



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

KASSIANA SCHMIDT SURJUS CIRILO

**LIVROS DIDÁTICOS E MODELAGEM MATEMÁTICA:
UMA CARACTERIZAÇÃO DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO
CONTEÚDO DE INTEGRAL NESTES AMBIENTES**

Londrina
2008

KASSIANA SCHMIDT SURJUS CIRILO

**LIVROS DIDÁTICOS E MODELAGEM MATEMÁTICA:
UMA CARACTERIZAÇÃO DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO
CONTEÚDO DE INTEGRAL NESTES AMBIENTES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação, em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2008

**Catálogo na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

C578L Cirilo, Kassiana Schmidt Surjus.

Livros didáticos e modelagem matemática : uma caracterização da transposição didática do conteúdo de integral nestes ambientes / Kassiana Schmidt Surjus Cirilo. – Londrina, 2008.
150 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Educação matemática – Modelos matemáticos – Teses. 3. Modelos matemáticos – Livros didáticos – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

KASSIANA SCHMIDT SURJUS CIRILO

**LIVROS DIDÁTICOS E MODELAGEM MATEMÁTICA:
UMA CARACTERIZAÇÃO DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO
CONTEÚDO DE INTEGRAL NESTES AMBIENTES**

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Orientadora
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Eleni Bisognin
UNIFRA – Centro Universitário Franciscano

Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 26 de agosto de 2008.

Aos meus filhos Pedro e Daniel, meus
bens mais preciosos. Aos meus alunos
e ex-alunos, cujas dificuldades
inspiraram este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado a oportunidade de ingressar neste mestrado.

Aos meus pais, Carlos e Rose, por terem me amado, educado e apostado na minha formação acadêmica.

Ao meu esposo, Eliandro, por ter me dado força para fazer o mestrado e ter me apoiado a todo o momento.

À minha mãe, minha sogra Edite e minha cunhada Eliedy por terem disponibilizado seu tempo para cuidar de meus filhos para que pudesse fazer este mestrado.

À minha orientadora Lourdes Maria por suas contribuições, dedicação, apoio e extrema paciência que foram fundamentais na construção deste trabalho.

Aos professores e colegas de mestrado que colaboraram direta e indiretamente neste trabalho, especialmente ao Fábio pela contribuição na elaboração das atividades de Modelagem Matemática.

Aos amigos Alberto Schmidt, José Roberto de Souza Jr e Weigle Luiz Correa por sua disponibilidade, paciência e contribuições.

Aos alunos dos cursos de Sistemas de Informação, Ciências Contábeis, Engenharia de Produção e Administração da Pontifícia Universidade Católica Campus Londrina, que me apoiaram e foram solidários durante esta caminhada.

Aos meus irmãos de célula por terem orado e pedido à intercessão de Jesus junto ao Pai nos momentos mais difíceis.

“Para o homem, enquanto homem,
nada tem valor a não ser que ele
possa fazê-lo com paixão”

Max Weber

CIRILO, Kassiana Schmidt Surjus. **Livros Didáticos e Modelagem Matemática: uma caracterização da Transposição Didática do conteúdo de Integral nestes ambientes.** 2008. 149f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação sobre a Transposição Didática de conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral em livros didáticos e em atividades de Modelagem Matemática. O estudo está fundamentado na teoria da Transposição Didática de Yves Chevallard e na Modelagem Matemática como alternativa pedagógica. Estabelecemos previamente três atributos fundamentados nos requisitos e características da Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* definidos por Yves Chevallard e em regras elaboradas por Jean-Pierre Astolfi. A investigação tem como objetivo inferir se estes atributos são observados na transposição do conteúdo de integral em livros didáticos e em atividades de Modelagem Matemática. Analisamos os livros Cálculo I de George Thomas Jr. e Um Curso de Cálculo vol I de Hamilton Guidorizzi e quatro atividades de Modelagem Matemática. A análise revela que a Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* é parcialmente contemplada nos livros didáticos. Também inferimos que a Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* é parcialmente contemplada nas atividades de Modelagem Matemática, porém sobre diferentes aspectos. Essas informações permitiram perceber as vantagens e desvantagens de se trabalhar conceitos matemáticos por meio de atividades de Modelagem Matemática e de livros didáticos e a potencialidade da associação do livro e das atividades para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Educação matemática. Transposição didática.

CIRILO, Kassiana Schmidt Surjus. **Livros Didáticos e Modelagem Matemática: uma caracterização da Transposição Didática do conteúdo de Integral nestes ambientes.** 2008. 149f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2008.

ABSTRACT

This research shows an investigation about the Didactic Transposition of the contents of the Differential and Integral Calculus in didactic books and in activities of Mathematical Modeling. The study is reasoned in the theory of the Didactic Transposition of Yves Chevallard and in the Mathematical Modeling as a pedagogical alternative. We established previously three attributes reasoned in the requisites and characteristics of the Didactic Transposition of the *knowledge* to the *knowledge how to teach* defined by Yves Chevallard and in rules elaborated by Jean-Pierre Astolfi. The investigation has as aim infer if these attributes are observed in the transposition of the content of integral in Didactic books and in activities of Mathematical Modeling. We analyzed the books of calculus 1 by George Thomas Jr. and A Course of Calculus volume 1 by Hamilton Guidorizzi and four activities of Mathematical Modeling. The analysis reveals that the Didactic Transposition of the *knowledge* to the *knowledge of teaching* is partially included in the didactic books. We also infer that the Didactic Transposition of the *knowledge* to the *knowledge of teaching* is partially included in the activities of Mathematical Modeling, however about different aspects. These data permitted to notice the advantages and disadvantages of working mathematical concepts by means of activities of Mathematical Modeling and didactical books and the potentiality of the association of the book and the activities for the teaching of the Differential and Integral Calculus.

Keywords: Mathematics education. Mathematical modelling. Didactic transposition.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	– Triângulo característico	21
Figura 1.2	– Partição do triângulo em retângulos.....	22
Figura 2.1	– As esferas do saber	31
Figura 2.2	– Sistema analisado por Chevallard.....	34
Figura 2.3	– Sistema de ensino.....	34
Figura 3.1	– Esquema de Modelagem	46
Figura 5.1	– Exercícios 57 a 62, p. 325-326.....	66
Figura 5.2	– Exemplo 1, p. 318	67
Figura 5.3	– Exemplo 4, p.320, 321	68
Figura 5.4	– Esquema de integral definida.....	70
Figura 5.5	– Exemplo 2, p.350	71
Figura 5.6	– Exemplo 3, p. 351	72
Figura 5.7	– Relação com o Teorema Fundamental do Cálculo	73
Figura 5.8	– Quadro sobre como encontrar a área total, p. 364.....	73
Figura 5.9	– Exemplo 9, p. 364	76
Figura 5.10	– Fórmula para o método da substituição, p. 368	77
Figura 5.11	– Exemplo 9, p. 331	78
Figura 5.12	– Introdução ao método de integração por partes, p. 525.....	80
Figura 5.13	– Quando e como usar a integração por partes, p. 526.....	81
Figura 5.14	– Introdução ao método das Frações Parciais, p. 532.....	82
Figura 5.15	– Descrição Geral do Método, da p. 533.....	82
Figura 5.16	– Método de Frações Parciais, p. 534.....	83
Figura 5.17	– Exemplo 2, p. 286	85
Figura 5.18	– Exemplo 1, p. 306	89
Figura 5.19	– Área sob a curva, p. 310	91
Figura 5.20	– Definição do conceito área sob a curva, p.311	92
Figura 5.21	– Relação entre área, deslocamento e espaço percorrido, exemplo 7 p. 315 e 316.....	93
Figura 5.22	– Algoritmo para a resolução de uma integral utilizando o método da substituição de variáveis p. 318	94
Figura 5.23	– Exemplo 1, p. 318	95
Figura 5.24	– Ajuste na variável, p. 320	96

Figura 5.25 – Definição de mudança de variável, p. 361 e 362	96
Figura 5.26 – Exemplo 1, p. 362	97
Figura 5.27 – Integração por partes, p. 354	99
Figura 5.28 – Exemplo 1, p. 355	99
Figura 5.29 – Integração por partes em integrais definidas	100
Figura 5.30 – Exemplo 7, p. 359	101
Figura 5.31 – Método de frações parciais, p. 371 e 372	102
Figura 5.32 – Exemplo 1, p. 372	103
Figura 5.33 – Teorema, p. 375	104
Figura 5.34 – Exemplo 2, p. 376 e 377	104
Figura 5.35 – Resolução de integrais que apresentam fatores irredutíveis do 2º grau pelo método de frações parciais, p. 379 e 380	105
Figura 5.36 – Teorema, p. 381	106
Figura 5.37 – Tabela do financiamento	110
Figura 5.38 – Gráfico da prestação em função do tempo	113
Figura 5.39 – Gráfico do valor total do financiamento	114
Figura 5.40 – Exemplo de Capacitores	117
Figura 5.41 – Tendência dos dados observados	119
Figura 5.42 – Modelo matemático encontrado para o comportamento da tensão aplicada em um capacitor em relação ao tempo	121
Figura 5.43 – Corrente que flui neste capacitor	124
Figura 5.44 – Potência em relação ao tempo.....	125
Figura 5.45 – Fotografia do jardim	130
Figura 5.46 – Esquema com dimensões do jardim	130
Figura 5.47 – Janela Animação com o esquema	131
Figura 5.48 – Janelas Modelo e Condições Iniciais	132
Figura 5.49 – Verificando as alterações dos parâmetros	132
Figura 5.50 – Parte superior e parte inferior.....	133

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Quadro comparativo entre as teorias de Newton e Leibniz.....	24
Tabela 5.1 – Valor da prestação mensal	110
Tabela 5.2 – Tensão encontrada em função do tempo.....	119
Tabela 5.3 – Validação do modelo encontrado.....	121

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 SOBRE O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	18
1.1 INTRODUÇÃO	18
1.2 ASPECTOS HISTÓRICOS.....	18
1.3 SOBRE O ENSINO DO CÁLCULO	25
2 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA	28
2.1 EM QUE CONSISTE A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA	28
2.2 AS ESFERAS DO SABER.....	31
2.3 CRIAÇÕES DIDÁTICAS E FORMAS DIDÁTICAS	36
2.4 CRITÉRIOS PARA A SOBREVIVÊNCIA DOS SABERES	39
3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	43
3.1 INTRODUÇÃO	43
3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E MODELO MATEMÁTICO	43
3.2.1 Etapas de uma Atividade de Modelagem Matemática	44
3.3 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	47
3.3.1 Perspectivas da Modelagem Matemática na Educação Matemática	49
3.4 A MODELAGEM MATEMÁTICA E O ENSINO DO CÁLCULO	51
4 ASPECTOS METODOLÓGICOS E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA	55
4.1 INTRODUÇÃO	55
4.2 ATRIBUTOS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA QUE VAMOS INVESTIGAR	55
4.3 CAMINHO METODOLÓGICO	58
4.3.1 O Objeto Matemático.....	58
4.3.2 A Escolha dos Livros Didáticos	59
4.3.3 A Escolha das Atividades de Modelagem Matemática.....	59
4.3.4 Análise dos Dados	60
5 ANÁLISES DOS LIVROS E DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	61

5.1 INTRODUÇÃO	61
5.2 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO SABER SÁBIO PARA SABER A ENSINAR NOS LIVROS DIDÁTICOS.....	61
5.2.1 Análise de Livros de Cálculo Diferencial e Integral	63
5.2.1.1 Livro A: Cálculo de George B. Thomas Jr	63
5.2.1.2 Livro B: Um Curso de Cálculo	84
5.3 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	107
5.3.1 As Atividades de Modelagem Matemática	108
5.3.1.1 Problema do Financiamento.....	108
5.3.1.2 Problema da Energia Armazenada em um Capacitor	115
5.3.1.3 Problema do Jardim	129
5.4 ANÁLISE GLOBAL DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA	136
5.4.1 Atributo I: Adaptação do saber	136
5.4.2 Atributo I: Elucidação do saber.....	138
5.4.3 Atributo I: Operacionalização do saber	141
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	143
REFERÊNCIAS.....	146

INTRODUÇÃO

A Matemática tem dado contribuições para o avanço e desenvolvimento da ciência e tecnologia, e mesmo no dia a dia ela está presente muitas vezes auxiliando na resolução de problemas, fazendo previsões e amparando decisões.

Desde o início dos tempos a Matemática tem tido papel essencial no desenvolvimento da humanidade pela sua presença no cotidiano. Tem lugar privilegiado no pensamento humano. As origens da construção da Matemática como ciência estão na busca de soluções para os problemas e necessidades da humanidade. Segundo Falsetti et al (2006, p. 3, tradução nossa),

quando falamos de ciência entendemos que é um conjunto de conhecimentos que formam um sistema, fundado no estudo sistemático e metódico de um determinado objeto que determina um saber verificável. Os conhecimentos envolvidos na ciência resultam da aplicação de uma série de ações ou práticas racionalmente seqüenciadas, aceitas institucionalmente (pela comunidade científica) e que são englobadas dentro de um método científico.

Em se tratando de Ciência, muitas das teorias matemáticas atendem prontamente às necessidades de muitos dos ramos que compõe a Ciência de maneira geral. A Física, Química, Biologia, Ciências Econômicas e Contábeis, Ciências Artísticas, Engenharias, entre outras, necessitam, muitas vezes, de um suporte matemático para completar suas teorias e se desenvolver. Há, no entanto, resultados na Matemática que atendem somente à própria Matemática.

Neste contexto, tanto no âmbito das aplicações como no interior da própria Matemática, a inquietação do homem acerca das formas, espaço, quantidades e suas relações, provocam a busca pela abstração, representação e sistematização do conhecimento matemático. É nas instituições de ensino que nos aproximamos do conhecimento que a humanidade vem acumulando, que se integrou à nossa cultura e que interfere, direta ou indiretamente, no nosso dia-a-dia, buscando compreendê-lo nesta forma como nos é apresentada (FONSECA, 1995). Neste sentido a indagação sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, e o lugar da Matemática no currículo escolar se faz pertinente.

Nas instituições de Ensino Superior o ensino da Matemática se faz presente em diversos cursos de graduação, em particular, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que é ministrada em muitos destes cursos. Esta disciplina faz parte da área básica e obrigatória de muitos cursos de graduação, especialmente em Ciências Exatas e Tecnológicas e, de maneira geral, ocupa de dois a quatro semestres letivos. No entanto, apesar de ser considerada uma disciplina básica, detém alto índice de reprovações nas Universidades. Segundo Lachini (2001, p.149)

muitas são as causas apontadas para o insucesso de professores e alunos no Cálculo I. Elas varrem um leque de explicações que vão desde o despreparo do aluno e a incompetência de professores até fatores institucionais, política implementada pelo governo e dependência de capital internacional.

O que se pode perceber é que em cada curso, o ensino do Cálculo Diferencial e Integral tem seus objetivos, de maneira que os conteúdos são direcionados para a prática de que cada curso necessita. Assim a profundidade conceitual dos conteúdos abordados depende do curso. A nossa pesquisa está focada no estudo do conteúdo de Integral. Este conteúdo, na maioria das vezes, é ministrado na metade do segundo semestre dos cursos anuais, vindo após o estudo de Derivadas.

Para ministrar o conteúdo, a ferramenta mais utilizada pelos professores é o livro texto. É nele que o estudante encontra registradas as teorias com que vai ter contato ou estudar ao longo de sua vida universitária. Mas o conteúdo ali presente não está apresentado na mesma forma como foi construído. Antes, passou por significativas modificações para ser apresentado nos livros didáticos. O saber construído pelos cientistas e legitimado pela comunidade científica, tem suas normas e regras próprias para ser apresentado em suas publicações. O estudante quando toma contato com os saberes pela primeira vez, não tem a maturidade suficiente para fazer a leitura adequada do saber e assim compreendê-lo. Portanto, é necessário que este saber adquira uma nova linguagem, sofrendo transformações e adaptações para se tornar saber presente nos livros didáticos. A esse processo que transforma o conteúdo construído pelos cientistas em um conteúdo a ser apresentado no livro didático, chamamos Transposição

Didática. Esta teoria foi proposta por Yves Chevallard, que será a base teórica na qual apoiamos nossa pesquisa.

Os saberes a serem ensinados nas instituições de ensino são comumente apresentados no livro didático. Estes saberes são muitas vezes tratados somente de maneira teórica, sem fazer relação com outras áreas do conhecimento ou problemas do dia-a-dia. Essa falta de relação com a realidade faz com que os estudantes indaguem ao professor sobre a utilização da teoria que estão aprendendo e sua área de atuação. Muitas vezes a resposta pode não ser animadora para o estudante, e este se sentir desmotivado para estudar a disciplina, já que não consegue fazer um paralelo entre os conteúdos ensinados e a realidade que o cerca. Existem resultados na Matemática que só se aplicam à Matemática, mas também há muitos resultados que estão prontos para ser “usados” em diversas situações onde vemos surgir por detrás de um problema a Matemática pronta a dar sua contribuição. As atividades de Modelagem Matemática podem proporcionar esta prática, e é nesse ambiente que tomaremos a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para o ensino da Matemática.

Quando a Modelagem Matemática é utilizada para o ensino da Matemática, o conteúdo é trabalhado por meio de atividades de Modelagem Matemática. Nestas atividades parte-se de um problema não essencialmente matemático cuja matematização e resolução são a finalidade da atividade. As atividades de Modelagem Matemática viabilizam a introdução de conceitos matemáticos em sala de aula. Assim temos um indicativo de que estas atividades podem ser um meio de apresentar o *saber a ensinar* para os estudantes. Isto sinaliza que atividades de Modelagem Matemática viabilizam a Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar*.

No entanto, é adequado que a Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar*, contemple determinadas regras, características ou requisitos que se fazem presentes no *saber a ensinar*.

Neste contexto, estamos interessados em investigar a Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* em livros didáticos e em atividades de Modelagem Matemática. Para esta investigação, propomos atributos desenvolvidos a partir de regras, características e requisitos, que segundo alguns autores, devem ser observados na Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar*.

PROBLEMÁTICA

Nesta pesquisa investigamos se os atributos da Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* definidos nesta pesquisa são contemplados na apresentação de conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral em livros didáticos, e também se são contemplados em atividades de Modelagem Matemática.

O conteúdo matemático que abordamos é Integrais de funções de uma variável. Investigamos a definição, propriedades e algumas técnicas de integração que são apresentadas em livros didáticos e que emergem em atividades de Modelagem Matemática.

ESTRUTURA DO TEXTO

A estrutura do texto compreende cinco capítulos, além da Introdução, Considerações Finais e Referências.

Na introdução apresentamos o tema da pesquisa, as justificativas e a problemática da mesma.

No *Capítulo 1, Sobre o Cálculo Diferencial e Integral*, tecemos considerações sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral e um breve relato dos aspectos históricos sobre a construção do conceito de Integral.

No *Capítulo 2, Transposição Didática*, apresentamos a fundamentação teórica, baseada na teoria de Yves Chevallard (1998) sobre Transposição Didática.

No *Capítulo 3, Modelagem Matemática na Educação Matemática*, descrevemos os aspectos da Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática e sua posição neste trabalho como um caminho alternativo para a Transposição Didática.

No *Capítulo 4, Aspectos Metodológicos e Procedimentos da Pesquisa*, apresentamos o quadro teórico e a metodologia de pesquisa, onde estabelecemos três atributos baseados nos requisitos, regras e características da

Transposição Didática que observamos nas análises dos livros didáticos e nas atividades de Modelagem Matemática.

No *Capítulo 5, Análise dos Livros Didáticos e das Atividades de Modelagem Matemática*, são feitas as análises locais dos livros didáticos e das atividades de Modelagem Matemática e, num segundo momento a análise global dos livros didáticos e das atividades de Modelagem Matemática.

Para finalizar apresentamos as Considerações Finais desta pesquisa e na seqüência apresentamos as Referências Bibliográficas.

CAPÍTULO 1

SOBRE O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

1.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo fazemos uma breve descrição de aspectos históricos da evolução do Cálculo Diferencial e Integral, em particular vamos nos atentar ao desenvolvimento do conceito de Integral. Em seguida tecemos algumas considerações sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

1.2 ASPECTOS HISTÓRICOS

Presentes nas origens do cálculo integral e diferencial estão problemas inerentes a quadratura e a cubatura. Segundo Baron e Bos (1985, p.2),

as áreas de superfícies curvas e os volumes de regiões limitados por superfícies planas ou curvas (cubaturas), podem ser todos reduzidos a quadraturas e assim resolvidos pelo cálculo integral.

Em síntese, um problema de quadratura consiste em encontrar o valor numérico da área numa região bidimensional, limitada por uma ou mais curvas. Ou, a área de uma superfície tridimensional limitada por no mínimo uma curva. Já um problema de cubatura, consiste em determinar o valor numérico do volume de um sólido tridimensional limitado, no mínimo em parte, por superfícies curvas. Atualmente o termo quadratura é usado por pesquisadores de vários ramos da ciência no sentido de "reduzir um problema a uma quadratura", significando que após simplificações o mesmo pode ser resolvido avaliando uma integral.

Hipócrates de Chios (cerca de 440 A.C.) efetuou as primeiras quadraturas quando encontrou a área de certas lunas, regiões que se assemelham a

lua quando esta fica próxima de seu quarto crescente. Antiphon (cerca de 430 A.C.) afirmou que poderia encontrar a área de um círculo a partir de uma seqüência de polígonos regulares inscritos, ou seja, tomar a quadratura do círculo. Tomava primeiro um quadrado, após um octógono, a seguir um hexadecaedro e assim sucessivamente. Seu problema tornava-se sem solução quando a questão era tratada no infinito.

Como a quadratura do círculo de Antiphon necessitava de um número infinito de polígonos, a mesma nunca poderia expressar uma solução de forma fechada. Essas idéias de Antiphon deram início ao que denominamos nos dias de hoje de método de exaustão. Foi por Eudoxo (cerca de 370 A.C.) que ocorreu o desenvolvimento do método de exaustão. Essa técnica trata da aproximação da área de alguma região por intermédio de um número crescente de polígonos com aproximações melhoradas a cada etapa, que ao final permite expressar o valor numérico da área. Segundo Boyer (1974, p.67) “ a área do círculo podia ser esgotada inscrevendo nele um polígono regular e aumentando indefinidamente o número de lados, mas foi o método de exaustão que tornou esse processo rigoroso”. Arquimedes (287-212 A.C.) utilizou este método para encontrar a quadratura da parábola, aproximando a área a partir de triângulos. No caso do círculo, ele mostrou a dependência da área por do meio conhecimento da circunferência. Em seguida aproximou a área do círculo de raio unitário utilizando polígonos regulares, inscritos e circunscritos. Mas como isso se tratava apenas de aproximações, então não eram quadraturas.

Foi somente na época medieval, no ocidente, que progressos foram obtidos no cálculo. Eles se deram a partir de problemas relacionados ao movimento. William Heytesbury (1335) em Oxford, foi o primeiro a organizar e expor idéias de métodos para a determinação da velocidade e distância percorrida por um corpo supostamente em "aceleração uniforme". Nos dias atuais é comum tratarmos destes assuntos usando integrais indefinidas. A partir das considerações de Heytesbury, Nicole Oresme (1320-1382) descreveu velocidade e tempo como segmentos orientados de retas de comprimentos variáveis. Ele considerou as retas de velocidade de um corpo verticalmente postas sobre uma outra reta, a isto ele chamou de distância total coberta pelo corpo. Em particular, a área desta configuração era chamada de "quantidade total de movimento" do corpo. Aqui temos precursores dos gráficos modernos e o nascimento da cinemática. Bonaventura

Cavalieiri (1598-1647), um estudioso dos feitos de Galileu desenvolveu uma teoria de indivisíveis, para uma região bidimensional considerando a coleção de "todas as retas" como sendo um único número, a área da região. Evangelista Torricelli(1608-1648), outro estudioso de Galileu e colega de Cavalieri, procurou resolver algumas intrigas a respeito dos indivisíveis afirmando que as retas poderiam ter algum tipo de espessura. Foi cuidadoso em usar argumentos de redução ao absurdo para provar quadraturas que obteve por indivisíveis. John Wallis (1616-1703), envolvido com a notação algébrica de sua época, cujo desenvolvimento era dado pelos matemáticos do século 17, tratou a parábola, a elipse e a hipérbole como curvas planas definidas por equações em duas variáveis em vez de seções de um cone. Propôs o símbolo ∞ para infinito, e com isto, não pode esclarecer situações onde nos dias de hoje é claro para a comunidade acadêmica o uso de limite. As idéias de Wallis com respeito a fórmulas o levou a várias quadraturas interessantes. Conforme sugestões de Wallis, em 1657, William Neile (1637-1670) conseguiu calcular o comprimento de uma seção arbitrária da parábola semicúbica $y^2 = x^3$, e no ano de 1658 Christopher Wren (1632-1723), arquiteto, obteve o comprimento de um arco da cicloide. No entanto Wallis não deu equações para as superfícies, nem aritmetizou a geometria de três dimensões como fizera com a de duas (BOYER, 1974, p.280).

Para Boyer (1974, p.285),

de todos os matemáticos que anteciparam partes do cálculo diferencial e integral, nenhum chegou mais perto da nova análise que Isaac Barrow (1630-1677). Ele parece ter reconhecido claramente a relação inversa entre o problema das tangentes e das quadraturas. Mas sua conservadora adesão a métodos geométricos evidentemente impediu-o de fazer uso eficaz da relação.

Barrow deixou sua cadeira de Professor Lucasiano em favor de seu ex-aluno Isaac Newton (1642-1727) que estava trabalhando nos mesmos problemas, e insistiu com seu jovem associado que reunisse e publicasse seus resultados. Newton trabalhou com as idéias de James Gregory (1638-1675) que pensava na área da região entre uma curva e o eixo horizontal, o extremo esquerdo fixo, mas com o extremo direito podendo variar. Este truque lhe permitiu estender algumas fórmulas de quadraturas de Wallis e o levou ao Teorema Fundamental do Cálculo. O último trabalho de Newton sobre cálculo, e também o primeiro a ser publicado, foi

seu ensaio *On the Quadrature of Curves*, escrito entre 1691 e 1693 e publicado como um apêndice na edição de 1704 do seu *Opticks*.

O alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), se rendeu ao estudo da matemática depois que conheceu Christiaan Huygens em uma missão diplomática, o qual lhe presenteou com uma cópia de seu trabalho sobre oscilação do pêndulo. Leibniz pediu para que Huygens lhe desse aulas, assim estudou Barrow (que foi o professor de Newton), Pascal, Fermat, entre outros. Leibniz desenvolveu seus trabalhos entre os anos de 1673 e 1676. Desenvolveu o *Calculus Differentialis* e *Calculus Summatorius* ou *Calculus Integralis* e o publicou em 1684. Segundo Boyer (1992) a partir da construção do que Leibniz chamou de “Triângulo Característico”, Figura 1.1, ele escreveu:

$$\frac{\ell}{a} = \frac{p}{y} \quad (1.1)$$

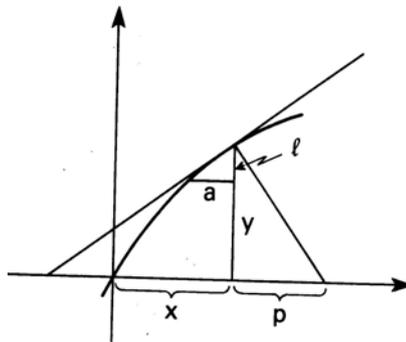


Figura 1.1 – Triângulo Característico

A partir daí, considerando “ret” como retângulos, Figura 1.2, Leibniz escreveu:

$$ret.pa = ret.ly \quad (1.2)$$

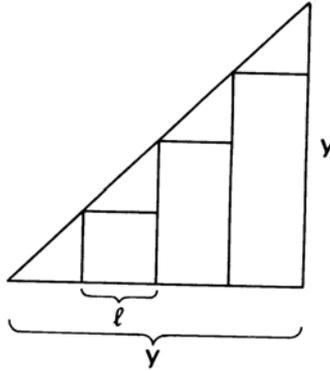


Figura 1.2 – Partição do triângulo em retângulos

e usando a notação de Cavalieri ele escreveu:

$$omn.pa = omn.y\ell \quad (1.3)$$

onde “*omn*” representa ‘omnia’ que vem do Latim e está relacionado com “todos” ou “soma”. Daí a notação usual nos dias de hoje

$$\int pa = \int \ell y \quad (1.4)$$

associando o símbolo “ \int ” com a soma. A soma $\int \ell y$ varia de 0 a y e assim temos a área $\frac{y^2}{2}$ do triângulo da Figura 1.2.

Leibniz escreve

$$\int pa = \int_0^y \ell y = \frac{y^2}{2} \quad (1.5)$$

Pensando $a = \frac{x}{d}$ e $\ell = \frac{y}{d}$, onde Leibniz preferiu usar a notação $dx = \frac{x}{d}$ e

$dy = \frac{y}{d}$, podemos escrever:

$$\int pa = \int p dx = \int_0^y \ell y = \int y dy = \frac{y^2}{2} \quad (1.6)$$

que corresponde à notação de integral, atualmente utilizada.

O inglês Isaac Newton, aluno de Isaac Barrow, superou seu mestre. Segundo Boyer (1974), ele manteve seus estudos mesmo com as universidades fechadas por causa da peste bubônica na década de 1660. Foi nesses anos que Newton desenvolveu seus estudos sobre fluentes e fluxões, publicados mais tarde como *Methodus Fluxionum et serierum infinitorum*.

Ele representava as quantidades que variam (fluem) por x , y , z , v e as chamou de fluentes. As quantidades conhecidas e determinadas eram representadas por a , b , c . Newton chamou de fluxões as velocidades cujas quantidades fluentes são aumentadas pelo movimento que as produz. Escolheu as notações \dot{x} e \dot{y} para representar as fluxões dos fluentes x e y . O que chamou a atenção de Newton para o conceito de integral foi a questão: e se o fluente for a fluxão de outro fluente? Ele teria que desenvolver um método contrário para determinar o fluente de uma fluxão. Então, se x é a fluxão, Newton representou por $\int x$ ou \boxed{x} ou $[x]$ o fluente a ser encontrado, nasce assim o conceito de integral.

Tanto Newton como Leibniz desenvolveram o Cálculo Diferencial e Integral praticamente ao mesmo tempo, mas com algumas diferenças. Destacamos aqui algumas dessas diferenças apresentadas por Zuin (2001), baseada em Baron e Bos (1985), que faz uma comparação apontando as principais diferenças entre as teorias de Newton e Leibniz, conforme apresentamos na Tabela 1.1.

Tabela 1.1 – Quadro comparativo entre as teorias de Newton e Leibniz

Newton	Leibniz
Considerava as variáveis dependentes do tempo aplicando o conceito de movimento.	Entendia as variáveis como percorrendo sequências de valores infinitamente próximos. No seu cálculo há pouco uso de conceitos de movimentos.
O conceito cinemático sugere a velocidade ou taxa de mudança da variável como conceito fundamental: a fluxão (A fluxão não era uma quantidade infinitamente pequena, mas uma velocidade finita).	A noção das variáveis, enfatizando a diferencial como a diferença de dois valores sucessivos na sequência. As variáveis adquirem novos valores continuamente e não por saltos. As diferenciais não podiam ser finitas e tinham que ser infinitamente pequenas.
A integral é a “tarefa de achar as quantidades fluentes para fluxões dadas”.	A integral é um somatório.
O Teorema Fundamental está contido na definição de integral.	O Teorema Fundamental não está contido na definição de integral.

Fonte: Zuin (2001, p.31)

Alguns séculos adiante outro nome eminente, Georg F. B. Riemann (1826-1866), trabalhou na consolidação do Cálculo Diferencial e Integral. Riemann sucedeu Dirichlet (1859) em Göttingen. No processo de extensão do trabalho de Dirichlet sobre séries de Fourier, Riemann generalizou a definição de Cauchy da integral para funções arbitrárias no intervalo $[a,b]$, e o limite das somas de Riemann é a formulação em textos matemáticos nos dias de hoje. Num dado momento de intenso trabalho Riemann se perguntou, "Em que casos uma função é integrável?" A partir deste fato a maior parte do desenvolvimento da teoria de integração foi subsequente verificada por Riemann e outros. Até os dias de hoje isso tem sido foco de intensa e rica pesquisa por uma grande quantidade de Matemáticos.

Mesmo partindo de questões relativas à Física como velocidade e aceleração, o Cálculo passou a figurar em outros tipos de aplicação. Para Zuin (2001, p. 30)

com a revolução industrial, o cálculo foi utilizado de modo mais prático e passou a ser aplicado em diversos campos. Neste clima de grande progresso, a essa utilização visava lucros. Máquinas mais potentes e eficientes eram necessárias, e as ferramentas matemáticas desenvolvidas seriam de grande auxílio. Se inicialmente, o Cálculo foi aplicado à mecânica e à astronomia, depois, com maiores avanços da área, foi possível estudar o calor, a energia, a eletricidade e o magnetismo.

Com todas as aplicações que o Cálculo proporcionava nasceu a necessidade de se ensinar o Cálculo como disciplina nas instituições de ensino. Surge então a questão: “Como ensinar o Cálculo Diferencial e Integral, contemplando os detalhes desta teoria e ao mesmo tempo amenizar as dificuldades de seu entendimento?” O cálculo mostrou-se também inserido nas ciências Físicas, Químicas, Biológicas, nas Engenharias entre outras. A partir desta perspectiva, no âmbito educacional, o ensino do Cálculo tem se tornado também uma fonte de intensa pesquisa por muitos pesquisadores na área da Educação Matemática.

1.3 SOBRE O ENSINO DO CÁLCULO

Para Bicudo (1999, p.6),

é característica do ensino da matemática dar relevância aos aspectos epistemológicos e lógicos da Matemática e do processo de aprendizagem do aluno, numa tentativa de harmonizar as ações do ensino com a produção do conhecimento matemático, visando a, primordialmente, conseguir sucesso. Isto é, fazer com que o aluno aprenda Matemática.

A tarefa de fazer com que o estudante aprenda Matemática, não é simples. Para que isso ocorra é necessária a demanda de muitas pesquisas e estudos. Atualmente temos um grande número de pesquisas com relação ao ensino e à aprendizagem da Matemática nos diferentes níveis de ensino. Estas pesquisas têm demonstrado grandes avanços em direção ao ensino, avaliação, formação de professores. No entanto, segundo Almeida, Fatori e Souza (2007, p.48), algumas adequações são necessárias pois

as transformações observadas na sociedade requerem adequações com relação às práticas de professores e às mudanças curriculares. No que diz respeito ao ensino superior, as diretrizes curriculares para os cursos de graduação sugerem modificações que nem sempre são fáceis de implementar e que representam desafios ou causam inquietações para professores e alunos.

Em nossa pesquisa trabalhamos no âmbito do Ensino Superior e apresentamos algumas reflexões sobre o Ensino de Cálculo em cursos superiores, mais precisamente sobre a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. De maneira geral um dos objetivos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é ter contato com a Matemática como técnica de conhecer, de pensar e organizar, avaliar e analisar dados, explicar o resultado de suas respostas (LACHINI, 2001). Esta disciplina está presente em diversos currículos de diferentes cursos de graduação. São inúmeras suas aplicações. No entanto, ensinar Cálculo Diferencial e Integral não tem sido uma tarefa fácil.

Muitas são as dificuldades encontradas no Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Dificuldades encontradas pelos professores em ensinar, dificuldades encontradas pelos estudantes para aprender, recurso didático muitas vezes limitado ao uso do quadro negro e livros textos, livros mal compreendidos pelos estudantes. Para Lachini (2001) as causas do insucesso “varrem um leque de explicações que vão desde o despreparo do aluno e da incompetência de professores até fatores institucionais, política implementada pelo governo e dependência do capital internacional”.

Os professores enfrentam dificuldades relativas ao ensino do Cálculo diariamente. Para Almeida e Brito (2005, p.1)

uma dificuldade comumente enfrentada por professores de matemática, consiste em tornar compreensíveis conceitos que foram sendo construídos ao longo de muitos anos e cuja sistematização atual os distancia da linguagem empregada pela maioria das pessoas em seu cotidiano.

Para muitos professores, o processo de tornar compreensível um conceito, se faz a partir de uma boa preparação de aula tomando por base livros didáticos, no qual o conceito está estruturado. O livro didático também é utilizado

pelo estudante como referência para seu estudo e pesquisa. Sendo ferramenta indispensável para o ensino, é no livro didático que estão descritos os saberes que o professor pretende ensinar. Porém, pode estar sendo usado de maneira inadequada. Frota (2001) em seu artigo verificou que a maioria dos estudantes estuda Cálculo Diferencial e Integral apenas lendo com atenção exemplos resolvidos no livro ou no caderno.

O livro muitas vezes não instiga os estudantes à busca pelo saber por meio de questões próximas a sua realidade. Apesar de existirem bons livros no mercado, o estudante muitas vezes não se adapta à linguagem utilizada pelo autor na apresentação dos conteúdos. Assim, a fonte onde o estudante deve adquirir conhecimento e que o leva a construção de mais conhecimento via questionamentos, muitas vezes é responsável por gerar dúvidas e insegurança, ou pode ser uma fonte para apenas reprodução de conhecimento já instaurado. Segundo Almeida, Fatori e Souza (2007, p.49)

a forma como são estruturados os livros didáticos de Cálculo adotados nas universidades brasileiras também não favorece o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos. De modo geral, cada capítulo é iniciado com definições seguidas de teoremas ou propriedades, depois são apresentados alguns exemplos de exercícios que utilizam estas definições e só ao final do capítulo são apresentadas algumas explicações relacionadas ao assunto. Deste modo, o aluno, além de já receber os problemas prontos, ao resolvê-los já sabe, de antemão, a que conceitos deve recorrer.

Como o livro é a maior fonte de consulta, este deve trazer os conteúdos de maneira que sua apresentação permita a aprendizagem pelos estudantes. O conteúdo construído pelos cientistas é intrínseco e demais especializado para ser apresentado aos estudantes na forma como está. Para um conteúdo ser apresentado no livro didático ele deve passar por transformações, para que sua forma final seja passível de ser compreendida por aqueles que estão tomando contato pela primeira vez com o conteúdo, os estudantes. A este processo Chevallard chama Transposição Didática do *saber sábio* (saber construído pela comunidade científica) para *saber a ensinar* (saber presente nos livros didáticos). Este conceitos são mais detalhadamente descritos no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2

TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

2.1 EM QUE CONSISTE A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

A Transposição Didática foi formulada originalmente por Michel Verret, em 1975. Em 1980, o matemático Yves Chevallard dá um novo olhar sobre esta idéia e a insere no contexto matemático, fazendo dela uma teoria e com isso analisando questões importantes do domínio da Didática da Matemática.

No ano de 1985 Chevallard lançou sua obra '*La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné*'. Tomamos sua tradução para o espanhol '*La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado*'¹ a qual será referência-base na fundamentação desta pesquisa. A idéia de Transposição Didática ou transposição dos saberes é oriunda da didática francesa e surge do conceito em Didática das Matemáticas de Y. Chevallard e M. A. Joshua, que provoca um movimento de translação entre o saber científico e o saber escolar. Chevallard (1998) afirma que

um conteúdo do saber, tendo sido designado como saber a ensinar sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os "objetos de ensino". O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (CHEVALLARD, 1998, p.45, tradução nossa).

O processo de Transposição Didática envolve a seleção e adaptação dos saberes científicos para que estes possam integrar o sistema de ensino. Assim surge um conjunto de *criações didáticas* que favorecem a aprendizagem de um saber científico para um saber escolar. Além disso, a transposição acrescenta outras noções que são necessárias à aprendizagem e não são ensinadas. Segundo Astolfi (2005, p.48),

¹ A Transposição Didáctica: do saber sábio ao saber ensinado (tradução nossa).

um elemento do saber sábio como objeto de ensino modifica-lhe muito fortemente a natureza, na medida em que se encontram deslocadas as questões que ele permite resolver, bem como a rede relacional que mantém com os outros conceitos. Existe assim uma “epistemologia escolar” que pode ser distinguida da epistemologia em vigor nos saberes de referência.

Para Barbosa (2004) essa epistemologia escolar vai em direção à construção do saber e, neste contexto, a análise e a seleção determinam um julgamento de valor, conduzindo a uma melhor compreensão do saber. Para Astolfi (2005, p.51)

a escola nunca ensinou saberes (“em estado puro”, é o que se desejaria dizer), mas sim conteúdos de ensino que resultam de cruzamentos complexos entre uma lógica conceitual, um projeto de formação e exigências didáticas.

Assim as transformações sofridas pelo *saber sábio* para que se torne um *saber a ensinar* devem poder designar algo a ser aprendido, abrir um campo de exercícios a produzir, conceber trabalhos práticos.

A necessidade de que o *saber sábio* constitua parte integrante do sistema de ensino transformado e adaptado como *saber a ensinar*, se faz por diversos motivos. O primeiro deles é a disponibilidade de tempo (carga horária) que o professor tem para conseguir cumprir seu programa de ensino. Cada curso tem seus objetivos para o ensino de determinado conteúdo assim como a profundidade conceitual do mesmo. A maturidade dos estudantes também é levada em consideração, pois os mesmos não estão prontos a receber o conteúdo do saber como é apresentado pela comunidade científica. Finalmente, temos que a linguagem empregada nas formas didáticas pode não estar adequada para a aprendizagem do conteúdo. Por estas razões é necessário que o saber construído pela comunidade científica sofra modificações para que se torne um saber *ensinável*.

Segundo Brockington e Pietrocola (2005), Chevallard analisa as modificações que o saber produzido pelo “sábio”, o cientista, sofre até ser transformado em objeto de ensino, ou seja, quando um saber é construído ele vai para o livro didático transformado com o objetivo de ser ensinado aos estudantes.

Chevallard defende que um conteúdo do saber passa por mudanças e adaptações profundas até chegar à forma como é apresentado aos estudantes no livro didático.

Um saber ao ser transposto deve se adaptar ao ambiente de ensino, por isso passa por modificações. Chevallard (1998) enfatiza que os saberes adaptados ao ensino não podem ser apenas simplificações de objetos tirados do contexto científico com o objetivo de permitir aprendizagem entre os estudantes. A simplificação pode distanciar o estudante da realidade levando-o a condições ideais sem fazer relação com a mesma. Para Alves-Filho

à primeira vista somos levados a interpretar que o saber a ensinar é apenas uma mera “simplificação ou trivialização formal” dos objetos complexos que compõem o repertório do saber sábio (apud Brockington e Pietrocola, 2005, p.3),

ou seja, o conteúdo não pode passar a ser um simples resumo da teoria para ser ensinado ao aluno. Ainda para Alves-Filho, esta visão simplificada “é equivocada e geradora de interpretações ambíguas nas relações escolares, pois revela o desconhecimento de um processo complexo de transformação do saber” (apud Brockington e Pietrocola, 2005, p.3).

Segundo Chevallard os saberes presentes nas instituições de ensino são novos saberes, os quais mantêm semelhanças com os apresentados pela comunidade científica, mas que passam por modificações para que sejam capazes de se adaptar ao ambiente escolar. Para Luccas (2004) “além da forma didática que o saber sábio toma [...], sua linguagem também é modificada, de uma linguagem científica e técnica para uma linguagem mais usual, corrente e coerente com a faixa etária do educando”. Segundo Brockington e Pietrocola (2005,p. 3)

o conhecimento acadêmico deve ser “adaptado” ao ambiente das salas de aula. Isso pode sugerir a idéia de que o Saber a Ensinar e o Saber Ensinado sejam pouco diferentes daqueles presentes nos laboratórios e grupos de pesquisa. Essa forma de conceber o ensino traz embutida a idéia de simplificação do saber.

Assim, esses novos saberes devem atender a uma legitimidade educativa e uma legitimidade epistemológica. Para Chevallard a legitimidade

educativa responde aos anseios sociais (ensino) e a legitimidade epistemológica refere-se a uma garantia científica (ciência). Logo, o saber deve atender à relação entre ensino e ciência.

2.2 AS ESFERAS DO SABER

Chevallard (1998) percebe na Transposição Didática um instrumento eficiente para analisar o processo por meio do qual o saber produzido pelos cientistas, o *saber sábio* se transforma naquele que está contido nos programas e livros didáticos, o *saber a ensinar*, e naquele que realmente aparece nas salas de aula, o *saber ensinado*. Chevallard se refere a cada uma destas formas do saber como “esferas do saber”. Ele analisa as modificações que o saber produzido pelo “sábio” (o cientista) sofre até ser transformado em objeto de ensino. Na Figura 2.1 apresentamos uma seqüência visualizando o processo da Transposição Didática juntamente com as esferas do saber.

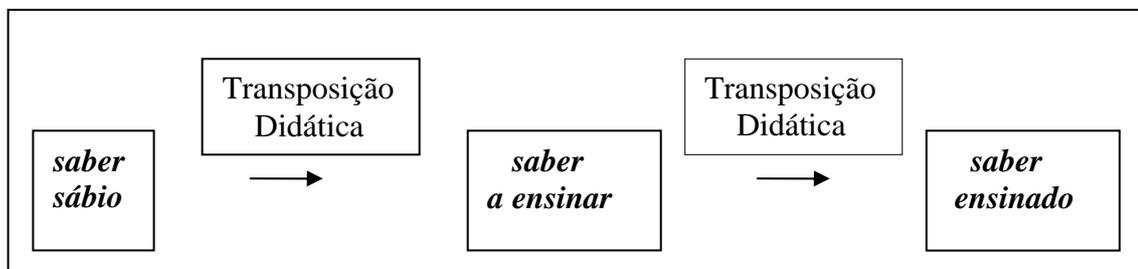


Figura 2.1 – As esferas do saber

O *saber sábio* é o saber construído pelos cientistas e pesquisadores nos institutos e laboratórios de pesquisas. Ao ser construído um saber tem que ser legitimado pela comunidade científica. Isto se dá por meio de publicações de artigos científicos em revistas, comunicações em congressos, teses, notas de aulas, entre outros. A comunidade científica dispõe de um conjunto de regras próprias para que um saber seja legitimado. Ao ser transposto, o *saber sábio* passa a ser chamado *saber a ensinar*.

O *saber a ensinar* é o saber transposto para o ambiente escolar. Este saber é adaptado ao ambiente escolar, passando a integrá-lo. Apresenta-se quase sempre nos livros didáticos, programas e outros materiais de apoio. Fazem parte da esfera do *saber a ensinar* os autores de livros didáticos e divulgação científica, os professores, os especialistas de cada área, a sociedade, o governo.

O saber que aparece de fato na sala de aula é o *saber ensinado*. Quando o professor ensina em suas aulas, tendo como base o *saber a ensinar*, então ele produz o *saber ensinado*. Nem sempre o *saber a ensinar* contido em um programa escolar ou em um livro didático é o saber que será apresentado aos estudantes, pois para preparar suas aulas o professor muitas vezes utiliza mais de um livro didático e muitas vezes outros recursos, como sites na internet, softwares de ensino. Ao preparar suas aulas o professor já participa de uma nova Transposição Didática. O *saber ensinado* é o registrado nos diários de classe, ou seja, é o que realmente é apresentado aos estudantes pelo professor quando este prepara suas aulas. Assim o *saber ensinado* está sob o controle de um Contrato Didático que rege as relações entre professor, estudante e saber. Então, identifica-se uma segunda transposição didática, que transforma o *saber a ensinar* em *saber ensinado*. Fazem parte desta esfera estudantes, proprietários de estabelecimentos de ensino, os supervisores e orientadores educacionais, a comunidade dos pais.

Cada esfera do saber possui seu conjunto de agentes que pertencem a diferentes grupos sociais, diferentes interesses, regras próprias, que influenciam na transposição dos saberes. Entre eles estão: cientistas, educadores, diretores, professores, políticos, autores de livros didáticos, pais de alunos, alunos. Vale ressaltar que esses agentes podem pertencer a mais de uma esfera.

No processo da transposição dos saberes vemos o surgimento de agentes que influenciam estas transformações direta ou indiretamente, fazendo com que o *saber sábio* se modifique até se tornar o *saber ensinado*. Esse universo é definido por Chevallard como *noosfera*. A *noosfera* é o centro de operações da transposição dos saberes. É ela que determina todo o funcionamento do processo didático. Para Pais (1999) a *noosfera* influencia na escolha dos conteúdos a serem integrados aos programas de ensino, na estruturação dos valores, objetos e métodos que conduzem o processo de ensino. Segundo Chevallard (1998, p.28) é na *noosfera* que

se encontram todos aqueles que ocupam os postos principais do funcionamento didático, se enfrentam com os problemas que surgem do encontro da sociedade e suas exigências; ali se desenvolvem os conflitos; ali se levam a cabo as negociações; ali se amadurecem as soluções.

O papel da *noosfera* na Transposição Didática dos saberes está ligado aos interesses de cada conjunto pertencente à *noosfera*. A importância relativa das ações de cada um desses grupos, num contexto histórico específico, determina a forma final do saber. Nem todos os saberes do domínio do *saber sábio* serão parte do cotidiano escolar. A *noosfera* é imprescindível na seleção dos saberes. Seu papel é escolher quais saberes serão apresentados nas instituições de ensino. Para isso ao se utilizar da Transposição Didática como instrumento de análise, pode-se obter indícios de características relevantes para que um determinado saber esteja presente nos livros didáticos e na sala de aula. Segundo Chevallard (1998) temos que

a noosfera é o centro operacional do processo de transposição, que traduzirá nos fatos a resposta ao desequilíbrio criado e comprovado (expressado pelos matemáticos, pelos pais, pelos professores mesmos). Ali se produz todo o conflito entre sistema e entorno e ali encontra seu lugar privilegiado de expressão. Neste sentido, a noosfera desempenha um papel de obstáculo. Inclusive em períodos de crise, esta mantém dentro dos limites aceitáveis a autonomia do funcionamento didático (CHEVALLARD, 1998, p.34, tradução nossa).

A *noosfera* é um sistema intermediário entre a esfera sábia e o sistema de ensino, caracterizada por sua função dentro do sistema de ensino. Em sua obra Chevallard expõe este sistema caracterizado na Figura 2.2.

Neste sistema o entorno corresponde à sociedade, que envolve os especialistas, pais, professores, alunos, autores de livros didáticos, integrantes da opinião pública, ou seja, os integrantes da *noosfera*. Dentro da noosfera encontramos o Sistema de Ensino onde ocorre o funcionamento didático. Para Chevallard o Sistema de Ensino é composto pelo professor, pelo estudante, pelo saber, e pelas relações entre eles. Estas relações são regidas pela existência de um Contrato Didático que toma esse saber como objeto de um projeto que compartilha

ensino e aprendizagem e que une em um mesmo espaço, professores e alunos, conforme apresentamos na Figura 2.3.

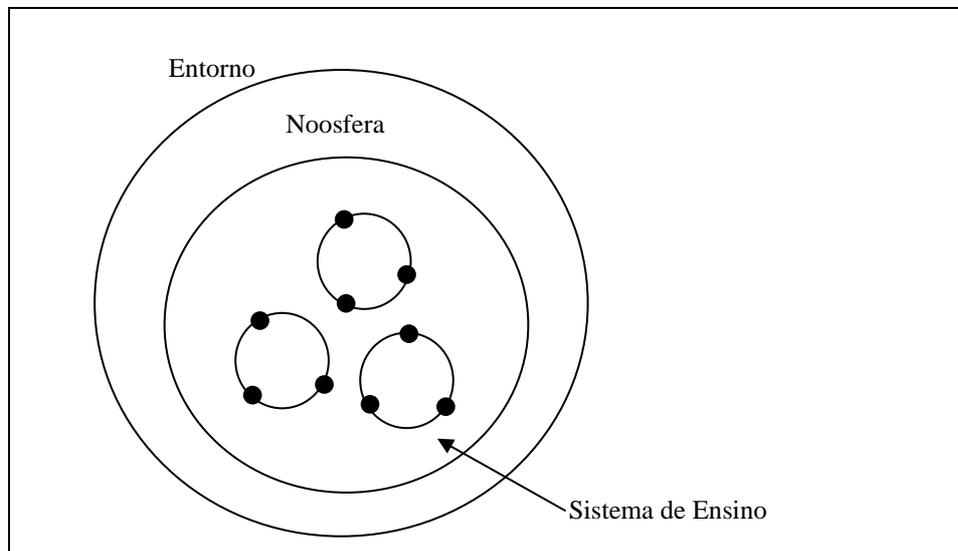


Figura 2.2 – Sistema analisado por Chevallard

Fonte: Chevallard (1998, p.28)

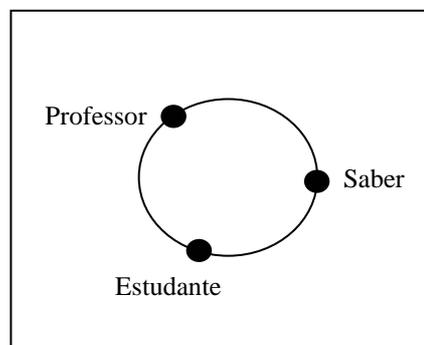


Figura 2.3 – Sistema de Ensino

Fonte: Chevallard (1998, p.26)

No Sistema de Ensino podem ocorrer dois tipos de transposição: transposição *stricto sensu* e transposição *lato sensu*. Para Chevallard (1998)

a transformação de um conteúdo de saber preciso em uma versão didática desse objeto de saber pode denominar-se mais apropriadamente “transposição didática *stricto sensu*”. Assim o *estudo* científico do processo de transposição didática (que é uma

dimensão fundamental da *didática das matemáticas*) supõe ter em conta a transposição didática *lato sensu*, representada pelo esquema

-> Objeto de saber -> objeto a ensinar -> objeto ensinado

em que o primeiro elo marca o passo do implícito ao explícito, da prática à teoria, do *preconstruído* ao *construído* (CHEVALLARD (1998, p.46, tradução nossa).

Como exemplo de Transposição Didática *stricto sensu* Chevallard (1998) faz uma análise do conceito de Distância:

vejamos um exemplo que realiza o movimento representado pelo esquema da transposição didática:

- a noção de *distância* (entre dois pontos) se utiliza espontaneamente “desde sempre”;
- o *conceito matemático* de distância é introduzido em 1906 por Maurice Fréchet (objeto de saber matemático);
- no primeiro ciclo de ensino secundário francês, a noção matemática de distância, surgida da definição de Fréchet aparece em 1971 no programa da classe de quarto curso (objeto a ensinar);
- seu tratamento didático varia com os anos a partir de sua designação como objeto a ensinar: continua o “trabalho” da transposição (CHEVALLARD, 1998, p.46, tradução nossa).

Segundo Pais (1999, p.19)

quando as transformações das idéias matemáticas são analisadas em relação a um determinado conceito específico, como é o caso da noção de distância, trata-se de uma *transposição didática stricto sensu*. Por outro lado se a análise é desenvolvida num contexto mais amplo, não se atendo a uma noção particular, podemos então falar de uma *transposição didática lato sensu*.

No caso da nossa pesquisa a Transposição Didática do conteúdo de Integral é uma Transposição Didática *stricto sensu*. Um exemplo de Transposição Didática *lato sensu* é o *Movimento da Matemática Moderna* descrito por Chevallard (1998) em sua obra. Para Pais (1999, p.18)

o contexto original das idéias defendidas nesse movimento era radicalmente diferente daquele que prevaleceu na proposta curricular. Por outro lado, o resultado prático dessa reforma foi ainda muito diferente da proposta pedagógica que constava no plano das intenções.

Na tentativa do *Movimento da Matemática Moderna* de implementar uma abordagem mais estruturalista para o ensino da Matemática, foram utilizadas novas técnicas de ensino. Esperava-se que com essas novas técnicas fosse possível obter uma aprendizagem mais “fácil” do que a tradicional. Surgiram então diversas *criações didáticas*. No entanto, segundo Pais (1999), as reformulações ocorridas na Transposição Didática resultaram em inversões tão fortes que contribuíram para o fracasso deste movimento.

Podemos observar que mesmo não atingindo os objetivos esperados, o *Movimento da Matemática Moderna* possibilitou o desenvolvimento de diversas *criações didáticas*. É o conjunto de *criações didáticas* que evidencia a diferença entre o *saber sábio*, o *saber a ensinar* e o *saber ensinado*.

2.3 CRIAÇÕES DIDÁTICAS E FORMAS DIDÁTICAS

Chevallard sugere que no processo de transposição do *saber sábio* para o *saber a ensinar* deve haver criatividade didática. *Criações didáticas* são atividades, objetos ou áreas de estudo criadas para situações específicas do ensino. O que evidencia a diferença entre o *saber sábio* e o *saber ensinado* é o conjunto das *criações didáticas*. As tabelas de derivação e integração são um exemplo de *criação didática*. Essas tabelas funcionam apenas como ferramenta matemática e passaram a ser empregados como um objeto de estudo. Este é um indício da transformação dos saberes, a utilização de atividades, as quais têm equivalência com a área de pesquisa, mas não são objetos de estudo de pesquisa. Segundo Pais (1999) “são criações motivadas por supostas necessidades do ensino, para servirem como recursos para outras aprendizagens”.

O problema se instala quando a utilização destas *criações didáticas* se torna automatizada e sem relação com qualquer outra aplicação. Um exemplo desta situação é a utilização das técnicas de integração. O ensino das técnicas apenas para resolução de integrais, sem fazer relação com problemas aplicados ou relação com outros conteúdos, torna-se mecanizado para o estudante. Segundo Pais (1999), conteúdos ensinados isoladamente, sem nenhuma relação com

conteúdo algébrico ou geométrico, passam a figurar apenas como objetos de ensino em si mesmos.

Para que isso não aconteça, Chevallard (1998) sinaliza que o professor deve estar atento ao ensino, analisando a evolução do saber que se encontra na sala de aula por meio da Transposição Didática. A preparação da aula pelo professor deve ser feita de maneira que os conteúdos a serem ensinados apresentem relações com outros conteúdos já vistos, relações com conteúdos de outras áreas da ciência, relações com problemas do dia a dia. Assim o professor estaria em constante vigília em relação às suas ações. Esta prática pode possibilitar um novo caminho para uma prática pedagógica mais reflexiva e questionadora por parte do professor. A esta atitude Chevallard (1998) denomina *vigilância epistemológica* e a caracteriza como

uma ferramenta que permite recapacitar, tomar distância, interrogar as evidências, pôr em questão idéias simples, desprender-se da familiaridade enganosa de seu objeto de estudo (CHEVALLARD, 1998, p.16, tradução nossa).

As *criações didáticas* estão presentes no *saber a ensinar*. Quando um conteúdo do saber sofre a transposição do *saber sábio* para o *saber a ensinar*, este saber deve adquirir uma nova roupagem e ser apresentado em uma linguagem acessível ao estudante, pois o *saber sábio* caracteriza-se pela sua linguagem técnica e formal. Chevallard chama de *forma didática* a forma pela qual o saber será apresentado ao estudante. Segundo Pais (1999, p.23), temos que

para viabilizar a passagem do Saber Sábido para o Saber a Ensinar, torna-se necessário um trabalho didático efetivo a fim de proceder a uma reformulação, visando à prática educativa. É necessário recorrer à elaboração de uma *forma didática*, surgindo assim a importância de uma metodologia fundamentada numa proposta pedagógica.

A *forma didática* é o meio onde a textualização do saber será apresentada. O *saber sábio* como está apresentado nos meios científicos requer um Transposição Didática para se tornar *saber a ensinar* e ser apresentado aos estudantes. Essa textualização do saber necessita de alguns requisitos. Em sua

obra, Chevallard (1998) toma como base cinco requisitos da obra de Verret, *Lê temps des études*, de 1975, necessários para que ocorra o processo de Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar*.

O primeiro requisito é a *desincretização do saber*, ou seja, é a divisão de uma teoria em campos do saber bem delimitados que dão lugar a áreas especializadas. Esta divisão é didaticamente útil, pois na abordagem de uma determinada teoria pode-se começar, por exemplo, examinando teorias parciais com conceitos preliminares e assim vai se construindo um entrelaçamento de teorias parciais até chegarmos à teoria geral em questão. Para se chegar ao conhecimento de integrais, por exemplo, é necessário começar por funções de uma variável, limites, derivadas. Essas teorias parciais são a preparação para o estudo de integral.

O segundo requisito é a *despersonalização do saber*, que consiste em separar o saber do contexto pessoal no qual ele se encontra inserido. Para Troelstra

as construções mentais que consideramos, são pensadas como existentes na mente de um matemático (idealizado). A linguagem das matemáticas é uma intenção (por força quase sempre inadequada) de descrever estas construções mentais (apud Chevallard, 1998, p.72).

Assim a *despersonalização do saber* implica em colocar de maneira textual aquele saber que se quer comunicar. Isola-se o conteúdo de sua concepção histórica para que seja colocado em uma forma didática a fim de que se torne ensinável e compreensível. Quando a definição do conceito de integral é apresentada em um livro didático, por exemplo, esta definição não aparece da mesma forma que foi construída por Leibniz ou Newton no contexto histórico. Esta definição adquire uma nova linguagem para ser apresentada ao estudante. No entanto, despersonalizar o saber não significa negar sua contextualização histórica, pois a maneira textual preserva indícios do contexto histórico.

A *programabilidade do saber* é o terceiro requisito e, consiste na programação da aprendizagem seguindo uma seqüência racional que permita uma aquisição progressiva dos conhecimentos específicos. Para Chevallard (1998) um texto tem um princípio e um fim, mesmo que provisório, e opera por um encadeamento de razões. Assim todo texto tem um princípio e procede

sequencialmente, o que não significa necessariamente que vai seguir a mesma seqüência que foi construído historicamente. No caso do conteúdo de integrais temos primeiramente a definição de integral indefinida, depois integral definida, propriedades, cálculo da área abaixo de uma curva, técnicas de integração.

O quarto requisito é a *publicidade do saber* que é definição explícita do *saber a ensinar*. Esta publicidade deve proporcionar uma maior compreensão e extensão do saber a ensinar. Pode ser percebida nas definições, propriedades dos conceitos apresentados em uma forma didática. Este requisito também possibilitará o *controle social da aprendizagem*.

Por fim, o quinto requisito é o *controle social da aprendizagem* que é o controle regulado da aprendizagem segundo procedimentos de verificação que autorizem a certificação dos conhecimentos específicos (LUCCAS, 2004). Estes procedimentos são as atividades trabalhadas para o entendimento do conteúdo e os meios para a avaliação destes conteúdos.

Esses são os requisitos necessários para que o conhecimento presente no *saber sábio* passe a fazer parte do *saber a ensinar*. Ocorrida a textualização do saber, este precisa de garantias para sua sobrevivência entre os *saberes a ensinar*.

2.4 CRITÉRIOS PARA A SOBREVIVÊNCIA DOS SABERES

Para garantir a sobrevivência de um *saber a ensinar*, este deve proporcionar resultados positivos quando aplicados em sala de aula, ou seja, o que dá certo fica e o que não dá certo sai. Chevallard (1998) define esse processo por *terapêutica* que funciona como um selo de qualidade para o que fica. O conteúdo que produz resultados positivos fica, o conteúdo que não produz resultados positivos sai. Para avaliar o que fica e o que sai, na transposição do *saber sábio* para o *saber a ensinar*, Brockington e Pietrocola (2005), citando Chevallard em seu artigo, propõe algumas características do *saber a ensinar* que combinadas visam à sobrevivência de um *saber sábio* que deseja se tornar *saber a ensinar*.

A primeira característica afirma que para o *saber sábio* se tornar um *saber a ensinar* este deve ser consensual: pais e professores não podem ter dúvidas

quanto ao conteúdo a ser ensinado, se o que está sendo ensinado é adequado ou não. Assim conteúdos mais antigos tender a se estabelecer, como é o caso do conceito de integral, e conteúdos novos, como a integral de LeBesgue por exemplo, sofrem uma certa resistência até serem incorporados aos currículos de Cálculo Diferencial e Integral.

A segunda característica diz respeito às relações de pertinência que o *saber sábio* deve possuir. Nestas relações estão definidos dois tipos de atualidades, a Atualidade Moral e a Atualidade Biológica. Na Atualidade Moral o saber deve estar adequado à sociedade, não pode ter valor por si só, por exemplo, podemos aplicar o conceito de equações diferenciais para fazer o estudo do crescimento de uma população. Assim, faz parte do currículo o conteúdo que a sociedade define como necessário e importante. Na Atualidade Biológica os conteúdos devem conter informações atualizadas em relação praticada. Há alguns conteúdos que já foram refutados pela ciência onde estão inseridos, mas mesmo assim permanecem no currículo por terem valor histórico para a caminhada do ensino. Um exemplo disto é o conceito de logaritmo. Primeiramente os estudantes faziam os cálculos com as tabelas de logaritmos, atualmente com a introdução do uso de calculadoras em aula essas tabelas não são mais utilizadas. Mesmo assim essas tabelas podem ser apresentadas pelo seu valor histórico.

A terceira característica fala sobre a operacionalidade do conteúdo do saber. Este saber deve ser possível de ser trabalhado em salas de aula com os estudantes. Um conteúdo tem boa chance de ser transposto se os estudantes puderem fazer atividades com ele e o professor puder avaliar os alunos em relação a este conteúdo. Para que um conteúdo seja operacionalizável, ele deve estar revestido de uma forma didática. O conceito de integral, por exemplo, é um conceito operacionalizável. Com ele o professor pode trabalhar com exercícios de demonstração, exercícios de cálculo de integrais, problemas envolvendo integrais e também situações de Modelagem Matemática. Este conteúdo também é passível de ser avaliado pelo professor.

Brockington e Pietrocola (2005) citam cinco regras elaboradas por Astolfi (1990) que devem ser observadas durante o processo de Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar*, ou seja, para que um determinado saber esteja presente nos livros e nas salas de aula. Segundo Brockington e Pietrocola (2005, p.15),

ao buscar uma nova rota para a Transposição Didática, estaremos abertos ao estabelecimento de novas “regras” nas quais possa se vislumbrar a acomodação entre os requisitos da ciência com aqueles da sala de aula. Esse novo Saber Escolar deve ser avaliado em termos de motivação em que ele gera e de seu sucesso entre os alunos. Porém agora o sucesso também deve ser visto no sentido de entendimento, prazer e significação e não apenas em termos de adaptabilidade.

Essas regras estão de acordo com os requisitos e características propostas por Chevallard, e assim como as características e os requisitos, estas regras complementam a sobrevivência dos saberes.

- Regra I: modernizar o saber escolar. O saber escolar deve ser adaptado continuamente de maneira que suas aplicações sejam atuais sempre tratando assuntos que estão em voga na sociedade. Novos saberes que são desenvolvidos em pesquisas científicas e que são utilizados em indústrias e novas tecnologias, poderiam ser inseridos nos livros didáticos. Isso criaria uma aproximação entre o que é produzido no meio científico e o que é ensinado nas instituições de ensino.
- Regra II: atualizar o *saber a ensinar*. Essa regra permite a exclusão de conteúdos e a inclusão de novos saberes. Segundo Brockington e Pietrocola (2005) ao fazer a revisão de um livro didático deve-se ir além de acrescentar novos saberes. Há a necessidade de se eliminar alguns saberes que, embora corretos, dever ser descartados por estarem demais banalizados, ou seja conteúdos que não se fazem necessários, ou que foram refutados pela ciência, devem ser retirados, ou colocados como parte da evolução histórica da ciência.
- Regra III: articular o saber “novo” com o “antigo”. Deve-se tomar cuidado ao incluir um novo saber. Essa inclusão pode gerar desconfiança e não aceitação pela sociedade e estudantes. Este deve estar articulado com outros saberes para que seja aceito e aprendido pelos estudantes.

- Regra IV: transformar um saber em exercícios e problemas. Um saber deve gerar ampla variedade de exercícios e atividades didáticas. Isso garante a gestão do cotidiano escolar: a permanência do estudante, a capacidade do estudante em trabalhar o conteúdo, capacidade do professor em avaliar o conteúdo.
- Regra V: tornar um conceito mais compreensível. A Transposição Didática deve permitir a aprendizagem de conceitos. Quando o conceito é apresentado em um texto científico o objetivo é mostrar o novo conceito para que a comunidade científica permita a sua legitimação, portanto não há a preocupação se o leitor vai aprender ou não. Assim a Transposição Didática deste *saber sábio* é necessária para que o mesmo se torne *saber a ensinar*. Então este novo conceito será introduzido resgatando conceitos que são pré-requisitos, por definições, propriedades, apresentando exemplos da teoria, mostrando como trabalhar o conceito em questão. Por isso deve-se ter todo um cuidado na textualização do saber, sempre tendo como objetivo auxiliar o professor no ensino do conteúdo e ser ferramenta na aprendizagem do conteúdo pelo estudante.

Levando em consideração os requisitos descritos por Chevallard para que ocorra o processo de Transposição Didática, as características fundamentadas no critério de sobrevivência dos saberes apontados por Chevallard e as regras elaboradas por Astolfi (apud BROCKINGTON; PIETROCOLA, 2005), construímos no Capítulo 4 deste texto um conjunto de “atributos da Transposição Didática” que observamos em livros didáticos e em um conjunto de atividades de Modelagem Matemática, considerando a *forma didática* proposta nesta pesquisa. Para isto fazemos uma descrição sobre Modelagem Matemática no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 INTRODUÇÃO

As dificuldades encontradas pelos professores no ensino da Matemática e as dificuldades do estudante na aprendizagem da Matemática, levam pesquisadores a procurar caminhos alternativos para o ensino da Matemática. A Modelagem Matemática é apontada como um desses caminhos alternativos por proporcionar dinâmica e motivação para estudantes e professores em sala de aula.

Neste capítulo inicialmente fazemos uma descrição a respeito de Modelagem Matemática e modelo matemático para esclarecimento dos termos apresentados neste trabalho. Na seqüência apresentamos no âmbito da Educação Matemática algumas considerações sobre a Modelagem Matemática e pesquisas relacionando a Modelagem Matemática e o Ensino do Cálculo.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E MODELO MATEMÁTICO

A Modelagem Matemática faz parte do processo que levou os cientistas do passado a construir a ciência que chamamos Matemática. Para D'Ambrósio

a modelagem matemática é matemática por excelência. As origens das idéias centrais da matemática são o resultado de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas idéias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações sobre representações do real. A linguagem, desde a natural até a mais específica e formal, permite compartilhar essencialmente essas idéias, estruturando-as como teorias (apud BASSANEZI, 2006, p.13).

A Modelagem Matemática é o processo que consiste em buscar uma solução adequada para uma situação-problema. Para Bassanezi (2006) “a *modelagem matemática* consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Bassanezi (2006) define modelo matemático como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. Um modelo matemático pode ser uma tabela, uma fórmula matemática, um desenho, um esquema, um mapeamento, um gráfico. O objetivo da Modelagem Matemática é obter este modelo, verificar sua validade e analisar este modelo junto ao problema proposto.

Nesta pesquisa o foco principal não será a obtenção do modelo matemático na Modelagem Matemática. Pretendemos investigar se a introdução dos conceitos necessários para a obtenção do modelo caracteriza a transposição do *saber sábio* para o *saber a ensinar*. A importância da Modelagem Matemática reside no fato de que será considerada como alternativa pedagógica para o ensino da Matemática.

3.2.1 Etapas de uma Atividade de Modelagem Matemática

A literatura em geral, descreve a realização de uma atividade de Modelagem Matemática por meio de uma seqüência de etapas e/ou procedimentos. Apresentamos aqui a descrição usada por Maass (2004) neste contexto.

Para Maass (2004), deve-se escolher um tema que faz parte de um problema do mundo real. Escolhido o tema, o próximo passo é definir com clareza o problema a ser estudado. Definido o problema é necessário que se recorra a pesquisas sobre o tema para obter os dados necessários para o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática. Estas pesquisas podem ser bibliográficas e/ou com profissionais da área.

A próxima etapa consiste na formulação das hipóteses onde iniciamos a matematização do problema. Para Bassanezzi (2006, p.28) “as hipóteses devem incorporar parte da teoria e que podem ser testadas e desta forma

constituem investimentos poderosos para o avanço da ciência”. Nesta etapa surgem simplificações, pois algumas vezes não é possível trabalhar com todas as variáveis envolvidas no problema. Isso permite que se possa visualizar a matemática necessária para a obtenção do modelo. As simplificações não devem ser demasiadas, pois o problema perderia suas características, assim sua solução estaria longe da realidade que o cerca. Para Mark Kac (1914-1983), um matemático polonês, citado em Bassanezi (2006, p. 29) “Se você não pode resolver o problema a que se propôs, então tente simplificá-lo. A única decisão é esta: você não deve simplificá-lo demasiadamente”. Identificadas as variáveis partimos para a resolução do problema.

Para fazer a resolução do problema também se faz presente a matematização do processo, que consiste na tradução das informações coletadas no mundo real para uma linguagem matemática coerente. Assim trabalham-se os conceitos matemáticos e técnicas a fim de se obter um modelo que seja adequado à problemática definida no início do processo. Nesta etapa o fato do modelador já ter outras experiências com atividades de Modelagem Matemática é de grande influência.

Determinado o modelo parte-se para a sua validação. Esta etapa permite ao modelador verificar se o modelo obtido é adequado ou não, o que envolve um processo de aceitação. Se o modelo obtido for aceito, o modelador tem a possibilidade de fazer previsões ou adequar a realidade em estudo, podendo assim controlar acontecimentos futuros. Assim, são trabalhadas a criatividade, curiosidade e espírito investigativo a todo momento. Se o modelo não for satisfatório volta-se para o início do processo para uma redefinição de variáveis e hipóteses simplificadoras. Para Bassanezi (2006, p.38)

o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas em que o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado [...]. Mais importante do que os modelos obtidos são o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática. As discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo na sociedade em que vive.

Segundo Maass (2004) todas estas etapas podem ser representadas no esquema da Figura 3.1.

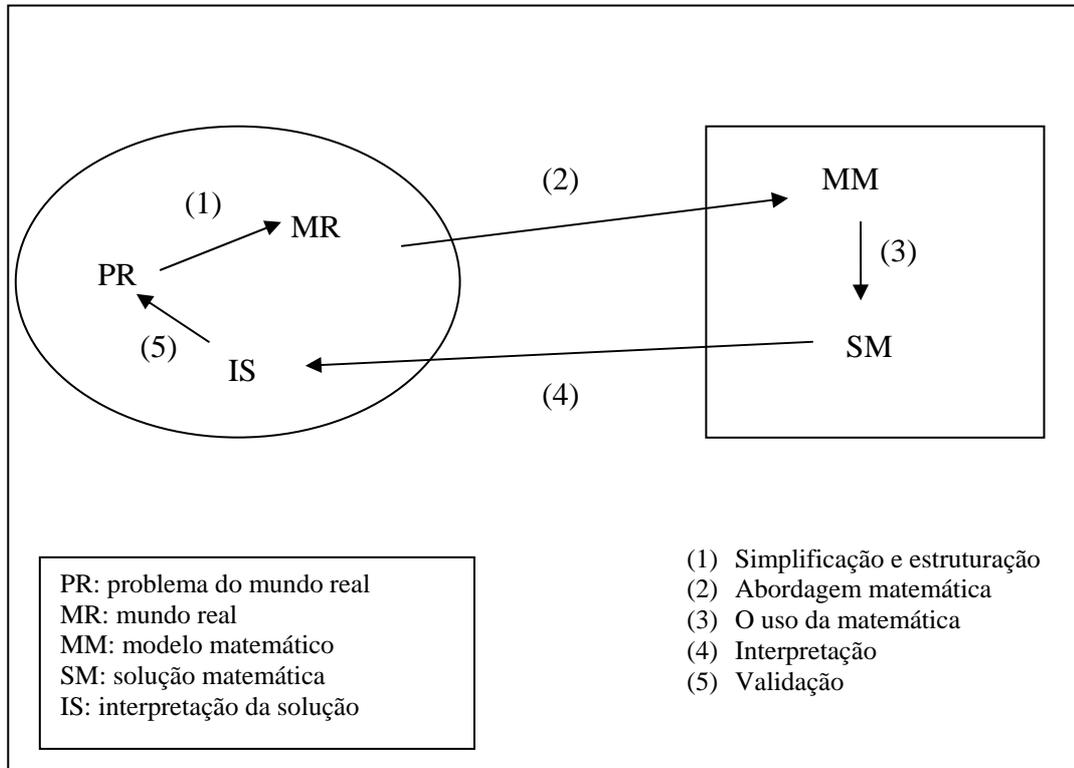


Figura 3.1 – Esquema de Modelagem

Fonte: Maass (2004, p.2, tradução nossa)

A Modelagem Matemática permite não somente que o modelador tenha êxito na busca de soluções para um problema do mundo real, mas também permite uma série de discussões que estão presentes em todas as etapas do processo. No âmbito da Educação Matemática, tão importante quanto o resultado são as discussões realizadas em torno do objeto matemático que emerge na atividade de Modelagem Matemática e as discussões em torno das situações não matemáticas. Estas discussões ao mesmo tempo em que geram, estão fundamentadas em diferentes perspectivas da Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática.

3.3 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Muitas das teorias matemáticas foram geradas a partir de problemas e necessidades para o desenvolvimento da humanidade. A elaboração das teorias e o advento da escola fazem parte deste desenvolvimento. Porém a Matemática vem sendo ensinada como algo pronto e acabado, muitas vezes sem relação com a realidade. Enfatiza-se a técnica em vez dos conceitos, e assim dá-se a impressão que a Matemática é formada de conteúdos estanques e sem articulação com a realidade. Segundo Bassanezi (2006, p.15)

para o desenvolvimento de um modelo de educação menos alienado e mais comprometido com as realidades dos indivíduos e sociedades, necessitamos lançar mão de instrumentos matemáticos inter-relacionados com outras áreas do conhecimento humano.

Em muitas situações, a Matemática apresentada em sala de aula não proporciona a visualização de como determinado conhecimento foi construído, dando a impressão de que a Matemática é algo fora da realidade do ser humano. Segundo Vasconcelos e Souto (2003, p.94)

ao formular atividades que não contemplam a realidade imediata dos alunos, perpetua-se o distanciamento entre os objetivos do recurso em questão e o produto final. Formam-se então indivíduos treinados para repetir conceitos aplicar fórmulas e armazenar termos, sem, no entanto, reconhecer possibilidades de associá-los ao seu cotidiano. O conhecimento não é construído, e ao aluno relega-se uma posição secundária no processo de ensino-aprendizagem.

Quando o estudante não toma contato de como determinado conhecimento foi construído, ele é privado das abstrações, simplificações e idealizações que surgem no processo de construção do conhecimento. Para Brockington e Pietrocola (2005, p.3)

a construção de modelos pela ciência para a apreensão do real visa transformar situações complexas em situações mais simples, afim de poder tratá-las por meio de teorias disponíveis. Com isso neste

processo, abstrações, simplificações e idealizações são implementadas, sem que, no entanto, os limites e possibilidades de tais opções sejam esquecidas, ficando o modelo condicionado às mesmas. Logo a modelagem científica é imprescindível para a construção da ciência e, também para seu ensino.

Este aspecto modelador da ciência é ocultado do estudante em sala de aula. As indagações e dificuldades pelas quais passaram os cientistas ao construir o *saber sábio* podem ser as mesmas pelas quais os estudantes passam ao procurar entender o *saber a ensinar* presente nos livros. Para Brockington e Pietrocola (2005,p. 4)

a transposição dos saberes científicos para a sala de aula induz a uma idéia de simplificação, [...], tem-se apenas um processo onde o cerne é “tornar mais simples” conceitos complicados, algo que difere totalmente das idealizações presentes no processo de modelagem.

Sendo assim a Modelagem Matemática pode ser um meio para que o estudante perceba no processo de modelagem indícios de como os conceitos foram construídos, como estes conceitos se relacionam com outras áreas da ciência, como estes conceitos estão presentes nas aplicações em problemas do mundo real. Neste sentido, no âmbito da Educação Matemática, a Modelagem Matemática tem sido apontada em diversos estudos como uma alternativa pedagógica cuja perspectiva é de articulação com a realidade, na qual fazemos a abordagem de uma situação problema por meio da Matemática.

Para Almeida e Brito (2005, p.83) “a modelagem matemática é ainda um campo fértil para indagações sobre a própria natureza da matemática, seu papel instrumental e dinâmico na descrição, explicação e previsão de comportamentos de situações reais”.

Quando o estudante faz a relação entre conceito e aplicação ele pode visualizar a importância da Matemática na sociedade, pois para Bassanezi (2006)

a modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria à prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la, (BASSANEZI, 2006, p.17)

e isto permite que o estudante visualize a contribuição da matemática para a sociedade.

A Modelagem Matemática não vislumbra somente o ensino da Matemática. Ela vislumbra também a formação do cidadão, tornando o estudante uma pessoa crítica, capaz de indagar, propor problemas, refletir, tomar decisões, fazer previsões. Neste sentido corroboram nosso argumento Almeida e Dias (2004, p.22)

a Modelagem Matemática, no entanto, vai além da idéia utilitarista de aplicar a Matemática para resolver problemas. O desenvolvimento do conhecimento reflexivo visando a formação de um cidadão crítico, também se insere entre os objetivos a serem atingidos quando se faz uso da Modelagem Matemática em ambientes de ensino e aprendizagem de cursos regulares.

No âmbito da Educação Matemática, o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, pode ter diferentes finalidades vinculadas ao ensino e a aprendizagem da Matemática, a formação do estudante e ao desenvolvimento da própria matemática escolar. Neste sentido surgem diferentes perspectivas de Modelagem Matemática.

3.3.1 Perspectivas da Modelagem Matemática na Educação Matemática

No âmbito da Educação Matemática a Modelagem Matemática pode ser vista sob diversas perspectivas, que dependem dos objetivos e dos papéis que o professor e os estudantes assumem no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática. Kaiser e Sriraman (2006) em seu artigo têm revisado a literatura e sistematizado cinco perspectivas sobre Modelagem Matemática. Estas perspectivas também são citadas por Barbosa e Santos (2007) e são elas:

- realística: as situações-problema são autênticas e retiradas da indústria ou da ciência, propiciando aos estudantes o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas aplicados;
- epistemológica: as situações-problemas são estruturadas para gerarem o desenvolvimento da teoria matemática;
- educacional: propõe-se a integrar situações-problemas autênticas com o desenvolvimento da teoria matemática;
- sócio-crítica: as situações devem propiciar a análise da natureza dos modelos matemáticos e seu papel na sociedade;
- contextual: as situações são devotadas à construção da teoria matemática, mas sustentadas nos estudos psicológicos sobre sua aprendizagem.

Essas perspectivas colocam ênfase em diferentes aspectos. Barbosa e Santos (2007) analisando-as, sugerem que as perspectivas podem eleger como objetivo didático:

- o desenvolvimento da teoria matemática (epistemológica, educacional e contextual);
- o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas aplicados (realística);
- a análise da natureza e do papel dos modelos matemáticos na sociedade (sócio-crítica).

Os autores também reforçam que, como os propósitos são diferentes, implicam em diferenças nas formas de organizar e conduzir as atividades de Modelagem Matemática. Para cada perspectiva temos um encaminhamento diferente, quem toma esta decisão é o professor.

Professores têm diferentes formas de planejar suas aulas e introduzir os conceitos matemáticos. As atividades de Modelagem de Matemática são um meio de introduzir e trabalhar estes conceitos. As diferentes perspectivas contemplam aspectos de como estas atividades podem ser inseridas em aulas de Matemática.

As perspectivas abordadas nesta pesquisa são a epistemológica, educacional e contextual, visto que as atividades de Modelagem Matemática propostas neste trabalho visam o ensino da Matemática.

3.4 A MODELAGEM MATEMÁTICA E O ENSINO DO CÁLCULO

O desenvolvimento de atividades de modelagem em aulas de matemática pode contribuir para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral. O trabalho com atividades de modelagem permite que os conceitos e teorias sejam introduzidos conforme a necessidade do problema. Assim, o programa vai sendo desenvolvido pelo professor de acordo com a matemática necessária para a resolução dos problemas que emergem das atividades de Modelagem Matemática.

Por meio da Modelagem Matemática podemos contextualizar os conteúdos curriculares. Para Franchi (2003) a utilização da Modelagem Matemática pode contribuir significativamente para a aprendizagem da Matemática. Ela pode ser tomada como uma alternativa pedagógica para inserir aplicações da matemática no currículo escolar, tornando assim o ensino mais atraente para o estudante e motivando-a a buscar soluções para problemas do cotidiano utilizando-se da matemática. Segundo Franchi (2003) “além da motivação o aluno pode ver as diferentes facetas da Matemática de forma contextualizada”. Assim os estudantes têm a oportunidade de verificar a aplicabilidade da matemática em diversas situações, podendo interagir e compreender melhor a realidade que o cerca. Nesse sentido, destacamos o trabalho de Almeida e Brito (2005), os quais afirmam que a Modelagem Matemática proporciona aos estudantes a atribuição de sentido e a construção de significados para os conceitos matemáticos com que se defrontam nas aulas de matemática, contribuindo com isso para sua aprendizagem.

Nas atividades de modelagem o modelador faz simplificações no problema real para chegar a um modelo que satisfaça a situação original. Esta fase envolve decisões, pois o modelador deverá escolher entre o que deve ser ignorado e o que é essencial. Corroboram com este argumento Kehle e Lester (2003) ao afirmar que

para iniciar a resolução do problema, o modelador simplifica a situação identificando variáveis essenciais. Esta fase de simplificação envolve tomada de decisões a respeito do que deve ser ignorado, desenvolvendo um senso sobre como conceitos essenciais estão conectados, resultando no modelo real da situação original (KEHLE; LESTER, 2003, p.98, tradução nossa).

A Modelagem Matemática proporciona estabelecer relações entre as outras disciplinas como: Física, Química e Biologia, visto que muitos problemas situam-se no campo dessas disciplinas. Assim o estudante tem a possibilidade de enxergar a relação que há entre os diversos braços da ciência e estabelecer relações entre saber escolar e saber cotidiano.

A Modelagem Matemática também traz como benefício “poder, através de cálculos e observações, validar o modelo, fazer previsões sobre o comportamento ou controlar a realidade em estudo” (ALMEIDA, 2004), assim o estudante pode trabalhar com uma situação de diversas formas, não só buscando uma solução atual, mas tendo o poder de controlar acontecimentos futuros. Assim a criatividade e curiosidade do estudante são instigadas o tempo todo. É preciso resgatar aquele sentimento de investigação e curiosidade que é própria do ser humano.

Várias pesquisas nos mostram como a Modelagem Matemática pode ser tomada como alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Ferruzzi (2003), por exemplo, desenvolveu, com estudantes de uma disciplina do curso superior de tecnologia, diversas atividades de Modelagem Matemática tendo como objetivo o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Inicialmente realizou uma série de atividades “dirigidas” com os estudantes, envolvendo os conteúdos do programa e, em seguida, os estudantes realizaram, de forma independente, trabalhos com temas escolhidos por eles. Ferruzzi (2003, p.131) conclui que

a experimentação desenvolvida mostra que a Modelagem Matemática pode ser utilizada em sala de aula, pois ela apresenta-se como uma boa estratégia de ensino capaz de relacionar os conhecimentos matemáticos com a resolução de problemas do dia-a-dia, além de integrar os conteúdos matemáticos aos conteúdos de eletricidade e outras áreas afins.

Borssoi (2005) investigou como a Modelagem Matemática pode contribuir para a aprendizagem significativa na perspectiva de Ausubel. A pesquisa foi realizada com estudantes do curso de Bacharelado em Química na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, trabalhando o conceito de equações diferenciais ordinárias.

Vertuan (2007) trabalhou com a utilização de diferentes registros de representação (teoria desenvolvida por RAYMOND DUVAL) em atividades de Modelagem Matemática. O objeto de saber presente nas atividades é o conceito de derivada presente no Cálculo Diferencial e Integral. A pesquisa foi feita com estudantes do primeiro ano de um curso de Licenciatura em Matemática. Em seu trabalho ele descreve como as atividades de Modelagem Matemática possibilitam o tratamento, conversão e coordenação entre os registros que emergem nestas atividades, e estes elementos contribuem para a compreensão dos objetos matemáticos discutidos bem como da situação-problema investigada.

Fontanini (2007) também trabalhou com estudantes que cursavam o primeiro semestre de um curso em Manutenção Industrial Mecânica em uma Universidade no interior do Paraná, durante as aulas de Fundamentos da Matemática, Cálculo Diferencial Integral I e um curso extracurricular. Sua pesquisa trata de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, na teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e nos Mapas Conceituais de Joseph Novak. Após um período de familiarização com os Mapas Conceituais, os estudantes desenvolveram atividades de Modelagem Matemática e construíram mapas a respeito dos conceitos matemáticos e extra-matemáticos envolvidos nas atividades de Modelagem Matemática. Fontanini (2007) conclui que conceitos matemáticos trabalhados por meio da Modelagem Matemática associada aos Mapas Conceituais permitem avanços no *continuum* aprendizagem memorística - aprendizagem significativa destes conceitos.

Santos (2008) faz uma investigação sobre o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática mediadas pelo uso do computador. Esta pesquisa foi desenvolvida com estudantes do segundo ano de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina que cursavam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II. Neste trabalho o conteúdo que emergiu nas atividades foi o conteúdo de integral. O autor conclui que a associação das atividades de Modelagem Matemática com as Tecnologias de Informação e

Comunicação favorecem a compreensão dos conceitos e contribuem para o desenvolvimento da criatividade na busca de soluções para situações problemáticas da sociedade.

Vemos na Modelagem Matemática uma alternativa pedagógica para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, visto que, os aspectos apresentados acima podem tornar a aula de Cálculo Diferencial e Integral mais atraente e dinâmica para o estudante, ampliando seu interesse pela disciplina e motivando-o a buscar as soluções para problemas do cotidiano.

Em nossa pesquisa um dos objetivos é analisar as atividades de Modelagem Matemática como forma didática descrita por Chevallard para a apresentação do *saber a ensinar*. Assim, as atividades de Modelagem Matemática poderão passar a figurar como uma nova forma de apresentação do saber, auxiliando ou complementando o livro didático no ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

Para isto, tanto as atividades de Modelagem Matemática como os livros didáticos devem contemplar atributos que caracterizam a transposição dos saberes. Estes atributos e o caminho metodológico para a sua análise nas atividades de Modelagem Matemática e em livros didáticos são descritos no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 4

ASPECTOS METODOLÓGICOS E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, inicialmente apresentamos três atributos da Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* elaborados a partir da investigação teórica descrita no Capítulo 2 deste texto. A seguir, descrevemos os aspectos metodológicos e os procedimentos da pesquisa usados para investigar como estes atributos definidos se fazem presentes em livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral, e como podem ser percebidos em atividades de Modelagem Matemática.

4.2 ATRIBUTOS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA QUE VAMOS INVESTIGAR

Segundo Chevallard há um *saber sábio* que é o saber construído e legitimado pela comunidade científica. Este *saber sábio* apresenta-se de maneira formal e com uma linguagem especializada, dificultando o entendimento daqueles que tomam contato com ele pela primeira vez. Assim, sofre mudanças para se tornar um *saber a ensinar*. Estas mudanças são “adequadas” ou “não adequadas” na medida em que atendem a determinados atributos no processo da Transposição Didática.

Os atributos da Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* que vamos investigar nesta pesquisa são elaborados a partir dos requisitos e características propostas por Chevallard e das regras citadas por Astolfi, descritos no Capítulo 2 deste texto. Os requisitos e características propostas por Chevallard têm ligação direta com as regras propostas por Astolfi e assim, a partir destes requisitos, características e regras, elaboramos em nossa pesquisa três atributos

que serão observados em dois livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral e em atividades de Modelagem Matemática. A seguir apresentamos os três atributos.

i) Atributo I - ADAPTAÇÃO DO SABER: envolve as regras I, II e III, propostas por Astolfi. Entendemos que a regra II – atualizar o saber a ensinar – que envolve a exclusão de saberes que já não se fazem necessários e a inclusão de novos saberes, implica necessariamente na modernização do saber escolar e na articulação dos saberes novos com os antigos, apresentados por Astolfi como regra I e regra III respectivamente.

Este atributo permite analisar a característica apontada por Chevallard (1998) “ser consensual”, bem como as relações de pertinência que envolvem a atualidade moral, ou seja, se o conteúdo é adequado à sociedade, e a atualidade biológica, que indica se as informações nas aplicações do conteúdo são atualizadas.

Este atributo contempla também o requisito *desincretização do saber*. A *desincretização do saber* se caracteriza pela divisão do conteúdo em partes bem delimitadas, dividindo uma teoria em teorias parciais mais específicas. Entendemos que isto sinaliza que o saber sofre uma adaptação para que haja sua textualização para apresentação do conteúdo por meio de uma *forma didática*.

Este atributo também contempla a *despersonalização do saber*. A *despersonalização do saber* promove a separação do saber do contexto histórico no qual está inserido adaptando-se assim a uma forma didática por meio da qual será apresentado aos estudantes. Neste contexto é possível observar se aspectos históricos são considerados na apresentação do conteúdo.

Um exemplo de adaptação do saber é a retirada das tábuas de logaritmos dos programas escolares. O uso destas tábuas foi substituído por um estudo mais completo da função exponencial (que é a função inversa da função logarítmica) e a introdução do uso de calculadoras científicas e gráficas, mesmo na Educação Básica.

Outro exemplo de adaptação do saber é a utilização do computador nas aulas de matemática. Há disponível no mercado diversos softwares matemáticos que auxiliam no cálculo de vários conceitos como: cálculo de determinantes, cálculo de uma matriz inversa, cálculo de integrais mais sofisticadas (por exemplo integrais trigonométricas e integrais impróprias), representações gráficas, estudo de séries (convergência de seqüências e séries).

A introdução de aplicações no estudo dos conceitos também é um exemplo de adaptação do saber. Com o tempo ganho na utilização de calculadoras e softwares matemáticos, pode-se dar mais atenção às aplicações da teoria nas situações do dia-a-dia fazendo assim uma contextualização dos conceitos aprendidos.

ii) Atributo II - ELUCIDAÇÃO DO SABER: contempla a regra V proposta por Astolfi - tornar um conceito mais compreensível. Quando um conceito é apresentado no livro didático, a linguagem utilizada pelo autor não é a mesma que aparece nos textos científicos onde se encontra o *saber sábio*. Ao apresentar um conteúdo do saber no livro didático há a preocupação de que o leitor compreenda o conceito que pretende estudar. Assim, a transposição do *saber sábio* para o *saber a ensinar* envolve uma questão de linguagem na textualização do saber. Segundo Pais (1999, p.22),

para o aluno ter acesso ao saber, é necessário a colocação didática do problema da linguagem envolvida no saber científico. Nesse sentido, apesar de parecer evidente que o saber científico não pode ser ensinado na forma como se encontra redigido nos textos técnicos, essa questão se constitui num obstáculo que deve ser considerado no processo de aprendizagem.

Neste atributo também estão inseridos os requisitos *programabilidade do saber* e *publicidade do saber* propostos por Chevallard (1998) e que descrevemos na seção 2.3. Para que haja a elucidação do saber, a definição do saber deve estar explícita (*publicidade do saber*) e este também deve se apresentar de maneira que tenha um princípio e uma seqüência racional de desenvolvimento para a teoria (*programabilidade do saber*).

Quando um conceito é abordado no livro didático, geralmente é seguido por definições, demonstrações, propriedades, exemplos e contra exemplos, com a finalidade de fazer a elucidação do conceito em questão. Muitos autores também inserem em seus livros elementos auxiliares para a compreensão do saber tais como quadros demonstrativos com algoritmos de resolução, tabelas, fluxogramas, gráficos. Como exemplo, podemos citar as tabelas de derivação e integração que são amplamente utilizadas pelos estudantes no cálculo de integrais mais elaboradas.

iii) Atributo III - OPERACIONALIZAÇÃO DO SABER: contempla a regra IV proposta por Astolfi – transformar um saber em exercícios e problemas – bem como a característica de operacionalidade proposta por Chevallard (1998). Para o saber fazer parte do programa de ensino é necessário que possa ser trabalhado pelos estudantes por meio de atividades como exercícios, problemas e trabalhos estabelecidos pelo professor, atividades de avaliação, o que também atende o requisito *controle social da aprendizagem*, pois estas atividades são procedimentos de verificação que autorizam a certificação do conhecimento específico.

4.3 CAMINHO METODOLÓGICO

Este trabalho constitui uma pesquisa qualitativa do tipo interpretativo. Neste sentido a compreensão do fenômeno se descreve a partir da compreensão do autor fundamentado no referencial teórico que dá sustentabilidade teórica à investigação e aos resultados apresentados.

4.3.1 O Objeto Matemático

O objeto matemático do qual fazemos a análise da Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* é o conteúdo de Integral como conceito do Cálculo Diferencial e Integral.

Os tópicos do conteúdo de Integral analisados em livros e também abordados em atividades de Modelagem Matemática são: a Integral Indefinida, Integral Definida, Teorema Fundamental do Cálculo, Propriedades, Área abaixo de uma curva, Método da substituição de variáveis, Integração por partes, Integração por frações parciais.

4.3.2 A Escolha dos Livros Didáticos

A escolha dos livros didáticos é baseada nas Bibliografias Básicas e Complementares de Programas de Cálculo Diferencial e Integral de cursos de Matemática e Engenharias da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Universidade Federal do Paraná (UFPr), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Universidade de São Paulo (USP).

Os livros analisados são *Cálculo de George B. Thomas* Volume I dos autores Ross L. Finney, Maurice D. Weir e Frank R. Giordano, e o livro *Um Curso de Cálculo* do autor Hamilton Luiz Guidorizzi volume I. A escolha do livro do *Cálculo de George B. Thomas Jr* se deve ao fato de que é um dos livros atuais mais usados pelos professores dos cursos de Matemática e não Matemáticos que contém a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. A escolha do livro *Um Curso de Cálculo* foi feita por se tratar de um livro clássico de Cálculo, muito citado como Bibliografia Básica dos programas de Cálculo Diferencial e Integral.

4.3.3 A Escolha das Atividades de Modelagem Matemática

As atividades de Modelagem Matemática escolhidas para a análise foram retiradas de diferentes ambientes. As atividades sobre o *Problema do Jardim* e o *Problema do Financiamento*, são atividades que foram desenvolvidas em um projeto com estudantes do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática ministrado pela autora desta pesquisa e pelo aluno Fábio Vieira Santos do mesmo programa de mestrado. Esses estudantes já haviam cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I no primeiro ano do curso. A participação destes estudantes no projeto lhes conferiu 40 horas como atividade complementar de ensino. Os estudantes se inscreveram para o projeto, e desde o início pedimos para que formassem duplas para trabalharem. Neste curso apresentamos algumas situações-problema que foram previamente desenvolvidas pelos ministrantes. Aos estudantes foram apresentadas as situações e os ministrantes orientavam as duplas no desenvolvimento da atividade. A seguir, em um momento posterior do projeto,

pedimos para que os estudantes trouxessem temas e identificassem situações problemáticas para estudar. Assim, cada dupla teve a oportunidade de buscar e selecionar um tema para ser trabalhado.

A atividade *Energia Armazenada em um Capacitor* foi extraída da dissertação de mestrado “A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia” de Ferruzzi (2003).

4.3.4 A Análise dos Dados

A análise dos dados consiste em identificar nos livros didáticos escolhidos e nas atividades de Modelagem Matemática selecionadas, a caracterização dos três atributos da Transposição Didática que definimos na seção 4.2. Consiste em uma análise de caráter qualitativo e busca estabelecer reflexões sobre a problemática da pesquisa apresentada na Introdução deste texto.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS E DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

5.1 INTRODUÇÃO

No ensino do Cálculo Diferencial e Integral contamos com formas didáticas que são indispensáveis na apresentação do conteúdo. A mais usual é o livro didático. Uma outra forma, ainda pouco utilizada por professores, é a Modelagem Matemática. O *saber a ensinar* se faz presente em ambas. Neste capítulo analisamos como os três atributos que definimos na seção 4.2 podem ser observados na Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* em dois livros de Cálculos Diferencial e Integral e em atividades de Modelagem Matemática. Esta análise é realizada, inicialmente de forma local para os conteúdos em cada livro escolhido e para cada atividade de Modelagem Matemática selecionada e a seguir, de forma global, envolvendo todo o conjunto dados (livros didáticos e atividades de Modelagem Matemática), buscando tecer considerações e estabelecer reflexões sobre a Transposição Didática do conteúdo de integral nestes dois ambientes.

5.2 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO SABER SÁBIO PARA O SABER A ENSINAR NOS LIVROS DIDÁTICOS

Uma das maiores conquistas do homem, sem dúvida, foi a escrita. Com ela a humanidade pode dar grandes passos em direção ao desenvolvimento da ciência, pois foi a maneira que o homem desenvolveu para que o avanço ficasse devidamente registrado para que as gerações vindouras pudessem utilizar aquilo que foi construído e ainda avançar cada vez mais. Assim, a ciência construída pelo homem foi transportada para manuscritos, o que mais tarde se tornariam livros.

Quando um saber é construído e validado pela comunidade científica ele é apresentado em artigos científicos e/ou publicações se tornando *saber sábio*. O *saber sábio* construído pelo homem é ensinado nas Instituições de Ensino Superior. Este saber passa pelo processo de Transposição Didática para se tornar um *saber a ensinar*. Nos cursos de graduação os estudantes têm contato com o *saber a ensinar* relevante para cada área da ciência na qual o curso de graduação está inserido. A forma mais usual de se apresentar o *saber a ensinar* é o livro didático.

Amplamente utilizado em qualquer curso de graduação, a presença do livro didático se faz necessária, pois é nele que se encontra o *saber a ensinar*. É nos livros que o professor busca orientação e apoio para a organização e preparação das atividades que conduzirá em suas aulas. Os estudantes também têm o livro como um referencial dos saberes expostos em aula para seu estudo e pesquisa, e buscam no livro um apoio e ou uma complementação de estudo para se apropriar do *saber a ensinar*.

Particularmente para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral temos uma grande variedade de livros didáticos disponíveis. Cada autor tem estilo e linguagem próprios e assim, podemos inferir que para autores diferentes temos apresentações diferentes do *saber a ensinar* nos seus livros didáticos. Segundo Zuchi (2005, p.57),

as diferenças entre os livros são notáveis e tornam-se significativas na escolha realizada pelo professor. Alguns livros são mais teóricos, outros são mais contextualizados, o que fica claro no prefácio de alguns livros onde os autores explicitam o público alvo a que se destinam.

Levando em consideração essas diferenças entre os livros didáticos é que nos propomos a analisar dois livros de Cálculo Diferencial e Integral, com a finalidade de investigar como estes livros contemplam os atributos da Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar*, que definimos em 4.2.

5.2.1 Análise de livros de Cálculo Diferencial e Integral

O ensino do Cálculo Diferencial e Integral se faz presente em cursos de todas as áreas (Matemática, Física, Química, Engenharias, Arquitetura, Administração, Economia, Ciências Contábeis, Farmácia, Bioquímica) na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Esta disciplina tem como referências bibliográficas livros didáticos de Cálculo, que atendem diretamente à necessidade do suporte matemático para a resolução de problemas ligados a cada uma destas áreas. Nestes livros está apresentado o *saber a ensinar* necessário para o desenvolvimento desta disciplina. É nesta forma de apresentação que vamos buscar se os atributos para a Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* estão contemplados.

O foco principal deste estudo não é a análise dos livros didáticos, mas sim de tópicos que envolvem o conceito de integral e as técnicas de integração. Para analisar estes tópicos elaboramos três atributos da Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar*. São eles: adaptação do saber, elucidação do saber e operacionalização do saber. Aqui apresentamos a análise de livros didáticos com relação à contemplação destes atributos.

Os dois livros selecionados são:

A) Cálculo I de George Thomas Jr – Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano – Tradução: Paulo Boschcov – Editora Pearson Addison Wesley – São Paulo – 2002 – volume I;

B) Um Curso de CÁLCULO – Hamilton Luiz Guidorizzi – 4ª edição – Editora LTC (Livros Técnicos e Científicos S.A.) – Rio de Janeiro – 2000 – volume I.

5.2.1.1 Livro A: Cálculo de George B. Thomas Jr.

A obra Cálculo de George B. Thomas Jr. é composta de dois volumes. O primeiro volume apresenta os conteúdos de funções de uma variável,

limites, derivadas e integrais. O segundo volume apresenta os conteúdos de séries, vetores, funções de várias variáveis, limites, derivadas parciais e integrais múltiplas. Neste trabalho, como estamos interessados em integrais de funções de uma variável, analisamos o volume I. Este volume pertence a 10ª edição (ano 2002) e estamos analisando sua 4ª reimpressão. Este livro foi escolhido por ser um dos mais citados nas bibliografias básicas e complementares das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

No livro o autor mostra exemplos da teoria e apresenta algumas situações problemáticas. Os exercícios trazem algumas inovações: alguns sugerem ao estudante o uso de calculadoras gráficas, e outros requerem o uso do sistema de álgebra por computador (SAC), para a utilização de softwares como o Matemática, Maple ou MatLab (sugestão do autor).

Nossa análise é feita nos capítulos e seções do livro que apresentam os seguintes conceitos: Integrais Indefinidas, Integrais Definidas, Teorema Fundamental do Cálculo, Área abaixo da curva, Método da substituição, Integração por partes, Integração por frações parciais. Os capítulos onde se encontram estes conceitos são o Capítulo 4 intitulado “Integração” e o Capítulo 7, intitulado “Técnicas de Integração, Regra de l'Hôpital e Integrais Impróprias”.

Inicialmente fazemos uma análise local (para cada conteúdo selecionado em cada livro) e relação aos três atributos que definimos na seção 4.2.

Integral Indefinida

Este conceito é apresentado no Capítulo 4 seção 4.1 p.318. Primeiramente o autor faz a apresentação da definição do conceito de Primitiva de uma Função e na seqüência apresenta a definição do conceito de Integral Indefinida.

*Definição: uma função $F(x)$ é uma primitiva de uma função $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$ para qualquer x no domínio de f . O conjunto de todas as primitivas de f é a **integral indefinida** de f em relação a x , denotada por*

$$\int f(x)dx \quad (5.1)$$

\int é o **símbolo de uma integral**. A função f é o **integrando** de uma integral e x é a **variável de integração**.

De acordo com o corolário 2 do Teorema do Valor Médio (seção 3.2 do livro), uma vez que encontramos uma primitiva F de uma função f , as outras primitivas diferem dela por uma constante. Indicamos isso em notação integral da seguinte maneira:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

A constante C é a **constante de integração** ou **constante arbitrária**. A equação (1) deve ser lida como a “integral indefinida de f em relação a x é $F(x)+C$ ”. Quando encontramos $F(x)+C$, dizemos que conseguimos integrar e calcular a integral.

Após apresentar a definição do conceito de Integral Indefinida, o autor mostra exemplos de como trabalhar com este conceito e na seqüência sugere exercícios para aprimoramento do conceito. Isto indica que o conteúdo integral indefinida é um conteúdo parcial que faz parte da teoria de Integral, e isto sinaliza a desincretização do saber.

A linguagem utilizada pelo autor para a introdução do conceito de integral indefinida difere da apresentada por Leibniz e por Newton na seção 1.2 desse texto. Esta mudança se dá pelo fato de que o conceito foi separado do contexto histórico o qual foi concebido para ser apresentado em uma nova forma didática, o que sinaliza a despersonalização do saber. Porém, não há relação deste conceito com o contexto histórico no qual foi construído, como apresentamos na seção 1.2. Assim a despersonalização do saber é parcial neste conceito.

Os exercícios de número 57 a 62, representam aplicações do conceito em temas da atualidade conforme mostra a Figura 5.1, indicando a relação de pertinência de atualidade biológica.

No entanto, os exercícios 59, 60, 62 utilizam como unidade de medida mph (pés/s) e pés o que não é habitual em nossa sociedade, pois utilizamos metro por segundo ou metros. Assim, a atualidade moral do conceito, sugerida pelo atributo I adaptação do saber, não é contemplada, uma vez que a situação apresentada não é adequada para a comunidade na qual os estudantes estão inseridos.

Aplicações

57. *Queda na Lua* Na Lua, a aceleração da gravidade é de $1,6 \text{ m/s}^2$. Se uma pedra cai em um buraco, qual será sua velocidade imediatamente antes de atingir o fundo, 30 s depois?

58. *Decolando da Terra* Um foguete decola da superfície terrestre com uma aceleração constante de 20 m/s^2 . Qual será sua velocidade 1 min depois?

59. *Parando um carro a tempo* Você está dirigindo em uma rodovia a uma velocidade constante de 60 mph (88 pés/s) quando vê um acidente à frente e aciona os freios. Que desaceleração constante é necessária para frear seu carro no espaço de 242 pés? Para determiná-la, siga os passos a seguir.

Passo 1: Resolva o problema do valor inicial

Equação diferencial: $\frac{d^2s}{dt^2} = -k$ (k constante)

Condições iniciais: $\frac{ds}{dt} = 88$ e $s = 0$ quando $t = 0$.
Medindo tempo e distância a partir do momento em que os freios são acionados.

Passo 2: Determine o valor de t que torna $ds/dt = 0$ (a resposta envolve k).

Passo 3: Determine o valor de k que torna $s = 242$ para o valor de t que você encontrou no passo 2.

60. *Freando uma motocicleta* Um programa estadual de segurança do motociclista em Illinois exige que os condutores dirigindo a 30 mph (44 pés/s) estejam aptos a parar no espaço de 45 pés. Que desaceleração constante é necessária para fazer isso?

61. *Movimento ao longo de um eixo cartesiano* Uma partícula se desloca ao longo de um eixo coordenado com aceleração $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$, desde que $ds/dt = 4$ e $s = 0$ quando $t = 1$. Determine

(a) a velocidade $v = ds/dt$ em termos de t

(b) a posição s em termos de t .

I 62. *O martelo e o pena* Quando o astronauta da *Apollo 15* David Scott jogou um martelo e uma pena na Lua para demonstrar que no vácuo todos os corpos caem com a mesma aceleração (constante), ele os jogou de aproximadamente 4 pés acima do solo. A cobertura televisiva do evento mostra o martelo e a pena caindo mais lentamente que na Terra, onde, no vácuo, eles deveriam ter gasto só meio segundo para cair os 4 pés. Quanto tempo gastaram o martelo e a pena para cair os 4 pés na Lua? Para descobrir, resolva o seguinte problema do valor inicial para s em função de t . Depois determine o valor de t que torna s igual a 0.

Equação diferencial: $\frac{d^2s}{dt^2} = -5,2 \text{ pés/s}^2$

Condições iniciais: $\frac{ds}{dt} = 0$ e $s = 4$ quando $t = 0$

Figura 5.1 – Exercícios 57 a 62, p. 325 - 326

Para a resolução dos exercícios de número 67 a 72, o autor sugere o uso do computador, o que implica na modernização e articulação de um novo saber, apontado no atributo I, adaptação do saber.

Na página 321, o autor faz um breve comentário sobre as etapas do processo de Modelagem Matemática e mostra um exemplo de modelagem utilizando

o problema da queda livre. Podemos supor aqui que sua intenção seja de trabalhar com assuntos do cotidiano, indicando a modernização do saber escolar. No entanto o autor não cita exemplos nesta seção que fazem alusão à Modelagem Matemática.

Na apresentação do conceito de integral indefinida, não é atendida a relação de pertinência moral, o que indica que o atributo I, adaptação do saber não está completamente contemplado neste conceito.

A apresentação da definição de Integral Indefinida traz a explicitação do conceito, o que sinaliza a publicidade do saber. Na página 319 o autor apresenta uma tabela contendo fórmulas de integrais, assim temos um indicativo de que se deseja tornar o conceito compreensível. Depois de introduzido o conceito são apresentados vários exemplos da aplicação do conceito. Entendemos que quando o autor busca mostrar vários exemplos associados ao conceito que deseja introduzir, este mostra sua preocupação em tornar o conceito mais compreensível. Para a compreensão do conceito de integral indefinida, o autor apresenta 5 exemplos. Vejamos o exemplo 1 na Figura 5.2.

Exemplo 1 Encontrando uma Integral Indefinida

Calcule $\int e^{2x} dx$.

Solução

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

uma primitiva de e^{2x}
a constante arbitrária

A fórmula $(1/2)e^{2x} + C$ gera todas as primitivas da função e^{2x} . As funções $(1/2)e^{2x} + 1$, $(1/2)e^{2x} - \pi$ e $(1/2)e^{2x} + \sqrt{2}$ são todas primitivas da função e^{2x} , e você pode verificar isso diferenciando.

Figura 5.2 – Exemplo 1, p. 318

O autor também mostra um outro tipo de cálculo de integrais utilizando o conceito de equações diferenciais conforme a Figura 5.3.

Exemplo 4 – Determinando uma Curva a Partir de Sua Função Coeficiente Angular e um Ponto

Determine a curva cujo coeficiente angular no ponto (x, y) é $3x^2$ sabendo que ela deve passar pelo ponto $(1, -1)$.

Solução Em linguagem matemática, pediu-se para resolver o problema do valor inicial, que consiste no seguinte.

A equação diferencial: $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ O coeficiente angular da curva é $3x^2$.

A condição inicial: $y(1) = -1$

1. Resolva a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int 3x^2 dx$$

$$y + C_1 = x^3 + C_2$$

$$y = x^3 + C$$

Constantes de integração combinadas, dando a solução geral.

Esse resultado nos diz que y é igual a $x^3 + C$ para algum valor de C . Determinamos esse valor a partir da condição $y(1) = -1$.

2. Calcule C :

$$y = x^3 + C$$

$$-1 = (1)^3 + C$$

$$C = -2.$$

Condição inicial $y(1) = -1$

A curva que desejamos é $y = x^3 - 2$ (Figura 4.1).

Figura 5.3 – Exemplo 4, p.320, 321

O capítulo inicia com o conceito de Integral Indefinida. O livro apresenta este conceito para introduzir o conteúdo de integrais iniciando assim uma seqüência lógica para o conteúdo, indicando que há uma programabilidade do saber. Como descrevemos anteriormente este conceito atende à regra II – tornar um conceito compreensível – e o requisito publicidade do saber, assim o atributo II, elucidação do saber é contemplado.

No fim da seção 4.1 do livro, o autor propõe uma grande quantidade de exercícios. São trinta e dois exercícios onde o estudante deverá calcular a integral indefinida de uma função dada. Traz mais treze exercícios abordando o conceito de equação diferencial. Dois exercícios trazem o conceito de velocidade. Dois exercícios relacionam integral com reta tangente. Quatro exercícios trazem

gráficos de equações diferenciais pedindo para determinar a equação da curva. Oito exercícios trazem aplicações do cotidiano usando o conceito de integral. Dois exercícios são teóricos e finalizando seis exercícios para serem feitos utilizando o computador. No final do livro o autor coloca as respostas de todos os exercícios ímpares para futuras conferências. Esta quantidade de exercícios indica a alta capacidade de operacionalização do conceito de integral indefinida. Isto envolve a operacionalidade do saber e o requisito do controle social da aprendizagem, pois além do estudante ter uma série de exercícios e problemas para trabalhar, o professor também dispõe destes exercícios e problemas para avaliação do estudante, gerando assim um processo de desenvolvimento de atividades e de avaliação. Isto indica que o atributo III é contemplado.

Integral Definida

Este conceito é apresentado pelo autor no capítulo 4 seção 4.4. A definição de Integral Definida é feita da seguinte maneira:

Definição: A Integral Definida como Limite da Somas de Riemann

Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Para qualquer partição de P de $[a, b]$, escolha os números c_k arbitrariamente nos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

Se houver um número I tal que

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = I$$

Independentemente de como P e os c_k forem escolhidos, então f será integrável em $[a, b]$, e I será a integral definida de f em $[a, b]$.

Este conceito foi apresentado como parte da teoria de Integral, tornando-se um conceito parcial, o que mostra a desincretização do saber. Na seção 1.2 apresentamos como Leibniz iniciou sua caminhada para o desenvolvimento do conceito de integral a partir da construção do Triângulo Característico (Figura 1.1) e de sua partição em retângulos (Figura 1.2). Leibniz associa o conceito de integral à soma das áreas dos n -retângulos que compõe o Triângulo Característico. A linguagem utilizada pelo autor na apresentação do mesmo conceito no livro é

diferente da linguagem utilizada por Leibniz na construção do conceito. Assim a linguagem do livro se torna acessível ao estudante e separada do contexto histórico de onde foi concebido, porém o autor não faz correlação entre aspectos históricos do conceito e a linguagem apresentada no livro, o que indica uma despersonalização parcial do saber.

Os exemplos e exercícios não contemplam temas da atualidade, indicando que não há relação de pertinência de atualidade biológica e atualização do saber. Também não há atividades sugerindo o uso de novas tecnologias o que implica a não modernização e articulação do saber. Como não há menção a situações problemáticas não há a presença da relação de pertinência de atualidade moral. Assim o atributo I, adaptação do saber está parcialmente contemplado no conceito de integral definida.

Na apresentação da definição de integral definida temos a explicitação do saber o que garante a publicidade do saber. O livro também traz um esquema da integral definida para o entendimento e publicidade da notação conforme a Figura 5.4.

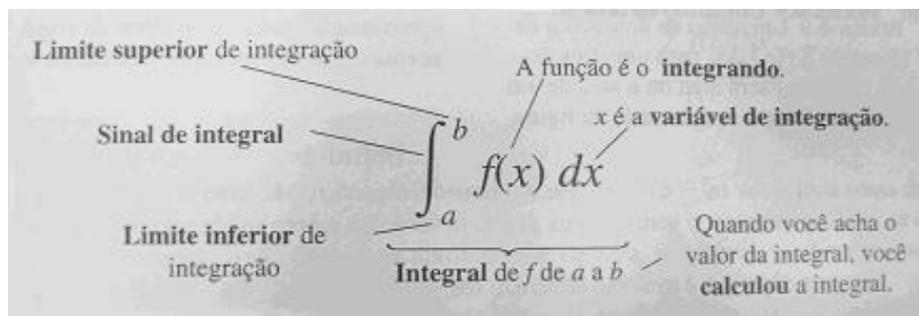


Figura 5.4 – Esquema da integral definida, p.349

No entanto, nesta seção é apresentado apenas um exemplo sobre a utilização da notação de integral, para tornar o conceito compreensível, como mostra a Figura 5.5.

Na apresentação do conceito de integral definida temos garantida a publicidade do saber. Porém são utilizados poucos artifícios para tornar o conceito compreensível, visto que é apresentado apenas um exemplo. Assim o atributo II, elucidação do saber, é parcialmente contemplado.

Exemplo 2 Usando a Notação

O intervalo $[-1, 3]$ é dividido em n subintervalos de igual comprimento $\Delta x = 4/n$. Seja m_k o ponto médio do k -ésimo subintervalo. Exprese o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (3(m_k)^2 - 2m_k + 5) \Delta x$$

como integral.

Solução Como os pontos médios m_k foram escolhidos a partir dos subintervalos do particionamento, esta expressão é certamente um limite das somas de Riemann. (Os pontos escolhidos não precisariam ser pontos médios; poderiam ter sido escolhidos arbitrariamente a partir dos subintervalos). A função que está sendo integrada é $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ ao longo do intervalo $[-1, 3]$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (3(m_k)^2 - 2m_k + 5) \Delta x = \int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 5) dx.$$

Figura 5.5 – Exemplo 2, p.350

Ao final da seção 4.4 o autor propõe seis exercícios para o estudante expressar limites como integrais, o que denota uma baixa operacionalidade deste conceito, uma vez que mais exercícios poderiam explorar a alta capacidade de operacionalização deste conceito. Diante disto temos que o atributo III, operacionalização do saber, está parcialmente contemplado.

Área sob uma curva

A definição deste conceito é apresentada no capítulo 4 seção 4.4 da seguinte forma:

Definição: Área sob uma Curva (como uma integral Definida)

Se $y = f(x)$ for não negativa e integrável em um intervalo fechado $[a, b]$, então a área sob a curva $y = f(x)$ desde a até b será a integral de f de a até b ,

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

O conceito de área sob uma curva é apresentado como parte da teoria de Integral, sinalizando a desincretização do saber. O autor não estabelece relações com aspectos históricos do origem do conceito de Área sob uma curva, sinalizando a despersonalização parcial do saber.

Os exercícios e exemplos não fazem referências a temas da atualidade, indicando a não relação de pertinência de atualidade biológica e da atualização do saber. Também não há sugestões de utilização de outros saberes, por exemplo a utilização de computador ou calculadoras gráficas, nos exercícios o que implica na não modernização e articulação do saber e na não relação de pertinência moral deste saber. Com isso o atributo I, adaptação do saber, é parcialmente contemplado.

Quando a definição do conceito de área sob a curva é apresentada no início da seção, isso indica a definição explícita do saber, o que garante a publicidade do saber. Por outro lado, apenas um exemplo é citado no livro para tornar o saber compreensível, conforme mostra a Figura 5.6.

Exemplo 3 Área sob a Curva $f(x) = x$

Calcule

$$\int_a^b x \, dx, \quad 0 < a < b.$$

Solução Esboçamos a região sob a curva $y = x$, $a \leq x \leq b$ (Figura 4.10) e vemos que é um trapézio com altura $(b - a)$ e bases a e b . O valor da integral é a área desse trapézio:

$$\int_a^b x \, dx = (b - a) \cdot \frac{a + b}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Portanto,

$$\int_1^{\sqrt{5}} x \, dx = \frac{(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{(1)^2}{2} = 2$$

e assim por diante.

Observe que $x^2/2$ é uma primitiva de x ; evidência adicional de que há uma ligação entre primitivas e cálculo de integrais.

Figura 5.6 – Exemplo 3, p. 351

Na seção 4.5 também é abordado o conceito de área abaixo da curva fazendo a relação com o Teorema Fundamental do Cálculo como mostra o Figura 5.7.

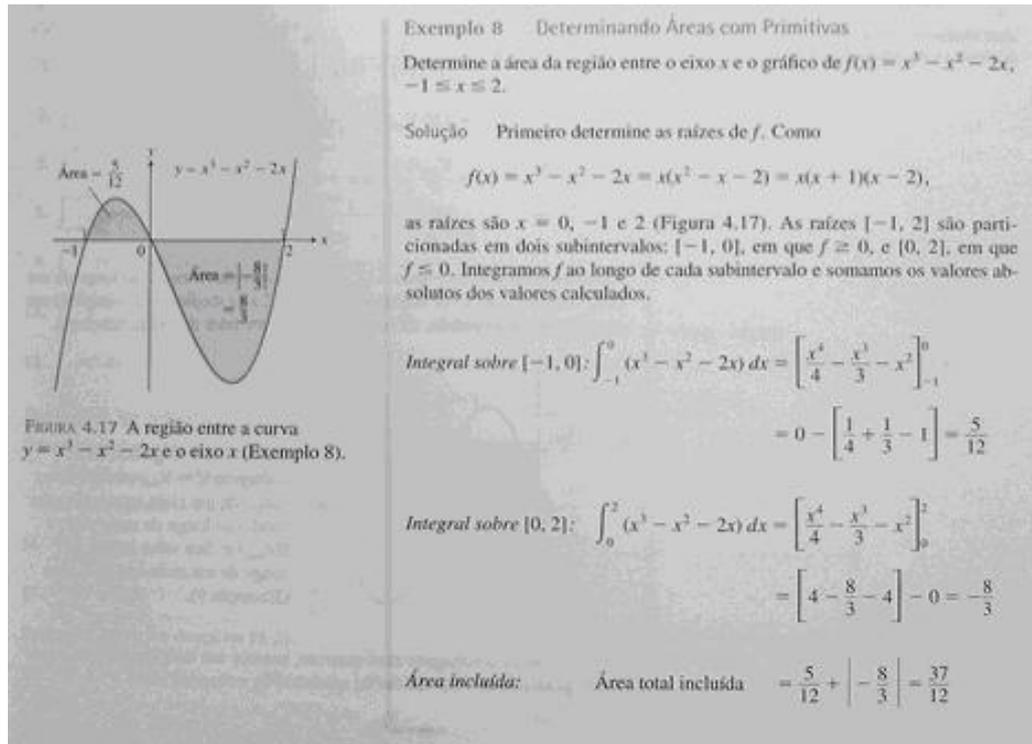


Figura 5.7 – Relação com o Teorema Fundamental do Cálculo, p.363

O autor apresenta na página 364 do livro um quadro explicativo mostrando os passos necessários para encontrar a área total sob uma curva, conforme mostra a Figura 5.8.

Como Encontrar a Área Total

Para determinar analiticamente a área entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $[a, b]$ faça o seguinte.

Passo 1. Particione $[a, b]$ com as raízes de f .

Passo 2. Integre f em cada subintervalo.

Passo 3. Some os valores absolutos das integrais.

Figura 5.8 – Quadro sobre como encontrar a área total, p. 364

O autor faz a relação da área sob a curva com o Teorema Fundamental do Cálculo e também mostra um quadro com o algoritmo para o cálculo da área, o que sinaliza a preocupação do autor com tornar o conceito compreensível. A publicidade do saber e a programabilidade do saber são

atendidas, isto indica que o atributo II, Elucidação do Saber, é contemplado neste ítem.

Ao final da seção 4.4 são apresentados seis exercícios onde é proposto ao estudante que faça a representação gráfica do integrando e use a área para o cálculo da integral. Também são apresentados seis exercícios para que seja calculada a área total da região entre uma curva dada e o eixo x na seção 4.5. Desta forma a operacionalização do saber se faz presente, contemplando a terceira característica proposta por Chevallard – operacionalidade do saber – e o requisito controle social da aprendizagem, pois estes exercícios podem ser utilizados para o desenvolvimento de atividades e posterior avaliação pelo professor. Sendo assim o atributo III, operacionalização do saber é contemplado.

Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo é apresentado na seção 4.5 do capítulo 4 em duas partes. A primeira parte deste teorema é apresentada da seguinte maneira:

Teorema 3: O Teorema fundamental do Cálculo, Parte 1
 Se f é contínua em $[a, b]$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é derivável em todo ponto x em $[a, b]$ e

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

A segunda parte do teorema é enunciada como:

Teorema 3 (continuação): O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2
 Se f é contínua em todo ponto de $[a, b]$, e se F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

O livro coloca o Teorema Fundamental do Cálculo na forma de um tópico do conteúdo sobre Integrais, isto indica que há a desincretização do saber. As origens do Teorema Fundamental do Cálculo estão relacionadas com as questões levantadas por Leibniz e por Newton conforme apresentamos na seção 1.2 deste texto. Na página 15 deste texto mostramos uma comparação entre as teorias de Newton e Leibniz para o desenvolvimento do conteúdo de integral. Porém, a linguagem empregada na construção do conceito construído por Newton e Leibniz é diferente da empregada no livro analisado, pois no livro há o objetivo de tornar o conceito compreensível para o estudante. Assim há uma separação do conceito Teorema Fundamental do Cálculo de seu contexto histórico para a sua textualização no livro. No entanto o autor não faz menção das idéias de Newton sobre o conceito de integral como a antiderivada e das idéias de Leibniz sobre o conceito de integral como a área abaixo de uma curva implicando na despersonalização parcial do saber.

O exemplo nove da página trezentos e sessenta e quatro relaciona o saber Teorema Fundamental do Cálculo com uma aplicação da física, conforme mostra a Figura 5.9. Neste exemplo o livro traz a resolução de um problema do dia a dia utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, o que indica a relação de pertinência biológica e atualização do saber. Como o livro propõe exercícios em cuja resolução é sugerido o uso de softwares matemáticos a modernização do saber e a articulação de novos saberes são contempladas. A relação de pertinência moral não aparece neste conceito uma vez que não há indícios de situações problemáticas adequadas à nossa sociedade. Assim o atributo I, adaptação do saber, é parcialmente contemplado.

Como a apresentação do Teorema Fundamental do Cálculo está explícita e bem definida, a publicidade do saber é garantida. Para este conceito, o livro também traz a demonstração do teorema e três exemplos da aplicação do conceito mostrando a preocupação do autor em tornar o conceito compreensível. Como este conceito faz parte de uma seqüência lógica de apresentação, a programabilidade do saber também está garantida. Assim o atributo II, elucidação do saber, é contemplado.

Exemplo 9 Eletricidade Doméstica

Modelamos a voltagem das instalações elétricas domésticas com a função seno

$$V = V_{\max} \text{ sen } 120\pi t,$$

que expressa a voltagem V (em volts) em função do tempo t (em segundos). A função realiza 60 ciclos a cada segundo (sua frequência é 60 hertz, ou 60 Hz). A constante positiva V_{\max} é o **pico de voltagem**.

O valor médio de V ao longo de meio ciclo, de 0 a $1/120$ segundos (ver Figura 4.18), é

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{1}{(1/120) - 0} \int_0^{1/120} V_{\max} \text{ sen } 120\pi t \, dt \\ &= 120 V_{\max} \left[-\frac{1}{120\pi} \cos 120\pi t \right]_0^{1/120} \\ &= \frac{V_{\max}}{\pi} [-\cos \pi + \cos 0] \\ &= \frac{2V_{\max}}{\pi}. \end{aligned}$$

Como podemos ver na Figura 4.18, o valor médio da voltagem ao longo de um ciclo inteiro é zero. (Ver também Exercício 52.) Se medirmos a voltagem com um galvanômetro-padrão, de bobina móvel, o medidor deverá indicar zero.

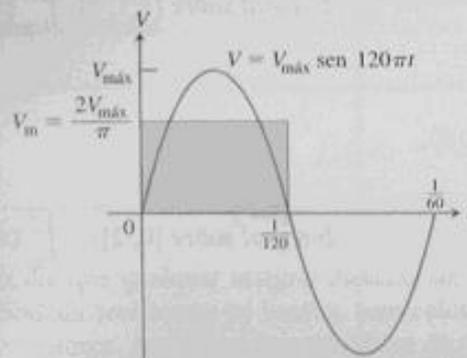


FIGURA 4.18 O gráfico da voltagem $V = V_{\max} \text{ sen } 120\pi t$ ao longo de um ciclo inteiro. O valor médio ao longo de meio ciclo é $2V_{\max}/\pi$. Seu valor médio ao longo de um ciclo inteiro é zero (Exemplo 9).

Para medir a voltagem efetivamente, usamos um instrumento que mede a raiz quadrada do valor médio do quadrado da voltagem, isto é

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{(V^2)_m}.$$

$$M(V^2) = \frac{1}{(1/60) - 0} \int_0^{1/60} (V_{\max})^2 \text{ sen}^2 120\pi t \, dt = \frac{(V_{\max})^2}{2} \quad (7)$$

(Exercício 52, parte (c)), a voltagem rms é

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{(V_{\max})^2}{2}} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

Os valores dados para correntes e voltagens domésticas são sempre valores rms. Assim, '115 volts ac' significa que a voltagem rms é 115. O pico de voltagem

$$V_{\max} = \sqrt{2} V_{\text{rms}} = \sqrt{2} \cdot 115 \approx 163 \text{ volts,}$$

obtido da Equação (8), é consideravelmente maior.

Figura 5.9 – Exemplo 9, p. 364

O livro sugere ao final desta seção, trinta e dois exercícios cuja resolução faz uso do Teorema Fundamental do Cálculo, quatro problemas que representam aplicação do conceito, dois problemas relacionando o gráfico de uma função com o Teorema Fundamental do Cálculo, dez exercícios de demonstração, dez exercícios em cuja resolução é sugerido o uso de softwares matemáticos. Estes aspectos denotam que a operacionalização do saber é estimulada, uma vez que o estudante tem a possibilidade de aplicar os conceitos em exercícios e problemas.

Método da integração por substituição

Este conceito é apresentado no capítulo 4 seção 4.6, sendo enunciado conforme mostra a Figura 5.10.

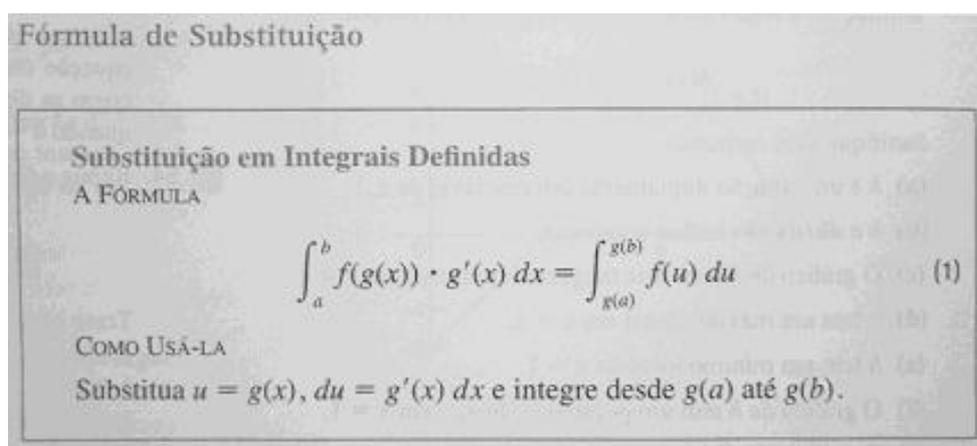


Figura 5.10 – Fórmula para o método da substituição, p. 368

A desincretização do saber é contemplada uma vez que este conceito é apresentado como uma teoria parcial da teoria de integração. A despersonalização deste saber é parcial, pois este conceito é separado de seu contexto histórico e adquire uma nova linguagem para ser apresentado no livro didático, porém não há correlação histórica apresentada pelo autor. Como o livro não traz exemplos ou atividades sobre situações problemáticas, a atualização do saber, e a relação de pertinência de atualidade moral não são contempladas. O livro também não traz situações com dados atualizados ou atividades para serem feitas

com a utilização de calculadoras gráficas ou softwares matemáticos, o que aponta para a não modernização do saber, não articulação do saber e não relações de pertinência de atualidade biológica. Assim o atributo I é parcialmente contemplado.

Na apresentação da definição do método da substituição há a definição explícita do saber, o que indica a publicidade do saber. No exemplo 9 da página 331 o autor mostra dois caminhos diferentes para calcular uma integral por substituição conforme a Figura 5.11. Estes aspectos denotam a elucidação do saber, atributo II.

Ao final desta seção são propostos diversos exercícios, sinalizando a preocupação do autor com o que caracterizamos como operacionalização do saber. São 23 exercícios de cálculo de integrais utilizando o método da substituição, 2 exercícios de problema de valor inicial.

Exemplo 9 – Usando Substituições Diferentes

Calcule

$$\int \frac{2z \, dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}}$$

Solução Podemos usar o método da substituição na integração como ferramenta de exploração: substitua a parte mais problemática do integrando e veja o que acontece. Para esta integral, poderíamos experimentar $u = z^2 + 1$ ou ainda arriscar e considerar u a raiz cúbica inteira. Aqui está o que acontece em cada caso.

Solução 1 Substitua $u = z^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2z \, dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} \\ &= \int u^{-1/3} \, du \\ &= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C \\ &= \frac{3}{2} u^{2/3} + C \\ &= \frac{3}{2} (z^2 + 1)^{2/3} + C \end{aligned}$$

Faça $u = z^2 + 1$,
 $du = 2z \, dz$
Na forma $\int u^a \, du$
Integre em relação a u .
Troque u por $z^2 + 1$.

Solução 2 Substitua $u = \sqrt[3]{z^2 + 1}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2z \, dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}} &= \int \frac{3u^2 \, du}{u} \\ &= 3 \int u \, du \\ &= 3 \cdot \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{3}{2} (z^2 + 1)^{2/3} + C \end{aligned}$$

Faça $u = \sqrt[3]{z^2 + 1}$,
 $u^3 = z^2 + 1$,
 $3u^2 \, du = 2z \, dz$
Integre em relação a u .
Troque u por $(z^2 + 1)^{1/3}$.

Figura 5.11 – Exemplo 9, p. 331

Método da integração por partes

Na seção 7.2 o autor introduz o conceito mostrando exemplos de integral que não podem ser calculadas pelos métodos anteriores. Na seqüência o autor enuncia o método da integração por partes conforme mostra a Figura 5.12.

A desincretização do saber é contemplada uma vez que este conceito é apresentado como uma teoria parcial da teoria de integração. A despersonalização deste saber é parcial uma vez que a apresentação deste conceito está separada de seu contexto histórico e adquire uma nova linguagem para ser apresentado no livro didático, mas a sua relação com a histórica não é apresentada. Como o livro não traz exemplos ou atividades sobre situações problemáticas, a atualização do saber, e a relação de pertinência de atualidade moral não são contempladas. O livro também não traz situações com dados atualizados ou atividades para serem feitas com a utilização de calculadoras gráficas ou softwares matemáticos, o que aponta para a não modernização do saber, não articulação do saber e não relações de pertinência de atualidade biológica. Assim o atributo I é parcialmente contemplado.

Na apresentação da definição do método da substituição há a definição explícita do saber, o que indica a publicidade do saber. Na Figura 5.13 o autor apresenta um quadro sugerindo “Quando e como usar a Integração por partes” e na seqüência apresenta vários exemplos de cálculo de integrais utilizando o método de integração por partes. Isto mostra a preocupação do autor em tornar o conceito compreensível, assim estes aspectos denotam a elucidação do saber, atributo II.

Ao final desta seção, o autor propõe uma série de exercícios cuja resolução envolverá o método de integração por partes. São 34 exercícios para o cálculo de integrais utilizando o método da integração por partes, 8 exercícios relacionado área, volume, valor médio e o método da integração por partes, 4 exercícios para estabelecer a fórmula de redução, 2 exercícios para a obtenção e cálculo de funções inversas a partir do método da integração por partes. Estes aspectos denotam a capacidade de operacionalização do saber integração por partes, uma vez que o estudante terá a oportunidade de trabalhar com este conceito de maneiras diferentes.

Regra do Produto na Forma de Integral

Quando u e v são funções deriváveis de x , a Regra do Produto para derivação nos diz que

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Integrar os dois lados em relação a x e rearranjá-los leva à equação da integral

$$\begin{aligned} \int \left(u \frac{dv}{dx} \right) dx &= \int \left(\frac{d}{dx}(uv) \right) dx - \int \left(v \frac{du}{dx} \right) dx \\ &= uv - \int \left(v \frac{du}{dx} \right) dx. \end{aligned}$$

Quando essa equação é escrita na notação de diferencial, obtemos a fórmula a seguir.

Fórmula de Integração por Partes

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1)$$

Essa fórmula expressa uma integral, $\int u dv$, em termos de uma segunda integral, $\int v du$. Com uma escolha apropriada de u e v , a segunda integral deve ser mais fácil de calcular que a primeira. Essa é a razão da importância da fórmula. Quando encontramos uma integral que não podemos calcular, podemos substituí-la por outra com a qual podemos ter mais sucesso.

A fórmula equivalente para integrais definidas é

$$\int_{v_1}^{v_2} u dv = (u_2 v_2 - u_1 v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v du. \quad (2)$$

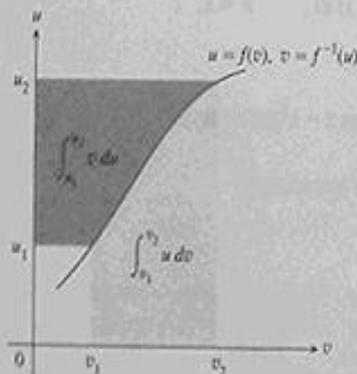


FIGURA 7.1 A área da região azul-clara, $\int_{v_1}^{v_2} u dv$, é igual à área do retângulo grande, $u_2 v_2$, menos as áreas do retângulo pequeno, $u_1 v_1$, e da região mais escura, $\int_{v_1}^{v_2} v du$.

Em símbolos,

$$\int_{v_1}^{v_2} u dv = (u_2 v_2 - u_1 v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v du.$$

A Figura 7.1 mostra como as diferentes partes da fórmula podem ser interpretadas como áreas.

Figura 5.12 – Introdução do método da integração por partes, p. 525

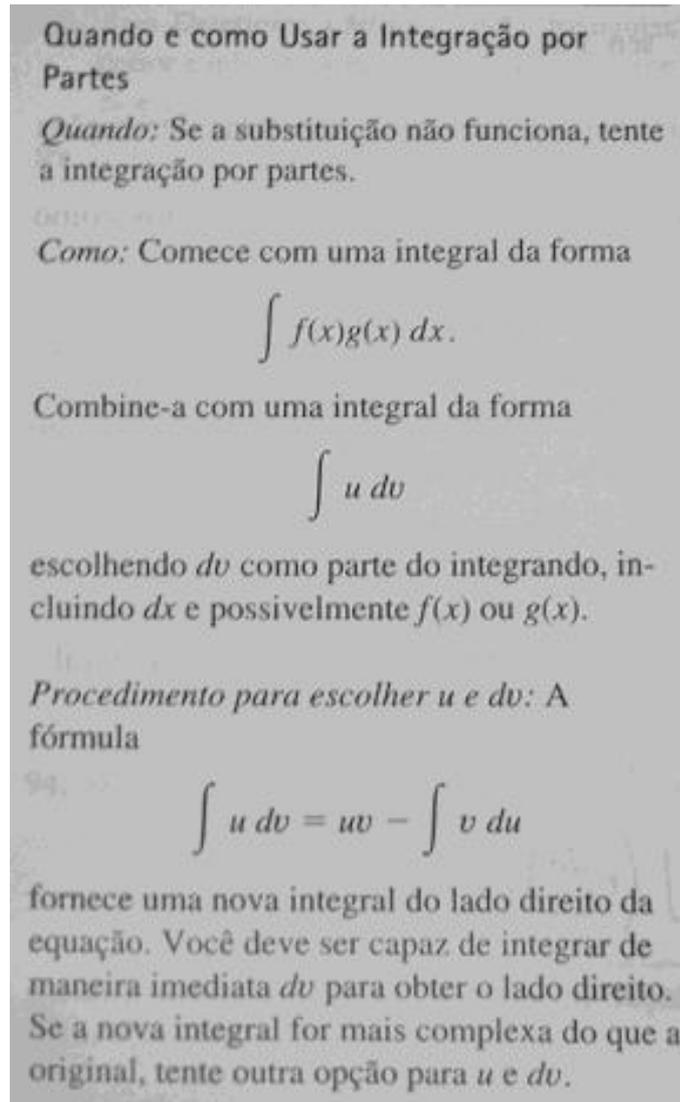


Figura 5.13 – Quando e como usar a integração por partes, p. 526

Método da integração por frações parciais

O autor inicia a seção 7.3 apresentando um problema de modelo populacional para introduzir o conceito conforme a Figura 5.14. Como este problema é atual, isto aponta para a atualização do saber e a relação de pertinência de atualidade biológica.

Uma vez que não há indícios de exemplos ou exercícios que façam relação com outros saberes, não há a modernização e articulação dos saberes. O autor também não apresenta situações problemáticas com temas pertinentes à sociedade o que implica na não relação de pertinência de atualidade moral. Estes

aspectos denotam que a adaptação do saber não é totalmente contemplada no método das frações parciais.

Ao estudarmos o modelo populacional do Exemplo 6 (Seção 6.4 ou 6.6), resolvemos a equação diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = 0,001P(100 - P)$$

reescrevendo-a como

$$\frac{100}{P(100 - P)} dP = 0,1 dt, \quad \text{Variáveis separadas}$$

decompondo a fração da esquerda em duas frações básicas,

$$\frac{100}{P(100 - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{100 - P},$$

e integrando os dois lados para achar a solução

$$\ln |P| - \ln |100 - P| = 0,1t + C.$$

Essa técnica de decomposição é o **método de frações parciais**. Qualquer função racional pode ser escrita como a soma de frações básicas, chamadas **frações parciais**, usando-se o método das frações parciais. Podemos então integrar a função racional integrando a soma das frações parciais.

Figura 5.14 – Introdução ao método das Frações Parciais, p. 532

O autor faz uma descrição geral do método da integração por frações parciais, conforme mostra a Figura 5.15.

Descrição Geral do Método

O sucesso em escrever uma função racional $f(x)/g(x)$ como a soma de frações parciais depende de duas coisas:

- *O grau de $f(x)$ deve ser menor que o grau de $g(x)$.* Ou seja, a fração deve ser *própria*. Se não for, divida $f(x)$ por $g(x)$ e trabalhe com o resto. Veja o Exemplo 4 desta seção.
- *Devemos conhecer os fatores de $g(x)$.* Na teoria, qualquer polinômio com coeficientes reais pode ser escrito como um produto de fatores reais lineares e fatores reais quadráticos. Na prática, pode ser difícil encontrar esses fatores.

Figura 5.15 – Descrição Geral do Método, p. 533

Na apresentação da descrição geral do método de integração por frações parciais, conforme a Figura 5.15, há a definição explícita do saber, o que indica a publicidade do saber. Na seqüência o autor apresenta 10 exemplos de cálculo de integrais utilizando o método de Frações Parciais. O autor mostra na página 534 um quadro, conforme a Figura 5.16, onde é apresentado um algoritmo de resolução para frações do tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$. Este quadro e mais os exemplos apresentados pelo autor mostram sua preocupação em tornar o conceito compreensível. Estes aspectos somados à programabilidade e a publicidade do saber resultam na elucidação do saber.

Ao final da seção são propostos 40 exercícios para o cálculo de integrais utilizando o método de frações parciais, 8 problemas de valores iniciais, 3 problemas envolvendo aplicações do método de Frações Parciais. Assim a operacionalização do saber é estimulada. Porém não são propostas situações problemáticas, assim o estudante não é estimulado para a resolução deste tipo de problemas, aprendendo a calcular integrais que são propostas de maneira explícita.

Método de Frações Parciais ($f(x)/g(x)$) Própria

Passo 1: Seja $x - r$ um fator linear de $g(x)$. Suponha que $(x - r)^m$ seja a maior potência de $x - r$ que divide $g(x)$. Então, atribua a esse fator a soma de m frações parciais:

$$\frac{A_1}{x - r} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x - r)^m}.$$

Faça isso para cada fator linear distinto de $g(x)$.

Passo 2: Seja $x^2 + px + q$ um fator quadrático de $g(x)$. Suponha que $(x^2 + px + q)^n$ seja a maior potência desse fator que divide $g(x)$. Então, atribua a esse fator a soma de n frações parciais:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Faça isso para cada fator quadrático distinto de $g(x)$ que não pode ser decomposto como produto de fatores lineares com coeficientes reais.

Passo 3: Iguale a fração original $f(x)/g(x)$ à soma de todas essas frações parciais. Elimine as frações da equação resultante e organize os termos em potências decrescentes de x .

Passo 4: Iguale os coeficientes das potências correspondentes de x e resolva o sistema de equações obtido desse modo para encontrar os coeficientes indeterminados.

Figura 5.16 – Método de Frações Parciais, p. 534

5.2.1.2 Livro B: Um Curso de Cálculo

A obra Um Curso de Cálculo de Hamilton Guidorizzi é composta por três volumes. O primeiro volume apresenta os conteúdos de número reais, funções de uma variável, limites, derivadas e integrais. O segundo volume apresenta conteúdos sobre equações diferenciais, função de várias variáveis, limites, derivadas parciais e estudo de máximos e mínimos. O terceiro volume apresenta conteúdos sobre integrais no \mathcal{R}^n e aplicações. Como estamos interessados em integrais de funções de uma variável analisamos o volume I. Este volume está na 4ª edição referente ao ano de 2000. Este livro foi escolhido também por ser um dos mais citados nas bibliografias dos conteúdos programáticos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Como no Livro A, nossa análise é feita nos capítulos e seções do livro que apresentam os conceitos: Integrais Indefinidas, Integrais Definidas, Teorema Fundamental do Cálculo, Área abaixo da curva, Método da substituição, Integração por partes, Integração por frações parciais. Os capítulos onde se encontram estes conceitos são: o capítulo 10 intitulado “Primitivas”, capítulo 11 intitulado “Integral de Riemann” e capítulo 12 intitulado “Técnicas de primitivação”.

Integral Indefinida

Iniciamos nossa análise no Capítulo 10 cujo título é Primitivas. Na seção 10.1 – Relação entre funções com derivadas iguais – é retomado o conceito de derivada em funções constantes e o Teorema do valor médio, assim o autor faz a apresentação do teorema introduzindo o texto:

Já sabemos que a derivada de uma função constante é zero. Entretanto, uma função pode ter derivada zero em todos os pontos de seu domínio e não ser constante; por exemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Teorema: Seja f contínua no intervalo I . Se $f'(x) = 0$ em todo x interior a I , então existirá uma constante k tal que $f(x) = k$ para todo x em I .

A seguir enuncia um corolário que diz respeito às funções que têm a mesma derivada:

Corolário. Sejam f e g contínuas no intervalo I . Se $f'(x) = g'(x)$ em todo x interior a I , então existirá uma constante k tal que

$$g(x) = f(x) + k$$

para todo x em I .

Na seqüência são trabalhados cinco exemplos onde é determinada, a partir da derivada dada, a função que a originou. Dois exemplos são de cálculo de primitivas e três são de demonstração. O Exemplo 2 apresenta o cálculo da primitiva de uma função conforme mostra a Figura 5.17.

EXEMPLO 2. Determine $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{dy}{dx} = y \text{ e } f(0) = 2.$$

Solução

$$\frac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow y = k e^x, k \text{ constante.}$$

Assim, a f procurada é da forma $f(x) = k e^x$, com k constante. A condição $f(0) = 2$ nos permite determinar a constante k . De fato, de $f(x) = k e^x$ segue $f(0) = k e$, portanto, $k = 2$. A função que satisfaz o problema dado é, então, $f(x) = 2 e^x$. Ou seja, $y = 2 e^x$.

Consideremos, agora, a função $f(x) = e^{\alpha x}$, α constante. Temos $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, ou seja, $f'(x) = \alpha f(x)$. Raciocinando como no Exemplo 1, prova-se (veja Exercício 1) que as únicas funções que satisfazem a equação $f'(x) = \alpha f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e α constante, são as funções da forma $f(x) = k e^{\alpha x}$, k constante. Ou seja, sendo α constante, tem-se

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y \Leftrightarrow y = k e^{\alpha x}, k \text{ constante}$$

ou

$$f'(x) = \alpha f(x) \Leftrightarrow f(x) = k e^{\alpha x}, k \text{ constante}$$

Figura 5.17 – Exemplo 2, p. 286

Depois dos exemplos o autor propõe catorze exercícios dos quais cinco são de cálculo de primitivas, oito de demonstração e um problema. Como há esta introdução de primitivas antes de apresentar o conceito de integral indefinida, isto caracteriza a preocupação do autor em tornar o conceito compreensível.

Na seção 10.2 o autor apresenta a definição do conceito de primitiva de uma função:

Seja f uma função definida num intervalo I . Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo x em I .

O autor mostra dois exemplos para a compreensão do conceito de primitivas e na seqüência faz a apresentação da definição de integral indefinida:

Sendo F uma primitiva de f em I , então para toda constante k , $F(x) + k$ é, também, primitiva de f . Por outro lado, como vimos na seção anterior, se duas funções tem derivadas iguais num intervalo, elas diferem, neste intervalo, por uma constante. Segue que as primitivas de f em I são funções da forma $F(x) + k$, com k constante. Diremos, então, que

$$y = F(x) + k, \quad k \text{ constante,}$$

É a família de primitivas de f em I . A notação $\int f(x) dx$ será usada para representar a família de primitivas de f :

$$\int f(x) dx = F(x) + k.$$

Na notação $\int f(x) dx$ a função f denomina-se integrando. Uma primitiva de f será, também denominada uma integral indefinida de f . É comum referir-se a $\int f(x) dx$ como a integral indefinida de f .

Na seqüência são apresentados 15 exemplos de cálculo de primitivas de uma função. Isto mostra a preocupação do autor em fornecer pré-requisitos para a introdução do novo conceito, tornando assim o conceito compreensível.

O conceito de integral indefinida é apresentado no livro como uma teoria parcial da teoria de integração, caracterizando assim a desincretização do saber. Como este conceito apresenta-se separado do contexto histórico o qual foi concebido, e sua linguagem difere da empregada por Newton e Leibniz na construção do conceito de integral descritos na seção 1.2 deste texto, temos um indicativo da despersonalização do saber. Porém, o autor não faz relação com o contexto histórico no qual o conceito de integral foi construído, assim a despersonalização do saber é parcial. O autor não apresenta situações problemáticas atuais, o que implica na não atualização do saber e na não relação pertinência de atualidade biológica. Na falta destas situações problemáticas também não há a presença da relação de pertinência de atualidade moral, pois se não há aplicação dos conceitos em temas atuais não há como verificar sua adequação à sociedade. Como o autor não apresenta integração do conceito com novos saberes ficam descaracterizadas a modernização e articulação de novos saberes. Diante destes aspectos, a adaptação dos saberes não está totalmente presente.

Quando o autor faz a apresentação da definição de integral indefinida há a definição explícita do saber, o que caracteriza a publicidade do saber. O autor apresenta quinze exemplos do emprego do conceito de integral indefinida, o que mostra sua preocupação em tornar o conceito compreensível. Assim temos caracterizada a elucidação do saber.

Ao final da seção são propostos quarenta e cinco exercícios para a determinação de primitivas, vinte e um exercícios de valor inicial, três problemas de cálculo de integrais em aplicações de conceitos da Física. Estes aspectos apontam para a operacionalização do saber, visto que é disponibilizado ao estudante uma série de exercícios para o cálculo da integral indefinida.

Integral Definida

A apresentação deste conceito é feita no capítulo 11 seção 11.3. O conceito de integral definida é apresentado como:

Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ tende a L , quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, e escrevemos

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = L$$

Se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ que só depende de ε mas não da particular escolha dos c_i , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

Para toda partição P de $[a, b]$, com $\max \Delta x_i < \delta$.

Tal número L , que quando existe é único denomina-se integral (de Riemann) de f em $[a, b]$ e indica-se $\int_b^a f(x) dx$. Então, por definição,

$$\int_b^a f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

Se $\int_b^a f(x) dx$ existe, então diremos que f é integrável (segundo Riemann) em $[a, b]$. É

comum referirmo-nos a $\int_b^a f(x) dx$ como integral definida de f em $[a, b]$.

O conceito de integral definida é apresentado no livro como uma teoria parcial da teoria de integração, caracterizando assim, a desincretização do saber. Este conceito também apresenta separado do contexto histórico o qual foi concebido, e sua linguagem difere da empregada por Newton e Leibniz na construção do conceito de integral descritos na seção 1.2 deste texto. Temos no contexto histórico (seção 1.2 deste texto) o desenvolvimento do conceito de integral feito por Leibniz utilizando a partição em retângulos do Triângulo Característico (Figura 1.1), porém não há menção no livro das idéias de Leibniz sobre a construção do conceito de integral, indicando que a despersonalização do saber é parcial. Como no conceito de integral indefinida, o autor não apresenta situações problemáticas atuais, o que implica na não atualização do saber e na não relação pertinência de atualidade biológica. Na falta destas situações problemáticas também não há a

presença da relação de pertinência de atualidade moral, pois se não há aplicação dos conceitos em temas atuais não há como verificar sua adequação à sociedade. Como o autor não apresenta integração do conceito com novos saberes também ficam descaracterizadas a modernização e articulação de novos saberes. Diante destes aspectos, a adaptação dos saberes não está totalmente presente.

Como a definição da integral definida é apresentada pelo autor, explicitando este conceito, temos garantida a publicidade do saber.

Na seqüência é apresentado o Teorema Fundamental do Cálculo e 7 exemplos relacionando o conceito de integral definida e o Teorema Fundamental do Cálculo, para tornar o conceito compreensível conforme é apresentado exemplo 1 da página 306 na Figura 5.18. Assim a elucidação do saber aparece de forma completa neste conceito.

EXEMPLO 1. Calcule $\int_1^2 x^2 dx$.

Solução

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ e f é contínua em $[1, 2]$, assim

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

ou seja,

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}.$$

Figura 5.18 – Exemplo 1, p. 306

No final da seção são propostos 60 exercícios cuja resolução faz uso do conceito de integral definida, estimulando a operacionalização do saber. No entanto, não há situações problemáticas entre as atividades sugeridas, comprometendo em parte a operacionalização. Logo, a operacionalização do saber é parcialmente contemplada.

Teorema Fundamental do Cálculo

Para a apresentação do Teorema Fundamental do Cálculo partindo da definição de integral utilizando o limite $\int_b^a f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ e o Teorema do Valor Médio seguindo com a demonstração e concluindo o Teorema Fundamental do Cálculo apresentando-o da seguinte forma:

1º Teorema Fundamental do Cálculo

Se f for integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b).$$

O Teorema Fundamental do Cálculo é apresentado no livro como uma teoria parcial da teoria de integração, caracterizando assim a desincretização do saber. Este conceito também apresenta-se separado do contexto histórico o qual foi concebido, e sua linguagem difere da empregada por Newton e Leibniz na construção do conceito de integral descritos na seção 1.2. Na página 15 desse texto mostramos um quadro comparativo entre as teorias de Newton e Leibniz para o desenvolvimento do conteúdo de integral e as principais diferenças entre os pontos de vista de cada cientista. Assim há uma separação do conceito Teorema Fundamental do Cálculo de seu contexto histórico para a sua textualização no livro, porém o autor não traz relação com o contexto histórico, caracterizando assim a despersonalização parcial do saber.

Novamente o autor não apresenta situações problemáticas atuais, o que implica na não atualização do saber e na não relação pertinência de atualidade biológica. Como consequência também não há a presença da relação de pertinência de atualidade moral. Como o autor não apresenta integração do conceito com novos saberes também ficam descaracterizadas a modernização e articulação de novos saberes. Diante destes aspectos, a adaptação dos saberes não está totalmente presente.

Como a definição do Teorema Fundamental do Cálculo é explícita e bem definida, temos garantida a publicidade do saber.

Os exercícios propostos pelo autor para a aplicação do teorema Fundamental do Cálculo são os mesmos sugeridos na aplicação do conceito de integral definida. Como não há sugestões de situações problemáticas, somente exercícios cuja resolução é de aplicação direta do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que a operacionalização do saber é parcialmente contemplada.

Área sob a curva

Este conceito é introduzido na seção 11.6. O autor faz a apresentação do conceito levantando a questão de como obter a área sob uma curva conforme mostra a Figura 5.19 e a Figura 5.20.

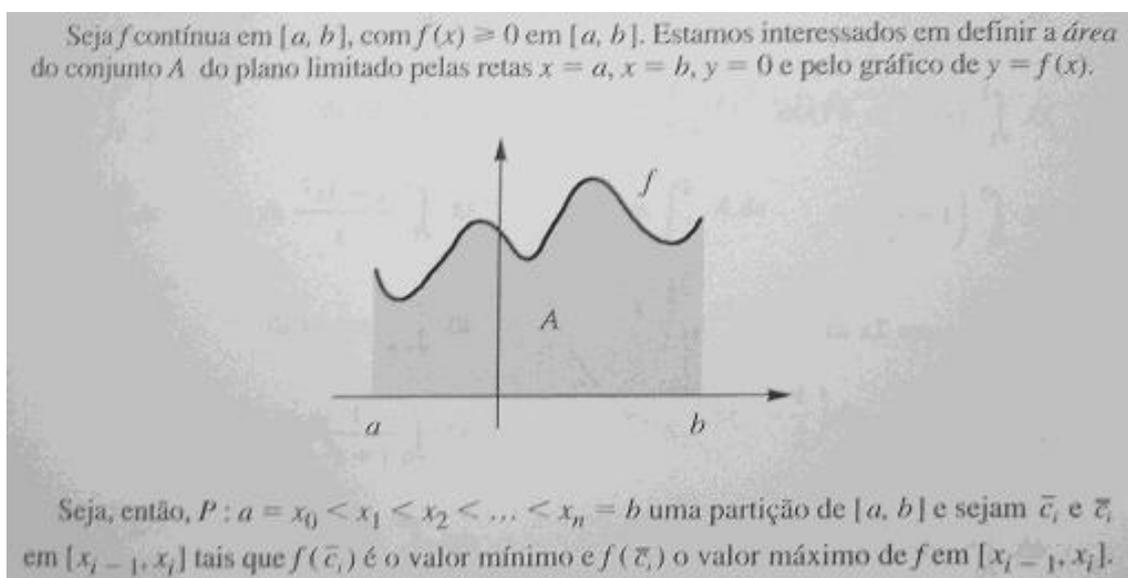


Figura 5.19 – Área sob a curva, p. 310

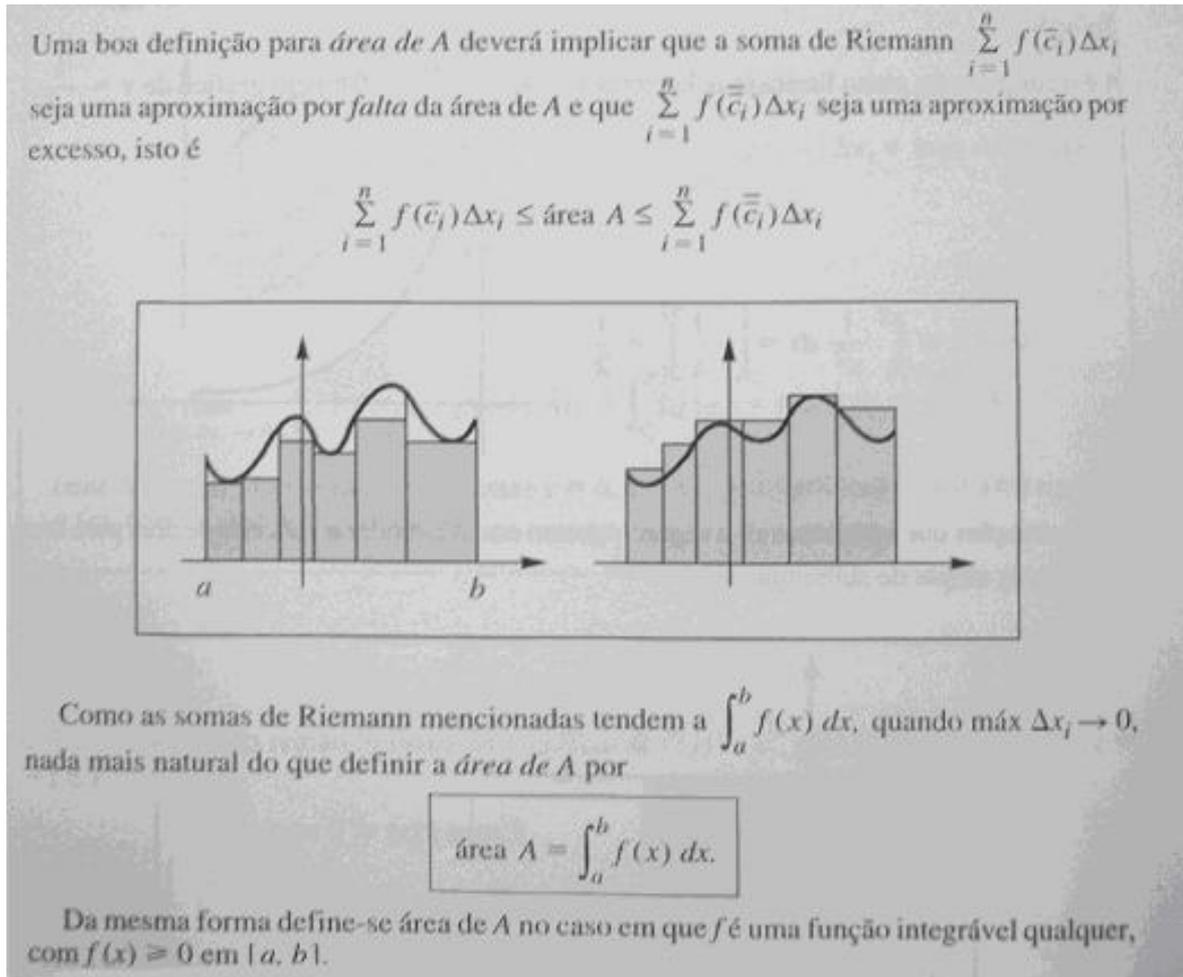


Figura 5.20 – definição do conceito área sob a curva, p. 311

O conceito de área sob a curva é apresentado no livro como uma teoria parcial da teoria de integração, caracterizando assim a desincretização do saber. A linguagem empregada na construção do conceito construído por Newton e Leibniz é diferente da empregada no livro analisado, pois no livro há o objetivo de tornar o conceito compreensível para o estudante. Assim, há uma separação do conceito Teorema Fundamental do Cálculo de seu contexto histórico para a sua textualização no livro, porém, não há relação com o contexto histórico, implicando na despersonalização parcial do saber.

O autor não apresenta situações problemáticas atuais nos exemplos e nem nos exercícios propostos, o que implica na não atualização do saber e na não relação pertinência de atualidade biológica. Como consequência também não há a presença da relação de pertinência de atualidade moral. Como o autor não apresenta integração do conceito com novos saberes também ficam

descaracterizadas a modernização e articulação de novos saberes. Diante destes aspectos, a adaptação dos saberes não está totalmente presente.

A definição do conceito de área sob a curva é explícita e bem definida, temos garantida a publicidade do saber. Para tornar o conceito compreensível são apresentados 6 exemplos de variadas situações para a obtenção da área sob a curva. O exemplo 7 relaciona a área abaixo da curva com a velocidade e deslocamento de uma partícula como mostra a Figura 5.21. Assim, temos presente a elucidação do saber.

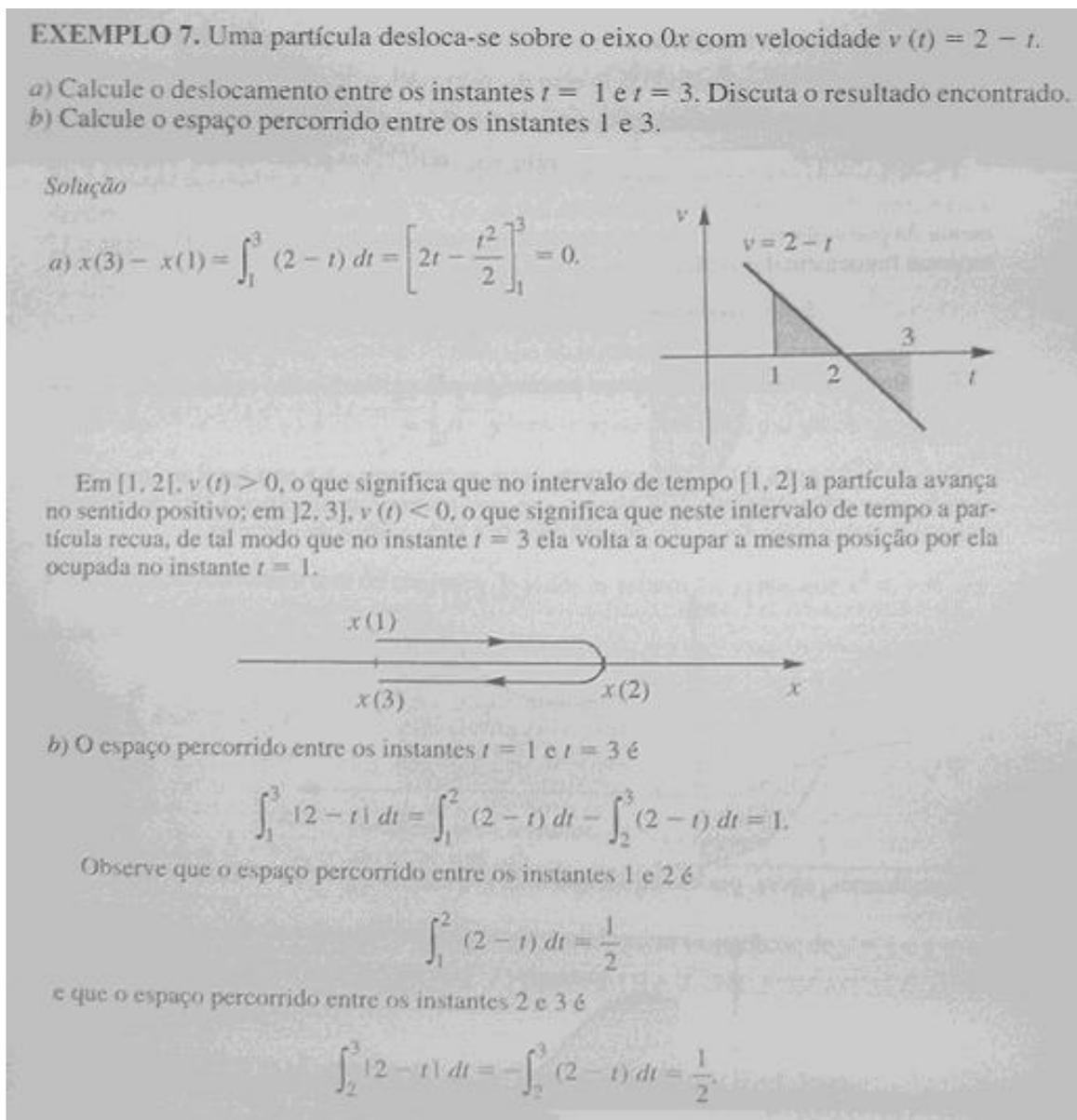


Figura 5.21 – Relação entre área, deslocamento e espaço percorrido, exemplo 7 p.315 e 316

Ao final da seção são propostos pelo autor vinte e seis exercícios cuja resolução faz uso do conceito de área abaixo da curva. Não há situações problemáticas sugeridas pelo autor, consideramos então que a operacionalidade do saber é parcialmente contemplada.

Método da integração por substituição

Na seção 11.7, o autor apresenta o método da integração por substituição de variáveis como mudança de variável na Integral. O conceito é introduzido por meio de um teorema e em seguida é feita sua demonstração.

Teorema. *Seja f contínua num intervalo I e sejam a e b dois reais quaisquer em I . seja $g:[c,d] \rightarrow I$ com g' contínua em $[c,d]$, tal que $g(c)=a$ e $g(d)=b$. Nestas condições*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du.$$

Depois de demonstrar o teorema o autor coloca um quadro resumindo o algoritmo necessário para a resolução de uma integral utilizando o método da substituição de variáveis, conforme mostra a Figura 5.22.

$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

$$\begin{cases} x = g(u) ; dx = g'(u) du \\ x = a ; u = c \text{ onde } g(c) = a \\ x = b ; u = d \text{ onde } g(d) = b \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u)) g'(u) du$$

Figura 5.22 – Algoritmo para a resolução de uma integral utilizando o método da substituição de variáveis, p.318.

Para tornar o conceito compreensível é proposto o cálculo da integral e a substituição dos limites de integração em função da nova variável. Para aplicar o conceito são feitos 8 exemplos de cálculo de integrais utilizando a mudança de variável. No exemplo 1 é feito o cálculo e a representação gráfica do que seria o cálculo desta integral conforme mostra a Figura 5.23.

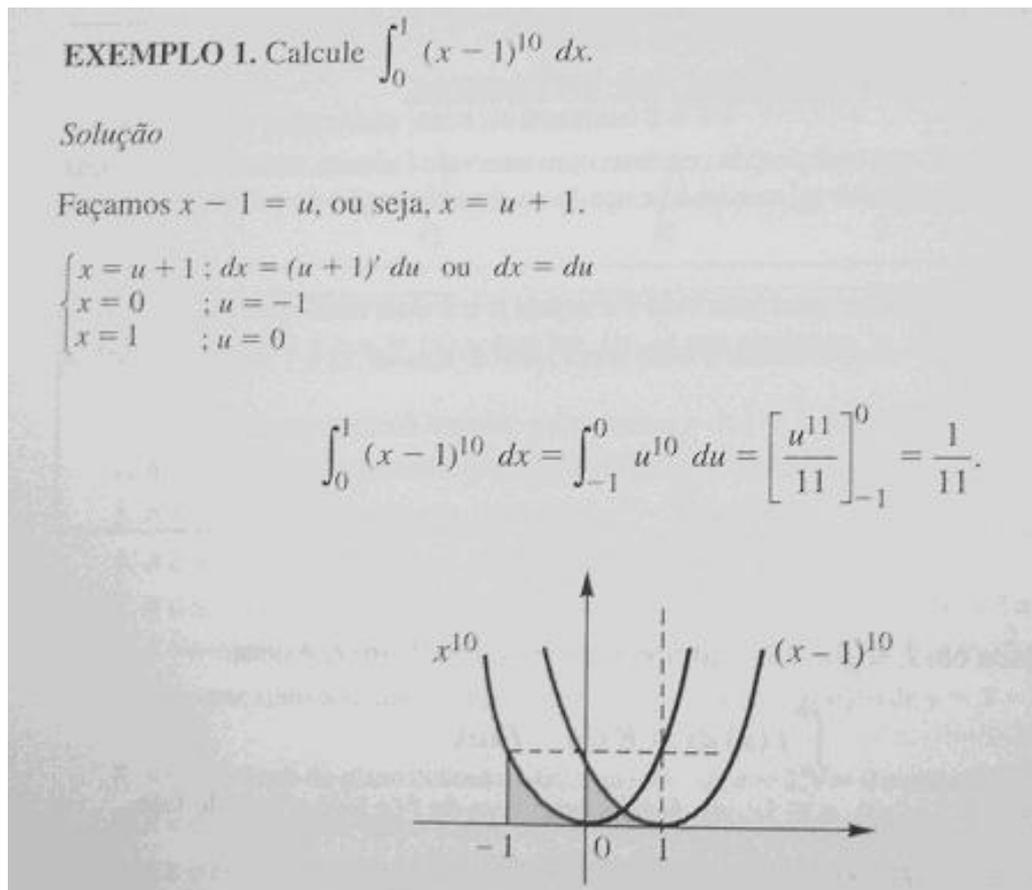


Figura 5.23 – Exemplo1, p. 318

Na página 320 o autor chama a atenção do leitor, pois com pequenos ajustes na variável podemos utilizar o método da substituição de variáveis, conforme mostra a Figura 5.24. Neste texto o autor demonstra sua preocupação em tornar o conceito compreensível.

Na seção 12.4 é feita novamente menção ao método da substituição de variáveis, mas desta vez o autor apresenta a necessidade da mudança dos limites de integração para o cálculo da integral. Vejamos a definição conforme a Figura 5.25.

Às vezes, com pequenos ajustes, a integral a ser calculada pode ser colocada na forma $\int_c^d f(g(x)) g'(x) dx$. Neste caso, a mudança de variável $u = g(x)$, $x \in [c, d]$, transforma a integral $\int_{g(c)}^{g(d)} f(u) du$ na anterior.

$$\int_c^d f(g(x)) g'(x) dx = ?$$

$$\begin{cases} u = g(x) & ; du = g'(x) dx \\ x = c & ; u = g(c) \\ x = d & ; u = g(d) \end{cases}$$

$$\int_c^d f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(u) du.$$

Figura 5.24 – Ajuste na variável, p. 320

Seja f definida num intervalo I . Suponhamos que $x = \varphi(u)$ seja inversível, com inversa $u = \theta(x)$, $x \in I$, sendo φ e θ deriváveis.

①
$$\int f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = F(u) + k \quad (u \in D_\varphi)$$

então,

$$\int f(x) dx = F(\theta(x)) + k.$$

De fato, de ①

$$F'(u) = f(\varphi(u)) \varphi'(u);$$

então,

$$\begin{aligned} (F(\theta(x)))' &= F'(\theta(x)) \theta'(x) \\ &= f(\varphi(\theta(x))) \varphi'(\theta(x)) \theta'(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

pois, $\varphi(\theta(x)) = x$ e $\varphi'(\theta(x)) \theta'(x) = (\varphi(\theta(x)))' = 1$.

$$\int f(x) dx = ?$$

$$x = \varphi(u) \quad ; \quad dx = \varphi'(u) du$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

observando que, após calcular a integral indefinida do 2.º membro, deve-se voltar à variável x através da inversa de φ .

Figura 5.25 – Definição de mudança de variável, p. 361 e 362.

Para exemplificar a aplicação do cálculo de integrais utilizando a mudança de variável proposta pelo autor, são apresentados 8 exemplos, para tornar o saber compreensível, como mostra o exemplo 1, na Figura 5.26.

EXEMPLO 1. Calcule $\int x^2 \sqrt{x+1} dx$.

Solução

$$\int x^2 \sqrt{x+1} dx = ?$$

$$x+1 = u \Leftrightarrow x = \underbrace{u-1}_{\varphi(u)}; dx = du \quad (\varphi'(u) = 1)$$

$$\int x^2 \sqrt{x+1} dx = \int (u-1)^2 \sqrt{u} du = \int (u^2 - 2u + 1) u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$= \int (u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 2 \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k =$$

$$= \frac{2}{7} \sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5} \sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + k$$

ou seja,

$$\int x^2 \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{7} \sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5} \sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + k.$$

Observação. A mudança $x+1 = u^2$, $u > 0$, também é interessante; veja que esta mudança elimina a raiz do integrando. Faça os cálculos adotando esta mudança.

Figura 5.26 – Exemplo 1, p. 362.

A definição do método da substituição de variáveis é explícita tanto na definição apresentada pelo autor na seção 11.7, como na apresentação da seção 12.4, permitindo assim a publicidade do saber. Para tornar o conceito compreensível o autor apresenta exemplos e algoritmos de resolução conforme é mostrado nas Figuras 5.22, 5.23, 5.24, 5.25 e 5.26. Estes aspectos demonstram a elucidação do saber.

Este método também é apresentado pelo autor como parte da teoria de integração assim temos a desincretização do saber. A linguagem empregada na apresentação deste conceito pelo autor é direcionada ao estudante, pois no livro há o objetivo de tornar o conceito compreensível. Nota-se a separação do conceito do

contexto histórico no qual foi construído, mas não há correlação com o contexto histórico, portanto a despersonalização do saber é parcial.

O autor não apresenta situações problemáticas atuais nos exemplos e nem nos exercícios propostos, o que implica na não atualização do saber e na não relação pertinência de atualidade biológica. Como consequência também não há a presença da relação de pertinência de atualidade moral. Como o autor não apresenta integração do conceito com novos saberes também ficam descaracterizadas a modernização e articulação de novos saberes. Diante destes aspectos, a adaptação dos saberes não está totalmente presente.

Ao final da seção 11.7 são propostos quarenta e nove exercícios cuja resolução faz uso do método de substituição de variáveis e sete exercícios de demonstração. Ao final da seção 12.4 o autor propõe para resolução cinquenta e seis exercícios de cálculo de integrais utilizando o método da substituição. Nestas atividades não há situações problemáticas sugeridas pelo autor, consideramos então que a operacionalidade do saber é parcialmente contemplada.

Método da integração por partes

Na seção 12.3, o autor introduz o método da integração por partes fazendo relação com a fórmula da derivação de um produto de funções, como mostra a Figura 5.27.

Na seqüência o autor apresenta seis exemplos de resolução de integrais pelo método da integração por partes em integrais indefinidas, conforme mostra a Figura 5.28, para tornar o conceito compreensível.

Suponhamos f e g definidas e deriváveis num mesmo intervalo I . Temos:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ou

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Supondo, então, que $f'(x)g(x)$ admita primitiva em I e observando que $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$, então $f(x)g'(x)$ também admitirá primitiva em I e

$$\textcircled{1} \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

que é a regra de *integração por partes*.

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ teremos $du = f'(x) dx$ e $dv = g'(x) dx$, o que nos permite escrever a regra $\textcircled{1}$ na seguinte forma usual:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Suponha, agora, que se tenha que calcular $\int \alpha(x)\beta(x) dx$. Se você perceber que, multiplicando a derivada de uma das funções do integrando por uma primitiva da outra, chega-se a uma função que possui primitiva imediata, então aplique a regra de integração por partes.

Figura 5.27 – Integração por partes, p.354

EXEMPLO 1. Calcule $\int x \cos x dx$.

Solução

A derivada de x é 1; $\text{sen } x$ é uma primitiva de $\cos x$. Como $1 \cdot \text{sen } x$ tem primitiva imediata, a regra de integração por partes resolve o problema.

$$\int x \cos x dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ f \cdot g' \end{array} = x \text{sen } x - \int 1 \cdot \text{sen } x dx.$$

Assim:

$$\int x \cos x dx = x \text{sen } x - \int \text{sen } x dx$$

ou seja,

$$\int x \cos x dx = x \text{sen } x + \cos x + k.$$

Figura 5.28 – Exemplo 1, p. 355

Na página 358, o autor mostra que o mesmo processo que se usa no cálculo de integrais indefinidas utilizando o método da integração por partes, também é usado para a integração de integrais definidas, conforme mostra a Figura 5.29.

Vejam, agora, como fica a regra de integração por partes na integral definida (integral de Riemann). Sejam, então, f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a, b]$; vamos provar que

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx.$$

De fato, de

$$f(x) g'(x) = [f(x) g(x)]' - f'(x) g(x) \text{ em } [a, b]$$

segue

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = \int_a^b [f(x) g(x)]' dx - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx.$$

Figura 5.29 – Integração por partes em integrais definidas, p. 358

Para ilustrar o método da integração por partes e torná-lo compreensível, o autor apresenta dois exemplos. O exemplo 7 mostra o cálculo de uma integral definida pelo método da integração por partes conforme mostra a Figura 5.30.

A apresentação da definição do método da integração por partes é explícita, sendo assim a publicidade do saber é garantida. Para tornar o conceito compreensível o autor apresenta exemplos do método conforme é mostrado nas Figuras 5.28 e 5.30. Estes aspectos demonstram a elucidação do saber.

Este método também é apresentado pelo autor como parte da teoria de integração, assim, temos a desincretização do saber. A linguagem empregada na apresentação deste conceito pelo autor é direcionada ao estudante, pois no livro há o objetivo de tornar o conceito compreensível. Nota-se a separação do conceito do

contexto histórico no qual foi construído e sua não relação com o contexto histórico no qual está inserido, denotando a despersonalização parcial do saber.

EXEMPLO 7. Calcule $\int_1^t x \ln x \, dx$.

Solução

$$\int_1^t x \ln x \, dx = [f(x)g(x)]_1^t - \int_1^t f'(x)g(x) \, dx$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ g' \quad f \end{array} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^t - \int_1^t \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{2} \int_1^t x \, dx.$$

Assim,

$$\int_1^t x \ln x \, dx = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^t$$

ou seja,

$$\int_1^t x \ln x \, dx = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{4}.$$

Figura 5.30 – Exemplo 7, p 359

O autor não apresenta situações problemáticas atuais nos exemplos e nem nos exercícios propostos, o que implica na não atualização do saber e na não relação pertinência de atualidade biológica. Como consequência também não há a presença da relação de pertinência de atualidade moral. Como o autor não apresenta integração do conceito com novos saberes também ficam descaracterizadas a modernização e articulação de novos saberes. Diante destes aspectos, a adaptação dos saberes não está totalmente presente.

Ao final da seção 12.3 são propostos 24 exercícios para o cálculo de integrais cuja resolução se faz com o uso do método da integração por partes, e 13 exercícios de demonstração envolvendo o método da integração por partes. Nestas atividades não há situações problemáticas sugeridas pelo autor, consideramos então que a operacionalidade do saber é parcialmente contemplada.

Método da integração por frações parciais

O método da integração por frações parciais é apresentado em três seções do Capítulo 12 deste livro. O autor separou conjuntos de integrais que são resolvidas utilizando os mesmos artifícios. Na seção 12.5 o autor apresenta o método de integração por frações para integrais indefinidas do tipo

$$\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx, \text{ enunciando primeiramente o teorema:}$$

Teorema: Sejam α , β , m e n reais dados, com $\alpha \neq \beta$. Então existem constantes A e B tais que

$$\text{a) } \frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

$$\text{b) } \frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$$

Na seqüência faz a demonstração deste teorema e apresenta o método de resolução de integrais do tipo $\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx$, conforme mostra a

Figura 5.31.

Vejamos, agora, como calcular

$$\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx, \text{ com } \alpha \neq \beta,$$

onde $P(x)$ é um polinômio. Se o grau de P for estritamente menor que o grau do denominador (grau de $P < 2$) pelo item (a) do teorema

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

e, assim,

$$\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx = A \ln|x-\alpha| + B \ln|x-\beta| + k.$$

Se o grau de P for maior ou igual ao do denominador, precisamos antes "extrair os inteiros".

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = Q(x) + \frac{R(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

onde $Q(x)$ e $R(x)$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-\alpha)(x-\beta)$. Observe que o grau de R é estritamente menor que o grau do denominador.

Não se esqueça: você só pode aplicar os resultados do teorema anterior quando o grau do numerador for estritamente menor que o do denominador. Se o grau do numerador for maior ou igual ao do denominador, primeiro "extraia os inteiros".

Figura 5.31 – Método de frações parciais, p.371 e 372

A apresentação da demonstração do teorema e os 4 exemplos que o autor desenvolve, caracterizam o tornar o saber compreensível. Vejamos o exemplo 1 na Figura 5.32.

EXEMPLO 1. Calcule $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx$.

Solução

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

O grau do numerador é menor que o do denominador. Pelo item (a) do teorema, existem constantes A e B tais que

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Já sabemos que A e B existem; o problema é calculá-los. Para todo x , devemos ter

$$x + 3 = A(x - 2) + B(x - 1).$$

Fazendo $x = 1$

$$4 = A(1 - 2) \text{ ou } A = -4.$$

Fazendo $x = 2$

$$5 = B(2 - 1) \text{ ou } B = 5.$$

Assim,

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{-4}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-2} dx = -4 \ln |x-1| + 5 \ln |x-2| + k$$

ou seja,

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx = -4 \ln |x-1| + 5 \ln |x-2| + k.$$

Figura 5.32 – Exemplo1, p. 372

Na seção 12.6 o autor apresenta primitivas de funções racionais com denominadores do tipo $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$. Para introduzir o método o autor enuncia o teorema conforme mostra a Figura 5.33. Para o cálculo deste tipo de integral, utilizando o método de frações parciais, são apresentados apenas dois exemplos, como mostra a Figura 5.34.

Teorema. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, m, n, p$ reais dados com α, β, γ distintos entre si. Então existem constantes A, B, C tais que

$$a) \frac{mx^2 + nx + p}{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{x - \gamma}.$$

$$b) \frac{mx^2 + nx + p}{(x - \alpha)(x - \beta)^2} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{(x - \beta)^2}.$$

Figura 5.33 – Teorema, p.375

EXEMPLO 2. Calcule $\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1} dx$.

Solução

1 é raiz de $x^3 - x^2 - x + 1$. Então,

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - x + 1 \\ -x^3 + x^2 \\ \hline -x + 1 \\ +x - 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} |x-1 \\ x^2-1 \end{array}$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)^2(x + 1).$$

$$\frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

$$2x + 1 = A(x - 1)^2 + B(x + 1)(x - 1) + C(x + 1).$$

Fazendo $x = 1$, $3 = 2C$ ou $C = \frac{3}{2}$.

Fazendo $x = -1$, $-1 = 4A$ ou $A = -\frac{1}{4}$.

Fazendo $x = 0$, $1 = -\frac{1}{4} - B + \frac{3}{2}$ ou $B = \frac{1}{4}$.

Assim,

$$\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

ou seja,

$$\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1} dx = -\frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{3}{2(x-1)} + k.$$

Figura 5.34 – Exemplo 2, p. 376 e 377

Na seção 12.7 são apresentadas primitivas de funções racionais cujos denominadores apresentam fatores irredutíveis do 2º grau. Nesta seção a apresentação da resolução do cálculo de integrais deste tipo se faz diretamente por meio de um exemplo, conforme mostra a Figura 5.35:

EXEMPLO 1. Calcule $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx$.

Solução

Primeiro vamos escrever o denominador como soma de quadrados:

$$x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x+1)^2 + 1.$$

Assim,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{2x+1}{1+(x+1)^2} dx.$$

Façamos, agora, a mudança de variável

$$u = x + 1, du = dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{2(u-1)+1}{1+u^2} du = \int \frac{2u}{1+u^2} du + \int \frac{-1}{1+u^2} du = \\ &= \ln(1+u^2) - \text{arc tg } u + k \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx = \ln(x^2+2x+2) - \text{arc tg}(x+1) + k.$$

Figura 5.35 – Resolução de integrais que apresentam fatores irredutíveis do 2º grau pelo método de frações parciais, p.379 e 380

Na seqüência é apresentado outro exemplo, e só então é introduzido o teorema para o cálculo de integrais do tipo $\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} dx$ e feita sua demonstração, conforme apresenta a Figura 5.36. Na seqüência o autor apresenta apenas mais um exemplo para a resolução deste tipo de integral.

Teorema. Sejam m, n, p, a, b, c e α números reais dados tais que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então existem constantes A, B, D tais que

$$\frac{mx^2 + nx + p}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{Bx + D}{ax^2 + bx + c}.$$

Figura 5.36 – Teorema, p. 381

A apresentação da definição do método da integração por partes não é explícita, sendo assim a publicidade do saber não é garantida. Para tornar o conceito compreensível o autor apresenta poucos exemplos do método, dificultando o tornar o conceito compreensível. Estes aspectos demonstram que a elucidação do saber é parcial para o método de frações parciais.

Este método também é apresentado pelo autor como parte da teoria de integração caracterizando a desincretização do saber. A linguagem empregada na apresentação deste conceito pelo autor é extremamente técnica, valorizando a mecanização do conceito. Não há menção a respeito do contexto histórico, indicando que a despersonalização do saber não é totalmente contemplada.

O autor não apresenta situações problemáticas atuais nos exemplos e nem nos exercícios propostos, o que implica na não atualização do saber e na não relação pertinência de atualidade biológica. Como consequência também não há a presença da relação de pertinência de atualidade moral. Como o autor não apresenta integração do conceito com novos saberes também ficam descaracterizadas a modernização e articulação de novos saberes. Diante destes aspectos, a adaptação dos saberes não está totalmente presente.

Ao final da seção 12.5 são propostos 16 exercícios para o cálculo de integrais por meio de frações parciais. Ao final da seção 12.6 são propostos 16 exercícios para o cálculo de integrais por meio de frações parciais. Ao final da seção 12.7, é proposta a resolução de 8 exercícios para o cálculo de integrais, utilizando o método de frações parciais. Todos os exercícios são integrais dadas e o objetivo é aplicar o método de frações parciais para sua resolução. Cada série de exercícios aparece isolada em sua seção, o estudante não precisa raciocinar qual tipo de artifício terá que usar no cálculo da integral. Nestas atividades não há situações problemáticas sugeridas pelo autor, consideramos então que a operacionalidade do saber é parcialmente contemplada.

5.3 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste trabalho consideramos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral. As atividades de Modelagem Matemática são apresentadas como *forma didática* proposta por Chevallard (1998) para o ensino do conceito de Integral. Segundo Bassanezzi (2006, p.17)

a Modelagem Matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la.

Neste contexto os conceitos são introduzidos por meio dos problemas, ao contrário de metodologias (e mesmo os livros didáticos) onde os conceitos são introduzidos e na seqüência o estudante se habitua a resolver as atividades propostas. Segundo Almeida (2003),

a Modelagem Matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ainda desconhece ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar matematicamente,

ou seja, o estudante não vai ver a teoria e depois aplicá-la, e sim, buscar os conceitos de que precisa para resolver o problema. Assim os conteúdos vão surgindo de acordo com a necessidade do estudante. Deseja-se que a Matemática não seja apresentada como uma ciência constituída por ilhas e sim por um entrelaçamento de conteúdos que dão suporte um ao outro.

Ao trabalhar com atividades de Modelagem Matemática no ensino de Cálculo Diferencial e Integral temos a oportunidade de nos depararmos com questionamentos similares aos dos cientistas que modelaram situações do cotidiano, onde estes deram contribuições para o desenvolvimento da Matemática. A Modelagem Matemática permite um questionamento, por parte do modelador, para a busca de uma teoria matemática que leve à solução do problema a ser resolvido,

onde muitas vezes suas dúvidas são as mesmas dúvidas dos cientistas que construíram tal conhecimento. No contexto histórico onde as teorias matemáticas foram construídas, eram as necessidades da sociedade que propulsionavam o desenvolvimento de teorias que ajudassem a resolver os problemas do cotidiano.

Para introduzir as atividades de Modelagem Matemática para a apreensão de conceitos, primeiramente podem ser trabalhados modelos simplificados e conforme a maturidade do modelador, esses modelos podem tomar formas mais especializadas. Este aspecto modelador caracteriza a Transposição Didática dos saberes. Nas atividades de Modelagem Matemática podemos acompanhar passo a passo como estão sendo feitas as simplificações e, então, inferir se os atributos da Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* que enunciamos em 4.2 podem ser observados.

5.3.1 As Atividades de Modelagem Matemática

As atividades de Modelagem Matemática descritas neste capítulo têm como objeto matemático o conceito de Integral. Nas atividades são trabalhados: a definição de Integral e suas propriedades, técnicas de integração e aplicações. Primeiro descrevemos a atividade de modelagem proposta, e na seqüência fazemos sua análise preliminar para inferir em que medida os atributos adaptação do saber, elucidação do saber e operacionalização do saber da transposição didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* podem ser observados.

As atividades que apresentamos neste material para análise são: o Problema do Financiamento, o Problema do Jardim e o Problema da Energia Armazenada em um Capacitor.

5.3.1.1 Problema do Financiamento

Esta atividade como aqui descrita, foi desenvolvida em um projeto deste mesmo Programa de Pós-Graduação com estudantes do segundo ano do

curso de Licenciatura em Matemática. Emergiram nesta atividade: o conceito de Integral Definida, e cálculos de Área sob uma curva por meio deste conceito.

A descrição aqui apresentada é aquela que consta nos relatórios elaborados pelos estudantes após o desenvolvimento da atividade.

Descrição da atividade

Atualmente um dos sonhos de consumo da maioria das pessoas é a aquisição da casa própria. A procura pelo financiamento da casa própria junto aos bancos teve grande aumento visto que há queda nas taxas de juros, aumento no volume de recursos e a facilidade de obtenção de crédito para a compra da casa própria. Segundo a reportagem da revista Veja

a compra de um imóvel voltou a fazer parte das possibilidades da vida real. Desde os anos de 1970 não havia tanto dinheiro disponível para o financiamento imobiliário. No ano passado, foram 20,3 bilhões de reais, um crescimento de 48% em relação a 2005. Quando se olham os financiamentos em recursos da caderneta de poupança, que se destinam à classe média, o salto é ainda maior. Os bancos privados destinaram 6,2 bilhões de reais e a Caixa Econômica Federal, outros 3,3 bilhões de reais. O resultado foi que o número de imóveis financiados para a classe média ultrapassou pela primeira vez desde 1988 a marca dos 100 000 (VEJA, 2007, p.66).

Definido o tema, o próximo passo é definir o que se quer investigar a respeito deste tema. Na mesma reportagem é mostrada a tabela que apresentamos na Figura 5.37.

Nesta tabela foram considerados como base um financiamento de R\$ 250.000,00, com taxas de juros de Taxa Referencial (TR) mais 12% e amortização pela tabela PRICE. Para o desenvolvimento da atividade de modelagem com o grupo de estudantes apresentamos outra tabela (Tabela 5.1) com valores calculados no sistema SAC (Sistema de Amortizações Constantes), para um valor total de um financiamento de R\$ 250.000,00 dividido em 240 prestações mensais.

O CAMINHO PARA A CASA PRÓPRIA

VALOR DO FINANCIAMENTO 250 000 reais			
PRAZO	20 anos (240 meses)	15 anos (180 meses)	10 anos (120 meses)
VALOR DAS PARCELAS	2 964,63 reais	3 196,08 reais	3 762,25 reais
TOTAL	711 511,20 reais	575 294,40 reais	451 470,00 reais

PRAZO

Os juros dos financiamentos caíram. Os exemplos ao lado usam como base um financiamento de 250 000 reais, com taxas de juro de TR + 12% e amortização pela Tabela Price. É o esquema mais usado no mercado

Fontes: Miguel José Ribeiro de Oliveira, vice-presidente da Associação Nacional dos Executivos de Finanças, Administração e Contabilidade (Anefac), e Paulo Veiga, diretor da Mercatto Gestão de Recursos

Figura 5.37 – Tabela do financiamento

Fonte: Revista Veja, 14 de março de 2007

Tabela 5.1 – Valor da prestação mensal

Valor da parcela mensal				
Mês	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0				R\$ 250.000,00
1	R\$ 3.659,17	R\$ 2.617,50	R\$ 1.041,67	R\$ 248.958,33
2	R\$ 3.648,26	R\$ 2.606,59	R\$ 1.041,67	R\$ 247.916,67
3	R\$ 3.637,35	R\$ 2.595,69	R\$ 1.041,67	R\$ 246.875,00
4	R\$ 3.626,45	R\$ 2.584,78	R\$ 1.041,67	R\$ 245.833,33
5	R\$ 3.615,54	R\$ 2.573,88	R\$ 1.041,67	R\$ 244.791,67
6	R\$ 3.604,64	R\$ 2.562,97	R\$ 1.041,67	R\$ 243.750,00
7	R\$ 3.593,73	R\$ 2.552,06	R\$ 1.041,67	R\$ 242.708,33
8	R\$ 3.582,82	R\$ 2.541,16	R\$ 1.041,67	R\$ 241.666,67
9	R\$ 3.571,92	R\$ 2.530,25	R\$ 1.041,67	R\$ 240.625,00
10	R\$ 3.561,01	R\$ 2.519,34	R\$ 1.041,67	R\$ 239.583,33

Analisando a tabela definimos algumas questões: como foram calculados os valores das prestações? Qual será o valor da n-ésima prestação? Como obter o valor total do financiamento? Assim, tomamos estas questões como objetivos do desenvolvimento da atividade de modelagem.

Primeiramente faremos as definições das variáveis envolvidas:

n = número de prestações (mensais)

A = amortização, medida em reais (R\$) (amortização é o reembolso de uma fração do capital para um dado período).

J_n = juro, medido em reais (R\$) (juro é a remuneração paga sobre um determinado capital para um dado período).

P_n = prestação, medida em reais (R\$) (prestação é o reembolso, para um dado período, de uma dívida paga através de parcelas tal que no final do prazo é liquidada, a mesma é dada pela soma da amortização com os juros).

S_n = Saldo Devedor, medido em reais (R\$) (Saldo devedor é o valor do financiamento menos a amortização até aquele período).

i = taxa de juros (dada em percentagem).

Nesta atividade consideramos o valor do financiamento fixado em R\$ 250.000,00 reais. No SAC as amortizações são constantes e seu valor é obtido dividindo o valor do financiamento pelo prazo total, que neste problema é de 240 meses. Então temos que:

$$A = \frac{250.000}{240} = 1041,67$$

A taxa de juros foi obtida fazendo a média da TR nos últimos meses mais a taxa de 12% ao ano. Como as prestações são mensais fizemos a conversão para uma taxa mensal obtendo o valor de 1,047% ao mês. O valor do juro mensal é obtido fazendo o produto do saldo devedor anterior pela taxa de juros. Assim temos a expressão:

$$J_n = S_{n-1} \cdot 0,01047 \quad (5.2)$$

De acordo com a tabela podemos escrever:

$$P_n = A + J_n \quad (5.3)$$

O Saldo Devedor é o Saldo Devedor anterior menos a amortização:

$$S_n = S_{n-1} - A \quad (5.4)$$

Considerando estas hipóteses, construímos um modelo que relaciona o valor da prestação em um tempo t qualquer. Como as prestações variam de acordo com o período buscamos uma função $P(n)$ que nos dê o valor da n -ésima prestação sem que seja preciso gerar uma planilha para obter este valor. Substituindo (5.2) e (5.4) em (5.3) temos que:

$$\text{Para } n = 1 \quad P(1) = 3659,17 = 2617,50 + 1041,67 = J_1 + A = S_0 \cdot 0,01047 + A$$

$$\begin{aligned} \text{Para } n = 2 \quad P(2) &= 3648,26 = 2606,59 + 1041,67 = J_2 + A = S_1 \cdot 0,01047 + A = \\ &= (S_0 - A) \cdot 0,01047 + A = S_0 \cdot 0,01047 - A \cdot 0,01047 + A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } n = 3 \quad P(3) &= 3637,35 = 2595,69 + 1041,67 = J_3 + A = S_2 \cdot 0,01047 + A = \\ &= (S_1 - A) \cdot 0,01047 + A = (S_0 - 2A) \cdot 0,01047 + A = S_0 \cdot 0,01047 - 2A \cdot 0,01047 + A \end{aligned}$$

·
·

$$\text{Para } n = t \quad P(t) = S_0 \cdot 0,01047 - (t-1)A \cdot 0,01047 + A \quad (5.5)$$

Para calcular a prestação quando $t = 7$ fazemos:

$$P(7) = (250000) \cdot (0,01047) - (7-1) \cdot (1041,67) \cdot (0,01047) + 1041,67$$

Para obter um modelo da prestação geral do sistema SAC para uma taxa qualquer i e, usando a notação de variável contínua reescrevemos (5.5) como:

$$P(t) = S_0 \cdot i - (t-1) \cdot A \cdot i + A \quad (5.6)$$

onde S_0 é o valor do financiamento.

A partir deste modelo, estamos interessados em determinar o valor total pago no financiamento. Sabemos que o valor total do financiamento é a somatória de todas as prestações. Novamente queremos uma ferramenta

matemática que nos possibilite o cálculo sem que seja necessária a utilização de uma planilha. Em nossa atividade temos que o valor da prestação no tempo t é dado por:

$P(t) = 3670,076285 - 10,9062849t$, cujo gráfico é apresentado na Figura 5.38.

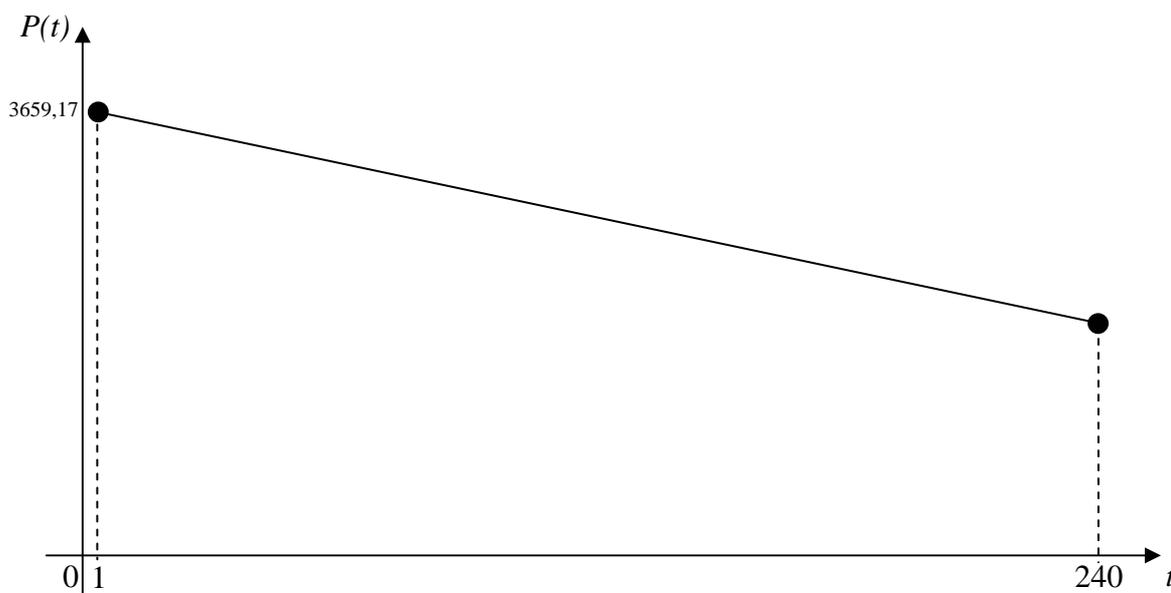


Figura 5.38 – Gráfico da prestação em função do tempo

Vamos considerar $P(t)$ como uma função contínua. A soma de todas as prestações é dada pela área abaixo de $P(t)$. É neste ponto que abordamos os conceitos de integral.

Definição 1: Seja $f(x)$ uma função contínua e não negativa definida no intervalo $[a, b]$. A integral definida $\int_a^b f(x) dx$ representa a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x)$, o eixo x e as verticais que passam por a e b .

Considerando a função da prestação em função do tempo dada por:

$$P(t) = 3670,076285 - 10,9062849t$$

na qual a variável t está relacionada ao tempo e $P(t)$ à t -ésima prestação, o valor total do financiamento é representado pela soma de todas as prestações, e é

determinado pela expressão:

$$\int_1^{240} (3670,076285 - 10,9062849t) dt = \left(3670,076285t - \frac{10,9062849t^2}{2} \right) \Big|_{t=1}^{240} = 563052,68$$

Representada pelo gráfico como mostra a Figura 5.39.

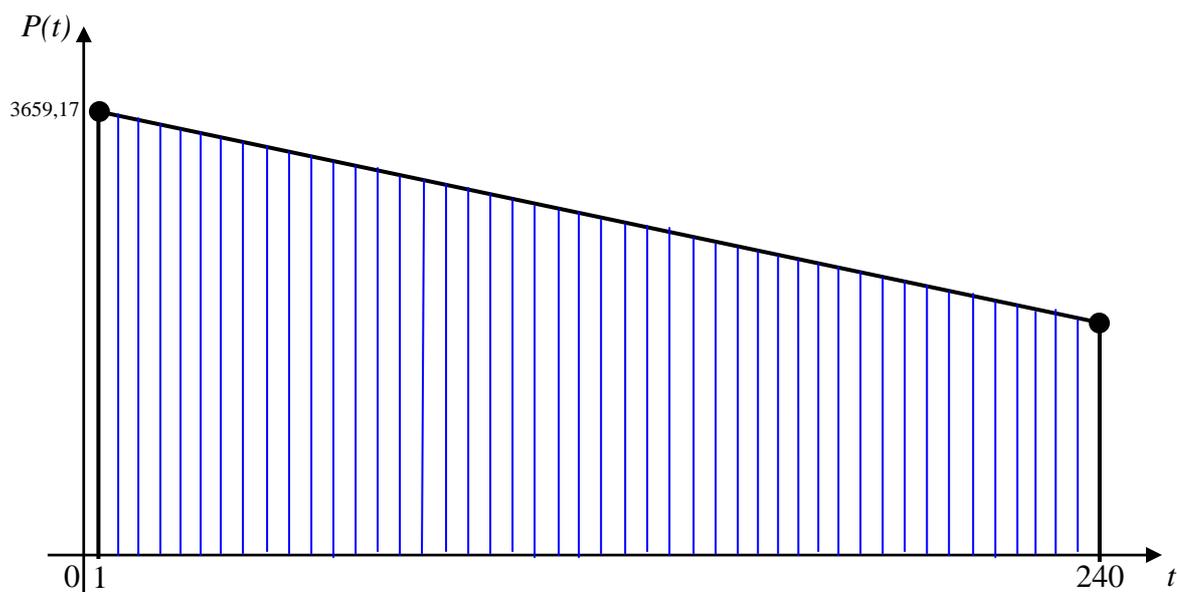


Figura 5.39 – Gráfico do valor total do financiamento

Assim o valor total pago pelo financiamento será de R\$ 563.052,68.

Análise da atividade em relação aos atributos

O atributo I, adaptação do saber, é contemplado sob os seguintes aspectos: como o tema trabalhado na atividade é um tema atual, isto implica na atualização do saber e na relação de pertinência biológica. Como o tema possui informações adequadas à nossa sociedade, caracteriza-se a relação de pertinência de atualidade moral. Para calcular o valor total do financiamento recorreremos ao uso da Integral, que é um conceito em relação ao qual a sociedade e a comunidade científica estão em consenso de que seja um saber a ser ensinado, portanto atende

à segunda característica ser consensual. Quando os conceitos de integral definida e cálculo da área abaixo de uma curva são introduzidos na atividade, fica explícito que estes conceitos são teorias parciais da teoria de integrais indicando assim a desincretização do saber. O cálculo da integral que aparece na atividade, pode ser feito utilizando lápis e papel, como também podem ser utilizadas calculadoras gráficas ou softwares matemáticos. Para fazer o gráfico também podemos utilizar estes recursos. Isso implica na modernização e articulação do saber antigo com novos saberes.

No momento em que o conceito de integral como área abaixo da curva se faz necessário para a obtenção do modelo do financiamento, automaticamente este se faz compreensível, pois o objetivo é encontrar um conceito que responda à necessidade de calcular o valor total do financiamento. Na introdução da definição de integral definida e da definição do cálculo da área abaixo de uma curva, fica explicitada a apresentação do saber implicando na publicidade do saber. Assim, a atividade contempla parcialmente o atributo II, a elucidação do saber.

Esta atividade de Modelagem Matemática permite trabalhar o conteúdo do saber por meio de cálculos matemáticos, resolução da recursividade para a obtenção de uma fórmula de recorrência, cálculo da integral, representação gráfica. Assim, podemos considerar que a operacionalização do saber é proporcionada aos estudantes. No entanto, essa operacionalização não é suficiente, visto que a atividade de Modelagem Matemática não proporciona ao estudante o trabalho com exercícios e problemas que contemplem as maneiras diversas de se trabalhar com o cálculo de integrais definidas e cálculo de uma área abaixo da curva. Assim, embora a operacionalização do saber seja viabilizada certamente é preciso envolver o estudante com outras atividades.

5.3.1.2 Energia Armazenada em um Capacitor

Esta atividade foi apresentada por Ferruzzi (2003) em sua dissertação de mestrado, na qual envolveu estudantes de um curso de Tecnologia em Eletromecânica com atividades de Modelagem Matemática durante a disciplina

de Cálculo diferencial e Integral. Os conceitos de Integral que emergiram na atividade são: integral definida e o método da integração por partes. Descrevemos aqui a atividade como apresentada na dissertação da autora.

Descrição da atividade

O capacitor é um componente importante nos circuitos elétricos. É utilizado em motores monofásicos para auxiliar na partida. São úteis também para manter estável, por exemplo, uma corrente alternada, como um sinal de áudio. Nos rádios tem a função de filtrar a corrente retificada fornecida pela fonte de alimentação de um aparelho e ruídos de outras frequências.

Considerando a situação ideal, os capacitores não dissipam energia mas sim a armazenam e devolvem ao circuito mais tarde. Para que um capacitor se torne carregado é necessário aplicar uma tensão entre suas placas. Tensão e a corrente de carga tem comportamentos opostos. No início da carga, a corrente é máxima e a tensão do capacitor é nula. À medida que essa tensão aumenta, a corrente diminui. Quando o capacitor atinge o valor máximo de tensão, a corrente é nula.

Um capacitor carregado possui acumulada certa energia potencial elétrica, que é igual ao trabalho W despendido para carregá-los. Esta energia também pode ser recuperada, permitindo-se a descarga do capacitor. Nosso objetivo é **encontrar um modelo matemático que represente este trabalho realizado, isto é a energia acumulada**. O trabalho realizado é o deslocamento de cargas elétricas no interior do capacitor e é isto que está associado ao armazenamento de energia. A Figura 5.40 mostra alguns modelos de capacitores.

Em pesquisas bibliográficas notamos que a potência mede quanto trabalho (conversão de energia de uma forma para outra) pode ser realizado em certo período de tempo. Se a força (ou potência) aplicada é constante, como por exemplo, a força utilizada para levantar um objeto, teremos:

$$W = p.t \quad (5.7)$$

Onde W representa a energia, p a potência e t o intervalo de tempo. Se esta força não é constante, como por exemplo, no caso de empurrar um carro, como é o caso do motor da geladeira, teremos uma força variável.

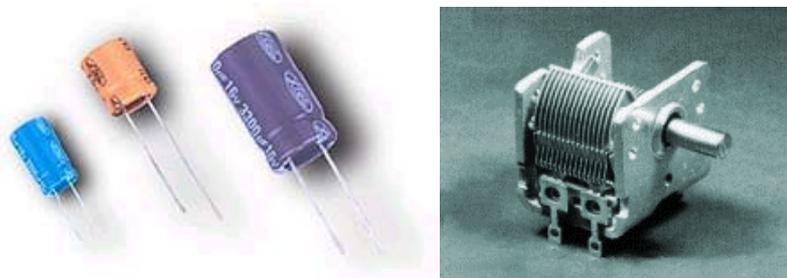


Figura 5.40 – Exemplo de Capacitores

Fonte: <http://www.grupozug.com.br/ENGEL/frameeletronica.htm>

Com base em estudos em livros técnicos da área, vimos que a energia acumulada é a área sob a curva da função potência em relação ao tempo, sendo assim, devemos **encontrar a função da potência em relação ao tempo**, para determinar a área sob esta curva.

Sabemos que a potência aplicada em um aparelho é igual à tensão aplicada vezes a corrente que flui neste aparelho, isto é

$$p(t) = i(t)U(t) \quad (5.8)$$

com $p(t)$ = potência, $U(t)$ = tensão e $i(t)$ = corrente.

Assim para calcular a função da potência precisamos da função que representa a tensão e da função que representa a corrente que flui neste capacitor.

Como a tensão que é aplicada nos aparelhos domésticos é a tensão fornecida pela concessionária, para calcular esta função da tensão basta ligarmos um osciloscópio no ponto de chegada da tensão, que este nos fornecerá um gráfico da tensão e da corrente que atravessa o circuito.

Diante do problema os alunos consultaram especialistas e entenderam que a primeira atitude que deve ser tomada é compreender o comportamento da tensão fornecida ao capacitor. Assim, era necessário **encontrar**

um modelo matemático que representasse o comportamento da tensão em relação ao tempo. Assim partimos para a formulação do problema matemático.

O problema constituído foi **determinar um modelo matemático que forneça a energia armazenada em um capacitor.** O próximo passo é a definição das variáveis.

Nesta modelagem as variáveis envolvidas são:

U = tensão aplicada ao capacitor, medida em Volts (V)

t = tempo, medido em milissegundos (ms)

i = corrente medida em amperes (A)

W = energia armazenada em um capacitor, medida em miliJoule (mJ)

p = potência, medida em Watts (W)

C = valor da capacitância, medida em microFaraday (μF)

Para resolver o problema, este foi dividido em duas partes sendo elas:

- i) Encontrar o modelo matemático que descreva o comportamento da tensão em relação ao tempo;
- ii) Encontrar um modelo matemático que represente a energia armazenada em um capacitor.

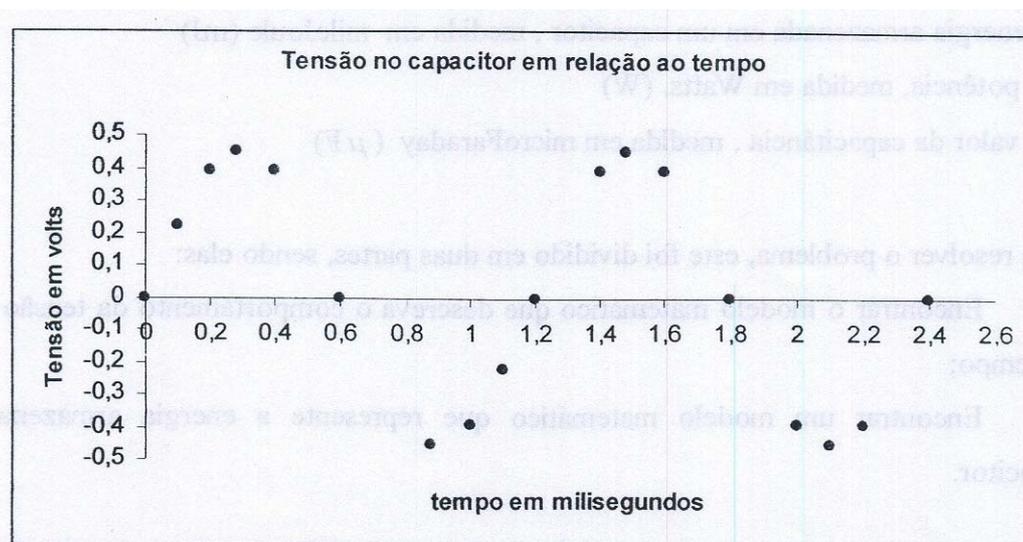
Primeira parte: Determinação do modelo matemático que descreva o comportamento da tensão aplicada em um capacitor em relação ao tempo

Com o objetivo de encontrar o modelo matemático que descreva o comportamento da tensão aplicada em um capacitor em relação ao tempo, utilizaram um capacitor de $20 \mu F$, ligado em série com uma fonte de tensão, determinando os valores expressos na Tabela 5.2, sendo o tempo medido em ms e a tensão em Volts.

Tabela 5.2 – Tensão encontrada em função do tempo

Tempo	tensão	Tempo	Tensão
T	U	T	U
0	0,00	1,2	0,00
0,1	0,22	1,4	0,39
0,2	0,39	1,48	0,45
0,28	0,45	1,6	0,39
0,4	0,39	1,8	0,00
0,6	0,00	2	-0,39
0,88	-0,45	2,1	-0,45
1	-0,39	2,2	-0,39
1,1	-0,22	2,4	0,00

Representando graficamente os dados da Tabela 5.2 foi possível observar que a tendência dos dados descreve o comportamento de uma função periódica como mostra a Figura 5.41.

**Figura 5.41** – Tendência dos dados observados

Diante da tendência dos dados observados, podemos levantar as seguintes hipóteses:

H_1 : trata-se de uma função periódica

H_2 : trata-se da função seno

Assim partimos para a resolução do problema. Neste momento introduzimos o conteúdo das funções periódicas seno, cosseno e tangente, assim, os alunos puderam continuar suas atividades como segue.

A partir da hipótese e observando a tendência dos dados podemos concluir que trata-se de uma função senoidal cujo período é $1,2\text{ ms}$. Diante dos conceitos de função seno, sabemos que o período da função $f(x) = \text{sen } x$ é 2π , logo para este caso, temos a função

$$U(t) = \text{sen} \frac{2\pi}{1,2} t \quad (5.9)$$

Também verificamos que a função tem um máximo no ponto $(0,3; 0,45)$ o que corresponde aos dados e podemos observar que a curva de tendência conduz a uma função que varia de $-0,45$ até $0,45$, ou seja, a amplitude da função é $0,9$.

Como a amplitude da função $f(x) = \text{sen } x$ é igual a 2 (dois), podemos concluir que a função que estamos trabalhando é do tipo

$$U(t) = 0,45 \text{sen} \frac{2\pi}{1,2} t \quad (5.10)$$

Deste modo podemos estabelecer a relação entre a tensão e o tempo neste capacitor é expressa pelo modelo matemático

$$U(t) = 0,45 \text{sen} \frac{2\pi}{1,2} t \quad (5.11)$$

O qual está representado graficamente na Figura 5.42.

Obtido o modelo da tensão aplicada em um capacitor fazemos então a sua validação. A comparação entre os dados observados e os dados estimados pelo modelo, permitiu concluir que o modelo é satisfatório para descrever o problema em estudo, conforme apresentamos na Tabela 5.3.

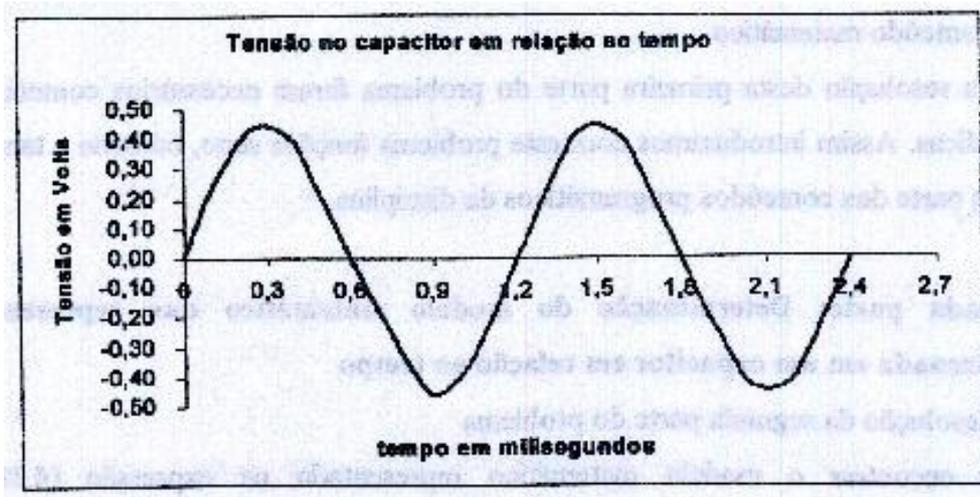


Figura 5.42 – Modelo matemático encontrado para o comportamento da tensão aplicada em um capacitor em relação ao tempo

Tabela 5.3 – Validação do modelo encontrado

Tempo	Tensão	Tensão encontrada no modelo	erro
Medido em ms	Medida em volts	$U(t)=0,45*\text{sen}(2*\text{pi}/1,2)*t$	U
0	0,00	0,00000	0
0,1	0,22	0,22500	0,10%
0,2	0,39	0,38971	0,07%
0,28	0,45	0,44753	-0,55%
0,4	0,39	0,38971	-0,14%
0,6	0,00	0,00000	0,00%
0,88	-0,45	-0,44753	-0,55%
1	-0,39	-0,38971	-0,07%
1,1	-0,22	-0,22500	2,27%
1,2	0,00	0,00000	0,00%
1,4	0,39	0,38971	-0,07%
1,48	0,45	0,44753	-0,55%
1,6	0,39	0,38971	-0,07%
1,8	0,00	0,00000	0,00%
2	-0,39	-0,38971	-0,07%
2,1	-0,45	-0,45000	0,00%
2,2	-0,39	-0,38971	-0,07%
2,4	0,00	0,00000	0,00%

Notamos que a porcentagem de erro é menor que 1% na maioria dos instantes, portanto, para nossa finalidade, o modelo é considerado satisfatório.

Para a resolução desta primeira parte do problema foram necessários conteúdos de funções periódicas. Assim introduzimos com este

problema funções seno, cosseno e tangente, os quais fazem parte dos conteúdos programáticos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Segunda parte: Determinação do modelo matemático que represente a energia armazenada em um capacitor em relação ao tempo

Após encontrar o modelo matemático representado na expressão (5.11), os alunos continuaram suas atividades para encontrar **o modelo matemático que descreva a energia armazenada em um capacitor**, que é o objetivo maior deste processo.

Em pesquisas bibliográficas realizadas e conversas com especialistas, verificamos que para encontrar a energia devemos primeiramente encontrar a função potência. Para encontrar a função potência é necessário encontrar aquela que representa a corrente que atravessa este capacitor.

Assim, partimos para a determinação do modelo matemático que representa o comportamento da corrente que flui neste capacitor.

A capacitância C de um capacitor é definida como a razão entre a carga q de qualquer dos condutores e o módulo da diferença de potencial U , entre os condutores.

$$C = \frac{q}{U} \quad (5.12)$$

Para carregarmos um capacitor, liga-se seus terminais aos terminais de um gerador. O gerador realiza durante um pequeno intervalo de tempo o trabalho de transporte, de uma carga Q , de uma placa à outra. Assim, durante um pequeno intervalo de tempo, existe uma corrente elétrica de uma placa à outra, através do gerador.

Essa corrente é variação da carga em relação ao tempo, assim teremos:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (5.13)$$

A corrente cessará quando a diferença de potencial entre as placas do capacitor for igual à do gerador. A diferença de potencial entre os dois condutores é proporcional à carga transferida, isto é:

$$U = \frac{1}{C} q \quad (5.14)$$

O que nos leva à:

$$q = C.U \quad (5.15)$$

Isto é, a carga transferida em um capacitor é diretamente proporcional ao valor da capacitância e à diferença de potencial entre as placas.

Quando um capacitor descarregado é conectado a uma fonte, uma corrente circula até a carga armazenada no capacitor produzir um potencial exatamente igual ao potencial da fonte. Assim, a variação a partir do estado inicial de descarga até o ponto final de carga corresponde a um estado transitório durante o qual a corrente i varia de alguma forma como uma função do tempo.

Temos de (5.15) que $q = C.U$, e para uma pequena variação da tensão ΔU , a variação na carga é

$$\Delta q = C.\Delta U \quad (5.16)$$

daí temos que

$$dq = C.dU \quad (5.17)$$

Como a carga e a tensão são variáveis com o tempo, é apropriado expressar suas variações infinitesimais em relação ao tempo. Logo

$$\frac{dq}{dt} = c.\frac{dU}{dt} \quad (5.18)$$

Como a taxa de variação em relação ao tempo é a corrente instantânea (ver 5.13), temos que:

$$i = C \cdot \frac{dU}{dt} \quad (5.19)$$

Logo para encontrar a corrente, derivamos a tensão e multiplicamos pelo valor do capacitor. Assim derivamos a expressão (5.11) e substituímos em (5.19) o que nos fornece

$$i(t) = 20\mu\text{.}0,45 \cdot \frac{\pi}{0,6} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{0,6} \cdot t\right) \quad (5.20)$$

logo, o modelo que representa o comportamento da corrente que flui neste capacitor é dado por:

$$i(t) = 20\mu\text{.}0,75 \cdot \pi \cos\left(\frac{\pi}{0,6} \cdot t\right) \quad (5.21)$$

Esta função é representada na Figura 5.43, onde notamos que o período desta é igual ao período da função que representa a tensão aplicada neste capacitor.

Agora, tendo a corrente e a tensão, podemos encontrar a função potência em relação ao tempo, a qual nos é dada pela expressão (5.8)

$$p(t) = U(t) \cdot i(t)$$

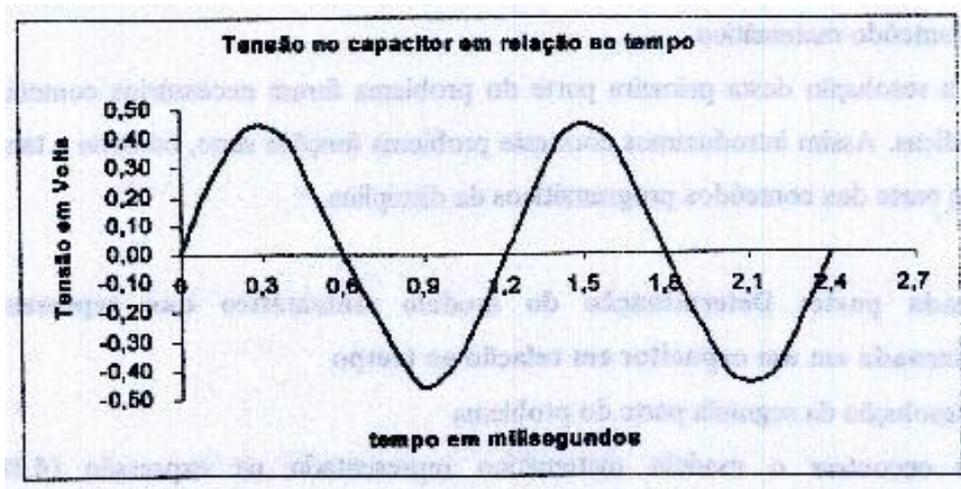


Figura 5.43 – Corrente que flui neste capacitor

Assim substituindo (5.11) e (5.21) na expressão (5.8) temos

$$p(t) = 20\mu.0,75\pi.0,45\text{sen}\left(\frac{\pi}{0,6}t\right).\cos\left(\frac{\pi}{0,6}t\right)$$

o que nos fornece a expressão

$$p(t) = 20\mu.0,3375\pi.\text{sen}\left(\frac{\pi}{0,6}t\right).\cos\left(\frac{\pi}{0,6}t\right) \quad (5.22)$$

a qual representa a potência neste capacitor em função do tempo e está representada na Figura 5.44

Podemos verificar que esta função possui um período diferente da função da tensão e da função que representa a corrente. Para calcular o período desta função fazemos algumas substituições trigonométricas apresentadas a seguir.

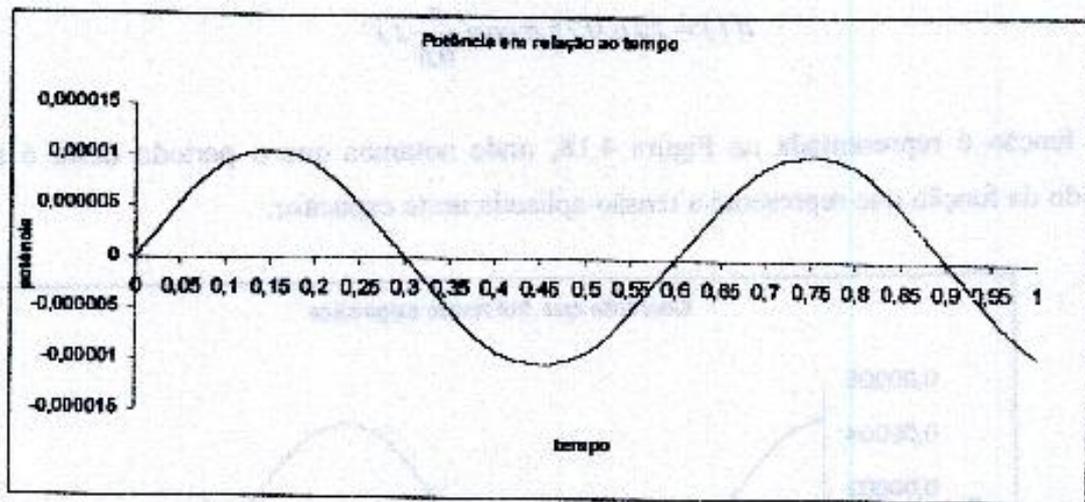


Figura 5.44 – Potência em relação ao tempo

Podemos escrever (5.22) como

$$p(t) = 10\mu.0,3375\pi.2\text{sen}\left(\frac{\pi}{0,6}t\right).\cos\left(\frac{\pi}{0,6}t\right) \quad (5.23)$$

e sabendo que

$$2\text{sen}\left(\frac{\pi}{0,6}t\right).\cos\left(\frac{\pi}{0,6}t\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{0,6}t\right) \quad (5.24)$$

Substituindo (5.24) em (5.23), temos

$$p(t) = 10\mu.0,3375\pi.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{0,6}t\right). \quad (5.25)$$

Verificamos por (5.25) que o período desta função é $T = 0,6ms$.

Esta verificação foi possível, pois já haviam sido introduzidas as características e propriedades da função seno. No entanto, para as substituições trigonométricas que foram necessárias revisou-se as identidades trigonométricas neste momento.

Como vimos anteriormente, a energia acumulada em um capacitor é a área sob a curva da função que representa a potência. Como trata-se de uma função seno, para calcular esta área devemos integrar o módulo da função potência no intervalo de tempo recomendado.

O período desta função é $0,6ms$. Como trata-se de uma função senoidal, vamos integrar no intervalo de 0 até 0,3 e multiplicar o resultado por 2. Assim temos:

$$W = \int_0^{0,3} p \, dt \quad (5.26)$$

substituindo (5.22) em (5.26), temos

$$W = \int_0^{0,3} \left(20\mu.03375\pi.\text{sen}\left(\frac{\pi}{0,6}t\right).\cos\left(\frac{\pi}{0,6}t\right) \right) dt \quad (5.27)$$

A função a ser integrada é o produto de duas funções mais simples. Quando temos produto de funções um dos métodos a se utilizar é o de integração por partes, definida por:

Definição 2: Quando u e v são funções deriváveis de x temos que:

$$\int_{v_1}^{v_2} u \, dv = (u_2v_2 - u_1v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v \, du$$

Integrando (5.27) utilizando a técnica de integração por partes temos:

$$W = \frac{20\mu \cdot 0,2025}{2} \left[\left(\text{sen} \frac{\pi}{0,6} t \right)^2 \right]_0^{0,3} \quad (5.28)$$

o que nos fornece

$$W = 2,025 \mu J . \quad (5.29)$$

Multiplicando o resultado encontrado em (5.29) por 2 temos uma energia total de

$$W = 4,05 \mu J .$$

Sabendo que

$$0,2025 \left(\text{sen} \frac{\pi}{0,6} t \right)^2 = \left(0,45 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{0,6} t \right) \right)^2, \quad (5.30)$$

podemos substituir (5.30) na expressão (5.28) e teremos

$$W = \frac{20\mu}{2} \left(0,45 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{0,6} t \right) \right)^2 \quad (5.31)$$

Agora, lembrando que 20μ é o valor da capacitância (C) do capacitor que estamos trabalhando e que $\left(0,45 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{0,6} t \right) \right)$ foi o modelo encontrado para representar a função da tensão (veja a expressão 5.11), podemos concluir que o modelo

$$W = \frac{C}{2} \cdot U(t)^2 \quad (5.32)$$

representa a energia armazenada em um Capacitor para qualquer valor de c constante e para qualquer função $U(t)$.

Análise da atividade em relação aos atributos

Nesta atividade, a representação gráfica da curva de tendência e das funções trigonométricas foi feita por meio de softwares matemáticos (novo saber). Isto aponta a modernização do saber e articulação do saber com novos saberes. A obtenção dos dados para a atividade feita em laboratório implica na atualização do saber e relação de pertinência de atualidade biológica, pois as informações obtidas são informações atualizadas. O tema trabalhado na atividade de Modelagem Matemática é um tema atual, ou seja, existe um consenso entre a sociedade e a comunidade científica quanto à sua utilização para alguns cursos e isto implica na atualização e nas relações de pertinência moral e biológica do saber. A relação de pertinência moral é contemplada, pois este tema é adequado para a sociedade. A introdução dos conceitos de integral definida e método de integração por partes caracterizam a desincretização do saber, pois estes conceitos são enunciados como teorias parciais da teoria de integração. A apresentação do conceito está separada do contexto histórico o qual foi concebida, e na atividade não aparece a relação do conceito envolvido com seu contexto histórico. Porém, temos o fato de que o próprio estudante obtém os dados para o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática e o mesmo constrói o modelo. Isto caracteriza a despersonalização do saber, uma vez que há uma construção semelhante àquela feita quando do surgimento do conceito. Diante destes aspectos, podemos observar que a adaptação do saber, atributo I, está caracterizada nesta atividade.

A apresentação dos conceitos de integral definida e método de integração por partes é explícita, logo aponta para a publicidade do saber. A compreensão do conceito de integral está no fato do estudante perceber que a energia acumulada é a área a ser calculada abaixo da curva da potência pelo tempo. Quando o estudante busca a maneira como deve ser calculada esta integral, no caso a técnica a ser usada é a da integração por partes, há a necessidade de se compreender o método para utilizá-lo, tornando o conceito compreensível. Consideramos então que a elucidação do saber, atributo II, é parcialmente contemplada.

Esta atividade de Modelagem Matemática permite trabalhar o conteúdo do saber por meio de cálculos matemáticos, determinação da função trigonométrica, resolução da integral pelo método da integração por partes

viabilizando em parte a operacionalização do saber. No entanto, essa operacionalização não é suficiente, visto que esta atividade de Modelagem Matemática não proporciona ao estudante o trabalho com exercícios e problemas que contemplem as maneiras diversas de se trabalhar com o cálculo de integrais definidas e o método de integração por partes. Assim, embora a operacionalização do saber seja viabilizada na atividade de Modelagem Matemática, é preciso envolver o estudante com outras atividades.

5.3.1.3 Problema do Jardim

Esta atividade como aqui descrita, foi desenvolvida em um projeto deste mesmo programa de mestrado com estudantes do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática. Emergiram nesta atividade: o conceito de integral definida, e o método de substituição de variáveis.

A descrição aqui apresentada é aquela que consta nos relatórios elaborados pelos estudantes após o desenvolvimento da atividade.

Descrição da atividade

Em muitos condomínios horizontais as casas são construídas sem grades. Com a economia da grade muitos moradores investem no jardim para valorizar o imóvel. Um item indispensável para a composição de um jardim é a grama.

Em média, são cobrados R\$ 4,00 pelo metro quadrado da grama do tipo esmeralda colocada (grama e mão de obra). A empresa de jardinagem estima uma área aproximada do tamanho do jardim e o cliente precisa pagar pela quantidade de grama correspondente. A partir daí, a empresa de jardinagem faz a colocação da grama.

Muitas vezes, o que ocorre é que sobram tapetes de grama, e esses são deixados com o cliente, já que ele pagou por toda aquela grama. Ou seja, toda a grama que sobrou é desperdiçada e o cliente acaba pagando mais do que deveria.

O que faremos é tomar um jardim como exemplo (Figura 5.45) e calcular sua área a fim de que a quantidade de grama comprada seja a mais próxima possível do tamanho desse jardim, cujas dimensões aparecem na Figura 5.46. Com isso, se evitará o desperdício.



Figura 5.45 – Fotografia do jardim

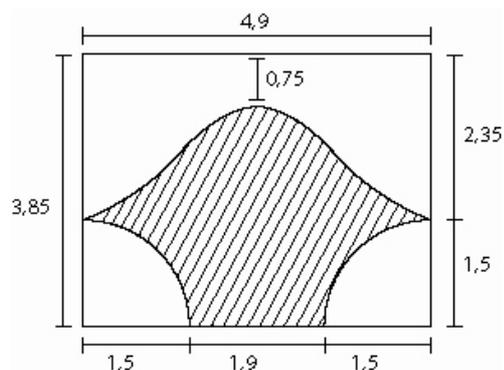


Figura 5.46 – Esquema com dimensões do jardim

O objetivo da atividade de Modelagem Matemática que vamos propor neste trabalho é calcular a área do jardim. Assim, o primeiro passo será construir um modelo matemático cuja curva se ajuste ao contorno do jardim. Mas como obter essa função? É nesse momento que faremos uso do software Modellus. Em seguida, utilizamos o conceito de integral para o cálculo da área.

Utilizando o Modellus para obter a função

O Modellus é um software de modelagem e simulação, desenvolvido na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (TEODORO; VIEIRA; CLÉRIGO, 1997). Atualmente na versão 2.5, esse software tem distribuição gratuita e vem sendo muito utilizado em diversos países, tendo sido traduzido para vários idiomas (inglês, espanhol, eslovaco, grego e português do Brasil).

Esse software permite a construção e exploração de modelos matemáticos, e dentre as vantagens de sua utilização está a possibilidade de experimentação utilizando modelos matemáticos definidos a partir de funções, derivadas, equação diferenciais e equações de diferenças escritas sem a necessidade de uma sintaxe complexa.

Conforme comentado anteriormente, a atividade, neste momento, consiste em construir um modelo matemático cuja curva se ajuste, da melhor maneira possível, à linha que delimita superiormente a região cuja área se quer calcular. Para isso, por meio da janela Animação apresentamos o esquema com as dimensões do jardim conforme mostra a Figura 5.47. Nesse caso, a variável y estará relacionada à largura do jardim e a variável x ao comprimento.

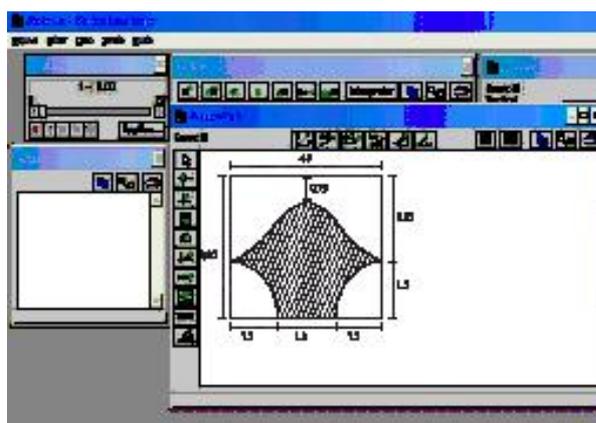


Figura 5.47 – Janela Animação com o esquema

Utilizando as ferramentas disponíveis na janela Animação é possível construir um gráfico sobre o esquema que será utilizado à medida que o modelo vai sendo desenvolvido. No entanto, cabe lembrar que é preciso ajustar as escalas de acordo com as dimensões da imagem e as medidas reais do jardim.

A partir de algumas análises e alguns questionamentos sobre o tipo de função mais adequado chega-se à família da função seno, cuja função básica é $y = \cos(x)$. Levando em conta as características e propriedades dessa família de funções, chega-se a uma função do tipo $y = A + B \operatorname{sen}(C(x + D))$, na qual A , B , C e D são parâmetros.

Escrevemos a função na janela Modelo, e ao clicar no botão Interpretar, habilitamos a janela Condições iniciais, na qual poderá alterar os parâmetros na medida em que vai construindo o modelo, conforme mostra a Figura 5.48.

Efetando alguns cálculos, fazemos as alterações nos parâmetros e passamos a avaliar na janela Animação o resultado geométrico representado pelo

gráfico da função (modelo) que está construindo (Figura 5.48).

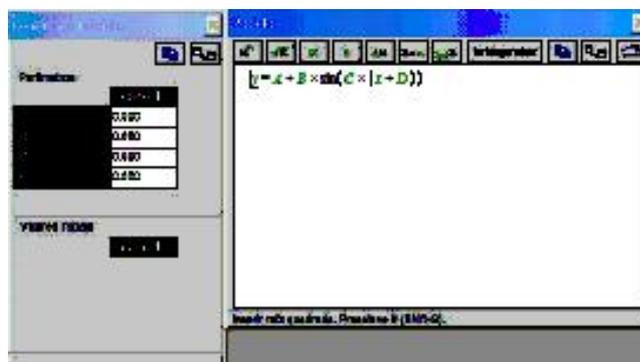


Figura 5.48 – Janelas Modelo e Condições Iniciais

Por fim, após testar, interpretar, avaliar e reconstruir seu modelo chegamos o mais próximo possível do modelo $y = 2,71 - 0,78\text{sen}(1,26(x + 1,26))$ cuja curva vai se ajustar ao esquema apresentado (Figura 5.49).

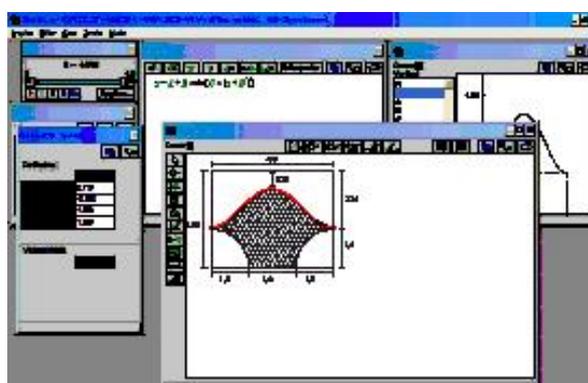


Figura 5.49 – Verificando as alterações dos parâmetros

Calculando a área do jardim

Para fazer o cálculo da área do jardim vamos dividi-lo em duas partes: parte inferior e parte superior (Figura 5.50). Iniciamos com o cálculo da parte inferior.

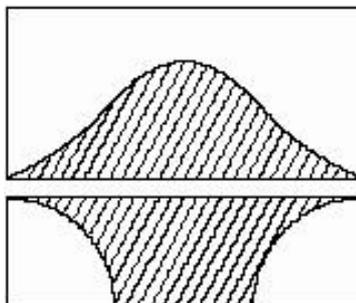


Figura 5.50 – Parte superior e parte inferior

A parte inferior é o retângulo de dimensões 1,5m x 4,9m menos a metade do círculo cujo raio r é 1,5m. Para o cálculo desta parte precisamos apenas dos conceitos básicos de geometria plana referentes à área de um retângulo e área do círculo.

$$\text{Área do retângulo} \rightarrow \text{base} \cdot \text{altura} = 1,5\text{m} \cdot 4,9\text{m} = 7,35\text{m}^2 \quad (5.33)$$

$$\text{Área do círculo} \rightarrow \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1,5)^2 \cong 7,07\text{m}^2 \quad (5.34)$$

Assim, basta subtrair de (5.33) a metade de (5.34) para termos a área da parte inferior:

$$\text{Área da parte inferior} \rightarrow 7,35\text{m}^2 - \frac{7,07\text{m}^2}{2} = 3,81\text{m}^2$$

Com este cálculo temos que a área da parte inferior do jardim: $3,81\text{m}^2$.

O cálculo da área da parte superior exige uma teoria mais elaborada. É neste ponto que abordamos os conceitos de integral, pois uma de suas aplicações consiste no cálculo de áreas.

Definição 1: Seja $f(x)$ uma função contínua e não negativa definida no intervalo $[a, b]$. A integral definida $\int_a^b f(x) dx$ representa a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x)$, o eixo x e as verticais que passam por a e b .

No item anterior obtemos, com a utilização do software Modellus, o modelo da curva que limita superiormente o contorno do jardim. Assim, foi construída a seguinte função:

$$f(x) = 2,71 - 0,78 \cdot \text{sen} \left[1,26x + (1,26)^2 \right] \quad (5.35)$$

na qual a variável x está relacionada ao comprimento e $f(x)$ à largura do jardim.

Obtida a função, o próximo passo é calcular a área abaixo da curva e, assim, obter a área da parte superior do jardim.

Pela *definição 1* temos que a área abaixo de $f(x)$ é:

$$\int_0^{1,6} \left(2,71 - 0,78 \cdot \text{sen} \left[1,26x + (1,26)^2 \right] \right) dx = \int_0^{1,6} (2,71) dx - 0,78 \int_0^{1,6} \left(\text{sen} \left[1,26x + (1,26)^2 \right] \right) dx = \quad (5.36)$$

Usando a regra da substituição na segunda integral, obtemos:

$$= [2,71x]_{x=0}^{1,6} - 0,78 \left[-\frac{1}{1,26} \cdot \text{cos} \left[1,26x + (1,26)^2 \right] \right]_{x=0}^{1,6} = 3,79 \text{ m}^2 \quad (5.37)$$

Portanto, a área da parte superior do jardim é $3,79 \text{ m}^2$.

Para finalizar o cálculo da área total do jardim, vamos adicionar a parte inferior com a parte superior do jardim:

$$3,81 + 3,79 = 7,6 \text{ m}^2$$

Como o nosso problema trata do custo da colação de grama em um jardim, basta multiplicar a área total do jardim pelo custo por metro quadrado de grama colocada, que nesse caso, é R\$ 4,00:

$$7,6 \cdot 4 = 30,4 \text{ m}^2$$

Assim, o custo total da grama colocada nesse jardim é de R\$ 30,40.

Análise da atividade em relação aos atributos

O atributo I, adaptação do saber, é contemplado sob os seguintes aspectos: o tema trabalhado na modelagem é um tema atual, e isto implica na atualização do saber e na relação de pertinência biológica. Este tema é adequado à sociedade assim a relação de pertinência moral é observada. Não há dúvidas a respeito da permanência dos conceitos aqui analisados no currículo de Cálculo Diferencial e integral, visto que sua utilização se faz necessária em uma situação problemática pertinente à sociedade. Assim a característica ser consensual é observada. Para calcular o a área do jardim recorreremos ao uso da Integral. Mas para calcular a integral foi necessária a obtenção da função de trigonométrica por meio de um software matemático. A utilização do software implica na modernização do saber e na articulação do saber novo com o antigo. A manipulação da função no software permite que o estudante possa visualizar o que acontece na função quando mudamos os parâmetros. Quando os conceitos de integral definida e o método de substituição de variáveis são introduzidos na atividade, fica explícito que estes conceitos são teorias parciais da teoria de integrais indicando assim a desincretização do saber. A apresentação do conceito aparece separada do contexto histórico onde foi construída, mas sem fazer relação com o mesmo, apontando para a despersonalização parcial do saber.

A compreensão do conceito de integral está no fato do estudante perceber que a área a ser calculada é a integral abaixo da curva. Quando o estudante busca a maneira como deve ser calculada esta integral, no caso o Método de mudança de variáveis, há a necessidade de se compreender esse método para utilizá-lo. Na introdução da definição de integral definida e da definição do método de

substituição de variáveis, fica explicitada a apresentação do saber implicando na publicidade do saber. Porém, na atividade de modelagem não há uma sequência lógica de conteúdos a serem ensinados, assim a programabilidade do saber não é observada. Portanto a atividade contempla parcialmente o atributo II, a elucidação do saber.

Como a modelagem matemática permite trabalhar o conteúdo do saber por meio de cálculos matemáticos, resolução de uma integral pelo método da substituição, representação gráfica do jardim utilizando o software, a operacionalização do saber é estimulada. No entanto esta operacionalização não é suficiente, pois o estudante precisa aplicar este conceito nos mais variados tipos de funções para que possa ter a elucidação do saber. Assim, embora a operacionalização do saber seja viabilizada certamente é preciso envolver o aluno com outras atividades.

5.4 ANÁLISE GLOBAL DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Nesta seção fazemos uma análise global de cada atributo da Transposição Didática, observados nos livros didáticos e nas atividades de Modelagem Matemática.

5.4.1 Atributo I: Adaptação do saber

Este atributo permite visualizar como é feita a apresentação do *saber a ensinar* nas *formas didáticas* propostas nesta pesquisa: livro didático e atividades de Modelagem Matemática. Para isto devem ser observados: a atualização do saber, a modernização do saber, a articulação dos saberes novos com os antigos, se há consenso entre a sociedade e a comunidade científica, as relações de pertinência de atualidade moral e atualidade biológica, a *desincretização do saber* e a *despersonalização do saber*.

A atualização do saber, a modernização do saber e a articulação do saber estão intimamente ligadas à exclusão e inclusão de novos saberes. O livro A traz em suas atividades propostas aplicações em temas atuais ou temas relacionados a outras áreas do conhecimento como a Física e a Química, e muitas atividades com o uso de calculadoras gráficas e softwares matemáticos. Porém, isto não se observa em todos os conceitos. No Livro B estes elementos da Transposição Didática não são observados, uma vez que o livro traz apenas exercícios para a utilização direta do conteúdo.

Nas atividades de Modelagem Matemática podemos observar com maior frequência a atualização do saber, a modernização do saber e a articulação do saber, pois para a dedução do modelo o estudante não se limita a utilizar lápis e papel, ele pode utilizar calculadoras gráficas e/ou softwares matemáticos para auxiliar esta dedução. Podemos citar o *Problema do Jardim* onde foi utilizado o software Modellus como auxiliar na obtenção do modelo.

A relação de pertinência de atualidade moral, dizem respeito a trabalhar com situações e informações que fazem parte da sociedade. No Livro A muitos dos problemas de aplicações trazem informações que não são utilizadas em nossa sociedade. A exemplo disto temos exercícios que utilizam como unidade de medida mph (pés/s) e pés o que não é habitual em nossa sociedade, pois utilizamos metro por segundo ou metros. Como no livro B não há exercícios de aplicações dos conteúdos não há a presença da relação de pertinência de atualidade moral. Nas atividades de Modelagem Matemática, esta relação é sempre observada, pois as situações trabalhadas contemplam temas da nossa sociedade.

A relação de pertinência de atualidade biológica é observada no livro A e nas atividades de Modelagem Matemática. Esta relação permite observar se os dados das aplicações contêm informações atualizadas, o que acontece tanto no livro A como nas atividades de Modelagem Matemática.

Todos os conceitos analisados nos livros e nas atividades de Modelagem Matemática sinalizam a característica proposta por Chevallard (1998) *ser consensual*, descrita na seção 2.4, uma vez que não há dúvidas entre a sociedade e a comunidade científica sobre sua inclusão e permanência no currículo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Os conceitos analisados são amplamente utilizados na resolução de situações problemáticas relativas aos ramos

das ciências envolvidas, nos cursos de graduação onde se faz necessária a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

A *desincretização do saber* também é contemplada tanto nos livros como nas atividades de Modelagem Matemática. Nos livros essa desincretização é observada nas subseções de cada capítulo. O saber é apresentado como teorias parciais de uma teoria maior, em nosso caso o conteúdo de integral. Nas atividades de Modelagem Matemática o conteúdo vai sendo trabalhado aos poucos, na medida em que se faz necessário.

A despersonalização do saber envolve a separação do saber do seu contexto histórico. Nos conceitos analisados nos livros, temos que a apresentação do conteúdo é separada de sua identidade histórica, no entanto, não há menção do contexto histórico no qual o saber foi construído e nenhuma relação com o mesmo. Nas atividades de Modelagem Matemática o mesmo acontece. Porém, como estas atividades proporcionam aos estudantes a busca pelos dados do tema escolhido e a obtenção do modelo, temos que o estudante se aproxima da maneira pela qual os cientistas desenvolveram suas teorias, muitas vezes levantando as mesmas dúvidas. Como exemplo podemos citar o *Problema da Energia Armazenada em um Capacitor*, onde os estudantes obtiveram nos laboratórios os dados para realizarem a dedução do modelo.

5.4.2 Atributo II: Elucidação do saber

Quando o *saber sábio* é apresentado nas publicações científicas, não há a preocupação dos autores se o leitor vai compreender ou não a nova teoria. Os meios onde se apresenta o saber sábio, tem como finalidade a publicação do novo saber. Na apresentação do saber a ensinar nas formas didáticas o autor deve ter a preocupação em tornar o conceito compreensível para o estudante, uma vez que este tem seu primeiro contato com o conteúdo do saber. Este atributo permite visualizar quais são os indicativos de que há a preocupação do autor em tornar a linguagem de apresentação do conceito compreensível. Para isto devem ser observados: tornar um conceito mais compreensível, a *programabilidade do saber* e a *publicidade do saber*.

A *publicidade do saber* é observada nas análises dos livros e das atividades de Modelagem Matemática. Este elemento da Transposição Didática permite visualizar se a apresentação do conceito analisado é explícita e bem definida. Isto ocorre nas análises dos conceitos dos livros e nas atividades de Modelagem Matemática.

Para tornar um conceito mais compreensível, observamos nas análises dos livros vários artifícios utilizados pelos autores para proporcionar esta compreensão. Os livros trazem exemplos, diagramas, quadros explicativos, tabelas, no caso do conteúdo de integral as tabelas de integração. O Livro A faz uma ampla utilização destes artifícios, já no Livro B o autor faz um maior uso dos exemplos, colocando uma grande quantidade dos mesmos. Porém este tornar compreensível se limita a compreensão apenas do conceito em si, não há a preocupação dos autores em fazer a compreensão do conceito em relação à sua utilização nas situações do cotidiano. Nas atividades de Modelagem Matemática o estudante utiliza o conceito para a construção do modelo após fazer sua relação com a situação do cotidiano estudada.

A *programabilidade do saber* é um elemento bastante questionável na transposição dos saberes. Este elemento permite observar se o conteúdo tem princípio e uma seqüência racional de desenvolvimento. Nas análises, nos propomos a seguir a seguinte seqüência de conceitos:

- Integral Indefinida,
- Integral Definida
- Área abaixo de uma curva
- Teorema Fundamental do Cálculo
- Método de integração por substituição de variáveis
- Método de Integração por partes
- Método de Integração por frações parciais

No livro A o autor apresenta estes mesmos conceitos na seguinte seqüência:

- Integral Indefinida,
- Método de Integração por substituição de variáveis,
- Integral Definida,
- Área abaixo de uma curva,
- Teorema Fundamental do Cálculo,
- Método de Integração por partes,
- Método de Integração por frações parciais,

Os cinco primeiros conceitos fazem parte do Capítulo 4. O método de Integração por partes e o Método de Integração por frações parciais fazem parte do Capítulo 7.

No livro B a seqüência seguida é:

- Integral Indefinida,
- Integral Definida,
- Teorema Fundamental do Cálculo,
- Área abaixo de uma curva,
- Método de Integração por substituição de variáveis,
- Método de Integração por partes,
- Método de integração por frações parciais,

Estes conceitos são apresentados nesta seqüência nos capítulos 10, 11, e 12. Em outros livros de Cálculo podemos observar seqüências diferentes de apresentação dos conceitos. No livro Cálculo Diferencial e Integral de R. Courant (1965), por exemplo, o autor inicia o conteúdo de integral apresentando a integral definida, antes do conceito de derivada. Após apresentar o conceito de derivadas o autor continua o conceito de integração apresentando as técnicas de integração. No livro Cálculo Diferencial e Integral de Azcaráte et al (1996), os autores apresentam o conceito de derivada e integral sem utilizar apresentação do conceito de limite. Na história do Cálculo Diferencial e Integral os conceitos de derivação e integração são anteriores à definição do conceito de limite. Assim, temos indicativos de que a ordem

de apresentação dos conceitos é particular a cada autor, não há uma seqüência estabelecida pela comunidade científica para a apresentação dos conceitos.

Na Modelagem Matemática não há como observar uma *programabilidade do saber*, pois os conteúdos são introduzidos na medida em que se fazem necessários para o estudo do problema.

5.4.3 Atributo III: Operacionalização do saber

Este atributo permite analisar se o conteúdo do saber apresentado tem a capacidade de operacionalização, ou seja, o conteúdo traz a possibilidade de proporcionar atividades como exercícios e problemas para que o estudante possa trabalhar os conceitos a fim de que possa aprender o conteúdo. Esta operacionalidade também é necessária para o professor poder avaliar o estudante, permitindo assim o *controle social da aprendizagem*.

Nos livros didáticos este atributo é prontamente atendido na maioria dos conceitos analisados. Os livros trazem uma grande quantidade de exercícios e problemas para serem resolvidos. Temos uma exceção no método de integração por frações parciais analisado no Livro B, onde o autor coloca exercícios para o cálculo de integrais utilizando este método sempre da mesma forma, assim o estudante não precisa raciocinar que artifício deverá usado no cálculo, fazendo mecanicamente os exercícios.

Nas atividades de Modelagem Matemática este atributo é parcialmente contemplado, visto que na dedução do modelo o estudante utiliza o conceito necessário para sua resolução, mas não aborda todos os aspectos do conceito por meio de exercícios ou problemas. Há a necessidade do professor envolver o estudante com outras atividades, para contemplar aspectos que para a atividade de Modelagem Matemática não se tornaram necessários.

Como analisamos a Transposição Didática de um conteúdo específico, o conteúdo de integral, temos que a transposição analisada é uma transposição *strictu sensu*. Na análise das atividades de Modelagem Matemática observamos que a Transposição Didática dos conceitos do *saber sábio* para o *saber a ser ensinado* é uma transposição *latu sensu*. De maneira geral as atividades de

Modelagem Matemática vão contemplar os mesmos atributos, independente do conteúdo do saber que esteja sendo analisado. Isto coloca a transposição dos saberes num contexto mais amplo.

Na análise global dos atributos podemos observar que os livros contemplam parcialmente o atributo I – adaptação do saber – e o atributo II – elucidação do saber. O atributo III – operacionalização do saber – é contemplado nos livros didáticos. Nas atividades temos contemplado o atributo I – adaptação do saber – e parcialmente contemplados o atributo II – elucidação do saber – e o atributo III – operacionalização do saber. Podemos inferir que as atividades de Modelagem Matemática podem complementar os livros didáticos nos atributos parcialmente contemplados pelos mesmos. Diante disto podemos propor a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para o ensino do Cálculo e um novo caminho para a Transposição Didática dos saberes.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre a Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar*, em livros didáticos e em atividades de Modelagem Matemática. Nossa problemática se propôs a investigar a Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* do conteúdo Integral em livros didáticos e em atividades de Modelagem Matemática.

Segundo Chevallard (1998), quando o *saber sábio* sofre o processo de transposição para se tornar o *saber a ensinar*, este novo saber deve ser apresentado em uma *forma didática*. A *forma didática* mais utilizada é o livro didático. Neste trabalho propomos a utilização das atividades de Modelagem Matemática como *forma didática* definida por Chevallard para a introdução de conteúdos do *saber a ensinar* e analisamos a Transposição Didática do *saber sábio para o saber a ensinar* nestes dois ambientes.

A partir de elementos da Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* definidos por Chevallard (1998) e Astolfi (2005), elaboramos três atributos da Transposição Didática que observamos em dois livros didáticos e em três atividades de Modelagem Matemática. Estes atributos permitem observar se a Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* do conteúdo de integral é “adequada” ou “não adequada” nas *formas didáticas* analisadas neste trabalho (os livros didáticos e as atividades de Modelagem Matemática)

Na análise dos livros didáticos observamos que a adaptação do saber é parcialmente contemplada. Nos livros didáticos temos poucas aplicações do conteúdo em relação a situações reais, e muitas vezes as informações nestes problemas não são informações adequadas para a nossa sociedade como, por exemplo, apresentar problemas com unidades de medidas que não são utilizadas por nossa sociedade. Os livros analisados também não trazem as relações dos conteúdos ali apresentados com o contexto histórico em que foram construídos. No entanto o trabalho de citar todas as relações com o contexto histórico esbarra em problemas técnicos como a quantidade de informações que traria cada livro. A elucidação do saber é parcialmente atendida nos livros, pois, embora os livros

tragam grandes quantidades de exemplos, mostrando assim a preocupação dos autores em tornar o conceito compreensível, estes exemplos na sua maioria são apenas para mostrar como trabalhar o conceito em si, não mostram como o conceito se aplica em questões extra-matemáticas. Nos livros observamos a capacidade de operacionalização dos conceitos nos exercícios e problemas propostos pelos autores.

Observamos que nas análises das atividades de Modelagem Matemática, a adaptação do saber é contemplada, pois estas atividades proporcionam o trabalho com situações relacionadas com diferentes problemas ou questões da nossa sociedade. A relação com o contexto histórico dos conteúdos não é observada. No entanto, ao trabalhar com as atividades de Modelagem Matemática o estudante tem a oportunidade de se aproximar da maneira pela qual os cientistas desenvolveram suas teorias. Uma desvantagem das atividades de Modelagem Matemática está na baixa capacidade de operacionalização, pois nas atividades o estudante pode não fazer uso de alguns aspectos do conteúdo por meio de exercícios e problemas. Outra desvantagem das atividades de Modelagem Matemática é a sua não *programabilidade*, pois nas atividades os conceitos que emergem nem sempre seguem a mesma seqüência que o professor necessita para a introdução dos conceitos.

A Modelagem Matemática se faz necessária para o enfrentamento do estudante diante de problemas reais e principalmente de como abordar estes problemas. O livro se faz necessário como suporte técnico e fonte do conhecimento, sendo assim de imprescindível utilização. Nos dois ambientes temos que os atributos da Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* são parcialmente contemplados. Neste sentido, as análises que realizamos nos livros didáticos e nas atividades de Modelagem Matemática sinalizaram que a associação das atividades de Modelagem Matemática com os livros didáticos, contribui para uma Transposição Didática do *saber sábio* para o *saber a ensinar* mais adequada. Pensamos que a situação ideal seria a utilização de atividades de Modelagem Matemática para a introdução e aplicações de conceitos sempre que possível, e o livro como fonte de referência do *saber a ser ensinado*.

Assim, consideramos que este trabalho pode trazer contribuições para as aulas de Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que as atividades de Modelagem Matemática podem complementar os livros didáticos nos quesitos da

Transposição Didática que não estão presentes nos livros didáticos. Sendo assim, a Modelagem Matemática pode ser utilizada para auxiliar na Transposição Didática dos saberes e tornar possível a compreensão dos conceitos matemáticos e a relação que estes têm com situações reais.

Esperamos que as atividades de Modelagem Matemática apresentadas neste trabalho possam estimular o uso da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, buscando assim, possíveis mudanças no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Para dar continuidade à nossa pesquisa temos algumas sugestões. Sugerimos a investigação da Transposição Didática do *saber a ensinar* para o *saber ensinado* do conceito de integral. Nesta transposição pode-se trabalhar as atividades de Modelagem Matemática com estudantes e assim analisar as questões que envolvem a transposição do *saber a ensinar* para o *saber ensinado*. Além disso, pode ser analisada a transposição que o professor realiza quando se utiliza do livro para construir suas notas de aula. Também pode-se investigar as diferenças fundamentais entre a transposição dos saberes em classes onde o professor utiliza somente o livro didático como *forma didática* e em classes onde além do livro o professor utiliza as atividades de Modelagem Matemática para a introdução dos conteúdos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. **Introdução a Modelagem Matemática**. Notas de aula. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina. 2003.

ALMEIDA, L. M. W.; Brito, D. **O conceito de função em situações de Modelagem Matemática**. Revista: Zetetikê ,v.12, n.23 jan/jun , 2005, p. 42-61.

ALMEIDA, L. M. W. de; DIAS, M. R. **Um estudo sobre modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem**. Bolema, ano 12, nº 22. pp 19-36, 2004.

ALMEIDA, L. M. W., FATORI, L. H; SOUZA, L. G. S. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando a Modelagem Matemática. In: **Revista Ciência e Tecnologia**. Publicação periódica do Centro UNISAL – Ano X, nº16, junho de 2007. Campinas : UNISAL. Pp 47-59.

ASTOLFI, J. P.; DEVELAY, M. **A Didática das Ciências**. Tradução Magna S. S. Fonseca. 9. Ed. Campinas, SP: Papirus, 2005.

ASCÁRATE, C., et al. **Cálculo Diferencial e Integral**. Madri: Editorial Síntesis. 1996

BARBOSA, J. C.; SANTOS, M. A. dos. **Modelagem Matemática, Perspectivas e Discussões**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007. Belo Horizonte. Anais eletrônicos do IX ENEM. Belo Horizonte, 2007, 1 CD.

BARBOSA, M. A. **O Insucesso no Ensino e Aprendizagem na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Brasília: UNB, 1985. 5v.

BICUDO, M. A. V. **Ensino da Matemática e Educação matemática: Algumas Considerações Sobre Seus Significados**. Bolema, ano 12, nº 13. pp 1-12, 1999.

BORSSOI, A. H. **A Aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática como estratégia de ensino**. 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

_____. **Cálculo**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula).

BROCKINGTON, G.; PIETROCOLA, M. Serão as Regras da Transposição Didática aplicáveis aos Conceitos de Física Moderna? In: **Investigações em Ensino de Ciências**, Vol.10, N. 3, dezembro/2005.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica**: del saber sadio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique Grupo Editor AS, © 1998.

COURANT, R. **Cálculo Diferencial e Integral**. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1965, v.1.

FALSETTI, M. et al. **Perspectiva integrada de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática**: una mirada al campo disciplinar de la matemática. Unión Revista Iberoamericana De Educación Matemática, setembro de 2006, nº 7, pp. 23 – 38.

FERRUZZI, E. C. **A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

FINNEY, R. L.; WEIR, M. D.; GIORDANO, F. R. **Cálculo de George B. Thomas Jr.** Tradução: Paulo Boschcov. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2002, v.1.

FONSECA, M. da C. F. R., **Por Que Ensinar Matemática?** In: Presença Pedagógica, Março/Abril, 1995, pp. 46-54.

FONTANINI, M. L. de C. **MODELAGEM MATEMÁTICA X APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: UMA INVESTIGAÇÃO USANDO MAPAS CONCEITUAIS**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

FRANCHI, R. H. O. L. **Reflexões sobre a Modelagem na Perspectiva da Educação Matemática**. Anais Eletrônicos do III CNMEM, 2003.

FROTA, M. C. R. **Duas abordagens Distintas da Estratégia de Resolução de Exercícios no estudo de Cálculo**. In: "Educação matemática: a prática educativa sob o olhar dos professores de Cálculo". Org. Jonas Lachini, João Bosco Laudares. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

GRUPO ZUG. <http://www.grupozug.com.br/ENGEL/frameeletronica.htm>, acessada em 14/04/2002

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de CÁLCULO**. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC (Livros Técnicos e Científicos S.A.), 2000, v.1.

IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. **O ensino de matemática e a formação do cidadão**. In: Temas e Debates. SBEM, Ano VII, nº5, outubro/1994.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. **A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education**. ZDM, vol 36, 2006.

KEHLE, P.; LESTER, F. K, Jr. **A semiotic look at modeling behavior**. In: Lesh, D. & Doerr, H., Beyond constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 2003, p.97-122.

LACHINI, J. **Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo**. In: "Educação matemática: a prática educativa sob o olhar dos professores de Cálculo". Org. Jonas Lachini, João Bosco Laudares. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

LUCCAS, S. **Abordagem histórico-filosófica na educação matemática: apresentação de uma proposta pedagógica**. 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

MAASS, K. **Barriers to, and opportunities for integration of modelling in mathematics classes-results of na empirical study**. IN: 10Th INTERNATIONAL CONGRESS IN MATHEMATICAL EDUCATION, 2004, Copenhagen, Dinamarca. Disponível em:<<http://www.icme-organisers.dk/tsg20/papers.html>>Acesso em: 20 mai. 2005.

PAIS, L. C. Transposição Didática. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. 208p. (Série Trilhas)

SANTOS, F. V. **Modelagem Matemática e Tecnologia de Informação e Comunicação: o uso que os alunos do computador em atividades de modelagem**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SOARES, L. **Não é mais um Sonho Impossível**. Veja. Edição 1999, ano 40, nº 10, p. 66 – 73 , 14 de março de 2007.

VASCONCELOS, S. D.; SOUTO, E. O Livro Didático de Ciências no Ensino Fundamental: Proposta De Critérios Para Análise Do Conteúdo Zoológico. In: **Ciência & Educação**, v. 9, n. 1, 2003, p. 93 – 104.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

ZUCHI, I. **A ABORDAGEM DO CONCEITO DE LIMITE VIA SEQUÊNCIA DIDÁTICA**: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional. Tese de doutorado em Engenharia de Produção. UFSC, 2005.

ZUIN, E. de S. L., **Cálculo: uma abordagem histórica**, In: “Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar dos professores de Cálculo”. Org. Jonas Lachini, João Bosco Laudaes. Belo Horizonte: FUMARC, 2001, p. 13-38.