IVNNA GURNISKI CARNIEL

CONHECIMENTOS MOBILIZADOS EM UM PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA POR UMA PROFESSORA QUE ENSINA MATEMÁTICA

Londrina
2013

IVNNA GURNISKI CARNIEL

CONHECIMENTOS MOBILIZADOS EM UM PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA POR UMA PROFESSORA QUE ENSINA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª. Drª. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

G981c Gurniski Carniel, Ivnna.
Conhecimentos mobilizados em um processo de formação continuada por uma professora que ensina matemática / Ivnna Gurniski Carniel. – Londrina, 2013.
135 f. : il.

Orientador: Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Prática de ensino – Teses. 3. Álgebra – Estudo e ensino – Teses. 4. Professores de matemática – Formação profissional – Teses. 5. Professores de matemática – Educação permanente – Teses. I. Cyrino, Márcia Cristina de Costa Trindade. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

CONHECIMENTOS MOBILIZADOS EM UM PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA POR UMA PROFESSORA QUF ENSINA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

COMISSÃO EXAMINADORA

Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Profa. Dra. Ângela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 05 de Agosto de 2013.

Dedico este trabalho aos meus pais: Clarice e Flávio Gurniski, que não mediram esforços para a realização dos meus sonhos, que estiveram comigo nos momentos em que mais precisei e me ensinaram a fazer escolhas na vida. Eles mostraram que o caminho da honestidade é essencial à vida.
Sou extremamente orgulhosa por vocês e eternamente grata pelo incansável incentivo.
Muito obrigada. Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

À Deus, que me deu a vida e a possibilidade de concretizar esse trabalho. Que me deu sabedoria, paciência e força nos momentos mais difíceis. Que me fez e faz encontrar respostas aos meus problemas.

Ao meu esposo Elthon, por acreditar e confiar em mim, pelo companheirismo e dedicação. Por me acalmar quando o desespero muitas vezes falou mais alto. Agradeço pelo intenso amor demonstrado.

À minha irmã Nataly, que me incentivou e auxiliou em questões acadêmicas e pessoais durante todo o processo.

À minha orientadora Profa. Dra. Marcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, pela oportunidade, orientações, recomendações e críticas. Agradeço pela paciência e pelo seu exemplar profissionalismo, atributos que certamente contribuíram para meu desenvolvimento acadêmico e profissional.

Aos professores, Prof. Dr. André Luis Trevisan e Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, que gentilmente aceitaram participar da Banca Examinadora, cujas sugestões e recomendações foram de fundamental importância para a conclusão desta pesquisa.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, especial agradecimento à Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco, pois nunca esquecerei suas sábias palavras.

À Profa. Dra. Magna Natália Marin Pires, com quem compartilho este trabalho, pelas contribuições que foram fundamentais no processo de elaboração desta pesquisa.

Aos amigos Lígia e Márcio, companheiros de todas as horas, com quem pude dividir minhas alegrias e angústias e que sempre estiveram dispostos a ajudar. Amigos que me fizeram sorrir naquele dia em que a vontade de chorar era maior do que a de se alegrar.

À aluna Suelen, que se tornou amiga, por todas as palavras de carinho e ajuda prestada nas horas mais difíceis.

Aos amigos professores e coordenadores da Unicesumar, especialmente Henry, Judson, Júlio, Thaise e Waldir, e ao diretor Valdecir Bertoncello, os meus agradecimentos pelo incentivo e principalmente pela compreensão nesse momento tão importante da minha vida profissional, o meu carinho e respeito incondicional a todos sem exceção.

À Unicesumar pela bolsa de apoio concedida, colaborando com essa conquista tão importante.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido ao Programa Observatório da Educação, tornando possível o desenvolvimento dessa pesquisa.

“Por detrás de todo o ensino da Matemática
está uma filosofia da Matemática”.
René Thom (1973)

GURNISKI CARNIEL, Ivnna. **Conhecimentos mobilizados em um processo de formação continuada por uma professora que ensina matemática**. 2013. 135 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

RESUMO

No presente estudo, investigamos que conhecimentos são mobilizados por uma professora que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, desencadeados por uma proposta de formação continuada, com ênfase em tarefas matemáticas que tem o potencial para mobilizar o pensamento algébrico. Para tanto, estivemos em contato com um grupo em formação continuada, formado pelas professoras e a coordenadora pedagógica de uma escola da cidade de Apucarana - PR, dentre as quais escolhemos uma professora para ser investigada. Esta investigação constitui-se como uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo e os pressupostos teóricos envolvem a formação de professores, os conhecimentos específicos do professor e os tipos de pensamento algébrico. Utilizamos como instrumentos para coleta de informações o diário de campo, gravações dos encontros do grupo e produções escritas da professora investigada. Nossa pesquisa mostra que em um contexto de formação continuada é possível proporcionar ao professor momentos de reflexão acerca da Matemática e de sua prática letiva, colaborando com o desenvolvimento de potencialidades e a construção de novos saberes, articulados aos seus interesses, necessidades e seu contexto profissional. As ações desenvolvidas na proposta de formação continuada, cenário da pesquisa, provocaram discussões e reflexões que nos permitiram identificar aspectos da prática letiva da professora investigada, de modo a caracterizar os conhecimentos mobilizados ao longo desse processo.

Palavras-chave: Educação matemática. Formação de professores que ensinam matemática. Conhecimentos específicos do professor. Pensamento algébrico.

GURNISKI CARNIEL, Ivnna. **Knowledge mobilized in a process continuing education by a teacher who teaches mathematics**. 2013. 135 f. Dissertation (Master in Science Teaching and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

ABSTRACT

In the present study, we investigated what knowledge are mobilized by a teacher who teaches Mathematics in the first grades of elementary school, triggered by a proposal for continuing education, with emphasis on mathematical tasks that have the potential to mobilize the algebraic thinking. Therefore, we have been in contact with a group of further education that was made up of the teachers and the pedagogical coordinator from a school in the city of Apucarana in Paraná. Among all these teachers we chose one who would be investigated. This is a qualitative research which also have interpretative characteristics and the theoretical assumptions involved the teachers' education background, specific knowledge and the types of algebraic thinking. We used a field journal, the group reunions' recordings and the written productions of the teacher who was investigated as tools to collect information. Our research shows that in a context of further education it is possible to provide the teacher moments to reflect about mathematics and its teaching practice, collaborating with the development of potentialities and the construction of new knowledge, connected with their interests, needs and the professional context. The actions developed in the continuing education proposal, which is the scenario of this research, led to discussions and reflections that enabled us to identify teaching practice aspects of the teacher who was investigated in a way to characterize the knowledge mobilized during this process.

Keywords: Mathematics education. Mathematics teachers education. Teacher specific knowledge. Algebraic thinking.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Uma das finalidades das investigações em Educação Matemática consiste no estudo de fatores que condicionam os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática e o desenvolvimento de programas que fomentem esses processos.

Ser professor requer um conjunto de conhecimentos e competências que devem ser constantemente expandidos e aprimorados, de modo que consigam atender às demandas que a profissão lhe coloca. Desse modo, a preocupação com os processos de ensino e de aprendizagem e com o desenvolvimento profissional e a formação de professores, seja inicial ou continuada, em sua articulação com o trabalho docente, vem sendo alvo de interesse de muitos pesquisadores.

> Nos últimos anos, o Brasil tem testemunhado um crescente número de trabalhos, discussões e produções científicas no que se refere à formação de professores que ensinam Matemática. Os esforços nessa área visam, dentre outros aspectos, reorientar a formação desse profissional em vista das demandas colocadas pela sociedade contemporânea e pelos sistemas educativos, ou seja, investigar em que medida a formação de professores pode ser pensada de modo a atender as necessidades educacionais de nosso momento histórico e produzir reflexões em torno dos conhecimentos que são necessários para o futuro professor exercer sua atividade profissional (CYRINO, 2010, p. 3).

Com o objetivo de oferecer subsídios que possam ser agregados a esses esforços, o “Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática” – GEPEFOPEM - tem estudado e investigado diferentes perspectivas de formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática.

A formação continuada vem ganhando importância acentuada, com indicativo de que a formação profissional do professor é um processo de caráter dinâmico, permanente na vida dos profissionais da educação, em qualquer organização humana. Neste estudo, entendemos a formação de professores como um processo contínuo, que se estende ao longo de toda a sua vida, pautado pela busca permanente de conhecimentos, constituindo sua identidade e seu desenvolvimento profissional.

O conhecimento profissional do professor de Matemática, ou do professor que ensina Matemática, segundo Ponte e Oliveira (2002), desdobra-se por diversas vertentes, nomeadamente o *conhecimento na ação relativo à prática*, *à prática não letiva e à profissão* e ao *desenvolvimento profissional*. Os autores defendem que a parte do conhecimento profissional chamada a intervir diretamente na prática letiva pode ser designada por *conhecimento didático.* Os aspectos do conhecimento didático, discutidos por Ponte e Oliveira (2002), estão sempre presentes de algum modo na atividade de um professor quando ensina Matemática e estão fortemente interligados. Logo, os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática sofrem influências dos conhecimentos profissionais mobilizados pelo professor nesse processo. Dessa forma, defendemos a relevância do nosso trabalho, pois investigamos conhecimentos de uma professora que ensina Matemática em formação continuada.

Nossa investigação foi desenvolvida no contexto de uma das ações do projeto "Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática" que faz parte do Programa Observatório da Educação, nomeadamente em um grupo de formação continuada constituído por oito professoras e a coordenadora pedagógica da Escola Municipal José Brazil Camargo - Apucarana, Paraná. A constituição desse grupo de estudo teve como objetivo principal fomentar a produção acadêmica relativa à formação de professores que ensinam Matemática e à formação de recursos humanos em Educação Matemática na Educação Básica, na Graduação e na Pós-Graduação (mestrado e doutorado), que colaborem para elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB (CYRINO, 2010).

Com a intenção de alcançar esse objetivo, foram desenvolvidas atividades de capacitação envolvendo as professoras e a coordenadora pedagógica e, por outro lado, uma investigação a respeito dessa capacitação.

Diante do que foi exposto, formulamos a seguinte questão de investigação: *que conhecimentos são mobilizados por uma professora que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, desencadeados por uma proposta de formação continuada de professores, com ênfase em tarefas que têm o potencial para mobilizar o pensamento algébrico?*

Para responder a essa pergunta de investigação empenhamo-nos em:

- analisar a produção escrita de uma professora na resolução de tarefas que tem o potencial para mobilizar o pensamento algébrico;
- analisar aspectos da prática profissional da professora relatados em ações do processo de formação continuada.

Os pressupostos teóricos assumidos em nossa pesquisa envolvem a perspectiva de formação de professores assumida por Ponte e Chapman (2008), os conhecimentos específicos do professor discutidos por Canavarro (2004), Ponte (2013) e

Ponte e Oliveira (2002) e aspectos do pensamento algébrico discutidos por Blanton e Kaput (2005), Kaput (1999, 2008), Kieran (2004, 2006) e Lins e Kaput (2004) dentre outros.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. No primeiro, apresentamos algumas considerações a respeito da formação continuada e dos conhecimentos específicos de professores que ensinam Matemática, discutindo os aspectos e a articulação desses conhecimentos relativos à prática letiva. No segundo capítulo exploramos aspectos caracterizadores do pensamento algébrico, bem como a importância de seu desenvolvimento nos anos iniciais do Ensino Fundamental para a formação dos estudantes.

O encaminhamento metodológico adotado para o desenvolvimento dessa pesquisa está descrito no terceiro capítulo. No quarto capítulo, descrevemos e analisamos os conhecimentos profissionais de uma professora que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, mobilizados por ações desenvolvidas em um grupo de estudos no contexto de um processo de formação continuada, com ênfase no trabalho com tarefas que tem o potencial para mobilizar o pensamento algébrico. Para finalizar, no quinto capítulo, apresentamos algumas considerações sobre o trabalho realizado, destacando aspectos relevantes sobre o trabalho da professora investigada ao longo do processo de formação continuada.

CAPÍTULO 1
FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES E CONHECIMENTOS PROFISSIONAIS

No presente capítulo, apresentamos algumas considerações a respeito de formação continuada de professores que ensinam Matemática, com base nos componentes fundamentais desse processo, e que tipos de conhecimento são específicos do professor, destacando que conhecimentos profissionais mobilizam e desenvolvem no processo de formação continuada.

1.1 Formação Continuada de Professores

Pensar na formação continuada de professores é pensar em um processo complexo que envolve a interação de vários elementos. Esses elementos incluem os tipos de conhecimentos, competências, atitudes e valores que os professores desenvolvem ao longo de sua vida pessoal e profissional, o contexto dos objetos de aprendizagem, os papéis, os interesses e as características dos participantes do processo.

A formação continuada vem ganhando importância acentuada, com o indicativo de que a formação profissional do professor é um processo de caráter dinâmico, permanente na vida dos profissionais da educação e em qualquer organização humana. Neste estudo, entendemos a formação de professores como um processo contínuo, que se estende ao longo de toda a sua vida, pautado pela busca permanente de conhecimentos, constituindo a identidade e o desenvolvimento profissional do professor.

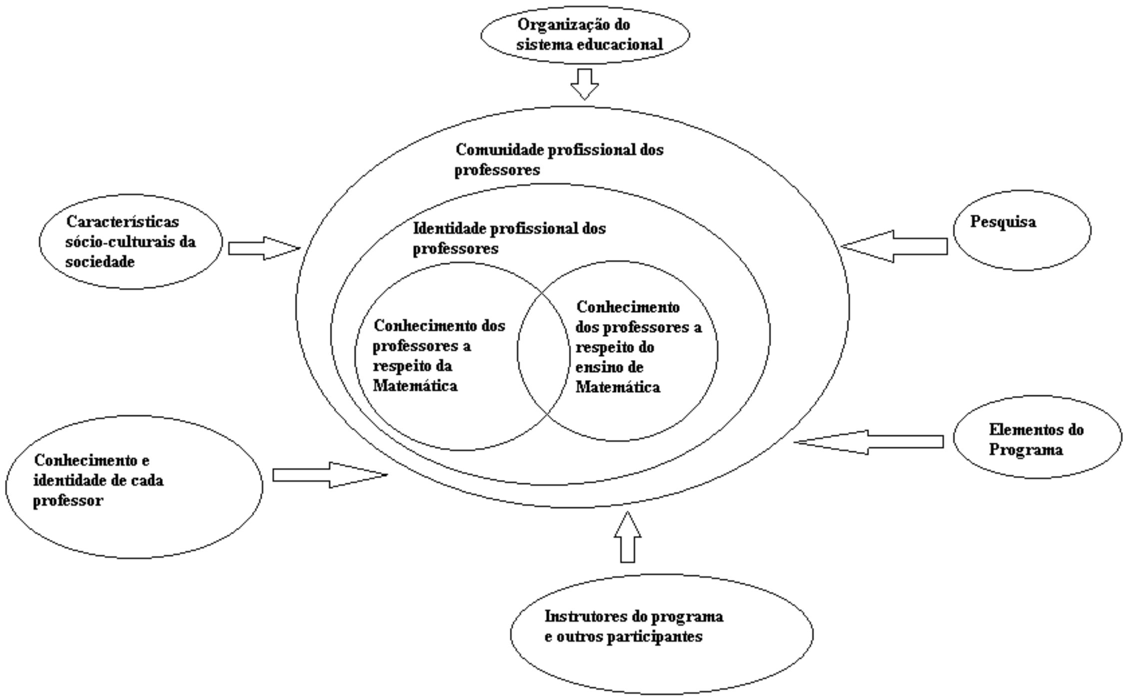
Segundo Ponte (1998), uma das finalidades do desenvolvimento profissional, no que tange ao ensino de Matemática, é tornar os professores mais aptos a conduzir o ensino adaptado às necessidades e aos interesses de cada aluno e ao cenário educativo. No processo de desenvolvimento profissional, o professor é sujeito da formação, considerando não só os conhecimentos e os aspectos cognitivos, mas valorizando também os aspectos afetivos e relacionais, ou seja, o papel que assumem no cenário de formação e quais são as suas aspirações.

A preparação profissional vai além dessa diversidade de conhecimentos. O professor tem que dar conta do imprevisto, lidar com o inesperado e administrar a rotina de modo a conduzir o aprendizado de todos os estudantes, o que exige tanto competências teóricas como competências da prática didática. Segundo Ponte (1998, p. 4), podemos dizer que: "*a chave da competência profissional é a capacidade de equacionar e resolver - em tempo oportuno - problemas da prática profissional*".

O professor assume diversos papéis fundamentais na vida dos estudantes, ajudando-os a crescerem e a se desenvolverem como seres humanos socialmente integrados, ativos e críticos. Os professores também são responsáveis pela construção e pelo desenvolvimento do projeto educacional de suas instituições, pelo desenvolvimento de sua profissão e da educação em geral e por seu próprio desenvolvimento. Esses papéis emergem das expectativas gerais que a sociedade atribui às escolas e também são resultados das necessidades específicas da aprendizagem e do ensino de Matemática, e do trabalho da escola como uma instituição.

O esquema apresentado na Figura 1 é uma adaptação do trabalho de Ponte e Chapman (2008), que apresenta um panorama das relações dos componentes fundamentais no processo de formação inicial de professores de Matemática. Consideramos que esses componentes também estão presentes no processo de formação continuada de professores que ensinam Matemática, os quais discutiremos sob essa perspectiva.

Figura 1- Relações dos componentes fundamentais no processo de formação de professores de Matemática.



Fonte: adaptado de Ponte e Chapman (2008, p. 2).

Ao centro, está o desenvolvimento do conhecimento de Matemática e do ensino de Matemática dos professores em serviço que, embora possam ser considerados independentes, têm conexões inerentes. O conhecimento de Matemática e o conhecimento do ensino de Matemática possuem, de fato, elementos em comum. Esses elementos referem-se a conhecimentos da prática letiva, nomeadamente, o conhecimento didático o qual discutiremos na seção 1.3. Podemos observar que esses conjuntos de conhecimentos são tratados como subconjuntos/parte da identidade do professor, que agrega fatores como valores, hábitos, normas, disposições e, em geral, modos de ser de um professor.

O desenvolvimento da identidade profissional engloba tanto o conhecimento da Matemática quanto o conhecimento do ensino da Matemática e é referente à identidade de grupo da comunidade de professores, por exemplo, se dá em acordo com os valores e as normas estabelecidas da profissão e os processos de interações profissionais. O componente final consiste de vários elementos que podem influenciar no processo de formação de professores de modos diferentes, nomeadamente: *a organização do sistema educacional.*

A organização o sistema educacional inclui modos de ingressar na profissão, certificação, contratos e organização de currículo; *a pesquisa* com suas ênfases, valores, prioridades e modos de disseminar resultados; *os elementos do programa* como aproximações pedagógicas, propósitos e objetivos, currículos e materiais, instrumentos e procedimentos de avaliação, a organização global e características pedagógicas do programa; *as características dos instrutores do programa e outros participantes*, por exemplo, seus papéis, motivos, interesses, conhecimento, concepções e características pessoais.

Outros participantes incluem os estudantes e todos os envolvidos no programa de formação continuada; *o conhecimento e identidade de cada professor* correspondem às características do professor em formação, como os interesses, conhecimentos e concepções; e as *características socioculturais da sociedade* incluem os papéis e valores promovidos por Ministérios de Educação, administradores escolares, pais, mídia e público geral.

Pensar na formação continuada do professor sob esse panorama nos permite identificar em que medida as pesquisas, no que diz respeito a cada um dos componentes, colaboram com esse processo. Para Shulman (1986), o conhecimento de conteúdo é um dos atributos críticos de professores efetivos, a base do ensino, e reflete diretamente em que e como os professores ensinam.

As pesquisas no campo do conhecimento matemático de professores em formação sugerem que estes precisam ser envolvidos no fazer matemática como um modo de desenvolver seu conhecimento para o ensino, considerando que a intervenção por meio da educação do professor é necessária para corrigir as deficiências realçadas, e para que essa ação possa contribuir com a maneira como o professor ensina. O conhecimento do ensino de Matemática depende de condições sociais e valores educacionais, orientações de currículo e recursos tecnológicos, e envolve a natureza de tarefas e materiais para usar na sala de aula, modos de organizar os estudantes, comunicação de sala de aula e avaliação.

O *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM) descreve o conhecimento necessário para ensinar: "o conteúdo e discurso de matemática, incluindo conceitos de Matemática e procedimentos; modos para argumentar matematicamente, resolver problemas e comunicar Matemática efetivamente a níveis diferentes de formalidade" (NCTM, 1991, p. 132). Portanto, o desenvolvimento profissional envolve o crescimento do conhecimento e competências profissionais, e a formação e afirmação da identidade profissional que constitui uma parte especialmente importante da identidade social do professor.

1.2 CONHECIMENTO DO PROFESSOR

Ponte e Oliveira (2002, p. 4) defendem que "as profissões caracterizam-se pelo domínio de um conjunto de saberes específicos, socialmente valorizados, e fora do alcance das generalidades dos membros da sociedade", e discutem três categorias referentes aos conhecimentos mobilizados por um profissional em sua atividade: o conhecimento acadêmico, o conhecimento profissional e o conhecimento do senso comum. No que diz respeito ao conhecimento do professor (Quadro 1) , tanto o conhecimento profissional como o senso comum e o conhecimento acadêmico têm origem na sua *experiência pessoal*, na *reflexão sobre essa experiência* e na *transmissão social*.

Quadro 1 - Vertentes do conhecimento do professor.

<table>
<tr><td rowspan="3">Conhecimento do Professor</td><td>Conhecimento Acadêmico</td><td rowspan="3">• Experiência pessoal
• Reflexão sobre a experiência
• Transmissão social</td></tr>
<tr><td>Senso Comum</td></tr>
<tr><td>Conhecimento Profissional</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo GEPEFOPEM[1].

[1] Material produzido pelo Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática – GEPEFOPEM (não publicado).

Para Ponte e Oliveira (2002), o *conhecimento acadêmico* diz respeito à criação e a validação do conhecimento científico, humanístico e filosófico, preocupando-se com o rigor, consistência, caráter sistemático e elegância dos conceitos e definições. Tem por principal objetivo compreender e explicar, com robustez e critérios, as múltiplas formas de curiosidade intelectual humana. Entendemos que a origem do conhecimento acadêmico do professor está em sua *experiência pessoal*, pois consiste na ação/busca do professor pelo conhecimento científico; origem na *reflexão sobre essa experiência* ao considerarmos o aspecto construtivo desse conhecimento; e origem na *transmissão social* por ser adquirido, de algum modo, por interações com outros indivíduos como professores, orientadores, colegas de classe, etc.

O *senso comum* é um conhecimento que nasce da experiência cotidiana, da vida que os homens levam em sociedade. Trata-se do conhecimento acerca dos elementos da realidade em que vivemos: sobre os hábitos, os costumes, as práticas, as tradições, as regras de conduta, enfim, sobre tudo o que necessitamos para podermos orientar-nos no nosso dia-a-dia. Ponte e Oliveira (2002) definem senso comum como o conhecimento orientado essencialmente pela sobrevivência e para satisfação das nossas necessidades (imediatas ou não imediatas), não tendo grandes preocupações com a coerência ou o rigor lógico. É um conhecimento informal, adquirido de forma natural (espontâneo), através do nosso contato com os outros, com as situações e com os objetos que nos rodeiam.

Logo, o conhecimento do senso comum do professor está relacionado aos conhecimentos adquiridos desde a sua *experiência pessoal* como aluno que, apesar das suas limitações, é um conhecimento fundamental na constituição da identidade do professor, permeando toda a sua experiência na vida em sociedade. Esse conhecimento origina-se também na *reflexão sobre essa experiência*, onde o professor filtra e valida as informações adquiridas pela *transmissão social*, ou seja, por seu contato com os outros, com as situações e com os objetos que os rodeiam.

O conhecimento profissional é definido por Ponte e Oliveira (2002) como o conhecimento necessário para desempenhar com sucesso uma atividade profissional, que se depara com questões bastante diferentes das da vida acadêmica ou da vida cotidiana. Uma atividade profissional envolve tanto processos de rotina quanto a resolução de problemas concretos num domínio delimitado de prática social. É constituído por conhecimentos específicos da profissão que são validados pelas pessoas que constituem a classe profissional.

Ponte e Oliveira (2002, p. 5) consideram que “o conhecimento profissional tem sempre como base fundamental a experiência e a reflexão sobre a experiência, não só individual, mas de todo corpo profissional". Ou seja, o conhecimento profissional baseia-se na experiência do professor como estudante e nas experiências vivenciadas no seu processo de formação como professor, desde a formação inicial em que o contato com a profissão se dá em seu papel como estudante universitário e nos estágios em que assume o papel de professor, até a formação continuada em que se torna professor efetivo em constante desenvolvimento.

O conhecimento profissional baseia-se também na reflexão sobre a própria experiência, de modo a definir qual seu papel como professor e quais as mudanças necessárias para efetivar o ensino da disciplina, integrando discussões sobre o planejamento e avaliação de atividades de ensino com questões centrais do currículo, como a natureza das tarefas, o ambiente na sala de aula e a relação da Matemática com a realidade. Ao serem compartilhadas dentro da comunidade educacional, essas discussões dão origem a conhecimentos profissionais a partir da transmissão social.

Ser professor requer um conjunto de conhecimentos e competências que não se encontram de modo espontâneo em qualquer licenciado. A capacidade de tomar decisões acertadas, de resolver problemas práticos e, no caso dos professores, a capacidade de fazê-lo em interação com outros atores – principalmente os alunos, mas também os colegas e outros elementos da comunidade – desempenha papel essencial na atividade profissional. Essa capacidade pode apoiar-se em conhecimentos de cunho acadêmico, mas requer outros recursos como a apreensão intuitiva das situações, articulando pensamento e ação, e a gestão dinâmica das relações sociais (PONTE; OLIVEIRA, 2002).

"A capacidade de tomar decisões na sala de aula envolve, também, a criação de estratégias de ação não habituais, o sentido de improvisação e de resposta rápida a situações novas e autoconfiança." (PONTE; OLIVEIRA, 2002, p. 5), ou seja, o professor em sua prática mobiliza diferentes conhecimentos tais como conhecimentos de sua prática, do seu processo de formação inicial ou continuada, da interação com colegas. Essa capacidade de tomar decisões está embutida na reflexão, na ação e faz com que o professor mobilize conhecimentos.

1.3 Conhecimento Profissional

Segundo Canavarro (2004, p.20), "o conhecimento profissional resulta de um acumular de experiência num domínio bem definido e é validado pela capacidade de resposta que o profissional e a sua comunidade lhe reconhece a problemas que surgem no dia-a-dia".

Para Ponte e Oliveira (2002), o conhecimento profissional do professor envolve o conhecimento relativo à prática letiva na sala de aula e a outros papéis profissionais, tais como tutoria de alunos, a participação em atividades e projetos da escola, a interação com membros da comunidade e o trabalho em associações profissionais. Inclui ainda, em outro plano, a visão do professor sobre seu próprio desenvolvimento profissional.

Quadro 2 - O conhecimento profissional do professor e suas vertentes.

CONHECIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR				
	Prática letiva	Conhecimento didático	Conhecimento da Matemática	
Outros papéis	Ações e projetos da escola	Conhecimento do contexto	Conhecimento do currículo e da gestão escolar	
	Orientações		Conhecimento do aluno e do seu processo de aprendizagem	
	Trabalho em associações		Conhecimento do processo instrucional – dinâmica de sala de aula	• Preparação • Ação • Reflexão pós-ação
	Interação com a comunidade			
	Conhecimento do seu desenvolvimento profissional e da profissão	Conhecimento de si		

Fonte: elaborado pelo GEPEFOPEM.

O conhecimento profissional é um conhecimento orientado para as situações de prática e sofre influências do senso comum e do conhecimento acadêmico, em outras palavras,

> [...] é orientado para uma atividade prática (ensinar Matemática a grupos de alunos), embora se apoie em conhecimentos de natureza teórica (sobre a Matemática, a educação em geral e o ensino da Matemática) e também de natureza social e experiencial (sobre os alunos, a dinâmica da aula, os valores e a cultura da comunidade envolvente, a comunidade escolar e profissional, etc.) (PONTE, 2013, p. 3).

Para Elbaz (1983, p. 5), o conhecimento profissional resulta da articulação da experiência e conhecimento teórico (relativo à sua disciplina de ensino, ao desenvolvimento da criança, ao processo de aprendizagem e à teoria social) "integrados pelo professor individual em termos de valores e crenças pessoais e orientados para a sua situação prática".

Pensar em *conhecimento* como uma vasta rede de conceitos, imagens e habilidades inteligentes características dos seres humanos, incluindo convicções e concepções, remete-nos a identificar que o conhecimento profissional é estruturado por imagens e concepções, como de resto acontece com todo o conhecimento. Podemos falar de quatro tipos de imagens:

- imagens perceptivas: correspondem ao que percepcionamos diretamente do exterior ou do interior do nosso corpo;
- imagens prospectivas: correspondem a ideias que, no presente, formulamos como planos, intenções ou desejos para o futuro;
- imagens evocadas do passado real: são as que resultam das percepções transformadas e guardadas no cérebro;
- imagens evocadas de um passado planeado: correspondem a ideias formuladas anteriormente como planos, intenções ou desejos para o futuro.

Segundo Canavarro (2004, p. 28), "as imagens correspondem a perspectivas gerais pessoais sobre o ensino que orientam a ação do professor." Ou seja, combinando os seus sentimentos, valores, necessidades e crenças, o professor constrói as imagens de como o ensino deve ser, pautado em sua experiência, em seu conhecimento teórico e na cultura da escola, de modo a dar robustez a essas imagens.

As concepções desempenham papel fundamental no pensamento dos alunos e dos professores, tais como a concepção que o professor tem sobre aprendizagem, ensino, atividade e Matemática. O desenvolvimento profissional do professor sofre influência dessas imagens e concepções, pois além das escolhas epistemológicas o professor tem a imagem do que é ser professor, a imagem de si, da sua relação com os alunos, da ciência de seu domínio. A questão da imagem está fortemente atrelada à profissão do professor, pois algumas vezes o que prevalece é o exemplo de um professor que teve durante sua vida escolar, ao invés das teorias que estuda ou estudou.

Ponte e Oliveira (2002) consideram que o conhecimento profissional do professor de Matemática, ou do professor que ensina Matemática, desdobra-se por diversas vertentes, nomeadamente o *conhecimento na ação relativo à prática*, *à prática não letiva e à profissão* e ao *desenvolvimento profissional*. Discutem que a parte do conhecimento profissional chamado a intervir diretamente na prática letiva pode ser designada por *conhecimento didático*, e inclui quatro grandes vertentes: o *conhecimento da Matemática*, o *conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem,* o *conhecimento do currículo* e o *conhecimento do processo instrucional*.

O conhecimento didático, sendo orientado para situações de prática, relaciona-se de um modo muito estreito com diversos aspectos do conhecimento do senso comum, como o conhecimento do contexto e o conhecimento de si mesmo, do próprio professor. O conhecimento da Matemática, uma das vertentes do conhecimento didático, não deve ser entendido aqui como conhecimento de Matemática como ciência, mas o conhecimento e a visão que o professor tem dos aspectos específicos da disciplina que ensina. Ou seja, o conhecimento matemático culturalmente situado e curricularmente estruturado. Esse tipo de conhecimento depende diretamente da imagem que o professor tem da Matemática, ou seja, a Matemática como um conjunto de definições e teoremas ou uma atividade humana onde se usa, sobretudo, a imaginação e a criatividade, sofrendo também influências da aprendizagem que o professor desenvolveu enquanto aluno dessa mesma disciplina. Trata-se do que os professores ensinam e como eles ensinam com base no conhecimento que eles têm do conteúdo, incluindo uma visão do papel da Matemática enquanto contributo para formação global do aluno.

Consideramos que conhecer Matemática profundamente não implica em o professor ser efetivo em sua vida profissional. Mas, não ter esse conhecimento significa ter um trabalho limitado no que diz respeito a desenvolver nos estudantes uma compreensão relacional e conceitual.

O conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem é outra vertente do conhecimento didático. Conhecer o modo como os alunos aprendem, considerando seus aspectos pessoais, intelectuais e culturais são condições decisivas para o desenvolvimento do processo de ensino. Existem teorias sobre a aprendizagem dos alunos que constituem uma referência estruturante importante desse conhecimento, estando essas imersas no campo do conhecimento acadêmico. Canavarro (2004) discute algumas dessas teorias: o *behaviorismo*, que se centra nos comportamentos observáveis dos alunos para estudar a forma como aprendem; o *construtivismo*, cujo fundador foi Piaget, que procurou caracterizar o crescimento cognitivo das crianças, especialmente sua evolução na compreensão de conceitos; e o *situacionismo*, ancorado no caráter situado da aprendizagem e do conhecimento e por isso o seu interesse reside nos tipos de ambientes sociais que proporcionam um contexto favorável à aprendizagem.

No entanto, o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem não é direcionado unicamente por uma teoria; além do conhecimento acadêmico, engloba as outras vertentes do conhecimento do professor, nomeadamente, o conhecimento do senso comum e o conhecimento profissional. Isso revela que esses conhecimentos se articulam na constituição do conhecimento didático.

Outra vertente do conhecimento didático refere-se ao currículo e à gestão curricular, ou seja, a forma como o professor gerencia o conteúdo a ser ensinado. Trata-se do conhecimento das grandes finalidades, objetivos e organização do conteúdo, além do conhecimento dos materiais e das formas de avaliação utilizadas. De acordo com Canavarro (2004, p. 49-50), no que diz respeito às orientações curriculares:

> [...] o professor precisa atender às indicações sobre a natureza das tarefas, fundamentais para a imagem que os alunos vão construir da disciplina, e às sugestões metodológicas, decisivas para o desenvolvimento de muitas das capacidades apontadas nos objetivos. Além disso, é também neste componente que se encontram indicações relativas à utilização de recursos e materiais, nomeadamente de alguns que favorecem a abordagens intuitivas aos conceitos e, muito em especial, do computador e das calculadoras.

A vertente do conhecimento didático que trata do conhecimento do processo instrucional, diretamente utilizado na prática letiva, inclui o que se passa antes da aula, em termo de preparação e tudo o que se passa depois, em termo de reflexão, mas o seu núcleo essencial diz respeito à condução das situações de aprendizagem. Ou seja, orienta o planejamento, condução e avaliação do processo de ensino.

Podemos afirmar que as quatro vertentes do conhecimento didático estão sempre presentes de algum modo na atividade de um professor quando ensina Matemática e estão fortemente interligadas, pois, por exemplo, quando um professor propõe uma determinada tarefa aos alunos, escolhe-a tanto por causa da Matemática que lhe está implícita, visando promover a aprendizagem dos alunos, como pelo fato de ser algo estabelecido pelo currículo e que faz parte do processo instrucional.

Nessa perspectiva, Canavarro (2004) destaca que o conhecimento didático articula-se com os outros domínios do conhecimento profissional do professor. Está atrelado ao conhecimento de si mesmo, que inclui tudo o que o professor sabe de si próprio, a sua autoconfiança, os seus recursos e capacidades. O conhecimento didático está inerente ao conhecimento do contexto de ensino, essencial para conhecer os alunos, compreendendo também o conhecimento de outros aspectos do contexto como os colegas de profissão, a escola, os pais, a comunidade, o sistema educativo, etc.

CAPÍTULO 2
PENSAMENTO ALGÉBRICO

O ensino e a aprendizagem da Álgebra vêm sendo discutidos por muitos pesquisadores nas últimas décadas (BLANTON; KAPUT, 2005; KAPUT, 2008; KIERAN, 2004, 2006; LINS, KAPUT, 2004). Lins e Kaput (2004) apresentam uma síntese de parte das pesquisas em educação algébrica, publicadas até o início da década de 90, cujo cenário principal é marcado por erros, lacunas e dificuldades enfrentadas por alunos e professores nos processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra. O foco dessas pesquisas estava voltado para o que as crianças não poderiam fazer, ao invés de discutir as formas de explorar o que elas poderiam fazer, ou seja, explorar elementos que tenham o potencial para mobilizar o pensamento algébrico de modo a colaborar com o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem da Álgebra.

Segundo Kieran (2006), algumas mudanças na perspectiva das pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra ocorreram ao longo de 30 anos de pesquisa. Consistente com a análise de Lins e Kaput (2004), ela discute que as pesquisas iniciais tendiam a se concentrar nos conceitos e procedimentos algébricos e nas dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra, porém, destaca que os temas tratados nas pesquisas iniciais permeiam as pesquisas do presente. Com o objetivo de analisar os interesses dos pesquisadores ao longo dos anos e em que medida essas pesquisas têm colaborado com a alfabetização algébrica, Kieran (2006) classifica os temas dessas pesquisas, que mais se destacaram, em três grupos:

Grupo 1: pesquisas no período de 1977 a 2006 – investigam transição da Aritmética para a Álgebra, variáveis e incógnitas, equações e resolução de equações e problemas algébricos.

Grupo 2: pesquisas desenvolvidas entre meados de 1980 a 2006 – investigam o uso de ferramentas tecnológicas, múltiplas representações e generalização.

Grupo 3: pesquisas desenvolvidas entre meados da década de 1990 a 2006 – investigam pensamento algébrico de alunos do Ensino Fundamental, com foco também no professor e no ensino, bem como a aprendizagem da Álgebra em ambientes dinâmicos, que incluiu a modelagem dinâmica de situações físicas.

Segundo Lins e Kaput (2004), muitos dos trabalhos desenvolvidos a partir da década de 90, que trazem a temática apresentada no Grupo 3, referenciado por Kieran (2006), foram realizados nos EUA e refletem a iniciativa do NCTM no tratamento do pensamento algébrico ao longo da vida escolar, com raízes na alfabetização matemática. Essa iniciativa se deu em função da percepção do fracasso da abordagem da Álgebra nas propostas curriculares nos EUA, que era apresentada tarde, repentinamente e em relativo isolamento dos outros conteúdos matemáticos, com foco na habilidade da operação sintática.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, o ensino da Álgebra no Brasil também enfrenta dificuldades, pois:

> [...] a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem um índice de 40 % de acerto em muitas regiões do país (BRASIL, 1998, p. 115-116).

Essa forma de ensino tem sido limitadora, na qual o papel do aluno se restringe a memorização de regras. De acordo com os PCN:

> [...] para que a aprendizagem possa ser significativa é preciso que os conteúdos sejam analisados e abordados de modo a formarem uma rede de significados. Se a premissa de que compreender é apreender o significado, e de que para apreender o significado de algum objeto ou acontecimento é preciso vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos, é possível dizer a ideia de conhecer assemelha-se a ideia de tecer uma teia (BRASIL, 1998, p. 75).

A partir dessas percepções, algumas questões acerca do ensino e da aprendizagem de Álgebra foram levantadas e discutidas nas sessões do Grupo de Trabalho em Álgebra e em conferências do Grupo de Estudo Internacional sobre a Psicologia da Educação Matemática (PME), apoiadas pela diversidade de origens e interesses dos pesquisadores participantes. Essas discussões desencadearam uma série de investigações que defendem a integração do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, mobilizando vários pesquisadores convictos de que as dificuldades dos alunos: “[...] residem, em grande parte, no conteúdo que tem prevalecido nos programas de Álgebra, muito centrados na utilização de simbologia desprovida de significado, com ênfase na aplicação de regras e técnicas visando a manipulação simbólica e com elevado grau de abstração (CANAVARRO, 2009, p. 91).

Essa dinâmica inviabiliza o despertar do interesse dos alunos que deixam de reconhecer o valor da aprendizagem da Álgebra.

Kaput (2008) defende a necessidade de repensar e reestruturar o currículo da Álgebra e apresenta algumas razões primordiais para justificá-la. A primeira delas trata-se da necessidade em adicionar um grau de coerência, profundidade e importância que geralmente falta no Ensino Fundamental no que diz respeito à Matemática. A segunda, a melhoria no processo e na formação algébrica dos estudantes, que tem se dado de forma isolada de outros conteúdos e superficial. Apresenta como uma terceira razão a democratização do acesso às ideias, de forma que a Álgebra não seja objeto de desigualdade e sim, uma ferramenta poderosa no auxílio do desenvolvimento das ideias matemáticas. E, por último, a necessidade de intensificar o trabalho conceitual e institucional da Álgebra, com um espaço curricular aberto para novas perspectivas do ensino da Matemática no século XXI, que ainda permanece estagnado em acordo com o currículo escolar do século XIX.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do estado do Paraná também apontam o conhecimento algébrico como algo que não pode ser concebido pela simples manipulação dos conteúdos abordados isoladamente, "[...] defende-se uma abordagem pedagógica que os articule, na qual os conceitos se complementem e tragam significado aos conteúdos abordados." (PARANÁ, 2008, p. 52).

A necessidade de repensar e reestruturar o currículo da Álgebra, na busca por uma abordagem pedagógica que promova a articulação dos conceitos deu origem a mudanças significativas no ensino da Álgebra elementar nos últimos anos. Ponte, Branco e Matos (2009), discutem três correntes que se referem às abordagens didáticas. A primeira corrente corresponde à *visão letrista* que reduz a Álgebra exclusivamente à sua vertente simbólica. A segunda corrente corresponde à *visão estruturalista* subjacente ao movimento da Matemática Moderna, em que a atenção deve centrar-se nas estruturas algébricas abstratas, ou seja, nas propriedades das operações numéricas ou das transformações geométricas. E a terceira corrente que se propõe a ultrapassar as limitações das duas anteriores, preservando, no entanto, os respectivos contributos. Busca recuperar o valor instrumental da Álgebra, mas sem reduzi-la à resolução de problemas suscetíveis de serem resolvidos por meio de uma equação ou um sistema de equações; dar ênfase aos significados que podem ser representados por símbolos levando os alunos a "pensar genericamente", percebendo regularidades e explicitando essas regularidades por meio de estruturas ou expressões matemáticas e a "pensar funcionalmente", estabelecendo relações entre variáveis; valorizar a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas.

Essa perspectiva traduz-se num movimento que se desenha desde o início da década de 1980, conforme apresentamos nas seções anteriores, que visa à revalorização da Álgebra no currículo da Matemática escolar promovendo o desenvolvimento do pensamento algébrico.

> Esta terceira corrente é a que informa o *Programa de Matemática*. Nela, as situações extra-matemáticas têm um papel importante como ponto de partida para a construção de modelos e exploração de relações. Mais do que simples ilustração ou aplicação, é nelas que os alunos encontram os elementos com os quais constroem representações e modelos para descrever fenômenos e situações, que estão na base de novos conceitos e relações matemáticas. Esta corrente favorece uma iniciação ao pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade, através do estudo de sequências e regularidades (envolvendo objetos diversos), padrões geométricos, e relações numéricas associadas a importantes propriedades dos números (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 15).

Consistente com a terceira corrente, o NCTM defende que os programas de ensino da Educação Infantil ao Ensino Médio deverão habilitar todos os alunos para:

- compreender padrões, relações e funções;
- representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- analisar a variação em diversos contextos.

Nessa perspectiva, o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções, assim como a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios.

O pensamento algébrico, ou ainda denominado raciocínio algébrico por alguns autores, assume diversas caracterizações, que são discutidas por alguns pesquisadores. Utilizaremos o termo pensamento algébrico com base no significado de “pensamento” segundo o dicionário Houaiss: pensamento refere-se ao “ato ou efeito de pensar que por sua vez é definido como submeter (algo) ao processo de raciocínio lógico; ter atividade psíquica consciente e organizada; exercer a capacidade de julgamento, dedução ou concepção; refletir sobre, ponderar, pesar, faculdade que tem como objetivo o conhecimento, inteligência.” (HOUAISS, 2001, p. 2178).

Carpenter, Franke e Levi (2003, p. 137) destacam a importância da integração da Aritmética com a Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois os estudantes podem "aprender Aritmética de maneira produtiva de modo que esse conhecimento sirva de base para o aprendizado da Álgebra".

Consistente com esses autores, Kieran (1996) discute que o:

> [...] pensamento algébrico pode ser interpretado como uma abordagem a situações quantitativas que enfatiza os aspectos relacionais em geral com ferramentas que não são necessariamente símbolos-letras, mas que, em última instância, pode ser usado como apoio cognitivo à introdução e sustentação do discurso mais tradicional da Álgebra escolar[2] (KIERAN apud KIERAN, 2004, p. 142, tradução nossa).

Acreditamos que o aprendizado efetivo da Aritmética, ou seja, a compreensão da estrutura dos números e das operações, associado ao desenvolvimento da capacidade de atribuir sentido aos símbolos, é o caminho para o aprendizado da Álgebra. De fato, segundo Arcavi (2006), discutir o "sentido dos símbolos" (*symbol sence*) pode servir como ferramenta para planejar o ensino.

O autor discute seis componentes que considera importantes no processo de atribuir sentido aos símbolos, os quais são: (1) a afinidade com os símbolos, de modo a avaliar quando podem e devem ser utilizados; (2) a capacidade para manipular e interpretar expressões simbólicas, como dois aspectos complementares na resolução de problemas algébricos; (3) a consciência de que é possível planejar com sucesso relações simbólicas que expressam determinada informação (verbal ou gráfica); (4) a capacidade de escolher uma possível representação simbólica, além de reconhecer caso a escolha não seja adequada; (5) a consciência da necessidade de revisar os significados dos símbolos em toda a sua utilização e comparar esses significados com as intuições (ou premonições) acerca dos resultados esperados e com a situação problema; (6) a consciência de que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em distintos contextos e desenvolver um sentido intuitivo dessas diferenças.

Nesse estudo, consideramos que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido antes de o estudante apresentar uma linguagem simbólica algébrica, pois isso advém, principalmente, quando:

---

[2] Algebraic thinking can be interpreted as an approach to quantitative situations that emphasizes the general relational aspects with tools that are not necessarily letter-symbolic, but which can ultimately be used as cognitive support for introducing and for sustaining the more traditional discourse of school algebra (KIERAN, 1996, p. 275).

> [...] a criança estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005, p. 5).

Para Lins e Gimenez (2005, p. 151), o *pensamento algébrico* é um dos modos de produzir significado para a Álgebra, e tem três características fundamentais:

- ***aritmeticismo***: produzir significado apenas com relação a números e operações aritméticas;
- ***internalismo***: considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos "físicos" geométricos; e,
- ***analiticidade***: operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos.

Cyrino e Oliveira (2011) utilizam o termo pensamento algébrico como um modo de descrever significados atribuídos aos objetos da Álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos.

Blanton e Kaput (2005) definem o pensamento algébrico como "um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade[3]." (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, tradução nossa).

De acordo com Blanton e Kaput (2005), assumimos por desenvolvimento do pensamento algébrico todo o processo da atividade algébrica, desde as primeiras características do pensamento algébrico presentes em cálculos aritméticos, ou seja, o raciocínio sobre as operações e as propriedades associadas aos números, até a utilização de uma linguagem simbólica para estabelecer generalizações na busca por fazer previsões e resolver problemas, considerando o modo como o aluno assimila e expressa suas ideias

[3] [...] a process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways.

matemáticas. A Álgebra surge como uma atividade humana, e não apenas como um sistema de símbolos convencionais agregados a um conjunto de regras.

Kaput (2008), ao caracterizar o pensamento algébrico, funde Álgebra em duas identidades: como um artefato cultural expresso principalmente como sistemas de símbolos convencionais e, como certo tipo de atividade humana.

Um artefato cultural por ser algo que recebemos como parte do nosso patrimônio cultural, incorporado nos sistemas de ensino em todo o mundo de maneiras muito diferentes. Tipo de atividade humana por ser algo que as pessoas fazem, como por exemplo, a produção de representações para expressar generalizações, bem como a transformação dessas representações, utilizadas em outras atividades matemáticas, como modelagem.

O autor considera dois aspectos fundamentais do pensamento algébrico:

> (A) a observação de regularidades e a generalização das ideias matemáticas por meio de recursos próprios, como linguagem natural e desenhos, tonando-se mais sistemática de forma gradual;
> (B) o raciocínio e as ações em expressões generalizadas, orientados sintaticamente sobre os símbolos.

Segundo o autor, o núcleo do aspecto B normalmente é desenvolvido mais tarde do que aspecto A, pois o aspecto B está baseado em regras e ações envolvendo a notação algébrica, gráficos e outras classes de representações convencionais. Além disso, diz ser:

> [...] grande a diversidade de opiniões sobre os papéis dos dois aspectos fundamentais na aprendizagem da Álgebra nos anos iniciais. Matemáticos e educadores matemáticos, diferem em seus pontos de vista de qual dos dois aspectos fundamentais do raciocínio algébrico é mais central para a definição de Álgebra. Alguns baseados em regras e ações sobre os símbolos (Núcleo de aspecto B) como a marca do raciocínio algébrico... Outros, cautelosos sobre o que Piaget (1964) se refere a formalismo prematuro, minimizam a sintaxe convencional em favor da expressão deliberada de generalizações e modelos de situações a partir dos meios disponíveis, mas especialmente linguagem natural e desenhos (RESNICK, 1982). Somente depois que os alunos tornam-se experientes em expressar as generalizações e modelos nessas formas, que deveria ser introduzida à notação algébrica, gráficos e outras classes de representações convencionais (KAPUT, 2008, p. 11, tradução nossa). [4]

[4]There is considerable diversity of opinion about the roles of the two Core Aspects in early algebra learning. Mathematicians and mathematics educators differ in their views of which of the two core aspects of algebra is more central to defining algebra. Some treat rule-based actions on symbols (Core Aspect B) as the hallmark of algebraic reasoning... Others, cautious about what Piaget (1964) referred to as premature formalism, downplay conventional syntax in favor of the deliberate expression of generalizations and models of situations through whatever means are available, but especially natural language and drawings (RESNICK, 1982). Only after students are greatly experienced in expressing in these forms would they be introduced to algebraic notation, graphs, and other classes of conventional representations.

Em sua pesquisa, Kaput (2008) apresenta os aspectos fundamentais A e B incorporados em três vertentes:

> 1. Álgebra como o estudo de estruturas e sistemas abstraídos a partir de cálculos e relações, incluindo os que decorrem da Aritmética (Álgebra como Aritmética Generalizada) e do raciocínio quantitativo;
> 2. Álgebra como o estudo de funções, relações e covariação;
> 3. Álgebra como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelagem, tanto dentro como fora da Matemática[5] (KAPUT, 2008, p. 11, tradução nossa).

Discutiremos a seguir cada uma dessas três vertentes.

2.1 ÁLGEBRA COMO ARITMÉTICA GENERALIZADA

Essa vertente consiste em estabelecer relações entre números e promover a compreensão das operações e das suas propriedades, de modo a construir generalizações sobre as operações aritméticas e suas propriedades, raciocinar sobre as relações mais gerais tais como a comutatividade e relação inversa. Ou seja, trata-se de analisar números e operações algebricamente.

A *noção de igualdade*, *o pensamento relacional* e a *exploração de propriedades de números inteiros* assumem um papel importante nessa vertente.

De acordo com Kieran (1981), os alunos da Educação Infantil tratam o símbolo de *igualdade* como uma comparação entre as quantidades de dois conjuntos de objetos que podem ser contados. Já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, os alunos passam a conhecer as quatro operações fundamentais gradativamente e designam ao símbolo de igualdade a função de indicar que algo deve ser feito, pois as experiências dos estudantes os levam a acreditar que um lado do sinal de igual – normalmente o lado esquerdo - é o problema e outro lado é a resposta, o que dificulta entender a expressão $7 = 6 + 1$ do que a expressão $6 + 1 = 7$, pois, nesta última maneira, o símbolo de igualdade vem antes da resposta, e coincide com a ideia de que ele aponta para a necessidade de uma ação ou para a resposta do problema. Esse modo de tratar as questões apresentadas e o significado atribuído ao símbolo de igualdade foram nomeados por Kieran (1981) como entendimento ou significado operacional.

[5] 1 Algebra as the study of structures and systems abstracted from computations and relations, including those arising in arithmetic (algebra as generalized arithmetic) and in quantitative reasoning. 2. Algebra as the study of functions, relations, and joint variation. 3. Algebra as the application of a cluster of modeling languages both inside and outside of mathematics.

Segundo Kieran (1981), somente nos anos finais do Ensino Fundamental alguns alunos passam a aceitar os dois lados da expressão como tendo o mesmo resultado, sem ter de fazer a substituição para poder garantir isso, devido ao amadurecimento das ideias matemáticas. Em seguida, inicia-se uma fase de transição entre a necessidade de colocar uma resposta depois do símbolo de igualdade e passar a entendê-lo com o significado de equivalência, segundo a definição apresentada pela autora, pois diante da estrutura do currículo escolar, é nesse momento que os alunos iniciam a utilização dos conceitos matemáticos do mundo simbólico. O símbolo de igualdade na expressão 5 + 4 = 3 + 6 passa a ser entendido como a representação de uma adição e também reconhecido como a representação de uma equivalência.

Cavalcanti (2008) em sua pesquisa com alunos do 3º ano do Ensino Médio, que consistiu na aplicação de dois instrumentos de investigação, cada um constituído por quatro expressões representando os contextos das operações e igualdades aritméticas, das equações e das funções, encontrou sete concepções acerca dos significados atribuídos ao símbolo de igualdade: “operacional”; “igualdade relacional”; “equivalência em igualdade”, “condicional”; “funcional”; “relacional nome símbolo”; “símbolo separador” e “operacional sintático”. As cinco primeiras concepções tinham sido definidas *a priori* e as duas últimas *a posteriori*, de acordo com a metodologia adotada na pesquisa, e estão descritas no Quadro3.

Quadro 3 - Síntese com as principais ideias que fundamentaram a elaboração dos instrumentos de investigação.

Contextos	**Categorias de análise**	**Expressões (exemplos)**	**Principal finalidade do símbolo “=”**	**Principais características do símbolo “=”**
Operações aritméticas	Concepção Operacional	8 + 7 = 8 + 7 + 5 + 9 =	Indicar um cálculo a ser realizado, ou, o local do resultado.	Aspecto assimétrico (um lado é dado, o outro precisa ser preenchido/encontrado)
Igualdades aritméticas	Concepção Igualdade Relacional	6 + 5 = 11 5 + 7 = 4 + 8 15 = 7 + 8	Indicar que o que está no lado direito do “=” é igual, idêntico ou equivalente ao que está no lado esquerdo.	Relação de igualdade que inclui: identidade única de significado e equivalência dos diferentes significantes.
Equações	Concepção Equivalência em igualdade condicional	x + 5 = 14 5 + x = 4 + 8 5 =x + 8	Indicar que a expressão ou número que está no lado direito do “=” é equivalente a expressão ou número à esquerda.	Indica uma relação de equivalência em igualdade condicional.
Funções	Concepção Funcional	y = 2x + 3 2x + 3 = y	Indicar uma dependência causal entre as variáveis.	Relação de dependência entre a variável dependente e independente
Todos	Concepção Relacional Nome-Símbolo	Qualquer uma contendo um símbolo “=”	Não tem finalidade específica.	Não tem características específicas

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 4).

As concepções definidas *a posteriori* são: “símbolo separador” e “operacional sintático”. Segundo Cavalcanti (2008, p. 4),

> [...] A concepção símbolo separador surgiu quando os alunos escreveram respostas que identificavam o significado do “=” como sinal de separar, ou indicar a separação, por exemplo, entre as letras e os números numa equação, os membros, uma incógnita e outra numa função. A concepção denominada de operacional sintático surgiu quando os alunos escreveram respostas que identificavam o símbolo “=” como um símbolo para mostrar o resultado da incógnita, ou para dar o valor de x, por exemplo. Assim, esclarecemos que o nome operacional sintático foi baseado na ideia de operacional, porque sugere ação e resultado, e sintático, pela razão de que o resultado da incógnita, produto final da resolução de uma equação, envolve a utilização de regras sintáticas associadas à manipulação de incógnitas e determinação de seus valores.

Sintetizamos as ideias acerca das concepções do símbolo de igualdade definidas *a posteriori* na pesquisa de Cavalcanti (2008), apresentando-as no Quadro 4.

Quadro 4 – Síntese das concepções do símbolo de igualdade emergentes da pesquisa de Cavalcanti (2008).

Equações e Funções	Concepção Símbolo Separador	$y = 2x+3$ $2x - x = 8 - 4$	Indicar a separação entre os termos de uma expressão.	Relação de equivalência entre os membros da igualdade
Equações e Funções	Concepção Operacional Sintática	$y = 3x + 5$ $x = 7 + 12$	Indicar o resultado da incógnita.	Sugere ação e resultado, envolve a utilização de regras sintáticas associadas à manipulação de incógnitas e determinação de seus valores.

Fonte: da autora.

Em comparação aos resultados apresentados por Cavalcanti (2008) e os significados do símbolo de igualdade descritos por Kieran (1981), observamos que a concepção “operacional”, nos remete ao significado *operacional* conforme descrito por Kieran (1981), pois o entendimento que os estudantes parecem apresentar é de que o símbolo de igualdade aponta para a resposta do problema. Identificamos também que a concepção operacional sintática pode ser vista como uma subcategoria da concepção operacional.

Por sua vez, as concepções de “igualdade relacional”, “equivalência em igualdade condicional” e “funcional”, no nosso ponto de vista, abarcam as condições definidas por Kieran (1981) como sendo de significado de equivalência. Além dessas concepções, a concepção “símbolo separador” também trata da utilização do símbolo de igualdade com o significado de equivalência, e que, dependendo da complexidade da situação, pode ser visto como entendimento tanto do mundo simbólico quanto do mundo formal.

A quinta categoria definida *a priori* por Cavalcanti (2008) trata da concepção "relacional nome-símbolo" em que o autor não encontra elementos para classificar o entendimento do símbolo de igualdade como operacional nem como equivalência, apenas reconhecendo a relação entre o símbolo "=" e seu nome, "sinal de igualdade".

Compreender o sinal de igualdade é fundamental para que sejam percebidas e compreendidas as relações em nosso sistema numérico. Essas relações

> [...] podem ser igualmente trabalhadas procurando identificar e generalizar regularidades, promovendo assim o desenvolvimento do pensamento algébrico. Exemplos destas situações são a relação inversa entre adição e subtração (39 −17 = 22, pois 39 = 22 +17), a relação de compensação (31+ 9 = 30 +10; 39−17 = 40−18), a composição e decomposição de números (23+11+9 = 23+ 20 ; 39−17 = 39−10− 7 ; 17−8 =17−10+ 2). O professor deve procurar que os alunos justifiquem as relações que estabelecem, com base na sua compreensão das operações e deve questioná-los acerca da validade destas relações para todos os números. Para tal, os alunos podem analisar diversos exemplos ou procurar contraexemplos. Além disso, já nos primeiros anos, os alunos trabalham também com relações inversas como "o dobro de" e "a metade de", por exemplo, para apoiar estratégias de cálculo mental, bem como a compreensão e construção da tabuada (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 25).

Quando um estudante observa e usa relações numéricas entre os dois lados do sinal de igualdade ao invés de calcular as quantidades, o pensamento envolvido é chamado de *pensamento relacional*. O pensamento relacional vai além do cálculo concentrando-se em como uma operação ou série de operações se relaciona com as outras. Por exemplo, na estratégia "quase-dobro" para o cálculo $6+7$ ou na estratégia "dividir ao meio e dobrar" para o cálculo 6×8. Cada uma dessas estratégias envolve utilizar uma relação entre o fato exigido e um fato que é conhecido: $6+7$ é um a mais que $6+6$ e 3×8 é metade de 6×8.

Em um contexto mais amplo, o pensamento relacional desse tipo é um primeiro passo em direção à generalização de relações encontradas na Aritmética de modo que essas mesmas relações podem ser usadas quando variáveis estiverem envolvidas e não apenas números.

Algumas propriedades importantes de cada operação podem ser discutidas ao lidar com fatos e estratégias fundamentais em cálculos aritméticos, ou seja, *explorar as propriedades dos números inteiros*. Por exemplo, a propriedade comutativa para adição e multiplicação reduz consideravelmente a quantidade de fatos fundamentais necessários de aprender e memorizar. Essas e outras propriedades são usadas informalmente quando os estudantes desenvolvem o pensamento relacional.

Com o objetivo de discutir de que modo os alunos pensam essas propriedades, Walle (2009) apresenta uma tabela (Quadro 5) adaptada de Carpenter, Frank e Levi (2003).

Quadro 5 – Propriedades do sistema numérico.

Sentença numérica	Declaração de estudantes da conjectura
	Adição e subtração
$a + 0 = a$	Quando você adiciona zero a um número, obtém o mesmo número com que começou.
$a - 0 = a$	Quando você subtrai zero de um número, obtém o mesmo número com que começou.
$a - a = 0$	Quando você subtrai um número dele mesmo, obtém zero.
$a + b = b + a$	Você pode adicionar números de uma ordem e então mudar a ordem obtendo o mesmo resultado.
	Multiplicação e divisão
$a \times 1 = a$	Quando você multiplica um número por 1, obtém o mesmo número com que você começou.
$a \div 1 = a$	Quando você divide um número por 1, obtém o número que começou.
$a \div a = 1$, $a \neq 0$	Quando você divide um número que não é zero por si mesmo, obtém 1.
$a \times 0 = 0$	Quando você multiplica um número por zero obtém zero.
$0 \div a = 0$, $a \neq 0$	Quando você divide zero por qualquer número exceto zero, obtém zero.
$a \times b = b \times a$	Quando você multiplica dois números, pode fazer isso em qualquer ordem e obter o mesmo número.
	Conjecturas derivadas de propriedades básicas
$a + b - b = a$	Quando você adiciona um número a outro número e então subtrair o número que adicionou obterá o número com que começou.
$a \times b \div b = a$, $b \neq 0$	Quando você multiplicar um número por outro que não é zero e então dividir pelo mesmo número, obtém o mesmo número com que começou.

Fonte: Walle (2009, p. 295).

Segundo Carpenter, Frank e Levi (2003) quando essas estruturas são explicitadas e compreendidas, não apenas acrescentam mais ferramentas de cálculo aos alunos, mas também enriquecem a sua compreensão do sistema numérico e fornecem uma base para níveis muito mais elevados de abstração.

Segundo Kaput (2008), a Álgebra como Aritmética Generalizada inclui a construção do aspecto sintático da Álgebra a partir da estrutura da Aritmética, ou seja, a construção da ideia básica de que se pode substituir uma expressão por outra equivalente. Trata-se de olhar para expressões aritméticas em sua forma, ao invés de seu valor quando calculado. Outra atividade básica nessa vertente é a expressão explícita de estratégias de cálculo (tanto convencional quanto desenvolvida pelo aluno), quando se usa o fato de que a adição é comutativa para simplificar o cálculo mental de $3 + 18$ a $18 + 3$, ou quando usamos a propriedade comutativa da multiplicação para reduzir o número de fatores de uma multiplicação.

2.2 Álgebra como o Estudo de Funções, Relações e Covariação – Pensamento Funcional

Segundo Kaput (2008), essa vertente envolve a generalização de um caso bastante particular, basicamente para a ideia de função, em que expressar a generalização equivale a descrever a variação sistemática dos casos em algum domínio. O aspecto sintático da Álgebra é normalmente aplicado para mudar a forma de expressões que denotam regularidades, na comparação de diferentes expressões de um padrão para determinar se eles são equivalentes, ou na determinação de quando as funções assumem valores específicos (por exemplo, raízes) ou se satisfazem várias restrições (construção e resolução de equações).

O desenvolvimento das atividades que mobilizam o tipo de pensamento algébrico relacionado a essa vertente muitas vezes tem início em atividades que envolvem sequências, geralmente precursores necessários para outras formas de generalização matemática. A busca por padrões se difunde em todas as áreas da Matemática, e assume diversos formatos. Walle (2009) discute algumas formas de padrões, quais sejam: padrão repetitivo, padrões numéricos e padrões crescentes.

> Os estudantes devem reconhecer que o padrão de cores "azul, azul, vermelho, azul, azul, vermelho" tem a mesma forma que "palmas, palmas, pare, palmas, palmas, pare". Esse reconhecimento estabelece a base para a ideia de que duas situações muito diferentes podem ter as mesmas características matemáticas e desse modo são idênticas de alguns modos importantes. Saber que cada padrão acima pode ser escrito como tendo a forma AABAAB é, para os estudantes, uma primeira introdução ao potencial da Álgebra (NTCM, 2000 apud WALLE, 2009, p. 296).

Muitos padrões importantes podem ser observados com apenas números, padrões numéricos repetitivos simples, do tipo 3, 4, 5, 3, 4, 5, 3, 4, 5..., ou padrões que envolvem uma progressão.

Walle (2009) apresenta exemplos de sequências numéricas descrevendo as possíveis conjecturas do padrão que as definem:

2, 4, 6, 8, 10, ... (números pares: adicione 2 a cada vez)

1, 4, 7, 10, 13, ... (comece com 1; adicione 3 a cada vez)

1, 4, 9, 16, ...(números quadrados)

0, 1, 5, 14, 30, ... (adicione o próximo número quadrado)

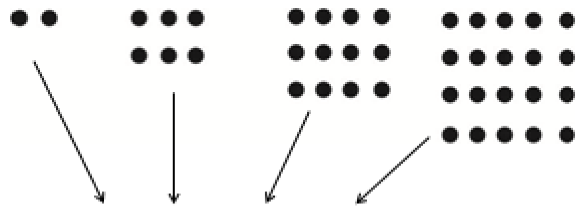
2, 5, 11, 23, ... (dobre o número e adicione 1)

2, 6, 12, 20, 30, ... (multiplique pares de números naturais consecutivos)

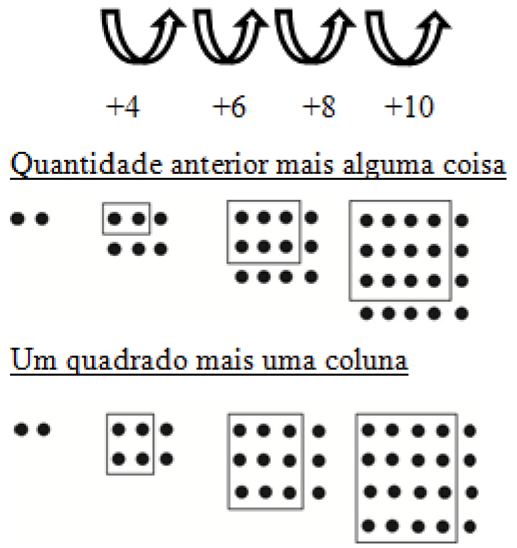
O trabalho com sequências, segundo Walle (2009), proporciona, não apenas desenvolver a capacidade de expandir padrões, mas também buscar e estabelecer uma generalização ou uma relação algébrica que lhes dirá qual o elemento que ocupará qualquer lugar da sequência.

Nos padrões discutidos podem ser observados dois tipos de relação: *relação recursiva* e *relação funcional*. Na Figura 2, podemos observar essas duas relações em um padrão geométrico.

Figura 2 – Duas relações diferentes em um padrão geométrico.



Passo	1	2	3	4	5	6	?	-------	20
Quantidade de pontos	2	6	12	20	30	?	?	-------	?



Fonte: Walle (2009, p. 300).

Por meio da tabela (Figura 2), é possível analisar a diferença entre os termos, em que podemos observar que o padrão é modificado a cada termo, ou seja, esta é uma relação denominada como recursiva.

Na última descrição da situação, onde um arranjo quadrado é esboçado a cada etapa, cada quadrado sucessivo tem uma unidade a mais de comprimento. Que relação poderia existir entre esses subconjuntos do padrão e a ordem dos elementos? Neste caso, o lado de cada quadrado é o mesmo que a ordem do elemento. A fila à direita de cada quadrado também corresponde à ordem do elemento. Sendo assim, escrever uma expressão numérica para cada etapa, usando o mesmo padrão, pode nos ajudar a encontrar uma relação funcional que nos permita predizer o número de elementos em qualquer etapa em relação à sua posição na sequência. Por exemplo, $1^2 + 1$, $2^2 + 2$, $3^2 + 3$ e $4^2 + 4$.

É possível estabelecer, nesse caso, uma regra que determina o número de elementos de uma etapa a partir do número da etapa, neste caso, estamos tratando de uma *relação funcional*. O pensamento funcional também faz uso regular de uma ampla gama de sistemas de símbolos para além dos habituais, incluindo sistemas baseados em tabelas, gráficos e sequências.

2.3 ÁLGEBRA COMO MODELAGEM MATEMÁTICA

Kaput (1999) define modelagem como o processo que parte de fenômenos reais em uma tentativa de descrevê-los matematicamente. Isso proporciona o contato com aplicações de conceitos da Matemática, usados para registrar os fenômenos e para procurar padrões ou regularidades que possam então ser expressos usando modelos matemáticos como equações, tabelas e gráficos.

Os modelos não apenas permitem uma boa descrição dos fenômenos, mas também permitem predições sem a necessidade de realizar realmente parte das experiências adicionais. Por exemplo, a partir de um modelo é possível visualizar pontos na função (na tabela ou no gráfico) que podem ter deixado de ser observados no fenômeno real, bem como fazer “previsões” a partir desses pontos.

Criar as relações funcionais e usá-las para observar, descobrir ou predizer é parte da integração de aspectos do pensamento algébrico conhecida como *Modelagem Matemática.* Para Kaput (2008) a modelagem como uma atividade algébrica se divide em três tipos básicos, baseados no modo como os dois aspectos fundamentais da Álgebra são empregados, sistematizados no Quadro 6 por Ponte, Branco e Matos (2009).

Quadro 6 – Tipos de situações que promovem a modelação.

Situação	**Interpretação algébrica**	**Variável**
Problemas aritméticos que requerem o uso de aspectos sintáticos da Álgebra	Equação ou sistema equações do 1º grau	Incógnita
Sequências e regularidades em situações ou fenômenos	Função	Uma ou mais variáveis
Situações de modelação de resposta única ou problemas de palavras aritméticas puros	Expressão algébrica para exploração geral de relações	Parâmetro

Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009, p. 3).

A título de ilustração, apresentaremos dois problemas envolvendo as situações descritas na Tabela 2, ou seja, que tenham o potencial para promover a modelação.

A primeira situação é abordada no seguinte problema:

"Dois amigos foram comprar material escolar. Um dos amigos comprou dois cadernos e duas canetas, tendo gasto R$ 8,50. O outro comprou o mesmo material, mas em quantidade diferente. Comprou três cadernos e uma caneta, tendo gasto R$ 10,25. Determine o preço de um caderno e uma caneta."

Trata-se de um problema que envolve dois valores desconhecidos, podendo ser modelado por um sistema de equações do 1º grau, sendo que as variáveis assumem o papel de incógnitas por tratar-se de um problema de solução única.

A terceira situação pode ser ilustrada pelo problema:

"Pense em um número. Multiplique esse número por 2 e adicione 2. Em seguida divida o resultado por 2. Por fim subtraia o número que pensou.

a) Que resultado obteve no final?

b) O que acontece se pensar num outro número?

Esse problema ilustra propriedades das operações e pode ser representado por uma expressão algébrica em que a letra assume o significado de parâmetro.

CAPÍTULO 3
ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Neste capítulo, descrevemos o encaminhamento metodológico adotado na pesquisa, nomeadamente a natureza da investigação, o contexto e a participante da pesquisa, os instrumentos de coleta das informações e os procedimentos de análise, na busca de responder a seguinte questão: *que conhecimentos são mobilizados por uma professora que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, desencadeados por uma proposta de formação continuada de professores, com ênfase em tarefas que tem o potencial para mobilizar o pensamento algébrico?*

Para responder a essa questão de investigação, analisamos a produção escrita de uma professora na resolução de tarefas que tem o potencial para mobilizar o pensamento algébrico, e aspectos de sua prática profissional revelados em ações do processo de formação.

3.1 NATUREZA DA INVESTIGAÇÃO

O presente estudo tem natureza qualitativa, de cunho interpretativo, tal como definida por Bogdan e Biklen (1994).

Estivemos em contato com o grupo de formação continuada (ambiente natural) do qual a professora investigada era integrante, constituímo-nos como instrumento principal para a coleta de informações para essa pesquisa.

Essa pesquisa é essencialmente descritiva, pois estamos interessados em identificar que conhecimentos são mobilizados por uma professora no contexto de um grupo de estudos em processo de formação continuada. Nesse sentido, damos ênfase ao processo, ao descrever o trabalho desenvolvido com a professora investigada, quais os tipos de pensamento algébrico foram mobilizados pela professora e que aspectos de sua prática profissional foram revelados nas ações do grupo.

Procuramos, ao longo deste estudo, registrar e analisar todo o processo que forneceu informações que permitissem responder à pergunta dessa investigação. As informações obtidas no desenrolar da investigação foram agrupadas e tratadas de modo a revelar aspectos específicos do estudo. A análise foi feita de forma indutiva e está descrita na última seção desse capítulo.

3.2 Contexto da Investigação

Nossa investigação faz parte do projeto “Educação Matemática de Professores de Matemática” vinculado ao Programa “Observatório da Educação” (Edital no 38/2010, da CAPES/INEP), proposto por docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM, da Universidade Estadual de Londrina – UEL.

Nosso campo empírico foi o trabalho no grupo de estudos constituído na Escola Municipal José Brasil Camargo – Apucarana/Paraná coordenado pela pesquisadora Magna Natalia Marin Pires[6], responsável pela organização e encaminhamento das ações desenvolvidas no grupo, que tinham por objetivo fomentar o desenvolvimento profissional de nove participantes desse grupo, buscando colaborar com o desenvolvimento do processo de ensino e da aprendizagem dos alunos.

A seguir, apresentamos um quadro (Quadro 7), com as informações sobre cada uma das professoras, que estão identificadas por nomes fictícios, de modo a preservar sua identidade na investigação evitando, assim, quaisquer constrangimentos, de acordo com o termo de consentimento livre e esclarecido assinado por elas (Apêndice 1).

Quadro 7 – Informações das professoras participantes do grupo de estudos em formação.

Professora	Idade	Tempo no magistério	Série em que leciona (2011)	Curso Superior	Especialização
Aline	36 anos	12 anos	4º ano	Ciências Biológicas	Não
Lígia	42 anos	14 anos	Reforço para todas as séries	Pedagogia	Psicopedagogia
Melissa	41 anos	24 anos	4ª série	Pedagogia	Gestão do Trabalho Pedagógico
Luana	42 anos	20 anos	2º ano	Normal Superior	Classe Especial e Inclusão
Clarice	42 anos	15 anos	3º ano	Letras	Educação Especial
Bruna	53 anos	21 anos	2º ano	Normal Superior	Psicopedagogia
Aleteia	47 anos	15 anos	Coordenação	Pedagogia	Supervisão Orientação Gestão Escolar
Nataly	38 anos	11 anos	3º ano	Ciências Biológicas	Educação Especial
Flávia	45 anos	15 anos	Reforço para todos os anos	Pedagogia	Educação Especial

Fonte: da autora.

[6] No momento da coleta dos dados a coordenadora Magna era doutoranda do programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL.

Dentre as nove participantes do grupo, investigamos a professora Melissa, graduada em Pedagogia e especialista em Gestão do Trabalho Pedagógico, escolhida tanto por demonstrar participação plena no grupo de estudos quanto por trabalhar com estudantes de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, respectivamente nos anos de 2012 e 2011, ambiente propício para o desenvolvimento das tarefas que tem o potencial para mobilizar o pensamento algébrico, escolhidas pela coordenadora Magna, tendo em conta seu trabalho de pesquisa (PIRES, 2013).

Em nossa investigação estivemos em contato com o grupo de estudos, em encontros semanais, de três horas de duração, a partir de agosto de 2011. No ano de 2012, as reuniões passaram a ser quinzenais com o mesmo tempo de duração.

Na primeira seção do próximo capítulo, apresentaremos um breve relato do trabalho desenvolvido com a professora investigada no contexto desse grupo, na busca de proporcionar ao leitor uma visão geral da trajetória da professora nesse processo.

3.3 Instrumentos para a Obtenção das Informações

Os instrumentos utilizados para a coleta das informações desta investigação foram diário de campo, gravações em vídeo de encontros do grupo e produções escrita da professora.

Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 118-119) afirmam que o diário de campo trata-se de um dos instrumentos mais ricos na coleta de informações, pois é “[...] nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos”. Por meio das anotações no diário campo, foi possível observar de forma resumida, a trajetória da professora Melissa no grupo de estudos em formação continuada.

Para as gravações em vídeo foi utilizada uma câmera filmadora. A transcrição das gravações de alguns encontros possibilitou registrar as interações entre a professora e as demais participantes, e assim fornecer elementos que nos permitiriam responder à pergunta de investigação. A captura das imagens possibilitou uma análise apurada das informações em relação às anotações do diário de campo.

Os registros escritos produzidos pela professora Melissa referem-se às suas tentativas de resoluções das tarefas propostas em ações do grupo e às anotações em um caderno em que a professora registrava suas impressões a respeito dos encontros e de sua participação.

3.4 ENCAMINHAMENTO DA ANÁLISE

No intuito de investigar que conhecimentos são mobilizados por uma professora que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental desencadeados por um processo de formação continuada, com ênfase em tarefas que tem o potencial para mobilizar o pensamento algébrico, relemos atentamente o diário de campo, as produções escritas da professora e assistimos algumas gravações que nos permitiram fazer uma descrição de elementos que pudessem nos ajudar a responder à pergunta de investigação.

Para atingir o primeiro objetivo de nossa pesquisa analisamos a produção escrita da professora na tentativa de resolver as tarefas matemáticas propostas nos encontros do grupo de estudos e, além disso, a participação da professora nas discussões sobre essas tarefas. A escolha das tarefas a serem analisadas foi feita de acordo com a riqueza de detalhes na produção escrita e a organização na ordem em que foram aplicadas.

Em seguida, analisamos a participação da professora Melissa em outras ações do grupo e também os episódios de experiências, memórias e reflexões narrados por ela em discussões no grupo, pois de acordo com Passos e Galvão (2011, p. 80), “o ato de escrever narrativas ou narrar episódios de suas aulas revela aprendizagens da docência muito significativas para os professores”.

Canavarro (2004) destaca dois modos fundamentais de o professor expressar seus conhecimentos: o pensamento paradigmático e o narrativo. Afirma que, por um lado, muito do que o professor sabe pode ser descrito em termos proposicionais, sistematizando aquilo que em geral é conhecido por “conhecimento base” para o ensino. Por outro lado, sublinha o caráter situado do conhecimento de onde são retiradas consequências para sua expressão por meio de histórias ancoradas num contexto particular. Contudo, o pensamento narrativo surge naturalmente dos professores, talvez mais frequentemente do que o pensamento paradigmático.

Diante do que foi exposto consideramos que os episódios narrados sobre experiências, memórias e reflexões vividas pela professora podem revelar aspectos de sua prática profissional caracterizadores dos conhecimentos mobilizados por ela e, até mesmo, desencadear seu desenvolvimento profissional; por isso os escolhemos para compor a presente pesquisa.

CAPÍTULO 4
DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Nesse capítulo, apresentamos, no item 4.1, um breve relato do trabalho desenvolvido com a professora investigada, no contexto de um grupo de estudos em processo de formação continuada, na busca de proporcionar uma visão geral da trajetória da professora nesse processo. No item 4.2, descrevemos e analisamos os tipos de pensamento algébrico mobilizados pela professora nas discussões e resoluções de tarefas matemáticas, que tem o potencial para mobilizar o pensamento algébrico. E finalizamos com o item 4.3, em que apresentamos e analisamos a participação da professora nas discussões desencadeadas em ações do grupo de estudos, que revelaram aspectos da sua prática profissional.

4.1 TRAJETÓRIA DA PROFESSORA NO GRUPO DE ESTUDOS

No primeiro dia de reunião do grupo de estudos, Magna apresentou aos participantes um cronograma, as ações a serem desenvolvidas e a dinâmica de trabalho, definidos previamente com a coordenação do projeto "Educação Matemática de professores que ensinam Matemática" (Programa Observatório da Educação). Ficou estabelecido que, em cada encontro, no primeiro tempo (antes do intervalo) seria feito um trabalho com a *prova em fases*[7], e que no segundo tempo (após o intervalo) seriam discutidas tarefas da *Early Algebra*[8], sendo no segundo momento o foco da presente pesquisa.

Os encontros tiveram início em março de 2011. Nesse primeiro ano do projeto, aconteceram 30 encontros de 3 horas cada um. Melissa esteve ausente em apenas um dos trinta encontros, porém, não deixou de realizar as tarefas propostas, mostrando-se proativa em todas as ações propostas pela Magna.

No contexto desse grupo de estudos, foi criado um espaço de aprendizagem e de formação continuada de professores dos anos iniciais, e também um campo de investigação sobre quais conhecimentos, reflexões e conflitos são produzidos por um grupo de professoras, das séries iniciais do Ensino Fundamental, participantes de um processo de resolver tarefas matemáticas que envolvem o pensamento algébrico e elaborar, reconstruir, adaptar e/ou escolher tarefas similares para seus alunos. No que se refere ao momento de

---

[7] Foco do trabalho de pesquisa da coordenadora Magna (PIRES, 2013).

[8] Essas tarefas foram retiradas e adaptadas do material que se encontra disponível no site: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/about.asp do Departamento de Educação, Paige Hall, Tufts University, Medford, Massachusetts, nos Estados Unidos.

resolução da prova em fases e das tarefas da *Early Algebra*, a professora investigada demonstrou concentração, na medida em que se empenhava no trabalho.

As professoras resolveram as tarefas das lições[9] destinadas ao 4º. ano do ensino fundamental que envolveram os temas listados na Quadro 8. Essas tarefas foram projetadas pela equipe da *Early Algebra* para serem utilizadas como material condutor das aulas ou ainda como suplementar.

Quadro 8 – Descrição dos temas das lições da *Early Álgebra.*

TEMAS	AÇÕES	DATA DE APLICAÇÃO
Símbolos	Discutir o que são símbolos; escrever mensagens ou histórias com símbolos.	04/3/2011
Comparações	Conhecer os operadores: =, ≠, <, >.	04/3/2011
Comparações e atributos	Fazer comparações com uso dos operadores.	04/3/2011
Comparando alturas I	Medir, comparar e representar alturas.	11/3/2011
Comparando quantidades discretas	Comparar quantidades discretas desconhecidas	11/3/2011
Alturas como funções	Representar alturas desconhecidas	11/3/2011
Caixa de doces	Trabalhar com quantidades desconhecidas	18/3/2011 14/10/2011
Relação parte-todo	Representar por meio de figuras as relações entre quantidades; relacionar informações visuais e numéricas com descrições verbais; utilizar algoritmos para encontrar valores desconhecidos.	18/3/2011 21/10/2011 28/10/2011
Reta numérica	Localizar pontos na reta numerada.	25/3/2011
Atalhos na reta numerada	Realizar operações utilizando a reta.	25/3/2011
Mudanças parciais e totais	Utilizar atalhos na reta numerada para resolver expressões numéricas.	01/4/2011
Várias retas numeradas	Trabalhar com uma notação para variáveis.	01/4/2011
Reta numerada I	Trabalhar com uma notação para variáveis.	01/4/2011
Reta numerada II	Utilizar a reta numerada para fazer generalizações sobre quantidades desconhecidas.	08/4/2011
Cofrinhos	Trabalhar com alterações em duas quantidades desconhecidas.	08/4/2011
Adivinhar a minha regra: tabelas	Criar regras.	15/4/2011
Adivinhar a minha regra: tabelas multiplicativas	Criar regras para duplicar ou triplicar.	15/4/2011
Três alturas	Comparar, representar e interpretar quantidades desconhecidas.	15/4/2011
Problemas de comparação e tabelas	Trabalhar com conceitos e representações de funções.	29/4/2011
Todas as coisas são iguais I	Utilizar o material Cuisenaire para representar igualdades entre quantidades aditivas.	29/4/2011
Todas as coisas são iguais II	Escrever equações para representar declarações verbais e transformações sucessivas que mantém ou não a igualdade.	29/4/2011
		Continua...

[9]As lições referem-se às aulas que devem seguir a dinâmica de iniciar com um problema simples ou uma discussão inicial, seguida de trabalho em grupo. Após essa fase, os autores sugerem que haja uma comparação entre as diversas estratégias utilizadas na resolução dos problemas e ainda indicam que grande parte do tempo seja dedicado à explicitação pelos alunos do pensamento e de suas representações. Cada lição contém um conjunto de tarefas.

Continuação...		
Problemas pontos	Trabalhar com padrões.	06/5/2011
Funções: ganhar dinheiro	Criar tabelas e equações que apresentam funções aditivas e multiplicativas.	06/5/2011
Funções II	Trabalhar com sequência de padrões, tabela de dados e expressão algébrica de funções.	13/5/2011
Funções lineares versus funções quadráticas	Trabalhar com funções representadas com uma sequência de padrões e com expressão algébrica de funções.	20/5/2011
Comparando funções diferentes	Discutir e representar um problema verbal envolvendo escolha entre duas funções.	20/5/2011
Tabelas de funções	Escrever uma fórmula para a função descrita por meio de uma tabela.	27/5/2011
Começando com uma regra	Trabalhar com uma determinada regra.	27/5/2011
Regras e fórmulas	Trabalhar com uma determinada regra e tabela de dados gerados de acordo com uma regra.	01/7/2011
Fórmulas e histórias	Relacionar fórmulas a histórias.	01/7/2011
Mesas de jantar I	Trabalhar com funções.	29/7/2011
Mesas de jantar II	Trabalhar com funções.	29/7/2011
Funcionando juntos	Desenvolver múltiplas representações para uma função.	05/8/2011
Duas vezes	Utilizar novas notações para representar uma função.	05/8/2011
Receitas que intercambiam	Trabalhar com funções.	12/8/2011
Gráfico Humano I	Traçar um plano cartesiano.	02/9/2011
Gráfico Humano II	Construir gráficos de funções lineares.	02/9/2011
Taxas versus totais	Comparar pontos no plano cartesiano.	09/9/2011
Comparando gráficos	Trabalhar com gráficos no plano cartesiano.	09/9/2011
Quantos pontos	Gerar coordenadas.	09/9/2011
Mapas de interpretação	Trabalhar com pontos em um mapa simplificado.	30/9/2011
Mapas para gráficos	Trabalhar com retas e comparações entre pontos de cada reta.	30/9/2011
Reta e tempo	Trabalhar com intervalos na reta numerada.	07/10/2011
Interpretação de gráficos	Comparar pontos de gráficos.	14/10/2011

Fonte: da autora.

O encaminhamento das tarefas que fazem parte de cada lição seguiu um protocolo[10] indicado pelos autores (que incluem psicólogos e educadores matemáticos). As resoluções eram feitas individualmente ou em grupo. Após a resolução pelas professoras e a recolha da tarefa, Magna, que nesse momento assumia o papel de formadora, discutia a tarefa abordando a interpretação e os conteúdos envolvidos.

A professora Melissa costumava terminar as tarefas antes das outras professoras e aproveitava o tempo para inspecionar sua turma que se encontrava com um dos estudantes de graduação, ou mestrandos, envolvidos no projeto. Antes do início dos encontros, fazia questão de conversar com quem ficasse responsável pela turma, questionando sobre o que seria trabalhado e como isso seria desenvolvido e demonstrando preocupação com seus alunos e suas aprendizagens.

[10] Ver http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/team.asp .

Nas discussões dentro do grupo de estudos que se referiam aos conteúdos matemáticos envolvidos nas tarefas, pudemos observar que Melissa interagia com o grupo de professoras quando questionada pela coordenadora ou para narrar uma situação de sua prática em sala de aula relacionada ao conteúdo em pauta.

No segundo ano do projeto (2012), os encontros passaram a ser quinzenais, e o trabalho com as tarefas da *Early Algebra* passou a ter um novo enfoque: tomar algumas das tarefas, e discutir com o grupo de professoras os objetivos e a sua relevância para a formação educacional dos estudantes, além de propor que elaborassem e/ou adaptassem tarefas com os objetivos discutidos para serem aplicadas em sala de aula. As professoras aceitaram a proposta.

No entanto, a professora Melissa desenvolveu parte do trabalho sozinha, e ao invés de apresentar apenas as tarefas escolhidas e/ou elaboradas com os objetivos discutidos, apresentou um plano de aula para cada tema, descrevendo qual seria a dinâmica das aulas e as tarefas a serem aplicadas. Isso causou certo conflito dentro do grupo, pois percebemos que as demais participantes ficaram incomodadas ao declarar que a elaboração de um plano de aula não fazia parte da proposta apresentada pela coordenadora. Magna elogiou o trabalho da professora Melissa, e solicitou que as demais também elaborassem um plano de aula.

O trabalho desenvolvido pela professora na ação de escolher e/ou elaborar tarefas, com enfoque nos objetivos propostos nas tarefas da *Early Algebra,* deu origem a um projeto de intervenção pedagógica (Anexo 4) que tem por escopo propiciar aos alunos do segundo e do quarto ano atividades que estimulem o raciocínio, o pensamento algébrico e perceber e constatar como eles o desenvolvem.

4.2 TIPOS DE PENSAMENTO ALGÉBRICO MOBILIZADOS PELA PROFESSORA

Muitos estudos têm evidenciado vários aspectos do conhecimento de professores em formação como sendo problemáticos em relação aos conhecimentos necessários para ensinar Matemática. Canavarro (2004) chama atenção sobre os estudos que tendem a identificar limitações do conhecimento matemático dos professores, e sobre as três áreas da Matemática que receberam atenção significante por investigadores: funções, números racionais e "*Word problems*[11]".

[11] Problemas de palavra.

Conforme relatamos em 4.1, a professora Melissa fez parte de um grupo de professoras dos anos iniciais, em formação continuada, que se propôs a resolver tarefas matemáticas que envolvem o pensamento algébrico e elaborar, reconstruir e/ou escolher tarefas similares para seus alunos. A ação de resolver as tarefas das *Early Algebra* foi composta por um total de 108 tarefas, referentes às lições citadas em 4.1. Esclarecemos que as resoluções escolhidas para compor esse estudo foram aquelas que permitiram uma análise mais profunda devido à riqueza de detalhes que emergiram dos dados. Ressaltamos que privilegiamos a manifestação dos tipos de pensamento algébrico mobilizados pela professora.

Apresentamos a seguir a análise de onze tarefas, nomeadamente tarefas 29, 34, 35, 36, 37, 40, 45, 47, 48, 62 e 105, organizadas pela ordem em que foram propostas. Iniciamos com a análise da Tarefa 29 (Quadro 9), que explora a relação entre as alturas de três indivíduos com a intenção de que essa relação seja descrita de forma generalizada. Magna escreveu no quadro negro as regras para a realização da tarefa:

Antônio é 4 cm mais alto que Maria
Letícia é 6 cm mais alta que Maria

Quadro 9 - Tarefa 29 entregue às professoras.

Tarefa 29

E se	a altura de Antônio é	Então a altura de Maria é	e a de Letícia é
Caso1	92 cm		
Caso2		100 cm	
Caso 3			100 cm

Descrever a altura de Maria, usando a letra n.
[Dica: Maria é mais alta, mais baixa, ou tem a mesma altura que Antônio?]

E se	a altura de Antônio é	Então a altura de Maria é	e a de Letícia é
Relação 1	n centímetros		

Agora descrever a altura de Antônio, com a letra t.
[Dica: Antônio é mais alto, mais baixo, ou tem a mesma altura que Maria?]

E se	a altura de Antônio é	Então a altura de Maria é	e a de Letícia é
Relação 2		t	

Agora tente este

E se	a altura de Antônio é	Então a altura de Maria é	e a de Letícia é
Relação 3			z

Fonte: arquivos da coordenadora Magna[12].

[12] Quadros da Coleta de dados cedidos pela coordenadora Magna que no momento da coleta dos dados era doutoranda do programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL.

Magna explicou ainda que na tarefa estão apresentadas apenas algumas suposições, e que as professoras deveriam seguir as regras descritas no quadro negro para resolvê-la. Após alguns minutos, a partir da apresentação da tarefa, retomou a atenção do grupo percebendo que a tarefa gerou muitas dúvidas, dizendo:

Magna: Para escrever a relação 1 vocês utilizaram o n. Para a relação 2 vocês vão usar t. Vocês têm que obedecer aquela regra lá (apontando para as regras descritas no quadro negro). Vocês vão por um número que é a diferença entre eles. [...] Vejam, no primeiro quadro temos suposições, agora Antônio mede n, assim, medindo n, quanto vai medir a Maria?

Nesse momento, a professora Melissa demonstra dificuldade e certa angústia por não conseguir cumprir a tarefa, e a entrega dizendo:

Melissa: Não estou conseguindo me concentrar, não vou tentar mais. Não terminarei a Tarefa 29.

A resolução da tarefa feita pela professora Melissa (Figura 3) nos permite identificar elementos que possibilitam inferir o tipo de pensamento algébrico mobilizado na resolução dessa tarefa, que nos remete ao conhecimento matemático da professora.

Figura 3 - Registro escrito produzido por Melissa no primeiro quadro da Tarefa 29.

E se	a altura de Antônio é	Então a altura de Maria é	e a de Letícia é
Caso 1	92 cm	88 cm	94 cm
Caso 2	104 cm	100 cm	106 cm
Caso 3	98 cm	94 cm	100 cm

Em relação à Maria
Ant: + 4cm
Letícia +6cm

$$\begin{array}{r} 88 \\ 6 \\ \hline 4 \end{array}$$

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

A professora utiliza corretamente as regras propostas pela coordenadora no início da tarefa, para completar o primeiro quadro. No segundo quadro (Figura 4), referente a relação 1, encontramos registros em que a professora representa a *relação funcional* existente entre as alturas de Maria e Antônio, utilizando uma expressão generalizada para representar a idade de Maria em função da idade de Antônio. Neste momento, mobiliza o *Pensamento Funcional,* que segundo Kaput (2008), é uma das vertentes do pensamento algébrico em que a expressão generalizada pode ser considerada como descrição da variação sistemática dos casos em algum domínio. Ao criar a relação funcional entre as alturas de Maria e Antônio, envolve-se em uma situação que promove a *modelação*, correspondente a um dentre os três tipos básicos de *Modelagem* como atividade algébrica discutidos por Kaput (2008), em que a interpretação algébrica da situação-problema trata-se de uma função.

Figura 4 - Registro escrito produzido por Melissa no segundo quadro da Tarefa 29.

Descrever a altura de Maria, usando a letra n. 2 e 2 Fças
[Dica: Maria é mais alta, mais baixa, ou tem a mesma altura que Antônio?]

E se	a altura de Antônio é	Então a altura de Maria é	e a de Letícia é
Relação 1	**n** centímetros	n-4	~~n+6~~ n-6

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Já o modelo construído para expressar a relação funcional entre as alturas de Letícia e Antônio (Figura 4), não condiz com a regra imposta para o desenvolvimento da tarefa.

O mesmo pode ser observado no registro apresentado na Figura 5, no qual Melissa revela sua compreensão acerca da relação entre as alturas de Antônio e Maria e apresenta o modelo adequado para descrever sua relação funcional, ou seja, se a altura de Maria é *t* então a altura de Antônio é *t* + 4.

Figura 5 - Registro escrito produzido por Melissa no terceiro quadro da Tarefa 29.

Agora descrever a altura de Antônio, com a letra a.
[Dica: Antônio é mais alto, mais baixo, ou tem a mesma altura que Maria?]

E se	a altura de Antônio é	Então a altura de Maria é	e a de Letícia é
Relação 2	t + ~~a~~4 ~~t~~ ~~x~~ a	**t**	t

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Após a entrega da tarefa, Magna iniciou uma discussão com todos os membros do grupo destacando as diferentes formas de representar a mesma situação, dizendo:

Magna: Bom, se a Maria medir 88 cm é a mesma coisa que colocar $92 - 4 = 88$. Aqui eu sei a altura de Antônio (mostrando o primeiro quadro referente ao caso 1 da tarefa no computador). Aqui eu não sei (apontando para o segundo quadro referente a relação 1). No segundo quadro o Antônio vai medir n, logo como eu posso representar a altura de Maria?

Melissa: $n - 4$.

Magna: Se eu comparar a Maria e a Letícia?

Bruna: Letícia é mais alta.

Magna: Então é mais! Eu pego a altura de Maria e somo 6 ($n - 4 + 6$). Dá para resumir isso?

Professoras: Sim, $n + 2$.

Ao discutir o terceiro quadro e, apresentar o quarto quadro que corresponde a relação 3, Magna indagou:

Magna: Qual é a altura de Maria em relação à altura de Letícia z?

Melissa: $z - 6$.

Magna: Por quê?

Aleteia: É que Letícia é 6 cm mais alta que Maria.

Foi possível observar que no momento da discussão Melissa passou a compreender a relação funcional entre a altura de Letícia e a de Maria, mobilizando o *Pensamento Funcional* e *Modelagem*. Note que Melissa não expressa adequadamente essa relação com o uso de linguagem algébrica no momento da resolução da tarefa individualmente, conforme o registro apresentado na Figura 6.

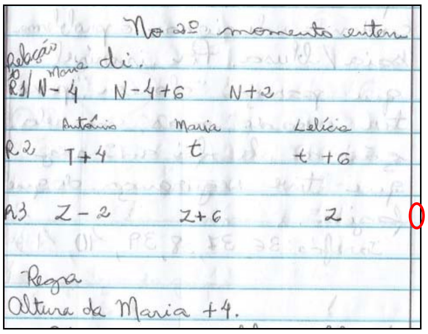
Figura 6 - Registro escrito por Melissa no quarto quadro da Tarefa 29.

Agora tente este			
E se	a altura de Antônio é	Então a altura de Maria é	e a de Letícia é
Relação 3	$z - 2$	z	z

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

O fato de ter compreendido a relação aritmética entre as alturas pôde ser evidenciado tanto em sua participação na discussão, quanto por meio de seu registro no caderno (Figura 7). Acreditamos que o sinal destacado em vermelho trata-se apenas de um erro na escrita, pois na discussão anterior ao registro a professora cita o sinal de menos.

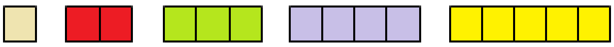
Figura 7 - Registro escrito no caderno produzido por Melissa referente ao encontro do dia 29/4/2011.



Fonte: da autora.

Após a resolução da Tarefa 29, Magna pediu para que as professoras formassem duplas, pois a próxima tarefa referia-se ao uso do material Cuisenaire, o qual seria disponibilizado às professoras para o uso em duplas.

Magna: Nós vamos analisar algumas possibilidades de trabalho (começou a mostrar o material Cuisenaire). A pecinha de cor areia representa uma unidade, a de cor vermelha duas unidades, a de cor verde três unidades, a de cor lilás quatro unidades, a de cor amarela cinco unidades, e assim por diante.



Magna: Por que a amarela é cinco unidades?
Professoras: Porque cabem cinco unidades.
Magna: Eu posso falar que $5 = 3 + 2$?
Professoras: Sim.
Magna: Tem outra maneira de escrever o número 5?
Professoras: Sim, por exemplo, $5 = 2 + 2 + 1$.

Magna: Muito bem! Essas são representações que eu estou associando com a quantidade (5). Aline, dá para eu escrever o número 5 usando outras pecinhas?

Aline: Sim, $5 = 3 + 1 + 1$.

Magna: Vamos combinar que quando eu estou colocando uma pecinha em cima eu estou retirando uma unidade. ( $5 - 1 = 4$).

Melissa: Eu posso pegar a peça 7 e tirar duas unidades $7 - 2 = 5$, ou então $6 - 1 = 5$.

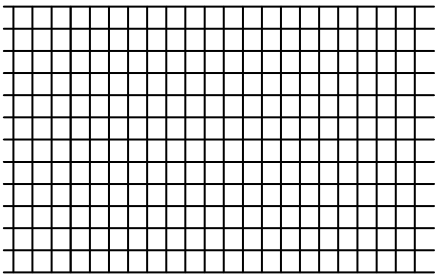
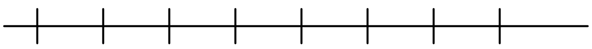
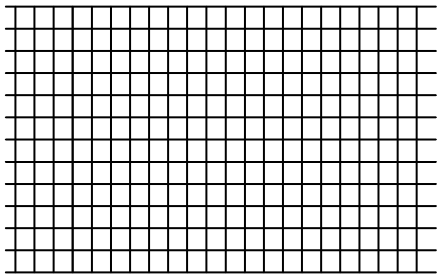
Magna: Muito bem! Então, temos muitas maneiras diferentes de escrever a quantidade 5. Melissa, como eu posso representar a quantidade 9?

Melissa: $9 = 7 + 2$

Pudemos observar que a professora Melissa, manifestou o *pensamento relacional* utilizando tanto a adição quanto a subtração ao citar representações equivalentes à mesma quantidade.

Em seguida, foram propostas as Tarefas 34 e 35 (Quadro 10) com o objetivo de trabalhar com o sinal de igual utilizando o Material Cuisenaire e as expressões correspondentes para representar igualdades entre quantidades aditivas.

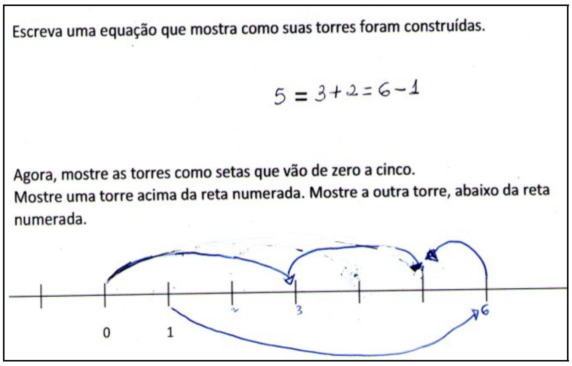
Quadro 10 - Tarefas 34 e 35 entregues às professoras.

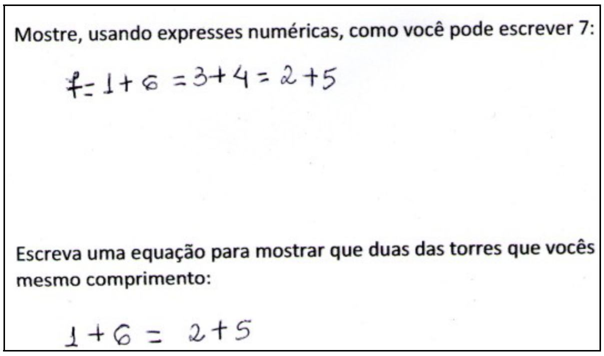
Tarefa 34	Tarefa 35
Trabalhando com Material Cuisenaire Fazer no quadriculado abaixo duas torres de 5 unidades de altura, com seções como a que você construiu com o material.  Escreva uma equação que mostra como suas torres foram construídas. Agora, mostre as torres como setas que vão de zero a cinco. Mostre uma torre acima da reta numerada. Mostre a outra torre, abaixo da reta numerada.  0 1	**Trabalhando com Material Cuisenaire** Mostrar quantas torres vocês podem fazer de 7 unidades usando duas cores:  Mostre, usando expresses numéricas, como você pode escrever 7: Escreva uma equação para mostrar que duas das torres que vocês desenharam têm o mesmo comprimento:

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

A professora Melissa revela *noção de igualdade relacional* ao dar indícios de *pensamento relacional* nos registros referente às resoluções das Tarefas 34 e 35 (Figura 8), em que ela expressa a estrutura aritmética da situação-problema referente ao Material Cuisenaire, interpretando a igualdade como equivalência entre as expressões aritméticas. Os aspectos revelados nesses registros são característicos da *Aritmética Generalizada*, uma das três vertentes categorizadoras do pensamento algébrico (KAPUT, 2008).

Figura 8 - Registro escrito produzido por Melissa para as Tarefas 34 e 35.





Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

As Tarefas 36 e 37, apresentadas nos Quadros 8 e 9, tratam da manipulação de quantidades desconhecidas e variáveis, de modo a desenvolver a habilidade de escrever equações para representar as declarações verbais.

A Tarefa 36 (Quadro 11) é composta por duas instruções, as quais devem ser representadas com o uso de linguagem algébrica, e por duas perguntas baseadas nas instruções anteriores.

Quadro 11 - Tarefa 36 entregue às professoras.

Tarefa 36
Escreva uma equação para cada instrução: Sara e Mariana têm, cada uma, uma coleção de cartões. Elas contaram seus cartões e descobriram que tinham o mesmo número de cartões. Sara encontrou 3 cartões na rua e seu irmão lhe deu mais 2 cartões. No mesmo dia, Mariana comprou 5 cartões para adicionar à sua coleção. Você acha que Mariana e Sara ainda tem quantidades iguais de cartões? E se Sara der 6 cartões para alguém e Maria perder 6 cartões? Será que elas ainda terão quantidades iguais de cartões?

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Essa tarefa foi entregue à professora para que fosse resolvida individualmente. Na primeira instrução (Figura 9), a professora utiliza um número para representar a quantidade de cartões desconhecida, fazendo referência ao fato das quantidades de cartões de Sara e Mariana serem iguais atribuindo o mesmo número para indicá-las sem fazer uso do símbolo de igualdade. É possível observar que novamente a professora recorre a uma expressão aritmética para representar a situação. Escolhe um número para representar a quantidade desconhecia, e não um símbolo qualquer.

Figura 9 - Registro escrito produzido por Melissa para primeira instrução da Tarefa 36

Os cartões de Sara e de Mariana

Sara e Mariana têm, cada uma, uma coleção de cartões. Elas contaram seus cartões e descobriram que tinham o mesmo número de cartões.

S 8
M 8

Fonte: arquivos da coordenadora Magna

Na segunda instrução (Figura 10), ela insiste no uso do número para representar as quantidades desconhecidas e constrói expressões numéricas para representar a situação apresentada.

Figura 10- Registro escrito produzido por Melissa para segunda instrução da Tarefa 36

Sara encontrou 3 cartões na rua e seu irmão lhe deu mais 2 cartões. No mesmo dia, Mariana comprou 5 cartões para adicionar à sua coleção.

S 8 + 3 + 2
M 8 + 5

Fonte: arquivos da coordenadora Magna

Na mesma tarefa no registro da resposta à primeira pergunta (Figura 11), a professora faz o uso do símbolo de igualdade para justificar sua resposta. Podemos inferir que ela estabeleceu o significado de *igualdade relacional*, pois no registro anterior ela descreve o aumento da quantidade de cartões de Sara pela soma 3 + 2 e o aumento da quantidade de cartões de Mariana por 5. Ela relaciona as duas expressões por meio de uma igualdade. A professora mobiliza o *pensamento relacional* na justificativa da resposta à pergunta, componente da vertente *Aritmética Generalizada* do pensamento algébrico, considerado por Blanton e Kaput (2005) como um primeiro passo em direção à generalização de relações encontradas na Aritmética.

Figura 11 - Registro escrito produzido por Melissa para primeira pergunta da Tarefa 36

Você acha que Mariana e Sara ainda tem quantidades iguais de cartões?

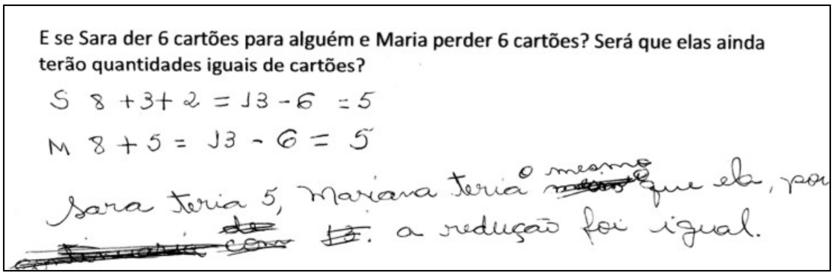
Sim, pois ~~A~~ Sara obteve 3+ 2 = 5, ou seja a mesma quantidade.

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

No registro produzido pela professora Melissa na tentativa de responder a segunda pergunta da Tarefa 36 (Figura 12), observamos que a soma apresentada no primeiro membro da igualdade apresenta o mesmo resultado no segundo membro da igualdade subtraído 6, resultando 5 no terceiro membro da igualdade. O símbolo de igual é utilizado de modo inadequado, pois contradiz a transitividade entre a expressão do 1º membro e a grandeza do 3º membro:

$$8 + 2 + 3 \neq 5 \text{ e } 8 + 5 \neq 5$$

Figura 12 - Registro escrito produzido por Melissa para segunda pergunta da Tarefa 36.


E se Sara der 6 cartões para alguém e Maria perder 6 cartões? Será que elas ainda terão quantidades iguais de cartões?

S 8 +3+ 2 = 13 - 6 = 5

M 8 + 5 = 13 - 6 = 5

Sara teria 5, Mariana teria o mesmo que ela, por

a redução foi igual.

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Os registros produzidos pela professora na tentativa de resolver a Tarefa 36, de cunho algébrico, são realizados sob uma perspectiva aritmética a qual consideramos fazer parte do desenvolvimento algébrico, pois são considerados aspectos do pensamento algébrico toda ação em que o indivíduo:

> [...] estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005, p. 5).

Após a resolução da Tarefa 36, no mesmo encontro, foi proposta a Tarefa 37 (Quadro 12), que segue a mesma perspectiva da Tarefa 36, em que são apresentadas três instruções para serem representadas fazendo uso da linguagem algébrica e uma pergunta para ser respondida com base nas instruções.

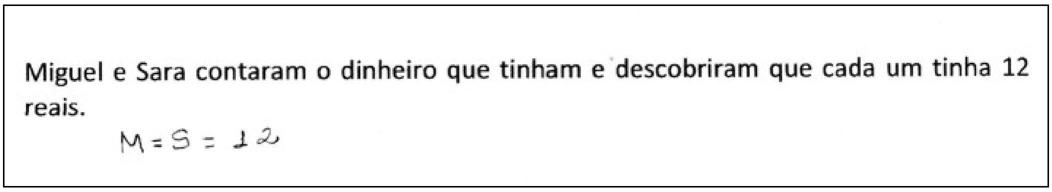
Quadro 12 – Tarefa 37 entregue às professoras.

Tarefa 37
Escreva uma equação para cada instrução: Miguel e Sara contaram o dinheiro que tinham e descobriram que cada um tinha 12 reais. Miguel gastou algum dinheiro para comprar doces e Sara gastou a mesma quantidade de dinheiro para comprar um sorvete. Em seguida, o tio deles deu a cada um deles 5 reais. Eles decidiram comprar mais doces e sorvetes com os 5 reais que cada um recebeu. Miguel e Sara ainda tem quantidades iguais de dinheiro? Explique por quê.

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Na primeira instrução, ao ser especificada a quantidade envolvida no problema, a professora constrói a equação correspondente à situação mencionada, fazendo uso do símbolo de igualdade como equivalência em igualdade condicional, pois percebemos que o intuito foi indicar que a expressão que está no lado direito do “=” é equivalente a expressão ou número à esquerda (Figura 13).

Figura 13 - Registro escrito produzido por Melissa para primeira instrução da Tarefa 37.


Miguel e Sara contaram o dinheiro que tinham e descobriram que cada um tinha 12 reais.

M = S = 12

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Na segunda instrução, a professora descreve a situação fazendo o uso da letra x para representar a quantia desconhecida (Figura 14). Nesse momento, o símbolo de igualdade passa a ser utilizado como significado de operacional sintático, pois indica o resultado das incógnitas M e S. Nesse registro, a professora revela aspectos do *Pensamento Funcional* e *Modelagem Matemática.*

Figura 14 - Registro escrito produzido por Melissa para segunda instrução da Tarefa 37.

Miguel gastou algum dinheiro para comprar doces e Sara gastou a mesma quantidade de dinheiro para comprar um sorvete.

$M = 12 - X$
$S = 12 - X$

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

No registro produzido na tentativa de cumprir com a terceira instrução da tarefa (Figura 15), Melissa utiliza a mesma letra, "k", para representar a quantia gasta por cada criança na compra de mais doces e sorvetes. Porém, na instrução dada, não há informações sobre a veracidade da equivalência entre essas quantias.

Figura 15 - Registro escrito produzido por Melissa para terceira instrução da Tarefa 37.

Em seguida, o tio deles deu a cada um deles 5 reais. Eles decidiram comprar mais doces e sorvetes com os 5 reais que cada um recebeu.

$M = 12 - X + 5 - K$
$S = 12 - X + 5 - K$

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Observando o registro produzido por Melissa para responder a primeira pergunta da tarefa (Figura 16), ela revela ter ideia de que o valor gasto por cada indivíduo poderia não ser o mesmo, segundo a instrução anterior. Mas ao fazer uso da mesma variável na instrução anterior (Figura 15) não descreve em linguagem algébrica sua compreensão evidenciada no registro da Figura 16 em linguagem natural.

Figura 16 - Registro escrito produzido por Melissa para primeira pergunta da Tarefa 37

Miguel e Sara ainda tem quantidades iguais de dinheiro? Explique por quê.

(~~Sim, pois ambos tinham~~ 12)
Talvez não, pois não tenho a informação de quanto cada um gastou com doces e sorvete

Fonte: arquivos da coordenadora Magna

No mesmo encontro, a professora realizou a Tarefa 40 (Quadro 13), que tem o potencial para mobilizar o trabalho com funções, variáveis e padrões, partindo de problemas aritméticos de resposta única.

Quadro 13 – Tarefa 40 entregue às professoras.

Tarefa 40
Linete quer poupar dinheiro para ir a um parque de diversões. Ela tinha R$ 5,00 em seu cofrinho. Então, começou a entregar jornais e ganhou R$ 3,00 por dia. Cada dia, ela colocava os R$ 3,00 no seu cofrinho. Quantos reais ela vai ter, no total, no final de um dia? ____________ No final de dois dias? ____ No final de três dias? ____ No final de 10 dias? ____ Explique como você calculou o montante no final de 10 dias. Quanto dinheiro terá Linete após 100 dias da entrega de jornais, se ela não gastar dinheiro algum? Explique o que fez para encontrar a resposta. Como você descobriria o montante total do dinheiro de Linete para um número qualquer de dias? Use números, letras ou palavras para explicar.

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Nas primeiras questões apresentadas nessa tarefa (Figura 17) a professora constrói expressões numéricas e ao resolvê-las recorre a adições de parcelas iguais e, no último item, explora o conceito da multiplicação de números inteiros, como uma representação resumida de uma adição de parcelas iguais. Manifesta o tipo de pensamento algébrico referente à *Aritmética Generalizada*, ao *explorar a estrutura da operação de multiplicação*.

Figura 17 - Registro escrito produzido por Melissa para Tarefa 40.

Linete quer poupar dinheiro para ir a um parque de diversões. Ela tinha R$ 5,00 em seu cofrinho. Ela então começou a entregar jornais e ganhou R$ 3,00 por dia. Cada dia ela colocava os R$ 3,00 no seu cofrinho.

Quantos reais ela vai ter, no total, no final de um dia? R$ 8,00
No final de dois dias? 5+3+3 = R$ 11,00
No final de três dias? 5+3+3+3 = R$ 14,00
No final de 10 dias? 5+3x10 = R$ 35,00

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

No registro produzido pela professora no quarto item da tarefa (Figura 18), observamos que ela percebe a regularidade e formula uma conjectura expressando-a por meio de palavras, dando indícios de *Pensamento Funcional*, pois estabelece uma regra que determina o montante gasto em determinado intervalo de tempo (em dias) a partir da amplitude desse intervalo, criando assim uma relação funcional.

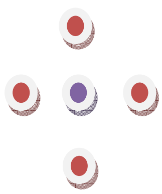
Figura 18 - Registro escrito produzido por Melissa para Tarefa 40.

Como você descobriria o montante total do dinheiro de Linete para um número qualquer de dias? Use números, letras ou palavras para explicar.

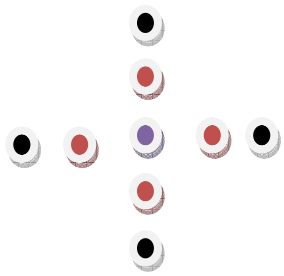
Multiplicaria a quantia de cada dia pelo total de dias trabalhados, então adicionaria a ~~qu~~ quantia inicial.

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

No final do encontro do dia 13/05/2011, Magna trabalhou com slides que representavam vários padrões referentes às Tarefas 45 e 46. Um deles aumentava o número de pontos na tela do computador da seguinte forma: ao primeiro toque na tecla "enter" aparecia um sinal representando um ponto, ao segundo toque apareciam mais quatro pontos, na seguinte disposição:



Ao terceiro toque, tínhamos:



No encontro seguinte, para retomar a discussão sobre as Tarefas 45 e 46, a coordenadora apresentou novamente os slides com os pontos, de forma que as professoras contassem os pontos da tela a cada toque:

1 toque - 1 ponto

2 toques - 5 pontos

3 toques - 9 pontos

[...]

10 toques – 37 pontos

Magna:	Se eu não souber quantos pontos terei ao nono toque, como vou descobrir a quantidade de pontos no décimo toque?
Bruna:	Tira 1 de 10, aí fica 9 e depois multiplica por quatro e acrescenta 1. Para o décimo toque, $9 \times 4 + 1 = 37$.
Magna:	Puxa! Muito bem! E se fosse 100 toques?
Professoras:	$99 \times 4 + 1$.
Magna:	E se for 522 toques, Melissa?
Melissa:	Fica $521 \times 4 + 1$.
Magna:	Melissa, e se for para n toques?
Melissa:	Ah, eu não sei. Vou por números.

Podemos observar que no registro escrito, na tentativa de resolver a Tarefa 45 (Figura 19), e no diálogo descrito acima a professora recorre, novamente, a números. Esse modelo de pensamento e resposta denotam, segundo Booth (1995, p.115, apud FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005),“[...] uma dificuldade típica de quem ainda não conseguiu se libertar do modo aritmético de pensar e tratar as operações.”

Figura 19 - Registro escrito produzido por Melissa para Tarefa 45.

Tabela de Padrões

tabela para cada padrão	A	B	C
1	1	1	3
2	5	4	7
3	9	7	11
4	13	10	15
5	17	13	19
6	21	16	23
7	25	19	27
8	29	22	31
9	33	25	35
10	37	28	39
n	57	43	59

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Dando continuidade a discussão sobre a mesma tarefa, Magna registra no quadro expressões que representam o número de pontos para cada quantidade de toque, até chegar em n toques, escrevendo: $4(n-1)+1$ pontos. Além disso, verificou juntamente com as professoras, se a regra funcionava, registrando no quadro negro:

Para o primeiro toque:

$$4(1-1)+1=$$
$$=4\times 0+1=$$
$$=0+1=1$$

Para o segundo toque:

$$4(2-1)+1=$$
$$=4\times 1+1=$$
$$=4+1=5$$

Após a verificação da regra estabelecida para representar o número de toques, Magna completa:

Magna: Esta regra funciona para todos os toques, mas só serve para essa atividade. Isso se chama padrão, uma regra.

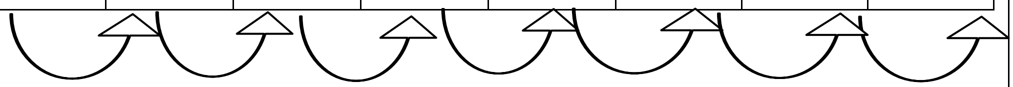
Na sequência, as professoras receberam a Tarefa 47 (Quadro 14) para que lessem e tentassem entendê-la. Após alguns instantes, a professora Melissa se prontificou em fazer a leitura em voz alta.

Quadro 14 – Tarefa 47 entregue às professoras.

Tarefa 47

O primeiro padrão

Dia	0	1	2	3	4			
Reais: cada ponto representa um real	● ●	○ ○ ○ ● ●	○ ○ ○ ○ ○ ○ ● ●	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ● ●				
Quantidade de reais	2	5						



diferença + 3

O que você faz para mudar da quantia de um dia para a quantia do outro dia?

O que você faz para obter o número de reais em cada dia?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 910 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Após a leitura, Magna perguntou:

Magna: O que são as bolinhas pretas?
Professoras: É o valor que o menino já tinha.
Magna: E as brancas?
Professoras: É o que ele vai ganhar.
Bruna: Professora, na pergunta o que você faz para obter a quantidade de reais a cada dia, tenho que desenhar?
Magna: Vocês têm que escrever a regra. Passou um dia, ele ganhou 1, 3, 5,..., (quanto?) e depois quanto ele vai ganhar? Qual a relação desses números?

Após aproximadamente 15 minutos, teve início uma discussão coletiva da resolução da Tarefa 47.

Magna: No dia 0 ele tinha 2 reais, no dia 1 ele tinha 5 reais, no dia 2 ele tinha 8 reais. O que está acontecendo de um dia para o outro?
Professoras: Está aumentando.
Magna: E como fazemos para obter o número de reais em cada dia?
Melissa: Multiplica por 3 o dia e acrescenta dois.

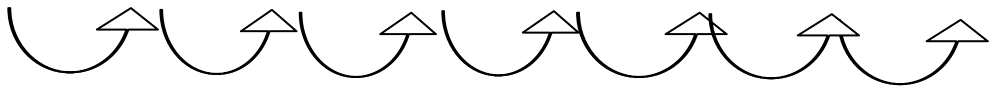
Em seguida, as professoras fizeram a Tarefa 48 (Quadro 15) e então houve uma conversa sobre o padrão dessa tarefa.

Quadro 15 - Tarefa 48 entregue às professoras.

Tarefa 48

O segundo padrão

Dia	0	1	2	3	4			
Reais: cada ponto representa um real	Zero reais	●	○ ○ ● ○	○ ○ ○ ○ ○ ○ ● ○ ○				
Quantidade de reais	0	1						



Diferença + 1

O que você faz para mudar da quantia de um dia para a quantia do outro dia?

Na reta numerada abaixo, mostre a quantidade total de reais de cada dia. Esse padrão de salto é como os padrões que vimos antes?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 910 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Magna: Clarice, o que está acontecendo?
Clarice: No dia 0, tinha 0; no dia 1, tinha 1; no dia 2, tinha 4; e assim por diante. Do dia 0 para o dia 1, aumenta 1, depois aumenta 3, depois aumenta 5.
Magna: Bruna, e agora quanto vai aumentar?
Bruna: 6.
Magna: Vamos verificar 1, 3, 5, quem vem depois?
Bruna: 7, 9,...
Magna: E depois Bruna?
Bruna: 11, 13, 15, ...
Magna: Qual é o próximo então? Se olharmos este quadrado (apontando para a folha da Tarefa 48), este é um quadrado de 1×1, o outro de 2×2, o outro de 3×3, e assim por diante.
Melissa: Então vai ficar $n \times n$.

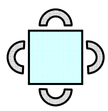
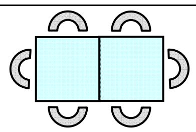
Walle (2009) destaca que o trabalho com sequências proporciona não apenas a capacidade de expandir padrões, mas também a capacidade de estabelecer uma generalização. As Tarefas 47 e 48 apresentam padrões geométricos que descrevem relações funcionais. Nas discussões referentes a cada uma das tarefas, a professora Melissa faz conjecturas sobre os padrões que definem as sequências das quantias em reais obtidas a cada dia, criando uma regra que permite calcular o montante em função do número de dias.

Em outro encontro do grupo de estudos foi proposta a Tarefa 62 (Quadro 16) que tem o potencial para mobilizar o *Pensamento Funcional*. E ao criar a *relação funcional* e usá-la para observar, descobrir ou predizer algo a respeito da situação discutida nessa tarefa, é possível integrar também aspectos do pensamento algébrico conhecido como *Modelagem Matemática.*

Quadro 16 - Tarefa 62 entregue às professoras.

Tarefa 62

Em um restaurante, mesas quadradas estão sempre dispostas juntas em uma única fila. Descubra o número máximo de pessoas que podem sentar-se.

Mesas de Jantar	Mostrar como	Número de pessoas
1		4
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Cada vez que adicionamos outra mesa, quantas novas pessoas podem se juntar?
Se eu te contar o número de mesas de jantar alinhadas, como você pode descobrir o número máximo de pessoas que podem sentar-se?

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

No registro escrito da professora apresentado na Figura 20, observamos que ela observa o padrão e constrói uma expressão numérica para descrever a situação mencionada, explicitando a estrutura matemática presente.

Figura 20 - Registro escrito produzido por Melissa para Tarefa 62.

3	$2 \times 3 + 2$	8

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Na linha de três mesas de jantar, a professora constrói a expressão $2 \times 3 + 2$. Em um primeiro momento, inferimos que o intuito foi descrever o fato de que haverá duas pessoas sentadas em cada mesa (lateral), num total de três mesas, mais duas pessoas nas pontas.

No entanto, na linha de quatro mesas (Figura 21), a professora repete o termo 2×3, ou seja, ela fixa esse termo. Logo, o significado atribuído não é da forma que inferimos a partir do registro anterior, em que sugerimos que variasse de acordo com o número de mesas.

Figura 21 - Registro escrito produzido por Melissa para Tarefa 62.

4	$2 \times 3 + 4$	10

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

No verso da folha, encontramos um registro escrito (Figura 22) que evidencia o significado atribuído pela professora ao termo 2×3.

Figura 22 - Registro escrito produzido por Melissa para Tarefa 62.

2×3 = 2 mesas das pontas. 3 = nº. de pessoas.

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Note que, 2×3 refere-se ao número de lugares das duas mesas das pontas, em que apenas um lugar de cada mesa não poderá ser utilizado, restando três lugares em cada mesa. E o 4, no caso da linha quatro, representa 2 lugares para cada mesa que fica entre as das pontas.

A cada expressão construída (Figura 23), podemos inferir que ela observa a regularidade da segunda parcela da soma, que vai aumentando em progressão aritmética de razão 2, porque a cada mesa que se acrescenta temos 2 lugares a mais.

Figura 23 - Registro escrito produzido por Melissa para Tarefa 62.

3	2x3 + 2	8
4	2x3 + 4	10
5	2x3 + 6	12
6	2x3 + 8	14
7	2x3 + 10	16

Cada vez que adicionamos outra mesa, quantas novas pessoas podem se juntar?

Mais duas pessoas.

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

A última pergunta da tarefa (Figura 24) apresenta uma maneira de descobrir o número máximo de pessoas que podem sentar-se em função do número de mesas alinhadas utilizando uma expressão algébrica.

Figura 24 - Registro escrito produzido por Melissa para Tarefa 62.

[No verso desta folha]: Se eu te contar o número de mesas de jantar alinhadas, como você pode descobrir o número máximo de pessoas que podem sentar-se?

$2 \times 3 + (m - 2) \times 2 = p$?

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

A professora evidencia a regularidade observada quando descreve cada termo no registro apresentado na Figura 25:

Figura 25 - Registro escrito produzido por Melissa para Tarefa 62.

$2 \times 3 + (m - 2) \times 2 = p$

2×3 = 2 mesas das pontas. 3 = nº. de pessoas.

+ = por que vou, sempre adicioná-las às novas me-
sas.

$(m - 2)$: nº mesas das pontas. ~~a cada nova mesa (m=4) subtrai-se 2 (pessoas)~~

$\times 2$ = é a regularidade, sempre aumenta 2.

Fonte: arquivos da coordenadora Magna.

Note que a variável m corresponde ao número de mesas e a expressão $m - 2$ representa o número de mesas menos as mesas das pontas. O termo $(m - 2) \times 2$ refere-se ao número de lugares correspondentes às mesas dispostas entre as mesas das pontas, ao qual será adicionado ao termo fixo 2×3 (número de lugares das mesas das pontas).

Melissa identifica a lei de formação da sequência do número de pessoas que podem sentar-se às mesas a partir das expressões numéricas construídas, que permitiram compreender a razão do número de pessoas entre termos, auxiliando a estabelecer a relação entre o número de mesas alinhadas e o número de pessoas que podem sentar-se. É possível inferir também que ela concebe a igualdade como símbolo funcional e operacional sintático, uma vez que utiliza a igualdade para indicar uma dependência causal entre as variáveis e o resultado, ou seja, o número de pessoas.

No encontro do dia 04/11/11 as professoras resolveram o último bloco de tarefas da *Early Algebra* de acordo com o cronograma estabelecido. Em uma das tarefas, nomeadamente a Tarefa 105, havia a informação de que Karen e Jair colecionavam figurinhas de animais e Jair tinha a metade da quantidade de figurinhas de Karen, e com base nessa informação havia igualdades para serem identificadas como verdadeiras ou falsas. Na discussão do grupo sobre essa tarefa, destacamos uma afirmação que consideramos muito significativa e que revela o desenvolvimento do pensamento algébrico da professora Melissa dentro do processo de formação continuada.

Melissa: Quando eu fui lendo a informação do problema lá em cima eu já fui escrevendo K = 2J.

A professora evidencia, nessa afirmação, apropriação da linguagem simbólica, bem como ao longo de todo o processo de formação continuada. Esse fato pode ser observado no decorrer da análise apresentada nessa seção, que nos permite afirmar que o processo de formação promoveu o desenvolvimento do pensamento algébrico da professora investigada.

A produção escrita da professora e as suas participações nas discussões sobre as tarefas propostas apontam evidências da evolução de seu pensamento algébrico. De acordo com Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), o desenvolvimento da linguagem simbólica potencializa o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico, Van Dooren et al. (2003 apud CHAPMAN; PONTE, 2008), sugerem, baseados em sua investigação do conhecimento de Aritmética e Álgebra de professores, que o pensamento algébrico seja tratado explicitamente nos cursos de formação de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, com a preocupação de que esses professores sejam capacitados para preparar seus estudantes para a transição da Aritmética para a Álgebra. Acreditamos que as ações mobilizadas no grupo de estudos em formação continuada, colaboraram com o desenvolvimento profissional da professora investigada, refletindo na qualidade do processo de ensino.

4.3 ASPECTOS DA PRÁTICA PROFISSIONAL REVELADOS PELA PROFESSORA

Nesta seção, apresentamos episódios ocorridos durante o processo de formação continuada, em que a professora Melissa revela aspectos de sua prática profissional ao narrar episódios vividos por ela em sala de aula. Segundo Passos e Galvão (2011), o ato de escrever narrativas ou narrar episódios de suas aulas revela aprendizagens da docência muito significativas para os professores.

No dia 03 de junho de 2011, foi realizada uma oficina na qual Magna propôs um jogo fazendo uso do Material Dourado. As professoras deveriam lançar um dado e marcar os pontos com as peças do material sendo que, ao acumular 10 peças do mesmo tipo, deveria trocar por outra peça que tivesse número equivalente de pontos.

A participante que acumulasse o equivalente a uma placa, ou seja, chegasse a 100 pontos primeiro, venceria. A coordenadora concluiu que é preciso estabelecer regras com as crianças e estipular que elas cheguem até a centena enfatizando as trocas efetuadas. Na sequência as professoras realizaram uma tarefa, na qual deveriam identificar a relação existente entre as peças do material dourado, encaminhada da seguinte forma:

Magna: Agora vamos analisar que relação existe entre as peças do material dourado. Veja, uma barra de dezena e uma placa de centena: podemos dizer que a placa é maior que a barra, a placa é composta por dez barrinhas.

Então, foi solicitado às professoras que formassem grupos, discutissem e escrevessem no quadro negro as relações que encontraram:

- 1º grupo - Aletéia, Clarice e Bruna:

  1 cubinho vale 1 unidade juntando 10 cubinhos será trocado por 1 barrinha que vale 1 dezena, isto é $10 \times 1 = 10$. Juntando 10 barrinhas de 1 dezena equivale a 1 placa de 10 dezenas isto é: $10 \times 10 = 100$. Juntando 10 placas de 100 unidades equivale a um cubo de 1000 unidades $10 \times 100 = 1000$.

- 2º grupo – Aline, Flávia e Luana

  Relações existentes no Material Dourado:
  - cubinho/barra: o cubinho é 10 vezes menor que a barrinha;
  - barra/placa: a barra é representa uma parte da placa;
  - cubinho/placa: a placa é 100 vezes maior que o cubinho;
  - cubo/placa/barra: cubo é 1000 vezes maior que o cubinho;
  - o cubo é 10 vezes maior que a placa;
  - o cubo é 100 vezes maior que a barrinha.

- 3º grupo - Nataly, Melissa e Lígia.
  - a barra da dezena contém 10 cubinhos.
  - o cubinho é menor que a barra da dezena.
  - o cubinho equivale a décima parte da barra da dezena.
  - um cubinho é a centésima parte da placa da centena.
  - a barra da dezena equivale a décima parte da placa da centena.
  - a placa da centena é maior que a barra da dezena e esta é maior que o cubinho.
  - a placa da centena contém 10 barras da dezena e 100 cubinhos.

Magna leu e discutiu com as professoras todas as relações entre as peças do material dourado descritas por elas no quadro negro. Em meio à discussão, Melissa contou que trabalhou com seus alunos as relações que se pode estabelecer entre as peças do material dourado, construindo o material planificado na carteira utilizando giz, pela falta do material. Desenvolveu com os alunos um trabalho de agrupamentos e reagrupamentos, de forma gradativa, iniciando pelas unidades (quadradinhos), passando para as dezenas (retângulos 1×10) e depois pelas centenas (quadrados 10×10). Destacou que esse trabalho facilitou a compreensão dos alunos sobre o significado desses agrupamentos no Sistema de Numeração Decimal, o que disse considerar fundamental para a compreensão das técnicas operatórias das operações fundamentais. Destacou ainda que, para ela, o uso do material dourado facilita a compreensão dos alunos sobre essas estruturas, pois permite a visualização das relações numéricas abstratas.

Essa narrativa sobre a experiência da professora Melissa com o material dourado em sala de aula revela sua visão sobre as contribuições da compreensão do Sistema de Numeração Decimal para dar significado aos algoritmos das quatro operações fundamentais. Seu conhecimento e sua visão dos aspectos específicos do saber que ensina, evidenciam sua concepção sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática: dar ênfase à argumentação e demonstração da estrutura do conteúdo matemático.

Melissa revela ainda sua intenção e objetivos com a tarefa proposta aos alunos, demonstrando que sua preocupação ao planejar, organizar e encaminhar seu trabalho em sala de aula refere-se ao modo como os alunos aprendem, e se mobiliza na busca por estratégias de ensino que tenham o potencial para promover o aprendizado. Inferimos que os aspectos da prática letiva revelados nesse episódio são elementos decisivos no desenvolvimento de sua atividade profissional, pois, para Ponte e Oliveira (2002, p. 9),

> [...] na verdade, conhecer os seus alunos como pessoas, os seus interesses, os seus gostos, a sua forma habitual de reagir, os seus valores, as suas referências culturais, e conhecer o modo como eles aprendem são condições decisivas para o êxito da atividade do professor.

Nesse mesmo encontro outra tarefa foi proposta: representar quantidades com o material dourado.

Magna: 16 pode ser representado por 1 barra + 6 cubinhos, pois uma barra é equivalente a 10 cubinhos, ou seja, 10 cubinhos + 6 cubinhos = 16 cubinhos. Essa é a melhor forma de se fazer ou existe outra?
Podemos ainda, pegar 16 cubinhos, questionar os alunos se nós podemos fazer alguma troca.

Então as professoras sugeriram:

$$16 = 5 + 5 + 6 = 5 + 5 + 5 + 1 = 8 + 8 = 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 4$$

Magna aproveitou para destacar a importância no trabalho com a decomposição de um número em uma adição ou multiplicação para o desenvolvimento do cálculo mental.

Magna: Por exemplo, 185 + 25. 25 é 15 + 10. 185 para chegar em 200 faltam 15, ou seja, juntando 185 com 15 eu tenho 200, 200 + 10 eu tenho 210, assim fazemos o cálculo mental.

Retomando a decomposição do número 16, destaca:

Magna: 10 + 6 = 9 + 7 = 8 + 8 = 7 + 9 = 6 + 10 = 5 + 11 diminui [um valor] do algarismo da esquerda e aumenta [a mesma quantidade] no da direita e em todas as relações tenho 16. Chamamos de família do 16. Isto é pré-álgebra. [...] são representações da [mesma] quantidade.

Após o trabalho de reconhecimento da equivalência entre quantidades, foi dado início ao trabalho com as operações fundamentais. Magna pediu para que cada equipe preparasse um cartaz, o qual chamou de ábaco de papel, dividindo uma folha de cartolina em quatro partes iguais. O cartaz foi representado no quadro negro.

M	C	D	U

M = milhares, C = centenas, D = dezenas e U = unidades

Foram realizadas operações com o uso do ábaco de papel, em que as professoras deveriam utilizar o material dourado para representar as quantidades.

No encontro do dia 01 de julho de 2011, foi retomado o trabalho com o ábaco de papel e discutida sua importância na compreensão das ordens do número (unidade, dezena e centena). A prática com material manipulável auxilia na construção do conceito das operações numéricas, deixando clara as trocas de 10 unidades para 1 dezena, de 10 dezenas para 1 centena. Magna propôs algumas operações para serem realizadas com o uso do material: 67+123; 492+16+103; 249+5+89.

Percebemos a empolgação das professoras ao realizarem as operações com material dourado, as operações simples geravam polêmicas com relação às trocas que deveriam ser realizadas. Magna destacou que essa atividade, quando aplicada em sala de aula, deve ser acompanhada da resolução dessas operações no quadro, para que o aluno compreenda o algoritmo com papel e lápis. Melissa completa:

Melissa: No ensino tradicional, as crianças acabam "dominando" os algoritmos a partir de treinos cansativos, mas sem conseguirem compreender o que fazem. O uso desses materiais possibilita aos alunos entender porque esses algoritmos funcionam, uma vez que devem ser reunidas unidade com unidade, dezena com dezena, etc.

A professora Melissa faz uma reflexão sobre a prática letiva tradicional, destacando a importância do uso de materiais que colaborem com o processo de ensino e que tenham o potencial para promover a aprendizagem dos alunos. Segundo Canavarro (2004, p.49-50)

> [...] o professor precisa atender às indicações sobre a natureza das tarefas, fundamentais para a imagem que os alunos vão construir da disciplina, e às sugestões metodológicas, decisivas para o desenvolvimento de muitas das capacidades apontadas nos objetivos.

Na sequência, relata sobre um trabalho realizado com seus alunos fazendo uso do cartaz valor-lugar para trabalhar as operações de adição e subtração, em que ao invés do material dourado ela utilizou canudinhos cujas cores diferenciavam unidades, dezenas e centenas. Melissa faz a opção de trabalhar com esse material por julgar ser um método de ensino adequado para esse conteúdo, revelando sua preocupação com a compreensão dos alunos sobre o conteúdo matemático e com o significado atribuído por eles às técnicas de resolução, e demonstrando conhecer as grandes finalidades e objetivos do conteúdo a ensinar e os materiais a utilizar. Ponte e Oliveira (2002) afirmam que esses aspectos tem um papel fundamental na tomada de decisões sobre a forma de orientar o processo de ensino.

No mesmo encontro, foi trabalhada a operação de subtração fazendo o uso do cartaz-valor-lugar. Magna apresentou três problemas para discutir diferentes ideias de subtração:

- Magna tem 9 alunos e Melissa 42 alunos. Quantos alunos Melissa tem a mais que Magna? (problema de comparação)
- Melissa tem 42 alunos, 9 saíram para ir ao banheiro. Quantos alunos ficaram em sala? (problema de retirar)
- Melissa tem 9 alunos e quer ter 42. Quantos alunos faltam para Melissa? (problema de completar)

A professora Melissa apresentou um problema que trabalhou com seus alunos: “Uma menina andou no total 12450m em 3 etapas. Na primeira etapa, ela andou 4750m, na segunda etapa 4750m. Quanto andou na terceira etapa?”. Disse que trabalhou por três dias com esse problema para que todos compreendessem a ideia de completar, pois considera que os professores não podem pensar pelos alunos e nem condicioná-los a utilizar todos os números do problema, mas sim conduzi-los a pensar e construir suas próprias resoluções.

A narrativa descrita acima expressa uma experiência vivida pela professora Melissa que revela o modo como organiza a aula e interage com os alunos em uma situação de exploração do conteúdo matemático. Dedicou três dias de trabalho com o problema apresentado, por considerar importante a compreensão dos alunos sobre o contexto do problema e não apenas sobre a técnica operatória utilizada para resolvê-lo. Ela demonstra saber quais os assuntos a que deve dedicar mais tempo, sobre as prioridades a considerar a cada momento, sobre a forma de orientar o processo de ensino, na busca por conduzir efetivamente as situações de aprendizagem. Segundo Canavarro (2004, p. 38):

> [...] os alunos adquirem visões acerca da natureza da Matemática através da forma como os professores estruturam as aulas e através das tarefas que lhes propõem e, mais ainda, através do modo como conduzem o discurso na sala de aula. Responder aos alunos na base do certo ou errado ou, pelo contrário, estimular o debate e a procura de argumentação matemática válida tem forçosamente implicações na forma como os alunos veem a disciplina e o papel que nela podem ter.

Consideramos que a professora revelou aspectos de sua prática letiva que inspiram os alunos a adquirirem visões acerca da natureza da Matemática e elaborarem as suas próprias formas de pensar. Após o trabalho com as operações de adição e subtração, Magna iniciou o trabalho com a divisão.

Magna: O material dourado é perfeito para ensinar soma e subtração, pois é possível fazer uma associação com a forma convencional. Agora eu quero que Flávia fique de pé e explique e registre a divisão de 135 por 3 no quadro.

Flávia: O número 135 é uma centena, três dezenas e cinco unidades. Vou dizer aos alunos para pegar o um e tentar dividir por três, como não é possível eu preciso pegar o 13.

Magna: Mas aí vem a confusão que os alunos fazem: “Mas você não disse que o 1 correspondia uma centena? Por que não dá pra dividir?”

Magna explicou que isso pode ser justificado com o uso do material dourado, pois uma placa corresponde a cem unidades, mas não é possível dividir uma placa inteira. Assim, devemos trocar uma placa (centena) por 10 barrinhas (dezenas) para juntar com as 3 barrinhas (dezenas) que temos, para então dividir em 3 partes. Com essa ideia, prosseguiu com a divisão, realizando as trocas necessárias, associando ao algoritmo convencional. A professora Aline conclui:

Aline: Para trabalhar a divisão com o material, o ideal é que os alunos e nós tenhamos muito domínio do material dourado, senão vai confundir tudo...

Aproveitando a reflexão da professora Aline, Melissa discute como administrar o trabalho da divisão com o material dourado de acordo com os conhecimentos dos alunos.

Melissa: Realmente, com o terceiro ano jamais a gente pode ensinar a divisão dessa forma, eles vão confundir tudo... No quarto ano, a gente pode usar e começar com números pequenos.

Magna: Sim. Eu concordo com vocês que os alunos devem ter o domínio do material. Mas acho que não devem deixar de trabalhar com esse material, senão o algoritmo convencional não terá sentido. Será uma coisa mecânica em que o aluno não entende o que está fazendo. Se você trabalhar a divisão só olhando na tabuada, eles não sabem nem o que estão fazendo.

Melissa: Tem alunos que resolvem "contas grandes", mas não escrevem nada no quociente. Fica tudo no rascunho.

No diálogo apresentado, identificamos que a professora Melissa tem compreensão sobre o grau de complexidade envolvido no algoritmo da divisão. Esse aspecto da prática letiva revelado pela professora é consistente com Canavarro (2004, p.44), que considera ser necessário ao professor

> [...] ter uma compreensão do que torna fácil ou difícil a aprendizagem de tópicos específicos e das concepções que os alunos de diferentes idades e com diferentes origens sociais possuem acerca desses tópicos, sublinhando assim a especificidade e diversidade dos conhecimentos sobre a aprendizagem.

Em determinado dia, Magna esteve na sala de aula da professora Melissa e, a pedido da professora, trabalhou a operação de divisão com os alunos. Magna disse que ficou pensando antes sobre introdução dessa aula, então decidiu iniciar perguntando e pedindo para que os alunos registrassem o que é dividir. Justificou esse questionamento pelo fato de achar muito interessante o que eles escrevem, pois atribuem diferentes significados, uma vez que foram alunos de outros professores que já falaram de divisão para eles. Seguem algumas respostas:

- "Dividir é dar a mesma quantidade para cada pessoa."
- "Dividir é separar em números pares."
- "Dividir é distribuir igualmente."
- "Quando tenho duas balas dou uma bala pra um amigo e fico com uma bala."
- "Repartir."
- "Dividir números e outras coisas também, objetos e até alimentos."
- "Dividir é dar a mesma quantidade para a outra pessoa."

Ao relatar esse episódio no encontro do grupo, Magna discute com as professoras:

Magna: Não tá nada errado... É o que eles pensam sobre a divisão. Olha uma perguntinha que uma menininha me fez: "Professora, todos os problemas são de dividir?"
Por que ela me perguntou isso? Bem, eles pensam: "Hoje é aula de divisão, então todos os problemas teriam que ser de divisão". Quando eu estava preparando eu pensei "não posso dar todos os problemas de divisão", mas a tendência era essa. Se me passou pela cabeça a tendência ainda está comigo. A minha professora fazia isso! A primeira coisa que a gente pensa é "vou dar uma aula de divisão então vou escolher problemas de divisão", só... Eu pensei "se eu der todos os problemas de divisão, que graça que tem?" Então eu falei para menininha que não eram...
O primeiro problema era assim: Quatro garrafas de refrigerante custam 12 reais, quanto custa cada garrafa?
Algumas crianças, mais ou menos três, fizeram:
3 x 4 = 12 então cada garrafa custa 3 reais.
Esse é um problema de divisão que a criança transformou em multiplicação, e tá errado? Não. Ele pensou, se eu tenho 4 garrafas, quanto tem que custar cada uma para dar 12?
3 + 3+ 3+ 3=12, então 3x4=12 então cada garrafa custa 3 reais.
Isso não tá incorporado na continha de divisão? Ele expressou essa regra. Percebi que os alunos da Melissa já falam "troca" ao trabalhar com o material dourado.

Melissa: Eu comecei a trabalhar com o material dourado na adição e na subtração já, porque eles tinham dificuldade de enxergar no algoritmo da subtração o fato de ter que emprestar. Mas trabalhar com os pequenos, com materiais diferentes, envolve uma série de fatores, o interesse deles por outras coisas, que vem a toda hora, porque quando eles pegam o material dourado, por exemplo, eles querem construir prédios, fazer túnel...., então primeiro a gente tem que deixar eles brincarem.

Conforme os relatos apresentados anteriormente, a professora Melissa utiliza o material dourado em suas aulas ao trabalhar com o sistema de numeração decimal e com as operações de adição e subtração. Pediu que Magna trabalhasse a divisão fazendo o uso desse material manipulável para que tivesse a oportunidade de compreender e avaliar como se daria esse processo, ao participar da aula como ouvinte. Melissa revela conhecer a forma habitual dos alunos reagirem e o modo de envolver e organizar o trabalho com os alunos em tarefas que envolvem recursos diferenciados.

No encontro do dia 15 de março de 2012, teve início uma nova fase do projeto, em que as professoras se envolveram na ação de elaborar, escolher e/ou adaptar tarefas para serem aplicadas aos alunos com os seguintes objetivos traçados pelo grupo de estudos:

- desenvolver tarefas que despertem o gosto por estudar e aprender Matemática.
- estimular o pensamento algébrico.
- viabilizar o trabalho com a Álgebra nos anos iniciais.
- reconhecer como os alunos expressam o pensamento algébrico em tarefas adaptadas da *Early Algebra*.
- desenvolver atividades que possibilitem enfrentar as dificuldades de ensino e de aprendizagem da Matemática.
- habituar-se a analisar resultados apresentados para compreender como os alunos pensam.
- melhorar efetivamente o resultado nas avaliações em massa: Provinha e Prova Brasil.

Magna apresentou, inicialmente, os objetivos da Lição 1 (Anexo 1) da *Early Algebra*. Essa lição é composta por três tarefas, porém nesse encontro foram discutidas apenas duas nesse encontro.

A Tarefa 2 da primeira lição trazia sinalizações que podem ser encontradas em rodoviárias ou aeroportos. Neste caso, os itens tinham respostas únicas, sendo que os dois últimos sinais foram considerados pelos autores das tarefas da *Early Algebra* com probabilidade de não serem adivinhados por tratarem-se de símbolos incomuns cuja aparência não dá dicas do que está sendo representado. A professora Melissa deu o exemplo da placa de trânsito que sinaliza “dê a preferência” como um símbolo incomum, relatou que descobriu o que significava essa placa observando as pessoas dirigindo, que sempre paravam quando se deparavam com ela.

Melissa: A maioria das coisas que as pessoas aprendem, [muitas vezes] aprendem observando as outras pessoas... No caso do símbolo da *Coca-Cola*, a criança identifica sem saber ler que ali está escrito coca-cola. Ela sabe quando apresentamos a palavra Coca-cola para ela, ali no alfabeto não tem aquela letra da Coca-cola da latinha... Aí dá um nó na cabeça...

Consideramos significativa a observação feita por Melissa, pois revela validar as aprendizagens da vida cotidiana e as dificuldades em lidar com as imagens que os alunos têm de elementos culturalmente enraizados.

> Também é importante que os professores estejam conscientes que saber Matemática não pode reduzir-se a uma forma de conhecimento. Além disso, os professores devem estar conscientes que a cultura da sala de aula é inseparável da aprendizagem da Matemática uma vez que a aprendizagem ocorre sempre num contexto sócio-cultural específico (CANAVARRO, 2004, p. 44).

No mesmo encontro, foi discutido sobre os sons, destacando que os sons trazem significado, que podem ser interpretados, que são símbolos de uma forma diferente. Magna fala sobre o alfabeto, que é um sistema de símbolos, em que várias letras compõem as palavras que queremos, mas que em determinadas palavras temos sons diferentes para a mesma letra, ou seja, trata-se de uma ambiguidade. Em meio à discussão, a professora Melissa faz uma analogia do assunto em discussão com sua experiência em sala de aula, revelando reconhecer muito bem as condições em que uma tarefa se transforma em atividade.

Melissa: Na minha turma eles questionaram sobre o tijolo e tijolos, o som muda e não tem acento... Eles querem o acento... Eu não consigo tirar os dicionários da sala do quarto ano, porque eles têm a prática de usar o dicionário dos anos anteriores... Se eles não sabem alguma palavra dizem: “Eu não sei, mas tem alguém aqui que sabe, e correm pegar o dicionário.” E dá para perceber a evolução deles porque agora eles estão aprendendo meio por conta própria mesmo. Vou deixando eles se virarem, antes eles procuravam a palavra ali, agora eles aprenderam o que o “sn” significa, estou fazendo esse trabalho com eles.

Podemos identificar aspectos da prática letiva da professora investigada que vão ao encontro do que Canavarro (2004) aponta como novo papel para o professor: “facilitador” do aprendizado dos alunos e não “transmissor” de conceitos, fatos ou técnicas, julgando necessário que o professor construa materiais e ambientes de trabalho que desafiem e promovam o aprendizado.

Após a discussão sobre os objetivos da Lição 1 (Anexo 1) Magna pediu para que as professoras, em grupos, elaborassem, escolhessem ou adaptassem as mesmas tarefas para os seus alunos. Foi estabelecido que a professora Melissa fizesse dupla com a professora Lígia. Essas tarefas deveriam ser apresentadas no encontro seguinte.

No encontro do dia 29 de março de 2012 a professora Melissa trouxe um plano de aula com uma sequência de tarefas (Anexo 3). Comentou que elaborou tudo sozinha, pois não teve tempo para conversar com a professora Lígia. Foi o segundo grupo a se apresentar.

Melissa: Eu preparei um plano para cinco aulas. Eu vou começar contando a história do "Menino que aprendeu a ver (Ruth Rocha)", e eu gostaria muito de utilizar o data-show para apresentar isso nos slides. [...] Depois de contar essa história eles vão fazer uma incursão pela escola para conhecer os ambientes, no caso meus alunos já conhecem, vou passar com eles questionando: "Aqui é o salão nobre... mas não tem nada na porta que diz ser o salão nobre. Como eu poderia fazer para que uma pessoa de fora soubesse que aqui é o salão nobre?" Daí nós vamos voltar pra sala e discutir isso. Depois eles vão criar símbolos para determinadas situações, e [...] vão participar de um concurso. Eu vou formar os grupos, e eles vão criar símbolos para utilizarmos na escola. Por exemplo, a) [para a] lixeira, [vamos] criar uma plaquinha para deixar na sala; b) para saber que alguém foi ao banheiro e que então tem que esperar a vez; c) [para o] refeitório, etc. Se o símbolo já existir, eles vão criar. Não é para fazer o símbolo que já existe... Porque o quarto ano já tem uma noção do que significam certas placas, então ele não vai copiar, ele vai fazer uma diferente. Eu gostaria de opiniões para eu dosar isso para não ficar muito longo. [...] Eu conheço a minha turma, no dia que eu contar a história, vou andar pela escola, e só vou conversar no máximo cinco minutos com a turma. Aí eu já vou ter que mudar a tarefa, porque eu não vou aplicar tudo num dia só.

Ao descrever a sequência didática de aplicação das tarefas, Melissa apresenta uma proposta de ensino baseada no seu conhecimento de seus alunos, fazendo projeções de sua dimensão curricular, estabelecendo ligações entre o trabalho com símbolos e com outras atividades intelectuais, estimulando a comunicação por meio de símbolos. Nessa ação a professora evidencia aspectos que Ponte (2013, p. 5) considera presentes na atividade de um professor quando ensina Matemática: "Está presente a Matemática escolar, estão presentes objetivos e prioridades curriculares, está presente a visão do aluno e do modo como aprende, bem como um conhecimento de modos de trabalho, recursos e formas de atuação prática do professor".

Após a descrição da professora Melissa, Magna sugere:

Magna: Será que não seria melhor você contar a história no final de tudo?

Melissa: É isso que eu falei, eu aceito sugestões, tenho dúvidas...

Magna: Será que quando a Melissa contar essa história ela não vai entregar o que eles têm que focar para saber aquela coisa? Ou será que ela está apenas fazendo uma provocação para que eles se deem conta de determinada coisa? Melissa eu não estou te dando a resposta, eu estou levantando essas questões para pensarmos juntas.

Melissa: Eu pensei em continuação, o menino andava e olhava e não sabia o que era aquilo, porque os lugares não estavam identificados. O meu objetivo é que eles vejam que na escola os lugares não estão identificados, eles vão criar um símbolo para identificá-los.

Após a apresentação das tarefas de todos os grupos, Magna apresentou os objetivos da Tarefa 3 (Anexo 1), ainda da Lição 1 da *Early Algebra*, que tratava de comparação de quantidades discretas. Em meio à discussão sobre a importância de desenvolver a capacidade de interpretação dos alunos, Melissa narra uma situação vivenciada por ela, pertinente ao contexto da discussão.

Melissa: Falando de interpretação, ontem eu estendi uma aula por causa de uma situação que se repete sempre. Você pergunta uma coisa e eles respondem baseados em outra pergunta, por exemplo, ontem tinha um poema que falava sobre a horta da vó de um menino. Ele fala que a vó faz esterco misturando restos de alimentos, cocô de vaca e de galinha aí eu perguntei COMO ela faz, e eles já colocaram os ingredientes. Eu tenho bastante disso com eles, eu disse: "Eu não estou perguntando o que tem no esterco, eu estou perguntando COMO ela faz?!". E eles insistiam. Aquilo ficou horas para eles entenderem que ela mistura. A palavra é MISTURA. Aí eu coloquei lá COM O QUE e COMO QUE.

É possível observar com base nessa narrativa, e em outras ao longo do capítulo, que a professora Melissa procura desenvolver em seus alunos a capacidade de interpretação e de disposição na resolução de problemas, criando uma cultura de aprendizagem na sala de aula.

No encontro do dia 23 de abril de 2012, as professoras apresentaram as tarefas elaboradas e/ou adaptadas por elas com os objetivos da Tarefa 3 da Lição 1 (Anexo 1) da *Early Algebra*. Melissa considerou que a mesma tarefa poderia ser aplicada aos seus alunos e reproduziu a tarefa fazendo uso de recursos computacionais. Nesse trabalho, Melissa fazia dupla com Lígia, mas novamente elaborou seu plano de aula sozinha, escolhendo uma tarefa para ser aplicada aos alunos da professora Lígia baseada no seu conhecimento sobre o nível de instrução dos alunos.

Melissa: Eu trouxe um monte de tarefas, mas vou ver qual eu vou aplicar. Eu fiz uma igualzinha a Tarefa 3, mas eu que reproduzi. Aprendi a mexer numas coisas lá no computador que eu não sabia mexer. […] E fiz uma outra tarefa, essa aqui eu achei é da Emília Ferreiro e da Ana Teberoski. Tem as fichas e os nomes dentro, elas fizeram as fichas de tamanhos diferentes. Eu deixei todas as fichas com o mesmo tamanho e mudei o tamanho dos nomes. Tem as fichas e tem as perguntas sobre as fichas. Essa aqui já é a tarefa para os alunos da Lígia, [que são do] segundo ano, eles são pequenininhos. As perguntas são: "Qual nome é maior? Por que ele é maior? Qual ficha é maior?" Nesse caso vai gerar dúvida. Eles têm que ter convicção de que as fichas são do mesmo tamanho. Eles vão ter que pintar a ficha que tem mais letras e depois vão ter que juntar as fichas e colocá-las em ordem, do maior para o menor. Devem começar com aquele que tem mais letras...

Magna: Veja que a Melissa tá considerando que as crianças dela podem fazer a mesma tarefa que vocês fizeram.

Em uma conversa com a professora Melissa, questionamos sobre a escolha da Tarefa 3 para ser aplicada aos seus alunos.

Ivnna: Com relação à Tarefa 3 que tinha o objetivo de mobilizar os estudantes a compararem quantidades discretas e trabalhar com a diferença de quantidades, você comentou no grupo que insistiu muito em fazer essa tarefa, porque te deu um pouco de trabalho, já teve de construir essas figuras utilizando um software. Disse que queria reproduzir essa tarefa. Por que elaborar essa tarefa e não apenas escolher outra?

Melissa: Acho que foi pela experiência que eu tive quando resolvi uma tarefa como essa. Porque quando eu estava na escola, nessa fase, eu não tive tarefas assim. Acho que leva as crianças a pensarem mais.

No diálogo, a professora Melissa revela sua concepção sobre a tarefa, que teve origem na sua experiência ao resolvê-la e, a partir de uma reflexão sobre essa experiência, a professora decide que a mesma tarefa (Tarefa 3) seria adequada ao nível de seus alunos, pois considera que tem o potencial para desenvolver a capacidade de interpretação dos alunos na resolução de situações-problemas. Segundo Ponte e Oliveira (2002, p.149), "podemos dizer que o conhecimento do professor – tanto o conhecimento profissional como o senso comum e o saber acadêmico – têm uma dupla origem: (i) a experiência pessoal direta e a reflexão sobre essa experiência e (ii) a transmissão social".

No encontro do dia 21 de junho de 2012, o grupo discutiu os objetivos das tarefas 10 a 14 (Anexo 2). A narrativa sobre a experiência vivenciada pela professora Melissa em sala de aula, apresentada a seguir, trata de um dos assuntos abordados nessa discussão: os números negativos.

Melissa: Eu acho que no quarto ano é possível dar a ideia dos números negativos, porque estou trabalhando com a calculadora com eles. Nesses últimos dias nós estamos treinando situações para trabalhar na lanchonete que eles vão administrar, e aí eu comecei assim: “Olha eu sou cliente - coloquei os preços dos alimentos no quadro - eu quero um cachorro quente um suco e tal coisa...” Aí, eles usam a calculadora digitando os valores, só que eu deixei primeiro eles fazerem sozinhos... Sem nada para anotar para ver o que eles iriam fazer... Como eles iriam se virar... Então, o que eles faziam? Digamos, deu três reais e cinquenta centavos, mas ninguém tinha falado quanto tinha dado. Eu falava “vou pagar com uma cédula de cinco”, então eles apagavam e digitavam cinco reais menos.... Aí eles esqueciam quanto tinha dado... Aí eles se perdiam. Simulei outras situações. Parte deles acertavam e tal. Aí eu falei assim “Mas tem outro jeito de fazer? Eu vou pagar com dez reais”. Eles deixavam o valor e apertavam o menos e o valor que eu tinha dado, então aparecia o número negativo, e aí eu comecei por aí a explicar para eles o conceito dos números negativos. Logo no início quando a gente trabalhou as situações de subtração, alguns levantaram essa questão: tem que tirar, por exemplo, 7 – 9, como é que fica isso? Fica devendo, dá negativo... É uma coisa que você não tem, mas precisa representar, pois já gastou.

A professora Melissa revela aspectos da sua prática que potencializam o processo de ensino e tendem a colaborar com aprendizagem dos alunos. Para Ponte e Oliveira (2002, p.149),

> [...] atuará de modo muito diferente um professor que acha que o grande objetivo do ensino da Matemática é o domínio de técnicas de cálculo ou o professor que procura desenvolver o “poder matemático” dos alunos, como propõe o NCTM (1989), ou seja, a capacidade de explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, de resolver problemas não rotineiros, de comunicar acerca e através da Matemática, de estabelecer ligações entre diferentes ideias matemáticas e com outras atividades intelectuais e, ainda, o desenvolvimento da autoconfiança e de uma disposição para procurar, avaliar e usar informação quantitativa e espacial na resolução de problemas e na tomada de decisões.

Por meio das narrativas de experiências vivenciadas pela professora Melissa ao longo dessa seção, observamos que faz parte de sua prática letiva a busca por desenvolver o “poder matemático” de seus alunos. Na narrativa anterior, em que expôs sua experiência ao trabalhar com os números negativos, ela faz conexões do conteúdo ensinado com a vida cotidiana, para dar significado à aprendizagem e proporcionar o desenvolvimento da autoconfiança dos alunos ao lidar com as situações do cotidiano.

CAPÍTULO 5
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi realizada com a intenção de estudar que conhecimentos são mobilizados por uma professora, que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, no contexto de um grupo de estudos em processo de formação continuada.

A partir da análise da produção escrita da professora investigada, na tentativa de resolver tarefas matemáticas com o potencial para mobilizar o pensamento algébrico e das discussões acerca dessas tarefas, identificamos que tipos de pensamento algébrico foram mobilizados e evidências de seu desenvolvimento ao longo do processo de formação.

A professora Melissa evidenciou aspectos do pensamento algébrico das vertentes: *Aritmética Generalizada*, ao demonstrar ter noção de igualdade relacional interpretando a igualdade como equivalência entre expressões aritméticas, dando indícios de pensamento relacional, e ao explorar a estrutura das operações aritméticas; *Pensamento Funcional*, ao identificar a relação funcional entre grandezas, descrevê-la por meio de linguagem natural e representá-la por meio de uma expressão generalizada, e ao perceber regularidades e formular conjecturas, expressando-as por meio de linguagem natural e linguagem algébrica; e *Modelagem*, ao interpretar algebricamente uma situação- problema por meio de uma função, ao utilizar a expressão generalizada que descreve uma relação funcional para observar, descobrir ou predizer algo a respeito da situação problema.

O processo de formação em que desenvolvemos o presente estudo foi organizado de modo que as participantes envolvidas desenvolvessem sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, e comunicar suas ideias matemáticas enquanto resolvem, interpretam e formulam tarefas matemáticas com o potencial para mobilizar o pensamento algébrico. Essa perspectiva de processo de formação continuada de professores que ensinam Matemática é, sobretudo, um processo de desenvolvimento profissional, e acreditamos que proporcionou um progressivo desenvolvimento de potencialidades da professora investigada e a construção de novos saberes, articulados aos seus interesses, necessidades e seu contexto profissional.

Nos últimos anos, muitos estudos foram realizados sobre o conhecimento, a formação e o desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática, e a prática é reconhecida nesses estudos como uma fonte de conhecimentos. Quando trabalhamos com formação continuada, os professores nem sempre trazem para as discussões aspectos de sua prática, a menos que isso tenha sido provocado pela própria formação. As ações desenvolvidas no contexto do processo de formação, em que participou a professora investigada, provocaram discussões e reflexões que nos permitiram identificar aspectos de sua prática letiva, de modo a caracterizar os conhecimentos mobilizados no desenvolvimento dessas ações (Quadro 17).

Quadro 17 - Conhecimentos mobilizados pela professora Melissa ao longo do processo de formação continuada.

CONHECIMENTOS PROFISSIONAIS: VERTENTES DO CONHECIMENTO DIDÁTICO	CONHECIMENTOS MOBILIZADOS PELA PROFESSORA MELISSA	EPISÓDIOS QUE EVIDENCIARAM ASPECTOS DA PRÁTICA LETIVA
CONHECIMENTO DA MATEMÁTICA	- Demonstrou ter noção de igualdade relacional interpretando a igualdade como equivalência entre expressões aritméticas; - identifica a relação funcional entre grandezas em situações-problema; - representa por meio de uma expressão generalizada a relação funcional entre grandezas; - compreende regularidades e formula conjecturas, expressando-as por meio de linguagem natural e linguagem algébrica.	Resolução e discussão de tarefas matemáticas que têm o potencial para mobilizar o pensamento algébrico, analisadas na seção 4.2.
	- Compreende que o sistema de numeração decimal é fundamental para dar significado aos algoritmos das quatro operações fundamentais.	Narrativa sobre a experiência da professora Melissa com o material dourado em sala de aula no encontro do dia 03/6/2011 (p. 74-75).
	- Relaciona conteúdos a serem ensinados com outras atividades intelectuais.	Apresentação do plano de aula elaborado sobre símbolos, realizada no encontro do dia 29/3/2012 (p. 82 – 83). Narrativa sobre a experiência vivenciada pela professora Melissa em sala de aula, no encontro do dia 21/6/2012 (p. 85 - 86).

CONHECIMENTO DO ALUNO E DOS PROCESSOS DE APRENDIZAGEM	Reconhece estratégias de ensino com o potencial para promover o aprendizado de seus alunos.	Narrativa sobre a experiência da professora Melissa com o material dourado em sala de aula no encontro do dia 03/6/2011 (p. 74 - 75).
	Reconhece que os professores não podem pensar pelos alunos, mas sim conduzi-los a pensar e construir suas próprias resoluções.	Narrativa sobre a experiência da professora Melissa no trabalho com um problema de subtração 01/7/2011 (p. 77-78).
	Reconhece que conhecer os alunos permite organizar tarefas com grau de complexidade adequado a eles.	Diálogo da professora Melissa com a coordenadora Magna no encontro do dia 01/7/2011 (p.79). Discussão da professora Melissa com a coordenadora Magna sobre o trabalho realizado por Magna em sua sala de aula, ocorrida em um dos encontros do grupo de estudos (p. 80) Apresentação das tarefas elaboradas e/ou adaptadas com os objetivos da Tarefa 3 da Lição 1 da *Early Algebra*, realizada no encontro do dia 23/4/2012 (p. 84 - 85).
	Reconhece que a cultura da sala de aula é inseparável da aprendizagem.	Observação da professora Melissa sobre aprendizagens da vida cotidiana feita no encontro do dia 15/3/2012 (p.81- 82).
	Revela conhecer os interesses e a forma habitual dos alunos reagirem diante de situações de aprendizagem.	Discussão da professora Melissa com a coordenadora Magna sobre o trabalho realizado por Magna em sua sala de aula, ocorrida em um dos encontros do grupo de estudos (p. 80) Apresentação do plano de aula elaborado sobre símbolos, realizada no encontro do dia 29/3/2012 (p.82 - 83).
	Valoriza experiências dos alunos e as reconhece como importantes para viabilizar a aprendizagem.	Narrativa sobre a experiência vivenciada pela professora Melissa em sala de aula, no encontro do dia 21/6/2012 (p. 85 - 86).

CONHECIMENTO DO CURRÍCULO	Reconhece que o uso de material manipulável pode colaborar para a compreensão dos algoritmos.	Reflexão da professora Melissa durante o trabalho com o ábaco de papel no encontro do dia 01/7/2011 (p. 76).
	Relaciona conteúdos a serem ensinados com materiais a serem utilizados.	Narrativa sobre a experiência da professora Melissa com o material dourado em sala de aula no encontro do dia 03/6/2011 (p. 74-75). Narrativa sobre a experiência da professora Melissa com o ábaco de papel em sala de aula no encontro do dia 01/7/2011 (p.77).
	Reconhece quais assuntos necessitam de mais tempo para que os alunos aprendam; reconhece a necessidade de priorizar alguns conteúdos ou estratégias.	Narrativa sobre a experiência da professora Melissa no trabalho com um problema de subtração 01/7/2011 (p. 77-78).
	Revelou a sua disposição para aprender (quando lidou com o computador para organizar a tarefa de acordo com os objetivos da Tarefa 3).	Apresentação as tarefas elaboradas e/ou adaptadas com os objetivos da Tarefa 3 da Lição 1 da *Early Algebra*, realizada no encontro do dia 23/4/2012 (p. 84 - 85).
CONHECIMENTO DO PROCESSO INSTRUCIONAL	Revelou o cuidado que o professor deve ter ao explorar tarefas em sala de aula.	Discussão da professora Melissa com a coordenadora Magna sobre o trabalho realizado por Magna em sua sala de aula, ocorrida em um dos encontros do grupo de estudos (p. 80)
	Revelou sua capacidade de articular um conjunto de ideias e experiências na constituição de um plano de aula. Faz previsões sobre a condução das aulas, delineando os conteúdos, as tarefas a serem realizadas e a sequência de aplicação dessas tarefas.	Apresentação do plano de aula elaborado sobre símbolos, realizada no encontro do dia 29/3/2012 (p.82 - 83).
	Revelou sua capacidade de criar um ambiente adequado para promover a atividade matemática dos alunos.	Narrativa sobre a experiência vivenciada pela professora Melissa em sala de aula, no encontro do dia 21/6/2012 (p. 85 - 86).

Fonte: a autora.

Podemos considerar que as ações proposta no contexto do processo de formação continuada proporcionaram à professora momentos de reflexão acerca das tarefas, do conteúdo matemático envolvido e de sua prática letiva. Acreditamos que esse processo esteve consistente com o que podemos considerar de “poder efetivo da formação”, pois as ações propostas potencializaram o desenvolvimento da parte do conhecimento profissional chamado a intervir diretamente na prática letiva, ou seja, o desenvolvimento do conhecimento didático, que inclui as quatro vertentes de resposta à nossa pergunta de investigação.

A partir desse estudo podemos avançar para outros, tal como investigar: de que modo professores que trabalham com os anos iniciais do Ensino Fundamental lidam com a proposição e implementação de tarefas que têm o potencial para mobilizar o pensamento algébrico? Quais os critérios utilizados para escolher tarefas?

Estudar conhecimentos mobilizados por uma professora, no contexto de um processo de formação continuada, nos permitiu evidenciar ao longo desse trabalho elementos centrais que devem estar presentes nos processos de formação de professores que ensinam Matemática, importantes para a orientação das práticas e relacionados com a seleção das tarefas e a condução da comunicação em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. El desarrolo y el usodel sentido de los símbolos. In: VALE, I. et al. (Org.). **Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2006. p. 29-48.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 36, n. 5, p. 412-443, 2005.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução de Maria J. Alvez, Sara B. dos Santos e Telmo M. Baptista. Porto: Porto, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, Lisboa, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2009.

______. **Práticas de ensino da matemática**: duas professoras dois currículos. 2004. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Lisboa – FCUL, Lisboa.

CARPENTER, T.; FRANKE, M.; LEVI, L. **Thinking mathematically**: integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth, N.H.: Heinemann, 2003.

CAVALCANTI, J. D. B. **Concepções de alunos do 3º ano do ensino médio acerca dos significados do símbolo "=" em contextos aritméticos e algébricos**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

CYRINO, M. C. C. T. Projeto: Educação matemática de professores que ensinam matemática. Brasília: CAPES/INEP, 2010. Edital no 38/2010.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. **Bolema** - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 24, p. 97-126, 2011.

ELBAZ, F. **Teacher thinking, a study of practical knowledge**. Londres: Croom Helm, 1983.

FIORENTINI, D. ; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES, 2005, Lisboa. **Comunicações...** Lisboa, 2005. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>. Acesso em:19 jul. 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

HOUAISS, Antonio. **Dicionário de língua portuguesa Houaiss**. Rio de Janeiro: Ática. 2001.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra.In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah: Erlbaum, 1999, p. 133-155.

______. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Ed.). **Algebra in the early grades**. New York, NY: Routledge, 2008. p.5-17.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 12, 1981. p. 317-326.

______. Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Ed.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education.** Rotterdam: Sense, 2006. p. 11-50.

______. The core of algebra: reflections on its main activities. In: STACEY, K. et al. (Ed.). **The future of the teaching and learning of algebra**. Boston: Kluwer, 2004. Cap. 2, p. 21-33.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 6. ed. Campinas: Papirus, 2005.

LINS, R.; KAPUT, J. The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Ed.). **The future of teaching and learning of algebra**. Boston: Kluwer, 2004. p.73-96.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: Authors, 1991.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares de Matemática**. Curitiba, 2008.

PASSOS, C. L. B.; GALVÃO, C. **Narrativas de formação**: investigações matemáticas na formação e na atuação de professores. 2011. Disponível em: <http://www.eses.pt/interaccoes>. Acesso em: 2 mar. 2013.

PIRES, M. N. M. **Oportunidade para aprender**: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases. 2013. Tese (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional. In: ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA - PROFMAT98, 1998, Guimarães. **Actas**... Lisboa, 1998. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DOCS-PT%5C98-Profmat.doc>. Acesso em: 2 jul. 2013.

______. **Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática**. Disponível em: <http://www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/334374.PDF>. Acesso em: 2 jul. 2013.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: ME-DGIDC, 2009.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: ENGLISH, L. (Ed.). **Handbook of international research in mathematics education**. 2nd ed. New York: Routledge, 2008. p. 225-263.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. **Remar contra a maré**: a construção do conhecimento e da identidade na formação inicial. 2002. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3167/1/02-Ponte-Oliveira_Rev.Educacao.pdf>. Acesso em: 2 jul. 2013.

SHULMAN, L. S. Those who understanding: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, fev. 1986. Disponível em: <http://www.sagepublications.com>. Acesso em 15 de julho de 2013.

WALLE, J. A. V. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Termo de consentimento livre e esclarecido

I – DADOS DE IDENTIFICAÇÃO DO SUJEITO DA PESQUISA OU RESPONSÁVEL LEGAL

Nome do participante:
....
Documento de Identidade N^{o}:...Sexo: ( ) M ( ) F
Data de Nascimento:.........../.........../.................
Endereço:..No:..................Apto:.............
Bairro:...CEP:......................
Município..Telefone: (......)............................
e-mail:...

II – DADOS SOBRE A PESQUISA

1. Título do Protocolo de Pesquisa: “Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática”,vinculado ao Programa “Observatório da Educação” (Edital n^{o} 38/2010, da CAPES/INEP)

2. Pesquisadores:
Prof. Esp. Ivnna Gurniski Carniel e Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

3. Avaliação do Risco da Pesquisa:
Sem Risco ( ) Risco Mínimo (**X**) Risco Médio ( )
Risco Baixo ( ) Risco Maior ( )

4. Duração da Pesquisa: A obtenção das informações terá momentos de entrevistas que não serão superiores a uma hora; gravações em vídeo das interações dos participantes; acompanhamento das atividades desenvolvidas entre coordenação do projeto, professores e estudantes de Matemática; acompanhamento de preparação e desenvolvimento de atividades para sala de aula.

III – REGISTRO DAS EXPLICAÇÕES DO PESQUISADOR AO ENVOLVIDO OU SEU REPRESENTANTE LEGAL SOBRE A PESQUISA, CONSIGNANDO:

1. Justificativa e objetivo
O projeto “Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática”, em concordância com os objetivos propostos no Edital no 38/2010, da CAPES/INEP, tem como objetivo geral:

> - Fomentar a produção acadêmica relativa à Formação de Professores que ensinam Matemática e à formação de recursos humanos em Educação Matemática na Educação Básica, na Graduação e na Pós-Graduação (mestrado e doutorado), que colaborem para elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB. (CYRINO, 2010, p. 6)

E como objetivos específicos:

> - Fortalecer o diálogo entre pesquisadores da área de Educação Matemática do PECEM, estudantes de mestrado e de doutorado do PECEM, estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UEL e professores que ensinam Matemática de Escolas da Rede Pública de Ensino do Paraná, por meio da formação de grupos de trabalho que desenvolvam atividades acadêmicas voltadas para o diálogo qualificado entre esses dois níveis de escolaridade.
> - Investigar aspectos relativos à formação continuada desencadeados pelo diálogo entre os participantes para adoção de uma agenda de trabalho colaborativo e constituição de uma Comunidade de Prática de Professores que ensinam Matemática formada por pesquisadores, futuros professores de Matemática e professores de Matemática que atuam na Educação Básica.
> - Investigar contextos em que os participantes desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, e comunicar suas ideias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem e interpretam problemas em uma variedade de situações.
> - Propiciar um campo de investigação e formação profissional para os estudantes do PECEM e do curso de Licenciatura em Matemática, baseado na articulação entre teoria, prática docente e investigação, de modo a gerar uma reflexão sobre conteúdos matemáticos e, do modo como estes conteúdos se transformam em ensino.
> - Fomentar, disseminar e desenvolver metodologias de prática de ensino significativas, para enfrentamento dos problemas na área de Matemática. (CYRINO, 2010, p. 7)

Procedimentos que serão adotados durante a pesquisa

Participaremos das reuniões semanais do grupo investigado que ocorrerão nas dependências da Escola Municipal José Brazil Camargo - Apucarana, Paraná, a fim de identificar e registrar aspectos relativos à formação continuada de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Buscaremos, em todos os momentos, criar um relacionamento de confiança com os participantes, estabelecer uma comunicação agradável de modo que eles se sintam à vontade e com o mínimo de constrangimentos, valorizar o significado que dão as coisas e aos fatos, respeitar seus valores culturais e aspectos emocionais, e não somente o produto da investigação.

3. Desconfortos e riscos

No presente estudo todo o esforço será feito para que não ocorram constrangimentos por parte dos investigados.

4. Benefícios esperados

Esperamos que esta investigação possa fornecer aos organizadores de currículo, nomeadamente aos coordenadores de Curso de Licenciatura em Matemática, aos responsáveis pelas políticas públicas relativas à formação inicial de professores e aos pesquisadores da área subsídios que possam orientar ações relativas à formação de professores de Matemática.

IV – ESCLARECIMENTOS DADOS PELOS PESQUISADORES SOBRE GARANTIAS DO ENVOLVIDO NA PESQUISA

1. Exposição dos resultados e preservação da privacidade dos voluntários

Os resultados a serem obtidos neste estudo serão publicados, independente das informações encontradas, contudo sem que haja a identificação dos participantes que prestaram sua contribuição, respeitando-se, portanto, o direito de privacidade, conforme normas éticas.

2. Despesas decorrentes da participação no projeto de pesquisa
Os voluntários estarão isentos de qualquer despesa ou ressarcimento decorrente da participação voluntária neste projeto de pesquisa

Liberdade de consentimento
Os participantes estarão livres para negar a assinatura deste consentimento ou, ainda, para parar de participar em qualquer momento, se desejarem, sem que isso traga algum prejuízo ao mesmo.

4. Questionamentos
Os participantes terão acesso, a qualquer tempo, às informações sobre procedimentos relacionados a esta pesquisa. No caso de outros esclarecimentos que se fizerem necessários, informações adicionais poderão ser obtidas com os responsáveis pelo projeto.

V – PARA CONTATO EM CASO DE DÚVIDAS

VI – CONSENTIMENTO PÓS-ESCLARECIDO

Declaro que, após convenientemente esclarecido pelos pesquisadores e ter entendido o que me foi explicado, consinto em participar do presente Protocolo de Pesquisa.

Londrina, __________ de ________________________ de 2011.

____
Assinatura do participante

Pesquisadores:

____
Prof. Esp. Ivnna Gurniski Carniel

____
Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

ANEXOS

Anexo A

1 – Símbolos

Tarefas	Discussões sobre o que são símbolos, construindo mensagens ou "histórias" com símbolos, interpretando símbolos.
Objetivo	Introduzir símbolos como meios de comunicação.
Materiais	Apresentação de projeções e folhas de tarefas.
Palavras-chave	Símbolo, interpretar, representar, significar, história (interpretação), ambiguidade.

Introdução

Nesta aula, vamos envolver as crianças em uma discussão informal sobre os diferentes tipos de símbolos. Insights[13] a partir desta aula serão base para a introdução de símbolos matemáticos, como parte de sistemas de símbolos gerais e como meio de comunicação.

Notas a respeito das Tarefas (para pais e professores)

<u>A respeito da Tarefa 1</u>
Os itens da tarefa 1 não têm um padrão de interpretação. No entanto, nós os projetamos para apoiar um número limitado de interpretações.
<u>A respeito da Tarefa 2</u>
Os itens da tarefa 2 têm respostas corretas. A maioria pode ser inferida a partir do estudo das imagens. Os dois últimos sinais provavelmente não podem ser adivinhados.

Dê aos alunos uma ampla oportunidade para explicar suas interpretações ou "histórias". Preste atenção aos pontos de concordância e também aos pontos de desacordo. Selecione duas interpretações e peça aos alunos para determinar se as opiniões expressas são iguais ou diferentes.

Reflexões para Pais e Professores

1. A maioria dos usos dos símbolos na vida diária envolve uma quantidade considerável de ambiguidade (dois ou mais significados). Os exemplos nesta lição têm algumas dessas ambiguidades, mas não muitas. Precisamos discutir a ambiguidade abertamente com os alunos (mesmo que seja difícil fazer isso). Deixe-os saber que às vezes não há uma única interpretação correta.

2. Matemática sempre nos obriga a utilizar e interpretar símbolos.

3. Em muitas áreas da vida, música, filmes, religião, política, as pessoas têm opiniões muito diferentes sobre as mesmas coisas. Em parte, isso ocorre porque as pessoas valorizam coisas diferentes e pensam diferente. Mas também é verdade que as coisas que nós encontramos nessas áreas facilmente dão origem a mais de uma interpretação.

[13] Significado de Insight: s.m. (pal. ing.) Psicologia Descoberta súbita da solução de um problema, da estrutura de uma figura ou de um objeto percebido; compreensão repentina de uma situação; intuição. Capturado de http://www.dicio.com.br/insight/

4. Embora seja importante interpretar quando estiver pensando matematicamente, nós geralmente queremos minimizar a ambiguidade. Se usarmos os símbolos que significam uma coisa para nós e coisas muito diferentes para outras pessoas, fica difícil nos comunicarmos matematicamente.

5. Há respostas certas e erradas na Matemática. Mas, muitas vezes é importante saber mais do que se uma resposta está certa ou errada. Precisamos saber, por exemplo,

a. ... Se a resposta faz sentido para nós. Em caso afirmativo, por quê? Se não, por que não?

b. ... Como podemos convencer-nos (ou alguém) que a resposta está certa ou errada. Quando tentamos fazer isso, nós podemos aprender novas e importantes idéias. Podemos até descobrir que uma resposta que parecia certa está realmente errada. Ou que uma resposta que inicialmente parecia errada acaba por estar certa. Mas ainda mais importante, podemos aprender como algumas idéias estão ligadas a outras idéias que nós pensamos que eram totalmente independentes. (Nas próximas aulas, haverá muitas oportunidades para exemplificar isso.)

Tarefa 1

Nome: ________________________________Data:_______

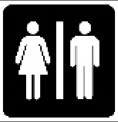
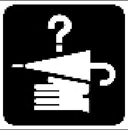
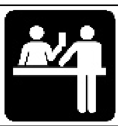
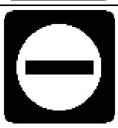
Símbolos	Uma possibilidade de interpretação
🌩 🐕 →	Ontem houve relâmpagos e trovões e meu cachorro estava com medo e fugiu.
🚹 ❤ 🚺 Marco Érica	
👂 ♫ ☹	Eu ouvi
🚺 □□ Léia	
3 + 5 - 2	

Tarefa 2

Nome:_____________________________Data:__________

Os seguintes sinais podem ser encontrados em uma estação rodoviária ou aeroporto.

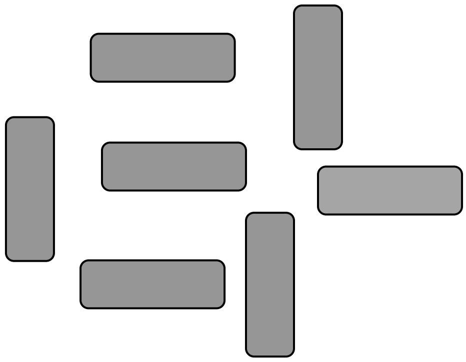
Tente interpretar o que cada sinal significa.

Símbolos	Minha interpretação
	
	
	
	
	
	
	
	

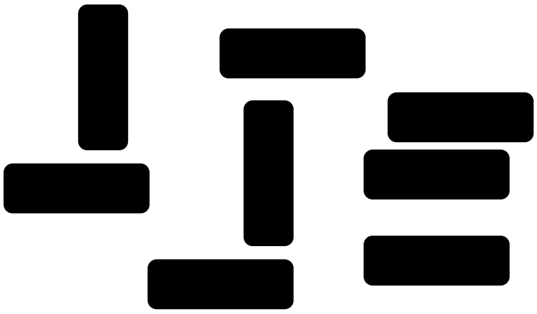
Tarefa 3

Atividade	Estudantes compararam quantidades discretas.
Objetivo	Trabalhar com a diferenças entre duas quantidades.
Foco	Reificar diferenças.
Material	Folha de tarefa
Palavras-chaves	Diferença, comparação.

Nome: ____Data:______



Formas retangulares cinzas



Formas retangulares pretas

José não sabe contar. Como ele pode fazer para saber se existem mais formas retangulares cinzas ou pretas?

ANEXO B

Tarefas 10, 11, 12, 13 e 14

Reta numérica: Localizações

Atividade	Os alunos colocam-se em dois pontos da Reta Numerada. Contextos principais: escadas, idade, dinheiro, temperatura e número puro.
Objetivos	Introdução de representação na reta numerada.
Foco	Qual o significado do lugar dos números na reta numerada em vários contextos.
Materiais	A "reta numerada" previamente construída. Vai de -10 a + 20 fixa em uma parede ou no chão.
Termos	Sinal de mais e de menos, localização, intervalo; reta numerada, quantidade e medida; números negativos

Introdução

A reta numérica pode ir de —10 a +20. As crianças se tornam números na reta e executam diferentes "danças na linha", e ao fazê-lo exploram operações aditivas e eventualmente começam a explorar números negativos. Os alunos executam operações de adição e subtração movendo para esquerda e para direita reta numérica. Os alunos exploram essa representação usando diferentes contextos, como idade, dinheiro, temperatura, ou passos para "cima e para baixo" nos diferentes andares na escadaria da escola, etc. Eles começam a pensar nos "atalhos", múltiplas mudanças que podem ser simplificadas em uma simples mudança.

Esta tarefa explora as bases de muito do que segue em Matemática. Da reta numérica os alunos irão mover-se para diagramas mais esquematizados, com vetores representando quantidades e operações nessas quantidades. Existem duas razões principais para usar a representação de reta numérica: (1) permite que crianças e professores demonstrem publicamente e testemunhem como eles estão raciocinando a respeito do problema; e (2) muitas vezes é altamente motivacional – algumas crianças gostam de fazer palhaçadas ao redor enquanto desfilam ao longo da linha.

Embora nós geralmente nos referimos a reta numérica como contendo números, é frequentemente usada para representar medidas, o que é medido (ou contado) como, quantidades como dinheiro, idade, tempo decorrido, balas, etc. quando utilizado desta maneira, o eixo x deve ser nomeado tanto em temos de um atributo e da sua unidade. Por exemplo, se a reta numérica é usada para demonstrar quanto dinheiro João tem, ela deve ser rotulada "dinheiro (reais)", "dinheiro de João (em reais)" para especificar o atributo a unidade utilizada atualmente. Isto nos permite perguntar onde colocar João se ele tem 20 moedas de 10 centavos, e assim por diante.

As escadas da Escola

Antes de começar, fixe a reta numerada na frente da sala (ou em um lugar grande suficiente), ou, se for no quadro, de modo que os números fiquem elevados do chão e logo acima da cabeça do estudante.

Para começar a aula, pedir aos alunos o que eles sabem sobre o que está afixado (reta numerada). Eles podem ter visto a reta numerada no passado, eles provavelmente não terão visto uma dessa magnitude. Algumas respostas podem ser: "é uma linha", "que tem os números", ou "os números vão em ordem". Os alunos podem observar e comentar sobre os números negativos: os números "começam de novo", “são números", com um sinal de menos", os números descem deste lado.

Mais do que qualquer outra coisa, é importante ouvir atentamente o que dizem os estudantes sobre a reta numerada. Haverá muitas oportunidades para usar suas respostas para explorar possíveis propriedades e problemas.

Comentários dos alunos	**Possível orientação para a exploração**
Salete (- 3) tem mais dinheiro do que Silvia (+2)	Os números negativos não serão compreendidos inicialmente por uma típica terceira série do Ensino Fundamental.
“Os números param em 100”	É importante distinguir entre a ideia que sustenta a noção de número e a ideia abstrata de número.
Eu tenho 8 anos e meio de idade, então eu vou me colocar no 8"	O meio é um número ou uma quantidade? Devemos colocá-lo a direita ou a esquerda do 8? Você terá 9 de repente? (sim e não). Existem valores entre 8 e 9 anos?

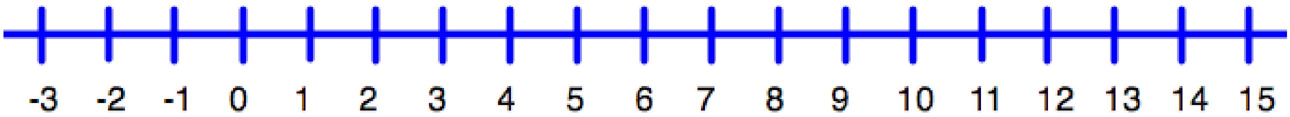
Peça a dois voluntários para ficar “em cima” da reta numerada (se ela estiver no chão) ou na “direção perpendicular” (se estiver no quadro) em relação ao 4 e ao 7, por exemplo. Imaginando que a reta represente uma escada:
Onde é que eles ficarão se cada um descer 4 degraus?
Onde ficarão se subirem 3 degraus?
Qual era a diferença entre as duas crianças no início?
Qual é a diferença entre eles agora?

Atividade Opcional: Peça a dois novos voluntários para ficar desta vez nos “números10 e 15”. Vamos fingir que onde eles estão parados é a temperatura. Você acha que é quente ou frio? O que acontece ficar 5 graus mais quente? Agora fica muito frio se cair 20 graus. Onde você acha que vai acabar? Alguns podem dizer que ele para em zero, enquanto outros vão dizer que continua indo para baixo. Peça aos alunos para contarem o quanto eles “andam” ao longo da reta numerada par “baixar” os 20 graus. Peça aos alunos, o que aconteceria se a temperatura continuasse caindo? A ideia é provocar uma discussão sobre a natureza contínua dos números negativos.
Continuar: Agora façamos de conta que a temperatura fica 10 graus mais quente. Onde você acha que eles devem ir?
Envolver os alunos em questões sobre a reta numerada: Onde termina o número da linha? Será que ela termina em 20, ou podemos pensar que vai além de 20? Até onde ela poderia ir? Quais são os números menores do que zero? Introduzir 'números negativos' em etapas com os alunos. Os números negativos será uma parte de trabalho nessa lição.
Faça outros exemplos utilizando estórias sobre dinheiro.

Tarefa 10
Nome:_______________________________________Data:________
Onde é que cada pessoa fica na reta numerada?

Pessoa	**O que sabemos**	**Montante que eles têm em reais agora**
Débora	Tem seis reais.	

Miriam	Tem oito quartos de real.	
Siumara	Tem nada e deve um real para mãe.	
Mara	Se ela receber mais 2 reais ela terá 11 reais.	



Montante (em reais)

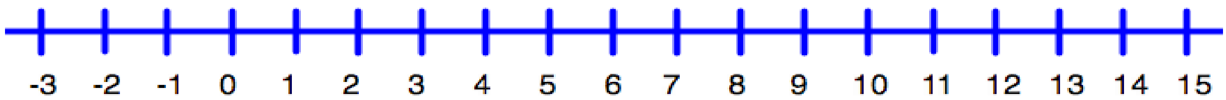
Tarefa 11

Nome: ____Data:_________

Idade

Coloque cada pessoa sobre a reta numerada. Use a sua idade hoje.

Pessoa	**O que sabemos sobre a pessoa**	**Idade hoje (em anos)**
Fábio	Fez oito anos na semana passada.	8 anos
Márcio	Terá oito anos daqui dois anos.	
Rita	Fez oito anos há três anos atrás.	
Sandra	Daqui seis meses fará oito anos.	

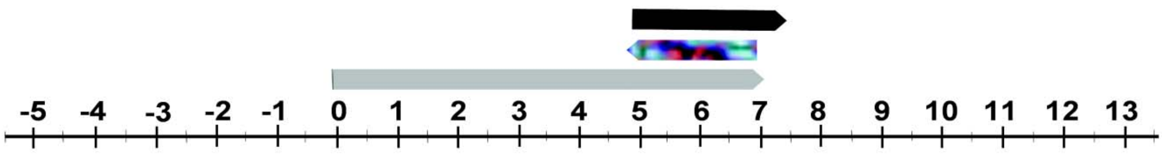


Idade hoje (em anos)

Tarefa 12

Nome:_____________________________________Data:_________

A reta numerada a seguir representa a movimentação do dinheiro de Sandra no sábado passado:



Escreva uma história sobre o dinheiro de Sandra. Quanto ela tinha no começo? Com quanto ela ficou no final? O que aconteceu com o seu dinheiro ao longo do dia?

Escreva uma expressão sobre o dinheiro de Sandra, utilizando números.

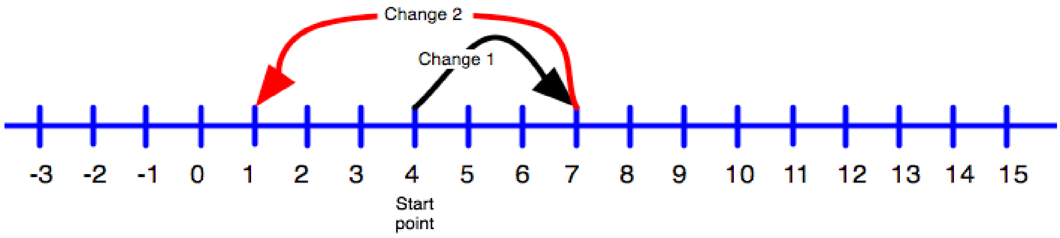
Escreva uma história diferente para a mesma reta numerada, para algo que não seja dinheiro.

Tarefa 13

Nome:____Data:_________

Cálculo na reta numerada.

Comece com o ponto de partida. Fazer duas alterações. Mostrar onde você termina**.**



Ponto de Partida	Mudança	Mudança	Fim		Sentença numérica Expressão numérica
4	+3	-6			4 + 3 - 6 =
4	+4	-7			4 + 4 - 7 =
4	+5	-8			=
4	+6	-9			=
4	-9	+6			=
4	-8	+5			=
4	-7	+4			=
4	-6	+3			

Em cada linha acima, foram feitas duas mudanças.

Em cada linha, fazendo duas mudanças pode ser o mesmo que fazer uma única mudança.

Complete o quadro com ela.

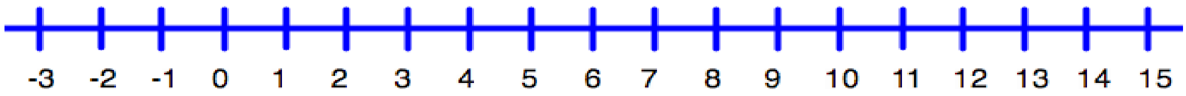
Ponto de Partida	Mudan-ça	Mudan-ça	Mudança única	Fim		Sentença numérica Expressão numérica
4	+3	-6				4 + 3 - 6 = 4 – 3 = 1
4	+4	-7				4 + 4 - 7 =
4	+5	-8				=
4	+6	-9				=
4	-9	+6				=
4	-8	+5				=
4	-7	+4				=
4	-6	+3				=

Tarefa 14

Nome: ____Data:_________

Calculando na reta numerada.

Comece com o ponto de partida. Fazer duas alterações. Mostrar onde você termina



Ponto de Partida	Mudança	Mudança	Fim	Sentença numérica Expressão numérica
7	-5	+4		7 – 5 + 4 =
7	-7	+6		7 – 7 + 6 =
7	-8	+7		=
7	-10	+9		=
7	-1	+0		
7	+0	-1		
Em cada linha acima, há duas mudanças. As duas mudanças podem ser substituídas por uma única. Complete o quadro com ela.				
7	+39	-40		7 + 39 – 40 =
7	-40	+39		
	-40	+39	5	
	-40	+39	3	
	-40	+39	-1	
N	-5	+4		

ANEXO C

Plano de aula sobre símbolos

JUSTIFICATIVA

As propostas das aulas a seguir, pretendem levar os alunos a inventarem símbolos para representar ideias e objetos, decifrar e criar mensagens codificadas e, ainda, criar em grupo símbolos e códigos para serem utilizados no cotidiano.

PÚBLICO ALVO

Alunos do 4º ano.

DURAÇÃO

5 aulas

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

1ª AULA

- Organizando a turma em duplas para que leiam a historia " O menino que aprendeu a ver", da escritora Ruth Rocha;
- Recolhendo os livros sem fazer comentários ou perguntas;
- Aplicando as tarefas;
- Após as tarefas fazer questionamentos como: essas tarefas que acabamos de executar remete à história que acabamos de ler? Se sim, o que tem a ver? Ou não. Não há relação entre a história lida e as tarefas realizadas? O que o menino via no inicio da história? (No caso de resposta afirmativa para símbolos) que símbolos eram?

Em caso de evasivas ou negativas insistir envolvendo a turma toda na discussão.

- Conversando sobre o que entenderam do livro;
- Incursionando pela escola a fim de refletir que símbolos poderiam melhor representar determinados ambientes;

2ª AULA

- Relembrando a aula anterior, retomar a discussão sobre os símbolos na representação e identificação dos ambientes;
- Aplicando a tarefa "conhecendo símbolos";
- Solicitando que, em grupos os alunos construam cartazes com símbolos para identificar ambientes e objetos da escola tais como biblioteca, refeitório, salão nobre, sala de jogos, sanitários, lixeira, caixas de materiais, etc.;

3ª AULA

- Aplicando a tarefa "alguns símbolos da escrita chinesa";
- Finalizando os cartazes;

4ª AULA

- Relembrando as aulas anteriores, questionar sobre os vários símbolos que veem nas ruas todos os dias;
- Apresentando alguns símbolos (VIVO, SANEPAR, TIM) a fim de que os identifiquem;
- Aplicando a tarefa onde devem criar símbolos para representar objetos, sentimentos e emoções;

5ª AULA

- Apresentado a mensagem codificada da história do Bocão;
- Solicitando que criem uma mensagem codificada para que o colega decifre;
- Organizando um concurso onde serão votados os símbolos dos cartazes para que passem a identificar os ambientes da escola.

RECURSOS

*Humanos: alunos do 4º ano e professora;
*Materiais: livros de história, folhas com atividades, cartolinas, canetas hidrocor, etc.

AVALIAÇÃO

É relevante que se façam observações durante as atividades realizadas, do desenvolvimento, dos registros individuais, bem como das possíveis dificuldades encontradas, para verificar a compreensão em relação à utilização de símbolos no dia a dia.

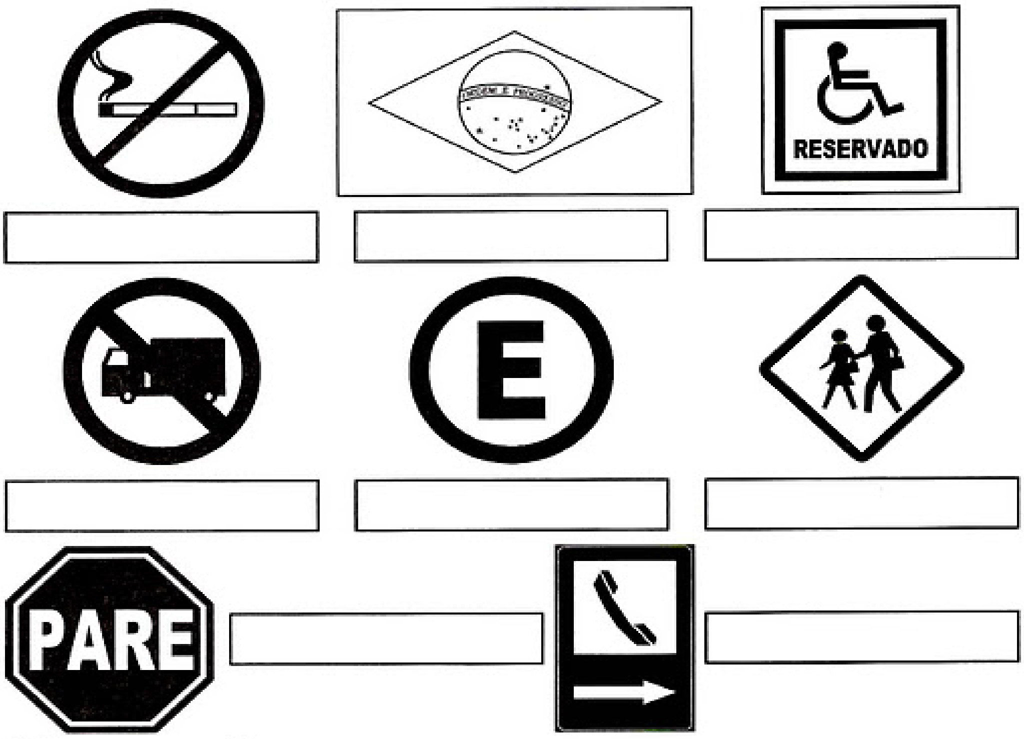
Apucarana, 10 de abril de 2012.

TAREFAS

CONHECENDO OS SÍMBOLOS

NO NOSSO DIA-A-DIA, ENCONTRAMOS SÍMBOLOS POR TODA PARTE. ELES FACILITAM MUITO NOSSA COMUNICAÇÃO.

OBSERVE OS SÍMBOLOS E CONVERSE COM SUA TURMA E COM O SEU PROFESSOR SOBRE O QUE ELES REPRESENTAM. DEPOIS, ESCREVA O SIGNIFICADO DE CADA UM.



1 QUAIS OS SÍMBOLOS QUE EXISTEM NA SUA ESCOLA?

2 HÁ ALGUM SÍMBOLO EM SEU UNIFORME? O QUE ELE REPRESENTA?

ESCRITA CHINESA

A ESCRITA CHINESA TAMBÉM É FEITA POR MEIO DE SÍMBOLOS. VEJA:

樹	鳥	森林
ÁRVORE	PÁSSARO	FLORESTA
農場	童	愛
FAZENDA	CRIANÇA	AMOR
	狗	
	CACHORRO	

1 COMPLETE AS FRASES USANDO OS SÍMBOLOS CHINESES.

TENHO ____ POR VOCÊ.

NA ____ TEM UM ____.

CRIANDO COM SÍMBOLOS

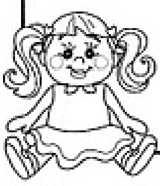
1 CRIE UM SÍMBOLO PARA CADA PALAVRA.

AMIGO	ÁRVORE	GATO
ONÇA	NOITE	

2 AGORA, COMPLETE AS FRASES COM OS SÍMBOLOS QUE VOCÊ CRIOU. DEPOIS, REESCREVA AS FRASES E LEIA-AS.

MEU ☐ TEM UM ☐.

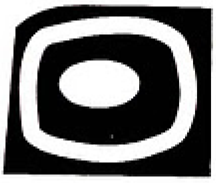
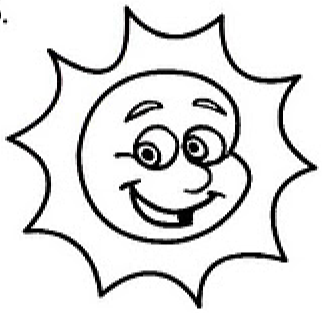
A ☐ SAI À ☐.

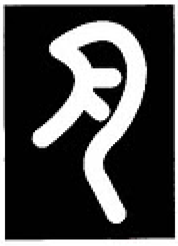


ATRÁS DA ☐ TEM UMA ☐ PINTADA.

DECIFRANDO OS SÍMBOLOS

1 IUKI ESCREVEU DUAS PALAVRAS CHINESAS E DESENHOU O QUE CADA UMA SIGNIFICA. ESCREVA NAS FICHAS AO LADO QUAIS SÃO ESSAS PALAVRAS.

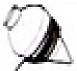



2 AGORA, ESCREVA UMA FRASE COM CADA UMA DAS PALAVRAS.

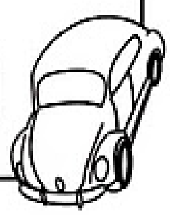
DESAFIANDO VOCÊ!

1 LEIA AS FRASES ABAIXO E, JUNTO COM UM COLEGA, CRIE UM SÍMBOLO PARA CADA UMA DELAS. USE SUA CRIATIVIDADE.

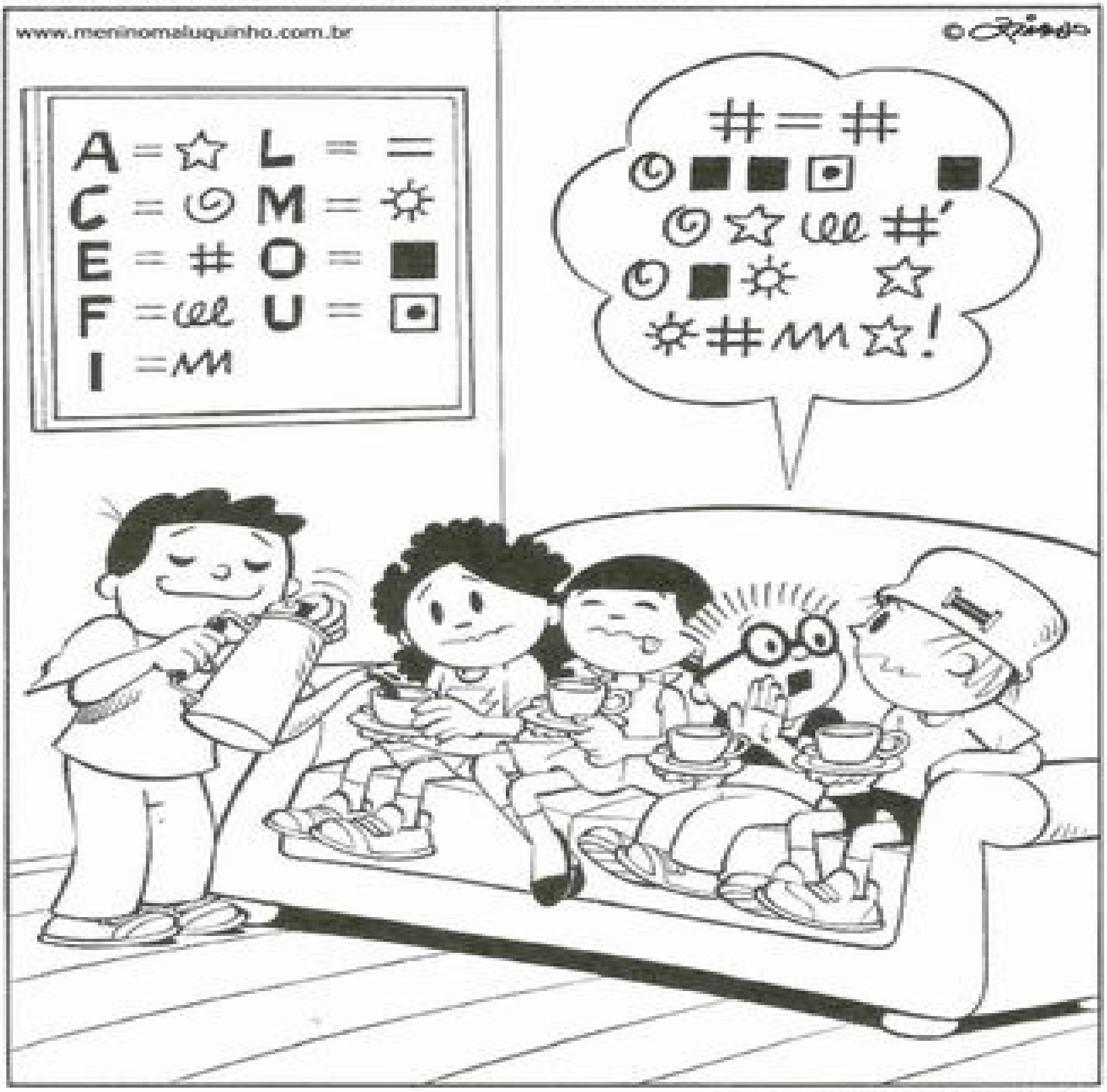
PROIBIDO JOGAR LIXO.	
ÁREA DE RECREAÇÃO.	
NÃO PISE NOS JARDINS.	



Aluno(a):



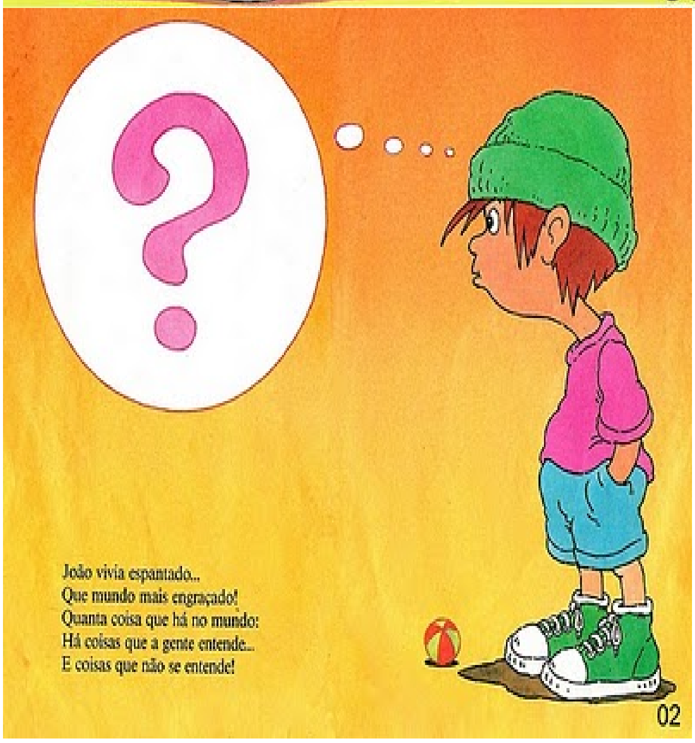
O Bocão recebeu a visita da turma e fez questão de servir um cafezinho que ele mesmo fez. Por que será que ninguém gostou? Substitua os símbolos da fala do Junim pelas letras indicadas no quadro e você descobrirá o mistério.

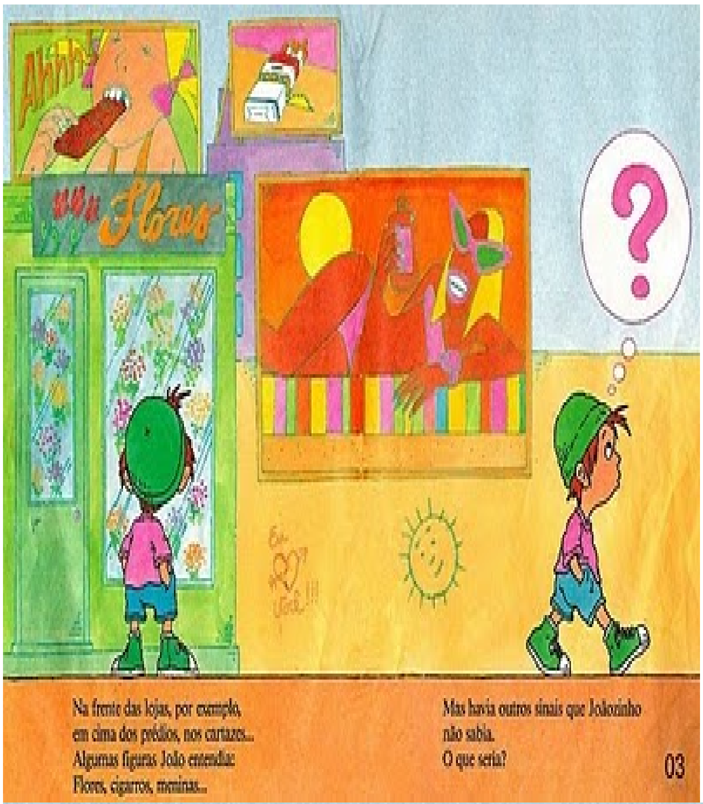


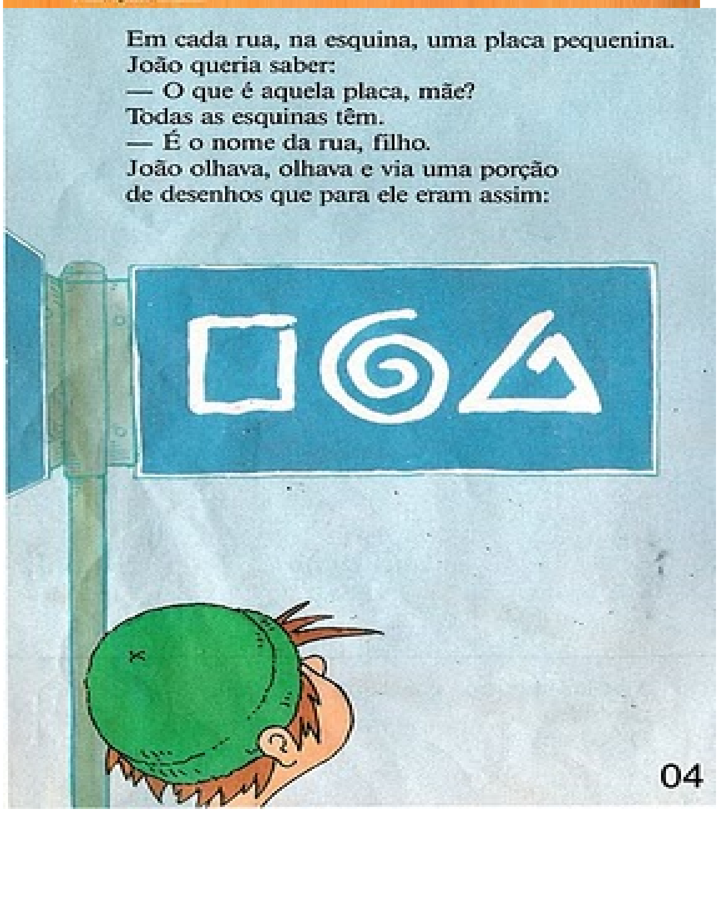
Resposta: "Ele coou o café com a meia".

ALUNO(a)
____DATA____/_____/____
Crie códigos, e com eles elabore uma mensagem para seu colega decifrar:


O MENINO QUE APRENDEU A VER
4.ª EDIÇÃO
Ruth Rocha
Ilustrações - Walter Ono
QUINTETO EDITORIAL
01

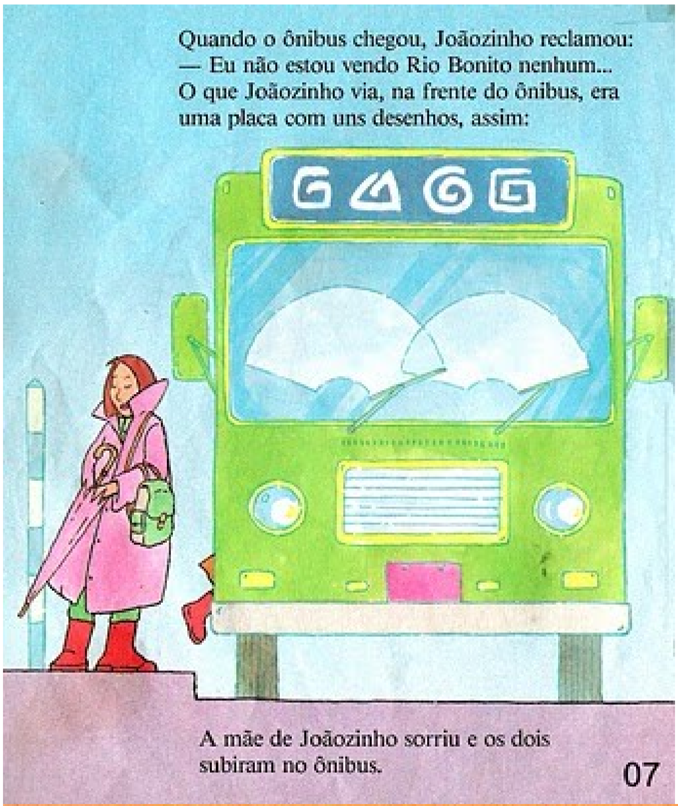

?
João vivia espantado...
Que mundo mais engraçado!
Quanta coisa que há no mundo:
Há coisas que a gente entende...
E coisas que não se entende!
02


Ahhh!
Flores
Na frente das lojas, por exemplo,
em cima dos prédios, nos cartazes...
Algumas figuras João entendia:
Flores, cigarros, meninas...
Mas havia outros sinais que Joãozinho
não sabia.
O que seria?
03


Em cada rua, na esquina, uma placa pequenina.
João queria saber:
— O que é aquela placa, mãe?
Todas as esquinas têm.
— É o nome da rua, filho.
João olhava, olhava e via uma porção
de desenhos que para ele eram assim:
04

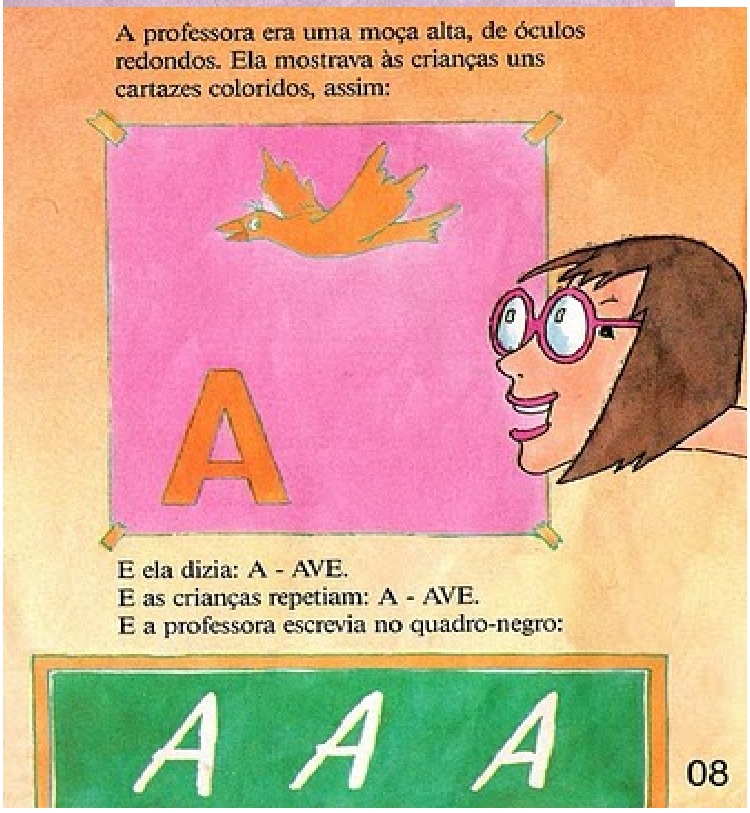

Um dia a mãe de João disse pra ele:
— Meu filho, você precisa ir pro
colégio, aprender a ler, aprender
todas as coisas...
— Que coisas, mãe?
— As letras, João, os números. Você vive
perguntando coisas.
05


RIO BONITO →
No dia seguinte, cedo, João foi para o colégio.
Quando chegaram na esquina a mãe
do João falou:
— Temos de tomar o ônibus. Será que
vai demorar?
— Mas que ônibus, mamãe, nós vamos ter
que tomar?
— O que vai pra sua escola.
— E como é que você sabe o que vai
pra minha escola?
— Eu olho o que está escrito na
placa: RIO BONITO.
06


Quando o ônibus chegou, Joãozinho reclamou:
— Eu não estou vendo Rio Bonito nenhum...
O que Joãozinho via, na frente do ônibus, era uma placa com uns desenhos, assim:

A mãe de Joãozinho sorriu e os dois subiram no ônibus.

07

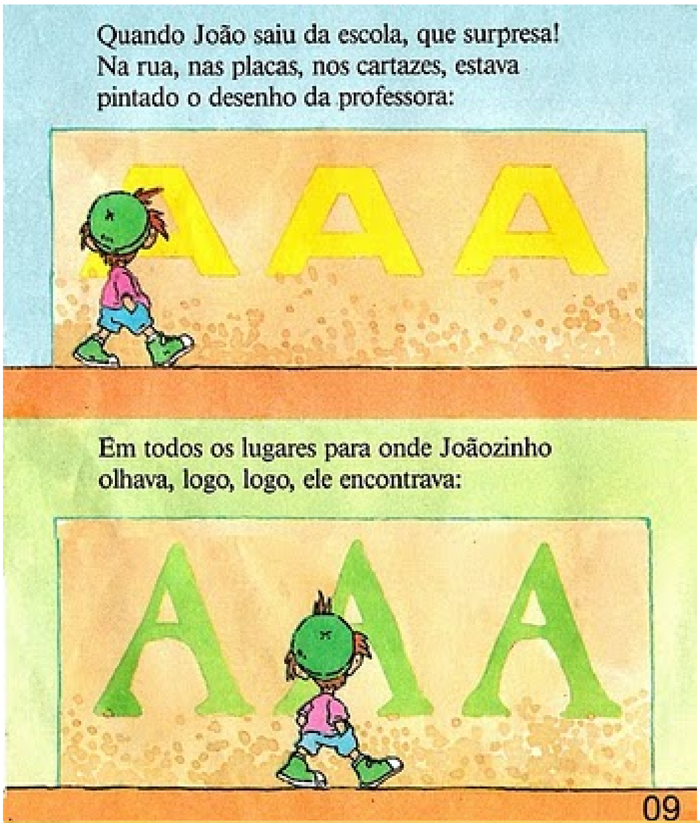

A professora era uma moça alta, de óculos redondos. Ela mostrava às crianças uns cartazes coloridos, assim:

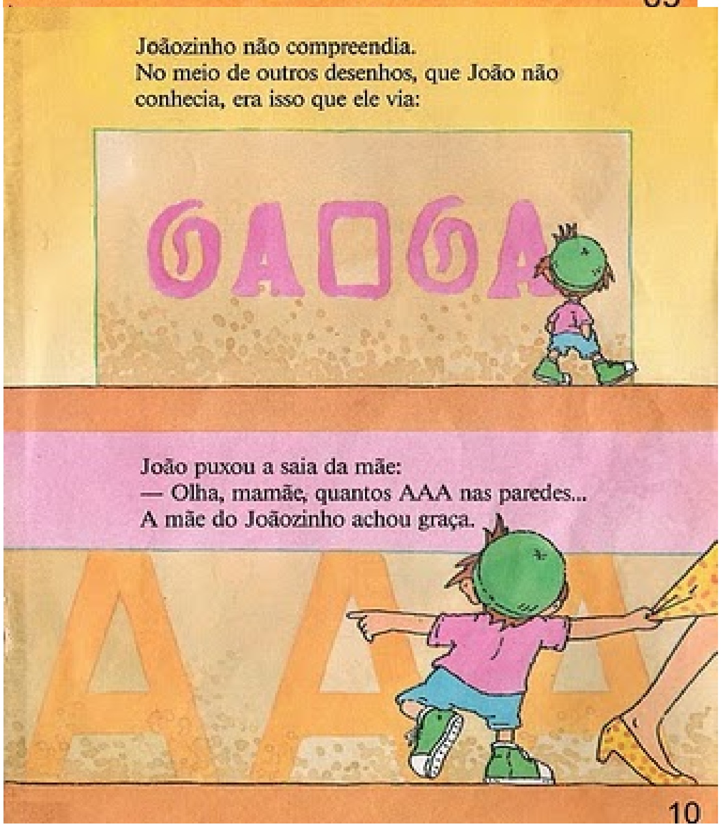
A

E ela dizia: A - AVE.
E as crianças repetiam: A - AVE.
E a professora escrevia no quadro-negro:

A A A

08


Quando João saiu da escola, que surpresa!
Na rua, nas placas, nos cartazes, estava
pintado o desenho da professora:
Em todos os lugares para onde Joãozinho
olhava, logo, logo, ele encontrava:
09


Joãozinho não compreendia.
No meio de outros desenhos, que João não
conhecia, era isso que ele via:
João puxou a saia da mãe:
— Olha, mamãe, quantos AAA nas paredes...
A mãe do Joãozinho achou graça.
10

Em casa, no jornal que os pais do Joãozinho liam, na caixa de sabão, na pasta de dentes, em tudo que João pegava, encontrava o tal desenho da professora:

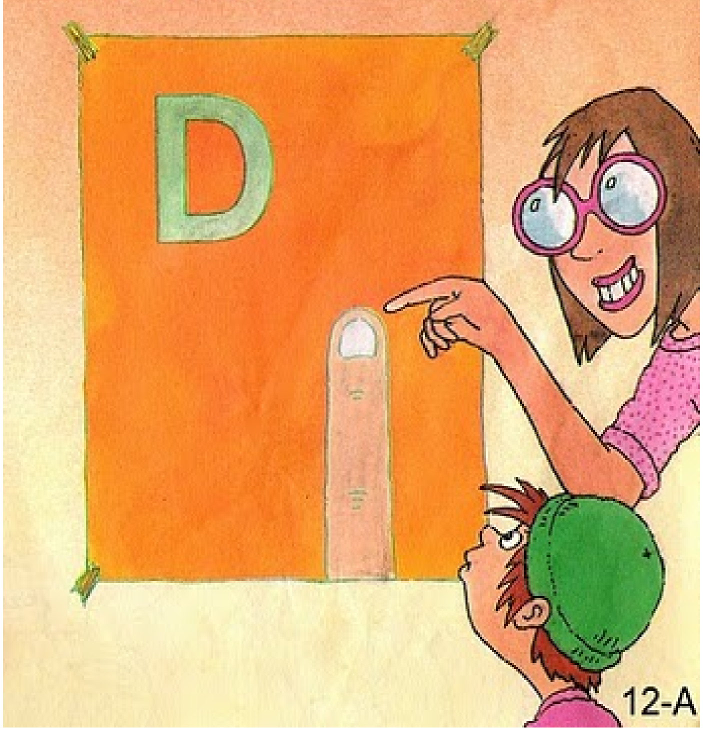
A A A

João não podia compreender:

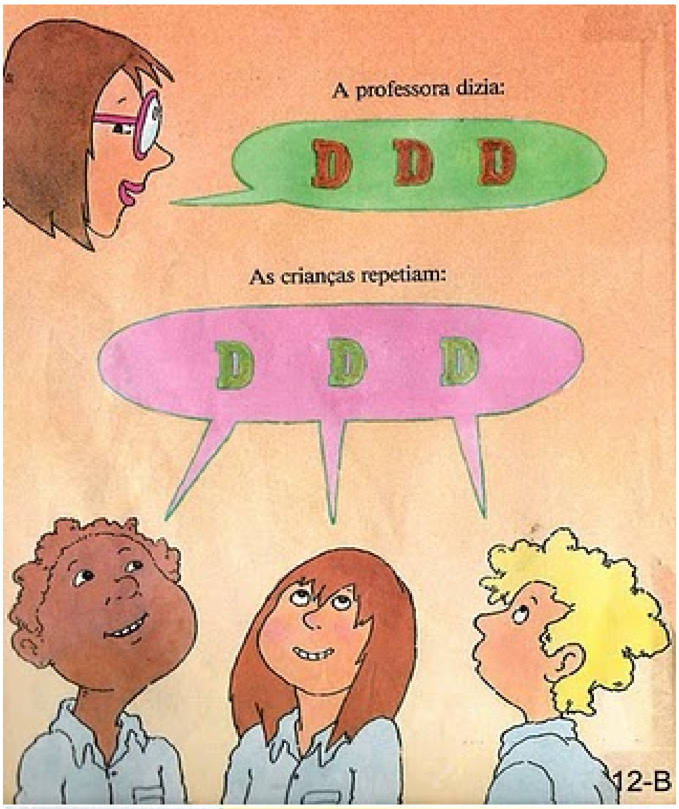
— Será que enquanto eu fui pra escola pintaram todos esses desenhos?

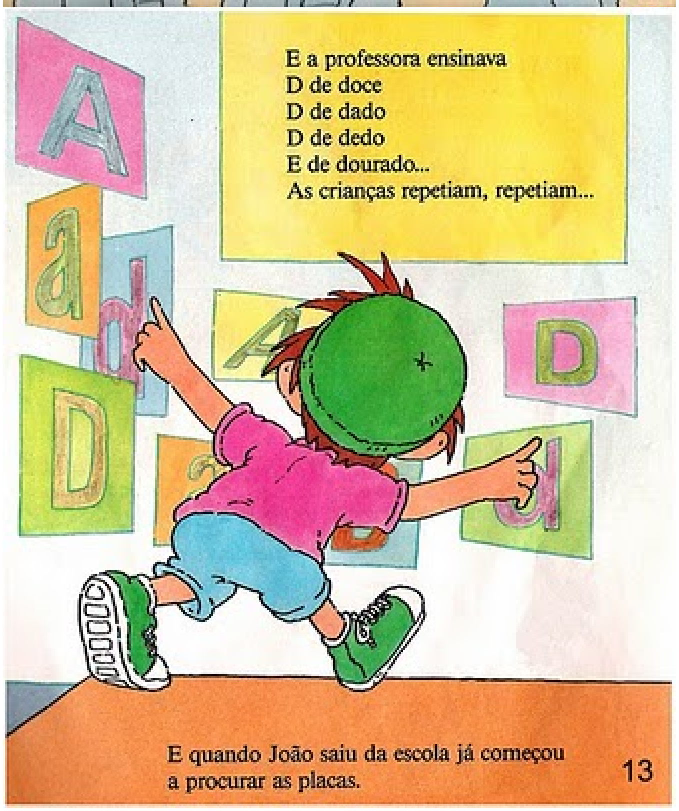
11

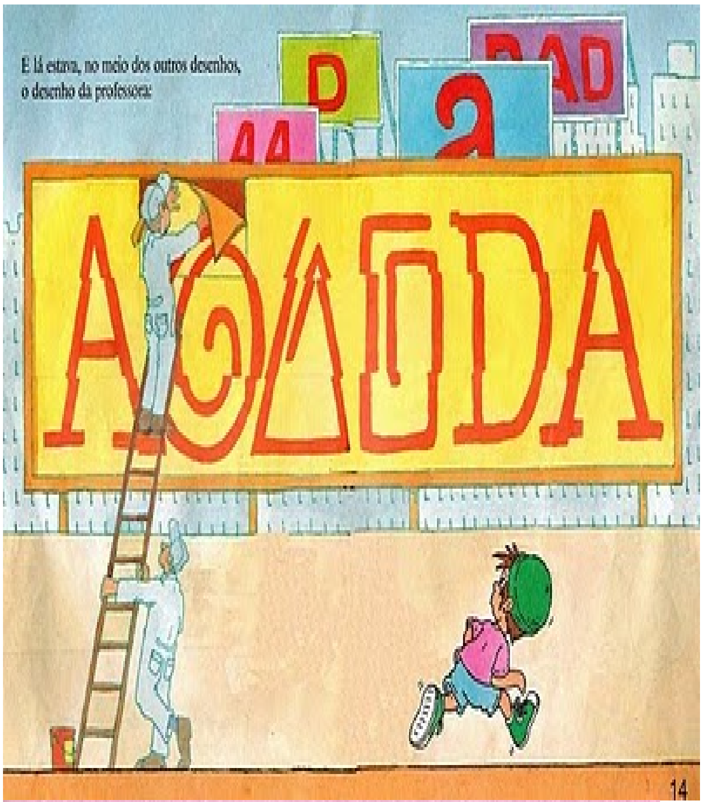
No dia seguinte aconteceu de novo.
João foi à escola.
A professora, desta vez, mostrou outros cartazes.
Havia um assim:



12-A


A professora dizia:
D D D
As crianças repetiam:
D D D
12-B

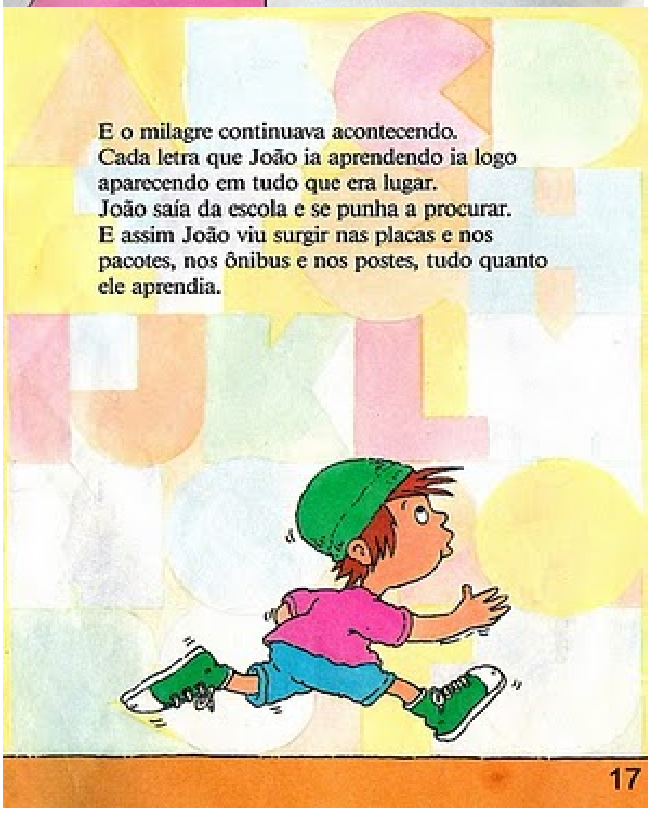

E a professora ensinava
D de doce
D de dado
D de dedo
E de dourado...
As crianças repetiam, repetiam...
E quando João saiu da escola já começou
a procurar as placas.
13


E lá estava, no meio dos outros desenhos,
o desenho da professora:
14


Quando João chegou em casa foi logo
falar com o pai:
— Papai, o que está acontecendo? Cada
vez que eu vou pra escola pintam nas placas,
nos livros, nos pacotes, nas paredes, as letras
que estou aprendendo.
15

O pai do João explicou:
— É que você está aprendendo a ver, João.
— Mas eu já sei ver, papai, desde que eu
era pequenininho.
— Não, meu filho, você agora está aprendendo
a ver o que você está aprendendo a ler.
Entendeu?
Joãozinho coçou a cabeça:
— Não entendi nada...

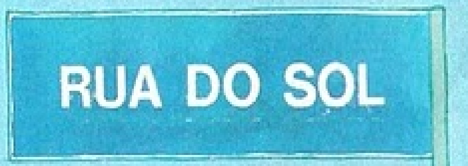
16



E o milagre continuava acontecendo.
Cada letra que João ia aprendendo ia logo
aparecendo em tudo que era lugar.
João saía da escola e se punha a procurar.
E assim João viu surgir nas placas e nos
pacotes, nos ônibus e nos postes, tudo quanto
ele aprendia.

17

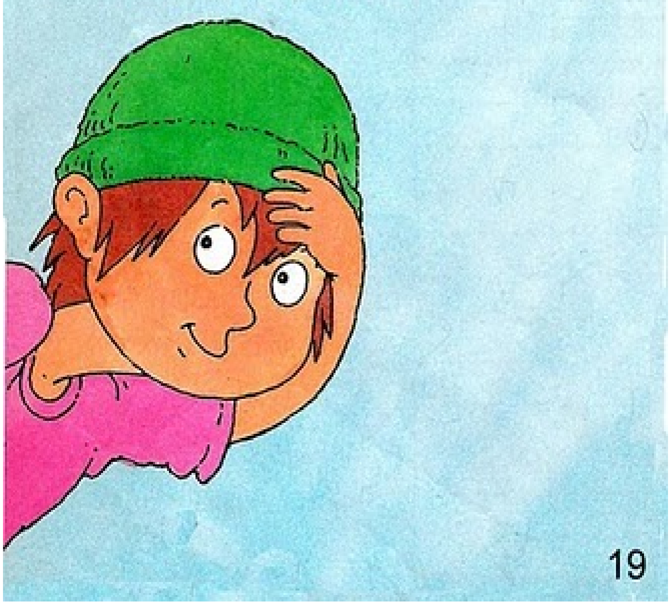
Até que chegou um dia que João olhou a placa da rua onde ele morava. E lá estava:



Reunindo aquelas letras formou-se o nome que João já conhecia: Rua do Sol.
E, de repente, João compreendeu:
— Gente, eu já sei ler!

18

No dia seguinte, cedo, João foi para o colégio. Quando chegaram na esquina a mãe do João falou:
— Preciso prestar atenção que é pra não perder o ônibus...
— Pode deixar que eu presto, mãe. Pode deixar, que eu já sei ver...



19

ESCOLA MUNICIPAL JOSÉ BRAZIL CAMARGO

ALUNO (a) ____

4º ANO

DATA___/____/___

CRIE UM SÍMBOLO PARA REPRESENTAR

AMOR	**UM DIA DE SOL**
SANITÁRIO FEMININO	**SANITÁRIO MASCULINO**
LIXO	**REFEITÓRIO**

ANEXO D
Projeto de intervenção pedagógica

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

PROJETO DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

PROFESSORES: Melissa e Bruna

PROFESSOR ORIENTADOR: Ms. Magna Natalia Marin Pires

PARCERIA COM A UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

ESCOLA EM QUE O PROJETO SERÁ DESENVOLVIDO: Escola Municipal José Brazil Camargo

TURMAS: 4º e 2º anos

TEMA: Pensamento Algébrico

TÍTULO: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO COM CRIANÇAS DOS ANOS INICIAIS.

JUSTIFICATIVA

O presente projeto se justifica uma vez que se articulando ao Projeto Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática proposto pelo Programa de Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL em parceria com a CAPES conforme o edital Nº 38/2010/CAPES/ INEP, tem por escopo propiciar aos alunos do segundo e do quarto ano atividades que estimulem o raciocínio, o pensamento algébrico e perceber e constatar como eles o desenvolvem.

Percebe-se nos alunos certa apatia, ou mesmo desinteresse pelas atividades matemáticas. Na maioria das vezes esperam por respostas prontas ou desistem de tentar solucionar as situações apresentadas.

Entretanto sabemos que, por natureza, as crianças são curiosas e persistentes e, isso contradiz o que se afirma, ou se pensa sobre a apatia ou desinteresse, levando a supor que o problema está na cultura ou nas dinâmicas das aulas de Matemática.

Por não compreender, ou entender os processos matemáticos que lhes são apresentados, alguns alunos optam por não envolverem-se, talvez pelo inconsciente medo do fracasso, outros ainda não o fazem simplesmente pela falta de responsabilidade com o ato de estudar.

Assim, o que se pretende com este projeto é recuperar, ou até mesmo despertar nesses alunos o gosto, o interesse e o comprometimento para com o estudar e aprender Matemática, e mais especificamente, explorar o pensamento algébrico.

Aqui também se coloca a necessidade de melhor preparar as professoras que trabalham com esses alunos, proporcionando-lhes a experiência de serem pesquisadoras, que tentam compreender e explicar um fenômeno essencial na tarefa de ser professor: compreender o pensamento do aluno.

PROBLEMA/PROBLEMATIZAÇÃO

A cultura das aulas de Matemática sempre "pregou" que o ensino da Álgebra só se daria a partir ou, por volta do 7º ou 8º ano, quando os alunos já teriam, supostamente, adquirido os pré-requisitos necessários ao trabalho que envolva mais elementos–letras nas situações ou equações.

Essa cultura tem, no decorrer dos anos "amarrado" as ações dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, mais do que amarrar, ela tem fechado seus olhos para o desvelamento de ações que poderiam enriquecer e facilitar a aprendizagem e a ensinança (termo paulofreiriano) da Matemática.

Diante desse quadro, perguntamos: Que tarefas favorecem o professor reconhecer como os alunos expressam o pensamento algébrico?

OBJETIVOS

- Desenvolver tarefas que despertem o gosto por estudar e aprender Matemática.
- Estimular o pensamento algébrico.
- Perceber o valor da pesquisa para o enriquecimento das atividades de Matemática.
- Viabilizar o trabalho com a Álgebra nos anos iniciais.
- Reconhecer como os alunos expressam o pensamento algébrico em tarefas adaptadas da *Early Algebra*[14].
- Desenvolver atividades que possibilitem enfrentar as dificuldades de ensino e de aprendizagem da Matemática.
- Habituar-se a analisar resultados apresentados para compreender como os alunos pensam.
- Melhorar efetivamente o resultado nas avaliações em massa: Provinha e Prova Brasil.

---

[14]Essas tarefas foram retiradas e adaptadas do material que se encontra disponível no site: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/about.asp do Departamento de Educação, Paige Hall, Tufts University, Medford, Massachusetts, nos Estados Unidos.

FUNDAMENTAÇÃO TEORICA
SOBRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Aprender significa mais do que receber informações, aprender implica em construir conceitos a partir de reflexões.

Entende-se por pensamento algébrico a atividade mental, intelectual ou da razão, que age em oposição aos sentidos e à vontade manifestando a habilidade de imaginar, abstrair e generalizar situações concretas ou as situações gerais e específicas da Matemática.

A Álgebra transcende a ideia de um campo da Matemática. Ela representa uma linguagem que utiliza os signos e símbolos, juntamente com as propriedades da Aritmética para expressar ideias matemáticas.

A visão tradicional da Álgebra, segundo Blanton e Kaput (2005), está vinculada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. O que leva os estudantes a formarem uma opinião de que a Álgebra estudada na escola, não tem relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o mundo cotidiano.

Em relação ao ensino da Álgebra, o PCN (BRASIL, 1998) sugerem o uso de situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, e não desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões, de forma mecânica.

De acordo com o documento, "o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (BRASIL, 1998, p. 115).

Ainda, segundo esse documento o professor teria que possibilitar ao aluno, o reconhecimento de diferentes funções de Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), responder problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis e incógnitas) e compreender as regras para resolver uma equação.

No entanto ele não considera a falta de conhecimento dos professores em interpretar, e porque não dizer, de compreender o pensamento do aluno. Pois como já foi posto, a formação dos professores não os preparou para refletir, analisar e pesquisar ou estudar sobre as respostas apresentadas pelos alunos, mas sim, em induzi-los às respostas desejadas ou simplesmente responder por eles, esperando que o estudo ou repetição das respostas dadas os levem a aprender.

Para que o aluno adentre o mundo algébrico é necessário que criem conexões simples com os conceitos de número e de fluência para que possam entender que os movimentos da vida variam, uma vez que no universo nada é fixo, pronto e acabado; ao contrário, tudo se transforma, tudo está em constante movimento.

Daí a importância de se desenvolver desde os anos iniciais o pensamento algébrico que mais do que manipular expressões e resolver equações, envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas.

Em sala de aula é de fundamental importância que os alunos sejam solicitados a desenvolver o seu pensamento algébrico, isto é, a sua capacidade de fazer estimativas e se aventurarem na descoberta ou na procura das regras que explicam como determinadas “regularidades” ocorrem.

Estudiosos dessa área do conhecimento indicam que os padrões são uma excelente forma de introduzir a Álgebra e, consequentemente, desenvolver o pensamento algébrico.

A realização de tarefas que envolvam o estudo de padrões ajuda os alunos a perceberem a noção de variável que, para a maioria, é apenas vista como um número desconhecido. Procurar relações próximas e distantes entre os termos exige a mobilização de um tipo de pensamento algébrico, mas também o promove e desenvolve.

Para que os alunos possam compreender os aspectos essenciais da Álgebra é importante que durante todo o seu percurso escolar tenham contato com experiências algébricas informais que envolvam a análise de padrões e relações numéricas e a sua representação e generalização por meio de diferentes processos. Por isso, é necessário que o objeto de estudo fundamental da Álgebra deixe de ser as “equações” tal como têm sido encaradas até aqui. Antes de se avançar para a aplicação automática de regras torna-se fundamental, nomeadamente, desenvolver o sentido do símbolo.

CRONOGRAMA DO PROJETO

		2012						2013
	2011	JANEIRO FEVEREIRO	MARÇO ABRIL	MAIO JUNHO	JULHO AGOSTO	SETEMBRO OUTUBRO	NOVEMBRO DEZEMBRO	1º semestre
-Realização das tarefas da Early Álgebra	**X**							
-Estudo da Fundamentação teórica			**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
-Elaboração do Projeto a ser desenvolvido na escola			**X**					
-Planejamento das tarefas para os alunos.			**X**	**X**	**X**			
-Tarefas com alunos.					**X**	**X**	**X**	
-Registros do desenvolvimento das tarefas com alunos.						**X**	**X**	
-Elaboração de relatórios e artigo							**X**	**X**

REFERÊNCIAS

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 36, n. 5, p. 412-443, 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC, 1998.