não só faz com que eles falem sobre o fenômeno com mais propriedade, como também lhes dá uma dimensão da aplicabilidade da matemática para ajudar entender essas situações.

5.2.3.2.1 Análise matemática da atividade

Como já discutimos durante a análise de outras atividades, na análise matemática buscamos observar as propriedades e os conteúdos que os alunos utilizam e como os utilizaram no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Essa análise está embasada nas assertivas de Duval (2012b), que explicita os aspectos sob o ponto de vista matemático, que levam o aluno a compreender a matemática envolvida no desenvolvimento de diferentes atividades.

O primeiro aspecto que julgamos necessário observar, no desenvolvimento da matemática pelo grupo G2, foi qual conteúdo utilizado durante o desenvolvimento da atividade. Podemos constatar que os alunos utilizaram função do primeiro grau e perceberam a relação com esse conteúdo durante a construção da situação-problema, quando utilizaram o registro gráfico para exemplificar as informações, estabelecendo nas hipóteses qual objeto matemático seria referenciado durante a atividade.

O segundo aspecto diz respeito à identificação do tipo de registro que os alunos utilizaram para a representação final da atividade. Observamos no desenvolvimento da atividade que os alunos utilizaram o registro algébrico para descrever a situação investigada. Na figura 5.40, podemos observar as transformações que os alunos fizeram para chegar na representação final da situação.

O terceiro aspecto diz respeito à avaliação dos procedimentos que os alunos realizaram para construir a representação final da atividade. Na figura 5.45, separamos os registros produzidos pelo grupo para que possamos avaliar esses procedimentos.

Figura 5.45: Procedimentos para construção da representação final de G2

$$m(t) = at + b$$

$$\begin{aligned} m(2005) &= 19 \\ m(2007) &= 21 \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{cases} a \cdot 2005 + b = 19 & \text{vezes (-1)} \\ a \cdot 2007 + b = 21 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -2005a - b &= -19 \\ 2007a + b &= 21 \\ \hline 2a &= 2 \\ a &= \frac{2}{2} \\ a &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2007 + b &= 21 \\ 2007 + b &= 21 \\ b &= 21 - 2007 \\ b &= -1986 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(t) &= 1t + (-1986) \\ m(t) &= t - 1986 \quad t > 1986 \end{aligned}$$

(c)

Fonte: registro escrito de G2

Observamos três caminhos na resolução de G2. Primeiro o grupo associa dois valores, destacando as variáveis tempo e número de mortes, isso verificamos em (a). Após isso, em (b), podemos verificar a construção de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, em que as incógnitas eram os coeficientes numéricos da representação final que os alunos queriam chegar. Ainda em (b) podemos constatar que os alunos resolveram esse sistema utilizando o método da adição chegando na representação final, como podemos observar em (c).

O último aspecto por nós considerado para análise matemática, diz respeito a avaliação do desenvolvimento da atividade. Observamos que os alunos resolveram corretamente a atividade, inicialmente exploraram as variáveis e as relacionaram, utilizaram o registro gráfico, presente na situação-problema, para desencadear a construção do modelo algébrico que configurou a representação final da situação. A construção do modelo foi feita utilizando as propriedades matemáticas corretamente e os alunos foram capazes de justificar e argumentar sobre essas propriedades utilizadas, quando apresentaram os resultados obtidos. Por último, a resposta ao problema é feita corretamente levando em conta a situação investigada.

Para resumir nossas observações, organizamos a tabela 5.7 levando em conta os aspectos matemáticos, que observamos durante o desenvolvimento da atividade.

Tabela 5.7: Aspectos matemáticos identificados na atividade de G2

Aspectos matemáticos	G2
Conteúdo utilizado	Função do primeiro grau
Variáveis relacionadas pelo modelo	Tempo e número de morte em relação ao tempo
Definição de variável auxiliar	Não
Utilização de método para encontrar o modelo	Resolveu sistema de equações lineares de duas incógnitas e duas equações pelo método adição
Entendimento da situação a partir de um registro específico	O registro gráfico
Realização de cálculos corretos para responder o problema	Sim
A expressão algébrica leva em consideração as especificidades da situação investigada	Sim

Fonte: O autor

Realizada essa análise podemos dizer que os aspectos matemáticos necessários, para que G2 obtivesse sucesso no desenvolvimento da atividade foram compreendidos. Os alunos utilizaram propriedades corretas de forma gradativa, conforme a necessidade de cada tipo de registro utilizado.

Em nossa análise buscamos observar os aspectos matemáticos que foram essenciais para o desenvolvimento da atividade, juntamente com a avaliação desses aspectos e constatamos que o grupo G2 agiu de forma consciente, em relação conteúdo utilizado, aos procedimentos que foram necessários para o desenvolvimento da atividade e para responder o problema proposto.

5.2.3.2.2 Análise cognitiva da atividade

Com o foco de discutir sobre os aspectos presentes nas transformações dos registros produzidos pelos alunos, que indicam a compreensão sob o ponto de vista cognitivo, fazemos a análise da atividade de modelagem de G2.

Nessa análise buscamos discutir três aspectos. Inicialmente classificamos as conversões, segundo o fenômeno de congruência, analisando os três critérios estabelecidos por Duval (2012a). Juntamente com a análise do fenômeno de congruência, buscamos discutir e classificar essas conversões em relação ao nível de congruência ou não-congruência das conversões, seguindo as indicações de Rosa (2008).

E, por fim, observamos as ações cognitivas que a atividade demandou, assim, visamos inferir sobre a coordenação desses registros, levando em conta as transformações que foram realizadas e a sua complementariedade durante o desenvolvimento da atividade.

Na tabela 5.8, organizamos as conversões realizadas por G2, durante o desenvolvimento da atividade. Podemos identificar que os alunos realizaram quatro conversões.

Tabela 5.8: Conversões realizadas por G2 na atividade do terceiro momento

Conversão	Registro de saída	Registro de chegada
1	Língua natural	Algébrico
2	Gráfico	Numérico
3	Numérico	Algébrico
4	Algébrico	Língua natural

Fonte: o autor

As conversões 1 e 4, são não-congruentes, pois não satisfazem os critérios estabelecidos por Duval (2012a), e, conseqüentemente, são classificadas com nível de não-congruência alto, segundo Rosa (2008), já que nenhuma das condições de Duval foram estabelecidas.

A conversão 2, do registro gráfico para o registro numérico, é não-congruente, porém ela não satisfaz apenas o critério em relação à ordem das unidades de sentido das representações, pois a conversão inversa do registro numérico para o gráfico não resultaria no gráfico presente na situação-problema. Como a conversão não satisfaz

apenas um dos critérios de Duval, temos uma conversão com nível baixo de não-congruência.

A conversão 3, que podemos visualizar na figura 5.43, do registro numérico para o registro algébrico, é congruente com nível de congruência alto, pois satisfaz as três condições estabelecidas por Duval (2012a).

- Existe correspondência semântica entre as unidades de sentido da representação algébrica da função, pois corresponde a uma generalização do registro numérico.
- Existe unicidade semântica, já que a generalização é única.
- Existe ordem entre as representações. Para descobrir uma lei de formação é necessário que se perceba o comportamento dos dados.

Nesse caso, a conversão acontece entre dois registros de mesma natureza e forma, além disso, para realizar a conversão, os alunos só precisam realizar uma codificação entre os pares ordenados com a representação algébrica associada.

Observamos que assim como aconteceu com G1, as conversões realizadas por G2 foram, em sua maioria, não-congruentes, algo que nos leva à refletir sobre as assertivas de Duval (2011b) de que a dificuldade na realização das conversões reside no fenômeno de congruência das conversões.

Observando a forma com que G2 foi realizando as transformações, durante o desenvolvimento da atividade, podemos perceber que eles realizaram duas conversões, que partiram da situação-problema investigada, presente no registro em língua natural e no registro gráfico, que são convertidos para o registro algébrico e para o registro numérico, respectivamente.

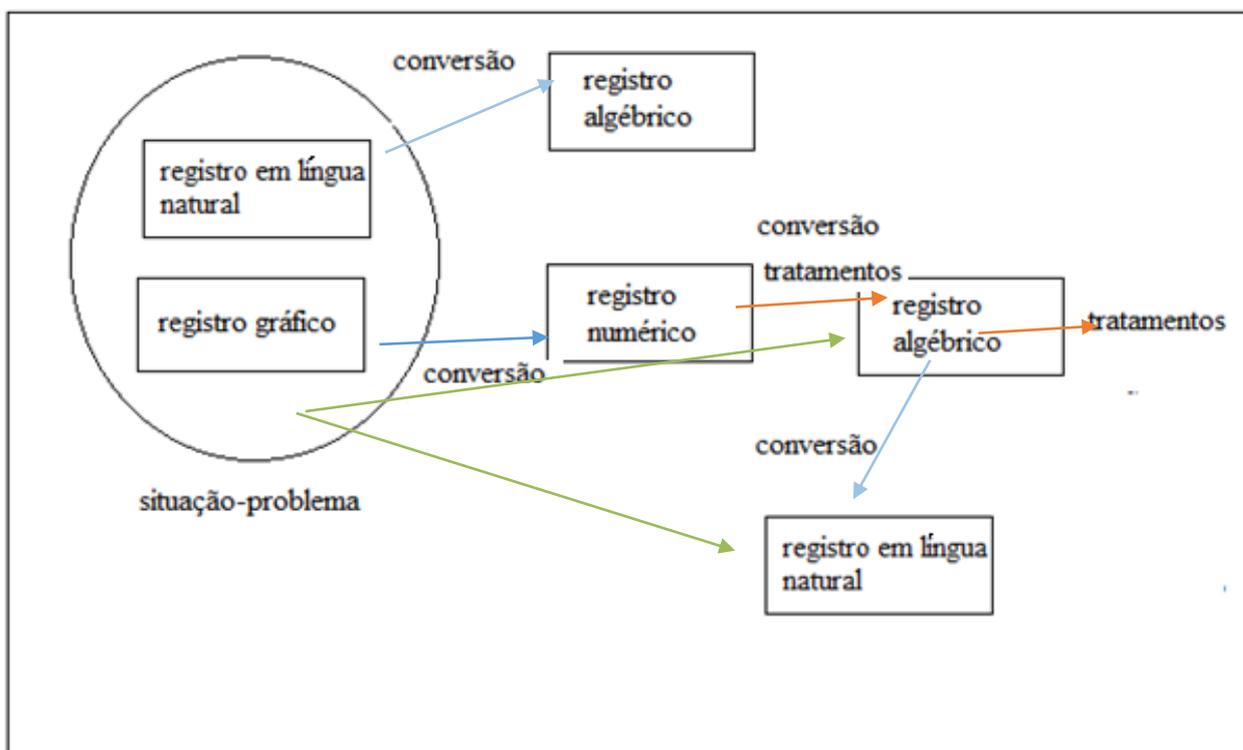
Feito isso, G2 realizou a conversão do registro numérico para o algébrico e nesse registro são desencadeados tratamentos para que os alunos possam construir o modelo algébrico para a situação. Além disso, com a realização de novos tratamentos G2 converte o registro algébrico para o registro em língua natural, em que responde o problema da atividade de modelagem.

Observamos com essa breve descrição, como as transformações realizadas pelos alunos foram se complementando, na medida em que novas características do objeto

matemático “função do primeiro grau” eram necessárias, isso incide na coordenação dos registros de representação semióticos produzidos pelo grupo G2.

Na figura 5.46, buscamos esquematizar as atividades cognitivas requeridas na atividade, destacando com flechas azuis as conversões, com flechas vermelhas os tratamentos e com flechas verdes os registros que foram avaliados em relação a situação-problema investigada.

Figura 5.46: Atividades cognitivas do grupo G2 na atividade do terceiro momento



Fonte: O autor

Observamos que os alunos compreenderam o objeto matemático, na medida em transformaram os registros de representação, de acordo com as especificidades requeridas de cada sistema semiótico utilizado. Esse aspecto é essencial para a coordenação dos registros produzidos, ou seja, ao coordenarem os registros de representação, os alunos puderam não apenas aproveitar as características próprias de cada registro, como também observar que na medida em que uma representação não dava conta das especificidades da situação investigada, conversões e tratamentos eram exigidos, para que novas representações pudessem ser acessadas e dar continuação à atividade.

5.2 Discussão dos Resultados

Frente ao nosso objetivo de investigar como se dá a compreensão da matemática e do problema no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, procuramos nesta seção ampliar nossa análise local, relacionando os aspectos observados com o quadro teórico estabelecido.

Considerando todas as atividades descritas e analisadas na seção 5.1, verificamos que durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática os alunos tiveram que acessar e utilizar diferentes registros de representação semiótica, que oportunizaram o acesso aos diferentes aspectos do objeto representado e o uso de propriedades matemáticas, conforme buscavam responder o problema investigado.

Esses registros produzidos durante o desenvolvimento da atividade de modelagem são fundamentais para que possamos inferir sobre o processo de compreensão dos alunos, seja a compreensão do ponto de vista matemático, seja do ponto de vista cognitivo.

Levando em conta esses dois pontos de vista, descritos por Duval (2012b), que ao analisar as atividades desenvolvidas pelos grupos, buscamos fragmentar a análise em duas partes: uma feita sob o ponto de vista matemático, que denominamos análise matemática da atividade, cujo foco foi discutir os procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos; outra sob o ponto de vista cognitivo, que denominamos análise cognitiva da atividade, cujo foco estava nas transformações dos registros realizados pelos alunos, com ênfase nas conversões, principalmente na classificação, levando em conta o fenômeno de congruência e seus níveis e na coordenação dos registros durante o desenvolvimento da atividade.

Para essa discussão dos resultados obtidos centramo-nos no desenvolvimento das atividades de modelagem, ou seja, buscamos discutir nessa seção as características desse tipo de atividade que potencializaram o processo de compreensão, sob os dois pontos de vista.

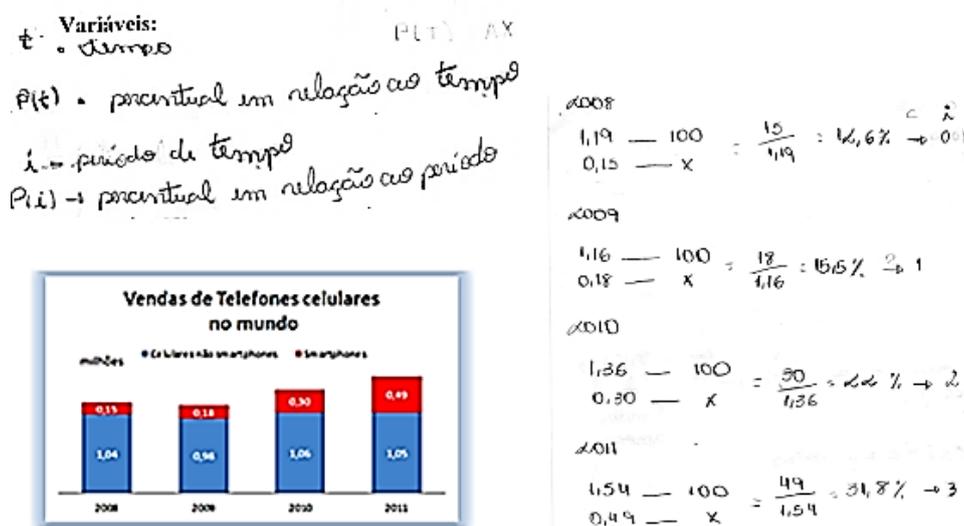
Primeiramente destacamos que na análise matemática, segundo Duval (2012b), a compreensão está associada à utilização correta das propriedades matemáticas, durante o processo de resolução, no nosso caso durante o processo de desenvolvimento da atividade.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) caracterizam um conjunto de fases que os alunos podem percorrer, durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Essas fases, segundo os autores, sinalizam certos procedimentos conforme apresentado no capítulo 2 e que podemos destacar juntamente com os aspectos matemáticos que foram observados.

Tomando a fase de inteiração, a qual consiste em obter informações sobre a situação, observamos que nessa fase que os alunos identificam e relacionam as variáveis. Esse aspecto é fundamental para o desenvolvimento da atividade, pois identificar quais são as variáveis envolvidas na situação-problema investigada é um primeiro aspecto que julgamos essencial para a compreensão do problema. Nessa fase, observamos que os alunos utilizaram registros em língua natural, quando essencialmente definiram as hipóteses.

A segunda fase é a matematização, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), nessa fase ocorre a transição entre a linguagem materna e a linguagem matemática. Na atividade 1, por exemplo, essa fase corresponde à escrita algébrica das variáveis e a obtenção dos percentuais das vendas de smartphones, conforme a figura 5.47.

Figura 5.47: Registros utilizados na fase de matematização



Fonte: Registro escrito de G1

Durante o desenvolvimento das atividades, a resolução consistiu na busca do modelo para responder o problema. Nessa fase, os alunos utilizaram as propriedades específicas de cada sistema semiótico utilizado.

A construção algébrica do modelo foi um aspecto comum em todas as atividades desenvolvidas e o domínio das propriedades matemáticas específicas de cada conteúdo utilizado foi essencial para o sucesso no desenvolvimento da atividade.

Como vimos na atividade 1, os grupos precisaram dominar uma técnica específica para encontrar o modelo algébrico, já nas atividades de terceiro momento de G1 e G2, novamente essas propriedades foram requeridas e as aproximações entre os procedimentos utilizados para desenvolver as atividades pode ter sido um fator que ajudou no desenvolvimento correto por parte dos alunos.

Na atividade 2 os alunos já precisaram de um conjunto de propriedades diferentes, tais como associar padrões e saber generalizar, para a construção do modelo algébrico. Na figura 5.48, podemos observar como o grupo G2 desenvolve matematicamente a atividade.

Figura 5.48: Desenvolvimento matemático do modelo algébrico na atividade 2

$$\begin{aligned}
 &0 - 120 \\
 &1 - 60 = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\
 &2 - 30 = 60 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 &3 - 15 = 30 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
 &4 - 7,5 = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4
 \end{aligned}
 \longrightarrow C(p) = 120 \left(\frac{1}{2}\right)^p$$

Fonte: Registro escrito de G2

Podemos observar como o grupo explora o registro numérico, por meio da recorrência matemática, e chega à generalização algébrica que determina o modelo da situação investigada. Esses aspectos foram comuns em todas as atividades desenvolvidas. Durante a fase de resolução, os alunos buscaram a representação algébrica para a situação e para isso recorreram às propriedades matemáticas específicas de cada tipo de registro mobilizado.

Assim, podemos constatar indícios de que o domínio dessas propriedades foi essencial para que os alunos compreendessem a matemática durante o desenvolvimento da atividade, ou seja, a matemática utilizada em certa medida é compreendida, quando os alunos utilizam propriedades específicas de cada sistema semiótico para que esses estabeleçam ou dêem suporte para que possam estabelecer o modelo para a situação-problema investigada.

Por último em relação à interpretação do resultado e a validação, salientamos que para Almeida, Silva e Vertuan (2012), essa etapa visa a capacidade de aplicar o modelo obtido e avaliar sua construção.

Podemos constatar que em todas as atividades, os alunos conseguiram aplicar o modelo para responder o problema proposto, utilizaram nessa fase propriedades específicas de cada representação, respeitando as regras de cada conteúdo utilizado e conseguiram responder os problemas propostos.

A avaliação do modelo foi algo essencial para o desenvolvimento das atividades, e julgamos essencial para a compreensão do problema. Ou seja, a compreensão do problema não reside apenas na sua resposta, mas sim na forma com que o modelo representa as especificidades da situação investigada.

Dessa forma, podemos sintetizar o processo de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, segundo uma análise matemática da atividade conforme a tabela 5.9.

Tabela 5.9: Aspectos matemáticos de cada fase de uma atividade de modelagem

Fase da atividade de modelagem	Aspectos matemáticos identificados
Inteiração	Informações sobre a situação investigada;
Matematização	Representação das variáveis; Organização das informações na linguagem matemática. Uso de gráficos ou registros numéricos.
Resolução	Obtenção do modelo; Uso de propriedades específicas de cada tipo de registro mobilizado.
Interpretação dos resultados e validação	Resolução do problema; Uso de propriedades específicas de cada tipo de representação; Adequação do modelo

Fonte: Registros dos grupos de alunos

Além da análise matemática das atividades, discutimos também os aspectos cognitivos que foram requeridos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem. Para isso, buscamos nos aportes metodológicos de Duval (2011a, 2012b), consistência para nossa análise com relação à compreensão sob um ponto de vista cognitivo.

Para Duval (2012b), a compreensão sob o ponto de vista cognitivo reside no modo de acesso aos objetos matemáticos, realizado por meio dos registros de representação semiótica. Segundo o autor, a compreensão, nesse ponto de vista, está associada à capacidade de reconhecer o objeto matemático em diferentes representações.

Daí a necessidade da transformação de conversão e sua análise, pois é essa transformação que permite a mudança entre sistemas semióticos diferentes, nos quais podemos acessar diferentes aspectos dos objetos matemáticos representados.

Para Duval (2011b), a conversão é a transformação que desencadeia os mecanismos necessários para a compreensão. O autor enfatiza que a conversão entre registros constitui uma condição essencial para a compreensão do objeto matemático. Segundo ele “[...] do ponto de vista cognitivo, é a conversão que [...] aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão” (Duval, 2011b, p. 16).

Com o desenvolvimento das atividades, podemos constatar que o sucesso dos alunos ao desenvolverem as atividades esteve relacionado com a capacidade dos mesmos em utilizar diferentes registros de representação semiótica e convertê-los, conforme a necessidade representacional do objeto matemático, em cada fase do desenvolvimento da atividade.

Para análise das conversões nos baseamos em dois aspectos. O primeiro diz respeito à análise do fenômeno de congruência nas conversões, conforme indicado por Duval (2012a), juntamente com níveis de congruências e não-congruência, conforme caracterizados por Rosa (2008). O segundo diz respeito à coordenação dos registros mobilizados, pois, para Duval (2011b), a “compreensão requer a coordenação dos diferentes registros” (p. 29), ou seja, reconhecer em diferentes registros de sistemas semióticos diferentes do mesmo objeto matemático.

Assim, ressaltamos que é com base nesses aspectos que analisamos os registros produzidos pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem.

Observamos na passagem da fase de inteiração para a fase de matematização, a conversão entre informações contidas na situação-problema em sua maioria em língua natural para a algébrica. Essa conversão não-congruente com nível alto de não-congruência apareceu em todas as atividades desenvolvidas.

Na fase de matematização os alunos exploraram aspectos das representações para reconhecer o objeto matemático. Para isso utilizaram representações auxiliares que foram convertidas para a representação que configurou o modelo matemático. Nessa fase o uso do registro numérico e do registro gráfico foram essenciais.

Na fase de resolução podemos constatar a conversão de um registro auxiliar para um registro principal, por exemplo, na atividade 2, em que houve a conversão do registro numérico para o algébrico.

Nessa fase foi possível observar a incidência de conversões congruentes, como por exemplo, a conversão citada da atividade 2, figura 5.23, do registro numérico, monofuncional discursivo, para o algébrico, também monofuncional discursivo, que satisfazem as três condições estabelecidas por Duval (2012a) e caracterizam uma conversão congruente com nível alto conforme estabelece Rosa (2008).

Na fase de interpretação dos resultados e validação predominou a conversão do registro algébrico para o registro em língua natural; essa conversão é não-congruente, segundo Duval (2012a), com nível alto conforme define Rosa (2008), esteve presente em todas as atividades.

A interpretação dos resultados, em sua maioria, aconteceu conforme os alunos analisaram o modelo matemático construído, ou seja, conforme eles validavam o modelo, no caso do modelo algébrico, aconteceu conforme os alunos exploravam características da situação-problema e as representavam no registro.

Na figura 5.49 esquematizamos as conversões entre as diferentes fases no conjunto de registros de G2 na atividade do terceiro momento.

Sinalizamos com setas azuis as conversões conforme elas se deram no desenvolvimento da atividade.

Figura 5.49: Fases da modelagem e as transformações de conversão

Em síntese, podemos destacar alguns aspectos do ponto de vista cognitivo que colaboraram para a compreensão da matemática e do problema no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

A compreensão da matemática pode ser associada à compreensão do objeto matemático, ou seja, podemos constatar que na medida em que o objeto matemático é compreendido, a matemática, relacionada aos aspectos específicos de cada representação, também é, ou seja, a matemática é compreendida quando os alunos não apenas convertem os registros para ter acesso aos aspectos específicos do objeto matemático, e sim quando essas transformações se complementam e os alunos coordenam os registros por eles utilizados.

A compreensão do problema está associada à conversão do registro algébrico para o registro em língua natural, em que a resposta do problema é dada, mas também quando os alunos validam o modelo e realizam modificações nos registros de forma que eles atendam as especificidades da situação-problema investigada.

Podemos observar que esses aspectos, sejam eles matemáticos ou cognitivos, que desencadeiam a compreensão da matemática puderam ser potencializados com o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o início desse trabalho nossos esforços se voltaram para encontrar elementos que evidenciassem como se dá a compreensão da matemática e do problema no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Utilizamos a modelagem matemática como alternativa pedagógica e percebemos que conseguimos contribuir com a construção de um ambiente de aprendizagem em que as discussões e as investigações foram essenciais para o sucesso do desenvolvimento da atividade bem como para identificação de elementos que sinalizam a compreensão dos alunos. Investigar uma situação-problema e não diretamente um problema causou certa estranheza aos alunos. Comentários do tipo, “não sei por onde começar”, “isso é complicado demais”, eram frequentes, principalmente durante o desenvolvimento das atividades do primeiro momento.

Familiarizando esses alunos com a modelagem de forma gradativa, conforme os momentos de familiarização, esses comentários deram lugar a comentários do tipo, “temos que definir hipóteses”, “o gráfico pode nos dar noção do comportamento dos dados”, ou seja, houve uma mudança no entendimento dos alunos e na forma com que eles encaravam essas atividades.

O aspecto fundamental nas atividades de modelagem e que compuseram nosso corpus de análise foram os registros produzidos pelos alunos. Esses registros configuraram registros de representação semiótica que foram essenciais para analisar o processo de compreensão no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

O uso de diferentes registros foi um fator essencial para a compreensão dos alunos, mas não apenas isso, pois percebemos que com as atividades de modelagem, os alunos mais do que simplesmente utilizar diferentes registros, relacionaram estes registros ao buscarem uma solução para a situação-problema em estudo.

Dessa forma, para a realização dessa pesquisa, analisamos os registros mobilizados pelos alunos do segundo ano do Ensino Médio em atividades de modelagem matemática, sob dois pontos de vista diferentes, o matemático e o cognitivo.

Para Duval (2012b) o ponto de vista com que analisamos as produções dos alunos influencia na maneira com que as recolhemos, ou seja, para o autor a escolha de uma teoria e o método de coleta estão intimamente ligadas ao ponto de vista que buscamos para analisar.

Sendo assim, nos pautamos nas indicações de Duval (2012b), no que tangem à caracterização de compreensão em atividades matemáticas. Para o autor, do ponto de vista matemático a compreensão reside nas propriedades matemáticas utilizadas, mais especificamente, na forma com que os alunos utilizam e argumentam sobre os conceitos matemáticos utilizados.

Com base nesse ponto de vista fizemos a análise matemática das atividades desenvolvidas pelos alunos. Nessas análises buscamos observar, nos registros dos alunos, se o desenvolvimento foi correto ou não, se utilizam as propriedades matemáticas adequadamente, se essas propriedades permitiram a conceitualização do objeto matemático.

Para isso discutimos os aspectos sobre as quatro questões definidas na sessão 3.4 do capítulo 3, presentes no quadro 3.2.

Para a primeira questão destinamos a identificação do conteúdo utilizado na atividade, ou seja, com essa questão buscamos observar como os alunos identificaram os conteúdos utilizados nas atividades. Assim, pudemos observar que os alunos se apoiaram em algum tipo de especificidade do conteúdo para determiná-lo. Por exemplo, da atividade 3 os alunos do grupo G1 observaram a linearidade no registro gráfico e já identificaram o conteúdo de função de primeiro grau. Na atividade 2 em que o fato de comentarem sobre a meia vida do iodo-131 desencadeou o uso de uma função exponencial.

Dessa forma, o conteúdo a ser utilizado em uma atividade de modelagem emerge de alguma característica observada nos registros mobilizados e demanda dos alunos certo domínio das características específicas de cada conteúdo.

É aqui que as fases de inteiração e matematização foram essenciais para que os alunos realizassem essa primeira etapa do desenvolvimento da atividade. O ato de inteirar-se da situação ajuda no entendimento do fenômeno investigado e das variáveis envolvidas, aspecto fundamental para a compreensão do problema. Na fase de

matematização esse reconhecimento do conteúdo é realizado na linguagem matemática, utilizando registros algébricos, numéricos e gráficos.

A segunda questão diz respeito à construção do modelo matemático, ou seja, quais propriedades matemáticas são utilizadas pelos alunos para a construção da representação final da atividade, e, em seguida, na terceira questão em qual sistema semiótico essa representação é apresentada.

Exploramos nesta pesquisa, situações que convergiram para o estudo de funções, sejam elas de primeiro ou segundo grau e função exponencial. Além disso, observamos durante a fase de resolução o uso de propriedades matemáticas específicas ao registro algébrico como por exemplo, na atividade 1, em que os alunos usam a escrita de um sistema linear e o resolveram por meio de um método específico.

Foi possível também relacionar as transformações de tratamento com essas propriedades. Assim constatamos que em sua maioria a utilização das propriedades específicas de cada conteúdo visava o domínio das transformações internas dessas representações.

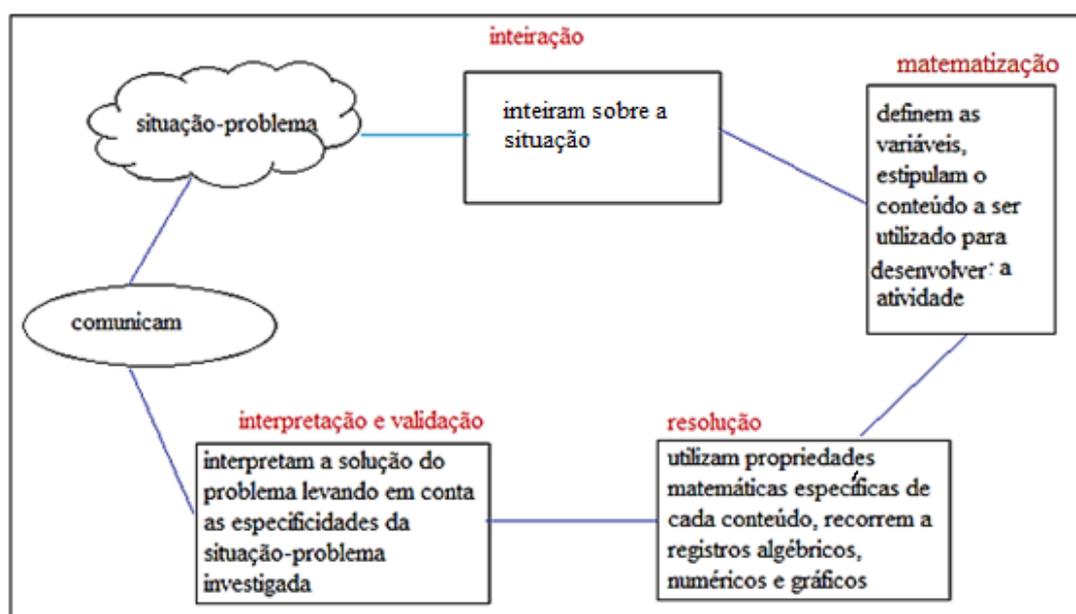
A última questão condiz a uma avaliação em termos de certo ou errado da atividade. Não tivemos nessa pesquisa uma situação que foi desenvolvida de forma errada. No entanto, na atividade 3 de G1 os alunos não tiveram cuidado para relacionar a representação final com a situação-problema investigada.

Daí a necessidade de estimular nos alunos a validação dos modelos construídos. No que se refere à última fase da modelagem percebemos que os alunos conseguiram, em todas as atividades, realizar interpretações dos resultados obtidos para transpô-los para a linguagem natural.

Os questionários respondidos pelos alunos contribuíram, não apenas para auxiliar a descrição das atividades, mas para perceber se os alunos ao descreverem o processo de resolução conseguiram argumentar sobre os aspectos matemáticos em suas atividades. Observamos que as atividades colaboraram para que os alunos se tornasse conscientes dos procedimentos utilizados, permitindo que os mesmos identificassem aquilo que precisa ser complementado ou adquirido para dar continuidade ao desenvolvimento da atividade.

Na figura 6.1 sintetizamos os aspectos identificados no desenvolvimento das atividades que contribuíram para compreensão no ponto de vista matemático, ou seja, os aspectos essenciais para a conceitualização da matemática durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Figura 6.1: Aspectos que contribuíram para compreensão sob ponto de vista matemático nas atividades de modelagem



Fonte: O autor

Na análise cognitiva buscamos nas conversões e na coordenação dos registros indícios da compreensão do objeto matemático no desenvolvimento de atividades de modelagem.

Para isso analisamos as conversões, mais especificamente, o fenômeno de congruência, conforme estabelecido por Duval (2012a) e na caracterização feita por Rosa (2008). Duval (2011b) pondera que uma conversão pode ser mais complexa ou menos complexa de acordo com esse fenômeno.

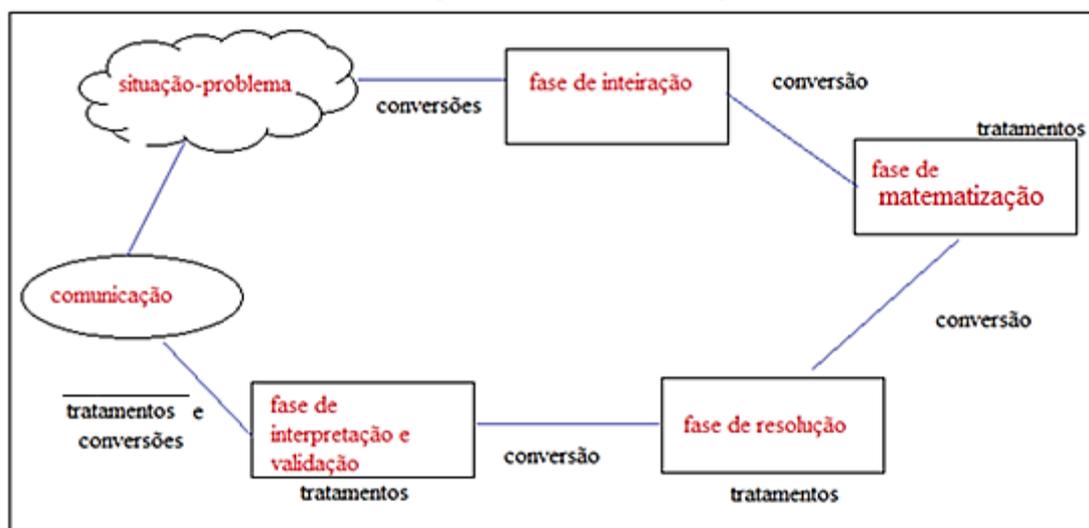
Observamos que durante o desenvolvimento das atividades de modelagem a utilização de diferentes registros foi, em sua maioria, mediada por conversões não-congruentes com nível médio ou alto nas fases de inteiração e interpretação dos resultados, uma vez que os alunos precisavam converter registros de naturezas ou forma diferentes. Já na fase de matematização para a resolução as conversões realizadas foram, em sua maioria, congruentes com nível alto, pois os alunos realizaram, na maioria das

atividades, a conversão do registro numérico para o algébrico, com ressalva na atividade 1, em que a conversão aconteceu do registro gráfico para o numérico, ambos monofuncionais de forma discursivas.

Outro aspecto que investigamos nas atividades desenvolvidas pelos alunos foi a coordenação dos registros mobilizados, realizada desde o início do projeto por G1 e G2. Observamos que esta coordenação possibilitou aos alunos a compreensão dos objetos matemáticos e contribuiu também para que os alunos adquirissem familiaridade com os conteúdos contemplados, explorando aspectos específicos de cada sistema semiótico.

Na figura 6.2 esquematizamos elementos da análise cognitiva dos alunos durante o desenvolvimento das atividades.

Figura 6.2: A análise cognitiva



Fonte: o autor

Os tratamentos e as conversões identificadas, entretanto, foram fortalecidos com a coordenação dos diferentes registros produzidos ou acionados.

Verificamos que, de modo geral, as atividades de modelagem viabilizaram a utilização e exploração de diferentes registros de representação semiótica, sejam eles essenciais para o trabalho matemático, ou até mesmo em relação aos processos de tratamento, de conversão e de coordenação entre registros.

Dessa forma, constatamos que a compreensão e o desenvolvimento de atividades de modelagem não acontecem dissociado a relação entre aspectos matemáticos e cognitivos. A compreensão do objeto matemático é fundamentada para que, em relação

aos aspectos a serem representados, propriedades matemáticas específicas sejam utilizadas.

Dessa forma, a compreensão da matemática se dá na medida em que o aluno compreende o objeto matemático e relaciona por meio de representações e transformações as propriedades específicas de cada conteúdo, sendo consciente dessa utilização.

No que diz respeito a como se dá a compreensão do problema em atividades de modelagem matemática destacamos dois aspectos. O primeiro diz respeito ao processo de modelagem e a utilização de representações adequadas às fases que o aluno perpassa, ou seja, o processo de modelagem é fundamental para que o aluno obtenha a compreensão do problema contido na atividade.

Outro aspecto diz respeito à utilização dos registros, do ponto de vista matemático. Podemos destacar a identificação e definição das variáveis, que diz respeito à forma com que o aluno entende e concebe o problema a ser resolvido e a adequação da representação final para responder o problema. Essa análise acerca da linguagem matemática, podendo evidenciar os aspectos do fenômeno investigado, ajuda no desenvolvimento da atividade.

Dessa forma, podemos inferir que a compreensão do problema se dá na medida em que nas atividades de modelagem oferecem aos alunos condições de explorarem a matemática relacionando-a com a situação-problema investigada. Seja na fase inicial, quando os alunos precisam reconhecer os aspectos matemáticos, ou na fase final, quando os alunos necessitam adequar a linguagem matemática com o problema proposto e respondê-lo.

Embora tenhamos realizado a pesquisa com alunos do Ensino Médio, os aspectos metodológicos apontados pela teoria dos registros de representação semiótica a fim de inferir sobre como se dá o processo de compreensão em modelagem matemática pode ser direcionado para todos os níveis de escolaridade.

Como possibilidade de continuação para essa pesquisa, destacamos que pode ser realizado um estudo sobre as influências dos tratamentos para a compreensão da matemática, ou até mesmo um estudo sobre a compreensão em diferentes níveis, articulando o Ensino Fundamental, Médio e Superior, em torno de quais são as dificuldades representacionais específicas de cada nível de escolaridade.

Esperamos que as reflexões que apresentamos bem como as observações possam contribuir para o estudo da modelagem matemática e dos registros de representação semiótica. Assim, concluímos com a expectativa de que esta pesquisa seja uma oportunidade para professores pensarem sobre a importância da compreensão e de como o professor pode introduzir nas aulas atividades que, em alguma medida, potencializem a compreensão dos estudantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. (2005) Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência & Educação*, v. 11, n. 3, p. 483-497.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na educação básica*. São Paulo. Editora Contexto. 2012.
- ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre “como fazer” modelagem matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. *Práticas de modelagem matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas*. Londrina, Editora Eduel, p. 19 - 43. 2011. fonte
- ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na Educação Matemática*. In: ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. *Modelagem Matemática em foco*. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna Ltda, p. 1 – 19. 2014.
- ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Registros de representação semiótica em atividades de Modelagem matemática: uma categorização das práticas dos alunos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. N.25. P. 109 – 125. 2011.
- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. DIAS, Michele Regiane. Um Estudo sobre o Uso da modelagem matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. *Bolema*, n. 22, pp 19- 35. Rio Claro: 2004.
- BARBOSA, J. C. Uma perspectiva de modelagem matemática. In: III Conferência Nacional Sobre Modelagem Matemática, Piracicaba, 2003.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino- Aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 3. ed. 3 reimpr. São Paulo, Editora Contexto 2011.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo. Editora Contexto. 2009.
- BRANDT, C. F. Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração decimal. Tese (Doutorado). 246 f. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina. 2005.
- BRANDT, C. F. Um ensaio sobre a complexidade, a criatividade e as representações semióticas em uma atividade de modelagem matemática. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. *Modelagem matemática: uma perspectiva para a educação básica*. Ponta Grossa. Editora UEPG, 2010, v. ÚNICO, p. 127-146.
- COLOMBO, J.A.A.; FLORES, C.R.; MORETTI, M.T. Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática. *Educ. Mat. Pesqui.*, São Paulo, v. 9, n. 2, p. 181-203, 2007.
- COSTA, L. M.; SILVA, K. A. P. IDEB DO ENSINO MÉDIO: UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA. In: XII Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2014. Campo Mourão – PR. Disponível em

http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/RELATOS/titulos/REL_A23.PDF capturado em 05/04/2015.

COSTA. L. M.; ALMEIDA. L. M. W.; SILVA. K. A. P.; PASSOS. M. M. A Conversão Entre Diferentes Registros De Representação Semiótica Em Uma Atividade De Modelagem Matemática. Vidya Educação – UNIFRA, 2015.

D'AMBROSIO, U. Da realidade à ação: reflexões sobre a Educação Matemática. Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

D'AMBROSIO, U. Mathematical Modeling: cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. Journal of Mathematical Modelling and Application, v. 1, n. 6, p. 89-98, 2009.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: Machado. S. D. A. Educação matemática: uma (nova) introdução. 3 ed, 3 reimpr. São Paulo, Editora EDUC, p. 167- 188. 2015.

DIONIZIO, F. A. Q.; BRANDT, C. F. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. X Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. PUR-PR, 2011.

DUVAL, R. Gráficos e Equações: articulação de dois registros. Trad. MORETTI. M. T. Revemat, v.6, n.2, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT; 2011c,

DUVAL, R. Quais Teorias e métodos para a pesquisa sobre ensino da matemática? Trad. OLIVEIRA. L. C. Praxis, v.7, n.2, p.305-330, 2012b.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Morreti. M. T. In: Revemat. v. 07. n.2, p. 266 – 297, 2012a.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. 8. Ed de 2003. Campinas, Editora Papirus, p. 11-34, 2011b.

DUVAL, R. Semiósis e Pensamento Humano: Registro semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo. Editora Livraria da Física. 2009.

DUVAL, R. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. 1. Ed. São Paulo: PROEM, 2011a.

FERRI, R. B.; Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM, v. 38 (2), 2006.

FRANCHI, Regina H.O.L. Modelagem Matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de Engenharia, 1993. Dissertação (Mestrado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. UNESP, Rio Claro.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque ontosemiótico do conhecimento e a instrução Matemática. Disponível em <http://www.ugr.es/local/jgodino> capturado em 14/06/2015.

KALEFF A. M. M. R., Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. Boletim de Educação Matemática, Rio Claro. vol. 20, núm. 28, p. 69-94. 2007.

KARRER, M. Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. Tese (Doutorado). PUC/SP. 2006.

KEHLE, P.; LESTER, F. K, Jr. (2003). A semiotic look at modeling behavior. In: Lesh, D. & Doerr, H., Beyond constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, p.97-122.

LINS, R. C. Matemática, Monstros, Significados e Educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. BORBA, M. C. Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 92-120.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. Modelagem em Educação Matemática. Belo Horizonte, Editora Autêntica. 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na aprendizagem matemática. Contrapontos, vol.2, n.6 p. 343-362, set./dez. 2002.

OLIVEIRA, B. P. Reflexões à luz da teoria dos registros de representação semiótica acerca das práticas dos professores que ensinam matemática. Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza. Ceará. 2014

PEIRCE, C. S. Semiótica. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. v. 46. São Paulo: Perspectiva (Estudos), 2005.

ROSA, C. C. da. Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

ROSA, C. C.; ALMEIDA, L. M. W. O fenômeno de congruência em registros de representação semiótica: análise de uma atividade de modelagem matemática. In: VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 2009. Londrina. Disponível em http://www.uel.br/grupo-pesquisa/grupemat/docs/CC24_cnmem2009.pdf capturado em 03/05/2015.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. W.; GERÔLOMO, A. M. L. “Aprendendo” a Fazer Modelagem Matemática: A Vez do Aluno. Educação Matemática em Revista, p. 28-36, 2011.

SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. Decaimento radioativo: diferentes abordagens em uma atividade de modelagem matemática. In: X EPREM. Guarapuava. 2009.

SILVA, K.A.P. Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações. (Dissertação de mestrado) – Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, 2008.

SKOVSMOSE, Ole. Educação matemática crítica: a questão da democracia. São Paulo: Papyrus, 2001. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

SOUZA, V. H. G. O uso de vários registros na resolução de inequações: uma abordagem funcional gráfica. Tese (Doutorado). PUC/SP. 2008.

VERTUAN, R. E. Um olhar sobre a modelagem Matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica. 2007. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina, Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, 2007.