Universidade
Estadual de Londrina

**JÚLIO FARIA CORRÊA**

# UM ESTUDO HISTÓRICO SOBRE QUADRATURAS

Londrina
2008

JÚLIO FARIA CORRÊA

# UM ESTUDO HISTÓRICO SOBRE QUADRATURAS

Trabalho de Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

Londrina
2008

**JÚLIO FARIA CORRÊA**

# UM ESTUDO HISTÓRICO SOBRE QUADRATURAS

Trabalho de Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

**BANCA EXAMINADORA**

________________________________________

Prof. Carlos Roberto Vianna
Universidade Federal do Paraná

________________________________________

Profa. Regina Célia Guapo Paquini
Universidade Estadual de Londrina

________________________________________

Profa. Angela Marta P. Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, ______de _____________de ______.

## AGRADECIMENTOS


Agradeço à minha orientadora pelo tempo dedicado ao trabalho, pelo enorme respeito com meu texto e comigo enquanto ser humano, pela liberdade na realização da pesquisa, o que me trouxe uma grande experiência enquanto

Aos menbros da banca que trouxeram enormes contribuições para o trabalho. Os diferentes pontos de vista que eles me proporcionaram modificaram profundamente esta pesquisa.

Gostaria de agradecer aos membros do GEPEFOPEM com os quais tive várias discussões que me auxiliaram no desenvolvimento do trabalho.

Agradeço a CAPES pelo auxílio na realização do trabalho.

*“Desaprender é viver”*
Gurcius Gewdner

CORRÊA, Júlio Faria. **Um estudo histórico sobre quadraturas**. 2008. 68f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

## RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo a constituição de uma história de alguns métodos de determinação de áreas, particularmente de alguns trabalhos sobre a quadratura de figuras planas, orientada para a formação inicial de professores de Matemática. A partir de textos históricos elaboramos questionamentos no sentido de evidenciar as múltiplas dimensões da Matemática, tirando-a de seu suposto isolamento das demais práticas socias que participam da constituição da cultura matemática. Para tanto, buscamos livros, artigos, teses e dissertações que contribuissem para a constituição de uma história pedagogicamente vetorizada. Apesar das dificuldades que encontramos em um estudo histórico com orientações pedagógicas, explicitamos práticas sociais e relações de poder que influenciaram o problema de determinação de áreas no antigo Egito, na Babilônia, e nos trabalhos de quadratura de Hipócrates, Arquimedes e Fermat.

**Palavras-chave:** História na Educação Matemática. Quadratura. Formação inicial de professores de Matemática.

CORRÊA, Júlio Faria. **A Historic Study of Squaring**. 2008. 68f. Dissertation (Master in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2008.

## ABSTRACT

The objective of this present work is a formation of a history of determination of area, particulary some works about squaring of planes pictures, oriented for pre- service Mathematics Teacher Education. From history texts we elaborate questions in since of evince the multiple dimensions of Mathematics and remove of its supost isolation of other socials practices that participate of formation of mathematics culture. Thus, we sought books, articles, dissertations and theses that help for the formation of a "history pedagogically oriented". Despite the difficulties we found in the history study with pedagogics orientations, we made clear the social practices and relationships of power that influenced the concept of area in the old Egypt, in Babilonia, and the work of squaring of Hippocrates, Archimedes and Fermat.

**Keywords**: History in Mathematics Education. Squaring. Pre-service Mathematics Teacher Education.

## SUMÁRIO

## 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho pretende inserir-se nas discussões do campo de pesquisa denominado História na Educação Matemática. Segundo Miguel e Miorim (2004), os estudos desse campo estão voltados às discussões sobre a inclusão da história

> na formação inicial ou continuada de professores de Matemática; na formação matemática de estudantes de quaisquer níveis; em livros de Matemática destinados ao ensino em qualquer nível ou época; em programas ou propostas curriculares oficiais de ensino de Matemática; nas investigações em Educação Matemática, etc. (p. 11).

Nesta investigação iremos trabalhar com a história orientada para a formação inicial do professor de Matemática.

O interesse sobre a participação da história na Educação Matemática teve início na graduação, durante um trabalho de iniciação científica sobre o desenvolvimento histórico de estudos sobre área na Grécia antiga, em particular as idéias de Hipócrates de Quio sobre a quadratura de lúnulas, e de Arquimedes de Siracusa sobre a quadratura do círculo. Retomamos essa investigação de um ponto de vista diferente, pois, anteriormente, não havíamos assumido uma perspectiva teórica a respeito da participação da História na Educação Matemática.

A perspectiva que assumiremos aqui é a *concepção orgânica da participação da história na produção do saber docente*, apresentada por Miguel e Miorim (2004). Acreditamos que esta escolha possibilita a abordagem de muitos aspectos do conhecimento matemático, não só dos aspectos lógicos e axiomáticos (que são, geralmente, os únicos contemplados em disciplinas de conteúdo matemático), mas também aspectos políticos, sociais, estéticos, entre outros. Esta perspectiva permite que sejam explicitados os diversos discursos que influenciam a cultura matemática.

Nosso objetivo é a constituição de uma história sobre métodos de quadratura orientada para a formação inicial de professores de Matemática. Nossa meta é que este estudo sirva de base para a problematização de alguns aspectos da área na formação inicial do professor de Matemática. Procuraremos fazer alguns apontamentos dessa meta em nosso texto.

Não tivemos a intenção de fazer uma história sobre métodos de determinação de áreas como um historiador da Matemática tradicionalmente faria, quer dizer, não buscamos fontes primárias para fazer uma narrativa sobre esses métodos e sobre as pessoas que o estudaram. Servimo-nos das histórias já constituídas – não só de histórias da Matemática - para contar uma outra história desses métodos com vistas à formação do professor. Constituímos uma história orientada para a formação de professores. Gostaríamos de reforçar isso, pois nosso interesse é a educação matemática de futuros professores.

Qual a razão desta investigação? Segundo Miguel e Miorim (2004), é necessária a constituição de histórias direcionadas à formação inicial de professores que possam problematizar as práticas educacionais e matemáticas. Acreditamos que histórias desse tipo podem influenciar o modo como o futuro professor concebe a Matemática, e conseqüentemente sua futura prática pedagógica.

Quanto à estrutura do trabalho, iniciamos com um capítulo de discussão teórica da História na Educação Matemática (Capítulo 2). Começamos essa discussão com a diferenciação entre dois campos: a História na Educação Matemática e a História da Matemática na Educação Matemática. Em seguida apresentamos alguns argumentos que defendem a participação da história na Educação Matemática e, por fim, apresentamos a *concepção orgânica da participação da história na produção do saber docente*. No capítulo seguinte discutimos questões referentes ao encaminhamento metodológico de nossa pesquisa.

No capítulo quatro, apresentamos nosso estudo histórico pedagogicamente vetorizado sobre quadraturas, mais especificamente alguns aspectos da determinação de áreas nas civilizações egípcia e babilônia, no trabalho de Hipócrates com as lúnulas, no de Arquimedes com o círculo e no de Fermat com as hipérboles.

No capítulo 5, retomamos algumas questões de nossa fundamentação teórica na busca de articular tais questões com o estudo histórico realizado com a formação de professores, procurando responder à seguinte pergunta: em que o estudo histórico feito anteriormente pode auxiliar na formação inicial de professores?

No último capítulo fazemos algumas considerações sobre o trabalho em geral: dificuldades na constituição de nossa história pedagogicamente vetorizada; quais aspectos conseguimos destacar na constituição do estudo histórico; possibilidades de trabalhos futuros.

## 2 PARTICIPAÇÃO DA HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

No presente capítulo, discutimos a participação da história na educação matemática. Iniciamos com a diferenciação entre dois campos de pesquisa, o da História na Educação Matemática (HEM) e o da História da Matemática na Educação Matemática (HMEM). Em seguida discutimos alguns argumentos a favor da participação da história na educação matemática de futuros professores de Matemática e a *concepção orgânica da participação da história na produção do saber docente*, apresentada por Miguel e Miorim (2004).

Escolhemos começar com a distinção entre HEM e HMEM pelos seguintes motivos: (1) no início do trabalho não conseguíamos ver esta distinção; (2) não encontramos esta distinção explicitada na literatura; (3) ela possui importantes implicações em nosso estudo e que serão discutidas a seguir e no decorrer do trabalho; e (4) por acreditarmos que ela pode auxiliar na compreensão de nossa pesquisa.

Nossa distinção inicia-se a partir do estranhamento que sentimos ao constatarmos que tanto os autores que apresentam a HEM quanto os que apresentam a HMEM, no Brasil, indicam o ressurgimento do movimento em torno da participação da História, ou da História da Matemática na Educação Matemática no mesmo momento, e, também, porque estes campos possuem muitos autores em comum.

Segundo Miguel e Miorim (2004), o movimento em torno do relacionamento entre História, Pedagogia e Matemática teve um forte desenvolvimento a partir da década de oitenta, tanto nacional quanto internacionalmente. Estes autores afirmam ainda que

> [...] o movimento em torno da História da Matemática já é tão amplo e diversificado que poderíamos acusar a constituição, em seu interior, de vários campos de pesquisa autônomos, que, no entanto, mantêm, em comum, a preocupação de natureza histórica incidindo em um das múltiplas relações que poderiam ser estabelecidas entre a História, a Matemática, a Educação. Dentre tais campos de investigação, três deles se destacam: o da História da Matemática propriamente dita, o da História da Educação Matemática e o da História na Educação Matemática (p. 11).

Um fato interessante é que Baroni, Teixeira e Nobre (2005) também colocam esse reavivamento dos interesses pela História da Matemática e suas relações com a Pedagogia na década de oitenta. Entretanto não se referem à formação do campo História na

Educação Matemática, mas, sim, ao campo da História da Matemática na Educação Matemática. Por que, então, Miguel e Miorim intitulam o campo de HEM e Baroni, Teixeira e Nobre de HMEM? A nosso ver são idéias diferentes.

Para responder essa questão iniciaremos com uma caracterização da História da Matemática na Educação Matemática (HMEM). Observamos que os trabalhos nesse campo preocupam-se em utilizar uma história da matemática para certo fim. Quer dizer, dada uma história da Matemática, a HMEM discutiria como ela pode ser utilizada, em que ela pode ser utilizada, ou se ela pode ser utilizada. Já a discussão de como fazer história é deixada a cargo dos trabalhos em História da Matemática, ou seja, de historiadores da Matemática. O papel do historiador não é questionado na HMEM. São questionadas as possibilidades de utilização da História da Matemática para compreensão de conceitos e teorias, constituição de concepções acerca da matemática, dentre outros aspectos.

> Nos últimos 20 anos, aproximadamente, tem-se observado um crescente interesse em *História da Matemática* pelos professores e educadores, com certo impacto na Educação Matemática. Um grande número de artigos vem aparecendo a favor de incluir a *História da Matemática* no ensino de Matemática. Os mais comuns são que a *História da Matemática* fornece uma boa oportunidade para desenvolver nossa visão de “o que é Matemática” ou de que a *História da Matemática* nos permite ter uma compreensão melhor dos conceitos e teorias. Mas não há consenso em relação a isso [grifo nosso] (Baroni, Teixeira e Nobre, 2005, p. 165).

Outra característica dos trabalhos desse campo é que eles se restringem ao uso da *História da Matemática*, como vemos repetidamente na citação anterior. A questão da HMEM é relativa à inserção da História da Matemática na Educação Matemática.

Um exemplo de trabalho nesse campo que contempla estas duas características pode ser dado por Bueno e Lins (2001). Em primeiro lugar estes autores se restringem à História da Matemática. Em segundo, eles propõem que ela possa ser um espaço para a discussão dos processos de produção de significados, ou seja, a História da Matemática pode ser utilizada para certo fim, não existe uma discussão sobre o papel do historiador.

Batarce (2003) apresenta outro exemplo. Este autor busca na História da Matemática recursos para a criação de um *Contexto Histórico para a Análise Matemática*. Tal contexto teria como objetivo abalar a visão absoluta da Matemática, propondo que a Análise Matemática não foi criada para solucionar os problemas do Cálculo, mas surgiu, e se desenvolveu a partir destes problemas, bem como, e criou outros que não existiam anteriormente.

Temos então duas características da HMEM: ela se restringe à utilização da História da Matemática e a discussão de como fazer história é deixada a cargo de outro campo, o da História da Matemática. É com essas duas características que distinguiremos a História na Educação Matemática da HMEM.

No interior da HEM existe a possibilidade de questionar o papel do historiador e, também, a possibilidade de diálogo não só com a História da Matemática, mas com a História da Educação Matemática, a História da Arte, a História da Ciência e de todas as histórias que possam auxiliar na educação matemática de seres humanos.

Miguel e Miorim (2004) incluem, no interior do campo da HEM, todos os estudos que

> [...] tomam como objeto de investigação os problemas relativos às inserções efetivas da *história* na formação inicial ou continuada de professores de Matemática; na formação matemática de estudantes de quaisquer níveis; em livros de Matemática destinados ao ensino em qualquer nível ou época; em programas ou propostas curriculares oficiais de ensino de Matemática; nas investigações em Educação Matemática, etc. [grifo nosso] (p. 11).

Na citação anterior destacamos que a questão é a inclusão da História, e não só da História da Matemática, nas discussões da Educação Matemática. Entretanto ainda falta a questão da discussão do papel do historiador, proposta por Miguel e Miorim (2204). Pensamos que a nomeação do campo História na Educação Matemática tenha sido feita para que os próprios autores, Miguel e Miorim, pudessem inserir seu trabalho, que não caberia na HMEM, pois são eles que apresentam o questionamento do papel do historiador no interior da Educação Matemática.

Entendemos que todos os autores incluídos no campo da HMEM podem ser incluídos no campo da HEM, entretanto o contrário não é válido, já que a HMEM restringe-se à utilização da história da Matemática e não discute as práticas do historiador (esta discussão é deixada a cargo de historiadores da Matemática).

Feita essa diferenciação, escolhemos nos posicionar no campo da História na Educação Matemática, mais especificamente na perspectiva defendida por Miguel e Miorim (2004), a *concepção orgânica da participação da história na produção do saber* *docente*. Antes de abordar as idéias desta perspectiva, procuraremos esclarecer do que tratam as investigações neste campo.

A questão básica da investigação em História na Educação Matemática refere-se ao modo de se conceber a relação entre a cultura matemática (cultura entendida como o conjunto de formas simbólicas até hoje produzidas)[1] e as formas de apropriação dessa cultura no presente, ou seja, de que maneira o desenvolvimento histórico de um determinado conceito está relacionado com a constituição desse conceito mesmo pelo estudante no presente (MIGUEL & MIORIM, 2004). Ou, ainda, que vínculos podem ser promovidos entre filogênese (a produção sócio-histórica do conhecimento) e a psicogênese (produção ou apropriação deste conhecimento no presente)? Logo é uma questão sobre os possíveis modos de relacionamento entre o desenvolvimento histórico do conhecimento matemático e a constituição ou apropriação deste por um estudante, em nosso caso o futuro professor.

Suponha-se que um professor esteja com dificuldades no ensino dos números inteiros e que ele deseje recorrer à história. Ele pode realizar uma investigação histórica para buscar possibilidades de tratar essas dificuldades, ou propor formas alternativas para que os estudantes realizem esta investigação. O modo como se concebe a aprendizagem do estudante e o modo como se concebe a Matemática irão influenciar na maneira da história participar desse processo. Se o professor acredita que, para superar sua dificuldade, o estudante precisa resolver todos os problemas pelos quais passou a humanidade, ele estará aderindo ao chamado argumento recapitulacionista.

Esse argumento defende a idéia de que, para compreender algum conceito no presente, precisamos passar pelas mesmas dificuldades, ou ao menos por algumas, que a humanidade teve ao desenvolver tal conceito. Em termos técnicos o que o argumento recapitulacionista diz é que a psicogênese recapitula a filogênese, ou, ainda, que o desenvolvimento histórico determina o modo de apropriação pelo estudante (MIGUEL & MIORIM, 2004).

Existem várias maneiras de encarar a relação entre filogênese e psicogênese. Existem inclusive perspectivas teóricas formadas no interior da HEM que discutem essa relação. Miguel e Miorim (2004) apresentam cinco dessas perspectivas que discutem a participação da história na educação matemática, quais sejam: Evolucionista Linear;

[1] Segundo Thompson (2002), são formas simbólicas: expressões lingüísticas, gestos, ações, obras de arte etc. ainda destaca cinco características das formas simbólicas: intencionais, convencionais, estruturais, referenciais contextuais.

Estrutural-Construtivista Operatória; Evolutiva Descontínua; Sociocultural e a perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos. Os autores defendem que estas perspectivas se diferenciam umas das outras por dois aspectos: a concepção em relação à natureza do conhecimento matemático e a concepção em relação a como se aprende Matemática. Algumas dessas perspectivas defendem o argumento recapitulacionista, mas cada uma (das que aderem ao argumento) explica à sua maneira como se dá essa recapitulação.

Não fizemos um estudo aprofundado dessas perspectivas. Nossa atenção se voltou à perspectiva proposta pelos autores, que é a *concepção orgânica da participação da história na produção do saber docente*. Essa maneira de encarar a história vem sendo constituída por meio do trabalho de docência de Antonio Miguel e Maria Ângela Miorim, realizado em disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática na UNICAMP.

Eles relatam que vinham trabalhando com a história de diversas maneiras, mas que nenhuma delas os satisfazia, mesmo percebendo que os estudantes se interessavam e obtinham uma apropriação significativa do conhecimento matemático. Essa insatisfação fez com que buscassem outras formas de participação da história, o que os levou a tentar uma conexão entre a História da Matemática e a História da Educação Matemática. Dessa tentativa surgiu a forma de participação da história na educação matemática que apresentaremos mais adiante.

> Embora os futuros professores respondessem positivamente a cada uma dessas diferentes tentativas de organização, não nos sentíamos satisfeitos, pois entendíamos que o entusiasmo e o envolvimento deles estavam muito mais associados aos novos conhecimentos obtidos através do estudo da própria história da matemática do que com a percepção da relevância pedagógica de um tal estudo para o exercício da profissão docente. Ou seja, entendíamos que estávamos conseguindo não só *despertar o interesse* de nossos alunos para as questões relacionadas aos conteúdos matemáticos envolvidos nos Ensinos Fundamental e Médio, mas também propiciar uma *compreensão mais significativa e aprofundada* desses conteúdos por eles – pontos de vista estes que, como vimos no capítulo 1, são defendidos por muitos autores da literatura que utilizam as categorias psicológicas da motivação ou da apropriação significativa do conhecimento para justificar a importância da participação da história no ensino de Matemática. Entretanto, entendíamos que a História poderia e deveria proporcionar ao estudante – um futuro professor – algo mais do que apenas apropriação significativa e um despertar de interesse pelo conhecimento matemático propriamente dito [grifo dos autores] (MIGUEL & MIORIM, 2004, p.153).

A concepção de participação da história na educação matemática de futuros professores procura algo mais do que despertar interesse pela matemática e uma apropriação significativa de conteúdos, ela busca que os futuros professores possam se apropriar da cultura matemática de forma a auxiliá-los na assunção de sua responsabilidade no mundo.

Feita essa diferenciação entre HEM e HMEM, buscamos neste trabalho constituir uma história sobre quadraturas situada no interior do campo da História na Educação Matemática, mais especificamente com a perspectiva defendida por Miguel e Miorim (2004), a *concepção orgânica da participação da história na produção do saber docente*.

Antes de abordar as idéias desta perspectiva, discutiremos a seguir alguns argumentos que defendem a participação da História na Educação Matemática de futuros professores de Matemática.

## 2.1 ARGUMENTOS A FAVOR DA PARTICIPAÇÃO DA HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Apresentaremos nesta seção apenas os argumentos a favor da participação da história na Educação Matemática que, acreditamos, possam auxiliar na formação de professores de Matemática. Uma discussão sobre estes e outros argumentos pode ser encontrada em: Miguel e Miorim (2004), Miguel (1997). Observamos que existem argumentos questionadores da participação da História na Educação Matemática que podem ser encontrados nas mesmas referências.

Antes de discutir esses argumentos, podemos nos questionar: mas que professor é esse que desejamos formar? Queremos formar um professor *livre*, *competente* e *comprometido* na perspectiva de Souza e outros (1991). A *liberdade* é entendida como a possibilidade de o futuro professor ser independente para definir sua metodologia de trabalho, e para fazer escolhas.

> Para que o licenciando possa fazer tal escolha, é preciso que tenha desenvolvido, tanto uma concepção sobre as idéias que embasam o conteúdo matemático a ser ensinado, como uma compreensão do ser humano a quem ele ensinará. Deve, portanto, ter desenvolvido uma compreensão do contexto histórico e sócio-cultural onde ambos, a Matemática e o ser humano, estão situados (p. 90).

A *competência* é condição que permite a liberdade e a realização de escolhas. E o conhecimento histórico e social da Matemática pode auxiliar o licenciando no desenvolvimento de sua competência.

> O COMPROMISSO é entendido como o inconformismo com o quadro geral de FRACASSO do ensino de Matemática em suas múltiplas dimensões. É um compromisso de ação e de transformação; portanto, político [grifos do autor] (SOUZA e outros, 1991, p. 92).

Compromisso de assumir sua responsabilidade pelo mundo não só como cidadão, mas especialmente como futuro professor que irá auxiliar na formação de cidadãos.

Para Souza e outros (1991), o conhecimento histórico é necessário à formação desse licenciando. Discutiremos a seguir em que sentido acreditamos que esse conhecimento pode auxiliar nessa formação.

Segundo Miguel e Miorim (2004), podemos buscar na História da Matemática

> [...] apoio para se atingir, com os alunos, objetivos pedagógicos que os levem a perceber, por exemplo: (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das idéias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de idéias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova (p.53).

A história pode ajudar a situar a Matemática como uma criação humana, como algo que pode ser compreendido por todos aqueles que desejem, não só pelos “escolhidos”. Para muitos, a Matemática ainda é algo que existe antes mesmo dos seres humanos, talvez algo criado por deuses, cabendo a nós a tarefa de descobri-la, e não de criá-la e desenvolvê-la. Questionar essa visão e discutir a Matemática enquanto uma criação humana, que se desenvolveu por meio de erros e acertos, avanços e retrocessos, como qualquer outro campo do conhecimento humano, pode propiciar ao futuro professor uma visão desalienada da Matemática.

“O que tinha na cabeça o sujeito que desenvolveu tal coisa? Só pode ser um doido, um desocupado.” Este tipo de fala é comum na cultura escolar matemática e continua, muitas vezes, sem resposta. Na maioria dos casos, não existe uma discussão das razões pelas quais as pessoas produzem matemática. Não queremos aqui afirmar que essas razões devam ser mobilizadas por necessidades sociais, econômicas, ou por outros campos do conhecimento. Nem mesmo as razões intrínsecas à matemática são, sequer, apresentadas. Os motivos - internos ou externos - precisam ser problematizados na formação do professor de Matemática, e a História pode participar desta problematização.

A Matemática tem sido concebida como isolada das demais disciplinas. Por meio da história podemos tirá-la deste suposto isolamento. Grande parte dos pensadores que desenvolveram esta ciência eram também astrônomos, físicos, filósofos, religiosos, dentre outros. Os problemas que moviam esses pensadores eram, muitas vezes, externos à Matemática: eram problemas de astronomia, de movimento de corpos, de economia, de navegação etc. A História pode trazer de volta a riqueza do desenvolvimento do conhecimento matemático, e suas diversas conexões com outras áreas do conhecimento humano. Em um artigo sobre a participação da História na formação do professor de Matemática, Miguel e Brito (1996) defendem ser crucial que a formação do futuro professor problematize esse suposto isolamento da Matemática.

Precisamos, também, discutir a dimensão ético-política que, por vezes, tem sido negligenciada não só por professores de Matemática, mas por pesquisadores em Educação Matemática. Segundo Miguel e Brito (1996), essa dimensão da atividade matemática é, também, de crucial importância para a prática da educação matemática nos dias de hoje. Alguns afirmam que a Matemática é isenta de questões relativas ao poder, entretanto por meio da história podemos retomar esta dimensão. Por exemplo, a morte de Hipasus, um pitagórico, foi atribuída aos deuses pelo fato de ele ter descoberto as grandezas incomensuráveis, ou a disputa de Newton e Leibniz pela publicação do cálculo diferencial e integral, ou, ainda, o "fato de Gauss não ter publicado os seus trabalhos de geometrias não-euclidianas com medo da 'gritaria do beócios'[2] " (MIGUEL & BRITO, 1996, p. 59).

Não precisamos ir tão longe, recentemente a famosa conjectura de Poincaré, um dos sete grandes enigmas matemáticos do nosso tempo, foi solucionada por um matemático russo chamado Grigory Perelman. A solução deste problema valia a quantia de um milhão de dólares, fora o reconhecimento da sociedade. Em reportagem à revista Piauí, Nasar e Gruber (2007) relatam como um matemático chinês, chamado Shing-Tung Yau,

[2] No Novo dicionário da Língua Portuguesa, Ferreira (1975), uma das significações dadas a beócio é a de um sujeito de curta inteligência, ignorante ou boçal. Acreditamos que a referência aqui é neste sentido, quer dizer, Gauss tinha medo da gritaria dos ignorantes, daqueles que poderiam não entender ou aceitar suas descobertas. Segundo Struik (1997), "Gauss parece não ter estado disposto a aventurar-se publicamente em qualquer assunto controverso"(p. 232).

tentou se apropriar, junto com seus alunos, da demonstração da conjectura para que pudesse assumir uma posição de poder perante a sociedade chinesa.

Para Miguel e Brito (1996), esta dimensão pode ser pensada em dois sentidos. Um deles é o das aplicações nas diversas áreas do conhecimento inclusive em como as informações podem ser distorcidas por políticos, revistas, jornais e redes de televisão, que, muitas vezes, controlam a opinião pública. O outro sentido "é o da utilização da Matemática como instrumento de exclusão dos alunos no processo de aprendizagem"(p. 59).

Para ser um matemático você precisa "ter dom", "tem que ter nascido para a coisa". Estas são expressões corriqueiras que desencorajam o contato com o conhecimento matemático, permitindo que poucos tenham o controle sobre um discurso extremamente poderoso que está por trás das tecnologias, da economia, áreas de cabal importância para a sobrevivência na sociedade atual. A discussão dos aspectos políticos e éticos relacionados à Matemática é essencial à formação de um professor de Matemática compromissado, competente e livre.

Outro ponto crucial às discussões sobre educação matemática é a concepção da natureza dos objetos matemáticos (MIGUEL & BRITO, 1996). A percepção de que a Matemática teve mudanças em seu objeto de estudo pode auxiliar, também, na percepção de que a Matemática se modifica conforme necessidades variadas. Aleksandrov, Kolmogorov e Lavarent'ev (1999) distinguem quatro períodos fundamentais da Matemática que são qualitativamente distintos quanto às concepções do objeto matemático.

No primeiro período, que vai desde os tempos mais antigos até o século V a. C., a Matemática era basicamente prático-empírica, ou seja, existia um conjunto de regras que serviam para a solução de problemas da vida prática. O segundo período, que vai até o século XVII, pode ser caracterizado como o da Matemática de magnitudes constantes. Neste período se iniciam as axiomatizações e estruturação lógica de teorias matemáticas.

O terceiro período, séculos XVII e XVIII, surge quando as magnitudes constantes não resolvem os novos problemas que estão sendo postos (alguns deles relacionados ao movimento) e, com isso, inicia-se o período das magnitudes variáveis, com o desenvolvimento dos conceitos de função e variável. Por fim, no quarto período, o da Matemática contemporânea, que vai do século XIX até os dias atuais, a Matemática começa a ser caracterizada por sua abstração. Ela não mais se obriga a solucionar problemas impostos por outras ciências, sua preocupação é com seus próprios campos de estudo, e, muitas vezes, não há aplicações fora da própria Matemática.

Com este pequeno panorama podemos voltar a questionar o suposto isolamento da Matemática que, como vimos, ocorreu somente a partir do século XIX, e em algumas áreas da Matemática. Discutir essas mudanças pode trazer uma visão mais rica deste conhecimento ao licenciando.

A História pode contribuir para uma compreensão sobre a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova, bem como para discussão sobre a função da abstração e da generalização na Matemática (MIGUEL & BRITO, 1996). Em nosso trabalho procuramos destacar como Arquimedes estruturava suas demonstrações. Tal estrutura foi assumida como um modelo, seguido por muito tempo, até que alguns matemáticos começaram a questioná-lo.

Um outro ponto considerado essencial à formação do futuro professor, por esses autores, é a discussão sobre dimensão estética da Matemática. Nos cursos de Matemática a visão de uma beleza matemática pautada nas noções de rigor, clareza, ou simplicidade, é dominante. Grande parte dos estudantes é seduzida a encontrar nos raciocínios lógico-formais a estética perfeita, e acabam por depreciar outras formas de raciocínio, inclusive as possíveis formas que seus futuros alunos podem vir a atribuir à Matemática. Assim, as discussões relativas aos modos de se compreender a dimensão estética da Matemática podem trazer aos estudantes novas formas de encarar o conhecimento matemático.

Acreditamos que as questões abordadas anteriormente devem permear a formação de professores de Matemática, auxiliando o professor a ter competência para exercer sua liberdade e assumir seu compromisso na desmistificação da Matemática e possibilitando a desalienação de seu ensino. Para tanto, Miguel & Miorim (2004) defendem uma participação orgânica da história na produção do saber docente por meio da problematização e de uma história pedagogicamente vetorizada.

## 2.2 CONCEPÇÃO ORGÂNICA DA PARTICIPAÇÃO DA HISTÓRIA NA PRODUÇÃO DO SABER DOCENTE

Apresentaremos nesta seção a *concepção orgânica da participação da história na produção do saber docente*. Procuraremos incluir aqui a idéia de relacionamento entre filogênese e psicogênese desta perspectiva, e mostrar como ela é direcionada para contemplar as questões relativas à participação da história na Educação Matemática apresentadas na seção anterior.

Até o presente momento fizemos uma exposição da história como sendo necessariamente auxiliadora da educação matemática. Entretanto Miguel e Miorim (2004) atentam para o cuidado que devemos ter de não assumir extremos como o de a história tudo pode ou a história nada pode. Isto é, não devemos acreditar que todos os argumentos apresentados na literatura a favor da participação da História na Educação Matemática são verdadeiros em qualquer situação, ou que estes sejam falsos. Tomaremos, neste trabalho, o que os autores chamam de posição intermediária, qual seja, de que

> [...] a história – desde que devidamente constituída com fins explicitamente pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervêm no processo de ensino-aprendizagem escolar da matemática - pode e deve se constituir um ponto de referência tanto para a problematização pedagógica quanto para a transformação qualitativa da cultura escolar e da educação escolar e, mais particularmente, da cultura matemática que circula e da educação matemática que se promove e se realiza no interior da instituição escolar (MIGUEL & MIORIM, 2004, p. 151).

Para uma compreensão desta maneira de encarar a participação da história na formação de professores, iremos discutir três pontos que aparecem na citação anterior: (1) a participação orgânica da história na formação do professor; (2) a noção de problematização e; (3) a história constituída com fins explicitamente pedagógicos que será explicada, a nosso ver, pela noção de história pedagogicamente vetorizada.

### 2.2.1 A Participação Orgânica da História na Formação de Professores de Matemática

A forma de participação da história, defendida por nossos interlocutores, não é a de uma história que deva ser discutida em uma única disciplina no curso de licenciatura em Matemática, mas que ela seja trabalhada e articulada em todas as disciplinas, de conteúdo matemático ou pedagógico. O adjetivo orgânica busca dizer que a história não é algo a mais para ser colocado em meio ao que já é trabalhado, mas algo que *faça parte da* e *seja indispensável à* formação de futuros professores.

A idéia não é, somente, acrescentar histórias sobre a Matemática ou matemáticos ao que já vem sendo trabalhado, mas que a história tenha o papel de problematizar este trabalho, sem desmerecê-lo. Não se trata de abolir a abordagem axiomática, mas questioná-la no sentido de saber quando ela é necessária ou não, e apontar outras possibilidades de trabalho. Em uma aula de cálculo, por exemplo, a história poderia permear o programa de modo que o futuro professor possa questionar e redirecionar a ordem dos temas abordados, os problemas a serem discutidos, os métodos a serem utilizados, os objetivos a serem atingidos.

A participação orgânica da história na formação do professor poderia contribuir para problematizar o conhecimento matemático, a partir de preocupações do educador matemático, e olhar para este conhecimento sob outras perspectivas (política, ética, estética, epistemológica, etc.) e não somente da perspectiva lógico-axiomática, que é freqüentemente a única apresentada nas disciplinas de conteúdo.

Esta concepção nos dá uma possibilidade interessante que é a de trabalhar com a História e não somente com a História da Matemática (por isso nos preocupamos em realizar a distinção entre HEM e HMEM no início do presente capítulo). Podemos buscar na História da Educação Matemática, na história de outras ciências, e em outras histórias, argumentos que possam auxiliar a problematização do conhecimento matemático, ou, mais amplamente, da cultura matemática escolar. Uma história devidamente articulada com todo o curso de Licenciatura em Matemática pode auxiliar os futuros professores no questionamento das práticas pedagógicas e dos métodos de ensino apresentados durante sua formação. Esse questionamento pode ser explicado pela idéia de problematização que discutiremos em seguida.

### 2.2.2 A Problematização da Cultura Matemática e da Educação Matemática Escolar

A idéia de problematização é fundamental nesta maneira de se conceber a participação da História na educação matemática do futuro professor. Essa idéia se caracteriza por ser multidimensional, interativo-dialógica e investigativa.

- Multidimensional por incidir sobre várias dimensões da cultura matemática e da Educação Matemática escolar, tais como, a dimensão epistemológica, lógica, histórica, ética, política etc..
- Interativo-dialógica por buscar a interação e o diálogo entre os diversos atores que influenciam na constituição da cultura matemática e da educação matemática escolar (matemáticos, professores de Matemática, diretores de escolas, pais, alunos, políticos, dentre outros). Em nosso trabalho este papel será limitado, pois a interação e o diálogo ocorrerão somente entre pesquisador e textos históricos. O que não é pouco, pois tanto pesquisador quanto textos históricos estão imersos em diferentes práticas sociais.
- Investigativa por iniciar o futuro professor nos diferentes campos de investigação da História da Matemática (MIGUEL & MIORIM, 2004).

De acordo com Miguel e Miorim (2004), esta problematização procurar exercer quatro papéis. O primeiro é o papel interdisciplinar, que possibilita tirar a Matemática do seu confinamento e tomar seu lugar na formação crítica do cidadão. Continuamos a assistir repetidamente a alunos que terminam seus estudos afirmarem que a matemática é inútil, serve apenas para passar de ano e divertir uns poucos. Ou seja, a cada ano são formadas mais pessoas matematicamente alienadas que perpetuam a visão de uma matemática isenta de influências políticas, não percebendo como ela é utilizada, inclusive, como instrumento de exclusão social. A maneira estanque como a matemática é trabalhada desde a Educação Básica até a graduação pode influenciar o professor a desenvolver a idéia de que a Matemática realmente é um conhecimento à parte. Entretanto podemos questionar esta posição e mudá-la por meio de uma história direcionada a abalar a visão desta Matemática absoluta, como discutimos na seção anterior.

O segundo papel apresentado é o didático-metodológico, por ser a problematização um meio crítico e humano de apropriação e (re)significação do saber e, ainda, possibilitar ao futuro professor uma ampliação e uma flexibilização das possibilidades a serem seguidas em sua prática em sala de aula. Muitas vezes o professor se vê insatisfeito com os métodos de ensino que aprendeu (quando aprendeu), e a problematização pode ser um meio de proporcionar uma maior liberdade, podendo o professor escolher sua maneira de trabalho dependendo do conteúdo, da turma e de seus interesses.

Um terceiro papel é o psicológico motivacional. A problematização pode propiciar um ambiente que estimula o envolvimento e a participação ativa do estudante. Esta requer que ele coloque suas questões e angústias e discuta com seus pares sobre elas. O caráter motivacional não é inerente ao estudo da História, ele pode surgir quando os estudantes procurarem colocar e responder suas próprias inquietações.

Por fim, mas não menos importante, o papel político-crítico. A problematização tende a propiciar discussões sobre as relações de poder e o saber matemático em diferentes momentos e lugares. A nosso ver, este papel é constantemente negligenciado pela educação e possui enorme importância na formação de um cidadão crítico. Não estamos dizendo que não exista crítica e discussões sobre textos ou até mesmo conteúdos matemáticos, mas nos parece que esta discussão tem ficado pura e simplesmente no âmbito acadêmico. O futuro professor pode até criticar algum texto relativo à aprendizagem, por exemplo, mas não carrega esta crítica para outros momentos ou lugares, não vê a ligação destas críticas com sua prática, não entende como aquela discussão sobre aprendizagem pode influenciar em sua sala de aula e conseqüentemente em seu papel de agente social.

Por que aprendemos certos conteúdos e não outros? Certos métodos e não outros? Por que temos a visão de uma matemática isenta das paixões humanas? A matemática tem influências políticas? A política tem influência da matemática? Estas questões deveriam permear a formação de professores para que estes possam desenvolver maneiras de compreender outras dimensões da matemática e assim discuti-las com seus alunos.

### 2.2.3 História Pedagogicamente Vetorizada

Tendo discutido a problematização, suas dimensões e suas possíveis influências na formação do professor, apresentaremos a seguir a história pedagogicamente vetorizada, que é uma história orientada por objetivos pedagógicos, por questões colocadas por professores de Matemática, ou investigadores em Educação Matemática. É uma história constituída sob o ponto de vista do educador matemático, e não do historiador da matemática ou do matemático. Entretanto ela não é uma história suavizada, distorcida, ou uma adaptação de histórias já constituídas para a escola.

Aqui gostaríamos de retomar a diferenciação feita entre História da Matemática na Educação Matemática e História na Educação Matemática. A perspectiva que estamos apresentando coloca uma discussão sobre o como fazer história, sobre o papel do historiador. Não está sendo proposto o uso de uma história da Matemática já constituída por um historiador da Matemática para realizar discussões com os futuros professores, mas a constituição de uma história orientada por questões pedagógicas, questões inclusive destes futuros professores de Matemática. Logo essa perspectiva não pode pertencer ao campo da HMEM, pois, neste campo, não há a discussão do papel do historiador, que é deixada a cargo do campo da História da Matemática.

Miguel e Miorim (2004) apontam três características da história pedagogicamente vetorizada. A primeira é que ela é uma história institucional da cultura matemática, ou seja, uma história que deveria se constituir a partir de problemas e questões que emergem ou se relacionam com os diversos momentos ou lugares em que a Matemática está envolvida (escola, pesquisas em diversas áreas do conhecimento, mídia, religião, política etc.). E, ainda, deve buscar explicitar as complexas relações entre a Matemática e outras práticas sociais.

A segunda característica de uma história pedagogicamente vetorizada é a noção de história-problema, isto é, uma história que busca questionar, colocar problemas que se manifestam tanto nas práticas do professor de Matemática quanto do pesquisador em Educação Matemática. Esta história se faz pensando nos estudantes ou futuros professores e não nos historiadores ou matemáticos.

O terceiro aspecto se refere ao modo de se encarar a historiografia. Aqui ela é concebida como uma fonte de diálogo e não de respostas ou procedimentos a serem repetidos no presente. A história não é um objeto para ser usado, mas um campo de diálogo. Este tipo de história não adere ao princípio recapitulacionista, pois não vê na história uma fonte de problemas pelos quais os estudantes *devem* passar para constituírem o conhecimento, mas como uma fonte de problematizações que *podem* auxiliar o estudante ou, em nosso caso, o futuro professor na constituição de seu conhecimento, não só matemático, mas também pedagógico.

No início da seção anunciamos que contemplaríamos o relacionamento entre filogênese e psicogênese segundo a perspectiva de Miguel e Miorim (2004). Este é um momento oportuno para retomar este ponto já que aqui apresentamos a história como um campo de diálogo, uma fonte de problematizações. Nesta perspectiva busca-se a cultura matemática para que os estudantes – futuros professores - possam conhecer e dialogar com diferentes práticas sociais do passado. Não como uma forma de repetir esta cultura, mas de buscar diferentes formas de se encarar problemas na tentativa de compreender os próprios problemas.

Os autores destacam ainda duas noções fundamentais à constituição de uma história pedagogicamente vetorizada: *poder* e *prática social*. Antes de discutir estas noções gostaríamos de ressaltar que assumimos aqui a leitura de Foucault feita por Miguel e Miorim (2004) sobre essas noções.

Uma primeira observação sobre a noção de poder é a maneira como, segundo Miguel e Miorim (2004), Foucault se refere a ela, ou seja, como *relações de poder* e não como *o poder*. Segundo esses autores, para Foucault "não existe o poder fixamente e inteiramente centrado em um lugar ou pessoa, e daí o estatuto ontológico da noção sociológica de poder é o de uma relação"(p. 164), e, para ele, as relações de poder são um conjunto que contém quatros conjuntos:

> [...] (1) o conjunto de correlações de forças entre pessoas e/ou grupos sociais, que os ordena assimetricamente segundo o critério de dominação ou subordinação; (2) o conjunto de transformações dessas correlações de forças no período de tempo considerado; (3) o conjunto de todos os modos de organização, por aproximação ou afastamento, que tais correlações de forças assumem nesse jogo sutil de transformações dessas correlações de força; (4) o conjunto de estratégias constitutivas de tais correlações de forças (MIGUEL & MIORIM, 2004, p. 164).

Exemplificaremos esta noção, de relação de poder, por meio de algumas idéias de Arquimedes. Arquimedes viveu na Grécia antiga onde a estrutura social permitia que alguns homens privilegiados se dedicassem à contemplação do universo, enquanto outros homens (os escravos) eram incumbidos do trabalho manual. Dentre os matemáticos gregos, certos modos de apresentação de resultados eram aceitos, e Arquimedes apresentava seus resultados por meio desses, mesmo que tivesse feito sua descoberta de maneira distinta, ou seja, o seu método de apresentação era diferente do seu método de descoberta (o que parece ser perpetuado pelos matemáticos até hoje). A estrutura grega de demonstração perdurou por muito tempo até que alguns matemáticos do século XVII modificaram esta estrutura. Mas isso não quer dizer que todos aceitaram esta modificação, quer dizer, em um mesmo tempo, alguns eram a favor e outros contra a mudança da estrutura de demonstração grega.

Com isso queremos dizer que uma correlação de forças fazia com que Arquimedes publicasse seus trabalhos de determinada maneira para que fossem aceitos perante determinado grupo. Estas correlações se modificaram com o tempo para alguns, mas não para outros, isto é, as relações de poder não são algo espacial e temporalmente bem definidas e imutáveis, elas podem se modificar em um mesmo tempo ou espaço.

A noção de *práticas sociais*, segundo Miguel e Miorim (2004), não é claramente definida por Foucault. Entretanto eles definem as práticas sociais como

> [...] um conjunto de atividades ou ações físico-afetivo-intelectuais que se caracterizam por ser: (1) conscientemente orientadas para certas finalidades; (2) espácio-temporalmente configuradas; (3) realizadas sobre o mundo natural e/ou cultural por grupos sociais cujos membros estabelecem entre si relações interpessoais que se caracterizam por serem relações institucionais de trabalho organizado; (4) produtoras de conhecimentos saberes, tecnologias, artefatos culturais ou em uma palavra, de um conjunto de formas simbólicas (p. 165).

Utilizamos a discussão de Arquimedes feita anteriormente para entendermos a noção de práticas sociais. O fato de Arquimedes publicar seus trabalhos segundo a estrutura aceita na época indica que ele tinha a finalidade de ser aceito em uma comunidade, uma instituição (a comunidade de matemáticos gregos) espacial e temporalmente configurada. E, ainda, a maneira de publicar os resultados, bem como a maneira de desenvolvê-los, acabam por constituir formas simbólicas. A primeira valorizada por determinado grupo, enquanto que a segunda, mesmo que não legitimada por este grupo, era valorizada como forma de descoberta, ou seja, em um mesmo momento uma forma era mais valorizada em um contexto do que outra. Arquimedes pode exemplificar isso, pois praticava algo que era desvalorizado pelo grupo ao qual pertencia, seu método de descobertas.

Struik (1997) comenta esta predominância do método de demonstração (método de exaustão) em relação ao método de descobertas (método atomista).

> É significativo que em quase todos os textos clássicos fosse utilizado o primeiro método. Esta questão pode-se relacionar com o facto de a matemática se ter tornado um passatempo da classe ociosa, que se apoiava na escravatura, indiferente às invenções e interessada na contemplação. Pode ser também o reflexo da vitória do idealismo platônico em relação ao materialismo de Demócrito no domínio da filosofia (p.88).

Ou seja, a atitude de Arquimedes em relação às suas publicações pode ser devida a uma prática social da época – a contemplação em oposição à invenção – ou pode ser devida a uma relação de poder – a vitória do idealismo em relação ao materialismo.

Miguel e Miorim (2004) ressaltam ainda que, para Foucault, as relações de poder são práticas sociais, ou seja, as relações de poder são orientadas para certas finalidades, são configuradas espacial e temporalmente, realizadas sobre o mundo natural ou cultural por grupos sociais, e têm como uma característica a produção de conhecimentos. Segundo os autores, Foucault apresenta uma maneira nova de encarar a relação entre teoria e prática, que é uma relação de identidade, ou seja, uma teoria é uma prática social.

Contar uma história pedagogicamente vetorizada é contar uma história a partir de diferentes práticas sociais que participaram da constituição e transformação do problema e que seja, mais do que uma discussão estritamente técnica do problema (diferenciando-se da história do historiador da matemática que dá ênfase aos aspectos técnicos); mais do que uma apresentação das diferentes formas do problema por diferentes grupos sociais ao longo do tempo; mais do que uma história das necessidades de outros campos do conhecimento e de outras práticas sociais que fizeram o problema surgir e se desenvolver (necessidades da agricultura, da arquitetura, da engenharia, da economia, da física etc.); uma história que contemple as razões que levaram diversos grupos sociais a valorizarem o problema em questão; uma história das diversas mudanças sofridas pelo problema no interior das diversas práticas sócias de diferentes épocas e contextos e uma história que discuta as relações de poder relacionadas ao problema (MIGUEL & MIORIM, 2004).

No próximo capítulo apresentaremos nosso encaminhamento metodológico que contempla muitas das questões até aqui discutidas.

# 3 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

A abordagem de nossa pesquisa é qualitativa. Garnica (2004) aponta algumas características deste tipo de abordagem. Uma delas é a não neutralidade do pesquisador perante seus dados. Enquanto realizamos nossa pesquisa, desde suas primeiras decisões até o presente momento, a nossa maneira de ver o mundo, de pensar a educação matemática, entre outras coisas que percebemos ou nem percebemos, influenciaram no desenvolvimento da mesma.

Outra característica apontada por este autor é que “a constituição das compreensões do investigador dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados”(GARNICA, 2004, p. 86). Em nossa pesquisa isso é de extrema importância, pois, ao questionarmos os textos históricos, outras questões foram suscitadas, oriundas tanto dos textos históricos, quanto de nossas reflexões sobre a fundamentação teórica ou sobre o método. Quer dizer, nosso trabalho se constituiu num diálogo contínuo entre textos, pesquisador e orientadora do trabalho. Um exemplo desta característica foi a necessidade de um maior esclarecimento sobre nossa fundamentação teórica e a separação entre os campos da História na Educação Matemática e da História da Matemática na Educação Matemática, suscitada pelas discussões em nossa qualificação.

Nosso trabalho não contou com uma hipótese *a priori*, característica também apontada por Garnica. Não pensamos em questões como: será que Arquimedes quadrava figuras dessa ou daquela maneira? Nossa compreensão surgiu com o decorrer do trabalho. Nosso objetivo não foi aprovar ou refutar algo que pensamos ser verdadeiro, mas buscar a compreensão dos textos e destacar os pontos que desejávamos. Os procedimentos de análise dos dados foram constituídos conforme o trabalho se encaminhava, não foram pensados previamente e tampouco tomados estaticamente.

O objetivo de nossa pesquisa é a constituição de uma história pedagogicamente vetorizada sobre métodos de determinação de áreas, particularmente de alguns processos de quadratura, orientada para a formação inicial de professores de Matemática. Nossa meta é que este estudo possa servir de base para a problematização desses métodos na formação inicial do professor de Matemática. Procuraremos fazer alguns apontamentos desta meta em nosso texto, tanto no capítulo 4, quanto no capítulo 5.

Para isso escolhemos discutir alguns aspectos do cálculo de áreas no antigo Egito e na Babilônia, a quadratura de lúnulas proposta por Hipócrates de Quio, o método de quadratura do círculo proposto por Arquimedes e o método de quadratura de hipérboles proposto por Fermat.

O interesse pelo estudo da história da área vem desde um trabalho de iniciação científica que realizamos durante a graduação. Naquele trabalho estudamos a quadratura, o trabalho de Hipócrates e o de Arquimedes, entretanto não conhecíamos a *concepção orgânica da participação da história na formação do saber docente* proposta por Miguel e Miorim (2004). Com o acesso a esta proposta, decidimos estudar novamente aqueles episódios, mas com a perspectiva de participação da história apresentada por esses autores. Além disso, acrescentamos a discussão do trabalho de Pierre de Fermat relacionado à quadratura de hipérboles.

Para a obtenção das informações, recorremos a diversos livros de História da Matemática, livros de História, artigos, teses e dissertações, relativos ao tema abordado e, ainda, a qualquer outro material que pudesse nos auxiliar na constituição de nossa história pedagogicamente vetorizada.

Contar uma história desse tipo é contar uma história que contemple as diversas práticas sociais que participaram da constituição e transformação do problema em questão e que seja, mais do que uma discussão estritamente técnica do problema nos diferentes grupos sociais em que ele foi desenvolvido (diferenciando-se da história do historiador da matemática que dá ênfase aos aspectos técnicos); mais do que uma história das necessidades de outros campos do conhecimento e de outras práticas sociais que fizeram o problema surgir e se desenvolver (necessidades da agricultura, da arquitetura, da engenharia, da economia, da física, etc.), que contemple também as necessidades intrínsecas à matemática; uma história que explicite as razões que levaram diversos grupos sociais a valorizarem o tal problema; uma história das mudanças sofridas pelo problema no interior das diversas práticas sociais de diferentes épocas e contextos e uma história que discuta as relações de poder relacionadas ao problema (MIGUEL & MIORIM, 2004). Assim, investigamos os textos que encontramos na busca de responder questões do tipo:

Quais práticas sociais influenciaram nos métodos de quadratura nos episódios em questão?

Como essas práticas sociais influenciaram estes métodos?

> Existiam relações de poder que condicionavam o desenvolvimento destes métodos? Questões sociais, culturais, econômicas e políticas influenciaram nestes métodos? Que razões levaram estes métodos de quadratura a serem valorizados nos episódios que estudamos?

Essas são questões gerais que orientaram nossa investigação e que foram abordadas em cada episódio escolhido. Deixamos para apresentar as questões particulares a cada episódio no próprio texto histórico. Procuramos problematizar a história desses métodos de cálculo de áreas de modo a explicitar as várias dimensões da cultura matemática (dimensão lógica, política, ética, epistemológica, estética etc.), buscando, também, tirar a Matemática de seu suposto isolamento e evidenciando as diversas práticas sociais que se relacionaram com os métodos estudados.

Como dissemos anteriormente, a constituição do trabalho foi um processo de diálogo entre textos e pesquisadores, já que a história "se constitui num processo contínuo de interação entre o historiador e seus fatos, um diálogo interminável entre passado e presente (CARR, 2002, p. 65)".

É importante ressaltar que, ao olharmos para o passado, podemos cair no engodo de julgá-lo. Este não foi nosso intuito. Não fizemos afirmações do tipo: "Fermat não desenvolveu algum tipo de notação porque não tinha condições intelectuais ou algo parecido". Para Bloch (2001), o papel do historiador é compreender e não julgar. Procuramos compreender o que Fermat fez em seu tempo, e não dizer que ele não conseguiu fazer aquilo por tais e tais motivos.

Até porque uma das características da história pedagogicamente vetorizada é a de encarar a história como um campo de diálogo e não como um repertório moralizador que fosse capaz de solucionar as questões éticas, políticas e pedagógicas do tempo presente (MIGUEL & MIORIM, 2004). As respostas encontradas ao questionarmos a história serão sempre múltiplas e pessoais.

Segundo Bloch (2001), o historiador escolhe e tria os fatos e documentos que lhe são acessíveis, os vestígios por meio dos quais ele toma conhecimento dos fatos históricos. O resultado que apresentaremos é limitado ao que encontramos como material de análise dentro de um tempo que nos foi concedido para efetuar o trabalho, bem como ao nosso conhecimento. Nossa pesquisa não deve ser tomada como definitiva, mas como uma possibilidade de se constituir esta história que deve ser criticada, revista, reinventada.

Para exemplificar nosso processo de estudo, apresentamos um exemplo. Ao tomarmos conhecimento do fato de Arquimedes ter sido um inventor de máquinas de guerra e que trabalhava para o rei Hierão, seguimos o caminho de questionar que implicações poderiam ter estes fatos em seu trabalho matemático. Existiria alguma relação entre eles? Este fato influenciou a vida de Arquimedes? Em caso positivo, de que modo? Os questionamentos foram no intuito de compreender o contexto sócio-cultural, e não somente de reproduzir fatos ou anedotas. Buscamos elucidar as práticas que possivelmente influenciaram no trabalho matemático de Arquimedes, como influenciaram e como se deu este processo.

Enfim, nosso estudo é resultado de nossa interpretação de alguns textos históricos e não-históricos, na tentativa de constituir uma história sobre os processos de quadratura de Hipócrates, Arquimedes e Fermat, com vistas à formação inicial de professores de Matemática.

# 4 ESTUDO HISTÓRICO PEDAGOGICAMENTE VETORIZADO SOBRE QUADRATURAS

## 4.1 PARA LER O PRESENTE CAPÍTULO

No presente capítulo apresentamos um estudo histórico sobre métodos de determinação de áreas orientado para a formação inicial de professores de Matemática. Iniciamos a investigação pelos povos da antiga Babilônia e antigo Egito e, em seguida, discutimos a idéia de quadratura de figuras planas com os trabalhos desenvolvidos por três matemáticos: Hipócrates de Quio, Arquimedes de Siracusa e Pierre de Fermat.

Nossa tentativa foi de explicitar como diferentes práticas sociais influenciaram o desenvolvimento da matemática, entretanto percebemos, ao final do trabalho, que nossa tentativa não se realizou em muitos momentos, nestes conseguimos apenas mostrar que ao mesmo tempo em que os trabalhos matemáticos que escolhemos discutir eram desenvolvidos existiam outras práticas sociais, mas não como as práticas e os trabalhos matemáticos se vincularam, ou mesmo se existiu este vínculo.

Procuramos indicar no decorrer do texto essa separação, mesmo acreditando que ela possa ser percebida sem nosso destaque, com o intuído de que ela possa ser superada aqueles que desejarem realizar um tipo de história como a que discutimos em nossa pesquisa.

## 4.2 EGITO E BABILÔNIA

Ao começarmos nosso estudo uma primeira questão surgiu: quais são os primeiros registros deste de determinação de áreas na história?

A resposta desta questão não pode ser dada com precisão, pois desde tempos anteriores aos povos babilônios e egípcios já eram utilizadas formas geométricas em decorações de cerâmicas, ferramentas, utensílios e jóias, e existem poucos registros históricos anteriores a estes povos (BARON, 1985).

Acredita-se que os babilônios (c.a. 2000 a.C. a 1600 a.C.) deveriam estar familiarizados com as regras gerais para o cálculo de áreas de várias figuras geométricas (retângulos, triângulos, entre outras) e também para o cálculo do volume de alguns sólidos (BARON, 1985). Os papiros de Moscou e Rhind trazem regras de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos (EVES, 2004).

É importante ressaltarmos que, nesse período, os povos solucionavam os problemas de cálculo de áreas recorrendo a casos particulares já resolvidos que eram registrados nos papiros ou nas tábuas. Ou seja, para o cálculo de uma determinada área, eles recorriam a esses registros na busca de problemas semelhantes. A matemática utilizada era essencialmente empírica, não havia preocupação em saber o porquê de as regras funcionarem, bastava que funcionassem.

> Na etapa da *matemática prático-empírica*, que se estendeu desde os tempos pré-históricos até por volta do século V a.C., a matemática apresentava-se como uma coleção de noções e regras isoladas obtidas diretamente da experiência, das necessidades da vida diária e das técnicas de trabalho, sendo que a validade e a aceitação dessas regras assentavam-se no simples fato de elas darem certo, isto é, de conseguirem realizar de forma bem-sucedida os objetivos imediatos visados por tarefas práticas [grifo dos autores] (MIGUEL & BRITO, 1996).

Mas quais objetivos imediatos seriam estes? Que problemas motivaram esses povos a registrarem esses modos de cálculo de áreas?

O rio Nilo possuía enorme influência sobre os povos do Egito, até porque esta civilização se constituiu em torno desse rio. No período em questão, a determinação de áreas se fez necessária devido às constantes modificações do nível do Nilo. Os agricultores cujas terras margeavam o rio perdiam, ou ganhavam, mais terras para a produção, conforme as cheias e, com isso, os impostos a serem pagos pelas terras cultivadas se modificavam. Ou seja, as práticas sociais que influenciavam a determinação de áreas estavam ligadas ao pagamento de impostos ao rei. Temos também, a relação de poder estabelecida entre agricultores e o faraó que os obrigava a pagar pelo cultivo em suas terras.

Os babilônios desse período também habitavam uma região entre rios, o Tigre e o Eufrates, que possuíam um comportamento semelhante ao do Nilo. Com isso, os agricultores que trabalhavam como meeiros (ou recebiam um salário em grãos) na terra dos deuses, ganhavam conforme a quantidade de sua produção. As necessidades que estimulavam a matemática eram imediatas: o pagamento de impostos pela terra utilizada, ou o lucro com a produção.

Entretanto o fato de esses povos não terem desenvolvido uma matemática abstrata não deve ser atribuído a uma suposta inferioridade ou incapacidade intelectual em relação a povos posteriores. O que acontecia era que as práticas sociais que influenciavam a matemática (medida de terreno para determinação de imposto, construção de casas, cálculo de volume de grãos etc.) não condicionaram o desenvolvimento de questões mais abstratas, ou o desenvolvimento de fórmulas algébricas, como, por exemplo, a área do quadrado é lado vezes o lado.

Outro fator que pode ter influenciado o não desenvolvimento de outro tipo de matemática é a visão que os egípcios possuíam de uma realidade estática, imutável e fixa (JAGUARIBE, 2001).

> A única forma de mudança possível é cíclica, mas as fases do ciclo, que se renova continuamente, são também imutáveis. Qualquer mudança não-cíclica é só aparente, e portanto irrelevante. Desse ponto de vista, a ordem social é parte da ordem cósmica decretada pelos deuses (JAGUARIBE, 2001, v. 1, p. 148).

Esse decreto dos deuses pode ter influenciado a ausência de questionamentos sobre as razões de a realidade ser como é.

Para os babilônios, os homens eram servos, criados pelos deuses, para trabalharem em suas terras, toda a sociedade era ordenada pela vontade dos deuses (JAGUARIBE, 2001). Essa cosmovisão pode ter levado a uma matemática prático-empírica, que servia para a manutenção dessa cosmovisão.

Nesses dois povos a matemática era influenciada por questões naturais (as cheias dos rios) e por questões sociais (pagamento de impostos por uso da terra), ou seja, outras práticas sociais influenciaram o fazer matemático.

Como veremos, algumas mudanças sociais provocaram o desenvolvimento de novas práticas matemáticas. E antes de entrarmos nos aspectos das quadraturas realizaremos uma discussão sobre essas mudanças.

Aqui se inicia o problema que apontamos na introdução do presente capítulo. Não conseguimos falar de matemática enquanto falamos de outras práticas sociais. Falaremos antes das mudanças sociais e depois da matemática. Isso é algo grave já que nossa intenção, ao escolhermos a história pedagogicamente vetorizada, era justamente superar esta separação.

Segundo Struik (1997), com a decadência dos impérios babilônio e egípcio e a ascensão dos gregos, muitas mudanças sociais e culturais aconteceram: a substituição do bronze pelo ferro, o aumento do excedente social, a substituição da escrita do antigo Oriente por um outro alfabeto que teve grande difusão e a introdução da moeda cunhada. As cidades passaram de centros administrativos a centros comercias. Surgem aí as cidades-estado gregas. A falta de uma religião centralizadora permitiu uma relação estreita entre misticismo e racionalismo.

> O século VIII a. C. foi um período revolucionário na formação da civilização grega, marcado pela introdução do alfabeto fenício e sua adaptação à língua dos gregos. A criação da escrita mudou o padrão educacional, que antes era puramente metafísico e musical, introduzindo com os *gramatistes* o ensino da arte de ler e escrever. Surgiu assim a demanda de leis escritas (*nomoi*), em lugar das decisões tomadas pelos reis ou pelos nobres (*thesmoi*). Houve aperfeiçoamentos na metalurgia e também na agricultura, pressionada para sustentar o firme aumento da população. Foi essa pressão demográfica que levou à fundação de colônias, entre as quais as mais importantes eram Cumae, no sudoeste da Itália, fundada pelos ebeanos; Sibaris e Cróton, no sudoeste italiano, fundada pelos aqueus do Peloponeso setentrional; ou Siracusa na costa oriental da Sicília, fundada pelos coríntios. As colônias enviavam metais e alimentos para as metrópoles, e importavam produtos manufaturados. Essas e outras circunstâncias levaram a uma rápida expansão do comércio, assim como o desenvolvimento das cidades. No fim daquele século havia mais de seiscentas cidades-estado, todas defendendo sua independência e invariavelmente em guerra umas com as outras. No entanto, naquela época as guerras não traziam conseqüências de extrema gravidade, porque os exércitos não podiam manter por muito tempo suas campanhas (JAGUARIBE, 2001, v. I, p.282).

Vários fatores influenciaram a emergência dessa civilização que tanto marcou nosso modo de vida. O ensino da escrita possibilitou que mais cidadãos participassem das decisões políticas, auxiliando a formação da democracia. Entretanto, inicialmente, esta democracia não era para todos. Na verdade nunca foi, mas, com o tempo, o número de pessoas, e as classes que dela participavam, aumentou (JAGUARIBE, 2001).

A estrutura social das cidades gregas manteve uma constante divisão entre cidadãos e não-cidadãos (os escravos e cidadãos livres de outras cidades) (JAGUARIBE, 2001). A divisão entre os cidadãos, em um primeiro momento, era feita segundo as famílias, filho de nobre era nobre, filho de agricultor era agricultor. Com o passar do tempo, e um maior desenvolvimento do comércio, esta divisão passou a ser feita pela riqueza. Mesmo entre os escravos existiam divisões (domésticos, artesãos, comerciantes, empregados na agricultura, mineiros e públicos). Dependendo da categoria, eles eram mais ou menos mal tratados.

Nessa divisão social, os escravos não possuíam representação política. O que aconteceu, devido ao desenvolvimento dessa democracia, foi um aumento da participação no poder das classes mais baixas de cidadãos, levando a uma democracia de massa, e não mais uma democracia de nobres.

Todas essas mudanças ocorrem durante três grandes períodos: o Arcaico (do século XI ao VII a. C.); o período Clássico (do século VI ao IV a. C.) e; o Helenístico (século III ao I a. C.) (JAGUARIBE, 2001). Cada um destes períodos pode ser caracterizado por suas particularidades, e pelas inúmeras mudanças na civilização, entretanto, para Jaguaribe (2001), duas constantes podem ser observadas: *logos* e *agon*. A primeira, a regra da racionalidade suprema, do *logos*, embora existisse espaço para o êxtase humano e a iluminação transcendental. A segunda, o esforço incessante para alcançar a excelência individual, *agon*.

Mas qual a importância dessas constantes e das mudanças sociais para nosso trabalho? A modificação da estrutura social e a falta de uma religião centralizadora permitiram que alguns gregos se questionassem quanto à inteligibilidade do universo e a razão de as coisas serem o que são, provocando um grande desenvolvimento da ciência, e da Matemática em particular.

Segundo Struik (1997), os primeiros estudos da matemática grega tinham como objetivo “compreender o lugar do homem no universo de acordo com um esquema racional”(p. 73). Alguns gregos puderam dedicar-se a estudos diversos devido, justamente, à estratificação social, pois grande parte das pessoas trabalhava para que alguns poucos pensassem (*logos*) e se dedicassem ao seu próprio enaltecimento (*agon*). Com os gregos surgem novas práticas sociais, que levam à modificação da Matemática. Como discutiremos nos trabalhos de Hipócrates e Arquimedes, surge uma matemática contemplativa, não mais preocupada com as necessidades mais imediatas.

Pensamos que uma resposta à pergunta de Swetz (1997), “Por que se deu excatamente o crescimento da matemática dedutiva na Grécia clássica?”(p. 29), pode ser esta: a falta de uma religião centralizadora, a escravização e a formação de uma sociedade de classes, mais a racionalidade e o culto à excelência individual, permitiram o desenvolvimento de uma matemática dessa natureza.

É dentro desse contexto sócio-cultural que estão inseridos os trabalhos de Hipócrates de Quios e de Arquimedes de Siracusa que discutiremos nas próximas três seções.

## 4.3 A QUADRATURA

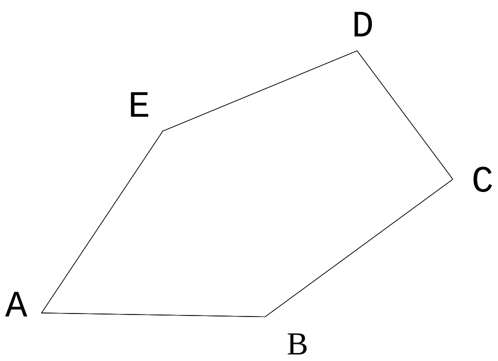
Alguns dos problemas dessa matemática contemplativa dos gregos se relacionavam com a determinação de áreas de regiões delimitadas por curvas, de comprimento de curvas e de volumes delimitados por superfícies curvas. Estas questões começaram a ser pensadas no quinto século a.C. e deram origem aos problemas de quadratura.

O problema das quadraturas consiste em, dada uma figura poligonal plana, ou curva plana, encontrar um quadrado de mesma área. No que segue, quando desenharmos uma figura que tenha a mesma área da figura dada, diremos que a estamos *transformando* em uma figura equivalente. Diremos também que *quadrar* uma figura é transformá-la em um quadrado equivalente. Quando isso for possível, utilizando apenas régua sem graduação e "compasso euclidiano", diremos que a figura é quadrável.

As limitações dos instrumentos euclidianos eram que a régua não possuía graduação e o compasso não servia como transferidor, ou seja, ao retirar o compasso de seu centro ele perdia a medida do raio (EVES, 2004).

Eis um exemplo do problema de quadratura:

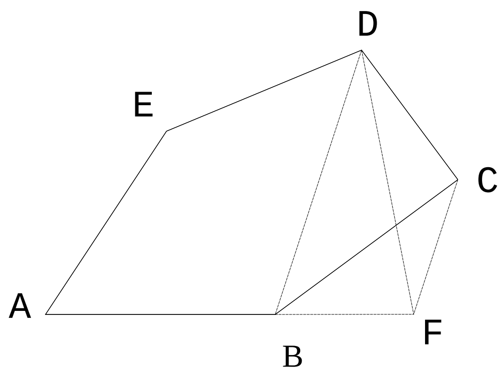
Dado o polígono ABCDE:



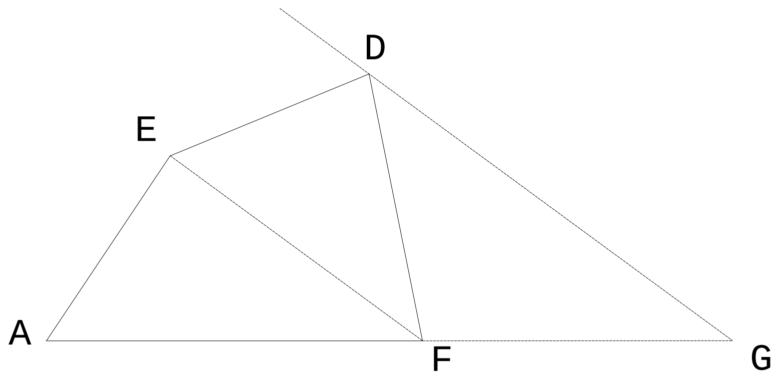

Apenas com o uso de uma régua sem escala, e um compasso, vamos transformá-lo num quadrado de mesma área.

Traça-se uma reta que passe por um dos vértices, C, e seja paralela à reta que passa pelos dois vértices adjacentes a ele, BD, encontrando assim o ponto $F \in AB$, pertencente à reta suporte de um dos lados adjacentes aos vértices B ou D.

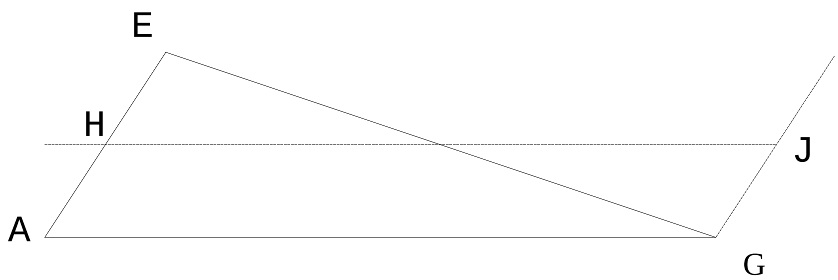
Como as áreas dos triângulos $\Delta BCD$ e $\Delta BFD$ são iguais, podemos construir o novo polígono ABFDE equivalente ao polígono ABCDE.



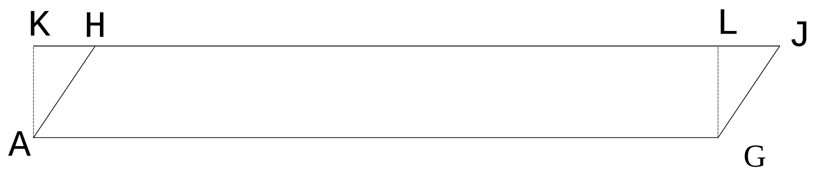

O mesmo será feito com uma reta paralela a FE passando por D, para se encontrar o ponto G. Então o $\Delta$FDE é equivalente ao $\Delta$FGE, ou seja, possuem a mesma área. O polígono ABCDE fica transformado no triângulo AGE.



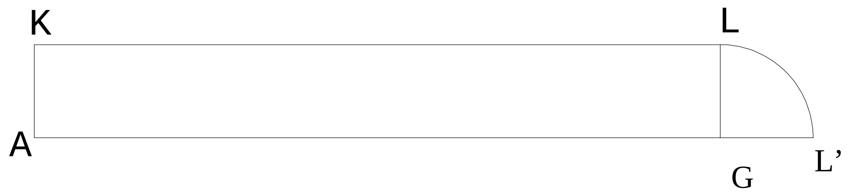

Construiremos a partir deste triângulo um paralelogramo de mesma área AGJH. Para isso traçamos uma paralela a AG, passando pelo ponto médio de EG, e outra paralela a AE passando por G, obtemos o ponto J.



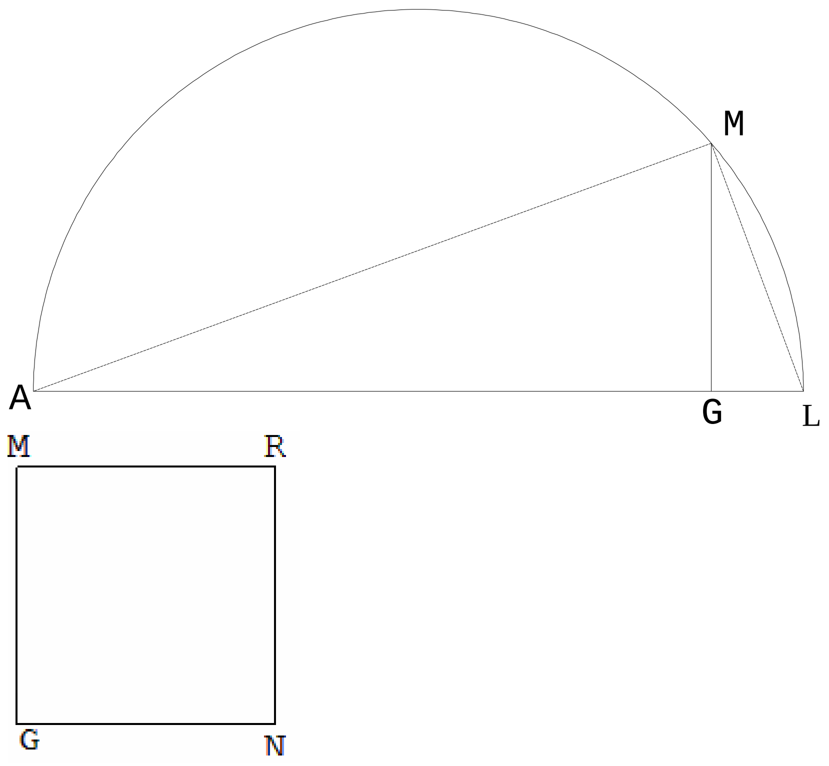

A partir desse paralelogramo obtemos o retângulo AGLK por construção de perpendiculares em A e G.




A área desse retângulo, que é igual à área do polígono ABCDE, é dada pelo produto AGxGL. Para obtermos o lado GM do quadrado de mesma área que esse retângulo, determinamos a média geométrica dos segmentos AG e GL’, ou seja, na linguagem atual, utilizando-se as relações métricas em um triângulo retângulo AGxGL’=(GM)$^2$, essa média pode ser obtida por meio da altura do triângulo retângulo AML’. Ou seja, prolonga-se AG até L’ de modo que GL=GL’. Desenha-se assim, o quadrado GMRN.




Assim, desenha-se o semicírculo AML’ cujo diâmetro seja AL’. Se prolongarmos GL do retângulo até que ele encontre o semicírculo, determinaremos M. GM será o lado do quadrado GMRN.



O polígono ABCDE é equivalente ao quadrado GMRN.

Um problema de quadratura que se tornou famoso por não ser possível solucioná-lo com os instrumentos euclidianos, a não ser aproximadamente, é o da quadratura do círculo (EVES, 2004). Este problema foi estudado por vários matemáticos gregos, bem como outros dois problemas, o da duplicação do cubo e o da trissecção do ângulo, que também ficaram famosos. A proposta era que os três problemas fossem solucionados apenas com régua e compasso euclidianos. Com o decorrer do tempo ficou provado que sob estas condições os problemas são insolúveis.

Por que os gregos se dedicavam a este tipo de problema? Esses três problemas eram desafios contemplativos, serviam para exercitar a razão e enaltecer o indivíduo, o que eram atitudes valorizadas por essa sociedade. Parte da elite grega se dedicava a estes problemas, também na tentativa de desvalorizar e se distanciar dos trabalhos braçais.

Gostaríamos de ressaltar que, apesar de nossa pesquisa focar esta matemática contemplativa grega, isto não quer dizer que não existia na época outro tipo de matemática, como, por exemplo, aquela dedicada à engenharia de guerra, ou a dedicada às construções. Entretanto foi neste período que surgiu esta matemática dedutiva.

Até o presente momento falamos sobre as questões sociais da Grécia antiga, e um pouco sobre como estas questões podem ter influenciado no fazer matemático da época. Mas falamos dessas influências de modo geral, pois não conseguimos evidências de como elas influenciaram nos trabalhos matemáticos que escolhemos discutir. Por isso, repetimos que existe uma separação, em nossa pesquisa, entre a parte que matemática propriamente dita e aquela que discute as práticas sociais.

## 4.4 A QUADRATURA DO CÍRCULO

Segundo Plutarco, Anaxágoras de Clazomene (cerca de 500-428 a. C.) ocupou-se com a tentativa de quadrar o círculo, enquanto esteve preso, acusado de impiedade, ao asseverar que o Sol não era uma divindade, mas uma pedra incandescente, e que a Lua era uma terra habitada que emprestava sua luz do Sol. Mas suas tentativas de quadratura não chegaram até nós (alguns ainda questionam a existência destas tentativas (SOUZA, 1973)). Anaxágoras foi um filósofo da natureza, mais do que um matemático.

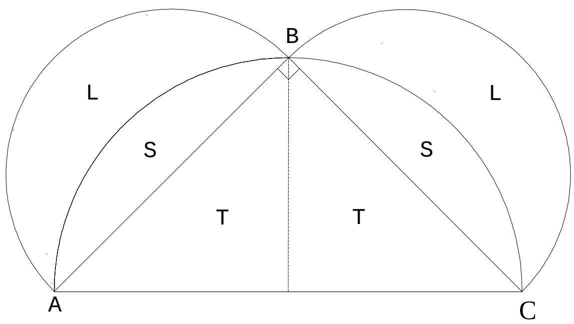
Um pouco mais jovem que Anaxágoras, Hipócrates de Quios (430 a.C.), que foi descrito - segundo Baron (1985) - por Eudemo (350 a.C.), estudou a quadratura das lúnulas[3] . Na história da Matemática, segundo Boyer (1998), Hipócrates demonstrou um teorema importante para a quadratura de círculos. Este teorema encontra-se detalhado em Euclides, XII, 2.

O teorema diz que as áreas de círculos estão entre si como o quadrado de seus diâmetros, ou seja, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$ (I).

> Embora não possamos inferir das informações que possuímos detalhes precisos sobre os trabalhos de Hipócrates, parece que ele estava no caminho certo para estabelecer que algumas lúnulas eram quadráveis e outras não (BARON, v.1, p.33, 1985).

Apresentaremos dois casos de quadraturas de lúnulas citados por Baron (1985).

1º) Dado um triângulo retângulo isósceles ABC inscrito em um semicírculo de diâmetro AC, provemos que as lúnulas (L), geradas pelos semicírculos cujos diâmetros são os catetos AB e BC, são quadráveis.




De (I) , temos:

$$\frac{\text{semicírculo (AB)}}{\text{semicírculo (AC)}} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{2}$$

Como AB = BC, e ABC é um triângulo retângulo $AC^2 = AB^2+BC^2$, então

$AC^2 = 2AB^2$ e $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{2}$. Assim usando as notações da figura para as áreas, temos:

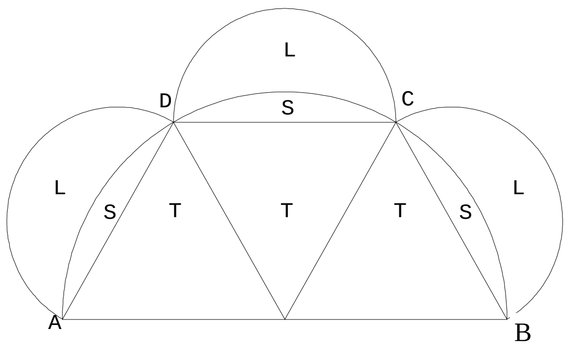
[3] Uma luna, ou lúnula, é uma figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes (BOYER, 1998, p.94).

$$\frac{1}{2}=\frac{\text{semicírculo}AB}{\text{semicírculo}AC}=\frac{L+S}{2(S+T)} \ .$$

Então , L+S = S+T e L=T

Portanto a lúnula é quadrável, pois sua área é igual à do triângulo T, que também é quadrável.

2º) Dado um hexágono regular inscrito em um círculo, traçaremos semicírculos com diâmetros em seus lados e verificaremos se as lúnulas L são quadráveis ou não.




Temos que AD = DC = CB = (1/2)AB, e

$$\frac{\text{semicírculo}\,(AD)}{\text{semicírculo}\,(AB)}=\frac{AD^2}{AB^2}=\frac{1}{4}\ ,\ \text{assim}$$

$$\frac{L+S}{3(S+T)}=\frac{1}{4}\quad \text{em que}\quad 4L + 4S = 3S + 3T$$

Logo 3T = 4L + S, S = 3T - 4L

Assim, se a lúnula for quadrável, o semicírculo também o será. Mas Hipócrates nunca provou que esta lúnula é quadrável (BARON, 1985). Entretanto transformou o problema de quadrar um círculo em um problema de quadratura de lúnulas. Como em nosso exemplo da quadratura do polígono, os trabalhos envolvidos com a quadratura buscavam a transformação de uma figura em outra equivalente. Esta foi uma prática utilizada por Hipócrates e, também, por Arquimedes.

Entretanto Arquimedes utilizou o método da exaustão de Eudoxo (não por régua e compasso) para demonstrar que "a área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo retângulo, no qual um dos lados, partindo do vértice cujo ângulo é reto, é igual ao raio, e o outro é igual à circunferência do círculo" (BARON, 1985, v.1, p.34). Sendo assim, já que podemos quadrar um triângulo, ficaria provado, por conseqüência, a quadratura do círculo, desde que soubéssemos construir, com régua e compasso, um segmento igual ao da circunferência.

## 4.5 ARQUIMEDES E A QUADRATURA DO CÍRCULO

Quem foi Arquimedes? Um matemático grego, filho do astrônomo Fídias e conselheiro do rei Hierão (STRUIK, 1997). Nasceu em Siracusa por volta de 287 a.C., e morreu durante um saque à cidade em 212 a.C. (EVES, 2004).

Segundo Katz (1998), Arquimedes era um engenheiro militar que utilizava seus conhecimentos matemáticos a serviço de seu rei. As máquinas de guerra que criou conseguiram conter ataques do exército romano sobre Siracusa durante meses, ou nas palavras de Heath (2002), “some of his mechanical inventions were used with great effect against te Romans during the siege of Siracusa (p. xvi)”.

Arquimedes era um homem que cultuava tanto a racionalidade (*logos*) quanto a excelência individual (*agon*), além de ser sustentado por um rei. Mas por que falar de guerra se o nosso trabalho é sobre educação matemática? Nossa tentativa foi a de mostrar que a Matemática foi, e continua sendo, utilizada para fins de destruição humana, até porque, um dos papéis da problematização da história na educação matemática é justamente tirar a Matemática de seu isolamento, ou ao menos os matemáticos, que, como Arquimedes, tiveram influência decisiva nas guerras.

Alguns podem argumentar que os trabalhos de Arquimedes voltados à engenharia de guerra eram meros divertimentos e que não tinham importância para ele.

> After his return to Syracuse he lived a life entirely devoted to mathematical research. Incidentally he made himself famous by a variety of ingenious mechanical inventions. These things were however merely the “diversions of geometry at play”, and attached no importance to them (HEATH, 2002, p. xvi).

Mas o fato é que o conhecimento matemático era utilizado para guerra, mesmo que Arquimedes pudesse desprezar, ou tratar como divertimento, esse tipo de trabalho.

Apesar de historiadores da Matemática comentarem que alguns trabalhos de Arquimedes influenciaram e foram influenciados por guerras, não pudemos afirmar que o trabalho da quadratura do círculo proposta por Arquimedes (que apresentaremos mais adiante) teve influência nas guerras de seu rei. Ou seja, a prática de guerra pode ter influenciado e ter sido influenciada por trabalhos matemáticos de Arquimedes, mas nossa pesquisa não conseguiu mostrar isto.

Mesmo com esta tentativa inicial de mostrar Arquimides como um intelectual influenciado, por exemplo, pelas guerras do rei Hierão, o isolamento do trabalho de quadratura do círculo continua, já que não conseguimos evidências de como este trabalho possa ter se relacionado com outras práticas sociais.

Novamente, quando começamos a falar sobre a matemática, as questões sociais ficam de lado, como segue abaixo.

Segundo Baron (1985), Arquimedes foi o primeiro a apresentar uma prova rigorosa de que *a área do circulo é igual ao comprimento da circunferência vezes o raio dividido por dois*. Para sua demonstração ele utilizou duas idéias correntes na matemática grega: *o método de exaustão*; e *a prova por redução ao absurdo*. Antes de discutirmos a quadratura proposta por Arquimedes, discutiremos essas duas idéias.

Segundo Eves (2004), o método da exaustão:

> [...] admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: *Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor do que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie* [grifo do autor] (p. 419).

Ou seja, temos uma grandeza que será subdivida (chamaremos de $a_1$) e outra grandeza pré-determinada c. Utilizaremos a notação algébrica para explicar a proposição, mas devemos ressaltar que ela não existiu na época dos gregos, eles se expressavam literalmente (BARON, 1985).

Tomemos $a_1 > b_1 > a_1/2$, e definamos $a_2 = a_1-b_1$, então teremos $a_2 < a_1$. Observemos que a restrição $a_1 > b_1 > a_1/2$ não é tão simples de ser vista na frase *Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade*, pois para os gregos antigos não fazia sentido a subtração de uma grandeza, por exemplo, um comprimento de um outro comprimento, que resultasse um comprimento negativo. Então, quando se diz que de uma grandeza se subtrai uma parte não menor que sua metade, quer se dizer que o comprimento é menor do que a dada grandeza e maior de que a metade desta grandeza. Façamos agora $a_3 = a_2-b_2$, com $a_2 > b_2 > a_2/2$, segue que $a_3 < a_2$. Se continuarmos com esse processo até um *n* natural, teremos $a_n = a_{n-1} - b_{n-1}$, com $a_{n-1} > b_{n-1} > a_{n-1}/2$, e $a_n < c$. Ou seja, por menor que seja c, sempre conseguimos determinar um $a_n$, menor que c, por este processo.

A outra idéia muito utilizada pelos gregos é a prova por *redução ao absurdo*. Por exemplo, se temos que provar que a veracidade de uma proposição p, assumimos ~p como verdadeira (pois provando que ~p é falsa teremos que p é verdadeira) e provamos que “~p implica q e ~q”, ou seja, uma mesma afirmação (~p que assumimos como verdadeira) implica em uma segunda afirmação (q) e na negação desta (~q), o que, segundo a lógica clássica, é impossível, pois uma afirmação ou é verdadeira ou é falsa, e não os dois ao mesmo tempo (princípio do terceiro excluído). Assim temos que nossa premissa ~p é falsa, implicando p verdadeira.

Essas duas idéias da matemática grega, o método de exaustão e a prova por redução ao absurdo, foram utilizadas por Arquimedes em seu tratado intitulado *A Medida do Círculo*, Proposição 1. Segundo Baron (1985), Arquimedes afirma:

> *A área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo retângulo, no qual um dos lados, partindo do vértice cujo ângulo é reto, é igual ao raio, e o outro é igual à circunferência do círculo.*[grifo do autor]
> Seja C o círculo, e K o triângulo em questão.
> Então, se o círculo não for igual a K, então ele deve ser maior ou menor.
> Suponhamos que o círculo seja maior do que K.
> Inscreva um quadrado ABCD, divida AB, BC, CD, DA ao meio, depois (se necessário) suas metades e assim por diante, até que os lados do polígono inscrito (cujos pontos angulares são os pontos da divisão) contenham segmentos cuja soma seja menor do que o excesso da área do círculo menos K.
> Assim, a área do polígono é maior do que K.
> Seja AE qualquer lado dele, e ON a perpendicular baixada sobre AE do centro O.
> Então, ON é menor do que o raio do círculo, portanto menor do que o lado oposto ao ângulo reto de K. Também o perímetro do polígono é menor do que a circunferência do círculo, isto é, menor do que o outro lado adjacente ao ângulo reto de K.
> Assim, a área do polígono é menor do que K. Isto é inconsistente com a hipótese.
> Assim, a área do círculo não pode ser maior do que K.
> Se possível, seja o círculo menor do que K.
> Circunscreva um quadrado, e trace dois lados adjacentes, tocando o círculo nos pontos E e H encontrando-se em T. Divida os arcos ao meio, entre os pontos adjacentes de contato, e tome as tangentes aos pontos da divisão.
> Seja A o ponto médio do arco EH, e FAG a tangente em A.
> Então o ângulo TAG é um ângulo reto.
> Logo TG > GA
>             > GH
> Segue que o triângulo FTG é maior do que a metade da área TEAH. Do mesmo modo, se o arco AH é dividido ao meio e a tangente do ponto da divisão é tomada, ela cortará mais da metade da área de GAH.

> Continuando assim o processo, chegamos finalmente a um polígono circunscrito cujos espaços entre ele e o círculo, somados, serão menores do que o excesso entre K e a área do círculo.
> Logo, a área do polígono será menor do que K.
> Como a perpendicular de O sobre qualquer lado do polígono é igual ao raio do círculo, enquanto o perímetro do polígono é maior do que a circunferência do círculo, segue-se que a área do polígono é maior do que o triângulo K, o que é impossível.
> Portanto, a área do círculo não é menor do que K.
> Como a área do círculo não é maior e nem menor do que K, só pode ser igual a K (v. 1, p. 34).

Procuraremos explicar esta demonstração por meio de uma notação diferente da utilizada na citação. Primeiro Arquimedes assume que $A_c > K$ e chega a duas verdades, que a área do polígono inscrito ($p_n$) é maior do que K, e que a área de $p_n$ é menor do que K, ou seja, partindo de uma suposição ele chega a uma contradição.

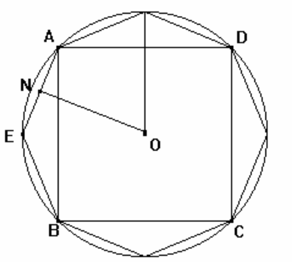



Figura 1

Para construir esse absurdo, Arquimedes utiliza o método de exaustão. Seja $p_n$ cada um dos polígonos inscritos, então teremos que $p_{n+1} > p_n > ... > p_2 > p_1$. Cada polígono sucessivo é formado de seu antecessor pelo acréscimo de um conjunto de triângulos, cada um dos quais com área maior do que a metade do seguimento circular no qual é inscrito.

AHD = $\frac{1}{2}$ADPQ > $\frac{1}{2}$segmento circular AHD.

Daí temos que $A_{p2} - A_{p1} > \frac{1}{2}(A_C - A_{p1})$ e em geral

$$A_{p_{r+1}} - A_{p_r} > \frac{1}{2}(A_C - A_{p_r}).$$

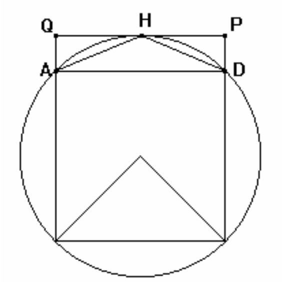



Figura 2

Logo, pelo método de exaustão, teremos que, para n grande, a diferença entre $A_C$ e $A_{p_n}$ pode ser considerada tão pequena quanto quisermos. E assim teremos que $A_C - A_{p_n} < A_C - K$, que implica $K < A_{p_n}$.

Como cada $p_n$ é construído de triângulos cujas alturas ($h_n$) são menores do que o raio, e suas bases ($b_n$) são menores do que os arcos circulares sobre as quais elas se estendem, temos que $A_{p_n} = n\frac{h_n b_n}{2} = \frac{h_n(nb_n)}{2} < \frac{r2\pi r}{2} = K$, pois $nb_n < 2\pi r$ (onde $r$ é o raio do círculo).

Assim pode-se construir um absurdo, pois, ao supormos que $A_C > K$, encontramos que $A_{p_n} < K$ e $A_{p_n} > K$.

Em seguida Arquimedes supõe que $A_c < K$ e chega a outras duas verdades, que a área do polígono circunscrito $A_{P_n} < K$, e que $A_{P_n} > K$, o que é contraditório.

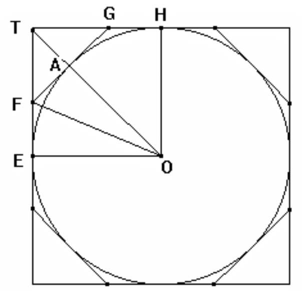



Figura 2

Circunscrevendo polígonos, começando pelo quadrado e prosseguindo por bisseção de arcos (como mostra a figura), teremos $P_1 > P_2 > ... > P_n$. Daí segue que, à medida que jogamos fora os triângulos sucessivos (para construirmos novos polígonos), os triângulos em questão são em cada caso maiores do que a metade da diferença entre o polígono anterior e a área do círculo.

$$A_{P_n} - A_{P_{n+1}} > \frac{1}{2}(A_{P_n} - A_C)$$

Novamente o método de exaustão entra para mostrar que podemos chegar a um polígono $P_r$ tal que $A_{P_r} - A_C < K - A_C$. Logo, $A_{P_n} < K$. Mas, para todos os polígonos circunscritos, $A_{P_n} > K$, pois cada polígono é constituído de triângulos, com altura maior do que o raio, e o seu perímetro é maior do que o perímetro do círculo.

Segue-se que $A_C < K$ implica $A_{P_n} > K$ e $A_{P_n} < K$, o que é absurdo. Portanto não pode ser $A_C$ menor do que K.

Por fim, como $A_C$ não é menor do que K e nem maior do que K, temos $A_C = K$.

Mas a quadratura de figuras não estava ligada ao uso de régua e compasso? Sim, mas intitulamos de quadratura todo método que procura encontrar um quadrado equivalente a uma figura dada. Quando os instrumentos euclidianos não são utilizados, chama-se de método indireto de quadratura (BARON, 1985).

Arquimedes mostrou que um círculo é equivalente a um triângulo retângulo em que um dos catetos é o raio e o outro é a circunferência do círculo. Mas não é um quadrado equivalente que deve ser obtido? Sim, entretanto, como discutimos na seção 4.1, podemos transformar o triângulo num quadrado, e os gregos faziam isso. Logo, determinar um triângulo equivalente ao círculo é quadrar o círculo.

A maneira de demonstrar apresentada por Arquimedes (utilizando o método de exaustão e a prova por absurdo) prevaleceu na cultura matemática ocidental por muito tempo (BARON, 1985). Simon Stevin (1548-1620), engenheiro do exército do príncipe Maurício de Orange, que escreveu sobre centros de gravidade e sobre hidráulica, e Luca Valério, que escreveu sobre centros de gravidade e sobre a quadratura da parábola, foram os primeiros a modificarem radicalmente a estrutura de demonstração de Arquimedes (STRUIK, 1997). Eles passaram a utilizar ou polígonos inscritos ou circunscritos. Subdividiam os lados dos polígonos o quanto fosse necessário, justificando que a divisão dos lados de um dos polígonos era suficiente para mostrar a igualdade da área do círculo e do polígono, deixando de lado a redução ao absurdo. Entretanto, estas mudanças foram aceitas por uns, mas não por outros.

Ao final desta seção voltamos, mais uma vez ao problema da separação entre os aspectos matemáticos e as práticas sociais. Este problema se torna ainda mais grave na próxima seção, pois a quadratura de hipérboles proposta por Fermat parece, em nossa pesquisa, ainda mais isolada de outros campos do conhecimento do que os trabalhos discutidos até o momento.

A nosso ver, esse problema se deve ao que chamamos de pré-escolha dos episódios a serem investigados, isto é, por termos escolhido previamente que nossa pesquisa se direcionaria à quadratura de lúnulas de Hipócrates, à quadratura do círculo de Arquimedes e à quadratura de hipérboles de Fermat, não conseguimos evidenciar as relação entre a Matemática e outras práticas sociais. Possivelmente por que esses episódios não podem nos proporcionar essas relações, por falta de fontes ou das relações. Retomaremos a essa questão no capítulo final do trabalho, procurando explicitá-la.

## 4.4 MÉTODO DE QUADRATURA DE FERMAT

Quem foi Fermat? Pierre de Fermat nasceu em Beaumont, no sul da França em 1601. Ele se formou em direito pela universidade de Toulouse em 1631, trabalhou como jurista em sua cidade natal até o resto de seus dias. Nunca viajou para muito longe de sua cidade devido ao seu trabalho. Morreu no ano de 1665. Seu pai era um comerciante de couro, e Fermat recebeu sua educação inicial em casa. Apesar de não viajar muito, manteve constante contado com vários matemáticos da época, por meio de correspondências. Segundo Katz (1998), Fermat nunca publicou seus trabalhos para não ser forçado a dar muitas explicações, como era exigido em seu trabalho como advogado constantemente.

Mas como pode? Estamos falando de matemáticos ou de advogados? Nessa época, século XVII, ainda não existia o matemático que conhecemos hoje, ou seja, não havia a profissionalização do matemático, que só veio a ocorrer no século XIX (LINS, 2005). Advogados podiam falar de matemática e serem levados a sério por isso, e até mesmo serem consagrados por autores de livros de História da Matemática como grandes matemáticos. Prova disso é que os correspondentes de Fermat respondiam suas cartas, e hoje ele é considerado como um dos fundadores da Teoria dos Números. Junto com Pascal, iniciou o que seria a Teoria das Probabilidades (EVES, 2004).

O trabalho matemático de Fermat situa-se em um momento de mudança no fazer matemático, momento em que, segundo Baron (1985), os matemáticos estavam deixando alguns aspectos da matemática dos antigos gregos, na tentativa de resolverem novos problemas.

No capítulo 2, seção 2.1, apresentamos uma caracterização da matemática no período medieval, que está dentro do *período das magnitudes variáveis* (ALEKSANDROV, KOLMOGOROV & LAVARENT'EV, 1999). Como veremos, Fermat utilizou em sua demonstração algumas idéias gregas, mas se diferenciou no momento em que passou a trabalhar a partir de equações para encontrar o lugar geométrico e não mais só com as figuras e pontos com os quais os gregos trabalharam. Entretanto Fermat não é o representante mais fiel desse período já que, como afirma Baron (1985), ele "permaneceu fiel à 'estrutura de demonstração dos antigos'(v.2, p.26)."

A seguir discutiremos o método de quadratura de hipérboles proposto por Fermat. Para tanto, apresentaremos inicialmente uma citação extensa sobre este método. Em seguida fazermos recortes desta citação para explicitar nossos questionamentos.

> *Dada uma progressão geométrica cujos termos decrescem indefinidamente, a diferença entre dois termos consecutivos desta progressão está para o menor deles assim como o maior está para a soma de todos os termos seguintes.*
> Utilizando este resultado, discutiremos o problema da quadratura de hipérboles: eu defino hipérboles como curvas tendendo ao infinito, as quais, como *DSEF*, possuem a seguinte propriedade. Sejam *RA* e *AC* assíntotas que podem ser estendidas indefinidamente; tracejamos as *EG*, *HI*, *NO*, *MP*, *RS*, etc. paralelas às assíntotas. Sempre teremos a mesma razão entre uma dada potência de *AH* e a mesma potência *AG* por um lado, e uma potência *EG* (a mesma ou diferente da precedente) e a mesma potência de *HI* por outro. Por potências, eu quero dizer não apenas quadrados, cubos, quartas potências, etc., expoentes 2, 3, 4, etc., mas também raízes simples com expoente unitário.
> *Eu digo que todas essas hipérboles infinitas, exceto a de Apolônio, ou a primeira, são quadráveis pelo método de progressão geométrica, segundo um procedimento uniforme e geral.*
> Consideremos, por exemplo, as hipérboles definidas pelas propriedades $AH^2/AG^2=EG/HI$ e $AO^2/AH^2=HI/NO$, etc. Eu digo que a área indefinida da região limitada pela curva *ES*, pela assíntota *GOR* e com base *EG* é igual a uma certa área retilínea.
> Consideremos uma progressão geométrica com termos decrescentes; seja *AG* o primeiro Termo, *AH* o segundo, Ao o terceiro, etc. Suponhamos que esses termos estejam suficientemente próximos entre si, de tal modo que possamos usar o método de Arquimedes de acordo com Diofanto, isto é, aproximar o paralelogramo retilíneo *GExGH* ao quadrilátero *GHIE*; além disso, devemos supor que os primeiros intervalos *GH*, *HO*, *OM*, etc. dos termos consecutivos são suficientemente próximos de tal modo que possamos usar o método de exaustão de Arquimedes, inscrevendo e circunscrevendo polígonos. É suficiente fazer esta observação uma vez e não precisamos repeti-la e insistir muito sobre um precedente bem conhecido dos matemáticos.

Agora, como *AG/AH=AH/AO*, temos também *AG/AH=GH/HO=HO/OM*, para intervalos. Mas para os paralelogramos:

$$\frac{EG \times GH}{HI \times HO} = \frac{HI \times HO}{ON \times OM}\ .$$

Na realidade, a razão (*EG x GH*)/(*HI x HO*) dos paralelogramos consiste das razões *EG/HI* e *GH/HO*, mas como indicamos *GH/HO=AG/AH*; logo a razão (*EG x GH*)/(*HI x HO*) pode ser decomposta nas razões *EG/HI* e *AG/AH*. Por outro lado, por construção, $EG/HI=AH^2/AG^2$ ou *AO/AG*, por causa da proporcionalidade dos termos; portanto a razão (*EG x GH*)/(*HI x HO*) decompõe-se nas razões *AO/AG* e *AG/GH*; agora *AO/AH* decompõe-se nas mesmas razões; encontramos conseqüentemente que: (*EG x GH*)/(*HI x HO*) = *AO/AH* = *AH/AG*.
Do mesmo modo provamos que (*HI x HO*)/(*NO x MO*) = *AO/AH*.
Mas as retas *AO*, *AH*, *AG*, que formam as razões dos paralelogramos, definem, por construção, uma progressão geométrica; então os infinitos paralelogramos *EG x GH*, *HI x HO*, *NO x OM*, etc. formarão uma progressão aritmética cuja razão será AH/AG. Logo, de acordo com o teorema básico de nosso método, *GH*, a diferença entre dois termos consecutivos estará para o menor termo *AG*, assim como o primeiro termo da progressão, a saber, o paralelogramo *GE x GH*, estará para a soma de todos os outros paralelogramos. De acordo com Arquimedes, esta soma é a figura infinita limitada por *HI*, a assíntota *HR* e a curva estendida infinitamente, *IND*.
Agora se multiplicarmos os dois termos por *EG*, obtemos *GH/AG*= (*EG x GH*)/(*EG x AG*); aqui *EG x GH* está para a área infinita cuja base é *HI* assim como *EG x GH* está para *EG x AG*. Portanto, o paralelogramo *EG x AG* é adequado à figura em questão; se acrescentarmos a ambos os lados do paralelogramo *EG x GH*, o qual, devido ao número infinito de subdivisões, desaparecerá, chegamos à conclusão de que será difícil confirmar por meio de uma demonstração mais longa utilizando os argumentos de Arquimedes, a saber, que para este tipo de hipérbole, o paralelogramo, *AE* é equivalente à área limitada pela base *EG*, a assíntota *GR* e a curva *ED* estendida infinitamente.
Não é difícil esta idéia a todas as hipérboles definidas acima, exceto para aquela que já mencionamos [grifo do autor] (STRUIK, 1969, citado por Baron, p.26, unidade 2, 1985).

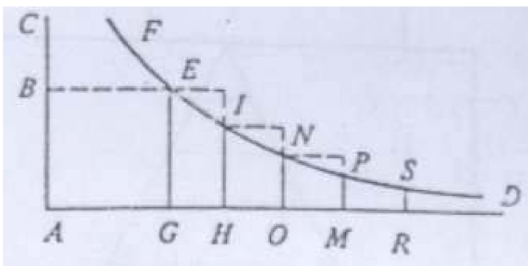



Figura retirada de Baron (1985, v. 2, p. 27)

Possivelmente em uma primeira leitura seria difícil compreender o que Fermat está propondo, talvez até com mais leituras. Se acrescentarmos a isso o fato de que a notação utilizada aqui não foi a utilizada por Fermat, já que ele usava a notação proposta por Viète e que, segundo Eves (2004), “o que escreveríamos

$$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$$

para ele [Viète] seria

$$B5\ in\ A\ quad - C\ plano\ 2\ in\ A + cub\ aequatur\ D\ solido\ .\text{”(p. 310)},$$

chegaremos a um dos problemas apontados para a participação da história na Educação Matemática: a dificuldade em entender a notação e as idéias da época, que requer tempo demais, sendo às vezes de impossível compreensão (MIGUEL, 1997).

Não acreditamos que este argumento invalide a busca de diálogo com a História, pelo contrário. O que buscamos em nosso trabalho é justamente superar esta dificuldade, ou ao menos encaminhá-la, para que ela não seja um empecilho, mas uma riqueza.

Para tentar entender esta demonstração destacamos e discutimos algumas partes, procedendo de maneira semelhante aquela que utilizamos anteriormente, ou seja, utilizaremos uma notação diferente da indicada na citação. Primeiro descreveremos a forma como Fermat define a hipérbole.

> [...] eu defino hipérboles como curvas tendendo ao infinito, as quais, como *DSEF*, possuem a seguinte propriedade. Sejam *RA* e *AC* assíntotas que podem ser estendidas indefinidamente; tracejamos as *EG*, *HI*, *NO*, *MP*, *RS*, etc. paralelas às assíntotas. Sempre teremos a mesma razão entre uma dada potência de *AH* e a mesma potência *AG* por um lado, e uma potência *EG* (a mesma ou diferente da precedente) e a mesma potência de *HI* por outro. Por potências, eu quero dizer não apenas quadrados, cubos, quartas potências, etc., expoentes 2, 3, 4, etc., mas também raízes simples com expoente unitário.

Um primeiro destaque que fazemos sobre essa parte é que nos chamamos de eixos coincide, nesse problema de quadratura de hipérboles, com que ele chama de assíntotas (*RA* e *AC*), ou seja, são referências que serão utilizadas para descrever a curva em questão. Faremos, novamente, um paralelo com a notação atual, tomando *RA* como o eixo x e *AC* como eixo y. Então os segmentos *EG*, *HI*, *NO*, *RS*, etc. podem ser vistos como $y_o, y_1, y_2, y_3$, etc., e $x_o$, $x_1$ seriam *AG* e *AH*, respectivamente. Digamos que uma das potências em questão seja *m* e a outra *n*. Então, $\frac{x_1^m}{x_0^m} = \frac{y_0^n}{y_1^n}$, ou seja, “a mesma razão entre uma dada potência de *AH* e a mesma potência *AG* por um lado, e uma potência *EG* (a mesma ou diferente da precedente) e a mesma potência de *HI* por outro”. Mas como chegamos desta razão à fórmula geral das hipérboles $y^n = \frac{k}{x^m}$, isto é, como a proporção indicada por Fermat determina uma hipérbole?

Uma maneira de responder a esta questão é recorrendo às operações entre igualdades, isto é, se fizermos $y_1^n = \frac{k}{x_1^m} \Rightarrow y_1^n x_1^m = k$ e $y_0^n = \frac{k}{x_0^m} \Rightarrow y_0^n x_0^m = k$, teremos que $y_1^n x_1^m = y_0^n x_0^m$, e daí $\frac{x_1^m}{x_0^m} = \frac{y_0^n}{y_1^n}$. Entretanto não podemos afirmar que esta era a justificativa dada por Fermat, já que utilizamos operações que são corriqueiras atualmente, e que podiam não ser quando ele fez este trabalho.

Na segunda parte destacada em itálico na demonstração, há referência a uma determinada hipérbole, à qual não se aplica o método que estamos discutindo. Esta curva particular chamada de hipérbole de Apolônio é da forma $y = \frac{k}{x}$. Fermat parece ter percebido a limitação de suas idéias quanto a essa curva em particular.

Outro ponto neste destaque é a idéia de progressão geométrica. Segundo Baron (1985), Fermat utilizava o termo *proporção continuada*, que foi atribuído a Euclides para o que hoje conhecemos como progressão geométrica (observe que, nessa tradução do texto de Fermat, o termo utilizado é progressão geométrica e não progressão continuada, o que nos faz pensar que o tradutor traduziu não só a palavra, mas a idéia). Um conjunto de grandezas está em proporção continuada quando a primeira grandeza está para a segunda, bem como a segunda está para a terceira, a terceira para a quarta e assim sucessivamente.

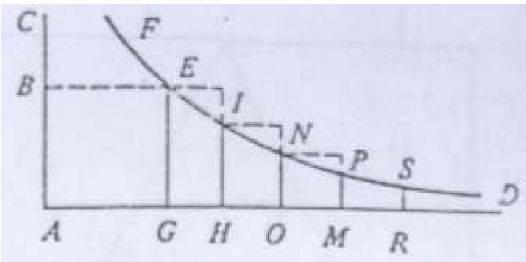



Figura retirada de Baron (1985, v. 2, p. 27)

Seguindo a demonstração, um caso particular da hipérbole é tomado, $\frac{x_1^2}{x_0^2} = \frac{y_0}{y_1}$ (ou $y = \frac{k}{x^2}$), e um intervalo de integração é definido, isto utilizando linguagem atual. Está sendo feita a afirmação que será provada, qual seja, de que uma determinada área delimitada pela curva possui a mesma área que um determinado retângulo.

Os valores das abscissas são considerados em progressão geométrica com termos decrescentes. Fica a dúvida sobre o que ele quer dizer com termos decrescentes, já que os termos da progressão são $x_o$, $x_1$, $x_2$, ... e estes valores são crescentes, pois $x_o$ é o valor do segmento *AG*, $x_1$ é o valor de *AH*, e assim por diante. Com isso, ele propõe que os termos sejam suficientemente próximos para utilizar o método de Arquimedes, para aproximar o retângulo *GE*x*GH* do quadrilátero *GHIE*, e também que as distâncias entre os termos consecutivos sejam pequenas para que se possa circunscrever e inscrever polígonos, como no método de exaustão.

O método ao qual Fermat se refere é semelhante ao método de exaustão proposto por Arquimedes para a quadratura do círculo. Arquimedes utiliza para sua quadratura, também, a redução ao absurdo. Mas parece que Fermat não está muito preocupado em provar esta afirmação, até porque, segundo ele, "é suficiente fazer esta observação uma vez e não precisamos repeti-la e insistir muito sobre um precedente bem conhecido dos matemáticos".

Até aqui Fermat coloca suas definições e dá algumas idéias de sua demonstração. Em seguida, será discutido como Fermat mostra, com as suposições já apontadas, que os retângulos circunscritos (e consequentemente os inscritos) estão em progressão geométrica e, assim, utiliza o resultado apresentado no começo de seu texto, para então mostrar qual a área procurada.

Como os termos estão em progressão geométrica, temos que $\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots$, e, também, que $\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \ldots$, pois $\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{qx_0 - x_o}{qx_1 - x_1} = \frac{x_0(q-1)}{x_1(q-1)} = \frac{x_0}{x_1}$. As outras igualdades podem ser obtidas da mesma forma. Agora vamos às razões entre os paralelogramos: $\frac{y_0(x_1 - x_0)}{y_1(x_2 - x_1)} = \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_2(x_3 - x_2)}$. Para mostrar esta igualdade, Fermat mostra que cada um dos membros é igual a uma razão entre elementos da progressão $x_o$, $x_1$, $x_2$, ... .

Tomemos o primeiro membro da igualdade. Como $\frac{x_0}{x_1}=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_1}$, temos $\frac{y_0(x_1-x_0)}{y_1(x_2-x_1)}=\frac{y_0x_0}{y_1x_1}$. Pela definição da hipérbole $\frac{y_0}{y_1}=\frac{x_1^2}{x_0^2}$, ou ainda $\frac{y_0}{y_1}=\frac{x_2}{x_0}$, pois os termos são proporcionais, ou seja, $\frac{x_1^2}{x_0^2}=\frac{x_2}{x_0}$. O que implica $\frac{y_0(x_1-x_0)}{y_1(x_2-x_1)}=\frac{y_0x_0}{y_1x_1}=\frac{x_2x_0}{x_0x_1}=\frac{x_2}{x_1}$. Mas $\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1}{x_0}$, assim a razão entre os dois primeiros paralelogramos é $\frac{x_1}{x_0}$. Da mesma maneira é possível mostrar que a razão entre os paralelogramos consecutivos tem mesma razão. Logo os paralelogramos também formam uma progressão geométrica, isto é, $\frac{x_1}{x_0}=\frac{y_0(x_1-x_0)}{y_1(x_2-x_1)}=\frac{y_1(x_2-x_1)}{y_2(x_3-x_2)}=\ldots$.

Com esta progressão de paralelogramos, Fermat utiliza o resultado apresentado inicialmente:

> *Dada uma progressão geométrica cujos termos decrescem indefinidamente, a diferença entre dois termos consecutivos desta progressão está para o menor deles assim como o maior está para a soma de todos os termos seguintes.*

Segundo ele, a diferença entre dois termos consecutivos é $x_1-x_0$ o menor termo desta diferença é $x_0$ e o maior termo é $y_0(x_1-x_0)$, que é o maior dos paralelogramos. Portanto $\frac{x_1-x_0}{x_0}=\frac{y_0(x_1-x_0)}{y_1(x_2-x_1)+y_2(x_3-x_2)+y_3(x_4-x_3)+\ldots}$. Novamente remetendo a Arquimedes, ele indica que a soma na proporção é a área da curva infinita limitada por *HI*, a assíntota *HR* e a curva *IND*. Mas ainda falta o paralelogramo *EG*x*GH*.

Multiplicando o primeiro membro da igualdade por $\frac{y_0}{y_0}=1$, temos $\frac{y_0(x_1-x_0)}{y_0x_0}=\frac{y_0(x_1-x_0)}{y_1(x_2-x_1)+y_2(x_3-x_2)+y_3(x_4-x_3)+\ldots}$, portanto $y_0x_0$ é a área que procuramos, quando as subdivisões do paralelogramo *EG*x*GH* são tantas que o fazem desaparecer.

Apresentaremos a seguir o modo como Katz (1998) aborda esta mesma demonstração de Fermat para a quadratura de hipérboles, para que possamos questionar o modo de se olhar para a história, e para os textos históricos.

Tomemos uma hipérbole $y = \frac{p}{x^k}$ e sejam os valores das abscissas em progressão geométrica, isto é, $x_0$, $x_1 = qx_0$, $x_2 = q^2 x_0$, e assim por diante. Se o valor de $q$ for suficientemente próximo de 1, então a distância entre as abscissas sucessivas serão tão pequenas quanto desejarmos.

Fermat toma retângulos circunscritos à curva em cada intervalo $[x_{i-1} - x_i]$. E então determina a área dos sucessivos retângulos.

$$R_0 = (x_1 - x_0)y_0 = x_0(q-1)\frac{p}{x_0^k} = (q-1)\frac{p}{x_o^{k-1}},$$

$$R_1 = (x_2 - x_1)y_1 = qx_0(q-1)\frac{p}{x_1^k} = qx_0(q-1)\frac{p}{q^k x_o^k} = \frac{1}{q^{k-1}}R_1$$

$$R_2 = (x_3 - x_3)y_2 = q^2 x_0(q-1)\frac{p}{x_2^k} = q^2 x_0(q-1)\frac{p}{q^{2k} x_o^k} = \frac{1}{q^{2(k-1)}}R_1$$

Ou seja, os retângulos estão em progressão geométrica. Logo a soma deles é

$$R = R_0 + R_1 + R_2 + \ldots = R_0 + \frac{1}{q^{k-1}}R_0 + \frac{1}{q^{2(k-1)}}R_0 + \ldots = R_0\left[1 + \frac{1}{q^{k-1}} + \frac{1}{q^{2(k-1)}} + \ldots\right]$$

Entre colchetes temos a soma de uma progressão geométrica infinita. Como a soma de uma série geométrica é $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$, assim,

$$R = R_0\left[1 + \frac{1}{q^{k-1}} + \frac{1}{q^{2(k-1)}} + \ldots\right] = R_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{k-1}}} = (q-1)\frac{p}{x_0^{k-1}}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^{k-1}}}\right)$$

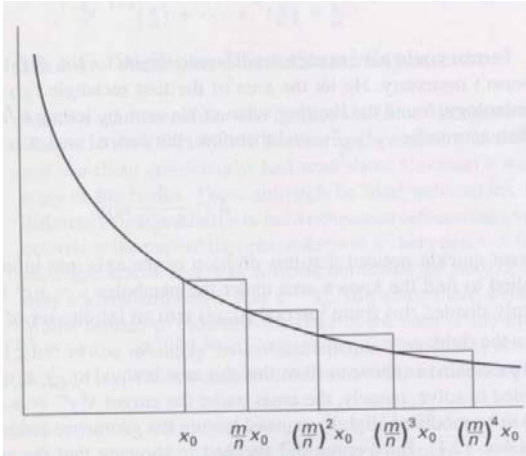



Figura retirada de Katz (1998, p. 483)

Como a soma de uma progressão geométrica finita, com o primeiro termo $a_1$ e razão $q$ é dada por $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$, o inverso dessa soma é $\frac{1}{S_n} = \frac{q-1}{a_1(q^n-1)}$. Logo,

$$(q-1)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{k-1}}}\right) = \frac{q-1}{1-\frac{1}{q^{k-1}}} = \frac{(1-q)}{\frac{1}{q^{k-1}}-1} = \frac{(1-q)\frac{1}{q}}{\left(\frac{1}{q^{k-1}}-1\right)\frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{k-1}}}$$

Com isso,

$$R = (q-1)\frac{p}{x_0^{k-1}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{k-1}}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{k-1}}}\cdot\frac{p}{x_0^{k-1}}$$

Quando $q$ se aproxima de 1, o somatório $\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{k-1}}$ se aproxima de *k-1*, e assim o valor de $R$ se aproxima de $\frac{1}{k-1}\cdot\frac{p}{x_0^{k-1}}$. Como $\frac{p}{x_0^{k-1}} = x_0\frac{p}{x_0^k} = x_0 y_0$, temos que a área delimitada pela hipérbole no intervalo $[x_0, \infty]$ é $A = \frac{1}{k-1}x_0 y_0$.

Podemos perceber que em Katz (1998) as idéias utilizadas por Fermat são todas “traduzidas” em termos atuais. Todo o trabalho com proporções é feito para mostrar que, de uma proporção continuada entre os segmentos *AG*, *AH*, *AO*, podemos chegar a outra proporção continuada (do que Fermat intitula paralelogramos), que é substituída na explicação de Katz por soma de séries. As referências ao trabalho de Arquimedes são excluídas, ficando apenas a idéia de que, quando a razão das abscissas é suficientemente próxima de 1, temos a área desejada.

Queremos chamar a atenção para o fato de que as justificações de Fermat são diferentes daquelas apresentadas por Katz. Fermat não utilizou soma de séries. É interresante a discussão dessas diferenças? As justificativas de Fermat para suas afirmações podem ser transformadas para a maneira como Katz as encara ou são coisas diferentes?

# 5 POSSIBILIDADES PARA UMA HISTÓRIA SOBRE QUADRATURAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Neste capítulo buscamos articular o estudo histórico realizado com nossa fundamentação teórica e com a perspectiva que assumimos para formação de professores. Procuramos responder à seguinte pergunta: em que toda a discussão histórica feita anteriormente pode auxiliar na formação inicial de professores de Matemática?

Inicialmente retomamos o perfil do professor, apresentado por Souza e outros (1991): o professor deve ser *livre*, *competente* e *compromissado*. Livre para fazer escolhas; competente para exercer com confiança sua liberdade de ação e compromissado no sentido de promover mudanças na educação matemática que vem sendo praticada em diferentes instituições escolares, que reproduz um sistema desigual e desumano. Trata-se de um compromisso político de inconformismo com o sistema educacional vigente.

Mas este perfil não é muito abrangente? Ele não pode ser considerado como o ideal de formação para todos os seres humanos, independentemente de serem professores? Desse modo, onde entra a especificidade relativa à formação de professores de Matemática? Acreditamos que a competência para realizar escolhas é acrescida das especificidades relativas aos conteúdos matemáticos e às estratégias para se educar matematicamente. Suas escolhas como professor devem estar direcionadas às mudanças no quadro educacional de fracasso escolar, atribuídas à Matemática.

Segundo Souza e outros (1991), é necessário desenvolver uma compreensão do contexto histórico e sócio-cultural da Matemática para a formação de um licenciando com esse perfil.

O tipo de história que deve participar da formação de professores de Matemática é, a nosso ver, aquele proposto por Miguel e Miorim (2005), qual seja, de uma história problematizadora e pedagogicamente vetorizada para uma futura prática docente, ou seja, constituída de objetivos pedagógicos. Objetivos estes que devem explicitar a cultura matemática como parte da cultura humana e não como sendo isenta de influências políticas, religiosas, bélicas, econômicas, dentre outras.

Apresentaremos a seguir alguns aspectos que revelam como nosso estudo histórico pode trazer à tona algumas dessas influências e como estas podem ser problematizadas na formação de um licenciado livre, competente e compromissado. Junto a isso retomaremos as dificuldades na realização de nosso estudo, já apontadas no capítulo anterior, na tentativa de que elas esclareçam as questões que abordaremos no presente capítulo.

Um primeiro ponto que queremos destacar está relacionado à concepção da natureza dos objetos matemáticos. Retomando a divisão do desenvolvimento da Matemática feita por Aleksandrov e outros (1999), vemos no início de nosso estudo histórico a etapa prático-empírica, na qual a matemática era basicamante voltada à solução de problemas da vida cotidiana, tais como problemas de medidas de terreno, contagem de grãos, determinação de volumes. A área era uma maneira de medir a terra para fins de divisão entre pessoas, pagamento de impostos etc.

> A problematização a partir da história poderia contribuir para modificar as representações que estudantes e futuros professores têm da matemática, contribuindo no sentido de modificar a visão estática e unilateral que trazem consigo a respeito da natureza da matemática: do seu conteúdo, dos seus métodos, do seu significado, do seu alcance e dos seus limites, fazendo-os perceber que a matemática se desenvolve não apenas através da acumulação de resultados e conquistas, mas que passa também por mudanças qualitativas que alteram profundamente o domínio dos objetos das investigações nesse terreno (MIGUEL & BRITO, 1996, p. 50).

Como afirmam Miguel e Brito, é no sentido de abalar esta visão estática e unilateral da Matemática que o trabalho com os futuros professores pode ser direcionado.

Enquanto os egípcios e babilônios desenvolveram uma matemática voltada para soluções de problemas práticos, Arquimedes e Hipócrates desenvolveram outro tipo de matemática, que se encontra na etapa das magnitudes constantes. Os trabalhos destes dois matemáticos, por nós discutidos, dirigem-se à determinação de áreas de figuras planas, as lúnulas e o círculo. Uma mudança importante se configura nesse período: os trabalhos matemáticos começam a se subordinar a um ideal de rigor. Os objetos passam de áreas de terrenos a áreas de figuras abstratas.

Mesmo que os trabalhos que escolhemos discutir possam ser caracterizados como abstratos, isto não quer dizer que na Grécia antiga, por exemplo, não existia matemática sendo desenvolvida para fins práticos. Como vimos Arquimedes desenvolveu vários engenhos mecânicos com base em seus conhecimentos matemáticos (HEATH, 2002).

Mas o que pode ter provocado esta mudança no modo de conceber a natureza dos objetos matemáticos? Consideramos que esta questão foi respondida no capítulo anterior no momento em que destacamos as várias mudanças sociais que podem ter influenciado no desenvolvimento da Matemática. Por exemplo, o aumento do número de escravos, a falta de uma religião concentradora provocaram o surgimento de um homem que desprezava trabalhos práticos (relegados aos escravos) e enaltecia a contemplação. Acreditamos que isso pode ter desencadeado o desenvolvimento de uma matemática diferente daquela desenvolvida pelos egípcios e babilônios. Diferente, mas não melhor ou pior do que a dos egípcios e babilônios.

Fermat encontra-se no período das magnitudes variáveis, entretanto a quadratura de hipérboles deve ser vista com um pouco de cuidado. Não conseguimos ver neste trabalho de Fermat a idéia de variação, movimento que se desenvolvia nesse período. Entretanto, uma mudança que pode ser apontada é que ele parte de uma relação entre assíntotas, para determinar a área de uma hipérbole, quer dizer, ele define a hipérbole a partir de um referencial (as assíntotas), diferentemente dos gregos. Sua notação também era distinta, influenciada por Viète.

O trabalho de Fermat que estudamos exemplifica o fato de que uma prática social pode possuir valores diferentes em uma mesma época para diferentes grupos sociais. Este matemático utilizava um método grego de demonstração e inclusive ridicularizava aqueles que não o utilizavam. Todavia ele pertencia a uma época em que alguns estudiosos deixaram de lado o método grego em prol da possibilidade de novos desenvolvimentos e do tratamento de novos problemas (BARON, 1985).

Ficamos novamente me dívida com nossa intenção de apresentar a influência de diversas práticas sociais na matemática, no trabalho de quadratura de hipérboles proposto por Fermat, pois não nos dedicamos a investigar outros matemáticos ou mesmo outros trabalhos de Fermat, nos quais poderíamos encontrar as relações que procurávamos. Novamente o problema da pré-escolha dos episódios parece ter impossibilitado nossa intenção.

Uma pergunta que poderíamos ter respondido e exemplificado por meio de evidências históricas é a seguinte: a mudança na concepção da natureza dos objetos matemáticos ocorrida no período das magnitudes variáveis é isenta de influências sociais? Entretanto nosso foco foi um único trabalho de Fermat no qual não conseguimos encontrar evidências dessas influências. Fica como uma possibilidade futura a investigação de outros trabalhos de matemáticos dessa época, na tentativa de responder esta questão.

Em um primeiro momento pensamos que nada poderíamos dizer em relação à função da abstração e da generalização. Entretanto nosso estudo mostra que os gregos desenvolveram fortemente a abstração, não por conta de problemas estritamente lógicos, mas por uma grande influência do *logos*. Quer dizer, o estudo dos trabalhos e das histórias de Arquimedes e Hipócrates nos permite inferir sobre a existência de aspectos que revelam influência de fatores da sociedade grega na Matemática. Por conta de uma enorme desvalorização de trabalhos braçais, os intelectuais gregos se dedicavam à contemplação, o que pode explicar o fato de os gregos se dedicarem a objetos abstratos e a generalizações.

Em nosso estudo, discutimos a noção de rigor e o papel da axiomatização. Os gregos desenvolveram fortemente estas noções. Prova disso são “Os Elementos” de Euclides que durante séculos influenciaram os padrões de rigor e axiomatização na Matemática. Tanto Hipócrates quanto Arquimedes utilizaram estes padrões. Arquimedes, em particular, estabeleceu a forma de prova por redução ao absurdo e método de exaustão, que foi seguida por vários matemáticos durante muito tempo. Somente alguns séculos depois esta estrutura prova foi alterada por alguns matemáticos.

Como comentamos, Simon Stevin e Luca Valério modificaram essa estrutura no século XVI. Esta mudança ocorreu, porque eles se preocuparam mais com os resultados que poderiam obter do que com a realização de uma prova que seguisse o rigor arquimediano. Stevin era engenheiro e estudava centros de gravidade, possivelmente interessado em algo prático, talvez em auxiliar seu rei em alguma guerra. Para esses matemáticos o rigor era outro. Fermat retoma o rigor arquimediano e inclusive critica aqueles que se desviaram deste ideal. Uma pergunta que pode ser feita aos futuros professores é em relação a essa axiomatização euclidiana: ela tem alguma influência sobre a matemática escolar atual? Em caso positivo, como isso pode ser percebido?

Outro ponto que precisa ser questionado é o suposto isolamento da Matemática em relação a outras ciências. Para isso podemos discutir o que Miguel e Brito (1996) intitulam de maneiras de se entender a organização do saber. Na etapa da matemática prático-empírica, a relação com outros campos do saber não é difícil de ser encontrada, já que a Matemática foi desenvolvida para solucionar problemas de ordem prática.

Essa relação se torna mais complexa no estudo histórico sobre métodos de determinação de áreas da matemática grega. Entretanto o que chama atenção neste período é a influência das duas constantes do mundo grego, *logos* e *agon*, nos estudos matemáticos, ou seja, a maneira de se organizar o saber matemático dos gregos não era alheia a sua própria cultura.

Com Stevin e Luca Valério, ocorre uma mudança nos modos de fazer matemática, que passam a ser influenciados pela engenharia, por exemplo. Fermat retorna à organização grega, talvez devido ao fato de este estudioso não pertencer às discussões mais eminentes de sua época sobre as diversas áreas do conhecimento, tendo se restringido ao estudo da matemática dos antigos.

A questão da beleza matemática pode ser colocada nos cursos de formação de professores. A ênfase nas demonstrações pode ser deslocada, mostrando processos de criação em Matemática, que são em geral omitidos.

> A história pode também propiciar ao professor uma reflexão sobre a beleza existente no ato da criação matemática levando-o a entender a dimensão estética da matemática em um outro sentido mais fundamental, fazendo com que a educação matemática venha a contribuir para a obtenção daquilo que, a nosso ver, deveria constituir o propósito mais revolucionário da educação contemporânea: o cultivo da imaginação. A partir dessa reflexão, os professores de matemática poderiam buscar situações nas quais os alunos dos ensinos fundamental e médio fossem estimulados a criar matemática (MIGUEL & BRITO, 1996, p. 58).

Poderíamos questionar a razão de Arquimedes ter ocultado como ele descobriu a área do círculo, que só pode ser descoberto ao encontrarem um tratado intitulado “O Método”, no qual Arquimedes explica seu método de descobertas (BARON, 1985). Ou ainda, discutir a questão de Fermat criticar aqueles que não seguiam o padrão grego de rigor. Por que em matemática sempre há ênfase nos resultados e em suas demonstrações e não no processo de criação? Por que pouco se fala dos trabalhos de Stevin e Valério?

Aqui podemos destacar como, mesmo com nossa tentativa de mostrar outros aspectos da matemática, continuamos a dar ênfase às demonstrações e não aos processos de criação. Se não tivéssemos realizado uma pré-escolha dos episódios poderíamos levar em consideração, no ato da escolha destes, a ênfase trabalhos matemáticos que explicitaram os meios de criação e não só os de demonstração. Nós questionamos o fato da constante negligência aos trabalhos de Stevin e Valério, mas também fomos negligentes em relação a eles.

Já comentamos um pouco no decorrer do trabalho a questão ético-política. Na realidade sempre que falamos em Arquimedes este problema aparece. Primeiro, porque ele era conselheiro de um rei e seu engenheiro de guerra. Segundo, porque os trabalhos de

Arquimedes influenciaram o fazer matemático durante muitos anos após a sua morte, muitos matemáticos discutiram e criticaram sua obra (Baron, 1985).

Arquimedes teve condições sociais, culturais e econômicas para o desenvolvimento que realizou na matemática. Teve um bom ensino (estudou com um dos discípulos de Euclides em Alexandria), foi filho de astrônomo, pertenceu a uma classe favorecida e foi sustentado por um rei. Enfim, várias relações de poder permitiram que Arquimedes entrasse para a história, não só da matemática.

A situação com Fermat é um pouco distinta, pois na quadratura de hipérboles ele retomou o rigor grego, que já estava sendo deixado de lado. Sua posição é interessante, um jurista que criticava aqueles que se desviavam do padrão de rigor por ele assumido.

No segundo capítulo de nossa pesquisa colocamos a falta de discussão dos motivos que levam as pessoas a fazerem matemática, não que estes motivos devam ser exclusivamente teóricos, afinal Fermat é um exemplo de alguém que desenvolveu matemática por curiosidade intelectual. Ele não fez a generalização da quadratura de hipérboles para solucionar algum problema da física, da astronomia, ou mesmo da matemática. Ele o fez por pura especulação, por prazer de estudar matemática.

Fermat permite colocar em dúvida a afirmação de que para se fazer matemática basta querer, afinal apesar de utilizar boa parte de seu tempo em seu trabalho como jurista, ele só pode se dedicar à matemática por ter um sustento e uma formação que lhe permitisse tal feito. Temos que ter o cuidado de não veicular a idéia de que somente os superdotados, os gênios são capazes de fazer matemática.

O estudo da matemática, normalmente, está ligado aos que possuem condições sociais e econômicas, não só no caso dos estudiosos que foram foco de nosso trabalho. A história na educação matemática nos permite perceber este, dentre outros aspectos, que pode ser discutido na formação inicial de futuros professores, para que eles possam, no futuro, assumir o compromisso na mudança do cenário educacional vigente. As escolas podem se tornar um espaço de discussão e produção de matemática. Uma matemática criativa e não reprodutiva. Mais ainda, a escola pode se constituir em um espaço no qual todos possam ter acesso a esse conhecimento.

Podemos abalar a visão, que nossa experiência mostrou ser muito difundida nos cursos de Licenciatura em Matemática, de uma matemática para poucos, isolada dos demais campos do conhecimento, com padrões estéticos únicos e isenta de influências políticas e sociais. É nesse sentido que a história pode ter um papel importante na formação de professores de Matemática. Não uma história de resultados e de célebres matemáticos, mas uma história que revele a riqueza do desenvolvimento da cultura matemática.

Enfim, pensamos que uma problematização pedagogicamente vetorizada da história, que contemple discussões como as feitas anteriormente, pode auxiliar no desenvolvimento da competência do licenciando para que este possa modificar a visão estéril atribuída à matemática pela sociedade atual, escolher quais conteúdos são importantes no processo de se educar pela matemática, a forma de abordá-los, em sua futura prática docente, de maneira que ele exerça livremente sua função de agente social na mudança do quadro educacional da Matemática no Brasil. Quadro este que tem sido extremamente vitorioso e eficiente na consolidação de uma sociedade cada vez mais desigual.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitas das considerações que faremos neste capítulo parecerão repetitivas. Entretanto achamos necessário retomar aspectos do trabalho que já foram apresentados no corpo do texto e destacá-los.

A constituição de uma história orientada para a formação inicial de professores de Matemática não foi tarefa simples. Primeiro, porque exigiu que nos apropriássemos de um modo completamente particular de encarar a participação da história na educação matemática. Modo este que exigiu mais do que uma busca de fatos históricos, exigiu um novo modo de encarar e questionar estes fatos. Segundo, porque, tendo nos apropriado dessa forma de investigar a história, o estudo exigiu que nosso olhar se direcionasse a aspectos da história com os quais não estávamos acostumados.

Dentre estes aspectos temos as influências na matemática, da política, da religião, da economia, da arte, do modo de vida, do meio ambiente e de tantas outras práticas que geralmente não são relacionadas à cultura matemática. Questionar a história em busca desses aspectos é diferente de simplesmente olhar para os matemáticos e seus trabalhos e dizer quando nasceram, quando morreram, onde estudaram, quando fizeram seus estudos, que estudos foram estes etc., pois exige que pensemos sobre questões que geralmente não são discutidas.

Por que no antigo Egito existia uma matemática prático-empírica? Esse fato tem relação com a política, com a religião, com as cheias do Nilo? Por que a natureza da matemática se modifica na Grécia antiga, passando a tratar de questões abstratas? Que outras práticas sociais influenciaram nessa mudança? O fato de Arquimedes ser filho de um astrônomo e protegido de um rei influenciou em sua história? Por que Fermat era tão atípico em seu tempo?

Acreditamos que uma história dessa natureza, que contemple esse tipo de questões, pode modificar a maneira como o licenciando vê a si mesmo e a cultura matemática, mostrando como ele próprio e a cultura matemática são historicamente condicionados, influenciados por várias outras práticas sociais.

Uma das dificuldades na realização de nossa pesquisa foi a pré-escolha dos episódios a serem estudados. Segundo Miguel e Miorim (2004), uma história pedagogicamente vetorizada deveria privilegiar certos assuntos e não outros, certos episódios e não outros. Um exemplo dessa dificuldade se deu em relação ao trabalho de quadratura de hipérboles de Pierre de Fermat. Como fizemos esta escolha antes de investigar outros matemáticos de sua época, que talvez representassem melhor o pensamento vigente, ela pode ter sido repetitiva, pois Fermat utiliza muitos métodos que os gregos, de que tratamos, utilizavam.

Mais ainda, a pré-escolha dos episódios foi nosso maior problema e possivelmente um erro no contexto de uma história pedagogicamente vetorizada. Pois ela dificultou nossa tentativa de explicitar as relações entre a matemática e outras práticas sociais. Como exemplo, no capítulo anterior questionamos a razão de trabalhos matemáticos que explicitem os processos criativos continuarem sofrendo negligência, inclusive de nossa parte. Possivelmente não teríamos esse problema caso nossa escolha tivesse se direcionado aos trabalhos de Stevin, por exemplo.

Talvez, se tivéssemos estudado antes e com maior profundidade outros episódios, não teríamos tido essa dificuldade, já que nossa escolha seria feita com base nas orientações pedagógicas da história que desejávamos construir e não em uma pré-escolha um tanto arbitrária. A nosso ver, as escolhas para a constituição de um estudo histórico desse tipo devem ser orientadas pelas questões pedagógicas, pensando em quais episódios seriam interessantes para a discussão com futuros professores ou com qualquer que seja o público alvo de uma história pedagogicamente vetorizada.

Ficam em aberto dúvidas relativas a essa dificuldade: será que é possível a constituição de uma história pedagogicamente vetorizada com qualquer que seja o episódio da cultura matemática? Será que é pedagogicamente interessante a constituição de tal história com qualquer episódio? Será que falhamos na escolha de Fermat ou fomos limitados em relação a nosso olhar sobre o trabalho desse matemático?

Outra dificuldade em nosso estudo foi a diferenciação entre a História da Matemática na Educação Matemática e História na Educação Matemática. Inicialmente tomamos estes campos como idênticos, entretanto com o auxílio de nossa banca de qualificação percebemos que existiam diferenças, umas mais claras, outras nem tanto.

Destacamos duas diferenças que a nosso ver distinguem estes campos. Uma diferença pode ser observada no próprio nome, um campo discute a participação da História, enquanto o outro somente da História da Matemática, na Educação Matemática. A outra diferença é mais difícil de ser observada, pois grande parte dos autores que pertence a um campo pertence ao outro. Esta diferença se relaciona à forma de se encarar a historiografia. Enquanto na HMEM o trabalho de contar uma história é deixado a cargo de um terceiro campo, o da História da Matemática, ou seja, quem conta a história são os historiadores da matemática, no campo da HEM existem autores que propõem que a historiografia seja discutida no interior deste campo, que a história seja contada a partir das preocupações do educador matemático.

Esta segunda diferença é fundamental, pois uma história contada com preocupação de historiadores da Matemática pode não contemplar as características necessárias a uma discussão pedagógica, enquanto que uma história contada a partir das preocupações do educador matemático é, necessariamente, orientada pelas questões pedagógicas. Acreditamos que essa segunda diferença entre HMEM e HEM é uma das responsáveis pela dificuldade que tivemos com a escolha de Fermat.

Mesmo com essas dificuldades conseguimos realizar nossa história pedagogicamente vetorizada sobre quadraturas. Discutimos como algumas práticas sociais e relações de poder influenciaram no conhecimento matemático. Como, por exemplo, os povos do antigo Egito desenvolveram uma matemática empírica influenciada pela centralidade que o poder religioso possuía naquela sociedade, pelas constantes cheias do rio Nilo, pela estratificação da sociedade.

Na Grécia antiga a descentralização do poder religioso, a difusão da leitura e da escrita, o desenvolvimento do comércio, o aumento da escravidão auxiliaram na formação de uma elite guiada pela razão e pela excelência individual, condicionando o desenvolvimento de uma matemática desligada das necessidades ordinários dos cidadãos. Matemática essa que era utilizada como instrumento de poder na degradação dos trabalhos braçais.

Em relação aos aspectos matemáticos da determinação de áreas, a discussão de Arquimedes sobre a quadratura do círculo pode ser uma explicação da fórmula da área do círculo, que, em geral, é dada e não questionada nos diferentes níveis de ensino. A comparação de figuras feita por Arquimedes é uma forma de mostrar de onde surgiu essa fórmula, bem como a fórmula das hipérboles que pode ser discutida a partir do trabalho de Fermat.

Conseguimos explicitar diferentes práticas sociais que existiram no mesmo período dos trabalhos de quadratura que escolhemos discutir, entretanto não relacionamos essas práticas com estes trabalhos. Apesar dos questionamentos na tentativa de relacionar essas diferentes práticas sociais com a matemática, não conseguimos fundamentar nossas respostas com base nas fontes históricas que utilizamos. Em parte devido a pouca quantidade de fontes às quais recorremos (o único texto fora da história da Matemática que utilizamos foi Jaguraibe (2001)), o que nos limitou a uma única interpretação da história, a de Jaguribe.

Acreditamos, como Miguel e Miorim (2004), que somente uma história que explicite os diversos discursos que influenciam o discurso matemático e que problematize a futura prática docente pode auxiliar na formação de professores. Uma história que mostre as relações entre a política e matemática, religião e matemática, ciências e matemática, arte e matemática, enfim, diversas práticas que auxiliaram e auxiliam na constituição da cultura matemática, pode auxiliar o licenciando a ver-se como um agente social e histórico, cujas ações perante o mundo e seus futuros alunos influenciam no modo como a cultura matemática é difundida.

Como afirma Bloch (2001), "a ignorância do passado não se limita a prejudicar a compreensão do presente; compromete, no presente, a própria ação (p.63)". Situar a matemática e o ser humano historicamente é uma condição necessária à formação de um licenciando livre, competente e compromissado (Souza e outros, 1991). Afinal a matemática continua sendo uma forma de exclusão social e de manutenção do sistema vigente. A nosso ver, a história pode ter um papel fundamental no questionamento dessa cultura matemática excludente, mostrando como a matemática se desenvolveu e as influências das diversas práticas sociais nesta cultura.

Gostaríamos de ressaltar que este não é um estudo prescritivo, ou seja, as discussões aqui desenvolvidas não devem ser seguidas à risca, nem tomadas como prontas e acabadas, mas como um exemplo de como podemos investigar a história via a problematização das futuras práticas pedagógicas dos licenciados. Nosso objetivo não foi realizar uma proposta de uso da história na formação inicial de professores, mas dialogar com a história, questioná-la, problematizá-la.

Procuramos apontar as inúmeras dificuldades que tivemos na realização deste estudo para que elas possam ser superadas por outros pesquisadores. A escolha dos episódios a serem estudados é tão importante, quanto as questões a serem colocadas. A falta de fontes pode ser um empecilho na realização de tal estudo, por isso, também, as escolhas são tão importantes.

Qual trabalho matemático pode ser interessante para mostrar os processos criativos da matemática? Qual episódio pode ser interessante à formação de professores? Existem fontes históricas que podem nos auxiliar na investigação? Esse tipo de questões deve permear as escolhas na realização de um estudo histórico pedagogicamente vetorizado.

Se até o presente momento o leitor está esperando que digamos como proceder com a história em sala de aula, é possível que o leitor não tenha compreendido o texto ou que não conseguimos transmitir a idéia de participação da história na Educação Matemática que estamos defendendo.

Essa participação é no sentido dialogar com a história na busca de abalar a visão extremamente difundida de uma matemática absoluta e de situar essa matemática como uma prática social influenciada por diversas outras práticas de modo que os futuros professores possam se conscientizar da alienação causada pela visão de uma matemática sem história e de seres humanos sem história, assumindo a responsabilidade que cabe ao licenciado de auxiliar na mudança de um quadro educacional formador de mão-de-obra barata.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAVRENT'EV, M. A. **Mathematics:** Its Content, Methods and Meanig: Three volumes bound as one. Traduzido por S. H. Gould, Dover publications, Mineola, New York, 1999

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática:** origem e desenvolvimento do Cálculo. Brasília, UnB, v. 1/2/3/4/, 1985.

BARONI, R. L. S.; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em educação matemática. In: **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. BICUDO, M.A..V e BORBA, M.C. (eds). São Paulo: Cortez, 2004.

BATARCE, M. S.; **Um Contexto Histórico para Análise Matemática para uma Educação Matemática**, dissertação de mestrado em educação matemática, orientadora: Rosa Lúcia Sverzut Baroni, co-orientador: Vanderlei Marcos do Nascimento, Unesp Rio Claro (SP), 2003

BLOCH, M. **Apologia da História:** ou o ofício do historiador. Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 2001

BUENO, M.; LINS, R. **The History of Mathematics in the Education of Mathematics Theachers: An Innovative Aproach**. 2002. Em http://www.math.uoc.gr/~ictm2/, Acessado em 16 de setembro de 2007

CARR, E. H. **que é história?** Tradução de Lúcia Maurício de Alvarenga. Rio de Janeiro. 8ª ed. Paz e Terra, 2002.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**, Unicamp, Campinas, 2004.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (orgs.) Belo Horizonte: Autêntica, 2004

HEATH, T.L. **The Works of Archimedes**. Dover, New York, 2002

JAGUARIBE, H. **Um estudo crítico da história**. Tradução de Sérgio Bath. São Paulo: Paz e Terra, 2 ed., 2001, 2v.

KATZ, V. J. **A history of Mathematics:** an Introduction. 2a ed. Editora Addison Wesley Longman, USA, 1998

LINS, R. C. **Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática**. In: Educação Matemática: pesquisa em movimento. BICUDO, M.A..V e BORBA, M.C. (eds). São Paulo: Cortez, 2005b

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, CEPEM, FE - UNICAMP, v. 5, n. 8, p. 73 – 105, Jul./Dez. de 1997

MIGUEL, A.; MIORIM, M.A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MIGUEL, A. ; BRITO, A. J. . A História da Matemática Na Formação do Professor de Matemática. **CADERNO CEDES**, PAPIRUS EDITORA – CAMPINAS, SP, n. 40, p. 47-61, 1996.

NASAR, S.; GRUBER, D. Côncavo e Convexo. **Piauí**, n. 12, p. 50-58, ano 1, Setembro de 2007

SOUZA, A. C. C. e outros. Diretrizes para Licenciatura em Matemática. **Bolema**, ano 6, n. 7, p.90-99, 1991

SOUZA, José C. de. **Os Pré-socráticos**. Coleção Os Pensadores, Abril Cultural, São Paulo, 1 ed, 1973

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. 3ª ed. Editora Gradiva, Lisboa, Portugal, 1997

THOMPSON, John B. **IDEOLOGIA E CULTURA MODERNA:** Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa. Editora Vozes, Petrópolis, 6 ed., 2002

## 8 BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ANGLIN, W. S. Matemática e História. Tradução: Carlos Roberto Vianna. **História & Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 11-21, jan/jul 2001

BARON, M. E. **The Origins of Infinitesimal Calculus**. Dover publications, Mineloa, New York, 1987

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. A Pesquisa em História da Matemática e suas Relações com a Educação Matemática. In: **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectivas. BICUDO, M.A.V. (ed). São Paulo: EDUNESP, 1999.

BONDÍA, J. L. Notas sobre a Experiência e o Saber da Experiência. **Revista Brasileira de Educação**, n. 19, p. 20-28, jan./abr. 2002

BOYER, C. B. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. Dover Publications, New York, 1959

CYRINO, M.C.C.T. **As várias formas de conhecimento e o perfil do professor de matemática na ótica do futuro professor**. 2003. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, USP, São Paulo.

D'AMBROSIO, U. Historia da Educação Matemática. **CADERNO CEDES**, PAPIRUS EDITORA, CAMPINAS, SP, n. 40, p. 7-17, 1996.

D'AMBRÓSIO, U. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectivas. BICUDO, M.A.V. (ed). São Paulo: EDUNESP, 1999.

FAUVEL, J. A utilização da história em Educação Matemática. In: **História da Matemática:** Cadernos do GTHEM, n. 1, orgs. Ana Vieira, Eduardo Veloso e Maria João Lagarto, editor Grupo de Trabalho sobre História e Ensino de Matemática (GTHEM/APM), 1997

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Autores Associados, Campinas – SP, 2006

KATZ, V. J. **Using History to Teach Mathematics:** An International Perspective. The Mathematical Association of America, USA, 2000

LINS, R. C. Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas as Bases da Pesquisa. **Revista de Educação Matemática SBEM-SP**, Ano 1, n. 1, setembro 1993

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LINS, R. C. Para que serve discutir teoria do conhecimento. In: **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectivas. BICUDO, M.A..V. (ed). São Paulo: EDUNESP, 1999.

LINS, R. C. **A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática**. **Revista de Educação**, PUC-Campinas, Campinas, n. 18, p. 117-123, junho 2005a

LINS, R. e outros. **Of Course $R^3$ is Blue! Developing An Approach To Turn a Mathematics Course Into a Mathematics Education Course**. 2002. Em http://www.math.uoc.gr/~ictm2/, Acessado em 16 de setembro de 2007

MIGUEL, A. Perspectivas teóricas no interior do campo de investigação "HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA". In: **V Seminário de História da Matemática**, 5, 2003, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: SBHMat, p. 19-48, 2003.

__________. História, filosofia e sociologia da educação matemática na formação do professor: um programa de pesquisa. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 137-152, jan./abr. 2005

NOBRE, S. Leitura Crítica da História: reflexões sobre a História da matemática. **Ciência & Educação**, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004

SOUZA, A. C. C. e outros. Novas Diretrizes para a Licenciatura em Matemática. **Temas e Debates**, Ano 8, n. 7, SBEM, p.41-65, 1995

VIANNA, C. R. Usos Didáticos Para a história da Matemática. In: Anais do I Seminário Nacionla de História da Matemática. (Ed.) Fernando Raul Neto. Recife – PE, p. 65-79, 1998

__________. História da Matemática e Educação Matemática. In: **Anais IV Seminário Nacional de História da Matemática**. (Ed.) John A. Fossa. Natal – RN, p. 222-227, 2001

VIANNA, C. R.; ZANLORENZI, M. A.; COUSIN, A. de O. A. História e Filosofia na Educação Matemática. In: **Foz 2006: Congresso de Matemática e Aplicações**, 2006, Foz do Iguaçu. CD de resumos, 2006.

WIKIPEDIA, Arquimedes. http://pt.wikipedia.org/wiki/Arquimedes, acessado em 14 de Outubro de 2007