Universidade Estadual de Londrina

ANDRÉIA BÜTTNER CIANI

O REALÍSTICO EM QUESTÕES NÃO-ROTINEIRAS DE MATEMÁTICA

Londrina
2012

ANDRÉIA BÜTTNER CIANI

O REALÍSTICO EM QUESTÕES NÃO-ROTINEIRAS DE MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requesito parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.

Londrina
2012

Catalogação Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

C566r Ciani, Andréia Büttner.
O realístico em questões não-rotineiras de matemática / Andréia Büttner Ciani. – Londrina, 2012. 158 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 3. Produção escrita em matemática – Teses. 4. Rendimento escolar – Avaliação – Teses. 5. Testes e medidas educacionais – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

ANDRÉIA BÜTTNER CIANI

O REALÍSTICO EM QUESTÕES NÃO-ROTINEIRAS DE MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requesito parcial à obtenção do título de Doutor.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
(Orientadora)
UEL – Londrina – PR

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica
UNESP – São Paulo – SP

Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares
UFPR – Curitiba – PR

Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
UEL – Londrina – PR

Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina – PR

Londrina 19 de março de 2012.

Dedico este trabalho aos meus brilhantes orientadores e orientadoras Adilson Ciani, Lília Büttner, Vanderlei Marcos do Nascimento, Roberto Ribeiro Baldino, Tânia Cristina Baptista Cabral e Regina Luzia Corio de Buriasco.

AGRADECIMENTOS

Deixo registrada minha eterna gratidão às pessoas que contribuíram efetivamente com a realização deste trabalho.

À minha orientadora Regina Luzia Corio de Buriasco, que não somente apostou em meu potencial, mas teve o cuidado, a paciência e a sabedoria de apresentar-me à avaliação da aprendizagem, à análise da produção escrita e à Educação Matemática Realística, bem como à sua "árdua" e competente forma de trabalho. Serei eternamente grata pelo seu empenho para a minha modificação = aprendizagem. Agradeço pela amizade. Agradeço ainda, a sua família, pelo companheirismo nas "invasões" de sua casa e do seu tempo.

A Edilaine dos Santos, Letícia Celeste e Pamela Ferreira pelos trabalhos e esclarecimentos disponibilizados. Aos outros membros do GEPEMA, os quais favoreceram o meu amadurecimento e crescimento. Agradeço o apoio, tanto na parte teórica, quanto no que se refere ao tratamento dos dados, por fim, em todas as etapas dessa tese, que é uma produção do GEPEMA. Agradeço pelo ambiente de estudo e de compartilhamento.

Aos componentes da banca deste trabalho Ângela Marta, Márcia Cyrino, Maria Tereza e Vicente Garnica, os quais prestaram uma enorme contribuição no exame de qualificação, e, mais uma vez, na defesa.

Às minhas professoras desta jornada Ângela Marta, Lourdes Werle, Márcia Cyrino e Regina Buriasco a oportunidade de conhecimento e aprofundamento na área de Educação Matemática pelo viés da dedicação de vocês. São exemplos que me esforço para seguir.

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa em Formação de Professores de Ciências e Educação Matemática da UNIOESTE, pelas discussões e apoio nos estudos, contribuindo com minhas reflexões, e pela amizade.

Aos professores que assumiram minhas aulas do Colegiado de Matemática e me apoiaram no transcorrer desta pesquisa.

Às professoras Carmen Baumgartner e Ivone, de Língua Portuguesa, e Isabel Bobroff, de Inglês, que se disponibilizaram a corrigir o trabalho da melhor maneira.

À minha família, pelos primeiros e constantes ensinamentos e amor.

Ao companheiro Emerson Mário Boldo, pelos ensinamentos e por contribuir com a ampliação da minha cultura geral, por me trazer à "realidade da humanidade".

À Fundação Araucária pela bolsa concedida.

[...] na aprendizagem o ponto de partida é o aluno. Como conseqüência é preciso aceitar que o interesse daquele que se coloca na posição de ensinar está voltado para as respostas que o aluno produz, diante de certas situações bem contextualizadas.

Tânia Cabral

CIANI, Andréia Büttner. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2011. 166f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

RESUMO

Este trabalho apresenta duas propostas de intervenção como subsídio operacional para a constituição de oportunidade de aprendizagem, por meio da análise da produção escrita, como prática de investigação. Essas propostas foram elaboradas a partir dos contextos indicados por estudantes que participaram de três estudos realizados no interior do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação - GEPEMA, nos quais foi investigado como estudantes lidaram com questões discursivas não-rotineiras de matemática em situação de avaliação. A análise da análise presente nos três estudos foi realizada pelo viés da identificação das maneiras de lidar dos estudantes. Essas maneiras de lidar indicaram contextos a partir dos quais foi possível indicar caminhos, na perspectiva da reinvenção guiada, para oportunidades de Matematização. Esta investigação, predominantemente qualitativa de cunho interpretativo, foi realizada sob a luz da avaliação como prática de investigação, com a utilização de orientações presentes na Análise de Conteúdo, tomada a Educação Matemática Realística (EMR) como aporte teórico norteador. A construção das duas propostas de intervenção gerou indícios de que, por meio da análise da produção escrita, sustentada teoricamente pela EMR, pode-se praticar a avaliação da aprendizagem em sala de aula como oportunidade de aprendizagem.

Palavras-chaves: Educação matemática realística. Avaliação escolar como prática de investigação. Análise da produção escrita em matemática. Intervenção pedagógica.

CIANI, Andréia Büttner. **The realistic on non-routine questions of mathematics**. 166f. Thesis (Doctorate in Sciences and Mathematical Education) – State University of Londrina, Londrina, 2012.

ABSTRACT

This paper presents two proposals for operating assistance as an operating subsidy for the provision of learning opportunities through the analysis of written production as a practice of research. These proposals were prepared from the indicated contexts by students who participated in the three studies conducted within the Group for Study and Research in Mathematics Education and Evaluation - GEPEMA in which was investigated how the students dealt with non-routine math discursive issues in an assessment situation. The analysis of the analysis presented in the three studies was performed by the bias of identifying the students' ways of dealing with the problems. These ways showed contexts from which it was possible to indicate ways in view of guided reinvention for mathematization opportunities. This research, which was highly qualitative nature of interpretation, was held under the light of the assessment as a practical research with the use of these guidelines in the content analysis making the Realistic Mathematics Education (RME) as a theoretical guideline. The construction of the two proposed interventions has generated signs that, through the analysis of written production theoretically supported by the RME, the assessment of learning in the classroom can be practiced as a learning opportunity.

Keywords: Realistic mathematics education. School assessment process as an investigation practice. Analysis of written production in mathematics. Educational intervention.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DOS QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AVA	Avaliação do Rendimento Escolar do Paraná
EMR	Educação Matemática Realística
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
OBMEP	Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas
OCDE	Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico
OECD	Organisation for Economic Co-operation and Development
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (*Programme for International Student Assessment*)
RME	Realistic Mathematics Education
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 O INÍCIO DO CAMINHO

Em Ciani (2000) exponho meu início de trajetória na Educação Matemática. Trata-se de um estudo que parte da experiência como professora particular de Matemática e da preocupação com a relação entre aprendizagem e aprovação, ou obtenção de uma nota condizente com a promoção do estudante à série seguinte. Cabe destacar que tal preocupação somente veio a ocorrer depois de concluída minha formação inicial, sendo que, antes disso, em minhas aulas me valia apenas do balizamento da medida de promoção dos alunos no sistema escolar, para considerar que o aluno havia ou não aprendido. Tomava a nota como medida da aprendizagem. As aulas particulares eram adequadas a partir da expectativa (do professor da turma, do aluno) expressa na prova escrita e a partir da espécie de cobrança a que seria submetido o aluno. A medida da validade das aulas tinha como referência as notas obtidas pelos alunos nas provas bimestrais, após o início das aulas particulares ministradas por mim, comparadas com as notas e conceitos anteriores. Não havia distinção entre nota e avaliação. Aprendizagem e bons conceitos eram sinônimos. Meu objetivo, como o de muitos outros professores particulares, era o de obter um certo grau de institucionalização do conhecimento a curto prazo, tal como mencionado por Perrin-Glorian (1995). Durante o período em que me vali dessas estratégias didáticas, mantive muitos alunos particulares.

A problemática se inicia quando, ao terminar o bacharelado em Matemática, desconfiei que promoção e aprendizagem não caminhavam juntas. Comecei a suspeitar que poderia haver uma distância entre o que os alunos e pais diziam sobre o desejo de aprender (o discurso principal da instituição) e o desejo de ser promovido à série seguinte e o da obtenção de bons conceitos (suas ações diárias). Muitas perguntas emergiram dessa suspeita. Será que o professor particular é contratado para ajudar o aluno a aprender, mas durante o processo apenas "passar de ano" é o que conta? O que aconteceria se eu, como professora particular, decidisse centrar meus esforços na aprendizagem do aluno? Quais seriam as consequências de tal decisão? Poderia sobreviver com tal prática profissional? A conclusão da investigação (CIANI, 2000) foi de que os pais dos estudantes e os estudantes agem como se aprendizagem e promoção fossem sinônimas. No entanto, se são obrigados a escolher, optam pela promoção. Isso foi revelado na medida em que, se os indícios de aprendizagem não vinham acompanhados de um sucesso em curto prazo, os estudantes abandonavam as aulas, contudo, obtendo boas notas, mesmo sem indícios de aprendizagem, eles continuavam frequentando as aulas.

Assim começou minha trajetória na busca de compreender até que ponto seria possível trabalhar com o objetivo da aprendizagem dos estudantes sem a preocupação única com a aprovação.

Em 2007 entrei em contato com o GEPEMA - Grupo de Estudos e Pesquisa em Avaliação e Educação Matemática, do qual sou integrante, e passei a conhecer os trabalhos já desenvolvidos na linha da avaliação da aprendizagem escolar, delimitando-a em relação à avaliação de rendimento e avaliação de larga escala. O grupo[1] vem construindo, desde 1999, a partir da tese de doutorado de sua coordenadora, resultados sobre como exercer a avaliação da aprendizagem e, mais recentemente, de como passar de uma avaliação de rendimento à avaliação da aprendizagem. Para isso, o grupo vem se valendo do estudo de avaliações em larga escala, o AVA, e, atualmente, o PISA.

1.2 POR UM LADO

No âmbito escolar, a palavra avaliação ainda remete, na maioria das vezes, a um valor numérico, a uma nota. As notas, recebidas por cada um de nós em nossos processos escolares, ficam registradas em documentos, sendo, às vezes, o único registro restante de todo um processo. Talvez essa seja uma das razões de, frequentemente, se vincular tanto uma nota à vida escolar de um sujeito, ou, ainda, de se tomar uma nota pelo próprio sujeito. Para o processo de ensino e aprendizagem, no entanto, é preciso ir além da mera atribuição de uma nota e de seus efeitos, como já discutido e lembrado em Buriasco (1999). O foco rotineiro ou tradicional, muitas vezes até inconsciente, em uma nota expressa por um valor numérico, deve ser desviado para que se possa focar o processo, não apenas seu "resultado".

[1] Neste trabalho toda referência a grupo diz respeito ao GEPEMA

Este trabalho considera a avaliação escolar como reguladora do processo de ensino e de aprendizagem, tal como propõe Hadji (1994), visando a contribuir com a aprendizagem, informando o professor e o sistema educativo das condições em que ela está ocorrendo e, aos estudantes, do seu próprio percurso, subsidiando futuras tomadas de decisões. Assim, tanto professores quanto estudantes podem obter informações que lhes sejam relevantes ao processo de ensino e de aprendizagem. Isso implica em assumir a avaliação como prática de investigação, o que significa que o foco não está em encontrar as respostas, mas, antes, em interrogar os meios, as trajetórias, os caminhos percorridos que as originaram.

A interrogação das trajetórias destina-se a encontrar indícios da ação, a investigar, analisar e discutir como os estudantes lidam com determinado problema, ou seja, como o interpretam, que estratégias utilizam para resolvê-lo, como expressam matematicamente suas ideias. Interrogar o caminho busca, por fim, levantar características do que é observável, dos procedimentos matemáticos utilizados na condução de sua estratégia (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009).

Buriasco (1999, p. 218) afirmou:

> [...] é necessário passarmos de uma preocupação centrada no produto (que se pretendia medir, pesar...) para uma preocupação centrada no processo de produção, para conhecê-lo e melhorá-lo, e, finalmente, sobre os produtores (professores, alunos, escola, sistema) para ajudá-los.

E, ainda, Buriasco (1999) não descarta a validade de uma avaliação do rendimento (produto) como um instrumento que também pode ser utilizado de maneira funcional para a aprendizagem.

Para Hadji (1994), a avaliação, uma operação em que se cruzam as palavras e as coisas, essências e existências, concretiza-se sempre num discurso. O avaliador é um "homem de palavras". Também considera a avaliação como uma operação

> particular de leitura da realidade. Operação pela qual tomamos posição, nos pronunciamos sobre uma dada realidade à luz de uma grelha de leitura que exprime, em relação a essa realidade, determinadas exigências; o momento do confronto projectos/resultados (HADJI, 1994, p. 185).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais editados em 1998 já consideravam que os instrumentos de avaliação deveriam fornecer ao professor informações sobre as competências de cada aluno (BRASIL, 1998). Também pode-se observar na Lei 9394/96 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), capítulo II, artigo 24, inciso V, item a, a intenção da prática de uma "avaliação contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais [...]", remetendo à avaliação a interessante função de subsidiar e redirecionar as ações dos processos de ensino e de aprendizagem. Tal disposição representa, de fato, um efetivo avanço em relação à avaliação apenas de rendimento, de caráter somativo e classificatório. Parece, no entanto, que a implementação da avaliação da aprendizagem ainda não se efetiva na prática em salas de aulas nem se reflete nas políticas públicas a partir das avaliações nacionais e internacionais de rendimento escolar. Talvez porque até mesmo as avaliações de larga escala, como, por exemplo, AVA , SAEB , ENEM , OBMEP e PISA , classificam os estudantes a partir do seu resultado.

Nossa linha de estudo pretende, tomando a ideia da avaliação como prática de investigação em sala de aula, interpretar aspectos de uma avaliação específica, circunscrita ao Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, PISA.

Os participantes do GEPEMA - Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação da Universidade Estadual de Londrina têm se dedicado ao estudo e pesquisa de práticas de avaliação que envolvem o ensino e a aprendizagem de Matemática. Os trabalhos de pesquisa produzidos pelo grupo documentam um esforço na direção da efetivação da avaliação como prática de investigação no âmbito escolar. O grupo tem se utilizado de avaliações de rendimento, buscando resgatar o processo de produção dos resultados dessas avaliações de rendimento. Isso é feito com o objetivo de compreender como estudantes lidam com questões de Matemática em situação de avaliação.

Buriasco (1999), em seu primeiro estudo nessa perspectiva específica, analisou as respostas que alunos da 8a série do Ensino Fundamental deram à prova de Matemática do Programa de Avaliação do Sistema Educacional do Paraná, AVA, relativo a 1997, e as respostas dadas por 73 professores de matemática de 5a a 8a séries que participaram de uma Oficina, na qual foram analisadas as dificuldades da prova realizada pelos alunos, utilizando a estratégia de, inicialmente, resolver a mesma prova. Nesse estudo, a autora apresenta, como um critério na classificação das questões que compuseram a prova de matemática do Programa de Avaliação do Sistema Educacional do Paraná de 1995, a frequência da apresentação da questão em sala de aula, denominando de rotineiras as que são muito frequentes na sala de aula e no livro didático; de intermediárias as que aparecem com frequência média na sala de aula e no livro didático; e de não-rotineiras as questões "muito pouco ou quase nunca presentes na sala de aula ou no livro didático" (BURIASCO, 1999, p. 87).

O trabalho de Buriasco (1999) apontou a necessidade de novas pesquisas, pois as questões de múltipla escolha, também chamadas de fechadas, utilizadas em seu trabalho, se mostraram limitadas para fornecer informações a respeito da maneira com a qual os estudantes lidavam com o enunciado das questões de matemática e como eles as resolviam, ou seja, quais estratégias[2] e procedimentos[3] eram utilizados.

Como consequência, os trabalhos seguintes do GEPEMA se utilizaram de questões discursivas, também chamadas "abertas", a fim de poder apreciar a produção escrita dos estudantes. Os estudos de Nagy-Silva (2005), Segura (2005), Perego (2005), Alves (2006), Negrão de Lima (2006), Perego (2006), Dalto (2007) e Viola dos Santos (2007) analisaram a produção escrita dos estudantes e professores nas questões discursivas contidas na Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA/2002. As conclusões dessas pesquisas apontaram algo comum: muitos estudantes demonstravam conhecer os procedimentos matemáticos necessários para a resolução de um problema, mas os empregavam de maneira incorreta, o que foi indicado como "não conseguir interpretar corretamente o enunciado da questão"; reforçando a ideia de que os estudantes cometem muitos erros na resolução dos problemas devido à dificuldade de interpretação do enunciado da questão. Concluiu-se, mais fortemente, que não se pode "ter uma

---

[2] "Estratégia aqui entendida como o modo pelo qual se aborda um problema. Considerando, por exemplo, um problema que foi resolvido por meio de um sistema de equações do primeiro grau, utilizar sistema de equações de primeiro grau seria a estratégia escolhida para resolver o problema, ou seja, é o modo como se aborda o problema" (BURIASCO, 2009, p. 159).

[3] "Procedimento aqui entendido como o modo pelo qual se desenvolve a estratégia. Considerando, por exemplo, que um problema foi resolvido por meio de um sistema de equações do primeiro grau (estratégia utilizada para abordar o problema) e que esse sistema foi resolvido pelo método da substituição, este seria então o procedimento, ou seja, o modo como se desenvolveu a estratégia" (BURIASCO, 2009, p. 159).

olhar limitado, geralmente constituído pelas avaliações de rendimento, para inferir o que os alunos sabem ou não sabem." (VIOLA DOS SANTOS, BURIASCO, 2008, p. 88).

Até então os trabalhos do grupo vinham se utilizando de questões frequentemente encontradas em livros textos consideradas rotineiras (BURIASCO, 1999), nas quais o problema apresentado já carregava consigo um modelo de resolução-tipo. Apesar das conclusões obtidas pelo grupo, sentia-se a necessidade de um aprofundamento para se compreender por que os estudantes não conseguiam resolver determinados problemas se, aparentemente, dominavam os procedimentos matemáticos. O grupo considerou necessário obter mais informações a respeito da maneira como eles lidavam com o enunciado de questões não-rotineiras, por conseguinte iniciou um estudo envolvendo itens do PISA, que podem ser considerados não-rotineiros e já validados.

Assim, Santos (2008), Celeste (2008), Almeida (2009), Ferreira (2009), Bezerra (2010) e Lopez (2010) trabalharam com a produção escrita de estudantes e professores nas questões de matemática que fizeram parte de provas de aferição do PISA. Os resultados dessas pesquisas do grupo também apontaram uma dificuldade dos estudantes na interpretação dos enunciados das questões.

1.3 POR OUTRO LADO

Sabe-se, por meio dos órgãos de imprensa e pelos documentos oficiais disponíveis na página do INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais do Ministério da Educação ou no site da Organização para o Desenvolvimento Econômico dos Países (OCDE), que o Brasil vem obtendo os últimos lugares na classificação de desempenho nas aferições do PISA.

Chama a atenção o fato de o Brasil participar dessa avaliação e sempre obter os menores níveis de conhecimento em matemática. Incomodam as diversas matérias em órgãos da imprensa que tomam a nota do Brasil em Matemática nas aferições do PISA, como um indicador da qualidade do ensino e da aprendizagem escolar, respectivamente, de seus professores e estudantes. Por exemplo, um jornal de circulação nacional, noticiou, em 07/12/2004, que os estudantes brasileiros estão entre os que têm os menores níveis de conhecimento em matemática, segundo informações de uma pesquisa internacional realizada pela

Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE). A matéria não detalhou os procedimentos metodológicos empregados na coleta, nem as formas de análise dos dados, o que poderia permitir aos leitores conhecer as condições de participação do Brasil (como país convidado), e, a partir dessas informações, avaliar se haveria possibilidade de comparação dos resultados dos estudantes brasileiros com os dos estudantes de outros países participantes.

O que isso significa? Quem foram os estudantes que fizeram as provas e responderam aos questionários? É possível concluir que os estudantes brasileiros de 15 anos que fizeram a prova não sabem Matemática? Qual a relação entre o seu desempenho nessa prova e nas provas de matemática na escola? Os alunos que se saem bem nas avaliações da matemática escolar também se saem bem na avaliação do PIsA? A Matemática que embasa a concepção de letramento em matemática do PIsA é a mesma da disciplina de Matemática nos currículos escolares brasileiros?

A preocupação com o bem estar e desenvolvimento econômico de qualquer população remete, inevitavelmente, a uma apreensão relativa às questões educacionais, tanto que os países manifestam preocupação e criam normas, em geral, por meio de leis e outros documentos para a educação de sua população.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, n° 9.394 de 1996, em seu artigo primeiro, indica que a Educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais. O parágrafo primeiro da LDB lembra que a lei disciplina a educação escolar, e que esta se desenvolve, predominantemente, por meio do ensino, em instituições próprias. No segundo parágrafo afirma-se que a educação escolar deve vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social.

Quanto aos princípios e fins da Educação Nacional, afirma-se que ela é um dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tendo por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

Em texto explicativo a respeito da LDB, Colombo e Welter (2004, p. 28) indicam que o significado do desenvolvimento para a cidadania e preparo para o trabalho precisa ser compreendido na maior amplitude possível e que a palavra "trabalho" não pode ser meramente concebida como "emprego" ou "serviço", como uma atividade que as pessoas desenvolvem somente para garantir a sobrevivência. Esses autores indicam que o trabalho, acima de tudo, deve ser destinado ao desenvolvimento das potencialidades do ser humano, para proporcionar-lhe prazer, melhorar sua vida e a vida de toda a sociedade.

De acordo com D'Ambrosio (2008), educar é preparar para o futuro. Os governantes pensam que isso é instrumentalizar mão de obra para uma indústria que está se desenvolvendo, instruir para a cidadania de modo que o sujeito seja cumpridor de leis. Mas, se só pensarem desse jeito, nós não teremos muito futuro. Corremos o risco de formar uma geração, duas, três para viver como nós, e esse é um mundo inviável. Um engenheiro, um agricultor, o que vão fazer? Abrir mais terreno para plantar mais. E isso sabemos que tem impacto no meio ambiente. Você tem que produzir mais alimento, claro, mas não deve sacrificar uma fonte vital, como a água e as árvores. O que cabe a nós, educadores, engenheiros, cientistas? Encontrar alternativas.

Assim, educar compreende também preparar para o futuro. E, cabe ressaltar, seguindo o pensamento de D'Ambrosio (2008), preparar o indivíduo para ser feliz.

Brandão (1989) também afirma que educar deve ser preparar para o futuro, um futuro digno para a maioria, e que a educação pode existir livre e, entre todos, pode ser uma das maneiras que as pessoas criam para tornar comum, como saber, como ideia, como crença, aquilo que é comunitário como bem, como trabalho ou como vida.

A educação ajuda a pensar e criar determinados tipos de homens, passando de uns para os outros o saber que os constitui e legitima; constrói tipos de sociedades. Um tipo de educação leva a um determinado tipo de sociedade, e quem define a educação define a sociedade a ser construída. Por essa razão é preciso ter cuidado com a concepção da existência de uma educação para todos, caso ela não seja elaborada e almejada por todos.

Brandão (1989) chama a atenção para o fato de que a Educação pode ser diferente, em mundos diferentes, em grupos de sujeitos diferentes, em situações diferentes, sem que uma das educações seja de qualidade inferior à outra, sem que qualquer uma delas descumpra a função de educar. Uma Educação pode ser tão boa quanto consiga contemplar os objetivos visados de cada grupo de sujeitos entre os quais ela exista.

A Educação, no entanto, pode ser promulgada, defendida e camuflada sob o slogan de ser única para o bem comum de todos, mas ser, de fato, uma forma de servir a uma minoria dominante que a impõe a dominados. Ela pode existir imposta por um sistema centralizado de poder, que usa o saber e o controle sobre o saber como armas que reforçam a desigualdade entre os homens, na divisão dos bens, do trabalho, dos direitos e dos símbolos (BRANDÃO, 1989).

A premissa aqui colocada é que se permaneça atento ao significado do que sempre se diz e se crê da sua missão: transformar sujeitos e mundos em alguma coisa melhor; pois, como afirma Brandão (1989, p. 12), o "melhor" depende das imagens que se têm uns dos outros.

Nessa perspectiva, a educação escolar é apenas uma das educações possíveis, e este trabalho diz respeito a ela, no âmbito de matemática, considerando que, no domínio da matemática escolar, coexistem diversas.

D'Ambrosio (2005, p. 46) entende que a missão do educador matemático deva estar em sintonia com a missão de educador, o que vai além de ensinar a fazer contas ou resolver equações e problemas absolutamente artificiais, mesmo que, muitas vezes, tenha a aparência de estar se referindo a fatos reais.

Educação Matemática, neste estudo, é uma área do conhecimento que se preocupa em organizar, sistematizar e conferir caráter e respaldo científico a um "repensar" sobre os aspectos que envolvem o ensino e a aprendizagem da Matemática. Uma vez que somente a Matemática, por longos anos, não deu conta de resolver as problemáticas advindas dos seus processos de ensino e aprendizagem, foi buscar auxílio e respaldo e acabou por se expandir pelo viés de outros campos do conhecimento tais como a Psicologia, a Educação, a Matemática Aplicada, a Estatística, a Filosofia, a História, a Didática, a Sociologia, a Política, a Antropologia e a própria Matemática. Isso amplia a compreensão dos problemas que afligem o ensinar e o aprender Matemática, o que possibilita traçar linhas de ação para operacionalizar transformações.

O senso comum é de que o Brasil "não vai bem" em Matemática, mas de onde vem e em que se pauta essa opinião do senso comum e de comunidades científicas?

A partir de alguns artigos em revistas indexadas na área de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática, bem como de alguns anais de eventos das respectivas áreas que compartilham da ideia de que o ensino nessa área "não vai bem" no Brasil; também as notícias nos meios de comunicação chamam a atenção, de maneira mais direta e despojada, para o tema: o fracasso dos alunos brasileiros em matemática.

Os meios de comunicação populares mais difundidos em nosso país, na grande maioria das vezes, quando lançam um texto que aborda a qualidade do ensino ou da aprendizagem da Matemática acabam por concluir, ou já partem da premissa de que o ensino de Matemática "vai mal".

Em 05/12/2007, um jornal de circulação nacional faz referência a uma péssima posição do Brasil, 53a (entre 57 países) em Matemática e identifica essa posição do Brasil no ranking como uma representação do aprendizado em Matemática. Toma como certa e segura essa classificação que indica que 73% dos estudantes estariam situados no nível 1 ou abaixo dele, numa classificação do PIsA que inclui seis níveis, e que, com isso, os estudantes brasileiros seriam capazes apenas de responder questões com contextos familiares e perguntas definidas de forma clara.

Corre-se atrás de um culpado. Ora os alunos, ora os professores, ora os diretores, ora o governo. sabe-se que é preciso melhorar, mas não se sabe exatamente o que, nem como e nem qual a razão dessa opinião estar tão fortemente enraizada nos brasileiros. Por que se tem tanta certeza disso?

É preciso questionar e investigar até que ponto essas matérias e artigos que tanto denunciam que o ensino e a aprendizagem da Matemática não estão bons, e defendem uma melhora, estão imbuídos da ideologia da melhora no ensino da matemática. No artigo intitulado "A ideologia da melhora do ensino da matemática" proposto por Baldino (1992) no IV ENEM, há um alerta para a grande quantidade de trabalhos que se justificam somente pela necessidade de melhorar.

O discurso da melhora do ensino da Matemática dirige-se à legião dos que acham que tal necessidade é evidente. Tem por efeito reforçar-lhes a crença nessa evidência. Atendendo ao apelo desse discurso, as pessoas acorrem a participar das ações da melhora. Como nunca se diz para quem vai ficar melhor, essa ideologia, como qualquer outra, reforça a concepção religiosa de um bem comum, universal, irmanando as pessoas que se reconhecem adeptas da melhora (BALDINO, 1992, p. 73).

É necessário ir além, com questões do tipo: por que o ensino de matemática não está bom? Será que nunca esteve? Como será quando finalmente estiver bom? O silêncio sobre essas perguntas parecem ter por efeito naturalizar a expectativa de desempenho matemático que a sociedade mantém em relação a seus membros, fazendo com que essa expectativa pareça a-histórica. A ideologia da melhora pode então formular sua justificativa simplista: como os alunos não aprendem o que se espera que aprendam, eis que fracassam. Para que não fracassem, é preciso que aprendam mais, daí a necessidade de melhorar (BALDINO, 1992, p. 73).

O autor ainda coloca que a necessidade de melhorar mantém a expectativa de aprendizagem e, portanto, o fracasso. O fracasso e a ideologia da melhora nascem no mesmo movimento. Porém não se trata de melhorar o ensino para atender à expectativa, que não tem limites, nem de diminuir a expectativa para reduzir o fracasso. A problemática é outra: trata-se de mostrar como a ideologia da melhora garante a permanência do fracasso pela sustentação da expectativa de sucesso (BALDINO, 1992, p. 74).

A ideia é a de compreensão do mecanismo de constituição de relações de poder pela Matemática, pelo ensino da Matemática e pela própria Educação Matemática para que se possa elaborar e empreender ações de transformação, tanto da escola quanto da sociedade em que elas funcionam.

Ora, os que se colocam, ingênua ou marotamente, como só querendo melhorar o ensino da matemática, à medida que descartam a análise das relações de poder, tornam-se coniventes com a manutenção dessas mesmas relações e do quadro geral de fracasso que as sustenta. A melhora que propõem se inverte na melhora da eficiência do processo de exclusão pela Matemática na escola (BALDINO, 1992, p. 75).

Mais ainda, por que é preciso também se incomodar com um consenso que vem do senso comum? Não bastaria apenas responder pontualmente a cada artigo científico? Porque um consenso mesmo vindo do senso comum, constitui-se em verdade e, uma vez constituídas como verdades, tais relações passam a exercer seu poder. Constituem-se em conhecimentos (LINS; GIMENEZ, 1997). Ignorá-las ou partir de um outro ponto de vista não as destrói, elas permanecem confortavelmente povoando o imaginário dos sujeitos. E a suposta "melhora" se inverte na "melhora do processo de fracasso" e contribui com a sua legitimação.

A importância do trabalho está em iniciar uma busca para responder se de fato tal avaliação é significativa para indicar caminhos para o ensino e a aprendizagem da Matemática no Brasil. Essa busca se coloca quando o assunto é considerar ou não relevante o desempenho do Brasil no PISA.

Este trabalho visa discutir, esclarecer alguns pontos dessa temática e, além desta introdução, primeira parte, é composto por mais quatro partes. A segunda contém considerações iniciais a respeito da abordagem Educação Matemática Realística - EMR e da avaliação nessa abordagem; na terceira parte estão apresentados os procedimentos da pesquisa; a quarta contém os roteiros de intervenções constituídos pelas descrições representativas das produções e pelas propostas de duas sequências de aprendizagem. Na quinta parte estão as considerações finais a respeito do trabalho realizado.

2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

2.1 DA ABORDAGEM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

A abordagem Educação Matemática Realística - EMR[4], cuja concepção filosófica sustenta um conjunto de propostas de ensino de Matemática, veio como resultado de uma avaliação holandesa à reforma no ensino e aprendizagem da Matemática denominada Matemática Moderna. Essa avaliação gerou uma proposta crítica de ensino de Matemática na qual a Matemática Moderna foi caracterizada com a expressão Mechanistic Mathematics Education - MME (ZULKARDI, 1999). A raiz dessa proposta se localiza no projeto Wiskobas, iniciado por Wijdeveld e Goffree em 1968 (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 9) no então IOWO (Institute for Development of Mathematics Education), atual Instituto Freudenthal.

Para Treffers (1987) o cerne do chamado movimento EMR encontra-se no documento datado de 1962, mais precisamente um memorando intitulado The Mathematics Curriculum Of The High School assinado por 75 matemáticos de destaque na época, no periódico The Mathematics Teacher. Tal memorando se opunha à chamada "Modern Mathematics Education". Esse documento encontra-se disponível na página de Michel Delord[5] e nele os signatários afirmam que

> [...] a introdução prematura de abstrações encontra resistência especialmente de mentes críticas que, antes de aceitar uma abstração, desejam saber por que é pertinente e como poderia ser utilizada (tradução nossa).
>
> [...] a Matemática possui muitos aspectos. Pode ser considerada como um instrumento para entender o mundo que nos rodeia: a matemática possuía esse valor presumivelmente para Archimedes e Newton. A Matemática também pode ser considerada como um jogo com regras arbitrárias no qual a consideração principal é aderir às regras do jogo: um pouco de tal visão pode ser considerada satisfatória para certos problemas de fundamentos. Há vários outros aspectos de matemática e um matemático profissional pode favorecer qualquer um (tradução nossa).
>
> [...] saber matemática significa ser capaz de fazer matemática: usar linguagem matemática com alguma fluência, elaborar e resolver

4 Realistic Mathematics Education.
5 <http://michel.delord.free.fr/kline62.html>.

> problemas, criticar argumentos, encontrar provas, e, o que pode ser mais importante, reconhecer um conceito matemático em uma dada situação concreta ou extraí-lo dela (tradução nossa).

A origem da Educação Matemática Realística remete também a uma contraposição ao ponto de vista estruturalista da Matemática, que, para Freudenthal (1991, p. 135), está enraizado em uma perspectiva bastante comum de ensino, que coloca ênfase, entre outras, no domínio de um sistema de teorias matemáticas bem estruturadas. O sujeito é considerado mais instruído, quanto mais capaz for de repetir, tão mais fiel quanto possível, o "conteúdo" ensinado.

O artigo de Freudenthal "O que é axiomático e que valor educacional isso pode ter?", publicado em 1963, em Der Mathematikunterricht, pode ser considerado um dos primeiros documentos da EMR. De acordo com Wittmann (2005), o artigo apresenta uma convincente contestação à arquitetura da Matemática de Bourbaki como base para o seu ensino, enfatiza a atividade matemática como o elemento crucial da aprendizagem e descreve aprender como um processo que passa por diferentes estágios, cada um necessário para o seguinte.

O próprio Movimento da Matemática Moderna já viera em forma de contraproposta ao ensino até então vigente nas décadas de 50, baseado no modelo euclidiano e sob uma visão platônica como concepção de sistematização do conhecimento matemático. Na concepção platônica há um desligamento compulsório entre o produto do conhecimento e seu processo de produção, nada é inventado ou construído, as ideias matemáticas preexistem e são obtidas por descoberta, os objetos matemáticos já estão prontos, existem independentemente da percepção sensível, são ideais, sendo supratemporais e suscetíveis de uma definição precisa.

Segundo Fiorentini (1995), o modelo euclidiano caracteriza-se pela sistematização lógica do conhecimento matemático que se expressa por meio de teoremas e corolários deduzidos de axiomas, postulados e definições. Há ênfase na organização lógica do conhecimento matemático em detrimento de sua significação social e cultural ou de um tratamento pragmático. Nesse modelo, o desenvolvimento do "espírito", da "disciplina mental" e do pensamento lógico dedutivo são os objetivos principais do ensino da Matemática, há ênfase na forma (organização e sistematização), valorizando-se o produto em detrimento do processo de aprendizagem. O ensino é livresco, autoritário e centrado no professor, e, este

> [...] enfatiza a exposição, a imitação, a repetição e a memorização. Isso porque, [...] o desenvolvimento cognitivo é concebido como acúmulo progressivo de átomos de informação imprimidos de fora sobre uma mente inicialmente vazia (MIGUEL, 1995, p. 38).

O professor é transmissor e expositor do conteúdo, elemento de uma relação vertical, na qual lhe cabe conduzir os alunos aos objetivos que lhes são externos, imprimidos pela sociedade em que estão inseridos; por sua vez, o aluno é aquele que deve "copiar", "repetir", "reter" e "devolver" nas provas o "conhecimento" do mesmo modo que "recebeu" (FIORENTINI, 1995).

A dificuldade de aprendizagem da matemática, para Gravemeijer (2008), é frequentemente atribuída ao "vão" ou à "lacuna" existente entre o conhecimento pessoal dos estudantes e o conhecimento matemático abstrato formal que tem que ser adquirido. Na perspectiva da abordagem realística, no entanto, o problema não está simplesmente na construção de uma ponte sobre o tal vão, mas sim em que, para o estudante, não há o outro lado da ponte. Para esse autor, essa ideia da construção de uma "ponte" carrega consigo a crença na existência de um corpo objetivo de conhecimento. Dacordo com a EMR, o conhecimento é sempre construído por alguém, e não pode estar separado da construção individual, ou seja, para quem ainda não construiu um conhecimento matemático formal abstrato, ele simplesmente não existe.

Gravemeijer (2008) ainda afirma que a ideia do conhecimento como um corpo independente a ser comunicado aos estudantes pode ser encontrada não apenas em professores e autores de livros textos, mas também é encontrada em estudantes que as deixam transparecer na manifestação de suas concepções a respeito da Matemática e, do ensinar e de aprender Matemática.

Alguns autores como Freudenthal (1973) e Treffers (1987) defendem que não é uma boa estratégia iniciar os estudos de um assunto da Matemática já em seu nível mais formal e que o processo de aprendizagem deve se basear em processos de descoberta e construção da Matemática. Particularmente, Freudenthal (1973, p. 109) nomeia um processo de re-invenção guiada, no qual o aluno seria chamado e guiado a percorrer um caminho de experiências mentais que o conduziriam ao que se espera que ele aprenda. Os guias desse caminho seriam os próprios passos originais na descoberta, ou construção do conceito, ao contrário de seguir os passos do que Freudenthal chamou de inversão didática. A inversão didática seria a forma de apresentar os conteúdos na qual o resultado mais importante aparece no início do livro, ou do assunto a ser tratado, invertendo a ordem de quando foi criado. Um exemplo disso é o conceito de derivada que aparece nos livros-textos de cálculo antes que o conceito de integral. Freudenthal (1973, p. 5) afirma que o seu próprio livro é um contraexemplo de inversão didática, uma vez que, geralmente, o prefácio de um livro é feito depois que o livro foi escrito, o que não ocorreu com o seu, pois o prefácio data de 1970 e o livro de 1973.

Para Freudenthal (1991), aos aprendizes deveria ser permitido encontrar o seu próprio nível e explorar os caminhos que conduzem a isto, talvez com um pequeno guia que cada caso particular requer, até porque a aprendizagem por reinvenção pode ser motivadora, e fomenta a atitude da experiência matemática como uma atividade humana. Ainda para esse autor, os aprendizes reinventam a sequência de números conscientemente, e esta atividade (reinvenção) pode ser estendida até mesmo às operações aritméticas. Considera que, com alguma ajuda/orientação, o aluno pode ser capaz de reinventar tantas matemáticas quanto necessárias para sua vida cotidiana.

Por um lado, Freudenthal (1991) toma a EMR como uma filosofia da Educação Matemática e também como uma forma de ensino; De Lange (1987) a concebe como uma metodologia para ensinar matemática; Van den Heuvel-Panhuizen (1996) refere-se à EMR como uma nova abordagem para a Educação Matemática na Holanda. Por outro lado, Zulkardi (1999, p. 13, tradução nossa) vai mais longe e afirma que a

> Educação Matemática Realística é uma teoria na Educação Matemática que foi desenvolvida originalmente nos Países Baixos. Ela enfatiza a ideia de que a matemática é uma atividade humana e que deve ser conectada à realidade, real para o aprendiz utilizar o contexto mundo real como uma fonte de desenvolvimento de conceitos e como uma área de aplicação, por meio do processo de matematização tanto horizontal quanto vertical.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) considera que as primeiras ideias da EMR foram dadas por Freudenthal no período compreendido entre 1968 e 1977. De acordo com ele, a Matemática, para ser de "valor humano", tem que estar conectada à realidade, permanecer próxima às crianças e ser relevante à sociedade. Em vez de ver a Matemática como algo a ser transmitido, Freudenthal enfatizou a ideia da matemática como uma atividade humana. Para ele, a Educação deveria fornecer aos estudantes uma oportunidade "guiada" para "reinventar" matemática fazendo-a. No ensino e aprendizagem de Matemática, o foco não deveria estar na Matemática como um sistema fechado, mas na atividade, no processo que esse autor denominou de matematização. (FREDENTHAL, 1968 *apud* VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1998, p. 2-3).

> O que os humanos têm que aprender não é matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade - o processo de matematizar a realidade e, se possível, até mesmo o de matematizar a matemática (FREUDENTHAL, 1968, p. 7, tradução nossa).

De acordo com Treffers (1987), a EMR orbita um espaço tridimensional, tendo como base três "vetores", ou parâmetros: a teoria dos níveis de Van Hiele[6], a Fenomenologia Didática[7] de Freudenthal, e a Matematização Progressiva8 guiada pelos seguintes princípios: a Fenomenologia Didática[8] de Freudenthal, e a Matematização Progressiva guiada pelos seguintes princípios:

1. a utilização de contextos;

---

[6] Os chamados níveis de Van Hiele estão alicerçados num estudo desenvolvido nos anos 1950 pelo casal de professores holandeses, Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele. Eles buscavam entender porque os alunos, de um modo geral, tinham tantas dificuldades em aprender Geometria. Eles se puseram a investigar como o raciocínio geométrico dos alunos evoluía (teoria dos níveis de raciocínio). Estudavam também, uma forma de o professor ajudar seus alunos, a fim de aperfeiçoar a qualidade desse raciocínio (teoria das fases de aprendizagem). Segundo a perspectiva do modelo de Van Hiele a compreensão em geometria se dá segundo uma sequência de cinco níveis de raciocínio hierárquicos e sequenciais (visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor), que não estão associados à idade, ou seja, somente a uma maturação ontogenética, mas que é produto da ação educativa. A escolha das situações escolares poderia servir tanto como catalisadora do processo, quanto como agente limitadora do seu desenvolvimento, e em alguns casos, poderia até impedir o aluno de atingir níveis mais elevados do processo.

[7] A fenomenologia didática (Freudenthal, 1983) se encarrega de buscar e investigar situações (fenômenos) que possam ser organizadas pelos objetos matemáticos que, se supõe, que os alunos devem construir. Para esse autor, algo é considerado um fenômeno quando podemos ter experiência com ele, considerando também como fenômeno os próprios meios de organização da matemática (estratégias, conceitos, notações), desde que tomados como objetos de experiência (PUIG, 1997, p. 63-64). Assim, o objetivo de uma investigação fenomenológica é encontrar situações problemáticas a partir das quais se possa generalizar enfoques específicos e encontrar situações que possam evocar procedimentos paradigmáticos de solução como base para a matematização vertical. Para Gravemeijer e Terwel (2000), encontrando fenômenos que possam ser matematizados, pode-se buscar compreender como foram "inventados" (BRESSAN, A. Representaciones y modelos en la Matemática Realista. Disponível em: <http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/representaciones_ymodelos.pdf>. Acesso em 13/08/2010.

[8] Na qual o aluno, muitas vezes, entrando em conflito com sua própria produção, na busca de organizar, estruturar, relacionar, justificar seu conhecimento, elabora "novo" conhecimento e valida os seus argumentos.

2. a utilização de modelos re-invenção guiada; a utilização da própria produção e construção dos estudantes; a interação entre os estudantes;
5. o entrelaçamento de vários conteúdos; que, mais adiante, estão brevemente descritos.

A utilização de contextos é também chamada exploração fenomenológica de contextos (TREFFERS, 1987, p. 255). Segundo ele, os problemas de contexto e as situações da vida real são utilizados para formar, modelar e aplicar os conceitos matemáticos. Primeiro, os estudantes desenvolvem estratégias intimamente conectadas ao contexto - matematização horizontal. Posteriormente, certos aspectos da situação de contexto podem se tornar mais gerais, o que significa que o contexto pode induzir às características de um modelo, e este pode dar suporte à resolução de outros problemas. Eventualmente, os modelos dão aos estudantes acesso ao conhecimento matemático mais formal - matematização vertical (ZULKARDI, 2002). O ponto de partida deve ser a utilização de alguma experiência "real" dos estudantes de modo a permitir que eles se engajem imediatamente na situação. Isso significa que o ensino não deve se iniciar com a matemática já sistematizada. O fenômeno a partir do qual um conceito pode ser elaborado deve ser a fonte da formação conceitual. O processo apropriado de extração do conceito a partir de uma situação é estabelecido por De Lange (1987) como "matematização conceitual". Esse processo força os estudantes a explorar a situação, encontrar e identificar a matemática envolvida e os esquemas relevantes, visualizar regularidades e desenvolver um "modelo" resultando num conceito matemático.

Segundo Treffers (1987), a instrumentalização vertical a partir de uma situação-problema , pode ocorrer por meio de instrumentos "verticais" tais como a utilização de modelos, esquemas, diagramas, símbolos, objetivando a matematização progressiva[9]. Na EMR é esperado que os estudantes desenvolvam modelos[10] na resolução de problemas. Por um processo de generalização e formalização, o modelo eventualmente torna-se uma entidade por ela mesma, e, com isso, um "modelo de" algo se torna um "modelo para" outro propósito.

---

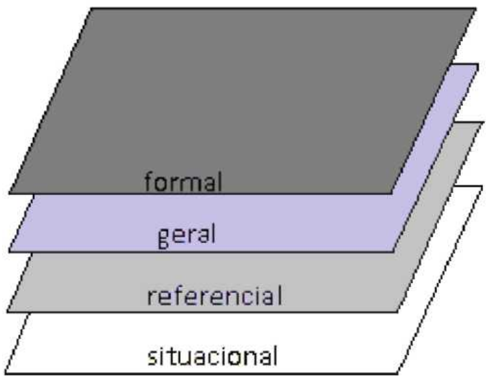
[9] Na qual o aluno na busca de organizar, estruturar, relacionar, justificar, a sua própria produção, entra em conflito com ela e elabora "novo" conhecimento e valida os seus argumentos.
[10] Para Zulkardi (1999), modelo é um esquema, uma representação de uma situação familiar ao estudante.

De acordo com Treffers (1987), a EMR orbita um espaço tridimensional, tendo como base três "vetores", ou parâmetros: a teoria dos níveis de Van Hiele6,

A partir de então, o papel do modelo começa a mudar. Enquanto os alunos recolhem mais experiência com problemas semelhantes, a sua atenção pode transferir-se para as relações e estratégias matemáticas. Como consequência, o modelo recebe um caráter mais de objeto, e torna-se mais importante como uma base para o raciocínio matemático do que como uma forma de representar um problema contextualizado. Dessa forma, o modelo começa a tornar-se uma base referencial para o nível da matemática formal. Ou, resumidamente: um modelo de atividade matemática informal desenvolve-se em um modelo para um raciocínio matemático mais formal (GRAVEMEIJER, 2007, p. 11, tradução nossa).

Esse autor distingue ainda dois tipos de atividade: a que chamou de atividade referencial (modelo de), na qual modelos e estratégias se referem à situação descrita, do contexto do problema, e a atividade geral (modelo para), na qual o foco matemático das estratégias se sobrepõe à referência ao contexto e, de certa forma, deriva das relações matemáticas presentes e, com isso, os modelos servem para representar outras situações. Anteriormente ele especificara quatro níveis das atividades, como ilustra a figura a seguir.

Figura 1 – Níveis de Gravemeijer.



Fonte: Gravemeijer (2007, p. 14).

- ✓ situacional: no qual o domínio específico, conhecimento e estratégias são utilizados unicamente dentro do contexto da situação;

- ✓ referencial (modelo de): no qual modelos e estratégias se referem à situação descrita no problema, são os "modelos de";
- ✓ geral (modelo para): no qual o foco matemático das estratégias se sobrepõe à referência ao contexto, com isso, os modelos servem para representar outras situações, são os "modelos para";
- ✓ formal: no qual se trabalha com procedimentos e notações já convencionais.

Os estudantes, ao invés de serem meros receptores da matemática pronta e acabada, devem ser considerados agentes do processo de ensino e aprendizagem e, como tal, utilizam sua própria produção e construção. Como a matemática é uma atividade humana, os alunos devem ser estimulados a usar as suas próprias estratégias no processo denominado de "re-invenção guiada", uma vez que diferentes estratégias, por vezes, refletindo diferentes níveis, podem ser provocadas e utilizadas de forma produtiva no processo de aprendizagem.

De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (2000, p. 9), na EMR a aprendizagem é considerada como uma atividade social, e a educação deveria oferecer aos estudantes oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções entre si (interação entre os estudantes). Ao escutar e discutir suas descobertas, eles podem ter ideias de como melhorar suas próprias estratégias e avançar no nível de entendimento.

A Matemática não deve ser dividida em tópicos de conteúdos. Ao invés disso, o entrelaçamento de vários conteúdos deve ser explorado, por exemplo, um problema pode exigir, na sua resolução, álgebra e geometria. Uma das razões é que é muito difícil aplicar a matemática se os assuntos são ensinados separadamente e desligados uns dos outros. Essas ideias são apresentadas e defendidas em Van den Heuvel-Panhuizen (2000), Zulkardi (2002), De Lange (1996) e Gravemeijer (1994).

Van den Heuvel-Panhuizen (1998, p. 34) considera que, posteriormente a essas características, os currículos e o ensino por tópicos de unidades evoluíram para um conjunto de princípios que formam um quadro para uma teoria de ensino, que norteia o processo de matematização progressiva. Essa autora acrescenta mais um aos cinco princípios inicialmente formulados, denominado por ela de princípio da orientação[11]. Ao descrever esse sexto princípio, lembra que, para Freudenthal (1991) um princípio fundamental da Educação Matemática é que se deve dar aos estudantes uma "orientação" que oportunize que a matemática seja "re-inventada", uma vez que, para Freudenthal (1983), os conceitos, estruturas e ideias matemáticas se constituem como ferramenta para organizar os fenômenos do mundo físico, social e mental. Por conseguinte, na EMR, professores conduzem o processo de ensino e aprendizagem, mas não mostram o que os estudantes têm que aprender, pois isto cabe aos próprios estudantes. Para isso, eles precisam de um ambiente de aprendizagem no qual os professores devem ser capazes de prever onde e como podem antecipar as compreensões e habilidades que estão por vir, e os programas educacionais devem conter cenários com potencial para alavancar mudanças de compreensão nos estudantes.

Na perspectiva da EMR, a dinâmica nas aulas de matemática é tal que

- os alunos devem ser confrontados com situações-problemas das quais participem ativamente na busca da sua resolução, e, para isso, a utilização de estratégias informais deve ser incentivada, uma vez que, para Freudenthal (1991), a melhor maneira de aprender é fazendo.
- os alunos começam por analisar contextos ricos que possam ser matematizados, de modo que eles sejam preparados para usar a Matemática na formulação e resolução de problemas, assim ela lhes poderá ser útil de fato, no lidar com a realidade.
- a reflexão sobre as atividades desenvolvidas é uma constante, pois pode permitir a passagem para um nível seguinte de compreensão.
- os conteúdos não são apresentados em capítulos estanques, uma vez que, para resolver problemas em contextos ricos, vários conhecimentos e ferramentas matemáticas podem ser necessários.
- pressupõe atividade social - partilha e reflexão. Cada aluno segue seu próprio trajeto de aprendizagem, mas lhe é dada a

[11] Guidance principle

oportunidade de partilhar suas estratégias e descobertas com outros; mas, ainda assim, as crianças continuam a ser consideradas como indivíduos, e, por conseguinte, é feita a adaptação a cada um (proposta de problemas cujas resoluções podem ser de diferentes níveis).

- é dada aos estudantes a oportunidade de "reinventar" a Matemática. Para isso, os professores têm um papel crucial porque ajudam a proporcionar cenários com potencial para que os alunos trabalhem e alcancem níveis mais elevados de compreensão da matemática.

Assim, as ideias de Freudenthal de matemática como uma "atividade humana" e de educação matemática como "reinvenção guiada" constituem o ponto de partida para o desenvolvimento das aulas de matemática.

Na abordagem mecanicista, os problemas de contexto, na maioria das vezes, quando são utilizados, aparecem ao final das unidades de conteúdo, Com isso, os problemas funcionam somente como um campo de aplicação, e na sua resolução os estudantes podem aplicar somente o que foi ensinado anteriormente, em situações que Freudenthal (1991) considera não apropriadas, simplórias e isoladas. Nelas, as atividades dos estudantes são baseadas na memorização e aplicação de um procedimento ou de um algoritmo. Essa visão tem raízes no ensino da geometria, a partir do qual se acreditava que se deve ensinar o domínio de um sistema de teorias matemáticas bem estruturadas, e dar ênfase na dedução rigorosa para a verdade (FREUDENTHAL, 1991, p. 135). Nas aulas dadas nessa perspectiva, os estudantes quase não sistematizam nem racionalizam suas experiências de aprendizagem no sentido de ir além das próprias experiências, ou das circunstâncias delas, e "expandir" a realidade com o que aprenderam, ou seja, não se tornam capazes de ampliar essa situação para a obtenção de uma fórmula ou um modelo. É a denominada educação utilitária e assemelha-se ao quadro de uma sociedade estratificada em camadas que correspondem a realidades distintas.

No ensino "realístico", a aprendizagem se dá por meio de tarefas que provêm da realidade[12], isto é, a partir da expansão do mundo-vida que, numa

[12] O mundo é a realidade (FREUDENTHAL, 1991), na qual o homem pode adquirir experiências úteis.

primeira instância, requer uma matematização horizontal (FREUDENTHAL, 1991). Esse autor considera que os conceitos, estruturas e ideias matemáticas foram inventadas como ferramentas para organizar os fenômenos do mundo físico, social e mental. Ainda para Freudenthal (1991), os fenômenos organizados por um conceito são tão variados que se constituem de fato em objetos mentais[13] diferentes, dependendo do campo escolhido para explorar seu ensino, ou em vários objetos mentais, se se exploram vários tipos de fenômenos. Para a aquisição de um conceito, é preciso então integrar esses diferentes objetos mentais em um único objeto, e, para uma fenomenologia didática, é preciso conhecer o processo de ensino e de aprendizagem.

Freudenthal (1983, introdução) também aponta que conceitos

> são a espinha dorsal de nossas estruturas cognitivas. Mas em assuntos cotidianos, conceitos não são considerados como um conteúdo de ensino. Embora as crianças aprendam o que é uma cadeira, o que é comida, o que é saúde, a elas não são ensinados os conceitos de cadeira, de comida, de saúde. Na Matemática não é diferente. Crianças aprendem o que é número, o que é círculo, o que é somar, o que é plotar um gráfico. Elas os tomam como objetos mentais e os executam como atividades mentais (tradução nossa).

To imagine em holandês significa "zich REALISEren", indicando o que pode ser real na sua mente, daí a expressão realistic. Apesar dessa explicação, a EMR, muitas vezes, é conhecida como "educação matemática do mundo-real" e isso não condiz com o que inicialmente se desejava, pois a reforma proposta não era apenas uma conexão com o mundo real, mas sim uma busca de proporcionar aos estudantes situações-problema que pudessem ser imagináveis por eles. O contexto do problema pode ser um contexto do mundo real, mas não é necessário que seja. O mundo da fantasia, do faz de conta e até o mundo da Matemática formal podem servir de contextos para um problema, na medida em que possam ser imagináveis, "realísticos", reais nas mentes dos estudantes. Assim, até mesmo o mundo formal da matemática pode ser um contexto muito adequado para um problema, contanto que eles sejam "reais" nas mentes dos estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1998, p. 3).

---

[13] O que Freudenthal chama de objeto mental é o que permite dizer, por exemplo, que um certo alimento é mais doce do que outro, pois relativamente contém mais açúcar, e esse relativamente se refere a um critério de comparação que pode ser implícito ou explícito.

Freudenthal escolheu tomar a Matemática do ponto de vista de uma atividade humana, uma atividade que envolve resolução de problemas, busca por problemas e temas para matematização. Na sua visão, a atividade principal dos matemáticos é a matematização. O estágio final dessa atividade é o que chamamos de Matemática. "Matematização é uma atividade de organização e estruturação pela qual conhecimentos são adquiridos e competências são utilizadas para descobrir regularidades, relações e estruturas desconhecidas" (DE LANGE, 1987, p. 43) (tradução nossa). Nessa perspectiva, matematização é um processo que se inicia na realidade e que continua enquanto essa mesma realidade está se modificando, de forma a ir além dela, num movimento de ampliar-se e aprofundar-se sob uma variedade de influências, incluindo a da própria matemática.

A matematização diz respeito a um sujeito aprendente, aquele que está a reinventar uma matemática. A ideia da matematização vem para combater a inversão antididática, uma ideia de ensino já difundida, na qual os estudantes são confrontados com uma matemática pronta e acabada. "Esta ideia estaria embasada na falsa concepção de que os resultados do pensamento matemático, situados em uma estrutura principal, poderiam ser transferidos diretamente aos estudantes" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 11).

Freudenthal (1991, p. 41, tradução nossa) explica a formulação de Treffers, apresentada em sua tese de 1978, de uma distinção entre

> matematização horizontal, a que torna um problema um campo acessível para tratamento matemático (matemático no estrito sentido formal) versus matematização vertical, a que efetiva um processo matemático mais ou menos sofisticado.

Para Treffers (1987), na matematização horizontal os alunos utilizam recursos que lhes permitem organizar e resolver um problema existente numa dada situação da vida real, e, na matematização vertical, os alunos desenvolvem um processo de reorganização, dentro do sistema matemático em si. Por exemplo, encontrar e utilizar conexões entre conceitos, estratégias de resolução. Por conseguinte, na sala de aula, a matematização familiariza os alunos com a abordagem matemática que pode ser utilizada nas situações do dia-a-dia, possibilita o processo de reinvenção matemática (os alunos experienciam um processo semelhante ao desenvolvido pelos matemáticos, uma vez que ela é tomada como a principal atividade dos matemáticos).

Figura 2 – Matematização

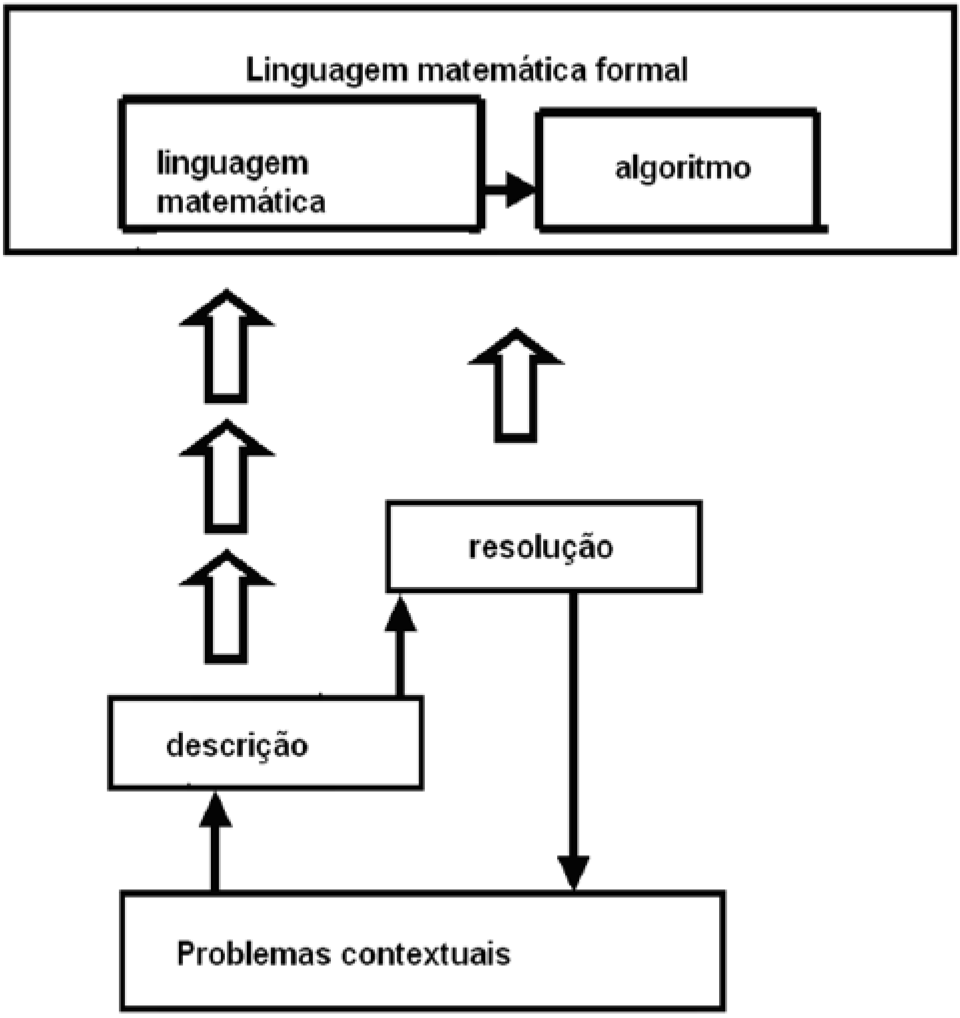
Fonte: De Lange (1987).

A abordagem da Educação Matemática Realística visa ajudar os estudantes a construir ou (re)inventar Matemática e é tomada como a abordagem da reinvenção porque, segundo Gravemeijer (2008, p. 283), o ponto geral de partida da EMR deve ser oferecer aos estudantes a oportunidade de reinventar a Matemática, o que está de acordo com a opinião de Freudenthal.

Trabalhar com a reinvenção significa conseguir um equilíbrio, ainda que sutil, entre a liberdade para inventar e a intenção de guiar, de modo que o aprendiz inventará algo que é novo para ele, mas conhecido para o guia/orientador. Segundo Freudenthal (1991), a resposta à pergunta: "para onde o aprendiz-reinventor deve ser orientado?", deveria ser - para a matematização e seus vários aspectos; e para a pergunta "o que se espera que o aprendiz matematize?" deveria ser - a realidade do próprio aprendiz colocada pelo seu orientador. Nesse sentido, toma-se realidade como algo imaginável, realizável na mente do aprendiz.

Para Gravemeijer (1994), o modelo de reinvenção guiada é o que segue.

Figura 3 – Modelo de Re-invenção Guiada



Fonte: Gravemeijer (1994).

Para a utilização desse modelo, os contextos precisam ser considerados reais para os alunos, de modo que estes possam imaginá-los (zich REALISEren).

Segundo van den Heuvel-Panhuizen (1993), a matematização é a principal característica da EMR, que tem como foco o crescimento, o progresso dos estudantes no conhecimento e compreensão da Matemática. Ainda segundo ele modelos se originam a partir de situações contextuais que funcionam como estados de passagem (pontes) para um nível superior de compreensão de como lidar com uma regra. Assim, um "modelo de" por meio do qual os alunos modelam a sua atividade matemática informal pode ser desenvolvido e transformado em um "modelo para" um raciocínio matemático mais formal (GRAVEMEIJER, 2004). Esse processo foi chamado de modelação emergente (modelo de — modelo para).

Na perspectiva do ensino, para Freudenthal (1991, p. 34), o que se espera dos processos de matematização não são modelos como sistemas axiomáticos ou estruturas cognitivas, mas sim como resultado da modelização, uma vez que, para esse autor, um modelo é apenas um intermediário, muitas vezes indispensável, por meio do qual uma realidade (ou uma teoria) é idealizada ou simplificada para torná-la suscetível de um tratamento matemático formal. Os modelos, por conseguinte, são tomados como representações das situações (esboços visuais, situações paradigmáticas, esquemas, diagramas) nas quais se refletem aspectos essenciais dos conceitos e relações matemáticas que são relevantes para solucioná-las, ou, ainda, são o resultado de organizar uma situação, por parte do sujeito, no qual se mantém a relação constitutiva entre modelo e situação (GRAVEMEIJER, 2002).

Nas aulas de matemática, na perspectiva da EMR, é desejável que os alunos desenvolvam seus próprios modelos, em um processo de "baixo para cima" (bottom-up), mesmo que inspirados em estratégias informais. Para que isso aconteça, uma exigência é que a criação de um modelo deveria ser uma necessidade e, desse modo, a situação ou problema deve incluir planejar e executar passos na busca de solução, elaborar explicações, identificar semelhanças e diferenças, fazer previsões.

Duas características dos modelos na EMR são exigidas:

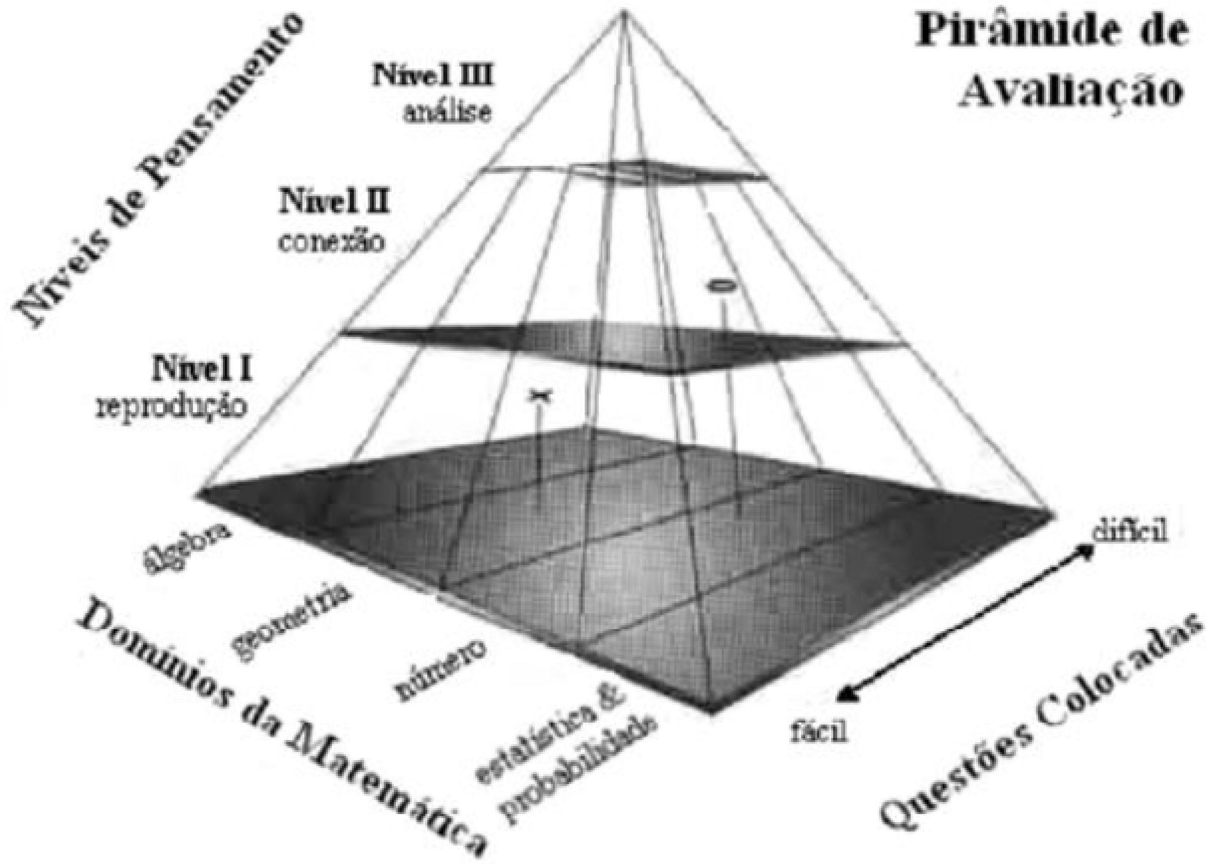
- estarem enraizados em contextos realísticos, imagináveis;
- ter suficiente flexibilidade para serem aplicados em um nível mais avançado ou mais geral.

Isso porque o modelo deve apoiar o processo de matematização de modo a permitir que os alunos sempre possam voltar aos níveis anteriores de compreensão, por meio do que podem reencontrar as origens de modelos mais abstratos. Além disso, devem ser viáveis já que na EMR os estudantes são participantes ativos do processo de ensino e de aprendizagem, eles devem poder reinventar esses modelos por si mesmos. Para que isso aconteça, os modelos devem ajustar-se às estratégias informais dos alunos - como se eles pudessem têlos inventado - e devem ser facilmente adaptados a outras situações (TREFFERS; GOFFRE, 1985; TREFFERS, 1987; GRAVEMEIJER, 1994).

A abordagem realística se utiliza de procedimentos na resolução problemas a partir de experiências anteriores e da investigação de formas práticas de encontrar uma solução. Em EMR, isso é conhecido como re-invenção guiada.

De Lange (1999) apresenta os níveis de compreensão na forma de uma pirâmide (Figura 3) configurada por três dimensões.

Figura 4 – Pirâmide de Avaliação proposta por De Lange



Fonte: Lopez (2010, p. 33).

A pirâmide contempla os níveis de compreensão matemática dos alunos, levando em conta os "níveis de pensamento", "grau de complexidade" e "domínios de conteúdo" (DE LANGE, 1999). Os níveis de pensamento dizem respeito aos processos matemáticos aplicados pelos estudantes para resolverem problemas e formam três agrupamentos - reprodução, conexões e reflexão.

O agrupamento "reprodução" abrange competências relativamente familiares aos estudantes, para as quais são necessárias, essencialmente, a reprodução de conhecimento já praticado e a utilização de procedimentos rotineiros.

"Conexões" envolve as competências descritas no agrupamento anterior, exigidas na resolução de problemas com contextos familiares ou quase familiares aos estudantes, mas que, para resolvê-los, são necessários mais do que simples procedimentos de rotina e a integração entre mais de um procedimento. Nesse agrupamento, faz-se necessário integração, ampliação ou conexão entre várias ideias estruturadoras, ou de diferentes linhas curriculares de matemática ou, ainda, de diferentes representações.

O agrupamento "reflexão" envolve, além das competências descritas nos outros dois agrupamentos, a capacidade de refletir e planejar estratégias para resolver problemas poucos familiares, ou não-rotineiros. Esse agrupamento contempla o raciocínio avançado, a argumentação, a abstração, a generalização, a modelagem aplicada a contextos novos.

De Lange (1999, p. 2) ainda afirma que, como a avaliação educacional deve refletir o que acontece na sala de aula, essas categorias podem ser usadas também na avaliação dos estudantes. Essa pirâmide também é apresentada por Van den Heuvel-Panhuizen (1996) como sendo uma alternativa para um aprimoramento das avaliações escritas.

2.2 Da Avaliação na Educação Matemática Realística

Assumimos neste trabalho que a avaliação em matemática se constitui como parte integrante e constitutiva da prática educativa.

Apesar de pesquisas realizadas, no âmbito da Educação Matemática, (ABRANTES, 1995; CURY, 1994; BURIASCO, 1999) apontarem perspectivas para objetivos, funções e instrumentos de avaliação, essa tarefa se apresenta como uma "pedra no caminho" de professores e alunos. Também a orientação presente em documentos norteadores da prática pedagógica, como por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), indicam que a avaliação realizada na sala de aula deve ser entendida como um processo único e contínuo que se inicia no primeiro dia de aula e só termina no último, uma vez que visa auxiliar os processos e progressos da aprendizagem do aluno e do professor ocorridos durante todo o ano letivo. No entanto, a avaliação escolar praticada ainda hoje num grande número de escolas parece estar mais voltada ao cumprimento de normas burocráticas, classificação, ou punição dos alunos (GIMENEZ, 1997; SACRISTÁN, 1998; BURIASCO, 1999, 2000; ESTEBAN, 2001; SANTOS, 2003; NAGY-SILVA, 2005; PEREGO, 2006; ALVES, 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; VIOLA DOS SANTOS, 2007). Ou seja, a mudança do discurso sobre as perspectivas de avaliação presente nos documentos curriculares ou teóricos não tem sido suficiente para provocar uma efetiva mudança na prática avaliativa.

De acordo com Esteban (2002, p. 17), há uma

> necessidade de reconstrução do processo de avaliação como parte de um movimento articulado pelo compromisso com o desenvolvimento de uma prática pedagógica comprometida com a inclusão, com a pluralidade, com respeito às diferenças, com construções coletivas.

A avaliação como prática de investigação é uma alternativa para a reconstrução desse processo que tem o "sentido de romper as barreiras entre os participantes do processo ensino/aprendizagem e entre os conhecimentos presentes no contexto escolar" (ESTEBAN, 2002, p. 24); de interpretar e comunicar aos alunos e professores seus múltiplos conhecimentos e suas maneiras idiossincráticas de lidar com as situações escolares. Assim, segundo Buriasco e Soares (2008, p. 110), "a avaliação da aprendizagem matemática deve ser vista como um processo de investigação, uma atividade compartilhada por professores e alunos, de caráter sistemático, dinâmico e contínuo".

Por meio da análise da produção escrita de alunos, os professores podem sair de uma cultura do "certo/errado", intimamente ligada à exclusão e à competição, para uma cultura da multiplicidade das maneiras de lidar com os conhecimentos, que está ligada à solidariedade e à cooperação, pois, por meio dessa prática, eles podem buscar conhecer os alunos em sua complexidade e heterogeneidade, respeitando suas vivências e idiossincrasias, na perspectiva de ampliar os modos de produzir significados em detrimento de legitimar e substituir um determinado modo em relação a outro. Segundo Buriasco e Soares (2008, p. 111), ao incentivar o professor a registrar, comparar e analisar a produção de seus alunos, no dia a dia da sala de aula, tem-se como perspectiva valorizar o diálogo sobre as investigações que tanto ele quanto seus alunos fazem a respeito do conhecimento matemático, durante o processo de aprender e ensinar matemática na escola.

Por conseguinte, além da análise da produção escrita se apresentar como uma estratégia para implementação da avaliação como prática de investigação, ela se mostra como um caminho para conhecer múltiplos aspectos da atividade matemática dos alunos e, também, como uma possibilidade para capacitar o professor e reorientar sua prática pedagógica.

Segundo Smith, Hillen e Heffernan (2001), a análise da produção escrita dos alunos pode ser utilizada para ajudar os professores a terem um entendimento dos modos como os estudantes estão pensando e representando a matemática. Esses autores assinalam que,

> se os professores forem capazes de interpretar e entender os modos que os estudantes pensam e representam a matemática, eles podem utilizar estratégias de ensino sobre esses entendimentos, como também, ajudar os alunos a fazer conexões entre suas representações idiossincráticas e aquelas mais convencionais (SMITH; HILLEN; HEFFERNAN, 2001, p. 65, nossa tradução).

Segundo essas autoras, a análise da produção escrita pode servir como um mediador para aprendizagens dos professores e, mais que um conhecimento detalhado sobre a atividade matemática dos alunos, possibilita um desenvolvimento da identidade profissional dos professores.

Outro aspecto da atividade matemática dos alunos, propício de ser investigado por meio da produção escrita, é o papel do contexto das tarefas de avaliação no desempenho dos alunos. Como uma tarefa elaborada em contexto estritamente matemático, ou em um fantasioso, ou em um da vida 'prática' dos alunos; ou em um com uma roupagem dessa vida 'prática', pode influenciar o desempenho dos alunos? Em que medida os contextos dessas tarefas oportunizam acessibilidade para os alunos interpretarem o enunciado, elaborarem estratégias, utilizarem procedimentos e apresentarem uma resposta? Essas questões norteiam trabalhos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005; D'AMBROSIO et al., 2004; KASTBERG et al. 2005; VIOLA DOS SANTOS, 2007; SANTOS 2008; CELESTE, 2008) que tratam dessa temática relacionada à avaliação como prática de investigação e à atividade matemática dos alunos.

A preocupação com os contextos dos problemas no ensino e na aprendizagem de Matemática é uma preocupação que já aparece em Freudenthal (1991) e permeia grande parte de sua obra. Ele defende que o contexto dos problemas não só pode exercer uma influência direta na resolução, como também na aprendizagem de Matemática. Classifica os contextos dos problemas em matematicamente ricos ou pobres, considera que os contextos devem possibilitar situações matematizáveis aos estudantes, para que possam aprender Matemática, pois a Matemática surge da matematização da realidade. Dessa forma, um contexto é tanto mais rico quanto mais possibilidades de matematização ele propicia ao estudante que se depara com ele. Contextos são definidos como domínios da realidade, revelada do ponto de vista do estudante, e organizáveis pela matematização.

Os trabalhos de Kastberg et al. (2005) e de D'Ambrosio et al. (2004) indicam que os contextos podem representar um papel intermediário, no sentido de privilegiar um domínio de conhecimentos (Matemática, História, Geografia) em relação a outro, ou de estabelecer relações entre eles. As autoras desse trabalho, analisando alguns itens considerados contextualmente ricos, apontam que, em alguns casos, os alunos privilegiam o domínio de conhecimento matemático em relação ao de história em uma questão que envolve esses dois domínios. Em outros casos, eles negociam algumas construções de diferentes domínios do conhecimento, e nesses casos, há evidências de tentativas de integração entre os domínios. Isso pode indicar que o contexto do problema que envolve diferentes áreas de conhecimento parece exercer influências e entraves nos processos de resolução dos alunos.

A avaliação é uma das práticas educativas presentes na sala de aula e, apesar de não ser possível pensar em mudanças na educação sem pensar em mudanças na avaliação, não podemos nos esquecer, como colocam Buriasco e Soares (2008, p. 113), de que

> [...] mudança efetiva na avaliação em sala de aula representa mudança na concepção do processo de ensino e aprendizagem, do papel do professor e do aluno, de como o professor lida com conteúdos que ensina, de como compreende a maneira como os alunos lidam com esses mesmos conteúdos entre outras mudanças.

A consideração de que a matemática também deve ser útil para pessoas comuns na vida diária acarretou colocar mais ênfase na relação entre a matemática e o mundo cotidiano, mundo real ou mundo que nos cerca, e essa é uma tendência que aparece em propostas curriculares com frequência.

Na perspectiva da EMR, a Matemática ensinada na escola deve ser derivada e aplicada à realidade que nos rodeia. Sendo assim, as situações realísticas são, portanto, utilizadas como fonte e como área de aplicação da educação matemática. Nessa mesma perspectiva, o objetivo principal da avaliação é contribuir com o processo de aprendizagem, favorecendo, por exemplo, a superação de dificuldades desse mesmo processo. Por meio dela, o professor busca informações, pistas, indícios a respeito dos estudantes e de seus processos de aprendizagem a fim de que esses dados orientem as tomadas de decisões educacionais particulares (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Desse modo, a avaliação é utilizada para regular e guiar o processo de aprendizagem.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p. 27) considera que a avaliação de caráter formativo é uma forma desejável de avaliação na EMR e menciona que Freudenthal, em 1976, já era fortemente a favor dessa forma de avaliação que pode ser favorecida, por exemplo, por meio da utilização de problemas adequados; análise da produção escrita dos estudantes; fornecimento de feedbacks aos estudantes, professores e demais envolvidos no processo de ensino e aprendizagem; da condução de discussões com os estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 27).

Essa mesma autora afirma que a avaliação mais adequada para a EMR pode ser descrita como "avaliação didática", ou seja, o propósito, o conteúdo, os métodos aplicados e os instrumentos de avaliação utilizados são de natureza didática. Afirma também que o conteúdo da avaliação deve ser abrangente: amplo, no sentido de que deve cobrir todas as habilidades, e profundo, que cobre todos os níveis de compreensão.

Freudenthal (1973) e Van den Heuvel-Panhuizen (1996) sugerem de que forma isso pode ser realizado, inclusive esta última constrói sua tese de doutorado, Assesment and Realistic Mathematics Education, sobre esse assunto. Também De Lange (1999) se dedica à questão da avaliação do ponto de vista da EMR. Neste trabalho, são esses os três autores que embasam a perspectiva de avaliação adotada.

Freudenthal (1973, p. 83), salienta a importância da avaliação no ensino da Matemática. Para ele, o professor deveria ser capaz de checar a influência dos processos de ensino e de aprendizagem por meio da avaliação escolar para obter informações a respeito desses processos. Isto ajudaria nas decisões educacionais, sendo esse o principal objetivo da avaliação escolar. De Lange (1999) compartilha dessa opinião. A avaliação não deve ter como objetivo primeiro certificar, selecionar ou classificar os alunos, mas fornecer informações para que os professores melhorem suas práticas de ensino e os alunos aprendam matemática a fim de tornarem-se matematicamente letrados. De maneira geral, a avaliação deve fornecer informações para professores e alunos de modo a poderem reorientar suas práticas.

Para Freudenthal (1973, p. 83), o estudante tem o direito de saber se ele realmente aprendeu alguma coisa, ou se ele é capaz de aprender o que lhe é exigido. Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p. 85) também considera que a avaliação deve fornecer feedbacks aos estudantes sobre os seus processos de aprendizagem. Isso também é defendido por De Lange (1999, p. 10) como sendo o oitavo princípio para avaliação escolar: os alunos deveriam receber feedbacks genuínos de seus trabalhos.

Ainda segundo Freudenthal (1973, p. 84), observar um estudante durante sua atividade matemática é mais informativo do que atribuir notas aos seus trabalhos escritos. Para esse autor, há o risco de o programa curricular se adequar ao ensino apenas para que os alunos se saiam bem nos exames, quando se coloca muita importância num trabalho pontual para a atribuição de uma nota.

Na avaliação, tal como recomendado para a aprendizagem do ponto de vista da EMR, os estudantes podem passar por vários níveis de matematização, apoiados na utilização de contextos e modelos, o que favorece o desenvolvimento de sua própria matemática.

Com base em pesquisas realizadas, em mais de vinte anos de estudos da EMR, foram elaborados princípios para a avaliação escolar com o objetivo de possibilitar o letramento[14] matemático dos alunos. Esses princípios apresentados por De Lange (1999) refletem as características da avaliação na EMR

[14] Letramento em matemática tomado como "a capacidade do indivíduo de identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer avaliações bem fundamentadas e de utilizar a matemática e envolver-se com ela de forma que atendam suas necessidades de vida enquanto cidadão construtivo, engajado e reflexivo" (OCDE, 2004a, p. 24).

e são apontados por Van den Heuvel-Panhuizen (1996) como sendo uma representação de sua natureza didática e, nela, do papel crucial atribuído aos problemas. Foram, inicialmente, cinco os princípios subjacentes à idéia de avaliação descritos por De Lange (1987):

- a finalidade primeira e principal da avaliação é implementar a aprendizagem e o ensino;
- os métodos de avaliação devem ser tais que permitam ao aluno demonstrar mais o que sabe do que o que ele não sabe;
- a avaliação deve operacionalizar todas as metas da educação matemática. Isso significa que todos os níveis de competências devem ser avaliados e não só as de nível mais baixo. Daí a necessidade de diferentes instrumentos de avaliação;
- a qualidade das tarefas de avaliação não é determinada pela sua acessibilidade ao objetivo de pontuação, ou seja, pela frequência de acerto;
- os instrumentos de avaliação devem ser práticos.

De acordo com esses princípios, a avaliação não deve ser feita apenas para cumprir as exigências burocráticas da escola, para informar os pais sobre o desempenho bimestral de seus filhos, para rotular os alunos em bons ou maus. A avaliação deve fornecer informações para professores e alunos de modo a poderem reorientar suas práticas, assim todos os elementos constituintes da avaliação devem ser pensados e formulados a fim de possibilitarem a aprendizagem de matemática, desde os instrumentos utilizados, os critérios de correção e classificação adotados até a comunicação das informações.

Na perspectiva da EMR, é desejável que os estudantes tenham um papel ativo na construção de seu conhecimento matemático e que, dessa maneira, aprendam a "fazer matemática" como uma realização, ou seja, matemática como um processo, uma ação, uma maneira de proceder, não como uma ciência estática, pronta e acabada. Matemática como o "realizar" e não como o resultado. Acredita-se que é por meio da matematização de problemas que a aprendizagem matemática melhor acontece e, fazendo isso, o aluno pode mostrar o que sabe. Parece, portanto, que a tarefa de avaliação mais apropriada é aquela que contempla problemas interessantes que possibilitem uma matematização por parte do aluno. Quando o problema pode ser respondido em diferentes níveis de compreensão e oferece oportunidade para os alunos construírem suas próprias respostas, tanto os que já dominaram o conteúdo em um nível desejado quanto os que ainda estão nesse processo podem se envolver com o problema e tentar resolvê-lo. Dessa maneira, além de possibilitar que mais alunos se envolvam com o problema e reduzir o "tudo ou nada" da avaliação, dá-se mais oportunidade para os alunos demonstrarem seu poder matemático e, assim, fornecer mais informações úteis para o processo, tornando-o mais justo.

De Lange (1999) destaca a importância das discussões e da observação como fontes de informação para o processo de ensino e aprendizagem e afirma que observações sistemáticas dos estudantes fazendo matemática, de como eles trabalham buscando elaborar suas próprias respostas são indicadores mais autênticos das suas habilidades matemáticas do que testes compilados pela totalização do número de respostas corretas.

As discussões em sala de aula proporcionam um ambiente no qual os alunos são estimulados a organizar, mostrar e defender suas produções, ideias e argumentos, tanto para o professor, quanto para os outros colegas, e assim podem ser consideradas, também, como fonte importante para a coleta de informações sobre o poder matemático dos alunos. Além disso, esse tipo de interação em sala de aula possibilita a exploração de diferentes estratégias para abordar as tarefas, diferentes resoluções e respostas para um mesmo problema, contribuindo para a visão da matemática como atividade humana. Na EMR, observações dos professores relativas às ações dos alunos podem ser tomadas como prática de avaliação informal quando fornecem informações sobre o processo que vão além de simples percepções comportamentais e focam a compreensão, as estratégias e os insights dos alunos durante a realização das tarefas. Como as observações acontecem enquanto os alunos estão envolvidos nas tarefas, as informações obtidas por meio delas podem gerar intervenções imediatas e mais eficazes para ajudar os alunos nos seus processos de aprendizagem.

Uma ideia comum na avaliação escolar tradicional é a de que algumas questões devem ser quase inacessíveis aos alunos com o intuito de assegurar a sua "eficácia". Contudo a eficácia da avaliação diz respeito a fornecer informações confiáveis sobre o processo e quanto mais informações os alunos tiverem sobre como são avaliados, melhor poderão mostrar o que sabem de maneira possível de ser identificada. Na perspectiva proposta pela EMR, toma-se como certo que os alunos aprendem melhor com um processo de avaliação transparente e aberto, no qual alunos e professores discutem e negociam um contrato de avaliação. Nessa perspectiva, foram elaborados o sexto e o sétimo princípio da avaliação escolar, que dizem, respectivamente, que "critérios de classificação deveriam ser públicos e aplicados consistentemente; deveriam incluir exemplos de classificações anteriores, mostrando trabalhos exemplares e trabalhos não tão exemplares" e "o processo de avaliação, incluindo pontuação e classificação, deveria ser aberto aos estudantes" (DE LANGE, 1999, p. 11, tradução nossa). Por meio de um contrato de avaliação, o professor pode explicar suas intenções e objetivos para os alunos, apresentar a maneira como costuma pontuar as suas produções, o que considera importante, o que não merece tanta atenção, ou seja, pode deixar claro como avalia o progresso dos alunos.

Uma maneira apontada por Van den Heuvel-Panhuizen (1996) para ajudar os alunos na sua aprendizagem é dar a eles feedbacks sobre seu processo de aprendizagem, e essa ideia vai ao encontro do oitavo princípio para avaliação escolar apresentado em De Lange (1999), que diz que "estudantes deveriam ter oportunidade de receber feedbacks genuínos em seus trabalhos" (p. 10, tradução nossa). Segundo o dicionário eletrônico Houaiss, feedback pode ser entendido como "informação que o emissor obtém da reação do receptor à sua mensagem e que serve para avaliar os resultados da transmissão" (FEEDBACK, 2002). Considerando a avaliação um processo de comunicação, o aluno (emissor), ao realizar uma tarefa, emite uma mensagem ao professor (receptor), esperando por um parecer sobre sua produção. O professor, ao analisar a mensagem, tece suas considerações sobre a tarefa a fim de possibilitar ao aluno retomá-la. A qualidade dessa mensagem de retorno pode ter um peso fundamental nas próximas ações dos alunos (BARLOW, 2006). Para De Lange (1999), sem o apropriado feedback, o papel da avaliação como contribuinte do processo de aprendizagem fica ameaçado. Um aluno que realiza uma prova e recebe como feedback de sua produção, por exemplo, apenas um número 6, não recebe informações suficientes e necessárias para que possa entender a qualidade da sua produção, nem meios para que possa retomá-la. Com o "6", ele recebe apenas a informação que a lacuna entre sua produção e a produção ideal é de medida "4", ou seja, que ainda lhe falta "4" para aprender. Mas, no que essa informação contribui para o seu processo de aprendizagem? Qual o real significado do "6" e do "4"? Como o "6" indica o que ele, o aluno, deve fazer para chegar ao tão desejado "10"? Perguntas similares valem para o professor. Feedbacks adequados são aqueles que trazem informações fidedignas sobre o processo de ensino e aprendizagem, informações baseadas nas diferenças tangíveis entre o que o aluno mostra e o que se espera dele, na busca de contribuir para as próximas ações. Consequentemente, eles trazem mais informações sobre o que os alunos mostram saber do que sobre o que ainda não sabem, e são essas informações que o professor utiliza para reorientar o processo. Podemos considerar que o feedback relativo à lacuna entre o que é e o que deveria ser contribui para o processo de ensino e aprendizagem apenas quando essa comparação (entre o que foi apresentado e a referência) é utilizada para modificar essa lacuna (DE LANGE, 1999). Uma nota em uma prova é uma informação codificada (DE LANGE, 1999) que só fará sentido para os alunos se estes conseguirem decodificá-la e interpretá-la com base nos critérios de codificação que o professor de fato utilizou, e, por isso, esses critérios precisam estar acessíveis e claros para os alunos. Barlow (2006) afirma que o problema não reside na utilização de notas na avaliação, mas na maneira como ela tem sido realizada. Muitas vezes, a nota atribuída pelo professor e a nota recebida pelo aluno é interpretada de maneira diferente, pois ou os critérios do professor não estão bem definidos, ou eles não são acessíveis aos alunos. Com isso, pelo menos parte da informação se perde e a comunicação que deveria acontecer não acontece.

De acordo com o nono princípio para avaliação escolar (DE LANGE, 1999), a qualidade da tarefa, daquilo que foi proposto para o aluno fazer, pode ser definida pela autenticidade e equidade, na medida em que satisfaz os outros oito princípios para a avaliação. Mais importante que a "precisão matemática" de uma nota, ou a garantia de que um problema será interpretado da mesma maneira em diferentes momentos, são as inferências sobre a possibilidade de as tarefas propiciarem oportunidades para todos os alunos se envolverem com os problemas e mostrarem sua compreensão e poder matemático, bem como de possibilitarem maneiras de os professores conhecerem essa compreensão e poder matemático para que possam reorientar suas práticas e auxiliar os alunos nos seus processos de aprendizagem.

A preocupação com a utilização de bons problemas de matemática é uma característica marcante da EMR. Segundo De Lange (1994), problemas gerados por situações realísticas podem ser classificados como de baixo, médio e alto nível de exigência e devem ser utilizados tanto em situação de aprendizagem quanto de avaliação.

Quadro 1 – Classificação dos problemas por De Lange

NÍVEL	O Problema requer
1	Representações, procedimentos, conceitos e definições.
2	Conexões e integração para resolver problemas.
3	Matematização, pensamento e raciocínio matemático, percepção, generalização.

Fonte: De Lange (1994).

O primeiro nível, o nível mais baixo, diz respeito ao conhecimento dos objetos, definições, competências técnicas e algoritmos-padrão. O fato de um problema ser do nível mais baixo não significa que é mais fácil do que um dos outros dois níveis. Um problema é considerado de nível mais baixo não porque seja mais fácil, mas porque pode ser resolvido usando habilidades rotineiras, familiares ou até mesmo por memorização.

O segundo nível, nível médio, pode ser caracterizado por exigir relacionar dois ou mais conceitos ou procedimentos, fazer conexões. Problemas que permitem diferentes estratégias ou abordagens para sua resolução também pertencem a este nível. Os problemas desse nível exigem leitura cuidadosa e decisão sobre qual estratégia utilizar.

O terceiro nível, alto nível, tem a ver com questões complexas como o pensamento e raciocínio matemático, a comunicação, a atitude crítica, a criatividade, a interpretação, a reflexão, a generalização e a matematização. As construções dos próprios alunos são os principais componentes deste nível.

Boas provas escritas podem conter questões dos dois primeiros níveis, no entanto, para avaliar o nível mais elevado, diferentes instrumentos, como, por exemplo, tarefas de investigação, desenvolvimento de projetos podem ser necessários.

Segundo De Lange (1999), os princípios para a avaliação escolar foram elaborados com o objetivo de habilitar indivíduos para lidarem com a matemática envolvida nos problemas do mundo real e, ainda, afirma que é essencial ao letramento em matemática a habilidade de matematizar um problema. Com essas afirmações, podemos perceber que os problemas recebem um lugar de destaque na EMR e que "resolver problemas" parece ser o tipo mais adequado de tarefa para que esses objetivos possam ser alcançados.

3 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

O estudo foi realizado por meio de uma pesquisa predominantemente qualitativa, de cunho interpretativo, à luz de orientações presentes na análise de conteúdo (BARDIN, 2004). Com vistas a dar continuidade ao trabalho, já desenvolvido no interior do GEPEMA, foram tomados dois itens contidos em prova do PISA que já haviam sido utilizados nas dissertações de mestrado de Ferreira (2009), Santos (2008) e Celeste (2008).

De acordo com documento da OECD (2003), os dois itens pertencem à área de conteúdo denominada Incerteza que abrange os fenômenos e as relações probabilísticos, estatísticos e as suas representações. Mais especificamente, diante de um problema classificado na Ideia Abrangente ou Área de Conteúdo Incerteza, os estudantes devem ser capazes de interpretar textos, inclusive em contextos não familiares (científicos), mas explícitos; demonstrar percepção, sensibilidade, insight ou capacidade de discernir no âmbito de aspectos ou dados de tabelas e gráficos; traduzir descrições textuais para cálculos de probabilidade adequados; identificar e selecionar dados de vários gráficos estatísticos e executar cálculos básicos; demonstrar compreensão de definições e conceitos estatísticos básicos (probabilidade, valor esperado, aleatório, média); utilizar conhecimentos básicos de probabilidade para resolver problemas; conceber uma explicação matemática básica de um conceito quantitativo verbal proveniente da vida real (um enorme aumento); usar argumentação matemática baseada em dados; usar raciocínio numérico; executar cálculos que impliquem vários passos, bem como as operações aritméticas básicas, e o trabalho com percentagens e extrair informação de uma tabela e comunicar um argumento simples com base nessa informação (GAVE, 2003).

Os dois itens elencados e comuns aos três trabalhos de pesquisa são apresentados a seguir com suas especificidades.

Quadro 2 – Classificação do Item Prova de Ciências

<table>
<tr><th colspan="3">1ª questão – PROVA DE CIÊNCIAS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Na escola de Marli, o professor de ciências aplica provas que valem 100 pontos. Marli obteve uma média de 60 pontos nas primeiras quatro provas de ciências. Na quinta prova, ela conseguiu 80 pontos. Qual é a média de Marli em ciências após as cinco provas?</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Classificação contida em documentos do PISA</td><td>Ideia Abrangente ou Área de conteúdo</td><td>Incerteza</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td>Número</td></tr>
<tr><td>Situação</td><td>Educacional</td></tr>
<tr><td>Agrupamento de Competência</td><td>Reprodução</td></tr>
<tr><td>Tipo de Item</td><td>Resposta de Construção Curta</td></tr>
<tr><td colspan="3">A resolução da questão evoca o conceito de Média Aritmética, e o tratamento de tal conceito está previsto nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná, faz parte dos Conteúdos Estruturantes Números e Álgebra. Estatística. Tratamento de Informação.</td></tr>
</table>

Fonte: autora.

De acordo com documento da OECD (2009), na correção deste item somente obtiveram crédito completo apenas as respostas iguais a 64, outras respostas não obtiveram crédito algum.

Quadro 3 – Classificação do Item Lixo

<table>
<tr><td colspan="3">2ª questão - LIXO - M505Q1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Para uma atividade escolar sobre o meio ambiente, os alunos coletaram informações sobre o tempo de decomposição de vários tipos de lixo que as pessoas jogam fora:
<table>
<tr><td>Tipo de lixo</td><td>Tempo de decomposição</td></tr>
<tr><td>Casca de banana</td><td>1 a 3 anos</td></tr>
<tr><td>Casca de laranja</td><td>1 a 3 anos</td></tr>
<tr><td>Caixas de papelão</td><td>0,5 ano</td></tr>
<tr><td>Goma de mascar</td><td>20 a 25 anos</td></tr>
<tr><td>Jornais</td><td>Alguns dias</td></tr>
<tr><td>Copos de plástico</td><td>Mais de 100 anos</td></tr>
</table>
Um aluno pretende mostrar os resultados em um gráfico de barras. Dê uma justificativa para o fato de que o gráfico de barras não é o mais apropriado para apresentar esses dados.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Classificação contida em documentos do PISA</td><td>Ideia Abrangente ou Área de conteúdo</td><td>Incerteza</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td>Estatística</td></tr>
<tr><td>Situação / contexto</td><td>Científica</td></tr>
<tr><td>Agrupamento de Competência</td><td>Reflexão</td></tr>
<tr><td>Tipo de Item</td><td>Construção Aberta</td></tr>
<tr><td colspan="3">O conteúdo de matemática (média aritmética) presente na resolução do item envolve o conhecimento de intervalos de tempo e a relação entre eles; tabela de duas colunas e gráfico de barras está presente nas Diretrizes Curriculares da Secretaria de Estado da Educação do Paraná para o nível do Ensino Fundamental em Grandezas e Medidas Tratamento de informação.</td></tr>
</table>

Fonte: autora.

De acordo com o documento OECD (2009), o objetivo deste item foi testar se os estudantes eram capazes de raciocinar corretamente a respeito de como representar números (dados) de forma adequada, e testar suas habilidades para comunicar isso de maneira efetiva.

Receberiam crédito completo os estudantes que argumentassem embasados na grande diferença de grandeza (magnitude) dos números envolvidos, na grande variação dos dados ou na dificuldade para a sua exibição. Seguem abaixo exemplos de justificativas da correção que, se apresentadas, teriam crédito completo pelo documento da OECD (2009, p. 82).

1a) Com a justificativa baseada na grande variação dos dados, como, por exemplo:

- *As diferenças de comprimento entre as barras do gráfico seriam muito grandes.*
- *Se a barra que representa as "vasilhas de plástico" medisse, por exemplo, 10 centímetros, a barra das caixas não mediria mais do que 0,005 centímetros.*

2a) Com a justificativa baseada na variabilidade dos dados para determinadas categorias, como por exemplo:

- *O comprimento da barra correspondente às "vasilhas de plástico" não está determinado.*
- *Não se pode representar uma barra para 1 a 3 anos, ou uma barra para 20 a 25 anos.*

De acordo ainda com o manual de correção receberiam nenhum crédito as outras respostas com justificativas tais como:

- *Porque não funcionaria.*
- *Um pictograma é melhor.*
- *É impossível confirmar a informação.*
- *Por que os números indicados na tabela são apenas informações* (GAVE, 2004, p. 74).

As diferentes caracterizações das questões, segundo os documentos do PISA, Butts (1997), De Lange (1996; 1999) são apresentadas no quadro a seguir.

Quadro 4 – Comparação e Classificação dos Itens

Item	Competência	Classificação dos problemas de acordo com os tipos estabelecidos por BUTTS (1997)	Classificação dos problemas de acordo com os tipos estabelecidos por DE LANGE (1999)
Prova de ciências	Reprodução Nível 3	Aplicação	Nível I
Lixo	Reflexão Nível 3	Problema de pesquisa aberta	Nível III

Fonte: Autora.

De acordo com OCDE (2005), as competências do agrupamento Reprodução envolvem basicamente a reprodução de conhecimentos, aplicação de algoritmos, manipulação de expressões contendo símbolos e fórmulas; as do agrupamento Reflexão são necessárias em situações que demandam reflexão por parte do estudante e exigem que ele generalize e explique seus resultados.

Para Butts (1997), problemas de aplicação são os que precisam da mudança da linguagem escrita com palavras para uma linguagem matemática adequada de modo que se possam utilizar os algoritmos apropriados, e problemas de pesquisa aberta são os que não contêm no seu enunciado pista alguma para sua resolução.

De Lange (1996; 1999) caracteriza como sendo do nível 1 o problema que demanda, para sua resolução, o conhecimento de fatos, definições e procedimentos rotineiros memorizados e praticados em sala de aula, e do nível 3 o que requer do aluno alguma reflexão acerca do processo de resolução, uma atitude crítica à resposta dada. Esse tipo de problema requer, por exemplo, que os alunos sejam capazes de criticar um "modelo matemático" e "remodelar" se for necessário, além de usar um "modelo matemático" para organizar uma situação "real".

Para este trabalho foram consideradas todas as produções escritas nas resoluções das duas questões de

- 17 estudantes do Ensino Fundamental, participantes do estudo de Celeste (2008);

- 22 estudantes do Ensino Médio participantes do estudo de Santos (2008);
- 37 professores participantes do estudo de Ferreira (2009).

A referência a cada produção escrita se faz por meio de uma sigla identificadora de cada uma das provas (76); que foi atribuída a partir das já apresentadas nas dissertações, conforme segue.

Em Ferreira (2009), as siglas identificadoras das provas dos participantes são compostas pela letra E ou P que representam, respectivamente, os estudantes do curso de Especialização, e os participantes do projeto de extensão denominado Pró-Matemática na Formação do Professor. A esta letra seguem-se três dígitos que substituem os nomes dos participantes. Por exemplo, a sigla E047 representa a prova do estudante 047 do curso de Especialização, e P023 é o participante 023 do projeto de extensão Pró-Matemática na Formação do Professor.

As siglas identificadoras das provas dos participantes do trabalho de Celeste (2008, p. 33) são compostas pela letra E, seguida de três números, os quais identificam os estudantes participantes, seguidos de mais uma letra (A, B, C ou D) que identifica a turma do estudante. Por exemplo, a sigla E178A representa a prova do estudante 178 da turma A.

Em Santos (2008, p. 35), as siglas identificadoras das provas dos estudantes participantes são compostas pela letra E, de estudantes, seguida de dois números, indicando a 1a ou 2a série, respectivamente, seguidos de mais uma letra, a qual identifica a turma. Por exemplo, a sigla E011A representa a prova do estudante 01, da 1a série, da turma A.

Às siglas mencionadas foram acrescidas uma letra maiúscula:

- F para o trabalho de Ferreira (2009);
- S para o trabalho de Santos (2008);
- C para o trabalho de Celeste (2008). Por exemplo, CE047A está representando a prova E047A, do trabalho de Celeste (2008).

Devido às propostas dos trabalhos caracterizarem-se como um instrumento para efetivação de uma avaliação da aprendizagem, as produções dos alunos não foram codificadas apenas como certas ou erradas, e, foram agrupadas e codificadas em blocos representativos da compreensão do resolvedor, chamados de agrupamentos. A razão para isso é levar em consideração cada compreensão demonstrada pelos estudantes, a partir de suas interpretações particulares para o enunciado da questão e a relação estabelecida entre o contexto do enunciado com a matemática. A partir dos registros, parte-se em busca do que eles já sabem a fim de guiá-los em algo mais a saber.

Para a sistematização, foram tomadas as produções semelhantes, identificadas a partir das descrições presentes nas três investigações focadas e referidas anteriormente.

Após a apresentação do enunciado de cada questão, seguem as descrições das produções escritas presentes nas provas dos participantes das dissertações e a classificação de cada questão. Aconteceu de descrições aparentemente distintas estarem se referindo a um tipo único de produção escrita. Essas produções semelhantes, identificadas a partir das descrições, foram agrupadas e representadas por uma única descrição, a partir do conjunto de descrições presentes nas dissertações como a que melhor representasse cada produção.

Muitas vezes, descrições em dissertações diferentes não coincidiram em sua aparência, então foi realizada uma interpretação para a uniformização dessas aparências em um único agrupamento, quando se tratavam de produções semelhantes.

A cada produção escrita foi atribuído um código, por meio das "classes" de descrições. A codificação foi realizada com base no Manual para Correção das Provas com Questões Abertas de Matemática AVA/2002 (BURIASCO; CYRINO; SOARES, 2003) e nos códigos de correção do PISA 2003. A atribuição de códigos se fez apenas para organizar tipos de produções presentes nas resoluções de cada questão e serão representantes de unidades de significado identificadas nas produções que envolvem a forma com a qual o estudante expressa sua maneira de lidar (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO, 2008) com o enunciado, por conseguinte, não terão o intuito de classificar, de maneira hierárquica, as produções em termos de mais corretas ou menos corretas.

Não foram utilizados códigos de correção com "crédito completo", "parcialmente completo" e "nenhum crédito" para leitura das produções escritas porque se busca, a todo custo, algo que "não represente uma dicotomia, não uma avaliação pela falta, mas sim pelo que eles sabem, e, assim, propiciar algumas reflexões para as práticas diárias de professores(as) e alunos(as)" (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO, 2008, p. 88).

De acordo com a terceira perspectiva de uma avaliação autêntica (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), procedimentos isolados, soltos, mesmo que resolvidos corretamente com algoritmos, serão classificados como "nenhum crédito", pois matematizar não diz respeito ao ser capaz de desempenhar as competências separadas e distintas, mas sobre ser capaz de utilizar adequadamente as ferramentas matemáticas e aplicar conhecimentos em situações.

Após a sistematização das descrições e o agrupamento, em cada questão, segue uma proposta de intervenção a partir das unidades destacadas nas produções escritas.

A partir das produções escritas encontradas nos trabalhos de Celeste (2008), Santos (2008) e Ferreira (2009), aqui analisados, a ideia é gerar intervenções para a sala de aula com a intenção de apresentar uma proposta de ensino.

A proposta de intervenção contemplou aspectos considerados relevantes na Educação Matemática Realística, tais como o aspecto de favorecer a Matematização. Para isso, as tarefas que a constituem precisam ser compreensíveis aos estudantes e "contextualizáveis", ou seja, elas devem ser de tal forma que o estudante seja capaz de imaginar a situação ou o contexto do enunciado proposto. Como um dos objetivos da avaliação escolar é compreender os processos de aprendizagem do estudante, os problemas devem ser flexíveis e informativos. Assim, torna-se possível uma exploração investigativa da produção escrita do estudante, a qual vai regular o processo de ensino e o de aprendizagem ao fornecer-lhes um feedback orientado.

A partir de agrupamentos que buscaram identificar maneiras de interpretar os enunciados e de resolver os problemas, as intervenções foram indicadas seguindo o princípio da reinvenção guiada de Freudenthal (1991).

4 ROTEIRO DE INTERVENÇÕES

Este Roteiro visa apresentar uma proposta de intervenção a ser desenvolvida em sala de aula, orientada pelos princípios da Educação Matemática Realística, a partir da análise da produção escrita de estudantes em situação de avaliação de aprendizagem.

Para esta proposta, toma-se como base de dados, descrições de produções escritas, análises e conclusões que geraram três dissertações que fazem parte da produção do GEPEMA. Trata-se de mais um esforço do referido grupo para apontar maneiras de se operacionalizar, em sala de aula, a avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação, reguladora do processo de ensino e de aprendizagem, que se justifica na medida em que contribui com a aprendizagem em curso, subsidiando tomadas de decisão. Uma avaliação da aprendizagem deve comunicar, de maneira contínua, ao professor, aos estudantes e até ao sistema educativo, em que condições, de que maneira e que aprendizagem está ocorrendo.

Assim, tanto professores quanto alunos podem se valer de informações a respeito do processo de ensino e de aprendizagem que lhes sejam relevantes, e refletir sobre elas com o objetivo de compreender modos de pensar e caminhos utilizados na resolução de um problema. Isso significa assumir a avaliação como prática de investigação.

> Entendendo a avaliação da aprendizagem escolar como prática que busca respostas sobre como se dão os processos envolvidos com ela, interroga-se o que é diretamente observável, percorrem-se caminhos, buscam-se compreender esses mesmos processos, seguem-se vestígios e, com isso, infere-se sobre o que não é diretamente observável, ou seja - investiga-se (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009, p. 69).

Para a aprendizagem, é desejável que os construtos dessa prática de investigação não permaneçam apenas como informação, mas que, por meio da reflexão, retornem à prática de sala de aula efetivando-se em intervenções de ensino para a aprendizagem, por que

> [...] é necessário passarmos de uma preocupação centrada no produto (que se pretendia medir, pesar...) para uma preocupação

> centrada no processo de produção, para conhecê-lo e melhorá-lo, e, finalmente, sobre os produtores (professores, alunos, escola, sistema) para ajudá-los. (BURIASCO, 1999, p. 218).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, editados em 1998, já consideravam que os instrumentos de avaliação deveriam fornecer ao professor informações sobre as competências de cada aluno (BRASIL, 1998). Também pode-se observar na Lei 9394/96 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), capítulo II, artigo 24, inciso V, item a, a intenção da prática de uma "avaliação contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais [...]", remetendo à avaliação a função de subsidiar e redirecionar as estratégias para aprendizagem.

Visando a efetivação desse tipo de avaliação da aprendizagem, como prática de investigação dos processos de ensino e de aprendizagem, é que este roteiro se apresenta como uma possibilidade de proceder a intervenções para a aprendizagem a partir de produções escritas. Nesse caso, foram tomadas as produções escritas utilizadas nas pesquisas que originaram as dissertações de Celeste (2008), Santos (2008) e Ferreira (2009), todas participantes do GEPEMA. Mais especificamente, a proposta resulta de uma meta-análise de 76 produções escritas, em duas questões de matemática do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, pelo viés das análises, nas três referidas dissertações. Para isso, tomou-se a Educação Matemática Realística - EMR - como aporte teórico.

Os participantes do grupo GEPEMA têm se dedicado ao estudo e pesquisa sobre práticas de avaliação de aprendizagem de matemática. As pesquisas publicadas do grupo representam, e até documentam, um esforço na direção da efetivação da avaliação como prática de investigação no âmbito escolar, efetivação de uma avaliação da aprendizagem. O grupo vem utilizando questões de testes de rendimento a fim de compreender processos de aprendizagem, por meio da investigação e análise do que é produzido. O que importa ao grupo é resgatar o "caminho", que se configura no processo de produção da solução, tentando obter o máximo de informações produzidas. O meio que o grupo escolheu para colher essas informações foi pela análise das produções escritas produzidas nessas situações. Em síntese, busca-se compreender como os estudantes lidam com questões de matemática em situação de avaliação.

Para Van den Heuvel-Panhuizen (1996), o ensino de matemática deve deixar de se concentrar unicamente no conhecimento imediato de vários fatos e na capacidade de executar habilidades isoladas em problemas rotineiros e preocupar-se principalmente com o desenvolvimento de conceitos e habilidades que sirvam para resolver vários problemas não-rotineiros como, muitas vezes, são encontrados na realidade. Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p. 100) faz uma referência a Schwarz (1992) para exemplificar problemas rotineiros como aqueles que remeteriam, por exemplo, na História, à mera memorização de datas e, na Literatura, à citação de autores famosos. Destaca ainda o potencial da produção escrita como elemento importante na avaliação da aprendizagem de Matemática afirmando que, por meio da produção escrita, é possível ao professor questionar qual matemática os estudantes estão aprendendo, que entendimento eles estão tendo do que é trabalhado em sala de aula, quais dificuldades estão apresentando, e até o que pode ser feito para que tais dificuldades sejam superadas.

Nessa direção, o objetivo da construção deste roteiro é apresentar uma proposta de intervenção para a Educação Básica, na perspectiva da Educação Matemática Realística, partindo da análise da produção escrita dos estudantes. Por essa razão é que os três trabalhos de pesquisa que fizeram a análise de produções para as mesmas duas questões, são tomados como ponto de partida por fornecem indícios para a construção da intervenção sugerida ao fim de cada apresentação da questão, na forma de uma trajetória de ensino e de aprendizagem; chamada aqui de hipotética porque ela é imaginada a partir do material escrito recolhido dos estudantes.

Um exemplo da abordagem de questões do PISA com vistas a um trabalho, em sala de aula, foi a publicação PISA para docentes: La Evaluación como Oportunidad de Aprendizaje lançada pelo Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), com a intenção expressa de fazer com que os resultados, advindos da participação dos estudantes mexicanos no PISA, não servissem apenas às autoridades que o lançaram, mas também para o professor "retroalimentar sua própria prática" (INEE, 2005, p. 5). Já na introdução, o material se apresenta como "uma ferramenta que permita aos alunos alcançar habilidades mais complexas e de aprendizagem" (INEE, 2005, p. 5).

Nessa publicação, os resultados alcançados pelo México nas aferições do PISA de 2000 e 2003 são considerados "baixos" e, visando uma "melhora" nos níveis educativos nacionais, o INEE (2005) oferece breves informações sobre aspectos do PISA nas áreas de Leitura, Ciências e Matemática e apresenta alguns itens públicos de cada área. Da área de Matemática são expostos 18 itens, os critérios de correção, a classificação do item quanto aos processos, conteúdo, contexto, formato do item e o nível de desempenho (INEE, 2005, p. 97-128). Apresenta uma "análise pedagógica" de um item da área de conhecimento matemático, discutindo suas características gerais, como critérios de classificação quanto aos processos (reprodução, conexão, reflexão), contexto ou situação, nível de proficiência, conteúdo; critérios de correção e pontuação (INEE, 2005, p. 165-168). Por fim, apresenta 10 itens públicos de Matemática e outros de Ciências e Leitura, precedidos por conselhos práticos ao professor, que se referem à aplicação dos itens e da sua correção.

Posteriormente, foi lançado o documento PISA en el Aula: Matemáticas (INEE, 2008) que avança, em relação ao documento de 2005, ao apresentar uma exposição mais detalhada dos aspectos específicos[15] dos itens de matemática da prova do PISA, deixando claro que o objetivo é um melhor desempenho dos estudantes nas aferições do PISA. Toma as posições e notas obtidas pelos seus estudantes participantes como um "medidor exato" da sua aprendizagem e conhecimento.

A proposta de intervenção para a aprendizagem pode parecer similar a essas iniciativas lançadas pelo governo do México, mas ela difere fortemente no que diz respeito ao aspecto da melhora da aprendizagem dos estudantes, pois não identifica a aprendizagem dos estudantes brasileiros com o desempenho no PISA, e não tem como meta uma posição melhor do Brasil no ranking internacional dos países participantes. Pode ser que, com um trabalho dessa natureza, os estudantes brasileiros alcancem melhores posições, mas não é esse o objetivo. Um objetivo é que eles possam vir a matematizar a partir das questões do PISA, o que, na perspectiva da EMR, faz com que os estudantes aprendam matemática. Outro objetivo é conhecer melhor os itens do PISA e apresentar uma proposta de um maior aproveitamento dos resultados para a aprendizagem. Na perspectiva da EMR, avaliar para classificar e trabalhar com números e gráficos, ou trabalhar para melhorar esses números e alcançar uma posição mais favorável num

---

[15] Para maiores informações consultar <http://www.inee.edu.mx/index.php/publicaciones/textos-de-divulgacion/materiales-para-docentes/4227>.

ranking internacional, parece ficar um pouco distante do objetivo primordial da avaliação, que é fornecer subsídios para a aprendizagem, tornar-se ela própria uma oportunidade de aprendizagem.

Freudenthal (1991, p. 166) lança uma discussão sobre a avaliação nas aulas de Matemática. Comenta que havia uma grande diferença entre a matemática ensinada no nível secundário na França, na União Soviética, nos Estados Unidos, Inglaterra, Alemanha e na Holanda, mas afirma que, quando se pretende comparar, a pergunta deve ser o que foi aprendido e não o que foi ensinado. Critica os exames para alunos que cobram uma matemática altamente sofisticada, classificam e provocam na grande maioria dos estudantes um sentimento de inferioridade. Chama os exames nacionais de "a grande mentira do nosso sistema educativo". Questiona a validade de se mirar em algo tão inalcançável para os estudantes. Se em um processo de aprendizagem, o foco está, naturalmente, no que os alunos aprenderam - ao invés de no que eles não aprenderam - Freudenthal (1991, p. 167) questiona por que isso também não acontece, de maneira natural, no final do processo. Esse questionamento é compartilhado pelo grupo GEPEMA, principalmente pelos trabalhos de pesquisa que o grupo desenvolve com a análise da produção escrita.

A prática da análise da produção escrita do estudante e a entrevista ou intervenção para a aprendizagem aproxima mais a prática pedagógica, no que diz respeito a propiciar ao estudante lidar com um problema de contexto (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005). Com isso é possível se aproximar mais do imaginável do estudante, o foco fica mais direcionado ao estudante e não ao formato da questão ou da atividade. Isso vai ao encontro da vertente teórica da Educação Matemática Realística.

Não se pretende classificar o ensino de Matemática para, a partir disso, propor uma mudança. Pretende-se apenas o reconhecimento de elementos de uma aprendizagem já ocorrida, conforme sugerido por Freudenthal (1968). Busca-se, com a análise da produção escrita, avaliar o que o estudante demonstra saber. Delineados os contextos, parte-se para uma interação com elementos de uma realidade de sala de aula de matemática para que se possa viabilizar uma forma de ensinar matemática. A expressão utilizada, intervenção para a aprendizagem, nada mais é do que uma "expansão natural", um componente do processo de avaliação da aprendizagem visada pelo GEPEMA, avançando, cada vez mais, em uma operacionalização em sala de aula, de sua perspectiva de avaliação da aprendizagem, que muito se assemelha à perspectiva de avaliação de vertente teórica de EMR.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p. 31) afirma que a observação e as técnicas de entrevista são importantes na caracterização da avaliação de vertente realística. Tal avaliação desvia o olhar fixo do registro para buscar o pensamento dos estudantes, visando comprender seus processos de aprendizagem. Essa autora informa que Van den Brink (1980) utilizou entrevistas a fim de verificar quais contextos eram apropriadas para instruir um determinado assunto; conduziu entrevistas breves e individuais a fim de determinar se os contextos inventados formavam uma estreita ligação com o mundo mental das crianças e encontrar pontos de apoio para o ensino.

Freudenthal (1991) defende a utilização de técnicas de observação, entrevista e interação com os estudantes, no ensino. Essas técnicas foram desenvolvidas e defendidas por ele, anteriormente, que as associa fortemente à reflexão, algo importante a ser provocado no estudante durante o processo de aprendizagem. Streefland (1991) também defende e utilizou essas técnicas em sua investigação sobre a constituição mental do conceito de frações.

Cobb (2008) defende as interações em sala de aula como um potencial significativo para embasar a reorganização progressiva do raciocínio matemático dos estudantes. Os autores ainda indicam que interações nas quais conflitos na interpretação dos estudantes se tornam aparentes surgiriam como oportunidades de aprendizagem para eles e com isso eles poderiam reorganizar seu raciocínio ao resolver esses conflitos interpessoais.

A atitude de o professor interagir com pequenos grupos, considerando cada estudante individualmente, ou seja, levando em conta características particulares, pode adiantar sua aprendizagem por meio de perguntas e tarefas escolhidas criteriosamente. Os entendimentos são construídos e podem continuamente ser modificados pelos estudantes e pelo professor por meio de interações em curso. Frequentemente há uma intenção do professor, em encorajar o estudante a refletir sobre sua atividade matemática. Essas atitudes e intenções estão de acordo com a perspectiva sócio-construtivista (COBB, 2008, p. 3).

4.1 AS INTERVENÇÕES

De acordo com Freudenthal (1991), é preciso partir de um contexto que seja familiar aos estudantes, constituído por "fenômenos" imagináveis, realizáveis em suas mentes; enfatiza que, para o ensino da matemática, deve-se considerá-la não como um corpo de conhecimentos pronto e fechado, mas algo em construção, como qualquer outra atividade humana, que sempre vem carregada de seu aspecto subjetivo e útil para o ser humano.

As intervenções tomam como ponto de partida as maneiras de lidar identificadas nas 76 produções escritas já mencionadas. Cada intervenção é direcionada a um conjunto de produções com uma característica comum que diz respeito a uma maneira de lidar presente na resolução do item.

Tal como sugerido em Ferreira (2009, p. 26), informações das produções escritas são tomadas para que se possa investigar as maneiras de lidar dos estudantes, a fim de que se possa ir além da simples dicotomização correto ou incorreto.

Viola dos Santos (2007, p. 22) apresenta a ideia das maneiras de lidar,

> as maneiras pelas quais os sujeitos interpretam o enunciado, elaboram estratégias e utilizam procedimentos para resolver uma questão, que, em muitos casos, são resultantes de processos sistemáticos, tanto sintáticos como semânticos, os quais eles próprios constroem.

Neste trabalho, tal como já proposto por Ferreira (2009, p. 26), simultaneamente, ao se adotar a análise da produção escrita como prática de investigação, assume-se um olhar sobre as maneiras de lidar com as questões por meio das produções escritas Nessa perspectiva, o que se pretende é analisar as maneiras de lidar identificadas e propor o início de uma sequência hipotética de aprendizagem.

De certa forma, esta análise busca identificar quais foram os problemas resolvidos[16] nas produções escritas, o que se pode matematizar a partir deles e o que se pode fazer a partir da resolução já apresentada pelo resolvedor.

---

[16] Tal como em Dalto (2007).

> Sob o olhar das maneiras de lidar, é possível interrogar-se sobre os processos nos quais os alunos se envolvem ao resolver um problema, independentemente das respostas que apresentam, bem como, realizar uma leitura na busca de evidências e pistas que eles dão sobre a relação que estabelecem com o enunciado e quais os contextos que constituem nos processos de resolução e mobilização de conceitos matemáticos (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO; FERREIRA, 2010, p. 3).

É a partir desse modo próprio de expressar maneiras de interpretar e resolver um problema a partir do enunciado que se constrói uma maneira de lidar com determinada situação. Esses modos devem ser tomados como ponto de partida para construir um espaço de negociação e legitimação de significados (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO; FERREIRA, 2010). O professor, ao interpretar, analisar e tomar suas decisões em relação às maneiras idiossincráticas da atividade matemática dos seus estudantes, negociando essas maneiras de lidar, oportuniza algumas outras maneiras que, dentro de um determinado contexto, podem ser mais favoráveis aos estudantes.

De acordo com Nagy-Silva (2005, p. 106, grifo nosso), a partir de informações a respeito da produção escrita dos estudantes, é possível realizar uma intervenção que de fato contribua para o desenvolvimento deles.

Envolvidos com aprender matemática, espera-se que os alunos organizem os "fenômenos" do mundo físico, social e mental de acordo com padrões matemáticos, ou seja, espera-se que eles matematizem (FREUDENTHAL, 1983).

Freudenthal (1991) propõe que o ensino da matemática deve partir da realidade, o que se viabiliza a partir de problemas de contextos em detrimento de problemas de palavras. Assim, num primeiro momento, é necessário levantar os elementos que fazem parte do contexto das situações-problema.

Gravemeijer (2004) reforça essa proposta e ainda acrescenta que o ensino da matemática deve começar e permanecer dentro da realidade. Essa tese é muitas vezes interpretada como o reconhecimento de que o ensino e a aprendizagem de matemática deveriam se preocupar apenas com problemas aplicados em situações práticas ou autênticas. No entanto, de acordo com Gravemeijer (2004), não é o que significava a ideia proposta por Freudenthal, e também não é o que significa ensinar matemática em uma perspectiva realística. Para ele, a realidade é algo dinâmico, que se desenvolve. E é essa a perspectiva assumida neste trabalho.

Espera-se que os estudantes envolvidos "re-inventem" matemática (GRAVEMEIJER, 1999) a partir de, e na sua realidade, o que contempla a ideia de Freudenthal (1973) de "matemática como atividade humana".

4.2 Objetivos Específicos que Guiarão Três Etapas das Intervenções

A seguir são apresentados três momentos de desenvolvimento para as intervenções que devem ser construídas a fim de atingir três objetivos específicos, quais sejam, estimular os alunos a

a) fazer um levantamento de seus contextos, de situações imagináveis para eles a partir do enunciado do item. Possivelmente isso se mostrará nas suas maneiras de lidar com os enunciados dos itens. De acordo com Freudenthal (1991) e com Van den Heuvel-Panhuizen (1996), é preciso partir de um contexto que seja familiar aos alunos, constituído por "fenômenos" imagináveis para eles, realizáveis em suas mentes. Também destaca a importância e a necessidade da construção e contribuição dos próprios estudantes em seus processos de aprendizagem. No entanto, isso somente se viabiliza a partir de problemas de contextos, em detrimento de problemas de palavras. Assim, em um primeiro momento, é preciso levantar os elementos que farão parte do contexto das situações-problema, o que se constitui em um resgate dos contextos nos quais a situação-problema pode ser imaginada pelos estudantes. Nessa etapa, os estudantes resolvem o item, o professor colhe suas produções e faz uma análise detalhada de cada uma delas com o objetivo de identificar a maneira como o estudante interpreta o enunciado do item, como ele lida com esse enunciado, qual problema o estudante se põe a resolver (DALTO, 2009) e em quais contextos os elementos dos conceitos necessários para a resolução daquele item aparecem. Tem-se como objetivo colher informações dos estudantes de situações autênticas nas quais eles tratem dos termos pertinentes a cada item e a cada situação descrita por eles. Para o desenvolvimento dessa etapa, é essencial que se levem em conta os contextos já levantados pelos estudantes em suas produções escritas.

b) matematizar nos contextos levantados por eles em situações-problemas que evocam algum conceito matemático para sua resolução. No caso, pode ser a própria ideia que os estudantes fazem de um conceito.

c) obter uma forma de resolver diversos problemas que precisem do conceito ou ideia, ou ideias, da Matemática, inerentes à resolução daquele item; que eles consigam generalizar, de alguma maneira, formalizar o conceito e sejam capazes de aplicá-lo em outra situação.

As intervenções se constituem basicamente em encaminhamentos desencadeados pelas produções escritas dos estudantes ou de discussões de sala de aula. Nos diálogos hipotéticos, as sugestões de indagações ou colocações que partem do professor serão precedidas pela letra P, e as supostas falas dos estudantes serão precedidas pela letra E mais um número, para que vários estudantes sejam representados, como **E1, E2, E3**, ... Por sua vez, **S1, S2, S3**,... correspondem às supostas produções de significados oriundas das respectivas maneiras de lidar dos estudantes com os itens, identificadas nas produções escritas.

A seguir, é apresentado cada item com suas especificidades e as respectivas produções escritas.

4.3 Descrições Representativas das Produções - Maneiras de Lidar

A sugestão é que o professor sistematize as produções escritas, agrupando as semelhantes, reconhecendo contextos, justificações e identificando na sua resolução as maneiras de lidar com o enunciado, a fim de tomá-las como desencadeadoras de diálogos ou discussões que favoreçam os estudantes à matematização. Junto a cada item encontram-se as produções escritas colhidas dos três trabalhos de pesquisa focados, a identificação de maneiras de lidar com o enunciado do item nessas produções, as inferências feitas a respeito das produções de significados e, a partir delas, os encaminhamentos indicados.

4.4 Do Item Prova de Ciências

Quadro 5 – Agrupamento por Produção de Significados para Média

<table>
<tr><th colspan="3">1ª questão – PROVA DE CIÊNCIAS – M468Q01</th></tr>
<tr><td colspan="3">Na escola de Marli, o professor de ciências aplica provas que valem 100 pontos. Marli obteve uma média de 60 pontos nas primeiras quatro provas de ciências. Na quinta prova, ela conseguiu 80 pontos. Qual é a média de Marli em ciências após as cinco provas?</td></tr>
<tr><td colspan="3">A partir da exaustiva leitura das produções escritas, pelo viés dos trabalhos de Celeste (2008), Ferreira (2009) e Santos (2008), foram levantadas maneiras de lidar com o cálculo da “média de Marli” que remeteram à identificação de seis significados para média aritmética, a saber, S0, S1, S2, S3, S4, S5 e S6. Apesar do enunciado do item apresentar a palavra média, a palavra diz respeito à média aritmética.</td></tr>
<tr><th>PROVAS</th><th>DESCRIÇÕES REPRESENTATIVAS DAS PRODUÇÕES</th><th>IDENT.</th></tr>
<tr><td>FE021</td><td>Não apresenta produções escrita alguma.</td><td>S0</td></tr>
<tr><td>CE057C
CE067C
CE077D
CE138B
SE011A
SE142A
SE212A</td><td>Efetua $60+60+60+60+80=320$.
Responde com o resultado obtido nessa adição, 320.</td><td>S1.5</td></tr>
<tr><td>CE108A
CE118B
SE041A
SE091A</td><td>Efetua 60×4 e $240+80$. Responde com o resultado obtido nesta adição, 320.</td><td rowspan="2">S1.3</td></tr>
<tr><td>SE132A</td><td>Efetua 60×4 e $240+80$. Monta o algoritmo da multiplicação 240×5, mas risca.
Responde com o resultado obtido na adição, 320.</td></tr>
</table>

CE047A **CE087D**	Responde apenas 320 pontos. Não apresenta cálculo algum.	**S1.1**
SE172A	Efetua a adição $120+120$ e a adição $240+80$, obtendo 320. Responde 320.	**S1.5**
CE026C	Escreve 4 provas, 60 valor. Divide 60 por 4, obtendo 30. Adiciona 30 com 80, obtendo 10. Efetua 60 + 80, obtendo 140. Responde que a média é 140 pontos.	**S1.2** **S4** **S5**
SE051A	Responde 240 pontos. Acrescenta o comentário: “ela conseguiu passar sem o conselho.”. Não apresenta cálculo algum.	**S1.4**
SE021A	Efetua a divisão de 80 por 5. Efetua a adição 60 + 80, 140. Inicia a divisão de 140 por 50, mas risca o algoritmo. Inicia a multiplicação 50 x 70, mas não termina e risca o algoritmo. Responde 140.	**S1.2** **S4** **S5**
CE148B **CE158C**	Responde apenas 140 pontos. Não apresenta cálculo algum.	**S1.2**
FE019	Escreve que, nas primeiras provas, a média foi 60 e, na quinta prova, a média foi 80. Escreve que $\overline{x}_1 = 60$ e $x_t = \frac{x_4+80}{2} = \frac{60+80}{2} = \frac{140}{2} = 70$. Responde que a média de Marli é de 70 pontos.	**S2**
FE023	Escreve “Marli 60 pontos nas quatro provas, 80 na quinta prova”; e $M = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{x_n}$; $M = \frac{60+80}{2}$; $M = \frac{140}{2}$; M = 70.	
SE081A	Efetua 60×4 e $240+80$. Efetua $320:2$. Escreve que nas quatro primeiras provas, obteve 60 pontos, e, na quinta prova, obteve 80 pontos. Responde que ela tem 160 pontos.	
CE036C **SE152A**	Responde apenas 70 pontos. Não apresenta cálculo algum.	**S2**
FE008 **FE025**	Escreve “$4-60$ Ptos e $5-80$ Ptos”. Adiciona 80 com 60 obtendo 140, e divide 140 por 2, obtendo 70. Responde que a média de Marli é 70 pontos.	

FE012 **FP010** **FP026**	Adiciona 80 com 60 obtendo 140, e divide 140 por 2 obtendo 70. Responde que a média de Marli é 70 pontos.	
SE112A	Escreve os pontos obtidos nas provas e, na frente de cada um, escreve 100. Responde 80 pontos e justifica que a maior nota prevalece.	**S3**
CE168C **SE162A**	Responde apenas 80 pontos. Não apresenta cálculo algum.	
FE013	Escreve “prova=100”. Escreve ainda $M=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{60}$; e que $\frac{240}{4}=60$. Em seguida escreve que $M=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4\neq 80}{4}=?$ Escreve $\frac{80+60}{4}=\frac{140}{4}$ e $M=\frac{60+60+60+80}{4}=\frac{320}{4}=80$. Responde que a média de Marli é 80 pontos.	**S4**
CE097D	Efetua $4\times 60=240$ e $240-80=160$. Responde que a média de Marli é 160.	
FP032	Escreve $\frac{60+60+60+60+60+20}{5}=\frac{5\times 60+20}{5}=60+4=64$. Responde que a média de Marli é 64.	
CE016B	Multiplica 60 por 4, obtendo 240. Coloca abaixo desse resultado, 240, o 80, com algarismo 8 na casa da centena, abaixo do algarismo 2, e o 0 na casa das unidades. Passa um traço sem indicar a operação e escreve, embaixo do traço 140. Responde “A média de Marli é de 330 pontos após as cinco provas.”.	**S4**
SE122A	Efetua $80+60$ e $140:2$. Efetua a divisão $140:5$. Risca o algoritmo dessa divisão. Não responde nem indica a resposta.	**S1** **S2** **S4** **S5**
FE024	Escreve $\frac{4+4+8+8}{4}=6$; $\frac{6+8}{2}=7$; $\frac{924+8}{5}=\frac{32}{5}$. Não indica resposta.	

SE031A	Efetua $100+60$, $160:5$, $100+80$ e $100-80$. Responde com o resultado da divisão, 32.	**S4** **S5**
FP006	Escreve que a média das 4 primeiras provas é 60. Simula notas das provas para que a soma delas dividida por 4 dê 60. Na primeira tentativa/ obtém 210 de soma, na segunda tentativa, obtém 230 de soma e, na terceira, obtém 240 de soma. Escreve que $\frac{60+60+60+60+80}{5}=\frac{320}{5}$. Divide 320 por 5, obtendo 65. Responde que a média de Marli é 65 pontos.	**S6.1**
CE178C **FE007** **FE010** **FP004** **FP016** **FP025** **FP028** **SE071A** **SE192A**	Efetua 60×4 e $240+80$. Efetua $320:5$. Responde com o resultado obtido na divisão, 64.	**S6.1**
FE020	Escreve: 1º caso: $\frac{P_1+P_2+P_3+P_4}{4}=60$. Sendo $P_n=n^{\circ}\ \text{da prova}$. $P_1+P_2+P_3+P_4=240\ (\text{I})$ 2º caso: $\frac{P_1+P_2+P_3+P_4+80}{5}=x$; $P_1+P_2+P_3+P_4+80=5x$; $P_1+P_2+P_3+P_4=5x-80\ (\text{II})$ Temos que I=II. Ou seja, $5x-80=240$; $5x=240+80$; $5x=320$; $x=\frac{320}{5}=64$. Responde que a média de Marli é de 64 pontos.	**S6.1**
FE018	Escreve $\frac{a+b+c+d}{4}=60$. Em seguida que $a+b+c+d=x$ e que $\frac{x}{4}=60$, $x=60.4$ e $x=240$. Escreve $\frac{240+80}{5}=64$. Ainda registra $\frac{a+b+c+d+80}{5}$, $\frac{240+80}{5}=x$, $\frac{320}{5}=x$ e $x=64$. Responde que a média de Marli é de 64 pontos.	
FE004 **FP029**	Escreve $\frac{4\times60+80}{5}=\frac{240+80}{5}=\frac{320}{5}=64$. Responde que a média de Marli é de 64 pontos.	

FE015 FE017 FP009	Adiciona 240 com 80, obtendo 320. Divide 320 por 5, obtendo 64. Responde que a média de Marli é de 64 pontos.	
FP020	Escreve que $\frac{60+60+60+60+80}{5}$. Divide 320 por 5, obtendo 65. Registra $240+80=320$. Responde que a média de Marli é de 65 pontos.	**S6.2**
CE128B FE011 FP022 SE061A SE182A SE222A SE101A	Efetua a adição $60+60+60+60+80$ = 320 e a divisão $320:5$. Responde com o resultado obtido dessa divisão, 64.	
SE202A	Efetua $60+60+60+60+80$, obtendo 320. Efetua $320:5$. Responde com o resultado obtido na divisão, 64. Justifica explicando que somou as 5 notas e dividiu o resultado por 5 provas.	
FE001 FE006 FE009 FE014 FP014 FP027	Escreve que $\frac{60+60+60+60+80}{5}=\frac{320}{5}=64$ pontos. Responde que a média de Marli é de 64 pontos.	**S6.2**
FE016	Escreve $\frac{P_1+P_2+P_3+P_4}{4}=60$ e $P_1+P_2+P_3+P_4=240$. Escreve $\frac{P_1+P_2+P_3+P_4+P_5}{5}=\frac{60+60+60+60+80}{5}=\frac{320}{5}=64$ pontos. Responde "A média de Marli é de 64 pontos."	
FP019	Escreve $\bar{x}=\frac{60+60+60+60+80}{5}=\frac{240+80}{5}=\frac{320}{5}$. Responde que a média de Marli é 64 pontos.	
FP017	Escreve que $1^\circ=60$; $2^\circ=60$; $3^\circ=60$; $4^\circ=60$; $5^\circ=80$. Adiciona 240 com 80 obtendo 320. Divide 320 por 5 obtendo $6{,}4$. Responde que a média de Marli é $6{,}4$ pontos.	**S6.3**

Fonte: Autora.

Quadro 6 – Material das dissertações estudadas para Prova de Ciências

PROVA DE CIÊNCIAS		
Significados para "média"	Maneiras de lidar comuns identificadas	Análises e discussões do interior do GEPEMA.
S0 Média como algo oculto.	Não apresenta produção escrita alguma nem resposta. (1)	De acordo com Ferreira (2009), nesta prova, especificamente na resolução dessa questão, não foi apresentada qualquer produção, ou seja, o estudante deixou a questão em branco. Sendo assim, não se pode inferir algo a respeito da maneira como o estudante compreendeu o enunciado do problema nem sobre o que média pode significar para ele.
S1 Média como uma soma de notas.	Adiciona supostas notas e indica que essa soma corresponde à média de Marli.	Santos e Celeste (2008) já haviam colocado que o contexto escolar do estudante pode ter indicado o significado de "média" que ele atribuiu ao enunciado do problema. Em Santos (2008, p. 42), apresentam-se sete casos de estudantes de Ensino Médio aos quais se submeteu essa questão numa situação de avaliação, e a resolução apresentada foi a soma dos cinco testes, como resposta 320. Também em Celeste (2008, p. 36), apresentam-se quatro casos de estudantes submetidos à mesma questão e que resolveram também por meio da soma dos cinco testes, apresentando como resultado do problema 320 a média solicitada. Nesse último caso, Celeste (2008, p. 36) conseguiu uma entrevista com os estudantes e obteve a informação de que eles transferiram o significado de "média" da escola, como a soma de notas, e o aplicaram no problema.
		Também por meio da produção escrita encontrada na resolução dessa questão, viu-se a possibilidade de alguns deles tomarem a palavra "média" como o total de pontos obtidos nas cinco provas. Inferiu-se que a experiência desses alunos no dia-a-dia da escola influenciou a resolução da questão proposta, uma vez que eles calcularam a média de Marli da mesma

		maneira que calculariam a sua própria média na escola da vida real, sem utilizar o conceito de média aritmética apresentado nas aulas, que era o esperado. O responsável pela prova SE051A apresenta como resposta 240, acrescido de um comentário: "ela conseguiu passar direto sem o conselho". A partir da resposta e dessa observação, Santos (2008, p. 45) infere que o resolvedor também tenha relacionado o contexto do problema com o contexto da escola. E que possivelmente tenha interpretado que Marli obteve 60 pontos nas quatro primeiras provas e, assim, adicionando-as, ela ficaria com 240 pontos que é o mínimo, ao final de um ano letivo, que um estudante precisa obter em sua escola para ser promovido para a série seguinte.
		O estudante responsável pela prova SE021A escreveu 140 dividido por 50, mas colocou como resultado 70, que seria o resultado de 140 dividido por 2. Quanto ao 50, ele pode ter imaginado que era metade de 100 e por isso o resultado 70 que é metade de 140, mas respondeu: A media de Marli é 140. Celeste (2008) afirma que, em CE158C e CE148B encontrou apenas que a média de Marli é 140, e que, em CE047A e CE087D, apenas como resposta 320. Caberia uma investigação no sentido de verificar se o estudante tomou a média como a soma dos valores 80 com 60 e de 240 mais 80, respectivamente, uma vez que ocorreram diversos casos em que o estudante apresentou essas respostas com a justificativa de soma de notas.
S2 Média como resultado de uma divisão por 2.	Soma notas de Marli e divide por 2.	Ao ser entrevistado, SE081A revela que dividiu 320 por 2, pois acreditava que toda nota deveria ser dividida por dois, e porque 320 ultrapassava o valor de 100 pontos mencionado no enunciado do problema. Santos (2008, p. 42) ainda infere que pode ser que o aluno acredite que toda nota deva ser divida por dois pelo fato de seus professores utilizarem, para compor a

		média de um bimestre, notas provenientes de dois instrumentos: trabalhos e provas. De acordo com Ferreira (2009), os resolvedores das provas FE008 e FE025 adicionaram corretamente 80 com 60, obtendo 140, e dividiram 140 por 2, obtendo 70. Responderam que a média de Marli seria de 70 pontos. Santos (2008, p. 42) infere que SE122A pode ter somado 80 com 60, obtendo 140, e dividido esse resultado por dois, pois entende que a média seria obtida dividindo o total de pontos obtidos pela quantidade de notas diferentes. Nesse caso parece que a ideia que prevalece para este estudante é a de que o resultado deve ser dividido por dois, porque ele havia dividido anteriormente por cinco, mas riscou e deixou o algoritmo da divisão por dois.
		Também Santos (2008, p. 42) infere que os estudantes que fizeram uma soma como a de 240 + 80, ou de 60 + 80, e dividiram por 2, podem ter interpretado que a média seria igual ao total de pontos obtidos dividido pela quantidade de notas diferentes; mas também podem ter expressado o que de fato consideram como média, o que foi confirmado por meio de entrevista. O estudante responsável pela prova SE081A revelou em entrevista que havia dividido 320 por dois, pois acreditava que toda nota deveria ser dividida por dois e porque, além disso, 320 ultrapassava o valor de 100 pontos que é mencionado no enunciado da questão. Santos (2008, p. 43) inferiu que pode ser que esse estudante acredite que toda nota deva ser dividida por dois devido ao fato de seus professores utilizarem, para compor a média da disciplina em um bimestre, notas provenientes de dois instrumentos avaliativos: trabalhos e provas.
		O estudante responsável pela prova SE021A escreve 140 dividido por 50, mas coloca como resultado 70, que seria o resultado de 140 dividido por 2, então é algo que merece ser investigado. Apesar de Santos (2008, p. 45) comentar

		que, quanto à produção da prova SE152A, não se poderia fazer qualquer inferência, arrisca uma pergunta: será que o aluno somou os números 60 com 80, obtendo 140, e os dividiu por dois mentalmente, uma vez que apresenta como resposta 70 pontos? Isso porque muitos outros alunos procederam dessa forma quando apresentaram 70 como resposta. Celeste (2008, p. 42) indica que o aluno apenas respondeu 70. Diante de tantas justificativas da soma dos números aparentes 80 com 60 e sua divisão por dois, é pertinente uma inferência nesse sentido.
S3 Média como a maior nota.	Sua justificativa consiste no argumento de que a maior nota prevalece na composição da média.	Santos (2008, p. 45) indica que nessa produção o estudante da prova SE112A respondeu que a média de Marli foi de 80 pontos, pois, segundo ele, a "maior nota prevalece". Santos (2008, p. 45) infere que o estudante dessa prova SE112A pode ter relacionado o contexto do problema com alguma situação que viveu em algum momento, ou seja, pode ter relacionado o contexto do problema com o fato de alguma vez algum professor ter considerado que a média final dos estudantes na disciplina seria a maior nota obtida por eles nas provas. No questionário avaliativo, aplicado por Santos (2008), elaborado com a finalidade de obter dos estudantes suas impressões sobre a prova, esse estudante apontou essa questão como sendo a mais fácil. Segundo ele, era a mais fácil "porque era só ver qual era a nota mais alta, essa era a média". Os estudantes responsáveis pelas provas CE168C e SE162A apenas responderam 80, mas como o estudante SE112A justificou essa resposta por ela ser, supostamente, a maior nota de Marli, cabe também uma investigação (a mesma ideia) nesse sentido com os outros dois estudantes mencionados.

S4 Média como aparente expressão de uma matemática "mecanicista".	Opera apenas com os números que aparecem explicitamente no enunciado do problema ou aplica uma fórmula e indica esse resultado como sendo a Média de Marli.	O aluno de SE031A deixou vários cálculos registrados e respondeu com o resultado de um deles, 32 pontos como sendo a Média de Marli. Ao ser entrevistado, ele diz que não considerou a soma de 100 com 80, pois a média seria muito alta e, se considerasse a subtração 100 - 80, a média ficaria muito baixa; então ele justifica que somou 100 com 60, pois assim encontraria o total de pontos obtidos por Marli, 160 pontos, que ele dividiu por cinco, pois disse que eram cinco provas, obtendo 32. Santos (p. 45) informa que o aluno responsável pela prova SE122A efetuou três operações com os valores aparentes no enunciado do problema: somou 80 com 60 e dividiu o resultado da soma por cinco e por dois. Santos (p. 46) infere também que esse aluno pode ter considerado que ao apresentar os registros das operações realizadas com os algoritmos, a questão seria considerada resolvida.
S5 Média como algo dividido pelo número de notas	Divide por 5 uma soma de notas que não resolve corretamente o problema	Santos (2008, p. 44) relata que, num primeiro momento, inferiu que o estudante houvesse desconsiderado as duas últimas operações efetuadas, a adição de $100+80$ e a subtração de $100-80$, já que sua resposta provém da divisão de 160 por 5. O aluno de SE031A deixou vários cálculos registrados e respondeu com o resultado de um deles, 32 pontos como sendo a Média de Marli. Ao ser entrevistado, ele diz que não considerou a soma de 100 com 80, pois a média seria muito alta e, se considerasse a subtração 100 - 80, a média ficaria muito baixa; então ele justifica que somou 100 com 60, pois assim encontraria o total de pontos obtidos por Marli, 160 pontos, que ele dividiu por cinco, pois disse que eram cinco provas, obtendo 32. Na entrevista, Santos (2008, p. 45) pode identificar o motivo dessas operações na justificação do estudante. Ao ser questionado sobre sua resolução, na entrevista, esse estudante explicou que efetuou a adição 100 + 60, pois assim encontraria o total de pontos que Marli

		havia obtido. Para ele, Marli já havia obtido 100 pontos e, somando as notas das quatro provas ela havia conseguido mais 60 pontos. Em seguida, dividiu o resultado obtido por 5, pois ela havia realizado 5 provas. Em relação à adição 100 + 80 e à subtração 100 - 80, o estudante revelou que não considerou o resultado de 100 + 80 já que, se considerasse, a média seria alta, e se considerasse 100 - 80, a média seria muito baixa. Constatou-se, nesse caso, também, que o estudante relacionou o contexto do problema com o contexto da escola. Como a média mínima bimestral nessa escola é de 60 pontos, para ele 100 + 80 = 180 seria muito alto em um bimestre e 100 - 80 = 20 seria muito baixo. Como esse estudante considerou que 100 + 80 ou 100 - 80 estaria errado, ele respondeu 32 pontos porque era um cálculo que já havia efetuado.
		Santos (2008, p. 45), a partir da produção escrita desse estudante, inferiu que ele provavelmente considerou que Marli obteve 60 pontos após as quatro provas, e pode ter interpretado que a média seria obtida dividindo o total de pontos obtidos pela quantidade de notas diferentes. O que foi riscado. Segundo Ferreira (2009), o resolvedor de FE024 deixou indicada uma divisão da soma de todas as notas por 5.
S6	Comenta uma situação ou fornece uma explicação para um contexto específico que não resolve o problema.	Santos e Celeste (2008) mencionaram que o contexto escolar dos estudantes, que resolveram essa questão em suas pesquisas pode ter indicado o significado de “média” atribuído por eles à “média de Marli” presente no enunciado do problema. Em Santos (2008, p. 42), apresentam-se sete casos de estudantes de Ensino Médio aos quais se submeteu essa questão numa situação de avaliação e a resolução da apresentação foi a soma dos cinco testes, como resposta 320. Também em Celeste (2008, p. 36), apresentam-se quatro casos de estudantes submetidos à mesma questão e que resolveram também por meio da soma dos cinco testes,

		apresentando como resultado do problema 320, a média solicitada. Nesse último caso, Celeste (2008, p. 36) conseguiu uma entrevista com os estudantes e obteve a informação de que eles transferiram o significado de média da escola, como a soma de notas, e o aplicaram no problema. Também por meio da produção escrita encontrada na resolução dessa questão, viu-se a possibilidade de alguns deles tomarem a palavra "média" como o total de pontos obtidos nas cinco provas. Inferiu-se que a experiência desses alunos no dia a dia da escola influenciou a resolução da questão proposta, uma vez que eles calcularam a média de Marli da mesma maneira que calculariam a sua própria média na escola da vida real, sem utilizar o conceito de média aritmética apresentado nas aulas, que era o esperado.
		De acordo com Santos (2008, p. 46), a produção do estudante ainda veio acrescida de que "ela conseguiu passar direto sem o conselho". A partir da resposta e dessa observação, Santos (2008, p. 45) infere que ele também tenha relacionado o contexto do problema com o contexto da escola. E que possivelmente tenha interpretado que Marli obteve 60 pontos nas quatro primeiras provas e, assim, adicionando-as ela ficaria com 240 pontos que é o mínimo, ao final de um ano letivo, que um estudante precisa obter em sua escola para ser promovido para a série seguinte.
S6 Média como média aritmética	Demonstra aplicar o conceito de média aritmética.	Os responsáveis pelas provas FP020 e FP024 dividiram incorretamente 320 por 5, obtendo 65 como resultado. Já o responsável pela prova FP017 obteve como resultado da divisão de 320 por 5 o resultado de 6,4. Cabe investigar se foi um erro por distração ou se eles têm alguma dificuldade com o algoritmo e a ideia de divisão. O resolvedor de FE024 colocou, ao invés de 80, o número 8 e, ao invés de 60, o número 6. Parece que ele já dividiu o valor da nota por 10. Pode ser que ele tenha trazido essa prática do seu contexto

		escolar com o cálculo de médias, somando os valores das notas já divididos pelo número de provas.
S6 Média como média aritmética.	Aplica a estratégia de adicionar todas as notas e divide o resultado da soma pelo número de provas. Chega à resposta de que a média de Marli é 64.	De acordo com Santos (2008, p. 43), os alunos de E071A, E101A, E192A e de E222A multiplicaram 60 por 4, adicionaram 80 ao resultado, obtendo 320 e o dividiram por 5. Também CE178C adotou a mesma estratégia. (CELESTE, 2008, p. 34). Já os alunos de E061A, E182A e de E202A indicaram a soma 60 + 60 + 60 + 60 + 80 e dividiram o seu resultado por 5. Apresentam justificativas do tipo “A média de Marli é 64 porque eu somei as cinco notas e dividi pelo número de provas.” (SANTOS, 2008, p. 41).

Fonte: Autora.

Considerando a correção proposta pelo PISA[17,] apenas 32 dessas 76 provas receberiam crédito completo. Todas as demais receberiam nenhum crédito, ou seja, seriam consideradas totalmente erradas, uma vez que o manual de correção indica que somente seriam consideradas corretas as resoluções que apresentassem 64 como a média de Marli, independente dos registros escritos. Por esse resultado, esses resolvedores não seriam classificados com um bom nível de desempenho. De acordo com Aguiar (2008, p. 112), na aferição do PISA de 2003, nesse item, o percentual de acerto no Brasil foi de 15,2%, enquanto 47% dos estudantes dos países pertencentes à OECD (2009) receberam crédito completo.

O trabalho de classificar os estudantes em níveis já é realizado pelos órgãos oficiais, e os meios de comunicação divulgam exaustivamente seus resultados. O que se pretende aqui, portanto, não é atribuir um código a cada uma dessas resoluções, mas partir para "um outro" tipo tratamento, o qual possibilite outras formas de ação, diferentes da comunicação da classificação e da ênfase no "não saber". O tratamento das produções escritas permite uma abordagem a partir de um "saber" do resolvedor, que seria desprezado, ou desvalorizado diante de uma

[17] <http://download.inep.gov.br/download/internacional/pisa/Itens_Liberados_Matematica.pdf>.

classificação hierárquica apresentada. Assim, qualquer classificação baseada no certo e no errado é aqui desprezada.

O trabalho se propõe a investigar o que os alunos sabem de matemática, de modo a fornecer subsídios para que processos de ensino e de aprendizagem sejam conduzidos e desenvolvidos.

4.4.1 Sequências de Aprendizagem para o Item Prova de Ciências Objetivo

Proporcionar situações nas quais os estudantes possam matematizar nos contextos levantados por eles a partir de suas ideias de média e Média Aritmética, visando que eles sejam capazes de compreender e aplicar o conceito de Média Aritmética.

1°. Momento - Identificando o "terreno"

Trazer à discussão em sala de aula as situações indicadas por eles ao lidarem com a ideia de média. Obter informações dos estudantes de situações autênticas nas quais eles tratem de média, situações nas quais, para eles, apareça a palavra média.

Primeiramente se deve trazer à tona as situações indicadas por eles nas produções escritas. O professor deve promover discussões que levem ao conhecimento de todos da sala os diversos significados para média, a partir do que surgiu das produções escritas. Uma forma de promover esse levantamento de informações pode ser lançando uma questão.

P: O que você entende por média ou média aritmética?

E0: Nunca ouvi esta palavra.

P: Na sua escola não calculam a média das notas?

E0: O professor faz isso, mas eu não sei como ele calcula.

P: Procure no dicionário a palavra "média" e nos livros didáticos a expressão "média aritmética".

Depois de um tempo o aluno traz a resposta.

E0: Constam nove sinônimos e explicações para a palavra "média" no dicionário.

De fato, o Dicionário Eletrônico Houaiss da língua portuguesa apresenta diversos significados para a palavra média, que são: "valor definido como uma grandeza equidistante dos extremos de outras grandezas; Ex.: Homem de altura abaixo da média. Inteligência acima da média." - "nível geral médio; Ex.: A média de temperatura numa região. A média de vida de um país."; "quantidade calculada por unidade de tempo; Ex.: nas estradas, deve-se manter uma média de 80 km/h"; "posição intermediária entre dois extremos (sentido figurado); Ex.: uma média entre o total ceticismo e a fé cega";"mistura balanceada (sentido figurado); Ex.: a menina é uma média dos dois: a beleza da mãe e o porte do pai"; "quantidade mínima de pontos necessários para ser admitido ou aprovado em escola, concurso etc.; "Ex.: A média para passar de ano em muitas escolas é sete."; "café com leite em xícara grande" (Regionalismo: Brasil. Uso: informal.); "essa xícara usada para qualquer outra bebida, em comparação com a pequena, de cafezinho; chávena" (Derivação: por metonímia. Regionalismo: Brasil. Uso: informal.); "valor calculado a partir de uma distribuição, segundo regra previamente definida, e que representa essa distribuição" - Estatística (MÉDIA, 2002).

Sejam x^1, x^2, ... , x_n, portanto "n" valores da variável x. A média aritmética simples de X representada por

$$x = \frac{x_1 \ + x_2 \ + \cdots x_n}{n}$$

P: De todos estes significados e definições, escolha quais lhe parecem mais próximos ou adequados para o cálculo da média escolar.

A resposta do estudante vai indicar um contexto para a produção de significados para a palavra média. O início de uma reinvenção guiada.

Aos 75 outros resolvedores a pergunta abaixo é sugerida como pertinente, pois é fato que eles produziram uma justificação ao resolverem a questão, haja vista que apresentaram produção escrita. É de se supor a possibilidade de um contexto "fértil" para matematização.

P: Como que o professor obteve a média de Marli?

E1: Somando todas as notas dela.

E12: Eu somei 60 com 80, isso porque aparecem apenas dois números no enunciado.

P: Mas, quantas provas Marli fez ao todo? **E1:** Cinco.

P: Como é calculada a nota bimestral na sua escola?

E1: A nota bimestral é a soma de todas as notas das avaliações. **P:** Mas e se Marli tivesse tirado 70, 90, 85 e 100, qual seria a média dela?

E1: 345.

P: Mas vocês já viram uma escola na qual a média excede 100 pontos?

E1, E2, E3, E4, E5 e E6: Não, a nota final é sempre, no máximo, 100.

P: Então como se faz para calcular a média final de Marli? E na sua escola, como é feito o cálculo da média final?

E1, E2, E3, E4, E5 e E6: Em geral, a média final é calculada pela soma das notas dos quatro bimestres, divida por 4.

Aparecem dois significados distintos para média, para a primeira, o significado é de soma e, para a média final, o significado é de média aritmética.

A maneira de lidar mais comum com o enunciado desse item foi a de adicionar notas e indicar o resultado da soma como a média das notas. De acordo com 17 produções escritas, pode-se inferir a resposta de E1 como uma possibilidade. Em Santos (2008, p. 42), sete produções de estudantes de Ensino Médio apresentaram a média como a soma dos cinco testes, 320. Também em Celeste (2008, p. 36), quatro produções de estudantes do Ensino Fundamental apresentaram como resposta da média de Marli a soma dos cinco testes, 320 como resposta. Celeste (2008, p. 36), em entrevista com esses estudantes, obteve a informação de que eles calcularam a média de Marli do modo como calculariam suas próprias médias na escola da vida real, ou seja, como a soma de notas. Celeste (2008) e Santos (2008) inferiram que a experiência desses alunos no dia a dia da escola influenciou a resolução da questão proposta, uma vez que eles transferiram o significado de média adotado na sua escola e calcularam a média de Marli da mesma maneira que calculariam a sua própria média na escola da vida real, sem utilizar o conceito de média aritmética apresentado nas aulas de matemática, o que era o esperado. Em Ferreira (2009), essa maneira de lidar talvez não tenha sido explicitada na produção escrita do seu trabalho por se tratar de professores os resolvedores do item. O fato de se tratar de professores, no entanto, não seria suficiente para justificar o fato de essa maneira de resolver a questão não aparecer nas produções escritas. Na produção de FP017, todas as notas foram adicionadas e o resultado dividido por 5, mas apresenta 6,4 como resultado da média de Marli, elemento que fortalece a hipótese do que pode ter sido uma prática de professores em sala de aula. Alguns dos professores participantes já calcularam as divisões de cada nota pelo total delas, talvez para facilitar o cálculo e em seguida apenas adicionaram esses resultados. Parece que o resolvedor de FE024 que escreve $\frac{4+4+8+8}{4}=6; \ \frac{6+8}{2}=7; \ \frac{924+8}{5}=\frac{32}{5}$ divide as notas por 10 antecipadamente e, quando tenta um algoritmo para o cálculo da média, fica confuso, soma todos os valores encontrados, indicando um outro quociente, e não consegue se decidir por uma resposta. Parece que houve um conflito entre uma estratégia praticada e a aplicação de uma fórmula que diria respeito ao conceito de média aritmética. Assim, o professor estaria atribuindo um significado à palavra média distinto de média aritmética para seus alunos, pois estes ficaram sem saber dessa divisão, que somente o professor praticava.

P: O que significa o 4, o 8 e o 6? São notas?

E1, E2, E4, E5: Eu me confundi, mas é a nota ponderada.

P: Por que eles são repetidos duas vezes? E por que se divide por 4? Por que depois se faz com 6 e 8? E depois com 924 e 8? Por que divide por 2? E por que 5 no denominador? E depois 32 no numerador? O que significam essas frações e essa igualdade $\frac{924+8}{5}=\frac{32}{5}$? $924+8=32$?

Outra maneira de lidar remeteu ao significado de média como uma divisão por 2 de notas. Um significado que se aproxima do significado de média como posição intermediária entre dois extremos. O estudante E2 que lidou dessa maneira com o enunciado do item pode fornecer a seguinte resposta.

E2: Somando todas as notas dela e dividindo por 2.

De acordo com um documento da OECD (2009, p. 82), a resposta mais comum incorreta foi 70, e infere que pode ter sido calculada uma média simples entre 60 e 80, por meio da efetuação de 60 + 80 dividindo o resultado, 140 por 2.

E3: Tomando a maior nota dela.

Santos (2008, p. 45) indica que SE112A respondeu que a média de Marli foi de 80 pontos, justificando que a "maior nota prevalece". Santos (2008, p. 45) infere que este estudante pode ter associado o contexto do problema com alguma situação que viveu em algum momento, ou seja, ele pode ter relacionado o contexto do problema com o fato de alguma vez algum professor ter considerado que a média dos estudantes em uma disciplina seria igual ao valor da maior nota obtida por cada um deles em suas provas. Ainda na resposta de SE112A ao questionário avaliativo, aplicado por Santos (2008), este estudante apontou esse item como sendo o mais fácil. Justifica que era o mais fácil "porque era só ver qual era a nota mais alta, essa era a média".

Os estudantes responsáveis pelas provas CE168C e SE162A apenas responderam 80, mas, com o precedente do estudante SE112A, é possível inferir que a resposta deles se justifique pelo mesmo motivo.

E4: Aplicando uma fórmula, técnica ou procedimento ensinado na escola.

E41: Ele operou com os números presentes no enunciado da questão.

E5: Operando com as notas dela e dividindo por 5.

P: Como o professor obteve a média de Marli nas quatro primeiras provas de ciências? De que maneira o professor chegou aos 60 pontos? O que é uma média de notas? Em que situações você já escutou a palavra média? Explique cada uma delas.

E6: Somando todas as notas e dividindo pelo número de provas.

E5: Operando com as notas dela e dividindo por 5.

A partir de uma resposta é que o professor poderá identificar o significado produzido a partir da palavra média e desenvolver uma sequência de aprendizagem que pode ser alguma das que seguem abaixo ou outra advinda de outro significado específico produzido pelo estudante.

P: Qual é a média máxima que Marli poderia obter? Por quê?

P: Você já ouviu falar em velocidade média, temperatura média, altura média, idade média de um grupo de pessoas ou média aritmética?

P: Um grupo de meninos no qual um deles tem 1,10m de altura, o outro tem 1,15m de altura, outro possui 1,23m e outro apresenta 1,35m de altura. A altura média desse grupo de garotos seria 1,35m?

P: O que essa expressão $M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \neq 80}{4}$ significa?

Mas não tinha $\frac{80+60}{4} = \frac{140}{4}$? Por que a média não é 35?

P: De onde que veio esse número 4 no denominador? Poderia ser 2 ou outro número qualquer? Faria diferença?

P: O que significa $\overline{x}_1$? Por que o índice 1? Poderia ser 2 ou uma letra?

P: O que é x_t.? e x_4 ?

P: O x_n poderia ser outro valor diferente de 2, qual? Como ficaria?

Quanto vale o n? Ele pode assumir qualquer valor? É variável ou fixo?

P: Mas quais poderiam ser então as quatro primeiras notas de Marli? **A1:** 20, 10, 30 e 20. **A2:** 40, 50, 70 e 80. **P:** para que serve?

A: Para saber quais alunos serão aprovados.

A: Para que os alunos e os pais saibam como está a sua situação na escola.

A: Para você ter uma ideia se está indo bem. **A4:** Para ver se você sabe a matéria.

A6: Somando todas as notas e dividindo pelo número de provas.

P: Vocês já ouviram falar em média em outras situações? Quais? E para que elas servem?

P: Como que cada uma delas é calculada? Vamos pensar nas situações de cada uma.

P: Você sabe como calcular a nota necessária para passar de ano na sua escola?

Sem o conselho?

P: Obtivemos aqui várias maneiras de se calcular a média, mas cada maneira apresentada por vocês fornece resultados diferentes. Isso quer dizer que um aluno pode tirar as mesmas notas nas mesmas provas mas ficar com médias diferentes? A palavra média pode ter significados diferentes? "dividir por dois", "somar", "dividir pelo número de provas", "escolher o maior valor", "aplicar uma fórmula"?

2°. Momento - Construindo ferramentas específicas

Nessa etapa são acrescidas as informações obtidas a partir dos diferentes contextos apresentados pelos estudantes, nos quais a palavra média e seus significados apareceram. Os estudantes podem se organizar em duplas para a discussão dessas situações e a elaboração de uma compreensão a respeito de Média, e das expressões Média Aritmética e Média Ponderada. Os estudantes são guiados, orientados a obterem uma maneira para calcular a média nas situações apresentadas por eles e a decidir a respeito de qual maneira seria mais adequada, diante da variedade de maneiras por eles apresentadas. O dicionário, os livros textos exercem um papel fundamental nessa etapa e devem ser frequentemente consultados pelos estudantes, para auxiliá-los nas tomadas de decisões, na escolha de modelos adequados e válidos para resolver as situações. O professor presta atendimento e lança perguntas às duplas, tais como

P: Seu pai fala sobre a velocidade média?

A1: Se correr muito leva multa.

P: E o que o seu pai quer dizer com isso?

A1: Ele fala que não pode correr muito, porque pode ser multado.

P: Tem relação com velocidade média?

P: Nesse caso, ele leva multa quando a velocidade média é alta ou baixa?

P: Se for alta é ruim, é diferente da escola?

P: Por que, quanto mais ele corre, mais a média aumenta?

P: O que significa andar a 80 km por hora?

P: Em que outras situações você já escutou a palavra média? Você pode dar um exemplo ou uma situação?

A1: A idade média.

A2: A temperatura média.

A3: A média de altura da população brasileira.

P: Para a reforma de minha casa, preciso de 3 latas de tinta de 1,5 litro, no valor de 40 reais, e de 2 latas de tinta de 1 litro que custam 35 reais cada uma. Qual o preço médio por litro de tinta?

P: Marta tem 1,35m de altura, Suzana tem 1,15m, Rosa tem 1,23m e Ana tem 1,10m de altura. A altura média desse grupo de meninas é de 1,35m? Por quê?

P: Qual é a média de Marli se ela tirou 60 nas 4 primeiras provas e 80 na quinta prova?

P: É possível que a média de um aluno seja maior do que cada uma das suas notas de todas as provas? Por quê?

P: Você sabe como calcular a nota para você passar de ano? O que é a média de um aluno em disciplina?

P: Existem outros tipos de média? Se existem, quais e como são calculadas? Para se obter a média é preciso sempre dividir por 2? Por que a média de Marli deve ser 70 se, na maioria das provas, ela obteve 60 e não 80? Você acha justo? Se Você tivesse realizado as mesmas provas que Marli e obtido as notas 60, 70, 70, 70 e 80 e sua média fosse M = 70 também, o que você acharia? Doze (12) descrições das dissertações apontaram para produções que indicam que foram somadas as 5 notas de Marli, ou apenas os dois valores que aparecem no enunciado do problema e dividido por 2.

Em Santos (2008, p. 42), encontramos estudantes que dividiram o resultado de 240+80 por 2, pois poderiam ter interpretado que a média seria igual ao total de pontos obtidos dividido pela quantidade de notas diferentes. Ao ser entrevistado, revelou que havia dividido 320 por dois, pois acreditava que toda nota deveria ser dividida por dois e porque, além disso, 320 ultrapassava o valor de 100 pontos que é mencionado no enunciado da questão. Santos (2008, p. 43) inferiu que pode ser que o estudante acredite que toda nota deva ser dividida por dois devido ao fato de seus professores utilizarem, para compor a média da disciplina em um bimestre, notas provenientes de dois instrumentos avaliativos: trabalhos e provas.

P: Qual a diferença entre uma Média de notas, Média em geral e Média aritmética?

P: Pode acontecer de uma nota valer mais do que outra? Se a resposta for sim, apresente um exemplo.

P: Um aluno tirou 9 pontos na primeira prova e na segunda tirou 5 pontos. Então a primeira prova valeu mais que a segunda.

P: Mas o professor disse que a primeira prova teria peso 1 e a segunda peso 2. Como a nota do aluno deveria ser calculada nesse caso? Ela seria aprovada com as notas do seu exemplo?

P: Mas então por que você somou apenas duas notas? Quais são as outras notas?

A2, A4: Eu fiz isso porque aparecem apenas dois números.

P: Então você não lê o problema, apenas olha e recolhe os números?

A2: Ela tem duas notas.

P: O 60 significa a mesma coisa que o 80? O que diz o problema a respeito do 60?

A2: O 60 é a média e o 80 é uma nota.

P: Então é diferente. A partir daí você pode pensar quais podem ter sido as quatro primeiras notas de Marli que resultaram na média de 60.

A2: Ela pode ter tirado 60 em todas elas.

P: Essas notas, na escola em que ela estuda, ela passaria de ano, por quê?

P: Qual é a média máxima que um aluno pode obter na sua escola? E a mínima?

P: Qual é a média mínima para ser aprovado em uma disciplina na sua escola?

P: Quais são os números que aparecem no enunciado do problema? Você precisa de todos eles para obter a Média de Marli após as cinco provas?

P: Você pode explicar como é o cálculo da nota da sua escola, e na de Marli? Qual a diferença entre elas?

P: Pense em um grupo de meninos no qual um deles tem 12 anos de idade, o outro tem 15, outro tem 13 anos e outro 16 anos de idade. A idade média desse grupo de meninos seria dada pela soma de suas idades? Então seria 56 anos? Isso faz sentido? Por quê?

P: Em um grupo de meninas, uma delas tem 1,10m de altura, a outra tem 1,15m, outra tem 1,23m e outra tem 1,35m de altura. A altura média desse grupo de garotas seria 1,35m? Por quê?

P: É possível que a sua média seja maior do que cada uma das suas notas de todas as provas? Por quê?

P: Marta tem 1,35m de altura, Suzana tem 1,15m, Rosa tem 1,23m e Ana tem 1,10m de altura. Qual a altura média desse grupo de meninas? Para que serve isso?

P: Rodrigo tem 12 anos, Júlio tem 15, André tem 13 e Osmar tem 16 anos de idade. A média das idades desses meninos é 56 anos? Por quê?

P: Você sabe como calcular a nota necessária para passar de ano?

P: Para que serve a média?

P: Para ver se o aluno vai ou não passar de ano.

P: O que é a média de um aluno em uma disciplina? Como ela é calculadas?

E: Média bimestral ou final?

P: Qual a diferença entre elas?

P: O que é média aritmética? Como se calcula?

P: Para se obter a média, é preciso sempre dividir por 2?

P: Existem outros tipos de média? Se existem, quais e como são calculadas?

P: Qual a diferença entre uma Média de Notas da escola e a Média nas outras situações? E Média Aritmética?

P: Qual é a média máxima que Marli poderia obter? Por quê?

P: Qual é a média máxima que um aluno pode obter na sua escola? Por quê?

P: O que significa velocidade média, temperatura média, altura média, idade média de um grupo de pessoas ou média aritmética?

P: Pense num grupo de meninos no qual um deles tem 12 anos de idade, o outro tem 15 anos de idade, outro possui 13 anos e outro, 16 anos. A idade média desse grupo de garotos seria 12+15+13+16? Seriam 56 anos? Isso faz sentido?

P: Um grupo de meninos no qual um deles tem 1,10m de altura, o outro tem 1,15m de altura, outro possui 1,23m e outro apresenta 1,35m de altura. A altura média desse grupo de garotos seria 1,35m?

P: Coloque outro exemplo no qual apareça a ideia de média de notas e resolva o problema. Depois elabore outra situação-problema na qual apareça a ideia de média relativa à temperatura.

P: Pense num exemplo de um problema em que apareça a ideia de Média de Notas e resolva o problema. Depois elabore outra situação-problema na qual apareça a ideia de média relativa à temperatura.

P: É possível que a sua média seja maior do que cada uma das suas notas de todas as provas?

3°. Momento - discussão

O 3° momento se constituiu em

- dar significado para a média de Marli e encontrar uma maneira de obtê-la.
- identificar e reconhecer ideias de média em algumas situações, inclusive na situação proposta pelo enunciado do problema já resolvido por eles;
- conjecturar, organizar, simbolizar e esquematizar na busca de criar um "modelo de" calcular a média aritmética, a partir da comparação e reflexão dessas situações e dos significados de média inerentes a cada uma delas.

As maneiras de lidar, mesmo diferentes das consideradas corretas, ou que levam a resultados que não receberiam nenhum crédito na correção proposta pela OCDE, apresentam-se a favor da aprendizagem dos estudantes, permitindo ao professor oportunidades de planejamento de ações diferentes das que tinha se programado para executar. É possível que, ao abrir mão de sua trilha, já bem pavimentada, o professor experimente momentos de angústia, pois estará se arriscando para além de sua zona de conforto, no entanto, somente se lançando no encorajamento, amparo, compreensão e reflexão pode possibilitar ao estudante sua autonomia.

Para resolver o item, os estudantes utilizaram conhecimento da sua vida prática, o que pode até ter conduzido a uma resposta diferente da considerada correta, uma vez que esses conhecimentos nem sempre são levados em conta. Supõe-se a possibilidade da separação desses conhecimentos. A análise das produções escritas parece mostrar que os estudantes interpretam o enunciado do problema pelo viés dos contextos que circunscrevem suas vidas. Freudenthal (1991) não desejaria que isso ocorresse de maneira diferente. Valeria a pena questionar qual é a matemática que está sendo cobrada nas avaliações de rendimento e qual matemática se deseja que os estudantes dominem. O que estaria "errado", então na matemática de estudantes que se saem "mal", por exemplo, no PISA?

4.5 Do Item Lixo

Quadro 7 – Enunciado do Item Lixo

2º item – LIXO
Para uma atividade escolar sobre o meio ambiente, os alunos coletaram informações sobre o tempo de decomposição de vários tipos de lixo que as pessoas jogam fora:

Tipo de lixo	Tempo de decomposição
Casca de banana	1 a 3 anos
Casca de laranja	1 a 3 anos
Caixas de papelão	0,5 ano
Goma de mascar	20 a 25 anos
Jornais	Alguns dias
Copos de plástico	Mais de 100 anos

Um aluno pretende mostrar os resultados em um gráfico de barras. Dê uma justificativa para o fato de que o gráfico de barras não é o mais apropriado para apresentar esses dados.

Fonte: OECD (2003).

De acordo com OECD (2009, p. 81), esse item visava avaliar o raciocínio dos alunos sobre como representar números (dados) de forma apropriada, e avaliar suas habilidades para comunicar eficazmente esse raciocínio. A resolução do item exige

- interpretar os dados;
- refletir sobre os dados;
- comunicar os resultados de sua reflexão.

A competência cosiderada para esse item pertence ao conjunto

denominado Reflexão. Esse item público serviu para avaliar a leitura e a interpretação da informação e a tomada de posição frente à forma como uma informação é apresentada, a capacidade da elaboração de um argumento que justifique a representação de dados em uma forma adequada, significativa e convincente; assim como o julgamento de representações quanto a essas qualidades (GAVE, 2004, p. 120). Segundo OECD (2009, p. 81), requerer reflexão sobre os dados disponíveis é um aspecto-chave do letramento em matemática.

Diferentemente do item Prova de Ciências, um item do tipo resposta de construção aberta solicita, além de apenas uma resposta, uma explicação para a resposta, que, nesse caso, diz respeito a justificar o fato de que o gráfico de barras não seria o mais apropriado para representar os dados fornecidos.

De acordo com OECD (2009, p. 81), seria considerada totalmente correta - crédito completo - a resolução que apresentasse um argumento baseado na grande diferença - magnitude - entre os números que representam tempos envolvidos e na consequente dificuldade em exibi-la; ou um argumento baseado na variabilidade dos dados nas diferentes categorias, e a incerteza resultante na construção do gráfico.

Seguem exemplos de justificativas, encontradas em OECD (2009, p. 82), que, se apresentadas, teriam crédito completo.

1ª) Justificativa baseada na grande variação dos dados, como, por exemplo:

- as diferenças de comprimento entre as barras do gráfico seriam muito grandes;
- se a barra que representa os "copos de plástico" medisse, por exemplo, 10 centímetros, a barra das caixas não mediria mais do que 0,05 centímetros;
- vai virar uma bagunça, uma começa em 0,5 ano e outra em mais de 100 anos(OECD, 2009, p. 81);
- você tem que fazer um eixo vertical de, no mínimo, 100 anos, com pequenos intervalos, porque você precisa ser capaz de ler alguns dias (OECD, 2009, p. 81).

2ª) Justificativa baseada na variabilidade dos dados para determinadas categorias, como, por exemplo:

- o comprimento da barra correspondente aos "copos de plástico" não está determinado;

- não se pode utilizar uma barra para representar 1 a 3 anos, ou 20 a 25 anos.

De acordo com OCDE (2005), receberiam nenhum crédito as outras respostas com justificativas tais como:

- porque não funcionaria;
- um pictograma é melhor;
- é impossível confirmar a informação;
- porque os números indicados na tabela são apenas informações (GAVE, 2004, p. 74).

4.5.1 Sequências de Intervenções para a Aprendizagem

A partir das resoluções do item, procedeu-se a uma análise das produções escritas geradas com a resolução, na qual foram buscadas as maneiras de lidar com o enunciado do item, de cada estudante.

O estudo dos trabalhos de Celeste (2008), Ferreira (2009) e Santos (2008) favoreceu a identificação das ***maneiras de lidar*** mais comuns nas produções escritas. Elas foram marcadas por uma letra maiúscula **M**, seguida de um dígito que as diferencia, conforme segue:

M0, as maneiras de lidar dos participantes que, em suas resoluções, deixaram em branco, ou não apresentaram justificativa, ou a justificativa se mostrou incompreensível para Celeste (2008), Santos (2008) ou Ferreira (2009).

M1, as maneiras de lidar dos participantes que apresentaram uma justificativa baseada em uma variação muito grande nos dados.

M2, as maneiras de lidar dos participantes que fundamentam sua justificativa na impossibilidade de representar, em um gráfico de barras, intervalos de tempo.

M3, para as respostas que justificam com a impossibilidade de representar tempos indefinidos, imprecisos ou inexatos, em um gráfico de barras, fornecendo ainda, exemplos de "alguns dias" ou "mais de 100 anos".

M4, as que sugerem uma forma de representação sem justificativa, ou com a justificativa de que o gráfico de barras é muito difícil de entender e a representação sugerida seria mais fácil, ou melhor.

M5, as que justificam que não seria possível encontrar uma escala adequada ou unidades de medidas para os tempos apresentados.

M6, as que justificam somente por meio do tema "meio ambiente".

Quadro 8 – Agrupamento das Descrições do Item Lixo

PROVAS	DESCRIÇÕES REPRESENTATIVAS DAS PRODUÇÕES	*Maneiras de lidar*
FE016 FP004 FP032 SE031A SE091A	Não apresentam produção escrita alguma.	**M0**
CE026C CE036C CE057C CE067C CE128B	*Maneiras de lidar* não identificadas. “Não foi possível inferir as estratégias adotadas por esses alunos” (CELESTE, 2008, p. 31).	**M0**
SE101A	Justifica que não é possível porque seria muito grande o gráfico.	**M1**
SE061A	Justifica que não é possível porque existem números muito grandes e números muito pequenos.	**M1**
CE128B	Justifica que o gráfico ficaria desproporcional.	**M1**
CE097D	Justifica que não é possível colocar tempos muito diferentes em um gráfico de barras.	**M1**
FE017 FP009 FP020 FP026	Justifica que não é possível representar em um gráfico de barras a grande variação de tempo de decomposição entre os tipos de lixo apresentados.	**M1**
FE018	Esboça um plano cartesiano, cujo eixo horizontal representa “anos ou dias?” e o eixo vertical, os tipos de lixos. Justifica que não é possível representar, no gráfico de barras, a grande variação de tempo de decomposição entre os tipos de lixo apresentados.	**M1**

FE013	Apresenta o esboço de um gráfico de barras que contém um eixo horizontal e um vertical, com três barras horizontais. Apresenta o esboço de um gráfico de colunas que contém apenas os eixos, horizontal e vertical, e duas colunas. Apresenta a justificativa de que, no gráfico de barras, não é possível representar os intervalos de tempo de decomposição do lixo.	**M2**
FE011	Justifica que o tempo de decomposição oscila entre certo tempo e, no gráfico de barras, não é possível visualizar essa oscilação.	**M2**
FE019 **FE020**	Inicia o esboço do gráfico, mas deixa incompleto. Justifica com a impossibilidade de representar intervalos de tempo em um gráfico de barras.	**M2**
CE016B	Responde "porque no gráfico de barras não pode colocar igual aquele ali a banana 1 a 3 anos nos gráficos de barras, é um ou três".	**M2**
SE021A	Justifica que "se a pessoa for ver esse gráfico não saberá decifrá-lo corretamente". Exemplifica que se for escolhido 25 anos para marcar no gráfico, a possibilidade de 20 anos estaria excluída.	**M2**
SE162A	Justifica que o tempo certo não é mostrado, mas "aproximadamente".	**M3**
CE077D	Justifica com a impossibilidade de representar tempos indefinidos em um gráfico de colunas.	**M3**
CE118B	Justifica que não é possível representar, no gráfico de barras, dados imprecisos.	**M3**
FP019	Justifica que o gráfico de barras não é o mais apropriado porque os dados dos jornais não são exatos.	**M3**
FE015	Justifica que ficaria complicado estabelecer esses "alguns dias" no gráfico.	**M3**
FE021 **FP014** **FP027**	Justifica que o gráfico de barras não é o mais apropriado, devido ao fato de que não há um número exato de tempo para dois tipos de lixo – jornais e copos de plástico. Explica que dados não exatos como "alguns dias" e "mais de 100 anos" não são passíveis de representação em um gráfico de barras.	**M3**
FE014	Justifica que um gráfico de barras não representa variação de tempo. E exemplifica com "alguns dias".	**M3**
CE108A	Justifica que não tem informações completas sobre o tempo	**M3**

	de decomposição e cita o exemplo do jornal, de alguns dias, que não informa o tempo exato em que irá decompor.	
SE112A **SE222A**	Justifica com a impossibilidade de representar alguns dias e/ou mais de 100 anos em um gráfico de colunas.	**M1** **M3**
SE212A	Responde que deveria usar um quadro e não o gráfico, senão teria que fazer o gráfico de 0,5 em 0,5 centímetros, para mostrar o tempo de decomposição da caixa de papelão. E não teria como mostrar o tempo do jornal.	**M1** **M3**
FE024	Justifica que o gráfico de barras não é o mais apropriado, devido ao fato de que os tipos de lixo apresentados na tabela, e o fato de qualquer outro tipo de lixo não ter um tempo exato para sua decomposição.	**M2** **M3** **M6**
FE012	O gráfico de barras não seria adequado porque o tempo de decomposição não ficaria adequado para ser colocado em barras.	**M1** **M2** **M3**
FP016	Responde apenas que não é adequado pelo tempo usado na decomposição dos tipos de lixo.	**M1** **M2** **M3**
FE008	Justifica que o gráfico de barras não seria o mais apropriado, pois "está trabalhando com alguns dados que estão em intervalo de tempo". Também menciona a dificuldade de representar o tempo dos copos de plástico, "mais de 100", "com isso não sei até quando terá minha escala". Justifica ainda que "os jornais ele não fornece o tempo para eu colocar no gráfico".	**M2** **M3**
FP010	Justifica que não é possível representar intervalos de tempo e dados imprecisos.	**M2** **M3**
FE006	Justifica que não é possível por causa do tempo de decomposição ser indicado como de mais de 100 anos, e essa informação não esclarece o número "corretamente". Também justifica que os tempos indicados por 20 a 25 anos e alguns dias não fornecem uma quantidade "correta" e para construir o gráfico de barras é preciso saber a quantidade "correta".	**M2** **M3**
CE168C	Responde apenas que, na sua "opinião", uma escala ou um gráfico de linhas deveria ser feito.	**M4**
FE004	Responde apenas que o gráfico de colunas seria o mais apropriado para representar os dados da tabela. Justifica pela "visualização das informações".	**M4**

SE132A	Justifica que um gráfico de barras seria muito complicado para se entender e o mais fácil seria um gráfico redondo.	**M4**
CE158C	Justifica que não é necessário, pois já tem a tabela.	**M4**
SE172A	Responde que talvez um quadro seja melhor.	**M4**
SE192A	Justifica que não são todos que entendem o gráfico de barras, então talvez seja melhor uma tabela.	**M4**
SE122A	Justifica que ficaria mais difícil para se entender as informações.	**M4**
SE202A	Responde: "Porque as pessoas tem que ficar assimilando o tempo de decomposição com os tipos de lixo e com isso elas perdem algum tempo, já num gráfico como esse (refere-se à tabela), fica mais fácil ver as características."	**M4**
SE081A	Considera o gráfico de colunas apropriado. Não justifica.	**M4**
SE182A	Justifica que faltam informações e sugere a apresentação em um gráfico de setores por meio de um desenho.	**M3** **M4**
FE023	Escreve que não seria adequado por motivo de escala. Esses objetos que se decompõem rápido, não tem como representá-los.	**M5**
FP025	Explica que a inadequação acontece por causa da diferença nos tempos de decomposição, que se dá em anos. Mas os tipos de lixo diferem, ou seja, estamos falando de coisas diferentes, sendo assim não há como fazer uma comparação.	**M5**
FP022	Justifica que não é o mais apropriado porque apareceram números decimais, dias e anos; e porque não estavam na mesma medida de tempo.	**M5**
FP017	Escreve que acredita que não seja o mais indicado porque os jornais se decompõem em dias, e não em anos.	**M5**
FE009	Justifica que o problema é a variação de unidade de tempo (ano, dia).	**M5**
FE007	Justifica que a representação por meio de um gráfico de barra não seria a mais apropriada porque seria difícil escolher um intervalo adequado para que a estética e visualização do gráfico ficassem boas. Escreve "veja bem, os intervalos variam de 0,5 a 100 anos".	**M5**
FE010	Explica que, como a diferença de tempo de decomposição	**M1**

	entre um material e outro é muito grande, um gráfico de barras não seria adequado visto que a escala seria muito pequena para poder representar num mesmo eixo os valores de 0,5 ano e 100 anos ou mais. Outra explicação seria: até onde iria uma barra para representar "mais de 100 anos"?	**M5**
FP029	Explica que, como a diferença entre o maior tempo de decomposição (mais de 100 anos) e o menor (alguns dias) é muito grande, é difícil de determinar uma escala apropriada para a construção do gráfico.	**M1** **M5**
FP028	Registra um gráfico de colunas incompleto, no qual o eixo vertical representa o tempo de decomposição em anos, e o eixo horizontal representa os tipos de lixo. No esboço desse gráfico, registra quatro colunas e um sinal de interrogação. Justifica que os dados não estão na mesma unidade de medida.	**M1** **M3** **M5**
FE001	Esboça um plano cartesiano, em que o eixo vertical representa o tempo e o eixo horizontal representa o tipo de lixo. No eixo vertical indica 0,5 ano e 100 anos. Justifica que não é possível encontrar uma escala apropriada para a construção do gráfico, pois precisa registrar valores entre 0,5 ano e 100 anos e o valor “alguns dias”. Escreve que isso não seria possível “sem comprometer o propósito do gráfico”.	**M1** **M3** **M5**
FP006	Apresenta o esboço de um plano cartesiano em que o eixo horizontal representa o período em anos de decomposição, e nada apresenta a respeito do eixo vertical. Justifica que não é possível representar no gráfico de barras por causa da “não proporcionalidade”, e cita como exemplo “a goma de mascar, de 20 a 25 anos, e os copos de plástico, mais de 100 anos”.	**M1** **M2** **M3** **M5**
CE047A	Responde que “os tempos não estão apropriados”.	**M1** **M2** **M3** **M5**
SE152A	Justifica que não é possível devido aos tempos apresentados, mas escreve entre parênteses que não entendeu.	**M1** **M2** **M3** **M5**
CE138B **CE087D**	“Argumenta sobre o gráfico pedido no problema, sem recorrer a outros gráficos ou conteúdos” (CELESTE, 2008, p. 31).	**M1** **M2** **M3** **M5**

SE071A	Apresenta duas justificativas: uma fundamentada na unidade de medida da variável tempo de decomposição, afirmando que o tempo deveria estar em anos; e a outra fundamentada na impossibilidade de representação do tempo de decomposição expresso por "alguns dias", pois escreve que o tempo deveria estar em anos.	**M3** **M5**
SE142A	Responde: "Porque tem informações sobre frutas, e todos nós sabemos que cascas de frutas fazem até bem para a terra como um adubo natural. O mais apropriado seria ele falar sobre ferro, pneus e vidro".	**M6**
CE148B	Justifica que "não está mais aproximado porque as cascas de banana e de laranja são lixos, mas eles são apropriados para adubo para plantações. Só os outros lixos prejudicariam o meio ambiente".	**M6**
SE011A	Responde "Pois ele está fazendo uma pesquisa com vários tipos de decomposição e o resultado sempre será o mesmo".	**M6**
SE051A	Responde que o gráfico de barras não é apropriado, porque é só olhar bem o tanto de anos que leva para decompor esses lixos que nós jogamos fora.	**M6**
SE041A	Justifica que é porque o tempo de decomposição é muito longo, e o único material que poderia ser mostrado era o jornal.	**M6**
FE025	Esboça um gráfico de colunas, cujo eixo horizontal representa o tempo de decomposição em anos e o eixo vertical, o tipo de lixo. Representa, no gráfico, apenas o tempo de decomposição da casca de banana. Justifica que o gráfico de barras não é o mais apropriado, pois não contém "número" dos tipos de lixo desperdiçado.	**M3** **M6**

A identificação das maneiras de lidar acima ocorreu a partir das descrições das produções escritas dos três trabalhos de pesquisa, realizando uma análise interpretativa à luz da análise de conteúdo (BARDIN, 1977; 2004).

Os três trabalhos de pesquisa realizaram uma análise das produções escritas. Com isso, as três pesquisadoras puderam apresentar inferências e conclusões. Todas essas informações foram recolhidas e organizadas de forma a compor mais informações para tratamento das maneiras de lidar dos estudantes com o enunciado do item LIXO.

Quadro 9 – Agrupamento das Descrições do Item Lixo pelas Maneiras de Lidar

Maneiras de lidar	**Análises e discussões do interior do GEPEMA.**
M0	Foram caracterizadas como não identificadas 10 respostas, dentre as quais, 5 que foram deixadas em branco e outras 5 que são aqui caracterizadas dessa forma, pois a descrição de Celeste (2008, p. 31) as classifica como "não foi possível inferir as estratégias adotadas por esses alunos". No entanto, com um deles, CE128B, Celeste (2008, p. 32-33) realizou uma entrevista que permitiu identificar a *maneira* como o participante lidou com o enunciado do item. Essa informação foi utilizada na intervenção.
M1	Apesar de constar apenas a produção escrita "porque seria mais difícil de entender", Celeste (2008, p. 32) afirma que CE128B, em entrevista, explicou que "o gráfico ficaria desproporcional" (desenhando uma barra muito pequena e uma barra muito grande, mostrando a diferença entre os tamanhos). Complementa sua justificativa mostrando a diferença entre os tamanhos, dizendo que o gráfico "não daria uma visão clara", mas, "por outro lado, a tabela apresenta os dados com mais clareza". Celeste (2008, p. 33) infere que esse aluno compreende que as barras ficariam muito desproporcionais, por algumas representarem dias e outras, anos. O aluno conclui que seria, portanto, inviável esse recurso para representar os dados expostos. Para as produções de FE017, FP009, FP020, FP026, Ferreira (2009, p. 56) infere que os participantes podem ter percebido a desproporcionalidade entre o tempo de decomposição relativo ao tipo de lixo que se decompõe mais rápido e o que se decompõe mais lentamente e, com isso, consideraram que seria difícil construir o gráfico de barras, ou consideraram que ficaria, visualmente, incompreensível. Ferreira (2009, p. 56) infere ainda que o participante FE017 pode ter feito a suposição de que não seria possível encontrar uma escala apropriada para construir um gráfico de barras que representasse a "grande" diferença entre tempos de decomposição dos tipos de lixo apresentados na tabela do enunciado. Infere que o participante FP009 pode ter compreendido que a estética do gráfico de barras não ficaria muito boa, por causa da razão, entre o menor tempo de decomposição e o maior, ser muito grande. E, para o participante FP020, infere que a dificuldade estaria entre dois tipos de lixo (jornais e copos de plásticos), sendo também difícil representar essa "grande" diferença em um gráfico de barras. Infere ainda que o participante FP026 poderia acreditar que seria possível construir um gráfico de barras, se não fosse por apenas considerar "grande" a diferença entre os tempos de decomposição de alguns tipos de lixo, pois "ficariam desproporcionais". Diante das produções de FE012 e FP016, Ferreira (2009, p. 60) infere que eles podem ter atribuído a inadequação do gráfico à impossibilidade de representação de grandes diferenças de tempo.

	Na produção de FE018, o participante esboça um plano cartesiano indicando, no eixo vertical, as siglas CB, CL, CP, GM, J, CP. A partir disso, Ferreira (2009, p. 61) infere que as siglas estariam representando os tipos de lixo: casca de banana, casca de laranja, caixas de papelão, goma de mascar, jornais e copos de plástico, respectivamente. No eixo horizontal, escreve, entre parênteses, "anos ou dias?", o que faz Ferreira (2009) inferir que o participante ficou em dúvida sobre qual unidade de tempo utilizaria para esboçar o gráfico pretendido. O participante apresenta como justificativa "se fizer o gráfico de barras, uma barra remontará a outra". Infere que ele esteja se referindo à grande diferença de tempo de decomposição entre os tipos de lixo apresentados, o que deixaria algumas barras muito grandes e outras quase imperceptíveis, de modo que algumas barras centrariam a atenção em si. E conclui que, por isso, utilizou o termo "remontar" no sentido de estar mais "elevada" do que as outras.
	Ferreira (2009, p. 64) infere que o participante FP006 considerou que "não seria possível representar dados que guardam uma desproporcionalidade entre si", pois o participante pode ter pensado na diferença desproporcional de tempo entre "alguns dias" e "mais de 100 anos". Isso devido à justificativa de FP006, "Outro fator é a não proporcionalidade. Ex: Goma de mascar de 20 a 25 anos e os copos de plásticos de mais de 100 anos".
	Ferreira (2009, p. 65) infere que a justificativa apresentada em FP028 parece se referir à impossibilidade de representar o tempo de decomposição dos jornais (alguns dias), por se tratar de um valor estritamente menor do que os outros apresentados, o qual seria praticamente "ignorado" no gráfico (no sentido de ficar quase que imperceptível).
	Santos (2008, p. 49) infere que o estudante SE222A pode ter achado que seria difícil a visualização pelo fato de o tempo de decomposição de um tipo de lixo ser pequeno e de o outro tempo ser grande.
	Santos (2008, p. 50) menciona que o estudante SE212A tenta imaginar a construção do gráfico de barras a partir de uma escala, mas chega à conclusão de que seria muito complicado representar mais de 100 anos já que teria que colocar no gráfico uma barra de 100 cm.
	SE101A, de acordo com Santos (2008, p. 52), provavelmente se deteve apenas no fato de que o tempo de decomposição dos copos de plástico é muito grande, e isto dificultaria o desenho de um gráfico de barras já que o gráfico, como o próprio estudante respondeu, seria muito grande.
	Santos (2008, p. 54) infere que o estudante SE051A pode ter pensado que, se todos os dados sobre o tempo de decomposição fossem utilizados, o gráfico seria muito grande, devido aos lixos que demoram muito tempo para se decompor como os copos de plástico.
	Santos (2008, p. 54) inferiu que o estudante SE061A estaria se referindo à diferença entre os tempos de decomposição de "mais de 100 anos" e de "alguns dias". Durante a entrevista, o estudante

	respondeu que o gráfico de barras não seria o mais apropriado devido à grande diferença nos tempos de decomposição e que, com isso, teria uma diferença muito grande no comprimento das barras, pois uma seria muito grande, devido ao tempo "mais de 100 anos", e outra muito pequena, devido ao tempo "alguns dias". Isso confirmou a hipótese. Explicou, no entanto, que essa diferença não impediria a utilização do gráfico de barras, somente dificultaria a construção.
M2	Celeste (2008, p. 32) infere que CE016B, ao responder "porque no gráfico de barras não pode colocar igual aquele ali a banana 1 a 3 anos nos gráficos de barras é um ou três", o estudante demonstra compreender quando não se pode usar o gráfico de barras, pois demonstra perceber que é um intervalo de tempo e, no gráfico de barras, deveria colocar um ano ou três anos, e não um intervalo (um a três anos), porque há outras informações apresentadas na tabela que não são intervalares. Sobre a produção de FE011, Ferreira (2009, p. 57) infere que, ao utilizar o termo "oscilação", o participante estivesse se referindo aos tempos de decomposição, em intervalos de tempo, dos tipos de lixo, de modo a não ser possível representá-los no gráfico de barras, segundo sua justificativa. Sobre a produção de FE020, infere que o termo "variação" foi utilizado no mesmo sentido de "oscilação", tal como utilizado por FE011. Ferreira (2009, p. 57) ainda acrescenta que o exemplo apresentado por FE020, da "casca de banana", com a variação de 1 a 3 anos para decomposição, um intervalo de tempo, foi o que ajudou a reforçar a sua inferência. Diante das produções de FE012 e FP016, Ferreira (2009, p. 60) infere que eles podem ter atribuído a impossibilidade de construção do gráfico à impossibilidade de representação de intervalos de tempo, porém isso não fica explícito em suas respostas. De acordo com Ferreira (2009, p. 60), FE006 e FP010 apresentam a justificativa: não é possível representar, no gráfico de barras, intervalos de tempo. Ferreira (2009, p. 61) infere que o participante FE019, ao tentar representar, no gráfico de colunas, o tempo de decomposição da casca de laranja, percebeu que não conseguiria com apenas uma coluna, pois ela remeteria a um valor único e exato, como um, dois ou três anos, ou seja, forneceria ao leitor do gráfico a impressão de que há um tempo exato para a decomposição do lixo, o que não seria verdade, pois o tempo de decomposição desse tipo de lixo é dado em um intervalo de tempo. Ferreira (2009, p. 63) infere que FE008, ao afirmar que "não é o mais apropriado, pois ele está trabalhando com alguns dados que estão em intervalo de tempo", refere-se aos três tipos de lixo: casca de banana, casca de laranja e goma de mascar, pois o participante justificou que não é possível representar, no gráfico de colunas, dados como intervalos de tempo.

	Ferreira (2009, p. 63) infere que a justificativa de FP006, "o fato do tempo de decomposição ser de 1 a 3 anos (é melhor estar definido o tempo)", também está baseada na impossibilidade de representar intervalos de tempo em um gráfico de colunas. Santos (2008, p. 48) identifica que o estudante de SE021A apresenta uma justificativa fundamentada na impossibilidade de representar o intervalo de tempo de 20 a 25 anos, tempo de decomposição da goma de mascar, por meio de um gráfico de barras. Infere a possibilidade de o estudante imaginar que, se fosse utilizar o gráfico de barras para representar o tempo de decomposição da goma de mascar, deveria escolher apenas uma das extremidades do intervalo. Assim, qualquer que fosse a escolha, o tempo de decomposição apresentado não corresponderia ao tempo de decomposição da goma de mascar. Infere que, talvez, por isso, o estudante tenha escrito que, "se uma pessoa fosse ver o gráfico, não saberia decifrá-lo corretamente", pois não saberia identificar qual seria exatamente o tempo de decomposição da goma de mascar, uma vez que não teria uma informação precisa.
	Num primeiro momento, o estudante SE081A respondeu que o gráfico de barras seria adequado, pois ele conseguiu construir um. No entanto, ao ser entrevistado, foi modificando sua opinião e justificativa. Chegando a se indagar se "não ser adequado" significa "estar errado". Desenha novamente o gráfico e fica pensando. Por fim, conclui que "não seria adequado" devido à impossibilidade da representação do tempo de 1 a 3 anos (SANTOS, 2008, p. 55).
M3	Celeste (2008, p. 30) infere que o aluno responsável pela produção de CE108A parece perceber que, para a construção de um gráfico de barras, é preciso saber o tempo exato, para que a informação possa ser utilizada como dado. Nessa mesma produção é citado o exemplo do jornal, alguns dias. Pode-se inferir que ele estava se referindo a tempos indefinidos, como o do jornal, alguns dias, e dos copos de plástico, mais de 100 anos. Ferreira (2009, p. 58) menciona que os participantes FE014, FE015 e FP019 indicaram a impossibilidade de representar, no gráfico de barras, o tempo de decomposição dos jornais, que foi dado como "alguns dias", e comentam que, mesmo que a variável escolhida para o tempo de decomposição fosse "dias", o termo "alguns" é impreciso e não seria passível de representação por meio de um gráfico de barras. Menciona também que os participantes FE021 e FP014, além de indicarem a impossibilidade de representar a quantidade "alguns dias", no gráfico de barras, citam a impraticabilidade de reproduzir o tempo de decomposição dos copos de plásticos (mais de cem anos). Os participantes FE024 e FP027 indicam que os dados fornecidos, na tabela do enunciado, não são "exatos" e, por isso, não podem ser representados. Diante das produções de FE012 e FP016, Ferreira (2009, p. 60) infere que eles podem ter atribuído a dificuldade da construção do gráfico à impossibilidade de representação de dados imprecisos, porém isso

não fica explícito em suas respostas.

Ferreira (2009, p. 61) menciona que FE001 justifica que não seria possível representar o tempo “alguns dias” no gráfico de barras, e infere que isso não seria possível devido à imprecisão desse tempo.

A partir da produção escrita de FE008, Ferreira (2009, p. 63) infere que o participante imaginou que não seria possível representar, no gráfico de colunas, dados imprecisos também como “alguns dias”, pois exemplificou a impossibilidade de representar “mais de 100 anos”.

Ferreira (2009, p. 64) infere que o participante, que resolveu a prova FE025, ao perceber alguma dificuldade para esboçar o gráfico, forneceu uma justificativa que, possivelmente, se refere à impossibilidade de representar, no gráfico de colunas, dados imprecisos. Ferreira (2009, p. 65) infere também que, pelo registro “não contém número dos tipos de lixo desperdiçado”, o participante procurou informar que o gráfico “não apresenta quantidade exata do tempo de decomposição dos tipos de lixo”.

Ferreira (2009, p. 65) infere que, provavelmente, o sinal de interrogação se refere à dificuldade que o participante teve de indicar o que cada coluna representaria nos eixos, que representariam os tempos de decomposição para cada tipo de lixo.

Ferreira (2009, p. 65) infere que, provavelmente, o sinal de interrogação se refere à dificuldade que o participante teve de indicar o que cada coluna representaria nos eixos, que representariam os tempos de decomposição para cada tipo de lixo.

Quanto ao estudante SE112A, Santos (2008, p. 49) infere que ele pode ter se detido apenas no tempo de decomposição do copo de plástico e não ter observado que em outros casos também não seria possível representar o tempo de decomposição; ou que ele pode ter considerado que nos outros casos seria possível representar o tempo de decomposição dos lixos, como o dos jornais, “alguns dias”, e acreditado que somente o tempo dos copos de plástico, “mais de 100 anos”, seria impossível representar, devido não somente à imprecisão do tempo, mas, principalmente, por ser um tempo muito longo.

Santos (2008, p. 49) infere que o estudante SE222A pode ter achado que seria difícil a visualização pelo fato de os tempos de decomposição desses lixos não estarem definidos com precisão.

Santos (2008, p. 49) considera a possibilidade de o estudante SE071A não ter percebido que o tempo de decomposição dos copos de plástico, mais de 100 anos, apresentava uma dificuldade similar à por ele levantada quanto ao tempo de decomposição de jornais, alguns dias. Por isso pode ter considerado apenas esta última para compor a sua segunda justificativa.

Santos (2008, p. 50) infere que uma justificativa do estudante SE212A estivesse relacionada à impossibilidade de representar graficamente alguns dias, por não ter precisamente quantos dias levaria a decomposição dos jornais.

Santos (2008, p. 51) infere que o estudante pode ter considerado que não haveria informações suficientes, por não saber, com precisão, a quantidade de dias de composição dos jornais e a quantidade de anos para a decomposição dos copos de plástico. Ou, ainda, que no gráfico

	de barras seria impossível representar os intervalos de tempo: 1 a 3 anos ou 20 a 25 anos. Santos (2008, p. 55) infere que, provavelmente, esse estudante, SE162A, levou em consideração, para dar suas respostas, os intervalos de tempo e os tempos "alguns dias" e "mais de 100 anos", já que SE162A disse que não seria possível representar esses tempos, por não ter os tempos precisos, mas apenas aproximações.
M4	Quanto à produção de FE004, na qual consta que o gráfico de colunas seria o mais apropriado para representar os dados no que diz respeito à "visualização das informações", Ferreira (2009, p. 66) infere a possibilidade de que o participante não tenha apresentado uma justificativa de que o gráfico de barras não seria apropriado, por achar suficiente apresentar um outro tipo de gráfico que considerou mais adequado. Infere ainda que o participante pode ter considerado possível construir um gráfico de barras com as informações da tabela, mas considerou que o de colunas seria mais conveniente à visualização, e possui características similares ao de barras, com a vantagem de facilitar a leitura das informações. Celeste (2008, p. 32) infere que CE158C relaciona gráficos a tabelas e parece saber que tais registros podem apresentar as mesmas informações, porém de maneiras diferentes. Santos (2008, p. 51) menciona que, para compreender melhor a produção escrita de SE132A, fez uma entrevista para identificar o que levou esse estudante a considerar que o gráfico de barras poderia ser complicado para se entender, e o que o levou a considerar que o gráfico de setor seria mais fácil. Na entrevista, o estudante respondeu que preferia o gráfico de pizza (termo utilizado), pois era mais fácil, mas não soube dizer se esse gráfico era mais apropriado do que o de barras. No momento da entrevista, Santos (2008, p. 51) relata que o estudante começou a esboçar o gráfico de barras, mas não terminou e concluiu que o único tempo que poderia representar era o da caixa de papelão porque era 0,5 ano. Ao ser questionado a respeito de como teria certeza de que o gráfico desenhado por ele (gráfico de setor) mostraria o tempo de decomposição, ele respondeu que iria ter certeza pelo tamanho que indicaria em cada parte, disse que o tempo de decomposição dos copos de plástico deveria ter a maior parte no gráfico de setor porque o tempo de decomposição era o maior, e o tempo de jornais deveria ter a menor parte no gráfico, pois o tempo de decomposição era de apenas alguns dias. Santos (2008, p. 51) infere que o estudante SE182A possa ter considerado que a falta de precisão no tempo de decomposição de alguns tipos de lixo não dificultaria a construção de um gráfico de setor. Santos (2008, p. 52) infere que, para o estudante SE172A, um quadro tenha sido considerado o melhor porque o problema apresenta os dados desse modo, e ele, supostamente, não teve dificuldades para

	entender as informações assim apresentadas. Santos (2008, p. 52) infere que talvez o estudante SE192A, ao explicar que o gráfico de barras fosse mais difícil de fazer do que uma tabela, tenha pensado na dificuldade de representar uma barra para o tempo de decomposição dos jornais, por exemplo. Desse modo, a tabela seria mais fácil, justamente por não haver a necessidade de precisar o tempo de decomposição dos tipos de lixos. Santos (2008, p. 52) infere que, para esse estudante, possivelmente, a justificativa para o gráfico de barras não ser o mais apropriado diria respeito apenas ao suposto tempo que se gastaria para associar as informações indicadas no eixo do tipo de lixo e no eixo do tempo de decomposição. Essa inferência foi confirmada durante a entrevista com o estudante, já que ele explicou que essa seria mesmo a justificativa ao resolver novamente a questão. Ele ainda explicou que uma tabela facilitaria a interpretação do leitor, pois as informações estão "mais juntas". Ao ser questionado a respeito de como ele representaria os tempos de decomposição indefinidos ou imprecisos no gráfico, o estudante disse que seria complicado representar alguns dias num gráfico de barras e que isso, somado ao fato de ter que ficar associando as informações no gráfico, justificaria o fato de que o gráfico de barras não seria o mais apropriado. Santos (2008, p. 55) infere que SE122A tenha considerado que tais tempos pudessem ser representados no gráfico, mas, como o estudante afirmou que "ficaria mais difícil de para se entender as informações", não seria o mais apropriado.
M5	Ferreira (2009, p. 58) infere que as justificativas apresentadas por FE009 e FP017 estão baseadas na impossibilidade de representar, no gráfico de barras, os dados por estarem em unidades de medida diferentes (dias e anos). Assim, para representar esses dados deveria haver uma única variável de tempo (dias ou 35 anos). Infere que o participante FP022, além de apresentar a impossibilidade de representar dias e anos como unidade de medida de tempo em um único gráfico, parece julgar não ser possível representar números decimais e inteiros. Embora não nos tenha sido muito compreensível, tentamos fazer uma leitura da justificativa de FP025. Ferreira (2009, p. 54) indica que as produções dos participantes FE007, FE010, FE023 e FP029 mostram uma justificativa de por que não é possível encontrar uma escala apropriada à construção do gráfico a partir dos dados fornecidos na tabela. Ferreira (2009, p. 59) infere que o "intervalo adequado", ao qual o participante FE007 se refere, seja a escala do gráfico. Embora os participantes FE010 e FP029 indiquem a "grande" diferença entre os tempos de decomposição dos tipos de lixo, suas justificativas parecem estar baseadas na impossibilidade de encontrar uma escala apropriada para baseadas na impossibilidade de encontrar uma escala apropriada para a construção do gráfico de barras que possa representar a divergência de valores. O participante FE023 também cita, como causa da

	impossibilidade de construir esse tipo de gráfico, a necessidade de encontrar uma escala para representar os dados. Ao fornecer o exemplo de que não dá para representar "alguns dias", parece sugerir que construiria um gráfico cuja escala seria determinada por períodos de anos, o que impossibilitaria a representação de "alguns dias". Ferreira (2009, p. 61) menciona que FE001 justifica que não seria possível encontrar uma escala "apropriada". Ferreira (2009, p. 63) infere que a justificativa de FP006, "Outro fator os jornais estar em dias (temos que ter a mesma natureza) exemplo tudo em anos", esteja baseada em que, para representar dados em um gráfico de barras, os dados precisariam estar na mesma unidade de medida. Como nesse caso a variável é o tempo, os dados deveriam estar expressos todos em "dias" ou em "anos". Com isso, eliminou a possibilidade de representar, no gráfico, o tempo "alguns dias". Santos (2008, p. 49) infere que o estudante SE071A pode ter compreendido que não faria sentido utilizar unidades de medidas diferentes para a mesma variável e, por esse motivo, respondeu que o gráfico teria que apresentar o tempo em anos. Santos (2008, p. 50) infere que a justificativa do estudante SE212A se refere à dificuldade de encontrar uma escala que fosse suficiente para representar os dados em um gráfico de barras. O estudante tentou adotar uma escala em que cada 0,5 ano do tempo de decomposição dos tipos de lixos seria representado por 0,5 cm. Infere ainda que talvez essa opção tenha se dado pelo fato de o menor tempo preciso de decomposição ser o da caixa de papelão, que é exatamente 0,5 ano. Infere que ele pode ter acreditado que a escala deveria ser adotada em função do menor tempo ou em função do tempo mais preciso, mas conclui que ela não seria adequada.
M6	Celeste (2009, p. 31) se refere a essa produção da prova CE148B como de *Experiência Pessoal*. Nesse grupo está apenas a prova de um aluno da 8ª série, CE148B, o qual respondeu que "não está mais aproximado porque as cascas de banana e de laranja são lixos, mas eles são apropriados para adubo para plantações. Só os outros lixos prejudicariam o meio ambiente". Essa resposta nos mostra que o aluno utilizou conhecimentos ligados às suas experiências pessoais, dentro e fora da escola, para responder ao problema. Em entrevista, perguntamos a esse aluno o porquê de ter respondido dessa maneira, e ele nos contou que uma vez estava com seu pai num terreno e havia dito que não poderia jogar as cascas das frutas no chão, pois eram lixo, mas seu pai o corrigiu e afirmou que poderia sim, pois elas serviam como adubo para a terra. Celeste (2009, p. 31) comenta que, a partir da entrevista, foi possível perceber que o enunciado do problema proporcionou ao aluno o reconhecimento e a valorização de suas experiências pessoais e a possibilidade de aplicação delas num contexto escolar, o que, frequentemente, não é comum na escola. O aluno comparou o contexto do problema com experiências vividas anteriormente (CELESTE, 2009, p. 56 e 57).

	A justificativa de SE041A poderia levar a uma inferência de que ele estaria a lidar com o item de maneira semelhante a M1, preocupado com a dificuldade de representação de dados de magnitude tão discrepante, mas, investigando, a entrevista relatada em Santos (2008, p. 53) esclarece que o estudante estaria preocupado com os tempos de decomposição “muito longos” simplesmente pelo fato de que isso dificultaria ou impossibilitaria que os estudantes experienciassem a situação para verificarem, por eles mesmos, o resultado de decomposição de cada material listado no enunciado do item. Na entrevista, ele respondeu que o jornal e as caixas de papelão seriam os únicos possíveis dos alunos verificarem por meio da experiência, uma vez que os tempos de decomposição respectivos seriam de apenas alguns dias e de 0,5 ano. Ainda, segundo SE041A, o tempo de 1 a 3 anos seria possível dependendo do tempo que os alunos teriam ainda para estudar. Ele exemplificou que, se os alunos estivessem na 5ª série, isto seria possível. Santos (2008, p. 53) infere que seria possível que o estudante SE051A tivesse relacionado o contexto do problema com outras informações sobre o tempo de decomposição de outros tipos de lixo, sobre campanhas ambientais que são veiculadas por diferentes meios de comunicação.
	No caso de SE142A, Santos (2008, p. 55) infere a possibilidade de o aluno ter estabelecido uma relação do contexto do problema com outras informações sobre o tempo de decomposição de outros tipos de lixo, com campanhas de preservação ambiental que são veiculadas por diferentes meios de comunicação ou nas escolas. Ele apresenta a seguinte justificativa: “Porque tem informações sobre frutas, e todos nós sabemos que cascas de frutas fazem até bem para a terra como adubo natural. O mais apropriado seria falar sobre ferro, pneus e vidro”. Santos (2008) infere que o gráfico de barras, para esse estudante, poderia não ser o mais apropriado por conter informações sobre o tempo de decomposição de lixos orgânicos. Na entrevista, ele informou que seria possível fazer o gráfico, mas precisaria das porcentagens para cada tipo de lixo. Quando questionado a respeito das porcentagens, disse que para os jornais, por exemplo, não colocaria, ou colocaria no máximo 15 dias. Quando lhe foi perguntado sobre como teria certeza de que era esse o tempo exato de decomposição do jornal, o estudante ficou pensativo e respondeu que não faria o gráfico, pois, nesse caso, tratava-se de informações sobre lixos orgânicos. Para ele, o gráfico deveria ser feito somente com materiais que demoram mais tempo para se decompor e não com orgânicos. Também confirmou que relacionou o problema com informações conhecidas por meio da escola e da televisão.

Fonte: Autora.

Tomando como base todas as informações apresentadas e organizando-as segundo a análise pelas maneiras de lidar, são construídos diálogos imaginados com os supostos estudantes **E0, E1, E2, E3, E4, E5** e **E6,** representantes de **M0, M1, M2, M3, M4, M5** e **M6**, respectivamente.

Uma primeira indagação, direcionada a todos os estudantes, diz respeito diretamente ao item proposto, já conhecido e resolvido por eles.

Os esboços de diálogos seguintes são para trazer à tona e/ou confirmar contextos imaginados pelos estudantes, quando em contato com o enunciado do item, na condição de resolver a situação-problema.

P: Por que o gráfico de barras não seria o mais adequado para a representação dos dados apresentados no quadro?

Do primeiro grupo de estudantes - E0 não se obteve informação alguma a partir de suas produções escritas. Assim, é necessário conduzi-los a se expressarem em relação ao enunciado do item, para que o professor possa estabelecer um ponto de partida, um contexto para matematização.

E0: Não sei. Não consegui entender a pergunta.

P: O que seria um gráfico de barras? Apresente um exemplo.

E0: Não conheço gráfico de barras.

P: Pesquise então o significado dessa expressão nos livros. Verifique e explique para "que serve", qual a "utilidade" de um gráfico de barras.

E0: Não encontrei gráficos de barras no primeiro livro.

O estudante E0 está fazendo referência ao Livro Didático Público (PARANÁ, 2007), o qual apresenta uma abordagem diferenciada dos livros "conteudistas", uma abordagem problematizadora. Discute a importância de se compreender as teorias estatísticas para o tratamento de dados, inclusive por elas já fazerem parte da vida dos estudantes e se fazer necessária a sua compreensão para o exercício da cidadania. Sugere a pesquisa por parte dos professores e dos estudantes, não discorrendo sobre "gráficos de barras" especificamente.

P: Pesquise em outros livros até formar uma ideia do que seja.

No livro destinado ao Ensino Médio, denominado "Matemática - aula por aula" os tipos de representações gráficas para conjuntos de dados são apresentados um a um, com uma breve definição, seguidos por um exemplo. O tópico "O gráfico na Estatística" é introduzido por meio do período "O gráfico estatístico e as tabelas são recursos de fundamental importância para a ciência e pessoas em geral, facilitam a visualização de dados e permitem uma compreensão mais rápida da informação" (SILVA; BARRETO, 2005, p. 57). O livro apresenta como primeira forma de representação o "gráfico cartesiano", em vez de chamar de "gráfico de linhas", como o gráfico que pode ser construído a partir de uma tabela. "O gráfico nos mostra a variação de uma grandeza em função de outra, permitindo uma análise profunda da situação, por meio de uma mensagem imediata" (SILVA; BARRETO, 2005, p. 57-59), acompanhado de um exemplo. Logo em seguida apresenta o segundo tipo de gráfico da Estatística, o "gráfico de colunas ou barras" como sendo "representado por retângulos de base comum e altura proporcional aos dados em questão". "Gráfico de colunas ou barras múltiplas" como "representações de dois ou mais fenômenos, utilizando as colunas ou barras múltiplas, num mesmo gráfico". "Pictograma" como figuras que simbolizam fatos estatísticos e "apresentam características atrativas e, por isso, facilitam a comunicação, o que faz com que sejam largamente utilizados pela publicidade". Gráfico de setores como sendo "representações por meio de setores em um círculo, onde o total de dados corresponde ao círculo e os setores, a cada uma das partes em que o círculo será dividido, mantendo-se uma proporcionalidade entre a área do setor e os dados".

O estudante também pode recorrer ao livro "Matemática - Volume único" que apresenta uma breve exposição sobre cada tipo de representação gráfica. Na introdução do tópico, comenta que "A representação gráfica fornece uma visão de conjunto mais rápida que a observação direta dos dados numéricos. Por isso, os meios de comunicação com frequência oferecem a informação estatística por meio de gráficos" (DANTE, 2009, p. 319-320). O autor inicia com a apresentação sobre o gráfico de segmentos: "Os gráficos de segmentos são utilizados principalmente para mostrar a evolução das frequências dos valores de uma variável durante um certo período". Silva e Barreto (2005, p. 57) não fazem referência a esse nome "gráfico de segmentos". Para o mesmo tipo e gráfico, utilizam a expressão gráfico cartesiano. Quanto ao gráfico de barras, o autor apenas comenta, a partir de um exemplo, que "Com os dados da tabela é possível construir o gráfico de barras: [...]" (DANTE, 2009, p. 321-324), apresentando em seguida dois gráficos de barras construídos com os dados de uma tabela apresentada anteriormente. Para o gráfico de setores (ou gráfico "pizza"), a ênfase está na transformação da porcentagem em graus, por meio de um exemplo. Para ohistograma é apresentada a definição de que "Quando uma variável tem seus valores indicados por classes Intervalos, é comum o uso de um tipo de gráfico conhecido por histograma". Para os gráficos pictóricos ou pictogramas, informa que "É comum, em publicações como revistas e jornais, ilustrar os vários tipos de gráficos com figuras relacionadas ao assunto, tornando-os mais atraentes.". Apenas em um exercício proposto é que aparece o comentário "Vimos os vários tipos de gráficos utilizados para representar e interpretar dados estatísticos. É importante que se escolha sempre qual deles é o mais adequado à situação analisada." (DANTE, 2009, p. 321-324) , seguido de três exemplos.

O quarto livro didático, "Matemática Ciência e Aplicações" (IEZZI et al., 2010), explica de maneira mais detalhada cada uma das representações gráficas já mencionadas, complementando com vários exemplos, encaminhamentos para construções de gráficos a partir de situações imaginadas. Deixando a cargo dos estudantes a identificação de dados e a construção de gráficos a partir de tabelas já prontas. Recortes de notícias com esses gráficos, representando informações, são apresentados com perguntas elaboradas, o que pode remeter o estudante a uma interpretação dos dados graficamente apresentados e a uma avaliação da situação.

Nesses últimos três livros apresentados, os exercícios se constituem na construção de gráficos, sempre possíveis de serem construídos, e na interpretação dos dados, situações e notícias de jornais. Não se questiona a adequação do gráfico para representar a situação. O gráfico é sempre tomado como totalmente correto e representante perfeito de uma situação, a qual deve ser esclarecida pela análise do gráfico. Esses livros didáticos parecem não contemplar totalmente as recomendações dos norteadores curriculares, tanto nacionais quanto estaduais, uma vez que esses parâmetros apresentam a expectativa do ensino de uma educação estatística na perspectiva da literacia estatística[18].

As orientações curriculares para a Educação Básica, tanto federais quanto do estado do Paraná, disponibilizam recomendações para a abordagem da Estatística em sala de aula.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental recomendam que seja privilegiada uma abordagem dos conteúdos que evidencie a função dos elementos estatísticos — apresentação global da informação (BRASIL, 1998, p. 70).

---

[18] Literacia estatística como a capacidade de interpretar argumentos estatísticos, em textos jornalísticos, notícias e informações de diferentes naturezas, em favor da inserção cidadã na sociedade atual (LOPES, 2004, p. 187).

A argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la (BRASIL, 1998, p. 70).

Os estudantes devem construir, ler e interpretar tabelas e gráficos e escolher o tipo de representação gráfica mais adequada para expressar dados estatísticos. Por meio desse critério o professor verifica se o aluno é capaz de recolher dados e organizá-los em tabelas e gráficos, escolhendo as representações mais apropriadas para comunicá-los (BRASIL, 1998, p. 77).

O Tratamento da Informação pode ser aprofundado nesse ciclo, pois os alunos têm melhores condições de desenvolver pesquisas sobre sua própria realidade e interpretá-la, utilizando-se de gráficos e algumas medidas estatísticas que aparecem nos jornais, revistas, televisão e internet. As pesquisas sobre Saúde, Meio Ambiente, Trabalho e Consumo poderão fornecer contextos em que os conceitos e procedimentos estatísticos ganham significados (BRASIL, 1998, p. 140).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio também apontam que os alunos devem ser capacitados, por meio de conhecimentos em estatística, a questionar a validade das representações gráficas, veiculadas em diferentes mídias, ou para questionar as generalizações feitas com base em um único estudo ou em uma pequena amostra (BRASIL, 2006, p. 79).

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica para Matemática (PARANÁ, 2008, p. 60) descrevem o Tratamento de Informação de uma maneira mais geral, como um conteúdo estruturante que contribui para o desenvolvimento de condições de leitura crítica dos fatos ocorridos na sociedade e para interpretação de tabelas e gráficos que, de modo geral, são usados para apresentar ou descrever informações.

No que diz respeito à representação de dados, também a abordagem não é específica. Ao final do Ensino Fundamental, é importante o aluno conhecer fundamentos básicos de Matemática que permitam conhecer dados estatísticos, ler, construir e analisar tabelas e gráficos (PARANÁ, 2008, p. 61-78), assim como representar dados em diferentes gráficos (PARANÁ, 2008, p. 79).

Tais documentos oficiais fornecem indícios de se pautarem em uma educação estatística, que segue a perspectiva da literacia estatística.

Lopes (2004, p. 190) analisou cinco questões do teste do INAF de 2002, que requerem como habilidade o domínio da linguagem gráfica, entendida como a capacidade de leitura de dados apresentados em um gráfico, permitindo que, a partir dele, seja possível interpretar os dados e generalizar a informação presente. O desempenho nessas questões evidenciou o baixo domínio da literacia estatística da população brasileira, levando a autora a buscar explicações no ensino de estatística, que tem sido tradicionalmente desenvolvido nas aulas de matemática das escolas e propor uma abordagem para a Escola Básica. Segundo Lopes (2004, p. 190), a resolução de problemas realizada numa perspectiva de pesquisa, em que os alunos partam de uma problemática, definam questões e procedimentos de coleta e representação de dados e realizem análise de dados e tomada de decisões sobre a temática investigada é uma metodologia adequada para o desenvolvimento da literacia estatística no âmbito escolar. A autora evidencia a dimensão social e política da Educação Matemática, no sentido de possibilitar que as pessoas sejam capazes de realizar análises das questões sociais, econômicas e políticas de nossa sociedade, compreendendo e interferindo nas decisões tomadas com base no conhecimento estatístico.

No livro "Conceitos e Métodos da Estatística", (D'HAINAUT, 1997, p. 41), são apresentados o Diagrama Circular e uma definição: "uma representação circular para uma distribuição de dados agrupados em um círculo, dividido em tantos setores quantas as classes existentes". Informa ainda que a cada setor atribui-se um ângulo proporcional ao valor efetivo da classe que ele representa.

Em seguida, o livro apresenta um exemplo: "A tabela abaixo representa uma repartição dos alunos de uma escola segundo o grau socioeconómico" (D'HAINAUT, 1997, p. 42).

Quadro 10 - Repartição dos Alunos

Classe socioeconômica	muito inferior	inferior	média	superior	muito superior	Total
Efetivo	43	76	51	12	4	186
Porcentagem	23,1	40,9	27,4	6,5	2,2	100
Graus	83	147	99	23	8	360

Fonte: D'Hainaut (1997, p. 42).

Apresenta o Diagrama Circular juntamente com o comentário de que esse tipo de gráfico é interessante para se tratar dados nominais, ou de categorias hierárquicas pouco numerosas, pois faz sobressair melhor os grupos de classes. O livro sugere ainda que se pode, por exemplo, colocar em evidência que a escola faz o recrutamento sobretudo no meio desfavorecido, cobrindo os setores "muito inferior" e " inferior" na mesma tonalidade, utilizando uma outra cor para "média", uma terceira para "superior e " muito superior". A justaposição de tais gráficos faz sobressair bem a diferença (D'HAINAUT, 1997, p. 42).

Pinheiro et al. (2009), logo após discorrer sobre gráfico de barras e gráficos de setores, observam que o

> gráfico de setores, por não implicar uma ordenação das categorias, é mais apropriado para as variáveis qualitativas nominais (como a que foi considerada no exemplo anterior). Enquanto isso, o gráfico de barras, em que as categorias estão naturalmente ordenadas, é mais apropriado para as variáveis qualitativas ordinais (PINHEIRO et al., 2009, p. 9). [...]
> Para representar a distribuição de frequências de uma variável através de um gráfico de setores é importante que a variável não possua muitas categorias, pois isso dificulta a visualização das proporções (PINHEIRO et al., 2009, p. 11).

As duas últimas obras mencionadas, D'Hainaut (1997) e Pinheiro et al. (2009), não são livros didáticos destinados ao Ensino Fundamental ou Médio, são livros de Estatística voltados ao Ensino Superior, elaborados para orientar o estudo de métodos estatísticos e, principalmente, para orientar a aplicação da Estatística em pesquisas. Eles contemplam, no entanto, aspectos pertinentes à literacia estatística que os livros didáticos pesquisados não contemplaram. Por isso é recomendável que o professor pesquise livros de conteúdo estatístico mais aprofundado como esses dois últimos, para que possa guiar seus estudantes, principalmente em questões como esta, que exigem a competência da reflexão.

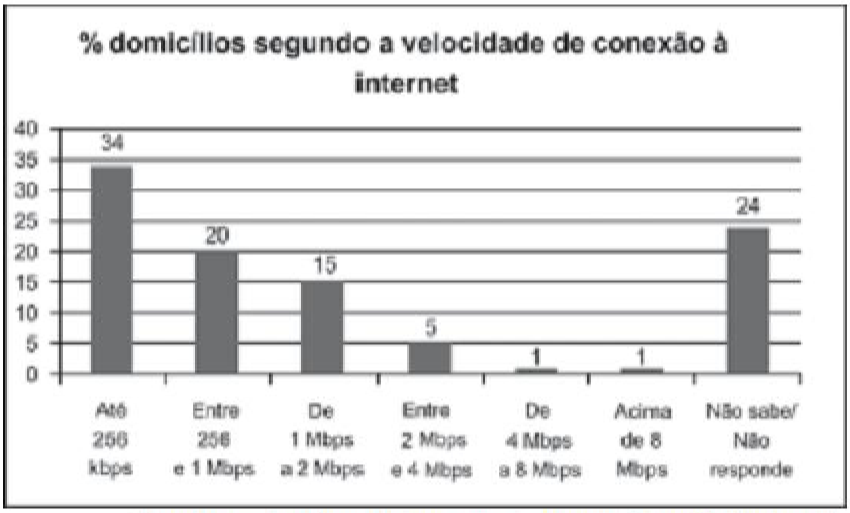
P: Descreva com as suas palavras e represente uma notícia de jornal, revista ou de televisão que utilize gráficos de barras para expressar os dados. Exemplifique também a representação de dados por meio de outros gráficos, como o de setores (pizza).

A questão abre espaço para que os estudantes tragam exemplos e questões encontradas em livros didáticos, mas é importante buscar outras fontes a fim de se trabalhar com a Estatística de maneira crítica e contextualizada. Então é importante que o professor estimule os estudantes a recordar e expor alguma situação vivenciada com gráficos, para o início de um diálogo, e uma avaliação crítica das representações encontradas nos meios de comunicação, tomando a Estatística como uma ciência que pode ajudar no estudo, compreensão e comunicação de fenômenos, mas que eles tenham claro que a Estatística, assim como a Matemática, não têm o poder da precisão, e que elas podem ser sempre questionadas, sempre deixando em aberto a possibilidade de uma outra forma de representação, dependendo dos objetivos a serem alcançados com determinada exposição do fenômeno ou dados. Cabe a discussão de situações que permitam e incentivem discussões em torno da conveniência e da possibilidade das formas de representação. Por isso não é recomendável limitar-se aos exercícios de representação e interpretação, como acontece em muitos livros didáticos e provas oficiais. Solicitam, por exemplo, que determinados dados sejam apresentados de diferentes formas, em uma tabela, um gráfico de barras ou de setores, ou ainda, solicitam a retirada de dados de gráficos sem questionar se eles, de fato, expressam a situação original, ou se estão sendo utilizados de maneira tendenciosa.

Até mesmo exames oficiais nacionais exibem questões de Estatística que não contemplam todos os aspectos da literacia estatística, apresentando aspectos que se repetem, ora solicitam a interpretação da situação pelo gráfico, sem questionar a validade da representação, ou solicitam que o estudante represente os dados de uma situação por meio de um gráfico específico, não cabendo ao estudante a escolha da representação. A questão a seguir é um exemplo disso.

Figura 5 – Questão de Estatística INEP

O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).



Disponível em: http://agencia.ipea.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

A 0,45
B 0,42
C 0,30
D 0,22
E 0,15

Fonte: INEP (2011, p. 29).

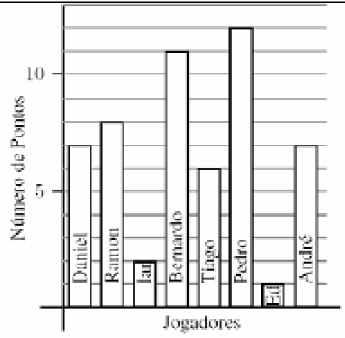
Também em provas da OBMEP apresentam questões dos tipos mencionados e exemplificados acima, no que diz respeito à parte gráfica de Estatística.

Figura 6 – Questão de Estatística OBMEP

18. ***Time de basquete*** – O gráfico dado mostra o número de pontos que os oito jogadores de basquete do time da escola marcaram no último jogo.

Qual é o número total de pontos marcados pelo time?

(a) 54 (b) 8 (c) 12 (d) 58 (e) 46

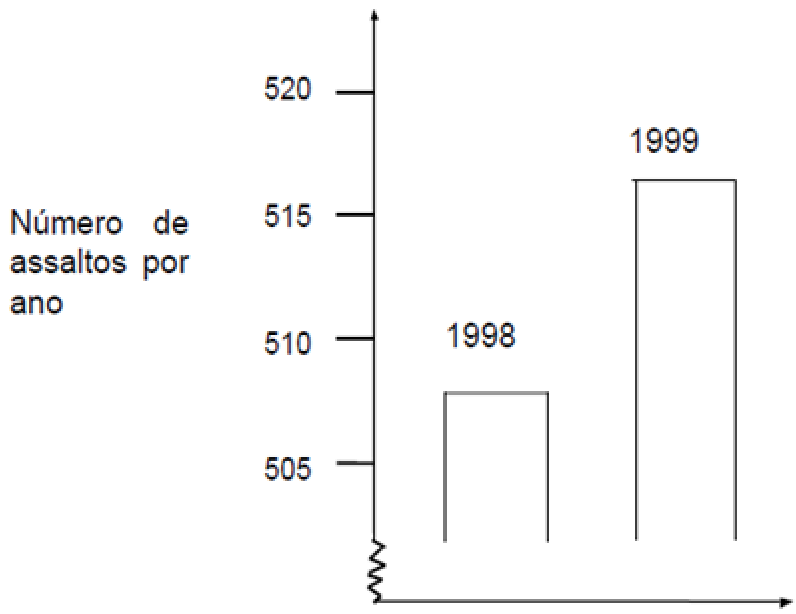


Fonte: IMPA (2010, p. 40).

As provas do PISA contemplam itens pertinentes à literacia estatística, como, por exemplo, o item Assaltos (GAVE, 2004).

Figura 7 – Enunciado do Item Assaltos

Um repórter de TV apresentou o gráfico abaixo e disse: - O gráfico mostra que, de 1998 para 1999, houve um grande aumento no número de assaltos.



Você considera que a afirmação do repórter é uma interpretação razoável do gráfico? Dê uma explicação que justifique a sua resposta.

Fonte: Gave (2004).

Esse tipo de item oferece uma possibilidade para o professor trabalhar em sala de aula questões não-rotineiras com gráficos em Estatística.

Outras questões da prova do PISA oferecem possibilidades similares. O professor também pode, assim, além de estimular os estudantes a buscar representações para além dos materiais didáticos, trazer exemplos com gráficos de barras e outros que achar conveniente para a discussão em grupo, extraídos da mídia e livros didáticos e paradidáticos para pesquisa. O gráfico abaixo, apresentado pelo jornal Folha de São Paulo, é um exemplo que pode despertar a curiosidade, por apresentar uma coluna com altura negativa. Pode funcionar como um instigador da pesquisa quanto ao significado de gráfico de barras, a sua interpretação e avaliação de sua eficácia na representação. O gráfico apresentado na capa do jornal é representativo da matéria que se encontra no interior (CARAMANTE; SPINELI, 2011, p. 1).

Figura 8 – Notícia de Jornal

Fonte: Caramante e Spineli (2011).

Os PCN (BRASIL, 1998, p. 134) sugerem a abordagem de assuntos sobre economia, política, esportes, educação, saúde, alimentação, moradia, meteorologia, pesquisas de opinião, entre outros, geralmente são apresentados por meio de diferentes representações gráficas: tabelas, diagramas e fluxogramas, gráficos (barras, setores, linhas, pictóricos, histogramas e polígonos de frequência).

Após a apresentação e discussão com os exemplos trazidos, bem como a consulta a livros didáticos, o professor pode solicitar que cada estudante elabore e apresente um exemplo da utilização de cada forma de representação de dados. O professor deve instigar a comparação entre as diferentes formas de representação dos dados, levando-se em conta a sua adequação e conveniência de utilização. Nessa discussão, deve ser lançado o enunciado do item novamente.

O que pode acontecer é que no desenvolvimento desse estudo e discussão surjam situações similares às já encontradas nas produções escritas dos outros estudantes. Assim, podem aparecer maneiras de lidar similares às já identificadas e que são tratadas a seguir. Por exemplo, aos estudantes que lidaram com o item justificando a impossibilidade de representação devido à grande variação dos dados, pode-se lançar a questão.

O estudante seguinte diz respeito à maneira de lidar - M1 - considerando inconveniente a representação dos dados por meio de um gráfico de barras devido à grande variação dos dados. Em 22 produções foi identificada esta justificativa, ou considerada como uma possibilidade, necessitando de uma entrevista para confirmação. De acordo com OECD (2009, p. 82), essa foi uma justificativa considerada correta na correção das provas.

E1: O gráfico ficaria desproporcional.

P: Como assim desproporcional?

Para as produções de FE017, FP009, FP020, FP026, Ferreira (2009, p. 56) infere que os participantes podem ter percebido a "desproporcionalidade" entre o tempo de decomposição relativo ao tipo de lixo que se decompõe mais rápido, e o que se decompõe mais lentamente. Com isso, consideraram que seria difícil construir o gráfico de barras, ou consideraram que ficaria, visualmente, incompreensível. Ferreira (2009, p. 56) infere ainda que o participante FE017 pode ter suposto que não seria possível encontrar uma escala apropriada para a construção de um gráfico de barras que representasse a "grande" diferença entre os tempos de decomposição dos tipos de lixo apresentados na tabela do enunciado. Infere que o participante FP009 pode ter compreendido que a estética do gráfico de barras não ficaria muito boa, por ser a razão entre o menor tempo de decomposição e o maior muito grande. E, para o participante FP020, infere que a dificuldade estaria entre dois tipos de lixo (jornais e copos de plásticos), por também ser difícil representar essa "grande" diferença em um gráfico de barras. Infere ainda que o participante FP026 poderia acreditar que seria possível construir um gráfico de barras, se não fosse por apenas considerar "grande" a diferença entre os tempos de decomposição de alguns tipos de lixo, pois "ficariam desproporcionais".

E1: Uma barrinha muito pequena para representar os jornais e outra imensamente maior para representar o tempo dos copos plásticos.

P: E por que isso seria problemático, uma barra menor e outra maior? Quanto uma seria maior em relação à outra?

E1: Se você lembrar que 1 ano tem 365 dias, 100 anos terão 36.500 dias. Vamos supor que alguns dias correspondessem a 3 dias, então você teria uma barra 12.000 vezes maior que a outra, pelo menos, ou seja, uma barra que seria 12.000 vezes o tamanho de outra. Mesmo que você tomasse uma escala muito pequena, isso não seria possível. Vamos supor que você tome o milímetro como unidade de medida para a construção do gráfico. Se você construir a barra dos jornais com uma altura de 3 milímetros, terá a barra dos copos de plástico com a altura de 12.000 milímetros = 12 metros. Você já viu um gráfico com uma barra de 12 metros? E se você diminuir a unidade de medida, a altura da barra menor não seria visível ao olho humano. O gráfico ficaria muito grande para ser visível.

P: Mas, dessa forma, elas seriam desproporcionais?

E1: Seriam, porque teríamos uma muito grande e outra muito pequena.

Ferreira (2009, p. 64) infere que o participante FP006 considerou que "não seria possível representar dados que guardam uma desproporcionalidade entre si", pois o participante pode ter pensado na diferença desproporcional de tempo entre "alguns dias" e "mais de 100 anos". Isso devido à justificativa de FP006: "Outro fator é a não proporcionalidade. Ex: Goma de mascar de 20 a 25 anos e os copos de plásticos de mais de 100 anos".

P: Procure o significado de proporcional e desproporcional.

E1: Encontrei, no dicionário Houaiss, que proporcional significa **"1** relativo à proporção; **2** que está em proporção, na mesma relação que (outra coisa) em intensidade, grandeza, grau etc. Ex.: Desempenho proporcional ao preparo recebido. Crescimento proporcional à quantidade de nutrientes.; **3** bem conformado, harmonioso, proporcionado"; **4** Em Matemática, significa "diz-se da variável cuja razão com outra é uma constante" (PROPORCIONAL, 2002).

P: Qual é o significado que você tomou ao dizer que as barras seriam desproporcionais?

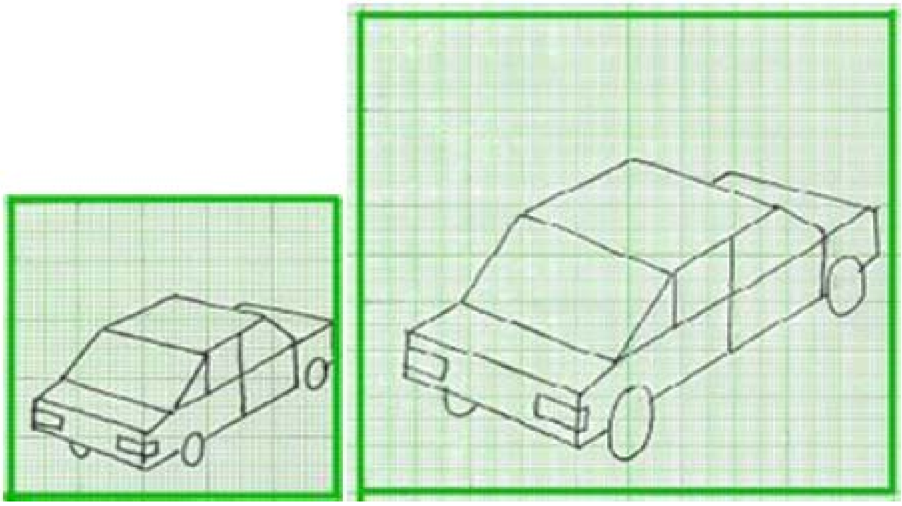
Parece que o estudante utilizou a palavra no sentido de harmonioso, e o gráfico estar desproporcional significaria o gráfico compor algo desarmonioso, sem equilíbrio, devido à discrepância das medidas de comprimento de suas barras, devido às alturas de suas barras.

E1: Foi mais no terceiro sentido, e não, pelo que diz esse dicionário, no sentido da Matemática, pois não pensei em nenhuma razão.

P: Vamos pensar em um exemplo de proporcionalidade no sentido matemático, que envolva razão. Por exemplo, se você ampliar uma foto, serão preservadas as suas proporções? Qual a diferença entre parecido e semelhante? Por exemplo, duas garrafas de coca-cola, uma de 290 ml e outra de um litro, são parecidas? São semelhantes? Preservam as suas proporções?

Uma sugestão é solicitar aos estudantes que tragam duas fotos ou dois desenhos em tamanhos diferentes como

Figura 9 - Semelhança e Proporção



Fonte: Barreto e Gravina (1998).

P: Matematicamente, estas figuras são semelhantes? São proporcionais? Estas figuras preservam entre si uma proporção?

A partir disso, o professor pode explorar a ideia de semelhança, a qual está associada à ideia de proporcionalidade e à ideia de razão.

P: Então, se não fosse esse "problema", a construção do gráfico seria adequada?

E1: Seria.

P: Se o tempo de decomposição dos jornais fosse alguns anos e o tempo de decomposição dos copos de plástico fosse mais de 25 anos, e os tempos dos outros tipos de lixo se mantivessem, seria possível e adequada a representação por meio de um gráfico de barras? Como ela ficaria? Por quê?

P: Como que você faria para representar alguns dias? Por que, anteriormente, você toma alguns dias como 3 dias? Poderiam ser 5 dias? E mais de 100 anos, como você representaria no gráfico?

E1: Eu tomei um número pequeno para representar alguns dias e tomaria um número maior que 100 para representar mais de 100 anos.

P: E qual o tamanho das barras que representariam o tempo das cascas de banana e de laranja, e o tempo da goma de mascar?

E1: É uma situação parecida, não há o valor exato, eu teria que escolher um valor aproximado, como 2 anos para as cascas e 23 anos para a goma de mascar.

P: Se a escolha dos valores fosse de 1 ano para a casca de banana, 3 anos para a casca de laranja, 25 anos para a goma de mascar, o gráfico seria outro. Vários gráficos diferentes poderiam ser construídos para representar o mesmo conjunto de dados. Por todos eles você seria capaz de construir o quadro inicial fornecido no enunciado? Ou seja, esses gráficos de barras fornecem uma informação exata a respeito do conjunto de dados iniciais?

E1: Não, somente o quadro consegue expressar toda a informação. De fato, nesse caso, o gráfico de barras não seria o mais adequado.

Seguem outras possibilidades de resposta ao questionamento inicial que se assemelha à pergunta original do item.

E1: Não é possível porque o gráfico ficaria muito grande.

P: Mas por que ele ficaria muito grande? Explique o motivo.

E1: Não é possível representar o tempo dos copos de plástico.

E1: Não é possível representar, no gráfico de barras, a grande variação de tempo de decomposição dos tipos de lixos apresentados.

E1: Deveria usar um quadro e não o gráfico, pois ele teria que construir o gráfico de 0,5cm em 0,5cm para mostrar o tempo de decomposição da caixa de papelão.

P: Forneça um exemplo com dados para os quais a representação por meio de um gráfico de barras seria a mais adequada e justifique a sua resposta.

Na intervenção para as maneiras de lidar que apresentam indícios de os estudantes considerarem os intervalos de tempo um obstáculo à representação dos dados em um gráfico de barras - M2 - foi oportunizado aos estudantes que organizassem a situação de um contexto imaginado por eles. A partir dele e mediante as interações de inferências na produção escrita, entrevista e intervenção, eles puderam avançar progressivamente em seu processo particular de organizar aqueles dados, mediados pelo entrevistador e/ou professor. Esse processo vai ao encontro da proposta original de Freudenthal (1968; 1973; 1991), para o ensino de Matemática, de que a Matemática deve ser tomada como uma atividade humana; sendo oferecidas aos estudantes oportunidades para reinventarem a matemática, pela organização ou matematização de situações do "mundo real" deles.

E2: Não é possível, por causa do tempo de decomposição que varia de 1 a 3 dias.

Não foi colocada resposta para E2 tal como: "Não é possível representar um intervalo no gráfico de barras", por que as produções de CE016B, FE011, FE012, FP016, SE021A, FP006 e SE081A não explicitaram a forma como os estudantes lidam com a ideia de intervalo de um conjunto numérico. Em nenhuma dessas produções há menção aos três intervalos de tempo. Aliás, a palavra "intervalo" não aparece em nenhuma das produções, nem mesmo na entrevista o participante SE081A chega a verbalizá-la.

Celeste (2008, p. 32) infere que o estudante CE016B, ao responder "porque no gráfico de barras não pode colocar igual aquele ali a banana 1 a 3 anos nos gráficos de barras é 1 ou 3", demonstra perceber que se trata de um intervalo devido à variação de 1 a 3 anos, mas que no gráfico de barras não poderia ser representado. Não menciona, no entanto, a palavra intervalo, nem se refere aos outros intervalos de tempo presentes na tabela.

Sobre a produção de FE011, Ferreira (2009, p. 57) infere que, ao utilizar o termo "oscilação", o participante estivesse se referindo aos tempos de decomposição, em intervalos de tempo, dos tipos de lixo. Também na produção de FE020, infere que o termo "variação" foi utilizado no mesmo sentido de "oscilação", tal como utilizado por FE011, e acrescenta que o que ajudou a reforçar sua inferência foi o exemplo, apresentado por FE020, da "casca de banana" que levaria de 1 a 3 anos para se decompor. Diante das produções de FE012 e FP016, Ferreira

(2009, p. 60) infere que eles podem ter atribuído a impossibilidade de construção do gráfico à impossibilidade de representação de intervalos de tempo, porém isso não fica explícito em suas respostas. Ferreira (2009, p. 61) infere que o participante FE019, ao tentar representar, no gráfico de colunas, o tempo de decomposição da casca de laranja, percebeu que não conseguiria com apenas uma coluna, pois ela remeteria a um valor único e exato, como um, dois ou três anos, ou seja, forneceria ao leitor do gráfico a impressão de que há um tempo exato para a decomposição do lixo, o que não seria verdade. Ferreira (2009, p. 63) infere que a justificativa de FP006, "o fato do tempo de decomposição ser de 1 a 3 anos (é melhor estar definido o tempo)", baseia-se em que não é possível representar intervalos de tempo em um gráfico de colunas.

Santos (2008, p. 48) identifica que o estudante SE021A apresenta uma justificativa fundamentada na impossibilidade de representar o intervalo de tempo de 20 a 25 anos, tempo de decomposição da goma de mascar, por meio de um gráfico de barras. Infere a possibilidade de o estudante imaginar que, se fosse utilizar o gráfico de barras para representar o tempo de decomposição da goma de mascar, deveria escolher apenas uma das extremidades do intervalo. Assim, qualquer que fosse a escolha, o tempo de decomposição apresentado não corresponderia ao tempo de decomposição da goma de mascar. Infere que, talvez, por isso, o estudante tenha escrito que, "se uma pessoa fosse ver o gráfico, não saberia decifrá-lo corretamente", pois não saberia identificar qual seria exatamente o tempo de decomposição da goma de mascar, uma vez que não teria uma informação precisa. Num primeiro momento, o estudante SE081A respondeu que o gráfico de barras seria adequado, pois ele conseguiu construir um. No entanto, ao ser entrevistado, foi modificando sua opinião e justificativa. Chegando a se indagar se "não ser adequado" significa "estar errado". Desenha novamente o gráfico e fica pensando. Por fim, conclui que "não seria adequado" devido à impossibilidade da representação do tempo de 1 a 3 anos (SANTOS, 2008, p. 55).

P: Então, se não houvesse esse tempo (de 1 a 3 dias), o gráfico de barras poderia ser construído?

E2: Não. Porque os tempos das cascas de laranja e da goma de mascar apresentam o mesmo problema.

P: Qual problema?

E2: O problema é que esses tempos variam e não tem como representar essa variação no gráfico de barras. P: Por quê?

E2: No gráfico, ou é 1 ou é 3, você não pode trabalhar com essa imprecisão.

P: Tem que ser 1 ou 3 anos apenas? Não poderia ser, por exemplo, 2,5? Já que o tempo varia de 1 a 3 anos?

E2: Você teria que escolher apenas um número dessa variação.

Nesse momento, pode-se enveredar para o caminho da formalização do conceito de intervalo.

Alguns participantes **-** FE006, FP010, FE008, FE013, FE019, FE020 - verbalizaram "intervalo" em suas justificativas.

E2: Você teria que escolher apenas um número desse intervalo.

P: Fazendo essa escolha, você construiria o gráfico?

E2: Não seria adequado o gráfico de barras, pois os outros valores não ficariam bem representados, você teria que escolher um deles e esquecer todas as outras possibilidades de tempo. Isso fugiria ao objetivo do gráfico. P: Mas qual é o objetivo do gráfico?

E2: O objetivo do gráfico é fornecer ao leitor uma ideia precisa da situação, um retrato dos dados; uma visualização da situação de uma maneira mais fácil, mais rápida. O gráfico tem que retratar fielmente a situação.

Nesse momento, os estudantes poderão ser motivados a consultar livros de estatística e livros didáticos de Matemática.

P: Então, se todo o problema para a construção desse gráfico diz respeito à presença de intervalo de tempo nos dados, vamos tomar uma outra situação para vocês avaliarem a adequação do gráfico de barras para representá-la. Peço que vocês construam um para representar os dados abaixo.

Quadro 11 – Tempos de decomposição de lixos

Tipo de lixo	Tempo de decomposição
Casca de banana	2 anos
Casca de laranja	2,5 anos
Caixas de papelão	0,5 ano
Goma de mascar	23 anos
Jornais	Alguns dias
Copos de plástico	Mais de 100 anos

Fonte: OECD (2003).

Esta tentativa pode levar os estudantes a perceberem outras inadequações e apresentarem maneiras de lidar similares a M1 e/ou M3, por exemplo.

Em um primeiro momento, o aspecto do intervalo chamou a atenção desses estudantes, mas, com a sistematização progressiva, a discussão da primeira maneira de lidar identificada, as outras podem vir a se sobressair aos olhos do professor, retornando a um problema similar ao original.

P: Troque o tempo de decomposição para a casca de banana e a casca de laranja, tome os dois tempos como 2 anos e o da goma de mascar como 23 anos. Como seria a representação em um gráfico de barras com esses tempos? Ela seria adequada? Por quê?

Muitas produções escritas revelaram uma maneira de lidar com a avaliação da adequação da utilização de um gráfico de barras, para a representação dos dados fornecidos no enunciado do item, a qual remeteu a uma justificativa de imprecisão, indefinição, inexatidão dos dados - **M2**. A utilização das palavras: imprecisão, indefinição e inexatidão dos dados se repete nas produções escritas.

Ademais, o sentido evocado para elas com **M3** é mais pertinente, mais condizente e adequado. Um intervalo no conjunto dos números reais não pode ser caracterizado como algo impreciso ou indefinido, sabe-se com precisão quais números pertencem ou deixam de pertencer a tal. Dizer, no entanto, que uma variação do tempo possa ser expressa por meio de um intervalo, ou se comete um abuso de linguagem, se a referência for a Matemática, porque não há, por exemplo, um tempo de n horas; ou o termo intervalo diz respeito ao significado do dicionário, espaço que separa dois pontos. A ideia de intervalo presente em **M2** é a ideia de um conjunto de números compreendidos entre duas extremidades, uma menor e outra maior.

No caso identificado, de fato, não se pode determinar, com precisão, se 5 dias correspondem a "alguns dias".

E3: É impossível representar em um gráfico de barras dados indefinidos.

P: Mas o que você entende por dados indefinidos? Dê um exemplo e explique o problema.

E3: É impossível representar em um gráfico de barras dados imprecisos.

P: Mas o que você entende por dados imprecisos? Elabore um exemplo e explique o problema.

E3: É impossível construir um gráfico de barras faltando dados.

P: Explique por que faltam dados, que dados estariam faltando? E por que isso prejudicaria a construção do gráfico de barras?

E3: É impossível representar em um gráfico de barras com dados indefinidos, como o tempo de decomposição apresentado para a *casca de banana,* a *casca de laranja* e a *goma de mascar*.

P: Mas e se o tempo de decomposição para a casca de banana e para a casca de laranja fosse de 2 anos e o da goma de mascar fosse de 23 anos, como seria essa representação em um gráfico de barras? Ela seria adequada? Por quê?

M4 refere-se a uma maneira de lidar com o enunciado no qual a justificativa se refere a uma preferência particular do participante, ou faz afirmações sem justificativa.

E4: Uma escala ou um gráfico de linhas deveria ser feito.

E4: A apresentação deveria ser feita por um gráfico de setores, por meio de um desenho.

E4: Talvez um quadro seja melhor.

E4: A tabela é mais adequada.

E4: Uma escala deveria ser feita.

E4: Um gráfico de linhas deveria ser feito.

P: Mas por quê?

E4: Não é necessário, pois já tem a tabela.

E4: Porque um gráfico de barras seria muito complicado para se entender e o mais fácil seria um gráfico redondo.

E4: Porque uma tabela é mais fácil e um gráfico de barras seria mais difícil de entender.

E4: Uma tabela seria melhor, porque o gráfico de barras não são todos que o entendem, ficaria mais difícil para se entender as informações. Então, talvez, seja melhor uma tabela.

E4: O gráfico de colunas seria o mais apropriado para representar os dados da tabela por causa da facilidade de visualização das informações.

Os estudantes indicam que a avaliação da adequação da representação dos dados por meio de um gráfico de barras não passa pela possibilidade de o gráfico ser construído, parece que eles tomam como certa a possibilidade da transformação de qualquer tabela em gráfico de barras.

O Guia do Estudante para o Vestibular, Editora Abril, informa que "os resultados de pesquisas são normalmente apresentados em tabelas, e toda tabela pode ser transformada num gráfico. Gráficos são instrumentos preciosos para a análise de uma situação" (TRÂNSITO, 2012, p. 102).

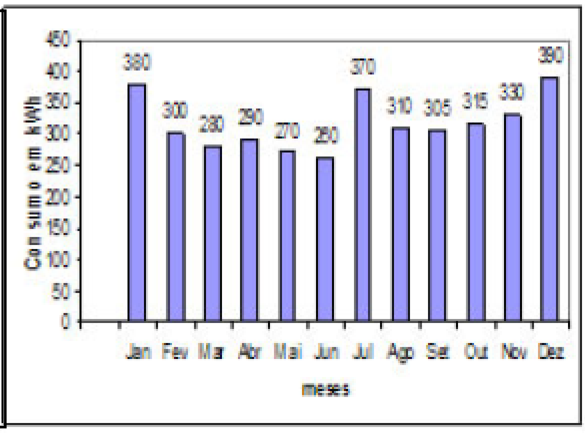
P: Mas você pode, então, construir o gráfico de barras?

Essa solicitação seria para verificar como o estudante lidaria com a construção, se encontraria algum obstáculo, como, por exemplo, os levantados por **E1, E2, E3**; ou outras justificativas.

P: O exemplo a seguir mostra os mesmos dados em tabela e na forma de gráfico de barras.

Figura 10 – Duas formas de representação.

Mês	Consumo em kWh
Janeiro	380
Fevereiro	300
Março	280
Abril	290
Maio	270
Junho	260
Julho	370
Agosto	310
Setembro	305
Outubro	315
Novembro	330
Dezembro	390



Fonte:http://www.mundoeducacao. com.br/matemati ca/ti pos-graficos-1.htm.

Elabore um exemplo, com uma situação, para a qual o gráfico de setores não seria adequado para a representação.

Os estudantes (**E5**) para os quais suas produções indicam uma preocupação com as unidades de medidas dos dados (**M5**) apresentaram em suas produções esboços de gráficos incompletos, com explicações e justificativas do tipo das seguintes.

E5: Não é possível devido aos tempos apresentados.

P: Qual o problema com os tempos?

E5: Os tempos não estão apropriados.

P: Porque os tempos não estão apropriados? Quais estariam?

E5: Por que os jornais se decompõem em dias, e não em anos. Estariam apropriados se estivessem todos em anos. O problema é que você tem duas unidades de tempo: anos e dias.

P: Mas você não pode transformar e deixar tudo em uma mesma unidade de medida de tempo?

E5: O problema é que aparecerão números decimais.

P: Não é possível a representação de um número decimal?

E5: Os intervalos de tempo e dados não estão na mesma unidade de medida. Deveriam estar todos em anos ou todos em dias.

P: Mas você não pode transformar todos eles em uma mesma unidade de tempo?

E5: Posso, mas não é possível encontrar uma escala apropriada a partir dos dados da tabela. A representação por meio de um gráfico de barra não seria a mais apropriada porque seria difícil escolher um intervalo adequado para que a estética e visualização do gráfico ficassem boas.

P: Mas como ficaria a "estética" do gráfico?

E5: Se eu transformar tudo em anos, vamos supor que eu coloque de 0,5 em 0,5 anos, que seria de 6 em 6 meses. Atribuindo 0,5 cm a cada 6 meses a barra dos 100 anos ficaria do tamanho de 50 cm, não caberia na prova e em nenhum caderno. Mas veja, mesmo se houvesse um caderno desse tamanho, ainda assim as pessoas não seriam capazes de, vendo o gráfico, perceber a representação de alguns dias.

P: Considerando sua escala, qual seria o tamanho da representação de 5 dias no eixo y? Qual seria o tamanho da altura da barra que representaria 5 dias?

E5: Deixa eu ver...se para 6 meses foi 0,5 cm. Em 6 meses temos 180 dias, e em 0,5 cm temos 5 milímetros. Então 5 mm representa 180 dias. Dessa forma 1 mm representa 36 dias. Está vendo, não tem como representar com essa escala porque a barra será bem mais baixa que 1 mm. E se eu aumentar o tamanho do intervalo 100 anos vai parar aonde? Isso não seria possível "sem comprometer o propósito do gráfico".

P: Mas qual é o propósito do gráfico? Qual é o propósito dos gráficos? Para que eles servem?

A exploração dessa *maneira de lidar* - **M5** - tem início na observação de **E5** de que não seria possível a representação dos dados em um gráfico de barras devido aos tempos apresentados. Eles demonstram compreender e imaginar a situação, bem como o que estava sendo questionado no item. Para esses estudantes, o item se mostra realístico e o problema como um problema de contexto. Alguns estudantes tentam construir o gráfico, mas desistem e passam a refletir sobre as razões dessa impossibilidade. Eles desenvolvem diversos processos de sistematização e matematização, problematizando os tempos de decomposição dos materiais, expressos em anos e em dias. Freudenthal (1968) defende que o ensino da Matemática deveria estar focado em ensinar os estudantes a matematizar - ação que faz parte do processo de produção da Matemática - e não em ensinar resultados de processos de matematização desconhecidos pelos estudantes. Ele estava preocupado em fazer com que os estudantes pudessem se apropriar do processo de criação da Matemática. Não que ele defendesse que todos os estudantes deveriam produzir Matemática, mas sim ter acesso ao ato de organizar a realidade a sua volta.

> Sistematização é uma grande virtude da matemática e, se possível, o aluno tem de aprender esta virtude, também. Mas então eu quero dizer a atividade de sistematização, e não o seu resultado. Seu resultado é um sistema, um belo sistema fechado, fechado, sem entrada e sem saída. Em sua maior perfeição pode até mesmo ser manipulado por uma máquina. Mas o que pode ser feito por máquinas, não precisa de ser humano. O que os seres humanos têm de aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, o processo de matematização da realidade e, se possível, até mesmo o de matematização matemática (FREUDENTHAL, 1968, p. 7).

Os estudantes organizam os dados por meio de elementos da própria matemática, como transformação de unidades de tempo, gráfico cartesiano, determinação de uma escala para representação do tempo, avaliação dessa escala. O problema de encontrar uma escala apropriada para os dados acaba por conduzi-los a uma evolução de esquematizações sucessivas, e/ou a outras maneiras de lidar como o problema do tamanho do gráfico **- M1**, e/ou ao conceito de gráfico, abordado em **M0**.

Os estudantes que apresentaram as *maneiras de lidar* - **E6** - para os quais suas produções estão centradas na abordagem e discussão de questões ambientais, sem levar em consideração a forma de apresentação dos dados e uma avaliação da forma em si, abstraída da situação particular **- M6**. O desafio com esses estudantes é fazer com que eles reflitam sobre a construção de gráficos sem tanta ênfase no juízo de valores.

E6: Não é. Por causa das informações sobre frutas, sendo que todos nós sabemos que cascas de frutas fazem até bem para a terra, como um adubo natural. O mais apropriado seria uma discussão a respeito do tempo de decomposição do ferro, dos pneus e do vidro.

E6: Não está mais "aproximado" porque as cascas de banana e de laranja são lixo, mas elas são "apropriadas" para adubo para plantações. Só os outros lixos prejudicariam o meio ambiente.

Celeste (2009, p. 31) relata que, em entrevista, foi perguntado a um desses alunos, o porquê de ter respondido daquela maneira. Ele contou que uma vez estava com seu pai em um terreno e disse que não poderia jogar cascas de frutas no chão, pois eram lixo. Mas seu pai "o corrigiu", dizendo que podia sim, pois as cascas serviam como adubo para a terra. Celeste (2009) comenta que, a partir da entrevista, foi possível confirmar que o enunciado do problema proporcionou ao aluno o reconhecimento e a valorização de suas experiências pessoais, e a possibilidade de aplicação delas num contexto escolar o que, frequentemente, não é comum na escola.

P: Vamos supor então que tirássemos as cascas do problema. Considerem, no lugar das cascas de banana, copos e garrafas de vidro - tempo de decomposição 4.000 anos; e no lugar das cascas de laranja, considerem latas de alumínio - tempo de decomposição de 200 a 500 anos. Acrescentem, ainda, à tabela do enunciado da questão, pedaços de pano - 6 meses a 1 ano, e cigarros -de 2 a 5 anos.

Com isso, espera-se que esses estudantes passem a imaginar esses dados e como seria uma outra maneira de organizar a sua representação.

E6: Os alunos não poderiam realizar a experiência na escola, não teriam tempo suficiente em vida.

P: Vamos considerar uma outra situação.

Os estudantes demonstram entender que a inadequação da representação deve-se às informações em si, não consideram a possibilidade de avaliação de um modelo matemático, para o contexto do enunciado do item. O enunciado apresenta-se realístico para eles, mas eles não matematizam com ela, rejeitam a natureza da informação.

Um contexto rejeitado cumpre o papel de um problema de palavras (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005), os estudantes não matematizam com ele.

Nessa intervenção não é suficiente prover os estudantes com atividades que permitam o desabrochar de processos individuais de pensamento, é necessário abrir espaço de interação, entre os estudantes e o professor, para a negociação do significado matemático (VALERO, 2002, p. 51).

P: Por favor, leia em voz alta a última oração do enunciado do problema.

E6: "Dê uma justificativa para o fato de que o gráfico de barras não é o mais apropriado para apresentar esses dados".

P: Nessa oração, qual é o sujeito do verbo ser? De acordo com essa oração, o que não é o mais apropriado para apresentar esses dados?

E6: O gráfico de barras.

P: Qual a relação do gráfico de barras com toda a situação que você descreveu, a situação do problema?

A partir disso, o professor poderá conhecer a maneira de lidar do estudante com a necessidade de avaliar e justificar a adequação de um gráfico de barras para representar os dados, por ele já comentados. Assim, o professor poderá dar sequência à intervenção.

P: Elabore um exemplo cujos dados possam ser representados de maneira apropriada por um gráfico de barras.

P: Você já construiu um gráfico de barras?

A maneira de lidar **M6** revela que, de fato, o enunciado do item se mostrou acessível para os estudantes que revelaram em suas produções escritas a maneira de lidar identificada como **M6**. Inclusive, Celeste (2009, p. 31) se refere a esse grupo como de Experiência Pessoal e infere que uma resposta do tipo "não está mais aproximado porque as cascas de banana e de laranja são lixos, mas eles são apropriados para adubo para plantações. Só os outros lixos prejudicariam o meio ambiente" mostra que o aluno utilizou conhecimentos ligados às suas experiências pessoais, dentro e fora da escola, para responder ao problema. Em entrevista, ele relatou que uma vez disse a seu pai que as cascas de frutas não deveriam ser jogadas no chão, mas ele menciona que foi corrigido pelo pai: "As cascas de frutas podem, pois elas servem como adubo para a terra". A partir disso, Celeste (2009, p. 31) infere que o enunciado do problema proporcionou ao aluno o reconhecimento e a valorização de suas experiências pessoais, bem como a possibilidade de utilização delas em um contexto escolar, o que não é comum. "O aluno comparou o contexto do problema com experiências vividas anteriormente" (CELESTE, 2009, p. 56-57).

Santos (2008, p. 53) infere que seria possível que o estudante SE051A tivesse relacionado o contexto do problema com outras informações sobre o tempo de decomposição de outros tipos de lixo, sobre campanhas ambientais que são veiculadas por diferentes meios de comunicação.

No caso de SE142A, Santos (2008, p. 55) infere a possibilidade de o estudante ter estabelecido uma relação do contexto do problema com outras informações sobre o tempo de decomposição de outros tipos de lixo, com campanhas de preservação ambiental que são veiculadas por diferentes meios de comunicação ou nas escolas. Ele apresenta a seguinte justificativa: "Porque tem informações sobre frutas, e todos nós sabemos que cascas de frutas fazem até bem para a terra como adubo natural. O mais apropriado seria falar sobre ferro, pneus e vidro". Santos (2008) infere que o gráfico de barras, para esse estudante, poderia não ser o mais apropriado por conter informações sobre o tempo de decomposição de lixos orgânicos. Na entrevista, ele informou que seria possível fazer o gráfico, mas precisaria das porcentagens para cada tipo de lixo. Quando questionado a respeito das porcentagens, disse que para os jornais, por exemplo, não colocaria, ou colocaria no máximo 15 dias. Mas, quando lhe foi perguntado sobre como teria certeza de que era esse o tempo exato de decomposição do jornal, o estudante ficou pensativo e respondeu que não faria o gráfico, pois, nesse caso, tratava-se de informações sobre lixos orgânicos. Para ele, o gráfico deveria ser feito somente com materiais que demoram mais tempo para se decompor e não com orgânicos. Também confirmou que relacionou o problema com informações conhecidas por ele na escola e pela televisão.

A justificativa de SE041A poderia levar a uma inferência de que ele estaria a lidar com o item de maneira semelhante a M1, preocupado com a dificuldade de representação de dados de magnitude tão discrepante, mas, investigando, a entrevista relatada em Santos (2008, p. 53) esclarece que o estudante estaria preocupado com os tempos de decomposição "muito longos" simplesmente pelo fato de que isso dificultaria ou impossibilitaria que os estudantes experienciassem a situação para verificarem, por eles mesmos, o resultado de decomposição de cada material listado no enunciado do item. Na entrevista, ele respondeu que o jornal e as caixas de papelão seriam os únicos possíveis dos alunos verificarem por meio da experiência, uma vez que os tempos de decomposição respectivos seriam de apenas alguns dias e de 0,5 ano. Ainda, segundo SE041A, o tempo de 1 a 3 anos seria possível dependendo do tempo que os alunos teriam ainda para estudar. Ele exemplificou que, se os alunos estivessem na 5a série, isto seria possível.

Van den Heuvel-Panhuizen (2005, p. 5) afirma que encaixar problemas de avaliação na vida cotidiana, ou em situações fantasiosas, nas quais os estudantes possam imaginar, é um meio poderoso para obter problemas de avaliação informativos e significativos. De fato, como mencionado por Santos (2008) e Celeste (2008), para esses estudantes, o enunciado se mostrou bastante acessível, pois eles demonstraram, em sua escrita e em suas falas na entrevista que as situações se mostraram reconhecíveis e imagináveis. No entanto, para esses estudantes, não se mostrou como um enunciado que oferecesse ao estudante a possibilidade de demonstrar suas habilidades. A ênfase ficou na questão ambiental, e a questão dos gráficos, da representação gráfica, não aparece nas produções escritas, nem nas falas. Eles se justificam pela questão ambiental e não se valem do instrumental matemático, no caso, a Estatística. Diante da questão ambiental, o instrumental estatístico se mostrou irrelevante para eles. O contexto não sugeriu nenhuma estratégia, o que é algo considerado importante para um bom problema de contexto (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 6). Apesar de o problema se apresentar aos estudantes como de uma situação contextual conhecida, parece que ele se faz, para esses estudantes, um problema de palavras e não um problema de contexto, como seria o desejável na concepção da Educação Matemática Realística.

As respostas para esta questão podem levar às outras, mencionadas anteriormente, uma vez que por meio da interação com o professor e com outros estudantes, o contexto foi negociado de modo a ser percebido de outra perspectiva ou substituído por outro possível, para os estudantes, de matematizar.

5 CONSIDERAÇÕES QUASE FINAIS

Este trabalho endossa a observação de Viola dos Santos (2007) de que as avaliações de rendimento que os órgãos educacionais, ligados ao governo, vêm realizando nos últimos quinze anos não têm possibilitado um inventário mais detalhado sobre os conhecimentos que os alunos constroem em sua história escolar durante o Ensino Fundamental e Médio. No caso mais específico deste trabalho, lançou-se um olhar a dois itens de matemática de uma avaliação internacional de rendimento que, corrigidas com a grade de correção proposta pelos organizadores, produziriam informações reduzidas em qualidade para indicativos de sala de aula. Como não são analisadas as estratégias nem os procedimentos utilizados, ou seja, o "como" esses alunos lidam com as questões, de quais conhecimentos eles fazem uso para resolvê-las e quais interpretações fazem em relação ao seu enunciado, essas avaliações pouco propiciam indicativos, sobre os modos como os alunos lidam com as questões apresentadas nas aulas. Por essa razão optou-se por uma análise das produções escritas em vez de apenas corrigir das questões.

As questões em aulas de matemática, nas situações que visam estabelecer um processo de aprendizagem, situações de ensino, podem fazer-se "realísticas" na abordagem, desde que se pautem pelos princípios da Educação Matemática Realística. Um enunciado em si não pode ser considerado realístico, mas a partir da interação do estudante no coletivo, pode tornar-se um problema de palavras ou um problema de contexto, da realidade do estudante. Neste último caso, abre-se a possibilidade da reinvenção guiada, por exemplo, na forma de uma intervenção para a aprendizagem, com a qual o estudante inicia um processo de matematização, seguindo assim, seu próprio trajeto de aprendizagem.

As propostas de intervenções para a aprendizagem apoiam-se nas inferências quanto às maneiras de lidar dos estudantes. Essas primeiras inferências surgem como resultado da análise de suas produções escritas. Cada maneira de lidar identificada recebe uma interpretação, que pode culminar com uma produção de significado e um tratamento em sala de aula.

No caso do item PROVA DE CIÊNCIAS, um grupo de 22 resolvedores apresentou maneiras de lidar que forneceram indícios de que eles atribuíam à expressão "média escolar" o significado de soma de notas. Foi sugerida uma pesquisa em livros didáticos, dicionários, revistas e jornais a fim de obter informações sobre o significado de média e de média aritmética. Esperava-se que a pesquisa trouxesse à tona sinônimos, significados ou aplicações que respaldassem o uso dos estudantes, mas em nenhum dos dicionários consultados consta "soma de notas" como um possível significado para "média". Nem os livros didáticos e as notícias da mídia o fazem. As entrevistas realizadas por Celeste (2008) e Santos (2008) é que esclareceram como os resolvedores estariam constituindo o contexto imaginado a partir do enunciado do item. Segundo esses estudantes em suas escolas, os professores somavam suas notas e diziam que o resultado se constituiria na sua "média". Essa prática parece ser bastante comum. Por exemplo, se a nota final para aprovação é 50, então o professor diz à sala que serão 5 provas, e que cada uma delas vale de 0 a 20 e que, para ser aprovado, o aluno deverá obter a "média" 50, em vez de colocar que são 5 provas que valem de 0 a 100 pontos cada uma, e, que a nota final será composta pela média aritmética dessas 5 notas. Supostamente, o professor tomou 100, média aritmética para o caso de o aluno obter nota máxima nas 5 provas, dividiu por 5, quantidade total de provas, obtendo a nota máxima que o aluno pode alcançar em cada uma

$$x = \frac{100}{5} = 20$$

Assim, o estudante poderia obter as seguintes notas durante o ano letivo: 10, 14, 16, 6 e 4 que estaria aprovado com nota final 50. Para ele é a sua média, que foi obtida pela soma, em vez das notas 50, 70, 80, 30 e 20, as quais ele deveria somar e dividir por 5, obtendo também 50, a média. Nesse último caso, seria de fato a média aritmética para o estudante, mas, no primeiro, somente o professor pensou em média aritmética, o estudante ficou apenas com o nome "média" para uma soma. Nesse caso, um novo significado foi atribuído à palavra média e esse novo significado pode ter impedido que os estudantes resolvessem o item da maneira considerada correta pela OCDE e condizente com o conceito de média aritmética.

Pode-se dizer que esses 22 resolvedores evocaram um contexto imaginável para resolver o item. Outros resolvedores também demonstraram, por meio de sua produção escrita e das entrevistas, que tomaram a média escolar como "tomar a maior nota" ou "somar duas notas e dividir por 2". Eles podem até ter conhecido a média aritmética como conteúdo da disciplina de matemática, porém o enunciado não trouxe a expressão "média aritmética", mas apenas "média" e, na situação de notas escolares, para esses resolvedores, média não significava média aritmética. Nesse caso o contexto do enunciado do problema pode ter dificultado que eles resolvessem o problema proposto. É possível que se o enunciado não fosse de notas escolares e trouxesse "média aritmética" em vez de "média", esses resolvedores tivessem aplicado corretamente o conceito de média aritmética ao resolver o problema. Esse caso é um exemplo adequado para se questionar até que ponto as avaliações de rendimento cumprem o que propõem, uma vez que a OECD (2007, p. 3) afirma que o PISA fornece "aos pais, estudantes, professores, gestores dos sistemas educacionais e o público em geral, informações consistentes sobre a forma como esses sistemas preparam os estudantes para a vida". "E podem orientar os esforços nacionais para ajudar os estudantes a aprender melhor, os professores a lecionar melhor e as escolas a tornar-se mais eficazes".

Porém não foi somente a análise das produções escritas que estavam presentes nos trabalhos que foram tomados como base para esta investigação. O que aparece como um passo "a mais", como um germe para este trabalho foram as tímidas entrevistas. Algo já sugerido por autores da Educação Matemática Realística. Por exemplo, a partir da produção escrita de SE202A, "Porque as pessoas têm que ficar assimilando o tempo de decomposição com os tipos de lixo e com isso elas perdem algum tempo, já num gráfico como esse [o estudante refere-se à tabela apresentada no enunciado da questão], fica mais fácil ver as características", Santos (2008, p. 52) infere que, para esse estudante, possivelmente, o fato de o gráfico de barras não ser o mais apropriado diria respeito apenas ao tempo que se gasta para associar as informações indicadas no eixo do tipo de lixo e, no eixo do tempo de decomposição. Essa hipótese se confirmou na entrevista com o estudante, o qual justificou, ao resolver novamente a questão, que uma tabela facilitaria a interpretação do leitor, pois as informações estariam "mais juntas". Na entrevista, o estudante foi questionado quanto aos tempos de decomposição indefinidos e imprecisos, de como isso ficaria em um gráfico de barras. A resposta do estudante mostrou um avanço, pois, após uma reflexão, expressou que seria complicado representar alguns dias num gráfico de barras. Esse motivo, aliado ao fato de ter que ficar associando as informações no gráfico, justificaria por que o gráfico de barras não é o mais apropriado (SANTOS, 2008, p. 52). Esta última explicação não havia aparecido em sua resolução, o que pode indicar que esta forma de abordagem, aqui chamada de intervenção, pode promover avanços na aprendizagem dos estudantes.

Outra situação que exemplifica a importância da intervenção na condução do processo de aprendizagem e como que uma inferência pode não se mostrar verdadeira, mas que a intervenção, por meio do diálogo, pode esclarecer ao professor, que rumos tomar na reinvenção guiada. Considerando a justificativa presente na produção escrita do estudante SE041A: "o tempo de decomposição é muito longo o único material que el e poderia mostrar era o jornal", o professor pode inferir que o estudante estava se baseando apenas no tempo de decomposição do copo plástico, que é de mais de 100 anos, para apresentar uma justificativa para o fato de que o gráfico de barras não seria o mais apropriado para mostrar o tempo de decomposição dos vários tipos de lixos, conforme Santos (2008, p. 53). A partir disso, poder-se-ia ainda inferir que a justificativa do estudante estava pautada na dificuldade de representar, em um gráfico de barras, dados de magnitudes tão discrepantes. A entrevista, no entanto, que poderia ser substituída pelo momento da intervenção, tal como proposto nesse trabalho, revela um outro embasamento para a resposta e a justificativa: o fato de o estudante se preocupar com a possibilidade e a viabilidade da realização da experiência de observar a decomposição dos lixos do enunciado do item pelo próprio estudante.

Ao adotar os princípios da Educação Matemática Realística, destacaram-se três momentos no decorrer das supostas interações com estudantes. O primeiro deles ficou marcado pelo recolhimento de informações, a partir da análise das produções escritas dos estudantes e das entrevistas para confirmação e estabelecimento de contextos imagináveis para os estudantes. Foram colhidas informações a respeito de dados de situações autênticas para os estudantes, nas quais, na opinião deles, uma média seria calculada. No segundo item, o que poderia ou deveria ser representado por meio de um gráfico de barras ou outra forma de representação. Também buscou-se identificar situações nas quais eles imaginassem que o gráfico de barras não seria a forma mais adequada de representação. O objetivo foi identificar os contextos imaginados pelos estudantes ao lidarem com o enunciado do item. O segundo momento, em cada proposta, caracterizou-se em solicitar à sala, organizada em grupos, que os estudantes pesquisassem gráficos que representassem dados e trouxessem para a sala de aula uma sistematização de situações veiculadas na mídia ou vivenciadas por eles. O objetivo foi identificar os contextos imaginados pelos estudantes ao lidarem com o enunciado do item e promover discussões que levassem ao conhecimento de todos da sala os diversos contextos imaginados pelos estudantes. É recomendável a exploração desses contextos com a sala toda, a fim de fortalecer a familiaridade dos estudantes com eles, pois será nesses contextos que o trabalho de estímulo à matematização deverá ocorrer. O professor pode, sempre que entender necessário, introduzir outros contextos, que julgue mais adequados à matematização.

Primeiramente, se devem trazer à tona as situações indicadas nas produções escritas dos estudantes. Foram identificadas, no caso deste trabalho, maneiras gerais de lidar com o enunciado dos itens. A partir dessa identificação o professor pode dar prosseguimento à sua investigação, como parte do processo de avaliação da aprendizagem, na perspectiva da avaliação como prática de investigação.

Nessa etapa é sugerido aos estudantes que construam representações adequadas a diversos conjuntos de dados. Os estudantes são guiados, orientados a obterem uma maneira para calcular a média nas situações que apresentaram e a decidirem a respeito de qual maneira seria mais adequada, diante da variedade de maneiras por eles apresentadas. O dicionário, os livros textos exercem um papel fundamental nessa etapa e devem ser frequentemente consultados pelos estudantes, para auxiliá-los nas tomadas de decisões, na escolha de modelos adequados e válidos para resolver as situações. O professor presta atendimento e lança perguntas aos alunos.

Os estudantes avaliam conjuntos de dados e a sua adequação na representação, também criam exemplos de conjuntos de dados e analisam formas de representação adequadas.

No terceiro momento pode-se esperar a ocorrência de uma matematização vertical quando os estudantes começam a dizer que o gráfico de barras é adequado para dados que não apresentem uma variação muito grande; não sejam intervalos de tempo nem valores indefinidos.

Celeste (2008, p. 56) considera que, a partir dos dados de sua pesquisa, parte dos alunos (29,412%) demonstrou conhecer os gráficos, inclusive o gráfico de barras, porém não formularam justificativas satisfatórias para a resposta do item. Comenta que esse item, LIXO, foi o que mais surpreendeu os professores quanto ao índice de acerto pelos alunos. Três professores responderam que entre 0 e 10% dos alunos acertaria a questão, no entanto, a porcentagem de acerto foi de 17,647%. Celeste (2008, p. 57) infere que, provavelmente, os professores não esperavam que os alunos acertassem a questão por não terem trabalhado o conteúdo durante aquele ano letivo. Dos cinco itens da pesquisa de Celeste (2008), os participantes responderam que os itens LIXO e ASSALTOS seriam considerados os mais difíceis na opinião dos alunos participantes. Cabe também destacar que o item ASSALTOS também dizia respeito à interpretação crítica da utilização de um gráfico de barras.

Já os professores dos estudantes participantes do estudo de Santos (2008, p. 47) estimaram que a porcentagem de acertos seria de 11 a 40% entre os estudantes da 1a série e de 41 a 60% entre os da 2a série. No entanto, a porcentagem de crédito completo, tanto para estudantes da 1a série (0%) quanto da 2a série (8,33%), ficou muito aquém das expectativas dos professores.

Atribui-se a discrepância entre as expectativas dos professores e os resultados obtidos no primeiro caso ao fato de os professores não terem trabalhado o conteúdo com os estudantes, então se surpreenderam com o resultado acima do esperado. No segundo caso, surpreenderam-se com o resultado, pois julgavam que os alunos seriam capazes de resolver a questão de maneira satisfatória uma vez que o conteúdo gráfico de barras havia sido trabalhado pelos professores com seus alunos. Chama a atenção o fato de os alunos que os professores julgaram que lidariam melhor com a questão terem se saído pior que aqueles que não receberam nenhuma informação a respeito do assunto.

No estudo de Ferreira (2009, p. 120), o primeiro grupo indica que a estratégia que os participantes mais utilizam é a apresentação de apenas uma ou mais justificativas. Apenas com exceção do item "Taxa de Câmbio", essa estratégia também é a mais utilizada em cada uma das questões nas quais os participantes não lançaram mão de outros procedimentos para apresentar suas justificativas.

Esse indício pode revelar que o "pensar matematicamente" nem sempre precisa estar associado ao desenvolvimento de operações numéricas escritas.

A prática da intervenção para a aprendizagem é indicada, uma vez que um contato maior com o estudante, seja por meio de suas produções escritas, seja em forma de diálogos, subsidiará as intervenções e a condução da reinvenção guiada de seus estudantes.

Esse trabalho cumpre o papel de apresentar algum progresso nas pesquisas de avaliação da aprendizagem de Matemática desenvolvidas no interior do GEPEMA, indicando mais um passo na articulação entre as pesquisas do grupo e a sala de aula. Apoia-se na vertente teórica da EMR, a qual tem se mostrado como um arcabouço teórico adequado para as práticas de avaliação já idealizadas pelo GEPEMA. De acordo com Freudenthal (1973, p. 83) examinar

> é uma atividade significativa. O professor deve ser capaz de verificar a influência do processo de ensino, pelo menos para saber como melhorá-lo. O aluno tem o direito de saber se ele realmente aprendeu alguma coisa, se sua atitude de aprendizagem está adequada, e se ele é capaz de aprender o que é requerido. Finalmente, existem outros que estão interessados em saber o que alguém aprendeu.

Um aspecto diferencial deste trabalho foi colocar na intervenção a perspectiva do estudante. A intervenção se faz a partir de uma contextualização indicada pelo estudante em suas respostas, e isso só se viabilizou com a análise da produção escrita, tomando-a como estratégia pedagógica. Verifica-se, na trajetória de pesquisa do GEPEMA, que esse é o traço mais característico de suas pesquisas em avaliação, sempre partindo do estudante, pelo viés de sua produção escrita. Esse elemento alinha fortemente as pesquisas do grupo com características da Educação Matemática Realística.

Freudenthal (1973) enfatizou que o material destinado para os alunos matematizarem deve ser real para eles. Nos estudos de Celeste (2008) e Santos (2008) foi possível inferir respostas que os estudantes dariam para as questões que lhes eram colocadas e, a partir daí, o esforço em conduzi-los em algo que se inspira no que Van den Heuvel (1996) chamou de técnicas de entrevista, o olhar para contextos que são experimentalmente reais para os alunos e que podem ser utilizados como pontos de partida para a matematização progressiva (GRAVEMEIJER, 1999).

A investigação nos trabalhos teóricos da EMR revelou uma sintonia entre as concepções de Educação Matemática do GEPEMA, nucleadas pela ideia da avaliação da aprendizagem. Exemplo disso é a aproximação entre a avaliação da aprendizagem proposta por Buriasco (1999) com a avaliação didática indicada por Van den Heuvel-Panhuizen (1996). As ações indicadas e desenvolvidas pelo grupo se justificam por essa vertente teórica e podem se fortalecer compondo harmoniosamente e gerando ações para a sala de aula.

A utilização de intervenção se caracteriza como mais um avanço do GEPEMA na expressão do que compreende por avaliação da aprendizagem, configurando-se em uma possibilidade de operacionalização da concepção de avaliação da aprendizagem por meio da análise da produção escrita, na perspectiva teórica da EMR.

O GEPEMA, em sua trajetória de estudos e pesquisa, vem mais e mais se apropriando de lentes de aumento que vão possibilitando um foco mais preciso e mais próximo dos processos de aprendizagem de matemática e de maneiras de lidar com eles.

Uma possibilidade para um trabalho futuro poderia ser a de elaborar um estudo a partir de uma análise de itens de matemática do PISA e da análise da produção escrita dos alunos do Paraná destinado a orientar a prática de professores em sala de aula. Ação semelhante se encontra nos documentos mexicanos "PISA para Docentes" (INEE, 2005) e "PISA em El Aula: matemáticas" (INEE, 2008). O diferencial do documento brasileiro seria que a proposta estaria fundamentada didática e pedagogicamente na EMR e na análise da produção escrita. Essa análise traria elementos para a aprendizagem dos estudantes bem como para enriquecer a compreensão sobre o desempenho deles e poderia ajudar a explicar diferenças de desempenho.

Esse estudo poderia ser lançado na forma de um documento com a

intenção de propor uma releitura dos resultados dos estudantes brasileiros, resgatando um aspecto qualitativo desse tipo de avaliação. Um estudo desse tipo iria ao encontro do que está indicado nos relatórios da OECD (2007, p. 4).

> Portanto, esse relatório fornece apenas um panorama inicial dos resultados. Deve ser considerado como ponto de partida para outras pesquisas e análises nos níveis nacional e internacional, assim como ocorreu com os relatórios iniciais das pesquisas PISA 2000 e PISA 2003.

O realístico pode se manifestar em questões não-rotineiras de matemática por meio da análise da produção escrita dos estudantes como apresentado neste trabalho, contudo, o realístico também estará presente sempre que:

- o estudante é chamado e guiado a percorrer um caminho de experiências mentais que o conduzem ao que se espera que ele aprenda;
- os guias desse caminho são suas próprias produções a partir das quais lhe é permitido encontrar o seu próprio nível e explorar novos caminhos, novas formas de expressão e comunicação;
- é fomentada uma atitude de experiência no processo de aprender matemática como uma atividade humana;
- os estudantes podem reinventar, na escola, tantas maneiras de lidar quanto necessárias para realizar as tarefas propostas;
- as ações desenvolvidas nas aulas são conectadas ao que é real para o estudante utilizar em um processo de matematização, tanto horizontal quanto vertical;
- é fornecida aos estudantes uma oportunidade "guiada" para "reinventar" matemática fazendo-a.

> O que os humanos têm que aprender não é matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade - o processo de matematizar a realidade e, se possível, até mesmo o de matematizar a matemática (FREUDENTHAL, 1968, p. 7, tradução nossa).

Essas são apenas mais algumas considerações, pois, como disse Buriasco em um encontro do GEPEMA "qualquer trabalho de pesquisa nunca acaba, apenas fechamos com aquilo que temos em mãos".

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo. **Avaliação e educação matemática.** Rio de Janeiro: MEM/USU GEPEM, 1995.

AGUIAR, Glauco da Silva. **Estudo comparativo entre Brasil e Portugal, sobre diferenças nas ênfases curriculares de matemática, a partir da análise do funcionamento diferencial do item (dif) do PISA 2003.** 246 f. 2008. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica - Rio de Janeiro. 2008.

ALMEIDA, Vanessa Lucena Camargo. **Questões não-rotineiras:** a produção escrita de alunos da graduação em matemática. 144 f. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2009. Disponível em: <http://www2.uel.br/cce/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/vanessa_almeida_texto.pdf>. Acesso em: 22 dez. 2009.

ALVES, Rose Mary Fernandes. **Uma análise da produção escrita de alunos do ensino médio em questões abertas de matemática.** 158f. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2006. Disponível em: <http://www2.uel.br/cce/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/ Rose_Mary_Fernandes_Alves.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2007.

BALDINO, Roberto Ribeiro. A ideologia da melhora no ensino da matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 1992, Universidade Regional de Blumenau. **Anais...** , Blumenau, 1992.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1977.

_____ . **Análise de conteúdo.** 3. ed. Lisboa: Edição 70, 2004.

BARLOW, Michel. **Avaliação escolar:** mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BARRETO, Marina Menna; GRAVINA, Maria Alice. **Como construir figuras semelhantes?** curso de licenciatura em matemática da UFRGS, 1998. Disponível em: <http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/malice2/sistems2.htm>. Acesso: 23/11/2011.

BEZERRA, Gisleine Correa. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade:** um estudo. 183 f. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010. Disponível em: <http://www2.uel.br/cce/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/gisleine_bezerra.pdf>. Acesso em: 08 set. 2010.

BRANDÃO, Carlos Rodrigues. **O que é educação.** São Paulo: Brasiliense. 1989.

BRASIL. **Lei de diretrizes e bases da educação nacional,** Lei n° 9394, 20 de dezembro de 1996.

_____ . **Parâmetros curriculares nacionais (5ª a 8ª série):** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____ . **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio.** Brasília: MEC/SEMTEC. 1998.

_____ . **Orientações curriculares para o ensino médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Avaliação em matemática:** um estudo das respostas dos alunos e professores. 238 f. 1999. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Marília. 1999.

_____ . Algumas considerações sobre avaliação educacional. **Estudos em avaliação educacional.** São Paulo, n. 22, jul - dez, p. 155 – 178, 2000.

_____ . **Tópicos de educação matemática.** Londrina :UEL, 2004. Notas de aula da disciplina**,** do programa de mestrado em ensino de ciências educação matemática.

_____ . Introdução à Análise da Produção Escrita: prática de investigação em avaliação. In: BATISTA, Irinéa de Lourdes; SALVI, Rosana Figueiredo. (Orgs.) **Pós-graduação em ensino de ciências e educação matemática:** um perfil de pesquisas.1 ed. Londrina: EDUEL, 2009, v.1, p. 157-166.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; SOARES, Maria Tereza Carneiro. Um estudo sobre a construção de um manual para correção das provas com questões abertas de Matemática - AVA 2002. In: SIEM - SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 14., 2003, Lisboa - Portugal. **Actas...** Lisboa - Portugal: Associação de Professores de Matemática, 2003. p. 65-80.

_____ . **Manual para correção das provas com questões abertas de matemática** AVA - 2002. Curitiba, SEED/CAADI, 2003.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; SOARES, Tereza Carneiro Soares. Avaliação de sistemas escolares: da classificação dos alunos à perspectiva de análise de sua produção matemática. In: VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). **Avaliação Matemática:** história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2008.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; FERREIRA, Pamela Emanueli Alves; CIANI, Andréia Büttner. Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA,** v. 33, p. 69-96, 2009.

BUTTS, Thomas. Formulando Problemas Adequadamente. In: KRULIK, S; REYS, R. E. A. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1997. p. 33-48.

CARAMANTE, André; SPINELI, Evandro. Homicídio cai e roubo de veículos sobe em SP. **A Folha de São Paulo,** p. 1, dez. 2011. (Capa/Caderno Cotidiano).

CELESTE, Letícia. Barcaro. **A produção escrita de alunos do ensino fundamental em questões de matemática do PISA.** 85 f. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2008. Disponível em: <http://www2.uel.br/cce/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/leticia_barcaro_celeste.pdf>. Acesso em: 9 ago. 2008.

CIANI, Andréia Büttner. **Aula particular de matemática:** uma questão de gosto e as relações de poder. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2000.

COBB, Paul; YACKEL, Erna. Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. **Journal of Educational Psychology,** v. 31, n. 3-4, p. 175-190, 1996.

COBB, Paul; ZHAO, Qing; VISNOVSKA, Jana. Learning from and Adapting the Theory of Realistic Mathematics Education. **Éducation & Didactique,** v. 2, n. 1, p. 105-124, 2008.

COLOMBO, Irineu Mário; WELTER, Elton. **Educação Básica:** perguntas e respostas sobre a legislação e a atividade docente. Curitiba: Reproset Editora Gráfica, 2004.

CURY, Helena Noronha. **As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos.** Porto Alegre: UFRGS, 1994. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.

D'AMBROSIO, Beatriz. et al. Beyond reading graphs: student reasoning with data. In: KLOOSTERMAN, Peter; LESTER JR, Frank. (Ed.) **Results and interpretations of the 1990 through 2000 mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress.** Reston: NCTM, 2004, p. 363-382.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2005; 110p.

_____ . **A paz nas escolas bons fluidos.** 2008. Disponível em: <http://bonsfluidos.abril.com.br/livre/edicoes/0115/10/01.shtml>. Acesso em: 23 fev. 2009.

D'HAINAUT, Louis. **Conceitos e métodos da estatística:** uma variável a uma dimensão. 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.

DALTO, Jader Otávio. **A produção escrita em matemática:** análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 100 f. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2007. Disponível em: <http://www2.uel.br/cce/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/Jader_Otavio_Dalto.pdf>. Acesso em: 03 mai. 2008.

DALTO, Jader Otávio; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Problema proposto e problema resolvido: qual a diferença? **Educação e Pesquisa,** v. 33, n. 3, 2009, p. 449-461. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v35n3/03.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** São Paulo: Ática, 2009.

DE LANGE, Jan. **Mathematics, insight and meaning.** Utrecht: OW&OC, Utrecht University, 1987.

_____ . Assessment: No Change without Problems. In: ROMBERG, T.A. (Ed) **Reform in school mathematics and authentic assessment.** Albany: SUNY Press, 1994, p. 87-172.

_____ . Using and Applying Mathematics in Education. In: **International handbook of Mathematics Education.** Dordrecht, 1996, p. 49-98. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6279.pdf>. Acesso em: 8 nov. 2008.

_____ . **Framework for classroom assessment in mathematics.** Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6279.pdf>. Acesso em: 8 nov. 2008.

ESTEBAN, Maria Teresa. Avaliar: ato tecido pelas imprecisões do cotidiano. In: GARCIA, Regina Leite. **Novos olhares sobre a alfabetização.** São Paulo: Cortez, 2001, p. 175-192. Disponível em <http://www.amped.org.br/0611t.htm>. Acesso em: 10 mai. 2008.

_____ . **O que sabe quem erra?** reflexões sobre avaliação e fracasso escolar, 3. ed., Rio de Janeiro: DP&A, 2001.

FEEDBACK. In: HOUAISS, Antônio. **Dicionário eletrônico da língua portuguesa.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2002. CD-ROM.

FERREIRA, Pamela Emanueli Alves. **Análise da produção escrita de professores da educação básica em questões não-rotineiras de matemática.** 166f. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2009. Disponível em: <http://www2.uel.br/cce/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/pamela_ferreira_texto.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2010.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké,** Campinas, n. 4, p. 1-38, 1995.

FREUDENTHAL, Hans. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics**, n. 1, p. 3-8, 1968.

_____ . **Mathematics as an educational task.** Dordrecht: Reidel. 1973.

_____ . **Weeding and sowing:** preface to a science of mathematical education. Dordrecht: Reidel. 1973.

_____ . **Perspectivas da matemática.** Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

_____ . **Didactical phenomenology of mathematical structures.** Dordrecht: Reidel. 1983.

_____ . **Revisiting mathematics education.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1991.

GAVE (Gabinete de Avaliação Educacional). **Resultados do estudo internacional PISA 2003.** Lisboa, 2004. Disponível em:< http://www.gave.min-edu.pt>. Acesso: 09 mar. 2008.

GIMÉNEZ RODRIGUEZ, Joaquín. **Evaluación en matemáticas:** una integración de perspectivas. Madrid: Sínteses, 1997.

GRAVEMEIJER, Koeno. **Developing realistic mathematics education.** Utrecht: Utrecht University, 1994.

_____ . How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. **Mathematical Thinking and Learning.** v. 1, n. 2, 1999, p. 155-177.

_____ . Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF STATISTICS, ICOTS 6, 2002, South Africa. **Proceedings...** Disponível em: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?show=1>. Acesso em: 6 out. 2011.

_____ . Creating Opportunities for Students to Reinvent Mathematics. In: **The proceedings of ICME-10,** Kopenhagen, Dinamarca, 2004.

_____ . Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education. In: APEC - TSUKUBA INTERNATIONAL CONFERENCE. 3., Japão, 2007. **Proceedings...** Disponível em: <http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/index_en.php>. Acesso em: 29 mar. 2009.

_____ . RME Theory and Mathematics Teacher Education. In: **International handbook of mathematics teacher education,** Rotterdam: Sense Publishers, 2008, v. 1, p. 283-302.

GRAVEMEIJER, Koeno; TERWEL, Jan. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal Curriculum Studies,** v. 32, n. 6, p. 777-796, 2000.

HADJI, Charles. **A avaliação regras do jogo:** das intenções aos instrumentos. 4. ed., Portugal: Porto Editora, 1994.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática:** ciência e aplicações. 6. ed., v. 3, São Paulo: Saraiva, 2010.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA. **Banco de questões 2010.** 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm>. Acesso em: 15 dez. 2010.

INSTITUTO NACIONAL PARA LA EVALUACIÓN DE LA EDUCACIÓN - INEE. **PISA para docentes:** la evaluación como oportunidad de aprendizaje. México: INEE, SEP, 2005. Disponível em: <http://www.inee.edu.mx/index.php/publicaciones/textos-de-divulgacion/materiales-para-docentes/3648>. Acesso em: 03 mar. 2010.

_____ . **PISA em el aula:** matemáticas. México: INEE, SEP, 2008. Disponível em: <http://www.inee.edu.mx/index.php/publicaciones/textos-de-divulgacion/materiales-para-docentes/4227>. Acesso em: 03 mar. 2010.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA – INEP. **Itens liberados de matemática.** 2011. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/download/internacional/pisa/Itens_liberados_Matematica.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2011.

_____ . **Exame nacional do ensino médio (ENEM):** um ensaio para a vida - prova de Matemática e suas tecnologias. Brasília: INEP, 2011. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 15 out. 2011.

KASTBERG, Signe E. et al. Context matters in assessing student's mathematical power. **For the Learning Mathematics** v. 25, n. 2, p. 10-15, 2005.

LINS, Rômulo Campus; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. Literacia estatística e o INAF 2002. In: FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. (Org.) **Letramento no Brasil:** habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2004. p. 187-197.

LOPEZ, Juliana Maira Soares. **Análise interpretativa de questões não-rotineiras de Matemática**.141f. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2010. Disponível em: <http://www2.uel.br/cce/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/Juliana Maira Soares Lopez.pdf>. Acesso em: 7 abr. 2011.

MÉDIA. In: HOUAISS, Antônio. **Dicionário eletrônico da língua portuguesa.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2002. CD-ROM.

MIGUEL, Antonio. A constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em Educação Matemática. **Zetetiké,** v. 3, n. 3, p. 7-40, 1995.

NAGY-SILVA, Marcia Cristina. **Do observável para o oculto:** um estudo da produção escrita de alunos da 4ª. série em questões de matemática. 123 p. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

NEGRÃO DE LIMA, Roseli Cristina. **Avaliação em matemática:** análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 201f. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

NEGRÃO DE LIMA, Roseli Cristina; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Avaliação da aprendizagem escolar: um olhar em perspectiva para a produção escrita. In: **VIDYA,** Santa Maria: UNIFRA, v. 27, n.2, p. 43-54, 2007.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OECD. **The PISA 2003 - assessment Framework:** mathematics - reading, science and problem solving knowledge and skills. Paris, 2003. Disponível em: <http://www.pisa.oecd.org>. Acesso: 23 ago. 2007.

_____ . **Learning for tomorrow's world** - first results from PISA 2003. Paris, 2004a. Disponível em <http://www.pisa.oecd.org>. Acesso em: 27 ago. 2008.

_____ . **PISA 2006:** science competencies for tomorrow's world. Paris: OECD, 2007, v. 1.

_____ . **Learning Mathematics for Life:** A view perspective from PISA. Paris: OECD, 2009.

ORGANIZAÇÃO PARA COOPERAÇÃO E DESENVOLVIMENTO ECONÔMICOS - OCDE. **Estrutura de avaliação PISA 2003:** conhecimentos e habilidades em matemática, leitura, ciências e resolução de problemas. Tradução B & C Revisão de textos. São Paulo: Moderna, 2004b.

_____ . **Aprendendo para o mundo de amanhã - primeiros resultados do PISA** 2003. São Paulo: Moderna, 2005.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Orientações curriculares:** matemática. Curitiba: SEED, 2006.

_____ . **Livro didático público:** matemática ensino médio. Curitiba: SEED, 2. ed., 2007.

_____ . **Diretrizes curriculares da educação básica de matemática.** Curitiba: SEED, 2008.

PEREGO, Franciele. **O que a produção escrita pode revelar?** uma análise de questões de matemática. 2006. 127 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006. Disponível em: <http://www2.uel.br/cce/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/Franciele_Perego.pdf>. Acesso em: 08 set. 2007.

PEREGO, Sibele Cristina. **Questões abertas de matemática:** um estudo de registros escritos. 2005. 105 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005. Disponível em: <http://www2.uel.br/cce/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/Sibele_Cristina_Perego.pdf>. Acesso em: 08 set. 2007.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. The Absolute Value in Secondary School: a Case of "Institutionalisation" process. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICAL EDUCATION. 19., Recife, **Proceedings...,** Recife, v. 2, p. 74-8, 1995.

PINHEIRO, João Ismael ; CUNHA, Sonia Batista da; CARVAJAL, Santiago Ramirez; GOMES; Gastão Coelho. **Estatística básica:** a arte de trabalhar com dados. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

PROPORCIONAL. In: HOUAISS, Antônio. **Dicionário eletrônico da língua portuguesa.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2002. CD-ROM.

SACRISTÁN, José Gimeno. La evaluación em la ensenanza. In: SACRISTÁN, J. G. **Comprender y transformar la ensenaza.** Porto Alegre: Artemed, 4. ed., 1998. p. 295-351.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática.** 166f. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2008. Disponível em: <http://www2.uel.br/cce/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/edilaine_regina_santos.pdf 2007>. Acesso em: 3 jul. 2008.

SANTOS, Leonor. A avaliação em documentos orientadores para o ensino da Matemática: uma análise sucinta. **Quadrante,** Lisboa, v. 12, n. 1, p. 7-20, 2003.

SCHWARZ, Judah Lamon. The Intellectual Prices of Secrecy in Mathematics Assessment. In: LESH, Richard; SCHWARZ, Judah Lamon. (Ed.), **Assessment of authentic performance in school mathematics,** Washington: AAAS Press, 1992, p. 427-437.

SEGURA, Raquel de Oliveira. **Estudo da produção escrita de professores em questões discursivas de Matemática.** 2005. 178 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.

SILVA, Cláudio Xavier; BARRETO, Benigno. **Matemática aula por aula,** PNLEM. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005, v. 1-2.

SMITH, Margaret Schwan; HILLEN, Amy; HEFFERNAN, Cristina. Student-constructed representations: Vehicles for helping teachers understand students' mathematical thinking. In: BLUME, Glendon; HEID, Mary Kathleen; SMITH, Margaret Schwan. **2001 Yearbook of the Pennsylvania council of teachers of mathematics:** the role of representation in the teaching and learning of mathematics, State College. PA: The Council of Teachers of mathematics. 2001, p. 65-69.

STREEFLAND, Leen. **Fractions in realistic mathematics education:** a paradigm of developmental research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

TRÂNSITO. Gráficos, análise combinatória. In: **Guia do estudante:** matemática vestibular 2012. São Paulo: Abril, 2012. p. 102-107.

TREFFERS, Adrian; GOFFREE, Fred. Rational analysis of realistic mathematics education - The Wiskobas program. In: STREEFLAND, Leen (Ed.), Annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 2, Utrecht: PME, 1985, p. 97-121.

TREFFERS, Adrian. **Three dimensions:** a model of goal and theory description in mathematics instruction - the wiskobas project. Dordrecht: Kluwer Academic, 1987.

VALERO, Paola. Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. **Quadrante.** v. 11, n. 1, p. 33-43, 2002.

VAN DEN BRINK, Jan. IOWO material tested. In: KARPLUS (Ed.). In: FOURTH INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. **Proceedings...** Berkeley: University of California, 1980, p. 361-369.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Assessment and realistic mathematics education.** Utrecht: Freudenthal Institute, 1996.

_____ . Realistic Mathematics Education: work in progress. In: T. Breiteig and G. Brekke (Eds.). **Theory into practice in mathematics education.** Kristiansand, Norway: Faculty of Mathematics and Sciences / Hogskolen I Agder, 1998.

_____ . **Mathematics education in the Netherlands:** a guided tour. Netherlands**:** Universiteit Netherlands, 2000.

_____ . The role of contexts in assessment problems in mathematics. **For the learning mathematics,** v. 25, n. 2, p. 2-9, 2005.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática.** 108f. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007. Disponível em: <http://www2.uel.br/cce/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/Joao_Ricardo_Viola.pdf>. Acesso em: 2 jun. 2007.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Uma análise interpretativa da produção escrita em matemática de alunos da escola básica. **Zetetikè,** v. 16, n. 30, p. 11-44, 2008. Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/zetetike/viewissue.php?id=21>. Acesso em: 30 set. 2009.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo; BURIASCO, Regina Luzia Corio de; FERREIRA, Pamela Emanueli Alves. Interpretações de alunos da educação básica para a idéia de recorrência em uma questão aberta de matemática. **Educação Matemática em Pesquisa,** São Paulo, v. 12, n. 1, p. 143-163. 2010.

WITTMANN, Erich Ch. Realistic mathematiscs education, past and present. **Nieuw Archief voor Wiskunde,** p. 294-296, 2005.

ZULKARDI. **How to design lessons based on the realistic approach.** University of Twente, 1999.

_____ . Developing a 'rich' learning environment on RME for student teachers in Indonesia. In: SEMINAR AT THE FACULTY OF MATHEMATICS UNIVERSITY OF TWENTE, 2002, Twente. **Proceedings...** Twente: University of Twente, 2002. p. 23-24.