Universidade Estadual de Londrina

CHRISTIAN JAMES DE CASTRO BUSSMANN

CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO CURSO DE MATEMÁTICA SOBRE O CONCEITO DE GRUPO

Londrina
2009

CHRISTIAN JAMES DE CASTRO BUSSMANN

CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO CURSO DE MATEMÁTICA SOBRE O CONCEITO DE GRUPO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2009

CHRISTIAN JAMES DE CASTRO BUSSMANN

CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR ESTUDANTES DO CURSO DE MATEMÁTICA SOBRE O CONCEITO DE GRUPO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós – Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof^{a}. Orientadora: Dr^{a}. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina –PR

____

Prof^{a}. Dr^{a}. Marcia Cristina de Costra Trindade Cyrino
UEL – Londrina –PR

____

Prof^{a}. Dr^{a}. Regina Célia Guapo Pasquini
UEL – Londrina –PR

Londrina, 27 de agosto de 2009.

Aos guerreiros e guerreiras que conheci
nesta trajetória: minha mãe (Noemia),
meu pai (James), minha namorada
(Tatiane) e minha orientadora (Angela
Marta). Vocês sempre serão fonte de
inspiração para mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora Angela Marta Pereira das Dores Saviolli não só pela constante orientação neste trabalho, mas sobretudo pela sua amizade, compreensão nos momentos em que eu entrava em crise, dedicação e paciência que teve comigo neste período.

Agradeço aos professores Antonio Vicente M. Garnica e Marcia Cristina de Costa Trindade Cyrino por terem dado contribuições significativas para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao meu irmão Allan e sua esposa Josiane por todo apoio que me deram nos momentos mais difíceis, e olha que foram muitos, que nunca deixaram eu me abatesse nestes momentos de dificuldades.

Aos professores: Naresh Kumar Sharma por ter me ensinado a entender a beleza das estruturas algébricas e Regina Luzia Corio de Buriasco por ter me ensinado a gostar de fazer Educação Matemática.

Aos amigos que sempre me apoiaram e entederam a minha falta em vários momentos: Rogério (Black), Saulo, Renata, Fernando, Thiago, Raphael, Leziane, Marina, Acássio, Graziela, Liandra, Altair, Carol, Altair Filho, Maurício, Juliana, Rafael (Fidu).

Aos colegas de trabalho: Cidinha, Cristiane, Daniela, Merlin, Carlos Eduardo (Biluka), Sgarbi, André, Glauco, Ricardo, Bruno, Ailton, Viviane e Marília pelo apoio e por entenderem a minha falta em determinados momentos.

A todos agradeço.

“A ciência é obra do espírito humano que é antes destinado a estudar do que a conhecer, a procurar a Verdade do que achá-la. A finalidade única da Ciência é honrar o espírito humano e, dentro dêsse princípio, uma simples questão da teoriados números vale tanto quanto uma nova concepção do sistema do mundo”

(Evariste Galois)

BUSSMANN, Christian James de Castro. **Conhecimentos mobilizados por estudantes do curso de matemática sobre o conceito de grupo**. 2009. 90 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

RESUMO

Nesta pesquisa investigamos quais conhecimentos sobre o conceito de grupo são mobilizados por estudantes que já cursaram disciplinas de conteúdos algébricos, na resolução de um conjunto de problemas. Para tanto, aplicamos a um grupo de estudantes da terceira e quarta séries do curso de Matemática Licenciatura da UEL um conjunto de problemas envolvendo o conteúdo grupos e empregamos o trabalho de Sfard (1991) para a análise dos registros escritos. Utilizamos noções abstratas de conceitos matemáticos que podem ser concebidas como estruturais (objeto) e operacionais (processo), bem como, fases (interiorização, condensação ou reificação) que se manifestam no desenvolvimento de conceitos matemáticos, em particular, de estruturas algébricas. Pudemos concluir que os conhecimentos mobilizados pelos estudantes foram, em sua grande maioria, de caráter operacional e a concepção estrutural apareceu timidamente em algumas questões. As fases ocorreram em todas as questões, contudo houve destaque para a interiorização e a condensação.

Palavras-chave: Educação matemática. Grupo. Conceito. Operacional. Estrutural.

BUSSMANN, Christian James de Castro. **Knowledge involved in the course of mathematics students on the concept of group**. 2009. 90 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ABSTRACT

In this work we investigated what knowledge about the concept of group is mobilized by students who have studied algebraic subjects solving a set of problems. Therefore applied to a group of students from third and fourth years of the Mathematics course at UEL a set of problems involving the content groups and employ the work of Sfard (1991) for analysis of written records. We use abstract notions of concepts mathematicians that can be designed as structural (object) and operational (process),as well as stages (interiorization, condensation or reification) that manifest themselves in the development of concepts mathematicians, in particular, algebraic structures. We concluded that knowledge mobilized by the students was in most majority of operational character and structural design appeared tentatively on some issues. Phases occurred in all matters; however there was emphasis on the internalization and condensation.

Key words: Mathematical education. Group. Concept. Operational. Structural.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa está relacionada com o tema **Grupos**, estrutura algébrica que faz parte da disciplina de Álgebra A do Curso de Matemática, habilitação licenciatura, da UEL. A escolha desse tema se deve ao fato dessa estrutura abstrata sempre nos inquietar pela dificuldade no seu entendimento e sua necessidade para a formação do professor.

Considerando que o conceito de **Grupo** aparece em vários momentos no Curso de Matemática, habilitação licenciatura, pois ao trabalhar com os conjuntos numéricos, com o conjunto de matrizes e suas operações ou com permutações, estamos implicitamente trabalhando com grupos, cremos que abordar esse conteúdo seja importante para a formação do licenciado como matemático e futuro docente.

Na busca de literatura a respeito do assunto, fizemos um levantamento de trabalhos apresentados em eventos, como SIPEM (2006) e EBRAPEM (2004, 2007 e 2008), e artigos publicados (Tall 2002, Kaput 1999, Lajoie 2000, Lajoie e Mura 2004, Sfard 1991, entre outros) e notamos que existem poucos envolvendo conceitos algébricos no Ensino Superior, por conseguinte, existe pouca bibliografia em Educação Matemática a respeito de estruturas algébricas nesse nível de ensino.

Assim, neste trabalho, investigamos **quais conhecimentos sobre o conceito de Grupo são mobilizados por estudantes do Curso de Matemática, habilitação licenciatura, da UEL (que já cursaram disciplinas de conteúdos algébricos), na resolução de um conjunto de problemas?**

Para tanto, inicialmente buscamos identificar como o conceito de Grupo está presente:

- na literatura;
- no desenvolvimento histórico deste conceito;
- nos programas da disciplina Álgebra A do Curso de Matemática, habilitação licenciatura, da UEL;
- nos livros utilizados nesta disciplina.

Em seguida, aplicamos um instrumento contendo oito problemas a estudantes do Curso de Matemática, habilitação licenciatura, da UEL, que já cursaram as disciplinas de conteúdos algébricos, buscando identificar traços do conteúdo **Grupos** em seus registros escritos.

Na análise desses registros utilizamos as noções abstratas de conceitos matemáticos de Sfard (1991), que nos permitiu fazer considerações a respeito de estruturas algébricas no Ensino Superior. A autora entende as noções abstratas de conceitos matemáticos como estruturais (como objeto) e operacionais (como processo). Além disso, defende a existência de fases (interiorização, condensação ou reificação) que se manifestam no desenvolvimento de conceitos matemáticos, em particular, de estruturas algébricas.

No Capítulo 1, apresentamos algumas concepções sobre o conceito matemático, como operacionais e estruturais, bem como uma discussão a respeito do contexto em que estão inseridos. O conteúdo de grupos e seu desenvolvimento histórico são abordados no capítulo 2. No capitulo 3 explicitamos o encaminhamento metodológico assumido nesta pesquisa. A descrição e análise da experimentação realizada com os estudantes são apresentadas no capítulo 4. No capítulo 5 faremos um fechamento das análises realizadas e algumas considerações.

CAPÍTULO 1
CONCEPÇÕES SOBRE O CONCEITO MATEMÁTICO

Neste capítulo apresentamos algumas concepções a respeito do conceito matemático, seguindo o trabalho de Sfard (1991), que defende as concepções operacionais e estruturais, em diferentes contextos, quais sejam, histórico, psicológico e cognitivo. Abordamos, também, fases que, segundo Sfard (1991), se manifestam no desenvolvimento de conceitos matemáticos.

1.1 Conceito Matemático: Concepção Estrutural e Operacional

Esta dissertação está fundamentada no trabalho de Anna Sfard (1991) intitulado: "Sobre a natureza dual de concepções matemáticas: reflexões sobre processos e objetos como diferentes lados da mesma moeda".[1] Nesse trabalho, Sfard apresenta noções abstratas que podem ser classificadas de duas maneiras distintas: **estrutural** – como objeto, e **operacional** – como processo. Também, afirma que, nas últimas décadas, pesquisas foram feitas na tentativa de melhorar o ensino de matemática, mas que os resultados ainda não são satisfatórios.

A autora argumenta que a inacessibilidade matemática ultrapassa todas as dificuldades encontradas em outras áreas do conhecimento, fazendo com que a matemática seja a mais abstrata das ciências. Neste sentido, podemos citar Tall (2002) que afirma que, mesmo dentro da matemática, o pensamento matemático avançado (do ensino superior) se diferencia dos outros pensamentos, pois ele é dedutivo e abstrato.

Para Sfard (1991), essa inacessibilidade matemática é mais qualitativa do que quantitativa, pois para entender tal inacessibilidade é preciso olhar para a origem das dificuldades e investigar o caráter epistemológico relacionado à natureza do conhecimento matemático. Nessa perspectiva, uma questão que a incomoda é: "Como a abstração matemática difere dos outros tipos de abstrações em sua

[1] On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides for the same coin.

natureza, na maneira de se desenvolver e nas suas funções e aplicações?”[2] (SFARD, 1991, p.2).

Uma possível resposta seria mais facilmente encontrada na matemática, ou no pensamento matemático do ensino superior, em que, segundo a autora, “[...] a diferença entre a matemática e outras ciências torna-se mais evidente.” (SFARD, 1991, p.2). Da mesma forma, Tall (2002), afirma que:

> [...] devemos focar nossa atenção no círculo de atividades do pensamento matemático avançado: do ato criativo de considerar um contexto em pesquisa matemática, passando pela formulação criativa de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova. (TALL, 2002, p.3)

O mesmo autor ainda considera que muitas das atividades que ocorrem nesse círculo também ocorrem na resolução de problemas matemáticos elementares, contudo a possibilidade de definição e dedução formal é um fator que distingue o pensamento matemático avançado.

Sendo assim, ao refletirmos a respeito dessa inacessibilidade da matemática, cremos que o trabalho com objetos matemáticos relacionados ao ensino superior pode nos ajudar a entender a diferença entre a abstração matemática[3] e a abstração considerada como estado de alheamento do espírito, e também, como o conceito matemático emerge e quais são suas origens. Esse entendimento nos permitiria estabelecer uma ligação entre o pensamento e o conhecimento matemático, contribuindo para a compreensão das noções abstratas citadas anteriormente.

Acreditamos que, antes de fazermos considerações sobre como o conceito matemático surge, é necessário apresentarmos algumas definições de conceito e concepção.

Segundo o Dicionário Básico de Filosofia (1998), uma das acepções para a palavra conceito é: “noção abstrata ou idéia geral designando seja um objeto único seja uma classe de objetos” (JAPIASSU, MARCONDES, 1998, p. 48). De acordo com o mesmo dicionário, conceito, do ponto de vista lógico, seria “caracterizado por sua extensão e por sua compreensão” (JAPIASSU, MARCONDES, 1998, p. 48). Num estilo matemático, o Dicionário Básico de Filosofia (1998) aponta que “o conceito é uma noção de base que supõe uma definição rigorosa” e, em termos

---

[2] How does mathematical abstraction differ from other kinds of abstraction in its nature, in the way it develops, in its functions and applications?

[3] Segundo o dicionário Aurélio, é aquela em que um ente é definido pelas propriedades que o caracterizam

filosóficos, “o conceito designa uma idéia[4] abstrata e geral sob a qual podemos unir diversos elementos” (JAPIASSU, MARCONDES, 1998, p. 48) O Dicionário Aurélio on line[5] apresenta a definição de conceito como sendo: “idéia que uma pessoa faz de uma classe de objetos” e, também, como “uma consciência de suas qualidades que faz de um objeto ou de uma idéia o que são ou parecem ser”. Já Sfard (1991) considera conceito como “[...] uma construção teórica dentro “do universo formal do conhecimento ideal.” [6] (SFARD, 1991, p.3).

Com estas definições apresentadas, podemos constituir o que entendemos por **conceito**: é uma idéia matemática construída por meio de uma definição rigorosa dentro do universo formal do conhecimento ideal: uma idéia matemática construída por meio de uma definição rigorosa e aceita pela comunidade matemática.

Já a palavra **concepção**, segundo o Dicionário Básico de Filosofia (1998), é: “operação pela qual o sujeito forma, a partir de uma experiência física, moral, psicológica ou social, a representação de um objetivo de pensamento ou conceito” (JAPIASSU, MARCONDES, 1998, p 49), também, “operação intelectual pela qual o entendimento forma um conceito” (JAPIASSU, MARCONDES, 1998, p 49). Assim, concepção seria a formação da representação de um conceito. Segundo o Dicionário Aurélio on line[7], concepção é “ação pela qual um ser é concebido, gerado”; “conhecimento; idéia, opinião”, ou seja, como algo é formado. Sfard (1991) apresenta concepção como: “o conjunto das representações e associações internas relembradas pelo conceito” [8] (IBID).

Dentre as diversas definições apresentadas, entenderemos a palavra **concepção** como sendo a formação, pelo sujeito, a partir de experiências, de representações e associações emanadas do conceito.

Tendo um entendimento de conceito e concepção neste trabalho, apresentamos a seguir como Sfard (1991) apresenta a classificação de noções abstratas como **concepção estrutural** e **concepção operacional**.

A **concepção estrutural** de um conceito matemático se dá quando o estudante consegue tratar o conceito como objeto, olhando como um todo sem se prender a detalhes que envolvem o mesmo, “o pensamento estrutural cria uma

---

[4] Idéia como sinônimo de pensamento.
[5] Dicionário Aurélio on line, acessado em http://www.dicionariodoaurelio.com dia 23/06/09.
[6] a theorical construct within “the formal universe of ideal knowledge.
[7] Dicionário Aurélio on line, acessado em http://www.dicionariodoaurelio.com dia 23/06/09.
[8] The whole cluster of internal representations and associations evoked by the concept.

fisionomia para o conceito” [9] (IBID). Por exemplo, quando entende o conceito e não somente exemplos daquele conceito.

Já a **concepção operacional** ocorre na efetivação do conceito como um processo, “implica olhá-lo mais como um potencial do que como um conceito, o qual vem de uma seqüência de ações”[10] (IBID). Por exemplo, quando consegue trabalhar com o conceito sem necessariamente defini-lo.

A autora ainda afirma que a concepção estrutural é estática, instantânea e integradora e a operacional é dinâmica, seqüencial e detalhada.

Mesmo com essa distinção revelada pelas concepções estruturais e operacionais, Sfard (1991) argumenta que é praticamente impossível formular definições exatas do raciocínio estrutural e operacional. Assim, os elementos comuns às duas concepções são quantitativos, isto é, graus de abstração e de integração e, suas diferenças são qualitativas, isto é, a respeito das entidades matemáticas.

Sfard (1991) afirma que as concepções estruturais e operacionais não são exclusivas, mas sim complementares, e sendo assim considera que a noção matemática é dual. Afirma que para se ter um conhecimento profundo da matemática é imprescindível ver o conceito matemático como um **processo** e como um **objeto**. Ela apresenta alguns exemplos, de modo a mostrar que qualquer conceito matemático pode ser visto tanto do ponto de vista estrutural como operacional.

Tabela 1 - Descrição estrutural e operacional de noções matemáticas (IBID, p. 5)

	Estrutural	*Operacional*
Função	Conjunto de pares ordenados (Bourbaki, 1934)	Processo de Cálculo ou Método bem definido de obter um sistema de outro
Simetria	Propriedade de uma forma Geométrica	Transformação de uma forma Geométrica
Número natural	Propriedade de um conjunto ou A classe de todos os conjuntos com mesma cardinalidade finita	Zero ou qualquer número obtido de outro natural somado 1 (o resultado de contagem)
Número Racional	Par de inteiros (um membro de um conjunto de pares definido especificamente)	O resultado de divisão de inteiros
Circunferência	Lugar de todos os pontos equidistantes de um ponto dado	Uma curva obtida de rotação de um compasso em torno de um ponto fixo.

[9] We can say that structural thinking endows a concept with “a kind of physiognomy”
[10] Implies regarding it as a potential rather than actual entity, wich comes into existence upon request in a sequence of actions.

Segue a nossa idéia sobre a concepção estrutural e operacional do conceito de grupo, nosso objeto de estudo.

Tabela 2 - Descrição estrutural e operacional do conceito de grupos

	Estrutural	*Operacional*
Grupos	Definição de Grupo	Processo de desenvolvimento do conceito de grupo, a partir da busca de soluções para equações algébricas.

Entendemos que a definição de grupo seria uma concepção estrutural, pois se apresenta estática e instantânea. A concepção operacional aparece no processo de desenvolvimento desse conceito, numa forma dinâmica e seqüencial, advindo da busca de soluções para equações algébricas, de permutações e do trabalho com conjuntos numéricos.

Como exemplo, Sfard (1991) argumenta que representações algébricas que contém o sinal de igual (=) podem ser interpretadas de ambas as maneiras (operacional e estrutural), devido à dualidade do símbolo de igual (=), o qual pode ser interpretado como uma identidade ou como um “comando” para executar operações.

> As representações algébricas podem ser facilmente interpretadas de ambas as maneiras: pode ser explicada operacionalmente, como uma descrição concisa de alguns cálculos, ou estruturalmente, como uma relação estática entre duas magnitudes [11] (SFARD, 1991, p.6).

Nessa perspectiva, o conceito de grupo pode então ter essas duas concepções. Por exemplo, no caso de verificarmos se os reais com a operação $*$, dada por $x*y = x + y - 7$, é um grupo, podemos interpretar como sendo uma relação de identidade entre duas magnitudes (estrutural), mas também podemos entender como um comando (computacional) necessário para executar operações (operacional).

Sfard (1991) afirma que os conceitos matemáticos têm uma característica mais estrutural (estática) podendo criar uma “figura mental”, e assim alguns tipos de representações internas se mostram mais apropriadas que outras.

[11] The algebraic representation can easily be interpreted both ways: it may be explained operationally, as a concise description of some computation, or, structurally, as a static relation between two magnitudes.

> Conceitos matemáticos são, às vezes, visualizados com a ajuda de 'figuras mentais' [...] Imagens mentais sendo compactadas e integrativas, parecem sustentar a concepção estrutural [...] podem ser manipuladas quase como se fossem objetos reais. [...] Em contraste, a codificação verbal não pode ser captada instantaneamente à primeira vista e precisa ser processada sequencialmente, sendo, portanto, parecer ser mais apropriada para representação de procedimentos de cálculo. Logo, a representação interna não-figurativa é mais pertinente para o modo de raciocínio operacional [12] (IBID, p. 6-7).

A seguir discutiremos como o desenvolvimento histórico, psicológico e cognitivo do conceito e as concepções estrutural e operacional se relacionam.

1.1.1 No contexto histórico

Apresentamos aqui, como as concepções estrutural e operacional podem ser percebidas no desenvolvimento histórico.

Sfard (1991) argumenta que, no caso de funções e conjuntos, somos forçados a ignorar sua construção, considerando somente a forma estrutural, parecendo que tais conteúdos têm um estágio mais avançado no desenvolvimento do conceito.

A autora afirma que a concepção operacional, em muitos casos, ocorre antes da estrutural, sendo que a história apresenta algumas situações em que se percebe tal evento, assim como exceções a tal afirmação.

> Um olhar cuidadoso na história dos conceitos de números ou funções nos mostrará que eles foram concebidos operacionalmente muito antes que suas definições e representações estruturais fossem inventadas[13] (SFARD, 1991, p.11).

Já Vidigal (2007) argumenta que:

> A exceção é possível de ser encontrada nos fatos históricos que envolvem a Geometria, por exemplo, pois geralmente encontramos abordagens estruturais antes de abordagens operacionais (VIDIGAL, 2007, p. 52).

[12] Mathematical concepts are sometimes envisioned by help of "mental pictures"[...] Mental images, being compact and integrative, seem to support the structural conception [...] mental images can be manipulated almost like real objects. [...] In contrast, verbal encoding cannot be grasped "at one glance" and must be processed sequentially, so it seems more apropriate for representing computational procedures. Thus, the non-pictorial inner representation is more pertinent to the operational mode of thinking.

[13] A close look at the history of such notions as number or function will show that they had been conceived operationally long before their structural definitions and representations were invented.

Sfard (1991) acredita que alguns desenvolvimentos históricos se deram em um processo cíclico, e, a cada ciclo, surgia algo novo. É nessa perspectiva que acreditamos que o conceito de **Grupo** surgiu sempre na tentativa de se resolver equações algébricas cada vez mais complexas.

Esta manifestação histórica pode evidenciar as alterações do operacional para estrutural e em que momento se deu essa mudança. No caso do conceito de **Grupo**, objeto de nosso estudo, isto pode ser significativo para entender como esse conteúdo é apresentado e por que ele é dado de tal maneira.

Com esse ponto de vista, Sfard (1991) acredita que alguns desenvolvimentos históricos, de conteúdos matemáticos, se deram como:

> [...] uma longa corrente de transição do operacional para estrutural: e vice-versa, os processos executados em objetos abstratos, foram convertidos e compactados, ou reificados (do latim a palavra rei – uma coisa) para se transformar em um novo tipo de construção estática e auto-suficiente [14] (IBID, p.14).

A autora ainda afirma que "toda a história da noção pode ser vista como uma longa seqüência ativa, na maioria das vezes falhando na tentativa de reificação". [15] Leonhard Euler (1707 – 1783), segundo Milies (1992), teve alguns fracassos neste processo, principalmente ao tentar fazer uma aproximação da álgebra e dos gráficos.

Sfard (1991) argumenta que em determinado estágio, matemáticos e filósofos faziam tudo de maneira intuitiva se esforçando na reificação e assim tentando estabelecer uma definição utilizando como pano de fundo a prática comum para justificar e referenciar o funcionamento de tal definição.

Ainda segundo a autora, essa tentativa de conversão da intuição operacional para uma definição estrutural teve inúmeras falhas, levando muitos matemáticos, liderados por Johann Dirichelet (1805 – 1859), a criticarem este processo algorítmico, aceitando assim a definição do grupo Bourbaki [16] (puramente estrutural).

---

[14] A long chain of transitions from operational to structural conceptions: again and again, processes performede on already accepted abstract objects have been converted into compact whole or reified (from the Latin wor res – a thing), to become a new kind of self-contained static constructs.
[15] All the further of the notion may be seen a long sequence of strenuous, if mostly failed, attempts at reification.
[16] Grupo Nicolas Bourbaki: grupo de matemáticos franceses que tentaram reunir e formalizar toda a matemática, em meados do século passado.

> Quando nós olhamos a matemática (ou pelo menos em grandes porções) como um todo, nós notamos que ela tem um tipo de hierarquia, na qual o que é concebido operacionalmente em um determinado nível deveria ser concebido estruturalmente num nível mais elevado. Tal hierarquia emerge de uma longa seqüência de reificações [...] O processo da formação do conceito pode ser mais confuso do que a implicação do nosso modelo unidirecional. Este modelo, entretanto, será considerado não mais como uma primeira aproximação, indicando apenas a tendência que está prevalecendo [17] (SFARD, 1991, p.16).

No capitulo 2, ao apresentarmos como o conceito de **Grupo** se manifestou historicamente, poderemos verificar que a transição do operacional para o estrutural aparece.

1.1.2 No contexto psicológico

Segundo Sfard (1991) a formação do conceito estrutural é lenta e muitas vezes um processo difícil. Nessa perspectiva, a dificuldade deve ser analisada pela psicologia. No entanto, a autora afirma que vai se ater em responder a seguinte pergunta:

> [...] é verdade que, quando uma pessoa adquire um novo conceito matemático, a concepção operacional é na maioria das vezes a primeira a se desenvolver? [18] (IBID, p. 16)

A autora acredita que a resposta a tal questão é afirmativa. Neste sentido, "... o esquema que foi desenvolvido historicamente pode ser usado na descrição dos processos de aprendizagem" (IBID).

> Primeiramente, a afirmação acima coloca que há um curso "natural" de eventos no processo, que dificilmente pode ser considerado como espontâneo. Assim, a aprendizagem matemática, especialmente em níveis mais avançados, não acontece sem que haja uma intervenção externa (do professor, de um livro) e pode ainda ser dependente de um tipo de estímulo (método de ensino) para acontecer [19] (IBID, p.17).

---

[17] When we broaden our view and look at mathematics (or least at its big portions) as a whole, we come to realize that it is a kind of hierarchy, in wich what is conceived purely operationally at one level should be conceived structurally at a higher level. Such hierachy emerges in a long sequences of reifications [...] The process of concept formation would look more intricate than implied by our unidirectional model. This model, however, is to be regarded as not more than a first approximation, indicating only the prevalent tendency.

[18] Is it true that when a person acquainted with a new mathematical notion, the operational conception is usually the first to develop?

[19] Firstly, the above statements imply that is some "natural" course of events in process, wich can hardly be regarde as spontaneous. Indeed, mathematical learning expecially at more advanced levels, cannot be expected to take place without

Em um contexto psicológico, este tipo de afirmação “operacional antes do estrutural”, que segundo Sfard (1991), pode ser entendido como sendo uma prescrição para ensinar. A autora afirma que sua argumentação é baseada nas pesquisas de Piaget, considerado o pioneiro neste campo. Em seu trabalho, denominado *Epistemologia Genética*, Piaget (1993) afirma que:

> [...] a abstração [matemática] deriva-se não do objeto sobre qual se atua, mas da própria ação. Parece-me que esta é base da abstração lógica e matemática[20] (PIAGET, 1978, p.50).

Desse ponto de vista, podemos assegurar que, se em certo nível a concepção de um conceito é operacional, este mesmo conceito poderá ser concebido de maneira estrutural em um nível superior. Por exemplo, quando usamos problemas para introduzir um conceito, o estudante utiliza a concepção operacional e, assim que o resolve e generaliza, passa do operacional para o estrutural.

Nesta perspectiva, primeiro deve ser realizado um processo com objetos já conhecidos para chegar a um conceito autônomo, e finalmente desenvolver uma habilidade para ver se este “novo” conceito é um objeto adquirido.

A partir dessa discussão, a autora afirma que existem três fases distintas na formação do conceito, que denomina como sendo “degraus de estruturação” e é uma análise teórica existente entre o processo e objeto.

A autora considera que a formação do conceito é hierárquica e denomina as fases como sendo **interiorização**, **condensação** e **reificação**. Apresentamos uma definição de cada uma dessas fases.

Interiorização é o estágio no qual o estudante consegue uma familiaridade com o novo conteúdo. Os processos que são executados, nesta fase, nos objetos matemáticos, são de um grau de dificuldade inferior de maneira que o novo conceito possa ser organizado.

> O termo “interiorização” é usado aqui praticamente no mesmo sentido dado por Piaget. Nós poderíamos afirmar que o processo foi interiorizado se “pode ser executado por meio de representações [mentais]”, e para ser

---

external intervention (of teacher, of a textbook) and may therefore be higly dependent on a kind of stimulus (of teaching method) wich has been used.

[20] The [mathematical] abstration is draw not from the object that is acted upon, but from the action itself. It seem to me that this is the basis of logical and mathematical abstraction.

> considerado analisado e comparado não precisa mais ser realmente efetuado [21] (SFARD, 1991, p.18).

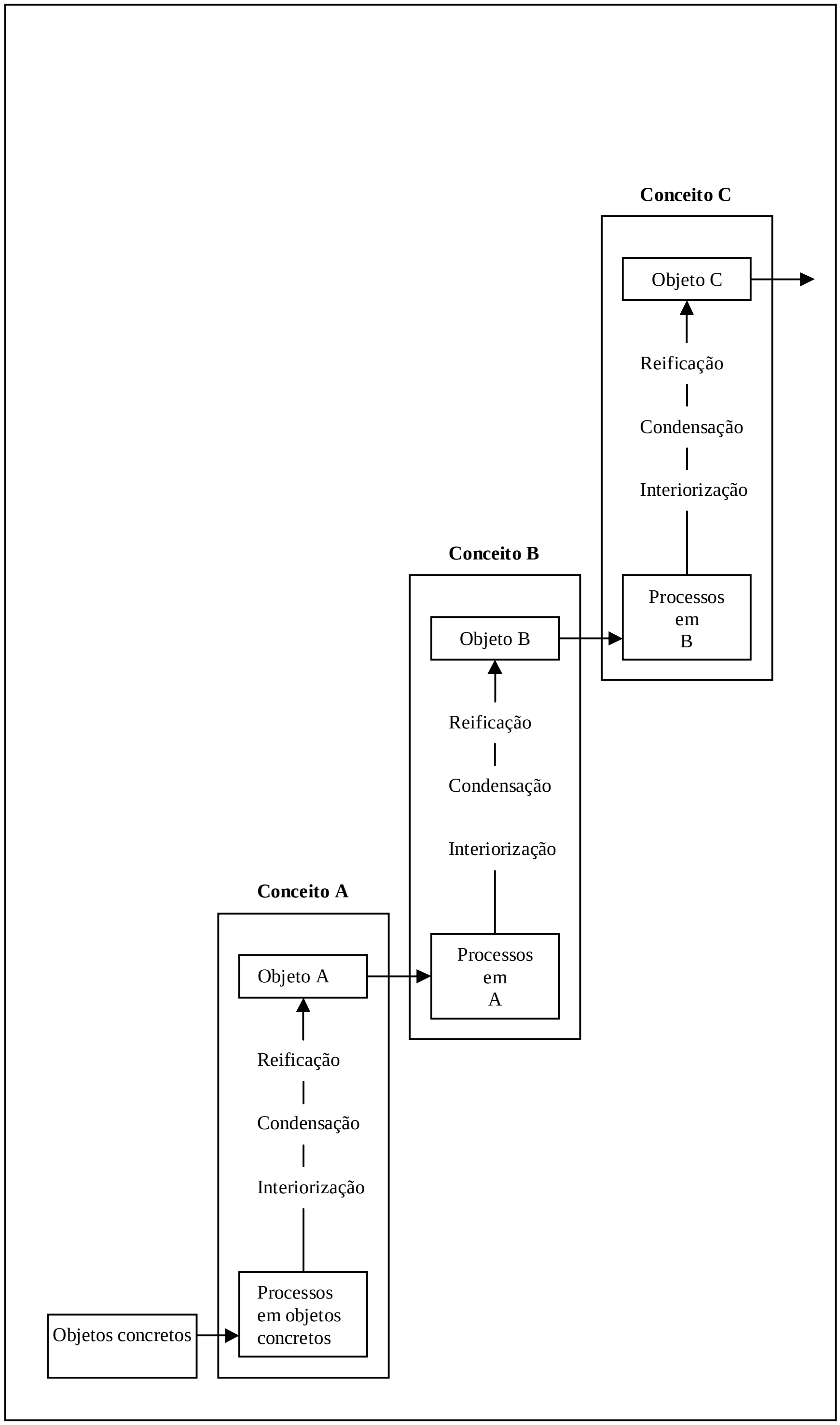
Na **condensação** o estudante começa a pensar sobre o processo como um todo, sem ficar preso a detalhes, ou seja, é o momento em que ele começa a fazer compactações das seqüências de operações. É neste ponto que nasce o conceito. Nesse momento, torna-se mais fácil elaborar generalizações, comparações e combinações com outros processos. Assim, o estudante tem maior facilidade em alternar entre os diferentes perfis (da operacionalização para a estruturação) sobre o conceito. A condensação se perpetua enquanto tiver conectada a um conceito.

Sfard (1991) define **reificação** como sendo: “o momento em que se torna possível “ver” um conceito como um objeto”. Dentre as diversas definições da palavra reificação apresentadas pelo Dicionário Houaiss (2001) temos: “processo em que uma realidade social ou subjetiva passa a determinar características de um objeto inorgânico perdendo sua autonomia e autoconsciência.” Já o Dicionário Básico de Filosofia (1996) define reificação como “a transformação de uma representação mental em uma “coisa”, atribuindo-lhe assim uma realidade autônoma, objetiva”. O Dicionário Aurélio on line[22] apresenta-a como: “transformação em coisa”. Notamos que, apesar das diversas definições, todas apresentam as mesmas características. Neste sentido, entendemos reificação como sendo a transformação de um conceito num objeto. Nessa perspectiva, a partir do momento em que o estudante deixa de ver um conjunto numérico por meio de uma operação usual e suas propriedades e passa a observá-lo como uma estrutura que pode ser aplicada em outros entes, ele passa por um processo de reificação.

> Assim, enquanto interiorização e condensação são mudanças graduais mais quantitativas do que qualitativas, a reificação é um salto quântico instantâneo: um processo que se solidifica num objeto, numa estrutura estática. Várias representações do conceito se tornam semanticamente unificadas por esta construção abstrata, puramente imaginária. O novo conceito é logo separado do processo que o produziu e começa a formular seu significado: de ser membro de uma determinada categoria. Em algum momento, esta categoria mais que qualquer tipo de construção concreta se torna a mais nova base para sustentar a existência de um novo objeto (IBID, p.19-20).

---

[21] The term “interiorization” is used here in much the same sense wich was given to it by Piaget, we would say that a process has been interiorized if it “can be carried out through [mental] representation”, and in order to be considered, analyzed and compared it needs no longer to be actually performed.
[22] Dicionário Aurélio on line acessado dia 23/06/09.



Quadro 1 – Desenvolvimento conceitual de acordo com Sfard (1991, p.22)

Nessa hierarquia, o desenvolvimento histórico conceitual é cíclico, pois "o estágio de reificação é o ponto onde começa uma interiorização de conceitos de alto nível" [23] (IBID, p.20).

O quadro 1 mostra como esse desenvolvimento conceitual, de um modo geral, se dá por meio deste esquema (interiorização, condensação e reificação).

1.1.3 No contexto cognitivo

Segundo Sfard (1991), o processo de reificação é o mais difícil de ser atingido, pois necessita de uma alteração na maneira de se ver o conteúdo, mudança esta que a autora considera como sendo ontológica.

Nesse aspecto, é interessante fazer uma análise básica do processo de reificação do que propriamente fazer uma abordagem direta sobre a dificuldade da mesma.

Apresentamos a seguir reflexões a respeito da abordagem operacional e estrutural, bem como das dificuldades da reificação.

1.1.3.1 Abordagem operacional

> Aparentemente, o modo puramente operacional de olhar para a matemática pode ser bastante apropriado. Assim, para uma pessoa sem preconceito e perspicaz, a própria noção de "objeto matemático" pode aparentar supérflua: pois aparenta que os processos são a preocupação real da matemática [24] (SFARD, 1991, p. 23).

De acordo com a autora, é possível dar um tratamento puramente operacional em quase toda matemática: "nós poderíamos passar de processos

[23] The stage of reification is the point where an interiozation of higher-level concepts begins.
[24] Apparently, a purely operational way of looking at mathematics would be quite appropriate. Indeed, to an unprejudiced an insightful person, the very notion of "mathematical object" may appear superfluous: since processes seem to be only real concern of mathematics.

elementares para processos de níveis elevados e assim ter um processo complexo, sem nos referirmos a qualquer objeto abstrato" [25] (IBID).

E ainda, segundo a autora, a matemática Egípcia e Babilônia foi puramente algorítmica, e somente há poucos séculos atrás que pudemos observar que existe matemática com pouco ou nenhum algoritmo, sendo este tipo de matemática considerada puramente dialética [26] ou existencial, ou seja, existe matemática que requer mais o raciocínio do que algoritmos.

O que podemos notar do conceito de **Grupo** é que ele tem uma característica mais existencial do que propriamente algorítmica, pois na resolução dos exercícios o que se destaca é a questão do raciocínio do que fórmulas.

Segundo a autora, a noção que temos de Álgebra hoje é totalmente distinta da característica operacional de mil anos. "Era chamada álgebra "retórica" da qual procedeu a sincopada e a álgebra simbólica (esta última foi desenvolvida a partir do século XVII)". [27] (IBID, p. 24) Exemplificando, temos que, por mais complexa que seja uma seqüência de operações numéricas apresentadas para auxiliar um preceito verbal, ela pode não estimular a condensação e a reificação.

1.1.3.2 Abordagem estrutural

> A matemática do século vinte, no entanto, parece estar profundamente penetrada pela visão estrutural. Um matemático moderno que parece ser bastante receptivo na compreensão de um ponto de vista filosófico (não psicológico) de que poderia fazer sem um objeto matemático [28] (IBID, p.24).

O que Sfard (1991) questiona é que esta noção é tão inerente à Matemática, que se distancia de outras áreas do conhecimento como a Física. Contudo, faz algumas ponderações sobre esta visão estrutural sem o conhecimento

---

[25] we could proceed from elementary processes to higher-level processes and then to even more complex processes without ever referring to any kind of abstract objects.
[26] Arte de raciocinar.
[27] The so called "rhetorical" algebra, wich preced the syncopated and symbolic álgebras (the last one developed not before the 16th century!).
[28] Twentieth-century mathematics, however, seems to be so deeply permeated with the structural outlook, that a modern mathematician had to be exceptionally open-minded to realize that from a philosophical (not psychological!) point of view he could do without "mathematical objects".

do objeto matemático. “Alguém pode imaginar uma noção sem um corpo físico?” [29] (IBID).

A autora ainda pondera a respeito da abstração e, ao que parece, somos propensos a fazer abstrações de estruturas reais. Este tipo de preocupação, segundo Sfard (1991), remete a vários níveis de objetos mentais. No entanto, enfatiza que mesmo com essa capacidade de fazer abstrações, se não tivermos domínio do processo não conseguiremos fazer nada.

> [...] a informação operacional concebida, embora absolutamente indispensável e aparentemente suficiente na resolução de problemas, não pode ser facilmente processada. Este tipo de informação pode ser armazenado em um esquema cognitivo desorganizado, do qual é inadequado para o funcionamento da memória humana [30] (IBID, p. 26).

A conseqüência é que se o operacional for processado gradativamente, e de forma desordenada, pode acarretar uma incômoda idéia de incapacidade para se entender determinado conceito. Nessa perspectiva, a autora argumenta que, por mais difícil que seja trabalhar com uma definição operacional, seria interessante fazer esse experimento, imaginando como seria resolver um problema sem os símbolos algébricos. Este tipo de experimentação, segundo a autora, pode apontar para um esquema cognitivo que seria a dificuldade de se assimilar novos conhecimentos, ou como ela denomina “aprendizagem significativa” [31] (IBID, p. 26).

Acreditamos que ao fazer esse experimento, o estudante deixaria o nível de interiorização e passaria para o nível de condensação. Assim, também estaria estruturando um processo, que em um nível operacional poderia estar de forma desordenada.

Desse modo, a autora afirma que “é a representação estática que pressiona a informação operacional para um esquema cognitivo compacto e mais estruturalmente convincente” [32] (IBID, p.26). Isto é, a concepção estrutural força o operacional a virar um conceito. Nesse sentido, podemos inferir que tanto a resolução de problemas como os procedimentos de aprendizagem podem se utilizar do processo citado acima, com a utilização de perfis genéricos, na tentativa de dar

---

[29] Can anybody image notion without physical bodies?

[30] the operationally conceived information, although absolutely indispensable and seemingly sufficient for problem-solving, cannot be easily processed. This kind of information ca only be store in unstructured, sequential cognitive schemata, which are inadequate for the rather modest dimensions of human working memory.

[31] Meaningful learning.

[32] it is the static representations wich squeezes the operational information into a compact whole and turns the cognitive schema into more convicent structure.

um direcionamento estrutural ao que aparenta ser confuso em um estágio operacional. Isto é, no processo operacional, as idéias podem estar de forma desordenada, mas à medida que colocamos um perfil estático, essa desorganização pode ser organizada. Por exemplo, tomemos a equação $2x + 3 = 1$ e solicitemos que alguns estudantes resolvam, colocando as letras de um lado e os números de outro. Para resolvê-la, operacionalmente, sem uma organização das idéias, um estudante poderia apresentar como registro escrito, $x = \frac{1}{2} - 3$. Ele operou a equação e colocou a letra de um lado e os números de outro. Mas, resolveu de maneira errada, isto é, operou de maneira errônea.

Ao se referir às estruturas complexas, a autora afirma que, se começarmos com operações concretas, pode haver muitas dificuldades na transformação para um processo estrutural. Mas a partir do momento que conseguimos chegar a esse nível superior de representações, este nos fornecerá uma visão geral, de modo que a olhar para estes objetos abstratos de maneira a nos fornecer informações ordenadas.

> Em outras palavras, em um processo de resolução de problemas, a entidade compacta abstrata serve como indicador para detalhar melhor a informação. Assim, quase toda atividade matemática pode ser vista com uma complicada alternação entre as versões operacional e o estrutural de uma mesma idéia matemática [33] (IBID, p.27-28).

Sendo assim, com este complexo emaranhado entre o operacional e o estrutural, o que a autora também afirma é que enquanto “o modo estrutural nos convida a contemplação; o processo operacional às generalizações de resultados” [34] (IBID, p. 28).

Com as ponderações colocadas acima, acreditamos que temos agora capacidade de defender a necessidade de uma concepção estrutural, pois esta se deve ao fato de haver uma distância muito grande entre processos de cálculos avançados e as entidades concretas da matemática que compõe o cenário em que a maioria dos processos elementares se encontram.

[33] In other words, in problem-solving processes the compact abstract entities serve as pointers to more detailed information. Thus, almost any mathematical activity may be seen as an intricate interplay between the operational and the structural versions of the same mathematical ideas

[34] the structural approach invites contemplation; the operational approach generates result.

> Já que não somos nenhum super-computador, não poderíamos simplesmente trabalhar num processo complexo sem dividi-lo em pequenos pedaços e sem comprimir cada parte para dentro de um todo mais manejável [35] (IBID, p. 28).

A autora considera o fato de trabalharmos em um processo complexo de maneira particionada como sendo uma entidade cognitiva compacta que seguramente nos protege de nosso trabalho mental, evitando assim que não se perca nesse processo.

No entanto, em determinado estágio, mesmo que a concepção estrutural não esteja presente, a quantidade de informações é tão grande, que o esquema da transformação do operacional para o estrutural estará saturado e praticamente cheio. Vejamos o exemplo da Álgebra: a transformação do retórico para o simbólico se deu num processo particionado (sendo esta transição, uma mudança do operacional para o estrutural). E como a autora afirma, “não foi um acidente histórico de diversos sistemas de símbolos que foram inventados quase que simultaneamente por trabalhos independentes de matemáticos” [36] (IBID, p. 29).

Assim, podemos inferir que a grande complexidade dos processos computacionais colocou um fim ao desenvolvimento da álgebra retórica. Neste sentido, a autora ousa conjecturar que a “ausência de uma concepção estrutural foi um dos fatores que diminuiu o desenvolvimento científico na Grécia Antiga e causou a queda da álgebra perante a geometria por séculos” [37] (IBID, p. 29).

Nessa linha de pensamento, podemos afirmar que a concepção estrutural é uma ferramenta que vem contribuir para a minimização do processo. Sob um ponto de vista filosófico, a transição de um processo para um objeto abstrato aumenta o entendimento da matemática. Assim, podemos dizer que a inclusão do processo de reificação melhora esta ferramenta, aumentando a capacidade de resolver problemas e de aprender.

---

[35] Since we are not super-computers, we just could not get along with very complex processes without breaking into small pieces and without squeezing each part into more manageable whole.
[36] it was not a historical accident that several different system of symbols were invented almost simultancously by independently working mathematians.
[37] the absence of structural representations was one of the factors that slowed down the development of computational science in Ancient Greece and caused algebra´s falling behind geometry for centuries.

1.1.3.3 A dificuldade da reificação

Após toda essa apresentação e argumentação sobre a necessidade de uma concepção estrutural, uma questão ainda incomoda a autora: “Porque a reificação é obviamente a mais difícil?” [38] (IBID, p.30).

A capacidade de ver algo como familiar é uma idéia nova e difícil de alcançar. “... as dificuldades, que surgem quando um processo é convertido em um objeto, são, num certo sentido, como experimentos durante uma transição de um paradigma científico para outro” [39] (IBID).

Considerando que a dificuldade de reificação se dá como a autora apresenta acima, o esquema de três fases (interiorização, condensação e reificação) pode servir como uma alternativa para minimizar essas dificuldades. Exemplificando, no caso de **Grupo**s, o estudante poderia inicialmente trabalhar com as propriedades, não necessariamente em ordem (associativa, elemento neutro, elemento simétrico), e a partir do momento em que ele observar que para resolver equações algébricas ele precisa dessas propriedades em uma determinada ordem, ele deixa o processo de interiorização e passa para a condensação. E, no instante em que “enxergar” a estrutura de **Grupo** em situações que não sejam especificamente relacionadas a **Grupo**, ele chega ao processo de reificação. Assim, acreditamos que, ao passar por essas fases, o estudante compreendeu o conceito de **Grupo**.

O que se nota é que esse processo de três fases aparenta ser fácil, pois primeiro se trabalha com as operações, depois se define uma “regra” e finalmente “aplica-se” essa regra. Contudo, Sfard (1991) argumenta que:

> [...] há um círculo vicioso: de um lado, sem a realização de uma interiorização em nível avançado, a reificação pode não ocorrer; por outro lado, a existência de objetos neste nível avançado do processo é indispensável para sua interiorização. [...] Em outras palavras o nível mais baixo da reificação e o nível mais alto da interiorização são pré-requisitos de cada um! [40] (IBID, p. 31).

---

[38] Why is reification obviously so very difficult?
[39] The difficulties arising when a process is converted into an object are, in a sense, like those experienced during transition from one scientific paradigm to another.
[40] But here is a vicious circle: on one hand, without an attempt at the higher-level interiorization, the reification will not occur; on the other hand, existence of objects on wich the higher-level processes are performed seems indispensable for the interiorization.[...] In other words: the lower-level reification and the higher-level interiorization are prerequisite for each other!

O que se pode notar é que o “círculo vicioso” da reificação pode trazer contribuições significativas e ajudar, segundo Skemp, a explicar a argumentação utilizada por estudantes que “a matemática escolar é uma coleção de regras tolas das quais, se memorizando e aplicando corretamente, leva ao exercício correto” [41] (SKEMP, apud SFARD, p. 31).

Com esta citação de Skemp, não é de se estranhar que os estudantes aprendam somente a rotina da manipulação: primeiro faz isto, depois faz aquilo, sem entender o conceito e em seguida manipular o conceito.

Em seu trabalho, Sfard (1991) apresenta um exemplo, afirmando que os estudantes trabalham com as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) no conceito de frações, mas não conseguem entender uma fração como sendo um número.

Podemos assim afirmar que o que está sendo evidenciado é o mecânico, deixando de lado o entendimento e que a matemática do ensino superior não consegue escapar a essa situação. Muitas vezes os alunos trabalham com questões e problemas sem se importar em entender como se faz.

A autora se preocupa com o processo de reificação, pois segundo a mesma, é um processo demorado, e que requer muito trabalho, mas que, no entanto pode acontecer repentinamente.

> A reificação, que esta relacionada a compreensão, é difícil de ser alcançada, requer muito esforço e pode aparecer quando menos se espera algumas vezes como um flash repentino [42] (IBID, p. 33).

Do ponto de vista educacional, o problema é que a reificação pode demorar a acontecer, pode causar danos irreversíveis e pode gerar “uma vida cheia de apreensão quanto à matemática e uma convicção de que ela não poderá ser aprendida” [43] (IBID, p. 33).

A autora deixa claro que a habilidade de se trabalhar com a reificação em um nível menor e com a interiorização em um nível maior é de suma importância para o seu entendimento da matemática.

---

[41] Mathematics at school [is] a collection fo unintelligible rules wich, if memorized and applied correctly, [led] to ‘right answer.

[42] The reification, wich brings relational understanding, is difficult to achieve, it requires much effort, and it may come when least expected, sometimes in a sudden flash.

[43] a life-long apprehension of mathematics and a conviction that it cannot be learned.

> Sob a luz da tese do “círculo vicioso”, parece que a procura por uma melhora na educação matemática é que nós encontremos um foco na questão do porquê, e quanto pode ser feito para desvendar esta confusão e simular a reificação [44] (IBID, p. 34).

Apresentamos finalmente um quadro no qual a autora faz um resumo das concepções estruturais e operacionais.

Tabela 3 - Concepções operacionais e estruturais – Resumo (IBID, p.33)

	Concepção operacional	*Concepção estrutural*
Características gerais	Uma entidade matemática é concebida como produto de um processo ou identificada com o próprio processo	Uma entidade matemática é concebida como uma estrutura estática – como se fosse um objeto real
Representações internas	É sustentada por representações verbais	É sustentada por imagens visuais
Seu lugar no desenvolvimento conceitual	Desenvolve-se nos primeiros estágios de formação de conceito	Evolui a partir da concepção operacional
Seu papel nos processos cognitivo	É necessária, mas não suficiente para um efetivo aprendizado e na resolução de problemas	Facilita os processos cognitivos (aprendizado, resolução de problemas)

[44] In the light of the “vicious circle” thesis, it seems, that in the search for an improvement in mathematics education we should focus on the question what, and how much, can be done to unravel the harmful tangle an to simulate reification.

CAPÍTULO 2
CONCEITO DE GRUPO

Apresentamos neste capítulo o conceito de **Grupo**, seu desenvolvimento histórico e como ocorrem as fases de interiorização, condensação e reificação deste conceito. Também exibiremos exemplos de **Grupos**, inclusive de **Grupos** considerando conjuntos não numéricos (que não são subconjuntos dos complexos).

2.1 Aspectos Matemáticos

O conceito de **Grupo** é considerado por muitos matemáticos como fundamental ao caráter organizacional da Matemática.

A definição de **Grupo**, exceto algumas pequenas variações, é dada por:

> [...] Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio G e uma operação sobre G é chamado **Grupo** se essa operação se sujeita aos seguintes axiomas:
>
> Associatividade: $(a * b) * c = a * (b * c)$, quaisquer que sejam a, b, $\in$ G;
>
> Existência do elemento neutro: existe um elemento $e \in$ G tal que $a * e = e * a = a$, qualquer que seja a $\in$ G;
>
> Existência de simétricos: Para todo a $\in$ G existe um a' $\in$ G tal que $a * a' = a' * a = e$;
>
> Se, além disso, cumprir o axioma da comutatividade: $a * b = b * a$, quaisquer que sejam a, b $\in$ G, o **Grupo** recebe o nome de **Grupo** comutativo ou abeliano (DOMINGUES e IEZZI, 2003, p. 138-139).

Da definição, temos as seguintes propriedades imediatas de um **Grupo** (G, $*$):

- a unicidade do elemento neutro;
- a unicidade do elemento simétrico;
- que o simétrico do simétrico é o próprio elemento, isto é, $(a')' = a$ qualquer seja a $\in$ G;
- $(a * b)' = b' * a'$ e, portanto por indução tem-se: $(a_1 * a_2 * a_3 * \ldots a_n)' = a_n' * a_{n-1}' * \ldots * a_1'$ $(n \geq 1)$;

- Existe uma regularidade em todo elemento de G na operação $*$: se $a * x = a * y$, então $x = y$ e se $x * a = y * a$, então $x = y$.

Apresentamos agora alguns exemplos de **Grupo**s:

1) Grupo aditivo dos inteiros, dos racionais e dos reais

Formado pelo conjunto dos inteiros (racionais ou reais) e a operação de adição usual, gozando das propriedades: associativa, elemento neutro (o zero) e elemento simétrico (o oposto) dos inteiros (racionais ou reais). Também goza da propriedade comutativa.

Notação: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$.

2) Grupo aditivo dos complexos

Formado pelo conjunto dos números complexos $\mathbb{C} =\{a+bi;\ a,b \in \mathbb{R},\ i^2 =-1\}$, com a operação de adição dada por $(a+bi)+(c+di) = (a+c) + (b+d)i$, para todos a,b,c e d pertencentes aos reais, e gozando das propriedades associativa, elemento neutro (0+0i), elemento simétrico e comutativa.

Notação: $(\mathbb{C}, +)$.

3) Grupo multiplicativo dos racionais e dos reais

Formado pelo conjunto dos racionais (reais) não nulos e a multiplicação usual, gozando das propriedades: associativa, elemento neutro (o número 1) e elemento simétrico (o oposto) dos racionais (ou reais). Também goza da propriedade comutativa.

Notação: $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ e $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

4) Grupo multiplicativo dos complexos

Formado pelo conjunto $\mathbb{C}^*$ com a operação de multiplicação dada por $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, gozando das propriedades associativa, elemento neutro $(1 = 1 + 0i)$, elemento simétrico e comutativa.

Notação: $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

5) Grupo aditivo de matrizes m X n com entradas nos inteiros, racionais ou reais

Indicaremos por K um os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, e por $M_{mxn}(K)$ o conjunto das matrizes com entradas em K. Este conjunto $M_{mxn}(K)$ com a operação de adição de matrizes, ou seja, considerando-se A e B duas matrizes de mesma ordem, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}, \text{ então:}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Este conjunto com a operação de adição para matrizes goza das propriedades associativa, elemento neutro (a matriz nula mxn), elemento simétrico e comutativa.

Notação: **(M_{mxn}(K), +).**

6) Grupos lineares de grau n.

De forma análoga ao exemplo anterior consideraremos K como sendo um dos conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. O conjunto das matrizes quadradas, ou seja, m = n, será simbolizado por $M_n(K)$. O conjunto $M_n(K)$ com a operação de multiplicação de matrizes usual goza da propriedade associativa, ou seja, (AB)C = A(BC), possui elemento neutro, também conhecido como matriz identidade de ordem n:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Contudo, nem sempre uma matriz em $M_n(K)$ possui elemento simétrico. Indicaremos por $GL_n(K)$ o subconjunto de $M_n(K)$ das matrizes que possuem elemento simétrico com a multiplicação de matrizes usual.

($GL_n(K)$, $\cdot$) será um Grupo, chamado de Grupo linear de grau n. Vale ressaltar que este não é um **Grupo** abeliano.

7) Grupos aditivos de classes de restos

Formado pelo conjunto das classes de resto módulo m, ou seja, $\mathbb{Z}_m = \left\{\overline{0},\ \overline{1}, \overline{2},\ \cdots,\ \overline{m-1}\right\}$, o conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ pela relação de congruência módulo m, e a operação de adição módulo m, definida como:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}.$$

Este conjunto com a operação de adição goza da propriedade associativa, ou seja, $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c} = \overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$, possui elemento neutro $\overline{0}$, ou seja, $\overline{a}+\overline{0} = \overline{0}+\overline{a} = \overline{a}$ e o simétrico de $\overline{a}$ é, de fato:

$$\overline{a} + \overline{m-a} = \overline{a+(m-a)} = \overline{m} = \overline{0}$$

Assim, ($\mathbb{Z}_m$, +) é um Grupo, que é comutativo, pois, $\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b}+\overline{a}$.

8) Grupos multiplicativos de classes de restos.

Formado pelo conjunto $\mathbb{Z}_m$* com a operação de multiplicação módulo m, definida por:

$$\text{Seja } \overline{a},\ \overline{b} \in \mathbb{Z}_m \text{ então } \overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{ab}.$$

Goza da propriedade associativa, ou seja, $(\overline{a}\cdot\overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot(\overline{b}\cdot\overline{c})$, também do elemento neutro, a classe $\overline{1}$, ou seja, $\overline{a}\cdot\overline{1} = \overline{1}\cdot\overline{a} = \overline{a}$. Contudo, pode não ter simétrico para a multiplicação definida acima; por exemplo, no caso de $\mathbb{Z}_4$*, o elemento dois barra não tem simétrico. O sistema ($\mathbb{Z}_m$, $\cdot$) só será Grupo se m for primo.

9) Grupo de permutações

Dado um conjunto E, o termo permutação é considerado uma bijeção de um conjunto nele mesmo, f: E $\rightarrow$ E. Consideremos S(E) o conjunto de permutações dos elementos de um conjunto E com a composição de aplicações. Ele goza da associatividade, elemento neutro (I_E: E $\rightarrow$ E, aplicação idêntica) e elemento simétrico (se f é uma permutação de E, o mesmo ocorre com f^{-1} (aplicação inversa de f) e $f^{-1} \circ f = I_E$. Assim, é um **Grupo**. Só será abeliano se o número de elementos de E for 1 ou 2.

Notação: **(S(E), o).**

10) Grupos de Simetrias do Triângulo Equilátero

A simetria de um triângulo eqüilátero é qualquer aplicação bijetora f: T$\rightarrow$ T que preserva distâncias. Neste caso, a operação é a isometria, transformação geométrica que leva um triângulo a coincidir com ele próprio (rotações e reflexões). É um **Grupo**, pois goza das propriedades associativa, elemento neutro (R_0) e elemento simétrico.

2.2 Noções Históricas e o Desenvolvimento Operacional e Estrutural do Conceito de Grupo

O conceito de **Grupo** tomou um formato mais estrutural e sistemático a partir das teorias desenvolvidas por **Evariste Galois** (1811 – 1832)**,** em seu estudo sobre permutações, na tentativa de resolver equações algébricas por radicais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação). Contudo, foi **Augustín Cauchy** (1789 – 1857) que notou a importância do conceito de **Grupo** por si mesmo e **Arthur Cayley** (1821 – 1895) que apresentou a noção abstrata do conceito de **Grupo**.

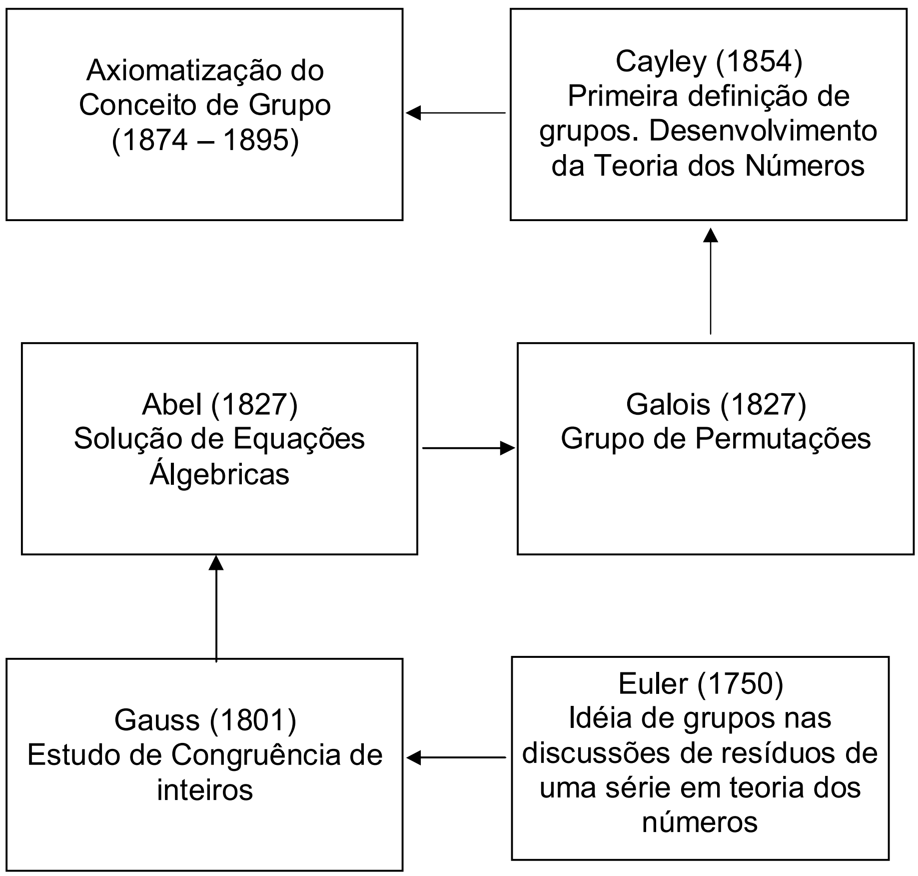
As primeiras idéias sobre o conceito de **Grupo**, segundo Milies (1992), se encontram nos trabalhos de **Euler**, como também no de vários outros matemáticos, como **Karl. F. Gauss** (1777 – 1855), **Joseph L. Lagrange** (1736 – 1813) e **Niels H.**

Abel (1802 – 1829). A estruturação lógica do conceito de **Grupo** se deu por volta do século XIX, considerado o "século do rigor".

Durante a nossa pesquisa encontramos dois objetos que em determinado momento histórico convergiram e contribuíram para o surgimento do conceito de **Grupo**.

Um dos objetos[45], segundo Milies (1992), foi o Teorema de Fermat estudado em Teoria dos Números, que foi de interesse tanto de Euler quanto de Gauss. O outro objeto foi a resolução de equações algébricas, de interesse para Lagrange, Cauchy, Abel e Galois.

Apresentamos agora um pouco da obra de cada um dos matemáticos citados acima e sua relação com o conceito de **Grupo**, nosso objeto de estudo, bem como, o desenvolvimento histórico do mesmo, pois acreditamos que assim verificaremos a transição do conceito operacional para o estrutural.



Quadro 2 - Desenvolvimento histórico do conceito de Grupo

[45] Entendemos objeto, como apresentado na fundamentação teórica.

Euler pode ser considerado um dos matemáticos mais brilhantes de todos os tempos. Dentre seus inúmeros trabalhos, destacamos aqueles que estão envolvidos com a teoria dos números, especialmente na tentativa de demonstrar o Teorema de Fermat.

De acordo com Katz (1998), acredita-se que por volta de 1750, Euler começou a escrever o *Tractarus de numerorum doctrina* (Tratado da doutrina dos números), um tratado sobre a teoria dos números.

Nesse contexto, Katz (1998) afirma que a parte mais importante deste tratado está no conceito de congruência módulo. Euler define o resíduo de um número *a* por um número *d* como sendo *r* na divisão de a por d, ou seja, $a = md + r$, e nota que existem "*d*" possibilidades para o resíduo e que estes podem ser separados em classes de restos ou classes de congruência.

> [...] as idéias básicas da teoria de **Grupos** são evidentes na discussão de resíduos, desenvolvidas por Euler, de uma série em uma progressão aritmética 0, b, 2b, ..., Euler mostra que o módulo *d* e o número *b* são primos entre si, então a série contem elementos de cada uma das *d* diferentes classes de resíduos. Conseqüentemente, *b* tem um "inverso" com relação a d, um número *p* tanto que o resíduo de *pb* é igual a 1. Por outro lado, se a maioria dos divisores comuns de *d* e *b* são g > 1, então somente em $\frac{d}{g}$ que aparece diferentes resíduos tais que não existe inverso[46] (KATZ, 1998, p. 618).

O que podemos notar é que nesse trabalho houve o início do conceito de **Grupo**.

Segundo Milies (1992), numa dessas provas do Teorema de Fermat, que está no *Novi Comentarii Academiae Petropolitanae*, publicado em 1758, o método utilizado é exatamente o mesmo que mais tarde Lagrange utilizaria para demonstrar que a ordem de um elemento é um divisor da ordem do **Grupo** e por C. Jordan para demonstrar que a ordem de um subgrupo é um divisor da ordem do **Grupo**.

Nesse processo, o que podemos inferir é que ocorreram todas as três fases citadas por Sfard (1991). De fato, ao olhar o Teorema de Fermat, estava sendo feita a interiorização por Euler. Na tentativa de se provar o teorema,

[46] Basic ideas of group theory are evident in Euler´s discussion of residues of a series in arithmetic progression 0, b, 2b, ... Euler shows that if the modulus d and the number b are relatively prime, then this series contains elements from each of the d different residues classes. Therefore, b has an "inverse" with respect to d, a number p such that residue of pb equals 1. On the other hand, if the greatest common divisor of d and b is g > 1, then only d/g different residues appear and such an inverse does not exist.

acreditamos que houve o entendimento sobre o mesmo, mas ainda necessitava de algum objeto mental. Estava ocorrendo a condensação. Finalmente, quando começou a estudar os resíduos nas séries aritméticas houve a reificação.

Gauss propiciou muitas contribuições para a Matemática.

> Um dos seus primeiros interesses foi, precisamente, a teoria dos números e, em 1801 ele publicou seu clássico *Disquisitones Aritmeticae*. Neste texto, ele introduz a definição de congruência de inteiros com respeito a um módulo m bem como a correspondente notação, que ainda está em uso (MILIES, 1992, p.4).

Em seu trabalho com formas quadráticas, que foi desenvolvido na última parte do *Disquisitones*, Gauss afirma que duas formas quadráticas $f = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2$ e $g = a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2$ (reciprocidade quadrática) são equivalentes se f pode se transformar em g por uma mudança de variáveis.

Assim, Gauss assegura que existe F, a composta de f e g, e que a classe de F é determinada pelas classes de f e g. Nessa perspectiva, o que Gauss define é uma operação no conjunto das classes. Ele ainda prova que essa composição é associativa, comutativa e possui elemento neutro, bem como, que toda classe tem inverso.

Notemos que, com este trabalho, Gauss apresentou características de **Grupo**, pois temos uma operação e esta satisfaz as propriedades de **Grupo** (associativa, elemento neutro e inverso). Além disso, ele apresentou a comutatividade, ou seja, construiu um **Grupo** abeliano.

Nesse trabalho Gauss deu ainda dois exemplos de **Grupo** (mas não explicita e nem utiliza esta terminologia): o **Grupo** aditivo dos inteiros e o multiplicativo dos racionais não nulos.

Novamente, podemos notar a utilização das categorias apresentadas por Sfard (1991). Euler, ao olhar para as séries aritméticas, se atentou para a questão do resíduo, que agora Gauss chama de **congruência** e assim temos uma interiorização. Notemos que, ao necessitar de um objeto “real” (no caso o resíduo) para apresentar as idéias de congruência, acreditamos que foi feita a condensação.

Gauss considerava esse assunto muito importante tanto que, segundo Katz (1998), ele apresentou seis diferentes provas para o teorema de reciprocidade quadrática. Acreditamos que tenha realizado a reificação, ou seja, usou o conceito de congruência em outra situação que não era especificamente de congruência.

Segundo Katz (1998), muitos matemáticos do século XVIII estavam interessados nas resoluções de equações polinomiais, mais especificamente, na tentativa de estabelecer uma generalização da solução algébrica de equações de grau cinco ou maior, mas sem muito sucesso, como é o caso de Lagrange.

> Lagrange, em suas *Réflexions sur la théorie algébrique des équations* (*Reflexões sobre a teoria das equações algébricas*) de 1770, começou uma nova fase no seu trabalho empreendendo uma revisão detalhada de soluções anteriores, para determinar porque o método para cúbicas e quárticas funcionava. Ele não foi capaz de encontrar, de forma análoga, um método para equações de graus maiores, mas ele foi capaz de esboçar um novo conjunto de princípios para lidar com estas equações na qual ele esperava ter sucesso[47] (KATZ, 1998, 619).

Observando essa reflexão de Lagrange, voltamos ao conceito proposto por Sfard (1991), onde fica evidente que ele estava em um processo de interiorização.

> A idéia altamente original de Lagrange para entender a priori porque os métodos funcionam, consiste em inverter os passos e determinar as soluções da equação auxiliar como funções das raízes da equação original. Desta forma as propriedades das soluções da equação auxiliar logo se tornam aparentes e isto mostra porque elas permitem resolver a equação inicial (MILIES, 1982, p.19).

Ainda de acordo com Milies (1992), Lagrange é considerado o primeiro a mostrar que não existe solução, por meio de radicais, para equações algébricas de grau maior do que quatro. Seu trabalho apresentou uma interessante idéia que é o estudo de permutações. Esse mesmo autor coloca que, além de apresentar a idéia sobre permutações, Lagrange obteve resultados gerais sobre as mesmas.

De acordo Sfard (1991), no instante em que Lagrange mostra que não existem soluções gerais para equações algébricas de grau maior que quatro, inferimos que ele passou para o processo de condensação e, ao apresentar as idéias sobre permutações, acreditamos que estivesse no processo de reificação. Finalmente, ao apresentar idéias gerais sobre as permutações, Lagrange interiorizou em um nível mais elevado.

---

[47] Lagrange, in his *Réflexions sur la théorie algébrique des équations* (*Reflections on the algebric theory of equations*) of 1770, began a new phase in this work by undertaking a detailed review of these earlier solutions to determine why the methods for cubics and quartics worked. He was not able to find analogous methods for higher degree equations, but was able to sketch a new set of principles for dealing with these equations which he hoped might ultimately suceed.

Segundo Katz (1998), ao considerar as equações algébricas de grau maior que quatro, foi necessário estudar mais profundamente a teoria das permutações, sendo esta a principal área de interesse de Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857).

> Em 1815 ele publicou uma memória intitulada *Sur lê nombre des valeurs qu'un foction peut acquérir, lorsqu'on permute de tous les manières possible les quantités qu'elle renferme,* no Journal de l'Ecolo Polytechinique. Neste artigo ele introduz a notação para permutações que utilizamos ainda hoje embora faça algumas distinções de terminologia que não estão mais em uso (MILIES, 1992, p.26).

De acordo com Milies (1992), Cauchy apresentou definições sobre permutações cíclicas, transposições, produto de duas substituições e grau de uma substituição e uma notação para permutações que ainda hoje é utilizada.

> Em 1844, Cauchy introduziu a notação (a_1 a_2 ... a_n) para tal permutação. Ao mesmo tempo, ele também definiu o inverso de uma permutação S utilizando a notação S^{-1}, e introduziu a notação 1 para a identidade. Mais geralmente, dado qualquer conjunto n de substituições, ele definiu o que seria um **sistema de substituições conjugadas**[48] (KATZ, 1998, p. 665).

Segundo Milies (1992), esta definição tem as mesmas características que são apresentadas no conceito de **Grupo**, só que para um caso particular.

Seguindo nossas reflexões, acreditamos que esse estudo feito por Cauchy, apresenta pela primeira vez uma característica mais estrutural do que propriamente operacional. Cauchy deixou de olhar para o problema das resoluções de equações algébricas e passou a olhar para o estudo de permutações, ou seja, houve uma mudança no "objeto mental", termo utilizado por Sfard (1991). Antes eram as equações algébricas, agora são as permutações.

Essa mudança do objeto também apresenta as mesmas fases citadas por Sfard (1991), ou seja, ao verificar que existia a necessidade de se estudar permutações, para um melhor entendimento das equações algébricas, acreditamos que houve uma interiorização.

---

[48] In 1844, Cauchy introduced the notation (a_1 a_2 … a_n) for such a permutation. At that time he also defined the inverse of a permutation S in the obvious way, using the notation S^{-1}, and introduced the notation S^{-1}, and introduced the notation 1 for the indentity. Further, given any set of substitutions on n letters, he defined what he called the system of conjugate substitutions.

Ao proporcionar uma notação para as permutações, as permutações cíclicas, a transposição, o produto de duas substituições e o grau de uma substituição temos o processo de condensação.

Finalmente, ao oferecer um novo conceito denominado sistema de substituições conjugadas, passou-se ao processo de reificação.

De acordo com Katz (1998), a primeira prova de que uma equação de quinto grau não poderia ser resolvida por meio de radicais foi apresentada por Paolo Ruffini (1765 – 1822) em 1798. Uma prova que ninguém conseguiu entender. No entanto, em 1820, Niels Henrik Abel (1802 – 1829) apresentou uma prova "clara" da impossibilidade da resolução de tais equações.

Segundo Katz (1998), a prova apresentada por Abel continha os resultados das permutações do conjunto das raízes de uma equação. Sua pesquisa tinha como foco duas questões: encontrar todas as equações de qualquer grau que poderiam ser algebricamente resolvidas; decidir, dada uma equação, se ela pode ou não ser resolvida algebricamente.

Katz (1998) afirma que Abel não teve sucesso ao tentar responder tais perguntas, mas teve bons resultados em um tipo particular de equação ($x^n - 1 = 0$).

Utilizando o conceito de permutação, Abel pôs fim a um problema, que durava séculos. Nessa perspectiva, podemos inferir que a utilização das permutações seria um insight, termo utilizado por Sfard (1991), e sendo assim uma reificação, ou seja, uma reificação de nível inferior, ou uma interiorização de nível superior.

Também podemos dizer que, ao obter bons resultados com a equação $x^n - 1 = 0$, e mostrar que este tipo de equação tem solução por meio de equações ciclotômicas, estaria num processo de condensação.

"O pensamento de Galois sobre o problema da solubilidade das equações algébricas por meio de radicais estava em um esboço de um artigo submetido à Academia Francesa em 1831"[49] (KATZ, 1998, p. 667).

> No seu trabalho, ele procurava dar um critério para decidir quando uma dada equação é, ou não, solúvel por radicais. Porém ele percebeu claramente que tinha descoberto princípios gerais de uma importância maior. Isto fica claro na sua afirmação de que estava apresentando – "*os princípios gerais e apenas uma aplicação"* (MILIES, 1992, p. 29).

[49] Galois' thought on the subject of solvability of algebric equations by radicals are outlined in the manuscript the submitted to the French Academy in 1831.

Ainda segundo Milies (1992), Galois utilizava a palavra permutação do mesmo modo que Cauchy utilizava e foi o primeiro a usar a termologia **Grupo** no sentido de ser um conjunto fechado por multiplicação, "*se temos num mesmo **Grupo** as permutações S e T, temos certeza de que temos a permutação ST*" (GALOIS, apud MILIES, 1992, p. 29).

> Mostrou que as propriedades algébricas mais importantes de uma dada equação eram refletidas por um **Grupo** univocamente associada à equação, o chamado **Grupo** da equação. Para descrever algumas destas propriedades em termos dos **Grupos** ele introduziu o conceito de subgrupo normal, que chamava de *distinguido* ou *invariante*. Em continuação ele introduz também o conceito de ***Grupo** solúvel* e prova que uma dada equação e resolúvel por radicais se o **Grupo** dessa equação é solúvel (MILIES, 1992, p. 29).

Novamente podemos perceber que ao se preocupar com as mesmas questões que Abel estava investigando, houve uma reificação, pois ele enxergou um processo maior do que estava preocupado em responder. Podemos assim, inferir que houve uma reificação de nível inferior e uma interiorização de nível superior.

Com esta reificação, Galois pode apresentar outros resultados (interiorização), e algumas propriedades (condensação).

De acordo Milies (1992), Arthur Cayley (1821 – 1895) foi o primeiro a ver o conceito de **Grupo** de forma implícita nos **Grupos** de permutações.

> Cayley, em seu trabalho intitulado "Na Teoria de **Grupos**", notou que a idéia de um **Grupo** de permutações foi apresentada por Galois e imediatamente procedeu a uma generalização dela para qualquer conjunto de operações, ou funções, sobre um conjunto de quantidades. Ele usou o símbolo 1 para representar a função que deixa todas as quantidades inalteradas e notou que para funções, existia uma noção bem definida de composição que é associativa, embora, nem sempre, comutativa[50] (KATZ, 1998, p. 672).
>
> Ele leu os trabalhos de Cauchy de 1844 – 1846 e reconheceu nestes a possibilidade de uma visão mais abstrata. Em 1854 publicou, na Philosophical Magazine, um artigo intitulado *On the Theory of Groups as depending on the Symbolical Equation* $\theta^n = 1$. Como a terminologia da teoria de conjuntos não era ainda usual na época de Cayley, ele iniciou seu trabalho tentando deixar claro que está trabalhando com símbolos abastratos e não com objetos concretos como permutação ou números e frizando que a operação considerada associativa mas não necessariamente comutativa (MILIES, 1992, p.30).

[50] Cayley, in his "On the Teory of Groups," noted that the idea of a group of permutations was due to Galois and immediately proceed to generalize it to any set of operations, or functions, on a set of quantities. He used the symbol 1 to represent the function that leaves all quantities unchanged and noted that for functions, there is a well-defined notion of composition which is associative, although not, in general, comutative.

A definição de Cayley para **Grupos** é:

> Um conjunto de símbolos 1, α, β, ... todos eles diferentes, tal que o produto de dois quaisquer deles (não importa em que ordem), ou o produto de qualquer um deles por si mesmo, pertence ao conjunto [51] (KATZ, 1998, pp 672-673).

Segundo Katz (1998), Cayley, ao estudar diferentes tipos de **Grupos** finitos, o fez por meio de uma tabela, na qual é contemplada sua definição de **Grupos**, cada linha e cada coluna contêm todos os elementos do **Grupo**.

Segundo Milies (1992), o trabalho realizado por Cayley passou despercebido por seus contemporâneos.

O que podemos afirmar a respeito de Cayley é que ele iniciou o processo de estruturação do conceito de **Grupo**, pois, segundo Sfard (1991), ele começou a olhar para a teoria de **Grupo** como um todo, e, assim, temos uma reificação.

Segundo Katz (1998), após 1878, os eventos aconteceram de maneira muito rápida, pois Frobenius (1849 – 1917) e Stickelberger (1850 – 1936) ao estudarem as classes de números relativamente incongruentes, conseguiram apresentar a seguinte definição:

“Uma coleção destes elementos forma um **Grupo** (finito) se o produto de qualquer dois deles está entre eles”[52] (KATZ, 1998, 674).

Ainda segundo Katz (1998), o primeiro a fazer uma completa axiomatização do conceito de **Grupo** foi Walter Dyck (1856 – 1934) publicando seu “Gruppentheorietische Studien” (Estudo da Teoria Grupos), em 1852, no qual definiu um **Grupo** de operações discretas, que são aplicadas em um determinado objeto. No entanto, não apresenta a propriedade associativa e a inversa em sua definição.

De acordo com Katz (1998), no mesmo ano, Heinrich Weber (1842 – 1913) foi o primeiro a dar uma axiomatização completa do conceito de **Grupo** sem se referir a natureza de seus elementos. Weber também mostrou a existência da unicidade do elemento neutro e que para cada elemento existe um único inverso. Weber produziu vários exemplos de **Grupos**, incluindo o aditivo, o dos vetores no plano, das permutações de um conjunto finito, o **Grupo** aditivo e o **Grupo** multiplicativo de classes de resíduos módulo m e o **Grupo** de classes binárias de formas quadráticas.

---

[51] Set of symbols 1, α, β, ... all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any one of them into itself, belongs to the set.

[52] A collection of these elements forms a (finite) group if the product of any two is itself contained among them.

Com a publicação em 1895 do trabalho “Lehrbuch der Álgebra”, a concepção abstrata de **Grupo** foi considerada como parte de uma corrente da Matemática.

Notamos que, nesse estágio, o processo de reificação, realizado por esses matemáticos, era um estágio totalmente estrutural.

2.3 As Fases no Conceito de Grupo

No desenvolvimento do conceito de **Grupos** pudemos observar as várias fases apresentadas por Sfard (1991):

A **Interiorização** refere-se à manipulação de objetos familiares, como os conjuntos numéricos, a resolução de equações lineares, propriedades associativa, elemento neutro e simétrico, mas não obrigatoriamente em uma ordem estabelecida.

A **Condensação** refere-se à mobilização e compactação de técnicas na busca de resolver problemas envolvendo o conceito de **Grupo** e suas propriedades, como no caso associatividade, elemento neutro e simétrico, mas agora respeitando a ordem de como o conceito é apresentado.

A **Reificação** refere-se a um tratamento estático do objeto, ou seja, não há necessidade de um objeto mental, o estudante começa a enxergar o conjunto com determinada operação como uma estrutura de **Grupo**.

Ao nos referir à concepção operacional no conceito de **Grupo**, estamos falando das técnicas utilizadas para verificar se determinado conjunto munido de uma operação é **Grupo**, não importando necessariamente a ordem.

Mas, ao mencionarmos concepção estrutural, a ordem já se faz necessária, e a noção será utilizada como um objeto matemático na resolução de equações algébricas.

Detalharemos esse assunto no capítulo em que abordaremos as considerações metodológicas, em especial na análise das questões e dos dados coletados.

CAPÍTULO 3
ASPECTOS METODOLÓGICOS

Apresentamos neste capítulo como procedemos na busca de resposta para nossa questão de pesquisa.

3.1 Natureza da Pesquisa

De acordo com Bogdan e Biklen (1991) “a investigação qualitativa possui cinco características.” (BOGDAN e BIKLEN, 1991, p. 48), contudo nem todo trabalho qualitativo contempla todas as cinco características. Em nosso trabalho, destacamos:

- *A fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.* Na tentativa de entender quais os conhecimentos que são mobilizados pelos alunos ao resolverem questões relacionadas ao conceito de **Grupo**, os registros foram recolhidos e foram revistos pelo investigador, e assim, com o nosso entendimento sobre o referencial teórico estudado, pudemos emitir opiniões sobre o registro escrito do conceito de **Grupo**, e ainda complementamos com informações obtidas por meio do contato direto com os estudantes.
- *A investigação qualitativa é descritiva.* Esta pesquisa é descritiva, pois os dados foram obtidos a partir de planos de aula, livros didáticos e um conjunto de questões respondido pelos estudantes, bem como observações do pesquisador.
- *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos*. Nesta pesquisa nos preocupamos mais com o processo do que com o produto, pois além de acompanharmos todas as etapas de aplicação do conjunto de questões, ainda buscamos em livros didáticos e na história da matemática informações que pudessem nos auxiliar a atingir o objetivo da mesma.

- *Os investigadores tendem analisar seus dados de forma indutiva.* Nesta investigação os dados obtidos, que constituíram nossa base de estudo, foram analisados de forma indutiva, agrupados e inter-relacionados na busca de especificidade da pesquisa.

Foram definidos alguns indicadores de modo que pudéssemos emitir uma opinião, sempre nos referenciando, e assim tentando estabelecer um diálogo com os sujeitos da pesquisa.

3.2 Contexto da Pesquisa

Para investigar o conhecimento sobre o conceito de **Grupo** dos estudantes do Curso de Matemática, habilitação licenciatura, optamos por verificar, inicialmente, como os livros utilizados por eles abordam o conteúdo **Grupos**, bem como, os programas da disciplina de Álgebra A. Também, como as concepções operacionais e estruturais, segundo Sfard (1991), apareciam nesses livros e documentos, e no desenvolvimento histórico.

Num segundo momento, elaboramos um instrumento contendo questões que contemplavam de diferentes maneiras o conceito de **Grupo**.

Aplicamos esse instrumento a estudantes do 3º e do 4º ano do Curso de Matemática, habilitação licenciatura, da UEL, que já haviam estudado, havia pouco tempo, o conceito de **Grupo**. Os sujeitos da nossa pesquisa fazem parte de um projeto que trabalha com o pensamento algébrico e a aplicação deu-se num dos dias de reunião do grupo de Álgebra e Educação Algébrica.

Com essas questões procuramos investigar qual concepção de **Grupo**, operacional ou estrutural, estava sendo trabalhada e verificar as fases de desenvolvimento do conceito de **Grupo**, segundo a fundamentação teórica.

Um estudo a respeito dos conteúdos programáticos da disciplina dos anos de 2007 e 2008, anos em que os sujeitos de nossa pesquisa tiveram essa disciplina, foi realizada.

3.2.1 Programas e livros utilizados

Localizamos nos programas de 2007 e 2008 da disciplina de álgebra A, que contempla o conceito de **Grupo** em sua ementa, conteúdos programáticos e bibliografias que nos apontaram algumas direções a seguir. Nas bibliografias, encontramos os livros adotados pelos docentes que ministraram essa disciplina nesses dois anos escolhidos. Assim, pudemos ter uma idéia de como esses docentes abordaram o conteúdo **Grupos** em sala de aula e qual concepção (operacional e estrutural) os autores de livros que contemplam esse conteúdo utilizam. Segue abaixo uma síntese do que encontramos nos programas de álgebra A.

Ementa da disciplina de Álgebra A: carga horária de 136 horas
Teoria dos números. Estruturas algébricas: **Grupos**. Anéis. Módulos. Aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados.

Conteúdo Programático – 2007
Grupos: definição, exemplos e resultados importantes. Subgrupos, Homomorfismos de **Grupos**. **Grupos** cíclicos e **Grupos** finitos, Teorema de Lagrange. Subgrupos normais e **Grupo** quociente, Aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados.

Conteúdo Programático - 2008
Grupos: definição e resultados imediatos e exemplos, Subgrupos, exemplos e Subgrupos normais e **Grupo** quociente.

Segue um quadro comparativo entre os conteúdos programáticos entre os anos de 2007 e 2008.

Ano	Conteúdo Programático - Licenciatura				
2007	**Grupos**: definição, exemplos, resultados importantes	Subgrupos, Homomorfismos de **Grupos**	**Grupos** cíclicos **Grupos** finitos Teorema de Lagrange	Subgrupos normais **Grupo** quociente	Aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados
2008	**Grupos**: definição e resultados imediatos e exemplos	Subgrupos, exemplos e Subgrupos normais	**Grupo** quociente.		

Quadro 2 – Conteúdo Programático da Disciplina de Álgebra A por Ano

De acordo como o quadro, podemos afirmar que o Conteúdo Programático da disciplina é diferente a cada ano e é elaborado pelo docente que ministra a mesma naquele ano. Assim, podem existir diferenças entre o conteúdo de um ano para outro. Observamos que o conteúdo de **Grupos** aparece na Ementa, e, portanto precisa ser contemplado no Conteúdo Programático de qualquer ano.

O que difere de um ano para outro, por opção do docente, são os itens abordados com relação a esse conteúdo. Observando o quadro acima, percebemos, por exemplo, que no ano de 2007 alguns dos subitens eram: **Grupos** Cíclicos, Finitos e Teorema de Lagrange, conteúdos não previstos no outro ano. Podemos inferir então que o professor de 2007 contemplou estes itens no trabalho com seus alunos, o que pode não ter ocorrido no ano seguinte. Segue agora as bibliografias dos dois anos estudados da disciplina de álgebra A.

Bibliografia de 2007

1. DEAN, R. A. *Elementos de álgebra abstrata*. Rio de Janeiro: LTC, 1974.
2. **DOMINGUES, H.H e IEZZI, G. *Álgebra moderna*. São Paulo: Atual, 2003.**
3. FRALEIGH, J.B. *A first course in abstract algebra*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1974.
4. GARCIA, A. e LEQUAIN, Y. *Álgebra: um curso de introdução*. Rio de Janeiro: IMPA, 1988.
5. GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
6. HEFEZ, A. *Curso de Álgebra*. Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1993.
7. **HERSTEIN, I. N. *Tópicos de álgebra*. São Paulo: EDUSP, 1970.**
8. LANG, S. *Estruturas algébricas*. Rio de Janeiro: LTC, 1972.

9. MILIES, C. P. e COELHO, S. P. *Números*: uma introdução à matemática. São Paulo: Edusp, 2001.
10. MONTEIRO, L. H. J. *Elementos de álgebra*. São Paulo: GEEM, 1971.
11. MONTEIRO, L. H. J. *Introdução às estruturas algébricas*. São Paulo: GEEM, 1971.
12. NACHBIN, L. *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1971.

Bibliografia 2008

1) ALENCAR, FILHO, E. *Teoria elementar dos números*. São Paulo: Edgard Blucher, 1985.
2) DOMINGUES, H.H. e IEZZI, G *Álgebra moderna*. São Paulo: Atual, 1982.
3) GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
4) HERSTEIN, I. *Tópicos de álgebra*. São Paulo: EDUSP, 1970.
5) NIVEN, I. *Números racionais e irracionais*. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

Com relação às bibliografias, nota-se que existem livros comuns (negrito) aos dois anos.

Os livros comuns à disciplina e que contemplam o conteúdo de **Grupos**, são os mesmos, quais sejam: Álgebra Moderna (Domingues e Iezzi), Tópicos de Álgebra (Herstein), diferindo o ano da publicação no caso do primeiro.

Como as edições de um mesmo livro são diferentes, analisamos ambas, explicitando as diferenças encontradas.

Ater-nos-emos agora ao conteúdo de **Grupo** apresentado nos livros, sua definição, propriedades e exemplos.

No livro Álgebra Moderna de 1982 a apresentação do conteúdo é direta, não fazendo comentário algum e nem uma introdução ao conceito de **Grupos**. Seus tópicos são (nesta ordem): conceito de **Grupo**, **Grupos comutativos ou abelianos**, **Grupo**s **Finitos – tábua de um Grupo Finito**, alguns **Grupos Importantes** e **Propriedades Imediatas de um Grupo**.

O livro Álgebra Moderna de 2003 antes de apresentar o conteúdo traz uma nota histórica. Após esta, os tópicos seguem na seguinte ordem: conceito de **Grupo**, propriedades imediatas de um **Grupo**, **Grupos Finitos**, alguns **Grupos Importantes**.

Ambos os livros começam com o conceito de **Grupo**, mas destacamos que enquanto o livro Álgebra Moderna de 1982 apresenta uma subseção sobre **Grupos** comutativos ou abelianos, a edição de 2003 aborda esse conceito dentro da seção conceito de **Grupo**.

Neste sentido, em ambas as edições, o conceito de **Grupo** é apresentado sem qualquer estimativa de que o estudante possa fazer uma interiorização muito menos dará para fazer uma condensação e menos ainda uma reificação, pois não proporciona uma possibilidade do mesmo ter um contato (em um ambiente que ele conheça, como, por exemplo, uma equação linear) com as propriedades. A concepção apresentada é a estrutural, pois o livro dá a definição do que seja **Grupo**, abordando o produto e não o processo.

O **conceito de Grupos Finitos,** na edição de 1982, é apresentado sob uma concepção estrutural, com um exemplo na concepção operacional, dando chance ao estudante de ter um contato com o início da interiorização do conceito. A edição de 2003 fala um pouco sobre Cayley e de sua importância para o conceito de **Grupo**, mas nada significativo.

As **propriedades imediatas de um Grupo** também têm uma concepção estrutural, não oferecendo a oportunidade de o estudante interiorizar ou condensar as propriedades. Não apresenta exemplos, faz a demonstração da propriedade de que num **Grupo** a equação $a*x = b$ tem solução única, mas de acordo com o referencial teórico, esta não se mostra significativa, pois se exibe muito técnica. A edição de 2003 apresenta as propriedades logo após a definição de **Grupo**, enquanto a edição de 1982 mostra somente no final do capítulo. Quanto à apresentação do contexto não se diferem.

A apresentação do tópico **Alguns Grupos Importantes** tem uma concepção operacional dando oportunidade ao estudante de interiorizar e condensar os conceitos ali apresentados. Tanto numa edição, como na outra, a apresentação desses exemplos mostra-se detalhada, proporcionando uma visão de **Grupo**s mais conhecidos (que envolvem conjuntos numéricos) e de **Grupos** mais elaborados.

Com relação aos exercícios, o livro Álgebra Moderna de 2003 inicia com os mais fáceis e vai aumentando o nível, enquanto a edição de 1982 já apresenta logo de início os mais difíceis. Por exemplo, enquanto a edição de 2003 inicia com exercícios de verificação de **Grupo**, a edição de 1982 já traz um exercício de aplicação do conceito, exigindo do estudante uma reflexão maior do que simplesmente a definição de **Grupo**.

Independentemente do nível dos exercícios, eles proporcionam as duas concepções (operacional e estrutural), no entanto, acreditamos que o estudante terá dificuldades para resolvê-los, pois em nenhum momento a parte teórica oferece uma abordagem como a apresentada nos exercícios. A resolução destes exercícios, de acordo com o referencial teórico, pode fazer com que o estudante passe pelas fases de interiorização e condensação tanto em nível operacional e estrutural.

O outro livro utilizado foi Tópicos de Álgebra com apenas uma edição. O autor inicia o capítulo referente a **Grupos** fazendo uma breve introdução sobre o conceito de **Grupo**. Nesta introdução ele expressa a maneira como se deve conceber o conceito de **Grupo**:

> Eles devem advir da experiência de ver muitos exemplos; devem ser ricos em resultados significativos. Não consiste apenas em se sentar, enunciar alguns axiomas e passar a estudar o sistema descrito (HERSTEIN, 1970, p. 30).

De acordo com o referencial teórico esta citação apresenta as características de que o conceito de **Grupo** deve passar de um processo de interiorização para a condensação. Acreditamos nisso, pois o autor se refere a "vários exemplos" sendo estes significativos.

A definição que Herstein (1970) utiliza, para esse conceito, é:

> Para um conjunto arbitrário S, não vazio, definimos A(S) como sendo o conjunto de todas as aplicações bijetoras de S em si mesmo. Para dois quaisquer elementos σ, $\tau \in$ A(S) introduzimos um produto indicado por $\sigma \circ \tau$, e após investigações posteriores resultou que os seguintes fatos eram verdadeiros para os elementos de A(S) sujeitos a esse produto:
>
> 1) Para todos σ, $\tau \in$ A(S) temos que $\sigma \circ \tau$ também está em A(S). Isto é descrito dizendo que A(S) é fechado com relação ao produto (ou, às vezes, fechado em relação à multiplicação).
> 2) Para três quaisquer elementos σ, τ, $\mu \in$ A(S), $\sigma \circ (\tau \circ \mu) = (\sigma \circ \tau) \circ \mu$. Esta relação é denominada lei associativa.
> 3) Existe um elemento especial $\iota \in$ A(S) que satisfaz $\iota \circ \sigma = \sigma \circ \iota = \sigma$ para todo $\sigma \in$ A(S). Tal elemento é denominado elemento unicidade de A(S).
> 4) Para todo $\sigma \in$ A(S) existe um elemento indicado por σ^{-1}, também em A(S), tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \iota$. "Isto é usualmente descrito, dizendo que todo elemento em A(S) tem um inverso em A(S) (HERSTEIN, 1970, p. 30-31).

Podemos notar que a definição apresentada por Herstein (1970) é bastante carregada, sendo extremamente estrutural e acreditamos que isso pode causar estranheza a um estudante que está começando a estudar **Grupos**. Notamos também que em nenhum momento o autor se preocupou em dar significado a sua definição num processo operacional. Sendo assim, esta não traz a perspectiva de fazer com que o conceito surja, seja interiorizado e passe ao menos para um processo de condensação.

O autor ainda afirma que com essa definição e com “bastante visão” pode-se ter a mesma definição, mas com uma operação binária bem definida, que ele chama de multiplicação. Em momento algum, durante essa seção, o autor cita a operação de adição.

Na seqüência, apresenta a definição de **Grupo** abeliano para a multiplicação e segue para os exemplos. No primeiro desses exemplos a operação que aparece é a adição. Acreditamos que o fato de não falar sobre a adição na definição, e logo no primeiro exemplo utilizar essa operação, pode causar certa estranheza ao estudante. Notemos que esta situação apresentada pelo autor não se encaixa em nenhuma fase do referencial teórico, pois não existe sequer interiorização do conceito quanto menos condensação.

Faremos agora um comparativo entre os livros analisados na tentativa de explicitar as noções operacionais e estruturais citadas por Sfard (1991), nossa fundamentação teórica.

Podemos inferir que os livros com as suas respectivas edições apresentam uma característica extremamente estrutural, pois, segundo Sfard (1991), em momento algum o conceito de **Grupo** “surgiu”, o que implicaria um processo de interiorização, condensação e finalmente uma reificação.

O que é apresentado pelos autores dos livros consta de definição e exemplos. Mesmo colocando alguns desses exemplos com conjuntos conhecidos pelos estudantes, como os conjuntos numéricos, etc., tal estrutura pode causar estranheza aos leitores que iniciarão o estudo do conceito de **Grupo**.

O que Sfard (1991) afirma é que o conceito estrutural deve emanar do conceito operacional e não o contrário. O que se nota nos livros é exatamente o contrário podendo deixar o leitor com a impressão de que o conceito de **Grupo** inicia-se com a verificação de que a operação é associativa, depois se tem o elemento neutro e, finalmente, se tem simétrico.

A perspectiva apresentada por Sfard (1991), primeiro o operacional e depois o estrutural, pode trazer ao estudante uma visão diferente do conceito de **Grupo**, pois, ao passar por todas as fases do esquema citado pela autora, o estudante entende o mesmo, não decorando somente propriedades. Observemos que isso não acontece em nenhum dos livros não importando a edição.

Desta forma, a exposição feita pelos autores em momento algum apresenta as características de Sfard (1991), o que pode causar determinada estranheza aos estudantes ao trabalhar o conceito de **Grupo**.

Concluímos que a apresentação de **Grupos** feita pelos autores tem uma característica formalista (definição e exemplos) e, mesmo tendo a concepção estrutural, em momento algum se apresenta comum à teoria de Sfard (1991).

3.3 Sujeitos da Pesquisa

Como uma de nossas inquietações era a necessidade do conteúdo **Grupos** para a formação do futuro professor, optamos por escolher, como sujeitos de pesquisa, estudantes do Curso de Matemática, habilitação licenciatura, da UEL, que já tivessem cursado disciplinas de conteúdos algébricos. Assim, os estudantes escolhidos estão atualmente na 3ª e 4ª séries do curso.

Dentre os estudantes nessas séries, escolhemos aqueles que participavam de um projeto de pesquisa que trabalhasse com álgebra e com o ensino de álgebra, coordenado pela orientadora dessa dissertação, que tem suas reuniões às quartas-feiras à tarde. O instrumento de coleta foi aplicado aos estudantes que compareceram à reunião do grupo no dia 01 de abril de 2009, sem que os mesmos soubessem da atividade.

Assim, os sujeitos da pesquisa foram seis alunos da 3ª série e um da 4ª série do Curso de Matemática, habilitação licenciatura, da UEL, que entraram no projeto recentemente.

Logo após os sujeitos terminarem o questionário, separamos por questões, colocamos em ordem alfabética e enumeramos de 1 a 7. Assim, os estudantes serão chamados de A_1, A_2, etc.

3.4 Elaboração do Instrumento de Coleta

Inicialmente elaboramos um instrumento piloto, na tentativa de nortear nosso trabalho, para que finalmente elaborássemos o que seria aplicado. Esse instrumento constava de seis questões, sendo que três destas questões envolviam técnicas de verificação de **Grupo** e as outras estavam relacionadas somente ao conceito de **Grupo**. No entanto, após algumas leituras entendemos que seria interessante fazer outro instrumento com oito questões, mantendo as questões técnicas e adicionando algumas que envolviam permutações, considerando que estas foram importantes no surgimento do conceito de **Grupo**.

As oito questões que compõem esse instrumento foram organizadas da seguinte forma: as três primeiras questões são relativas ao conceito de **Grupo**, sem necessariamente se referir a tal, ou citá-lo. A questão quatro é para escrever a definição de **Grupo**. A questão cinco (5) tem o propósito de relacionar o que cada uma das questões anteriores tem com o conceito de **Grupo**. A questão seis (6) é uma questão também relacionada ao conceito, mas ao contrário das três primeiras, no enunciado, referia-se a **Grupo**. A questão sete (7) é relacionada ao conceito de **Grupo** e a ordem dos itens da definição. Finalizando, a questão oito (8) era uma questão relacionada ao conceito de **Grupo**.

Com a elaboração desse instrumento, tínhamos uma expectativa de que ele fornecesse dados para levantar conhecimentos, sobre o conceito de **Grupo**, mobilizados por estudantes que já tinham visto o assunto. Posteriormente, fizemos uma análise observando conceitos e técnicas utilizados e concepções que foram mobilizadas, segundo Sfard (1991).

As questões foram formuladas ou adaptadas de livros de álgebra de modo que, preferencialmente não fossem questões usualmente vistas pelos estudantes. O objetivo desta escolha é verificar se eles tinham a noção de **Grupo** e sabem trabalhar com o abstrato. Seguem as oito questões entregues aos estudantes.

1) Considere a equação linear 2x + 3 = 0.
   a. Que operações e propriedades de $\mathbb{Q}$ utilizam-se para resolvê-la?
   b. Conseguiria resolvê-la em $\mathbb{Z}$? Justifique sua resposta.

2) Dos itens abaixo, assinale os que você considera que satisfazem as propriedades associativas, elemento neutro e simétrico. Justifique sua resposta.
   a. $(\mathbb{N}, +)$
   b. $(\mathbb{Z}, +)$
   c. $(\mathbb{Z}, .)$
   d. $(\mathbb{Q}, .)$
   e. $(M_2(\mathbb{R}), +)$
   f. $(M_2(\mathbb{R}), .)$
   g. $(GL_n(\mathbb{R}), .)$
   h. $(\mathbb{Z}_m, .)$
   i. $(\mathbb{Z}_m, +)$

3) Considere um triângulo eqüilátero e construa, no sistema cartesiano, as simetrias desse triângulo no plano (rotações de ângulos 0°, 120°$\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e 240° $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ e reflexão em relação ao eixo x). O que você pode observar?

4) Defina **Grupo**:

5) Existe relação entre as questões 1, 2, 3 e a questão 4? Justifique sua resposta.

6) Considere $\mathbb{R}$ o conjunto dos reais com a operação * dada por $x*y = x + y - 7$.
   a. Mostre que:
      i. $*$ é associativa
      ii. $\exists e \in \mathbb{R}$ tal que, $e*x = x = x*e$, $\forall x \in \mathbb{R}$
      iii. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ tal que, $x*x' = e = x'*x$.

b. ($\mathbb{R}$,$*$) é um **Grupo**? Justifique sua resposta.

7) Considere os axiomas da associatividade (A_1), elemento neutro (A_2) e elemento simétrico (A_3) da definição de um **Grupo**, que é apresentado na ordem A_1 A_2 A_3. Considerando outras ordens como: A_1 A_3 A_2, A_2 A_1 A_3, A_2 A_3 A_1, A_3 A_1 A_2, A_3 A_2 A_1. Das seis possíveis ordens, somente três são aceitáveis para a definição. Quais são elas e por quê?

8) Marque Verdadeiro ou Falso.
   a. ( ) Um **Grupo** pode ter mais do que um elemento neutro.
   b. ( ) Num **Grupo**, cada equação linear tem uma solução.
   c. ( ) Uma equação da forma $a*x*b = c$ sempre tem uma única solução no **Grupo.**
   d. ( ) O conjunto vazio pode ser considerado um **Grupo**.

As três primeiras questões referem-se a propriedades (associativa, elemento neutro e simétrico) que envolvem o conceito de **Grupo**. Nessa perspectiva, podemos dizer que são questões técnicas. Na primeira questão, nossa intenção é saber se os estudantes sabem o que quer dizer cada uma das propriedades e operar com elas em diferentes conjuntos. A segunda questão refere-se às propriedades em conjuntos mais comuns, como por exemplo: os naturais, as matrizes, racionais e outros não tão comuns como os grupos lineares e as classes de restos dos inteiros. A terceira questão é uma aplicação das propriedades, mas em um contexto geométrico, envolvendo permutações.

No nosso entender as questões possibilitam concepções operacionais mesmo não se referindo a palavra **Grupo**. Nesse sentido, as questões envolvem um processo de interiorização do conceito, que segundo Sfard (1991), é um processo em que a ordem (associativa, elemento neutro e simétrico) não se faz necessária.

Na seqüência, temos duas questões que são de **Grupo**, a primeira é a definição de **Grupo**, que segundo Sfard (1991), é a parte estática do conceito. A próxima questão tem uma perspectiva estrutural, pois questionar a existência de alguma relação entre as questões é o mesmo que olhar para o conceito como um todo, sem se preocupar com “elementos estruturais e operacionais” do conceito. Nesse sentido, Sfard (1991) afirma que é um processo de reificação.

A próxima questão, mesmo tendo a característica operacional do conceito, difere, pois é a primeira vez que é apresentada uma operação $*$. Essa questão tem a característica de ser uma questão de condensação, pois necessita de um objeto mental, no caso $x * y = x + y - 7$ e da definição.

Finalizando, as duas últimas questões são de caráter estrutural, sendo que a primeira é uma questão que envolve a ordem dos conceitos (condensação). E a última questão é uma reificação, pois olha para o conceito de **Grupo** como um todo, ou seja, olha para o conceito sem se preocupar com ordem e com objetos mentais.

Como já observamos anteriormente, esperamos com esse instrumento identificar os conhecimentos mobilizados pelos estudantes sobre o conceito de **Grupo**. Na construção do mesmo, optamos por colocar questões envolvendo as concepções e as fases de Sfard (1991) manifestadas com a noção de **Grupo**.

No capítulo seguinte apresentaremos a descrição e a análise da produção escrita dos estudantes escolhidos.

CAPÍTULO 4
DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Com as questões já elaboradas, o próximo passo seria a aplicação destas, e após algumas discussões, consideramos pertinente aplicá-las num grupo de pesquisa que trabalhasse com álgebra e com o ensino de álgebra.

Como já dissemos, o experimento ocorreu no dia 01/04/09 por volta das 14h05 no grupo de pesquisa, contando com a participação de sete estudantes que já cursaram a disciplina Álgebra A, ou seja, que já tinham conhecimento do conceito de **Grupo**.

A aplicação do instrumento foi realizada sem aviso prévio, mesmo assim ninguém se opôs a participar. A coordenadora do grupo de pesquisa, que é a orientadora deste trabalho, nos apresentou ao grupo e em seguida distribuímos as questões.

As questões foram entregues ao grupo uma por uma, de modo que os alunos resolviam cada uma sem conhecer a próxima.

Até a questão 3 (três), os estudantes resolveram individualmente. Na questão 4 (quatro), que pedia a definição de **Grupo**, solicitaram se podiam discutir entre si e dissemos que poderiam.

Durante a aplicação do instrumento, observamos passivamente, mas sem nenhuma intervenção a respeito das soluções das questões. Somente na questão 3 é que tivemos que esboçar, no quadro, a figura do triângulo, com a rotação de grau zero.

Por volta das 16h15 todos os estudantes terminaram de responder as questões do instrumento.

Analisamos as respostas dos estudantes, buscando identificar os conhecimentos mobilizados por estes quanto ao conteúdo **Grupo**. Optamos por realizar esta análise questão por questão, seguindo os seguintes indicadores, que construímos a partir do referencial teórico, de modo a auxiliar-nos nesta fase da investigação.

- Processo envolvido: operacional ou estrutural;
- Fases manifestadas no desenvolvimento: interiorização, condensação ou reificação;

- Escolha da resolução, buscando a fase manifestada;
- Procedimentos desenvolvidos;

Esperamos com isso conseguir responder a pergunta deste trabalho.

Questão 1:

A questão é de caráter operacional e sua resolução exige conhecimentos de conjuntos numéricos, suas operações e propriedades. Por exemplo, $\mathbb{Q}$ com a adição goza da propriedade associativa, comutativa, elemento neutro e simétrico. Também $\mathbb{Q}$ com a multiplicação satisfaz as condições: associativa, comutativa, elemento neutro e elemento simétrico, para qualquer elemento não nulo.

A resolução do item (a) exige o conhecimento das propriedades de $\mathbb{Q}$ com a adição e a multiplicação usuais. Consiste de uma questão dentro da concepção operacional.

Já o item (b) exige conhecimentos a respeito do conjunto $\mathbb{Z}$ com as operações de adição e multiplicação bem como as propriedades e a diferenciação entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, considerando que em $\mathbb{Z}$ não temos a existência do elemento simétrico para qualquer a $\in \mathbb{Z}$, a ≠ 0.

Por meio da análise da produção escrita dos estudantes conseguimos identificar para o item (a) quatro grupos de procedimentos adotados pelos estudantes, a saber:

Grupo 1 – Os estudantes resolveram a equação e depois explicitaram as propriedades do elemento neutro dos racionais para a adição e a multiplicação. De acordo com o nosso referencial teórico, acreditamos que estejam na fase de condensação, pois necessitam de um objeto mental (no caso a resolução da equação) para responder o item da questão. Pertencem a esse grupo os estudantes A_1, A_6, A_7.

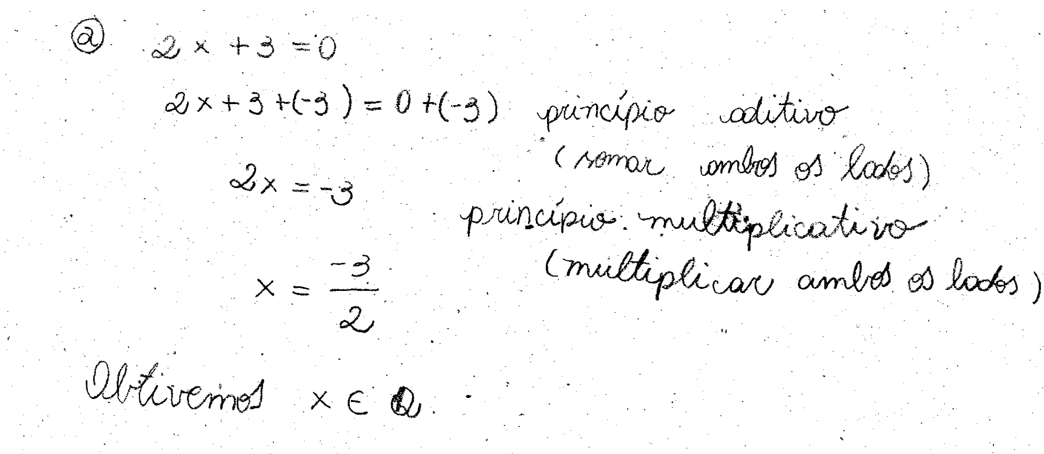

a) $2x + 3 = 0$
$2x + 3 + (-3) = 0 + (-3)$ princípio aditivo
(somar ambos os lados)
$2x = -3$ princípio multiplicativo
(multiplicar ambos os lados)
$x = \frac{-3}{2}$
Obtivemos $x \in \mathbb{Q}$.

Figura 1 – Registro escrito do estudante A_1

Grupo 2 – Os estudantes explicitaram as operações e algumas propriedades de ($\mathbb{Q}$, +, $\cdot$), mas não resolveram a equação. Pelo referencial utilizado para o desenvolvimento deste trabalho, acreditamos que estejam na fase de reificação quanto às operações, pois não necessitam mais de um objeto mental para responder a questão. Quanto às propriedades, acreditamos que estejam em uma fase de interiorização, pois necessitam do objeto mental e não têm uma ordenação para a apresentação dos objetos. Por exemplo, citaram somente uma propriedade do elemento simétrico em relação a adição. Pertencem a esse grupo os estudantes A_3 e A_5.

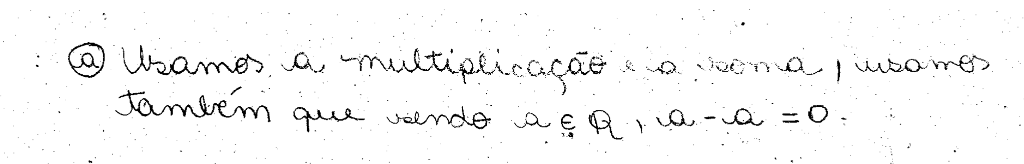

a) Usamos a multiplicação e a soma, usamos também que sendo $a \in \mathbb{Q}$, $a - a = 0$.

Figura 2 – Registro escrito do estudante A_3

Grupo 3 – Os estudantes explicitaram as operações envolvidas, mesmo que de maneira errônea. Neste caso, consideramos que os estudantes não têm a fase de interiorização do conceito, pois, pelo registro, temos a impressão que os estudantes não interiorizaram o conceito, percebendo as operações envolvidas, bem como as propriedades. Neste grupo temos apenas o estudante A_2.

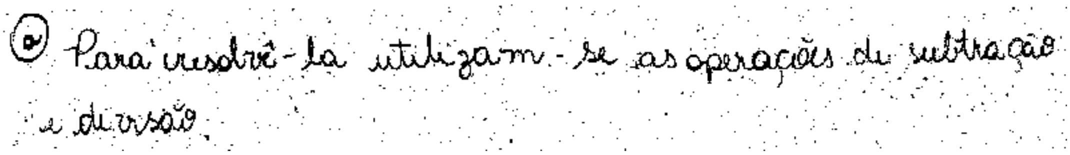
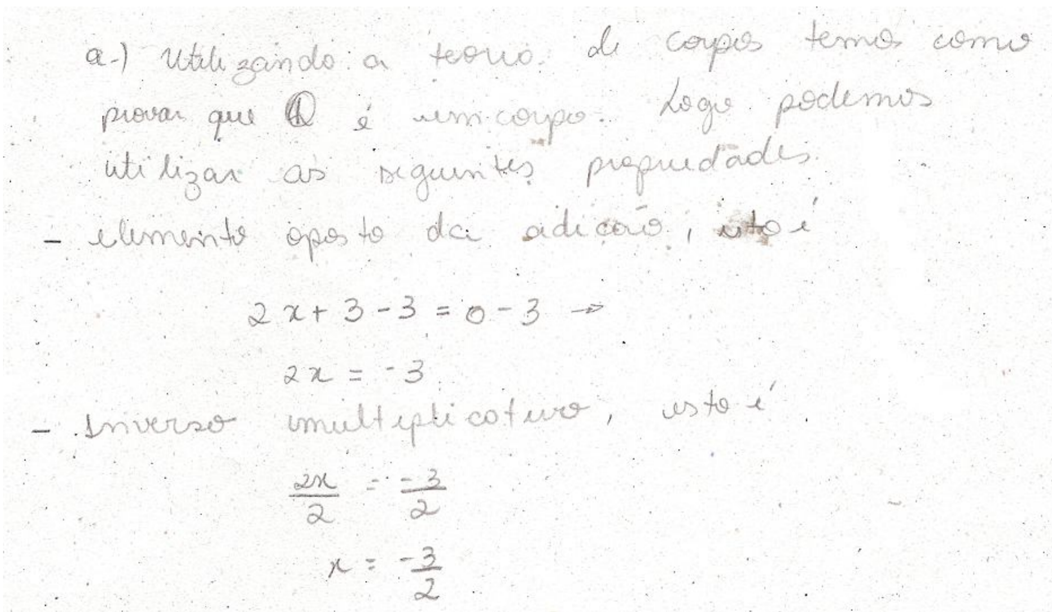

a) Para resolvê-la utilizam-se as operações de subtração e divisão.

Figura 3 – Registro escrito do estudante A_2

Grupo 4 – Os estudantes utilizaram o conjunto $\mathbb{Q}$ com as operações usuais e propriedades como sendo um corpo, mesmo não especificando as operações. Também, explicitaram algumas das propriedades envolvidas e acreditamos que estejam na fase de condensação, pois utilizaram um objeto mental e alguma ordem para resolver o item. Neste grupo temos apenas o estudante A_4.


a.) Utilizando a teoria de corpos temos como provar que $\mathbb{Q}$ é um corpo. Logo podemos utilizar as seguintes propriedades.

- elemento oposto da adição, isto é

$$2x + 3 - 3 = 0 - 3 \Rightarrow$$

$$2x = -3$$

- inverso multiplicativo, isto é

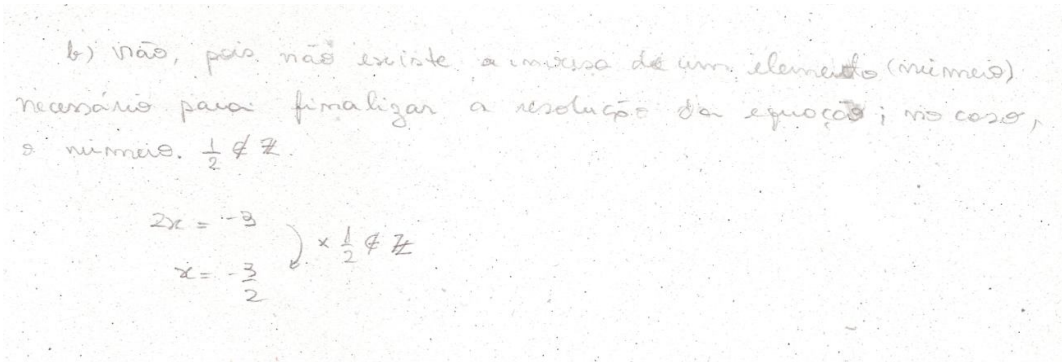
$$\frac{2x}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

Figura 4 – Registro escrito do estudante A_4

A análise da produção escrita do item (b) apresentou cinco grupos de procedimentos, isto é, modos diferentes de resolução.

Grupo 1 – Os estudantes responderam o item corretamente e justificaram explicitando o fato do resultado não pertencer a $\mathbb{Z}$. Consideramos que estejam no processo de condensação, pois necessitam do objeto mental $\left(-\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}\right)$ ou $\nexists\, x \in \mathbb{Z}$ tal que $2x + 3 = 0$, para dar suporte a sua resposta. Neste grupo temos os estudantes A_1 e A_5.



b) não, pois não existe a inversa de um elemento (número) necessário para finalizar a resolução da equação; no caso, o número. $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

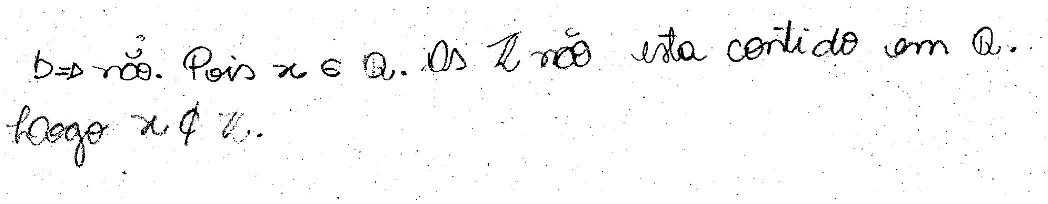
$2x = -3$

$x = -\frac{3}{2}$

$\times \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Figura 5 – Registro escrito do estudante A_5

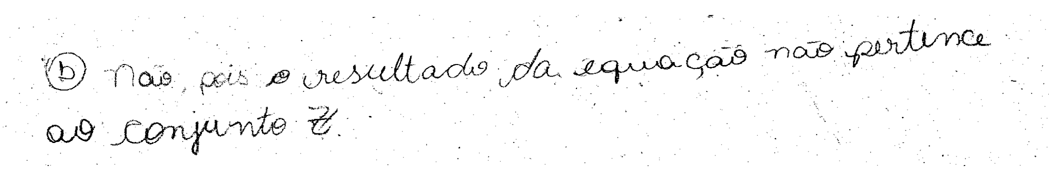
Grupo 2 – Os estudantes responderam o item de maneira correta e justificaram explicitando o fato do x obtido no item (a) pertencer aos racionais e não pertencer aos inteiros, porque $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{Q}$. Os estudantes também necessitam de um objeto mental, que no caso seria a solução do item anterior, nesta perspectiva, o processo é o de condensação. Neste grupo temos os estudantes A_3 e A_6.



b ⇒ não. Pois $x \in \mathbb{Q}$. Os $\mathbb{Z}$ não esta contido em $\mathbb{Q}$. Logo $x \notin \mathbb{Z}$.

Figura 6 – Registro escrito do estudante A_6

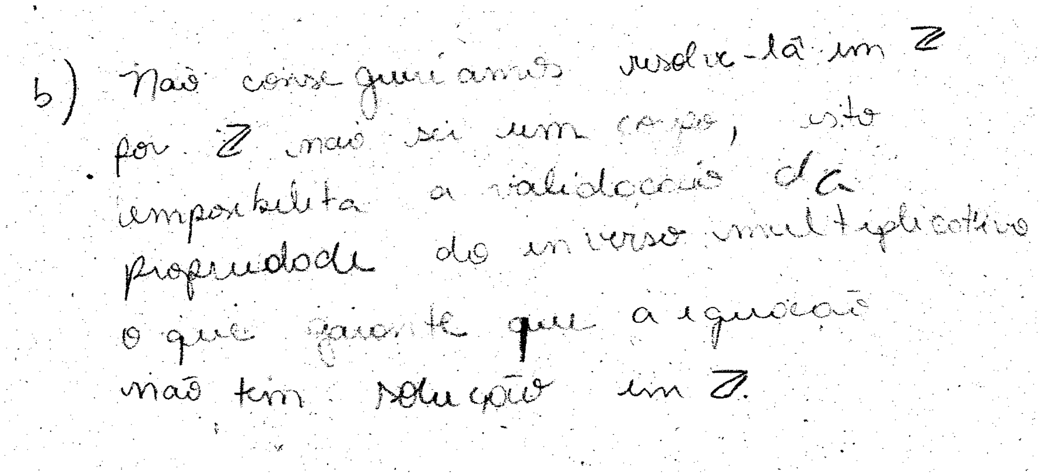
Grupo 3 – Os estudantes responderam de maneira correta e justificaram afirmando que o resultado do item (a) não pertence a $\mathbb{Z}$. De acordo com o referencial teórico, estariam numa fase de reificação, isto é, a solução ficou estática, pois enxergaram a solução sem resolver a questão. Neste grupo temos o estudante A_2.



(b) Não, pois o resultado da equação não pertence ao conjunto $\mathbb{Z}$.

Figura 7 – Registro escrito do estudante A_2

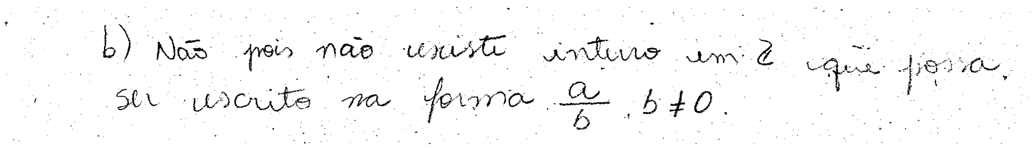
Grupo 4 – Os estudantes responderam corretamente e justificaram dizendo que $\mathbb{Z}$ não é corpo e, portanto não tem inverso. Esta resolução nos mostra que a fase é de reificação, pois não utilizaram um objeto mental. Neste grupo temos o estudante A_4.



b) Não conseguiamos resolvê-lã em $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}$ não ser um corpo, isto impossibilita a validação da propriedade do inverso multiplicativo o que garante que a equação não tem solução em $\mathbb{Z}$.

Figura 8 – Registro escrito do estudante A_4

Grupo 5 – Os estudantes responderam justificando que não existe inteiro que possa ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, incorretamente, pois 1 pertence aos inteiros e pode ser escrito dessa forma. Acreditamos que estejam numa fase inicial da interiorização. Neste grupo temos o estudante A_7.



b) Não pois não existe inteiro em $\mathbb{Z}$ que possa ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

Figura 9 – Registro escrito do estudante A_7

Questão 2

A resolução desta questão exige que o estudante tenha conhecimentos de conjuntos numéricos, suas operações e propriedades. Também, que tenha conhecimento de alguns conjuntos importantes com suas operações e propriedades, como, por exemplo, o conjunto de matrizes e o conjunto de restos módulo m. Esta questão tem uma concepção operacional.

Como a questão possui 9 itens, apresentaremos, para cada item, seus grupos de acordo com os registros escritos dos estudantes, facilitando observar os indicadores apresentados inicialmente neste capítulo.

A resolução do item (a) exige que o estudante tenha conhecimento sobre o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) com suas operações, mais especificamente da adição, e suas propriedades.

Obtivemos cinco grupos:

Grupo 1 – Os estudantes apresentaram a justificativa de que não temos elemento neutro em ($\mathbb{N}$,+). De acordo com o referencial teórico, estes estão no estágio de interiorização, pois necessitam de um objeto mental, no caso, x + *e* = x, ou dois elementos x, y $\in \mathbb{N}$ que satisfaçam x + y = 0, para apresentar sua resposta. Podemos inferir que os estudantes consideram o conjunto dos naturais sem o elemento zero. Neste grupo temos os estudantes A_1, A_2.

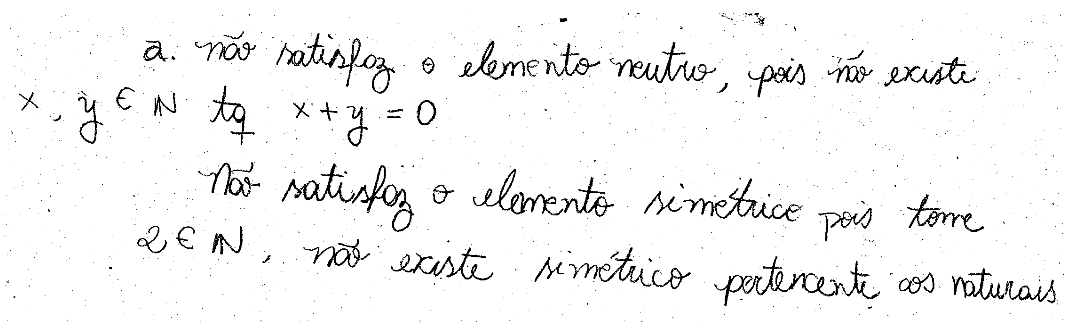

a. não satisfaz o elemento neutro, pois não existe $x, y \in \mathbb{N}$ tq $x + y = 0$
Não satisfaz o elemento simétrico pois tome $2 \in \mathbb{N}$, não existe simétrico pertencente aos naturais

Figura 10 – Registro escrito do estudante A_1

Grupo 2 – Neste grupo os estudantes afirmam que $0 \notin \mathbb{N}$. Teremos três subgrupos desse grupo:

Grupo 2.1 – Os estudantes colocaram que $0 \notin \mathbb{N}$, ou seja, que não tem elemento neutro e também que não tem simétrico. A fase apresentada pelos estudantes, segundo o referencial teórico, seria de reificação, pois não necessitam mais de um objeto para responder. Não falaram nada sobre a propriedade associativa. Neste grupo temos o estudante A_3.

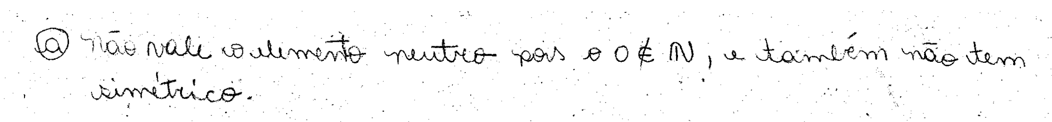

(a) não vale o elemento neutro pois o $0 \notin \mathbb{N}$, e também não tem simétrico.

Figura 11 – Registro escrito do estudante A_3

Grupo 2.2 – Os estudantes colocaram que 0 $\notin \mathbb{N}$, ou seja, que não tem elemento neutro e apresentaram um contra-exemplo para justificar o fato dos naturais não terem simétrico. Não falaram nada sobre a propriedade associativa. Estão numa fase de condensação, num nível inferior, pois têm uma ordem na apresentação das propriedades, mesmo não explicitando a associativa. Neste grupo temos o estudante A_5.

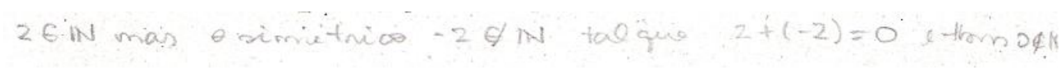

2 ∈ IN mas o simétrico -2 ∉ IN tal que 2+(-2)=0 e tbm 0∉IN

Figura 12 – Registro escrito do estudante A_5

Grupo 2.3 – Os estudantes apresentaram um contra-exemplo para justificar que os naturais com a adição não possuem elemento neutro e afirmaram que não possui simétrico, justificando com uma equação. Explicitaram que “existe associatividade”. Os estudantes estariam num processo de condensação, pois apresentam a ordem correta na apresentação das propriedades. Neste grupo temos o estudante A_7.

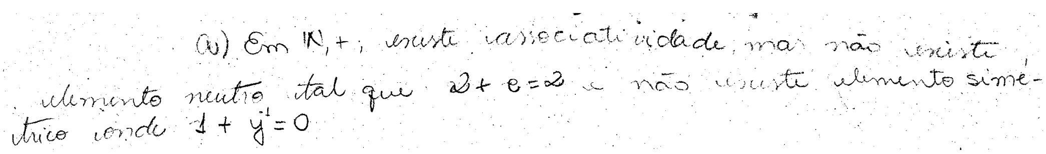

(a) Em IN,+; existe associatividade, mas não existe elemento neutro tal que 2+e=2 e não existe elemento simétrico onde 1 + y' = 0

Figura 13 – Registro escrito do estudante A_7

Grupo 3 – Neste grupo, os estudantes afirmam que $(\mathbb{N},+)$ não possuem simétricos. Faremos uma subdivisão deste Grupo.

Grupo 3.1 – Na resposta apresentada, os estudantes afirmam que o conjunto dos naturais com a operação de soma ($\mathbb{N}$, +) não possui elemento simétrico, justificando que 1 pertence aos naturais, mas não existe x nos naturais tais que a soma dos dois seja zero. Inferimos aqui que esses estudantes entendem o zero como elemento neutro. Assim, cremos que estejam na fase de condensação, pois necessitaram de um objeto mental para justificar a resposta. Neste grupo temos o estudante A_6.

a. não. Pois $(\mathbb{N},+)$ não possui elemento inverso. Seja $1 \in \mathbb{N}$, não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $1+x=0$

Figura 14 – Registro escrito do estudante A_6

Grupo 3.2 – Os estudantes afirmaram que os naturais com a adição não têm elemento simétrico. Esta resposta nos mostra que os estudantes estão em uma fase de reificação, pois não precisaram de um objeto mental para resolver a questão. Neste grupo temos o estudante A_4.

não temos o elemento simetrico

Figura 15 – Registro escrito do estudante A_4

A resolução do item (b) exige que o estudante tenha o conhecimento sobre o conjunto dos inteiros com a operação de adição ($\mathbb{Z}$, +).

Obtivemos três grupos:

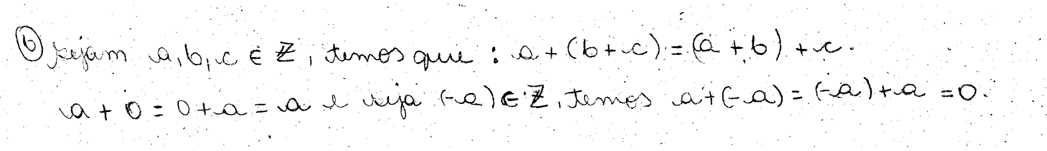
Grupo 1 – Os estudantes só assinalaram esse item sem justificar. Neste caso acreditamos que eles estejam na fase de reificação, pois tal estrutura se tornou estática, não havendo a necessidade de um objeto mental. Neste grupo estão os estudantes A_1, A_2, A_5, A_6 e A_7.

Grupo 2 – Os estudantes assinalaram esse item e justificaram escrevendo que é um **Grupo abeliano**. Notemos que no enunciado da questão não temos a palavra **Grupo**. Acreditamos que estes estudantes estejam em uma fase de reificação, pois apresenta o nome da estrutura ao invés das propriedades. Neste grupo temos apenas o estudante A_4.

b. $(\mathbb{Z},+)$ Temos um grupo abeliano com o conj $(\mathbb{Z},+)$

Figura 16 – Registro escrito do estudante A_4

Grupo 3 – Os estudantes assinalaram esse item e justificaram apresentando as propriedades. Neste caso, segundo nosso referencial teórico, eles estão na fase de condensação, pois além de necessitarem de um objeto mental, apresentam as propriedades de forma ordenada (associativa, elemento neutro, simétrico). Neste grupo temos o estudante A_3.

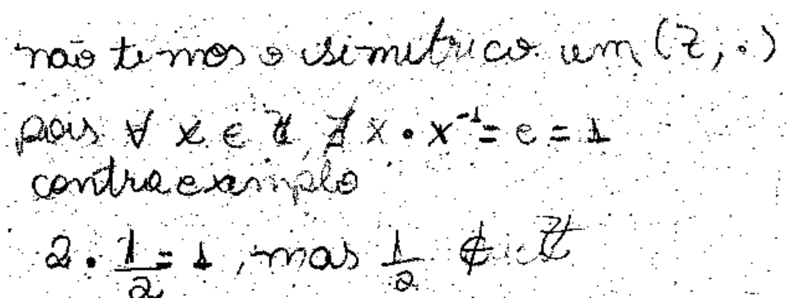


(b) sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos que: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
$a + 0 = 0 + a = a$ e seja $(-a) \in \mathbb{Z}$, temos $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Figura 17 – Registro escrito do estudante A_3

A resolução do item (c) exige conhecimentos do conjunto dos inteiros com a operação de multiplicação $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Apresentaremos também 3 grupos distintos:

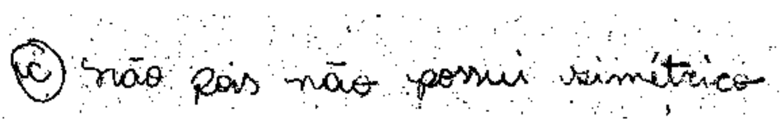
Grupo 1 – Os estudantes afirmaram, de acordo com os registros escritos, que o conjunto dos inteiros com a multiplicação usual, não possui o elemento simétrico (inverso). Estão em uma fase de condensação, pois apresentaram um objeto mental para justificar sua resposta $\left(\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ ou } \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}\right)$. Neste grupo temos os estudantes A_1, A_2, A_5, A_6 e A_7.



não temos o simétrico em $(\mathbb{Z}, \cdot)$
pois $\forall\, x \in \mathbb{Z}\ \nexists\ x \cdot x^{-1} = e = 1$
contraexemplo
$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, mas $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Figura 18 – Registro escrito do estudante A_2

Grupo 2 – Os estudantes afirmaram que não satisfazem todas as propriedades e justificam colocando que possuem simétrico. Assim, podemos inferir que os estudantes deste grupo estão em uma fase de reificação. O conceito já se tornou estático. Neste grupo está o estudante A_3.



(c) não pois não possui simétrico

Figura 19 – Registro escrito do estudante A_3

Grupo 3 – Os estudantes afirmaram que este é um **Grupo abeliano**, de maneira errônea. Neste caso, os estudantes ainda nem tiveram a fase de interiorização do conceito, pois confundiu com ($\mathbb{Z}$, +) ou com ($\mathbb{Q}$,·). Neste grupo está o estudante A_4.


c) $(\mathbb{Z},\cdot)$ Temos um grupo abeliano com o conj $(\mathbb{Z},\cdot)$

Figura 20 – Registro escrito do estudante A_4

A resolução do item (d) exige conhecimentos sobre o conjunto dos racionais e a operação de multiplicação $(\mathbb{Q},\cdot)$.

Dividimos este item em 2 grupos:

Grupo 1 – Os estudantes afirmaram que não existe o elemento inverso ou simétrico, justificando com uma das propriedades desse elemento não sendo satisfeita. Os estudantes deste grupo estão em uma fase de condensação, pois necessitam de um objeto mental para justificar sua resposta. Neste grupo estão os estudantes A_1, A_5, A_6 e A_7.

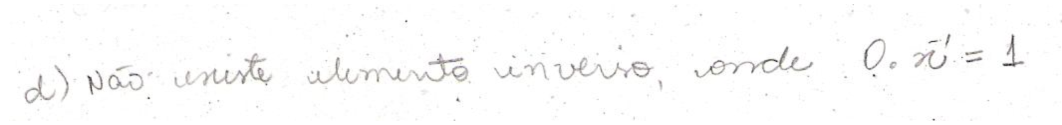
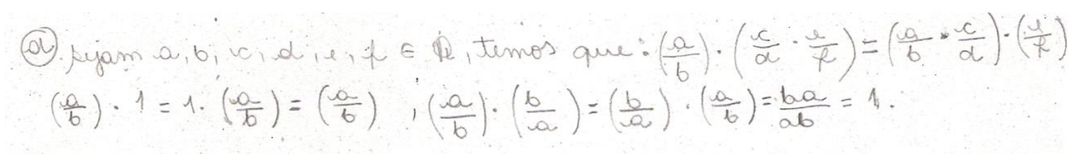

d) Não existe elemento inverso, onde $0 \cdot x' = 1$

Figura 21 – Registro escrito do estudante A_7

Grupo 2 – Os estudantes afirmaram que o conjunto dos racionais com a multiplicação usual é um **Grupo**, de maneira errônea. Neste caso acreditamos que nem a fase de interiorização do conceito foi assimilada. Destacamos o estudante A_4 que afirma que é um **Grupo abeliano**. Neste grupo estão os estudantes A_2, A_3, A_4.


d) sejam a, b, c, d, e, f $\in \mathbb{Q}$, temos que: $\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\left(\frac{e}{f}\right)$

$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot 1 = 1\cdot\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{ba}{ab}=1.$

Figura 22 – Registro escrito do estudante A_3

A resolução do item (e) exige que os estudantes tenham conhecimentos sobre o conjunto das matrizes e a operação de adição, mais especificamente as matrizes de ordem 2 $\left(M_2(\mathbb{R}),+\right)$.

Dividimos este item em 3 grupos:

Grupo 1 – Os estudantes somente assinalaram o item, sem justificar. Acreditamos que estejam em fase de reificação, pois não necessitam de um objeto mental. Neste grupo estão os estudantes A_1, A_2, A_5, A_6, A_7.

Grupo 2 – Os estudantes deste grupo assinalaram e argumentaram que era **Grupo**. Destacamos novamente que o enunciado em momento algum se refere ao conceito de **Grupo**. Acreditamos que os estudantes estão em uma fase de reificação, pois apresentam o nome da estrutura ao invés das propriedades. Neste grupo está o estudante A_4.

Grupo 3 – Os estudantes deste grupo além de assinalarem o item, também apresentam as propriedades: associativa, elemento neutro e simétrico, com alguns erros de notação, como as matrizes pertencerem aos reais. Neste caso acreditamos que os estudantes estão em uma fase de condensação, pois necessitam de um objeto mental organizado. Neste grupo está o estudante A_3.

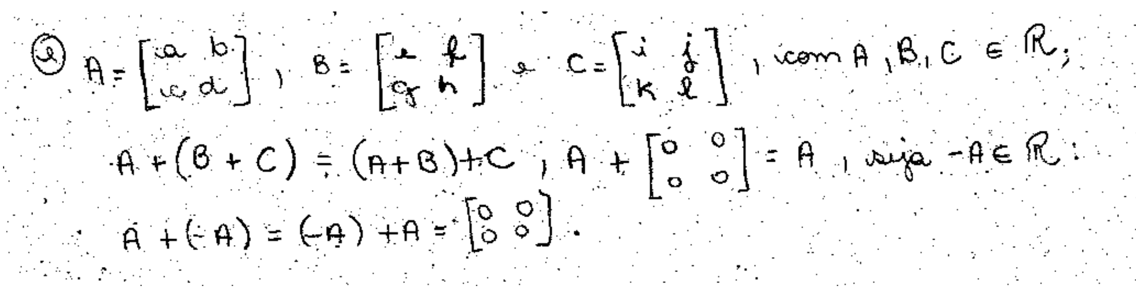


Figura 23 – Registro escrito do estudante A_3

A resolução do item (f) exige que os estudantes tenham conhecimentos sobre o conjunto das matrizes com a operação de multiplicação, mais especificamente matrizes de ordem 2 $\left(M_2(\mathbb{R}),\cdot\right)$

Grupo 1 – De acordo com os registros escritos, os estudantes deste grupo afirmaram, de maneira errônea, que não existe a associatividade. Talvez confundindo com a comutatividade. Acreditamos que este grupo ainda não passou pela fase de interiorização. Neste grupo estão os estudantes A_4 e A_7.

f) Não existe associatividade.

Figura 24 – Registro escrito do estudante A_7

Grupo 2 – O registro escrito dos estudantes mostra que, além de não existir a propriedade associativa, de maneira errônea, também que não existe inverso. Eles mostraram com um exemplo, feito de maneira errada, que a associatividade não vale. Cremos que este grupo esteja na fase de interiorização, pois confundem as operações e as propriedades. Neste grupo está o estudante A_1.

f. $(M_2(\mathbb{R}), \cdot) \to$ não vale a associatividade; a matriz nula não tem inversa

Figura 25 – Registro escrito do estudante A_1

Grupo 3 – De acordo com o registro escrito, os estudantes mostraram a existência da associatividade por meio de um exemplo e, ao final, afirmaram que não tem a propriedade simétrica. Cremos que estes estudantes estejam na fase de interiorização, pois utilizam exemplos para justificar a resposta e não possuem uma ordem das propriedades em sua resposta. Neste grupo está o estudante A_2.

(f) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 22 & 16 \end{bmatrix}$

$(A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} 15 & 22 \\ 38 & 54 \end{bmatrix}$

$B \cdot C = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} 15 & 21 \\ 37 & 53 \end{bmatrix}$

temos que a matriz nula não tem a propriedade simétrica

Figura 26 – Registro escrito do estudante A_2

Grupo 4 – Os estudantes deste grupo afirmaram que a matriz nula não tem elemento inverso. Neste caso, os estudantes estão na fase de condensação, pois necessitam de um objeto mental para justificar, no caso a matriz nula. Neste grupo estão os estudantes A_3, A_5 e A_6.

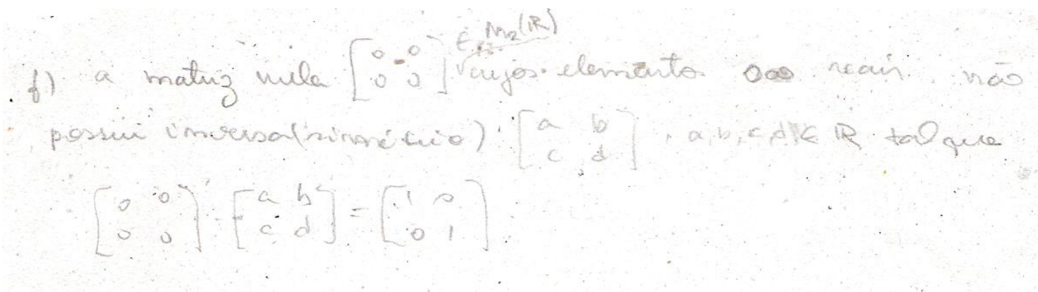


Figura 27 – Registro escrito do estudante A_5

A resolução do item (g) exige dos estudantes conhecimento de exemplos importantes e não triviais de **Grupos**, no caso **Grupos lineares**. Temos três grupos distintos:

Grupo 1 – Os estudantes não assinalaram e não justificaram. Podemos inferir que eles não possuem o processo de interiorização do conceito de **Grupos lineares**. Neste grupo temos os estudantes A_1, A_2, A_5 e A_6.

Grupo 2 – Os estudantes não assinalaram e justificaram afirmando que desconhecem o conjunto com a operação, sendo assim, os estudantes também não possuem o processo de interiorização. Neste grupo temos os estudantes A_4 e A_7.

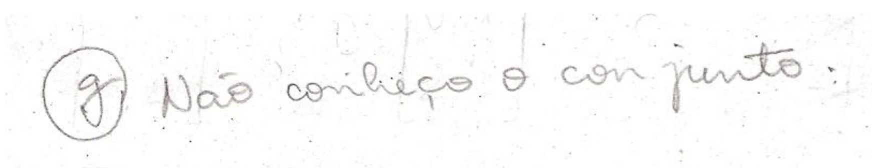


Figura 28 – Registro escrito do estudante A_7

Grupo 3 – Os estudantes não assinalaram e justificaram colocando a multiplicação com notação de congruência módulo m. Inferimos que os estudantes devem ter confundido este item com os outros dois, que tratam de congruência módulo m. O fato de confundirem nos leva a crer que não possuem o processo de interiorização do conceito. Neste grupo temos somente o estudante A_3.

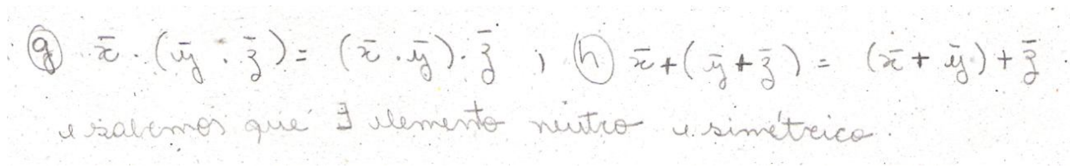


Figura 29 – Registro escrito do estudante A_3

A resolução do item (h) exige dos estudantes conhecimentos de congruência módulo m com a operação de multiplicação e suas propriedades.

Grupo 1 – Os estudantes assinalaram e não justificaram, inferimos também que o fato de não justificarem leva a crer que não possuem o processo de interiorização do conceito. Neste grupo temos os estudantes A_1, A_2, A_5, A_6 e A_7.

Grupo 2 - Os estudantes assinalaram o item e justificaram dizendo que se tem um **Grupo**. A falta de uma justificativa mais consistente nos leva a afirmar que não possuem o processo de interiorização do conceito. Neste grupo temos o estudante A_4.

Grupo 3 – Os estudantes assinalaram o item e justificaram colocando a notação de congruência, mas com a adição, apresentando a propriedade associativa. Colocaram também que existe o elemento neutro e simétrico. Notemos que, apesar do registro escrito dos estudantes apresentarem esse item como (h), pela resposta, inferimos que devem ter trocado (h) por (i). Tal situação nos leva a crer que os estudantes não possuem o processo de interiorização do conceito. Neste grupo temos o estudante A_3.

A resolução do item (i) exige dos estudantes conhecimentos de congruência módulo m com a operação de adição e suas propriedades.

Grupo 1 – Os estudantes assinalaram e não justificaram. A falta da justificativa nos leva a afirmar que não possuem o processo de interiorização do conceito. Neste grupo temos os estudantes A_1, A_2, A_5, A_6 e A_7.

Grupo 2 – Os estudantes assinalaram o item e justificaram dizendo que "... tem-se um **Grupo**." A falta de uma justificativa mais consistente também nos leva a afirmar que não possuem o processo de interiorização do conceito. Neste grupo temos o estudante A_4.

Grupo 3 – Os estudantes assinalaram o item e não justificaram. Sendo assim, os estudantes devem ter confundido os itens (h) e (i). Tal situação nos leva a crer que os estudantes não possuem nem o processo de interiorização do conceito. Neste grupo temos o estudante A_3.

Questão 3

A resolução da questão exige que o estudante saiba relacionar o conceito de **Grupo** com simetrias de um triângulo eqüilátero. Esta questão tem uma concepção operacional. Notamos, durante a aplicação, que os estudantes não conseguiam enxergar o triângulo num sistema de eixos cartesianos. Assim, resolvemos colocar o desenho do triângulo inicial na lousa, para que eles pudessem melhor compreender a questão. Como o estudante A_4 estava adiantado em relação aos demais, sua resolução ficou diferenciada. Dividimos os registros dos alunos em cinco grupos:

Grupo 1 – Os estudantes afirmaram que o triângulo apresentado *"ficará exatamente na posição apresentada, pois seus vértices estão exatamente nos respectivos ângulos"* (A_7). Nesta situação podemos inferir que a fase que se encontra presente é o da interiorização em um nível inicial. Neste grupo temos somente o estudante A_7.

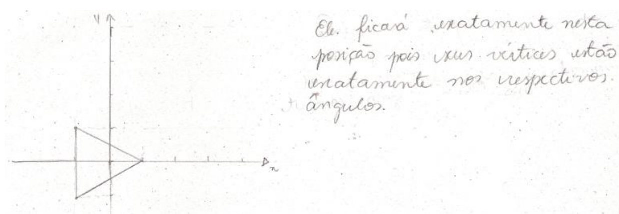


Figura 30 – Registro escrito do estudante A_7

Grupo 2 – Os estudantes deste grupo afirmaram que *"só mudará o vértice."* (A_2). Contudo, o estudante A_1 ainda comentou sobre as rotações dadas e a reflexão pelo eixo x. Neste grupo temos os estudantes A_1 e A_2. A fase que se encontra este grupo é o da condensação em uma fase inicial, pois existe a necessidade de um objeto mental.

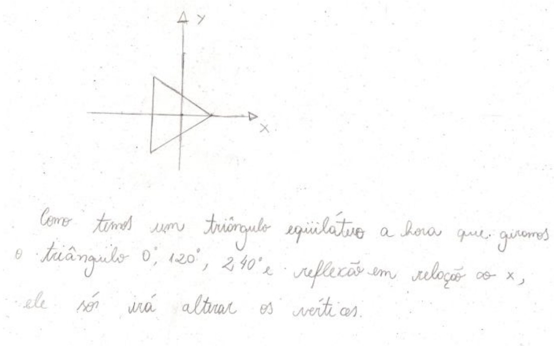


Figura 31 – Registro escrito do estudante A_1

Grupo 3 – Os estudantes deste grupo afirmaram que *"em qualquer rotação... sempre irá ser simétrico em relação ao eixo y."* (A_6). Neste grupo temos a fase de condensação e somente o estudante A_6.

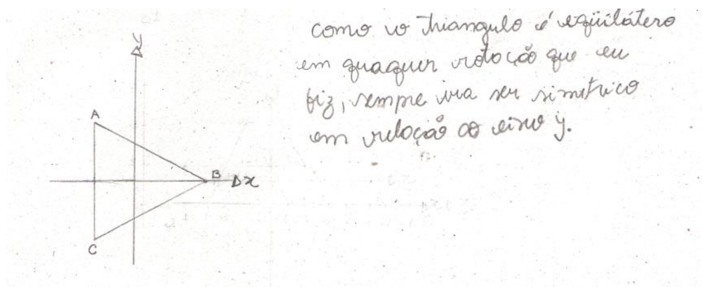


Figura 32 – Registro escrito do estudante A_6

Grupo 4 – Os estudantes que fazem parte deste grupo apresentaram registro de todas as simetrias e afirmaram que o triângulo sempre volta para o mesmo lugar, só alterando os vértices. Aqui podemos observar um início de condensação. Neste grupo temos os estudantes A_3 e A_5.

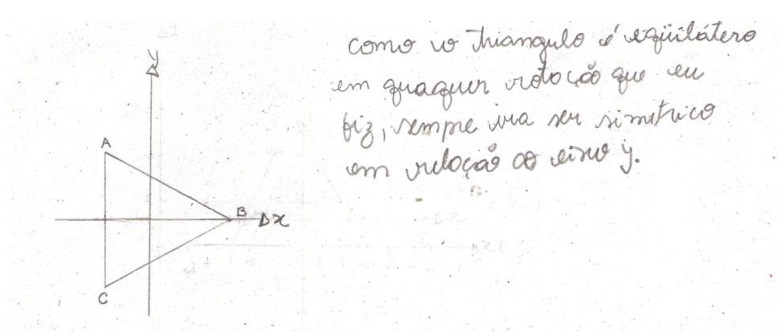


Figura 33 – Registro escrito do estudante A_3

Grupo 5 – Os estudantes deste grupo fizeram de outras duas formas diferenciadas, pois não tiveram acesso ao desenho, como os outros. Eles trabalharam com outros ângulos nas rotações ou triângulos circunscritos. Neste grupo temos somente o estudante A_4. Podemos observar um início de interiorização do conceito de rotação e translação.

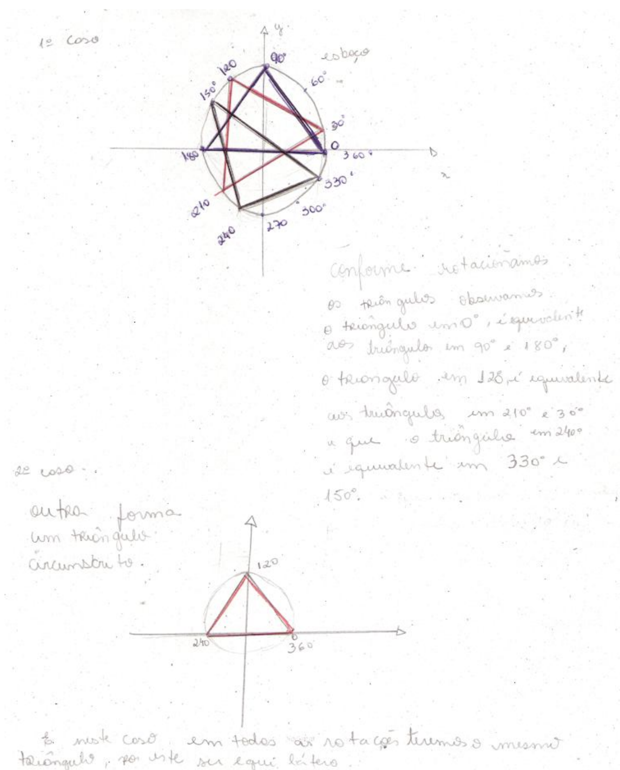


Figura 34 – Registro escrito do estudante A_4

Questão 4

A questão tem caráter estrutural e sua resolução exige que o estudante saiba a definição de **Grupo**. De acordo com o registro escrito, temos dois grupos:

Grupo 1 – Apresentaram a definição de **Grupo** de maneira correta. Segundo o referencial teórico, isto caracteriza um processo de reificação, pois a definição se tornou algo estático. Neste grupo estão todos os estudantes, exceto o A_4.

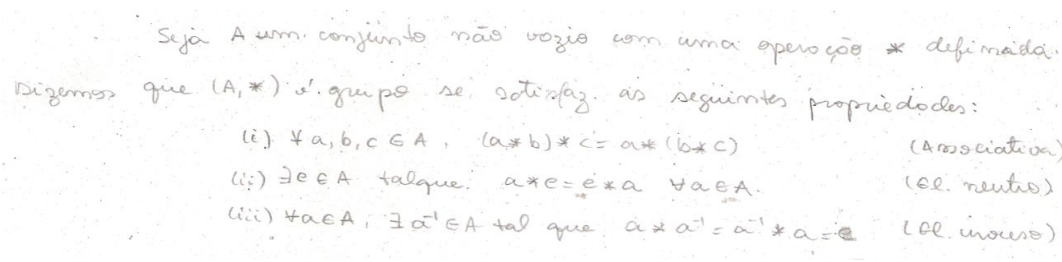

Seja A um conjunto não vazio com uma operação $*$ definida.
Dizemos que $(A,*)$ é grupo se satisfaz as seguintes propriedades:
(i) $\forall a,b,c \in A$, $(a*b)*c = a*(b*c)$ (Associativa)
(ii) $\exists e \in A$ talque $a*e = e*a$ $\forall a \in A$. (el. neutro)
(iii) $\forall a \in A$, $\exists a^{-1} \in A$ tal que $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (el. inverso)

Figura 35 – Registro escrito do estudante A_5

Grupo 2 – O registro escrito apresentou a definição de maneira correta, contudo, utilizando a operação de adição. Neste caso podemos ter duas interpretações: a primeira seria o processo de condensação, pois apesar de apresentarem a definição na ordem correta, usaram a operação de adição, a segunda seria o processo de reificação, utilizando o sinal + como uma operação qualquer. Neste grupo está somente o estudante A_4.

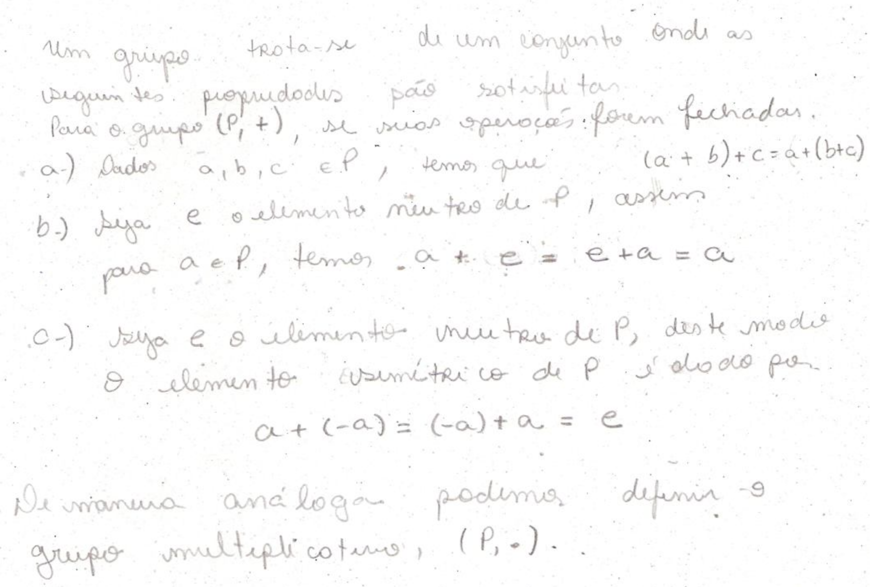

Um grupo trata-se de um conjunto onde as seguintes propriedades são satisfeitas
Para o grupo $(P,+)$, se suas operações forem fechadas.
a-) Dados $a,b,c \in P$, temos que $(a+b)+c = a+(b+c)$
b.) Seja e o elemento neutro de P, assim para $a \in P$, temos $a + e = e+a = a$
c-) Seja e o elemento neutro de P, deste modo o elemento simétrico de P é dado por
$a+(-a) = (-a)+a = e$
De maneira análoga podemos definir o grupo multiplicativo, $(P,\cdot)$.

Figura 36 – Registro escrito do estudante A_4

Questão 5

Para resolver esta questão exige-se que os estudantes tenham conhecimento do que é um **Grupo** e alguns exemplos importantes dessa estrutura algébrica. Consideramos esta questão dentro da concepção estrutural.

Dividimos os registros escritos dos estudantes em cinco grupos:

Grupo 1 – Os estudantes responderam que existe relação entre as questões apresentadas e justificaram que envolvem os mesmos conceitos e propriedades. O que podemos inferir é que os estudantes deste grupo estão em um processo de reificação do conceito. Neste grupo estão os estudantes A_2 e A_6.

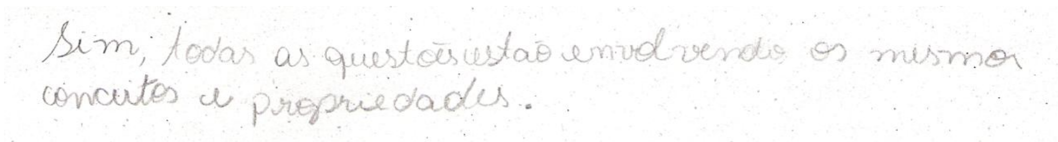

Sim, todas as questões estão envolvendo os mesmos conceitos e propriedades.

Figura 37 – Registro escrito do estudante A_2

Grupo 2 – Os estudantes responderam que existe relação entre as questões apresentadas e justificaram que envolviam as propriedades de **Grupos**, sem explicitá-las. Neste caso, os estudantes estão passando de um estágio de condensação para reificação, acreditamos que eles saibam que o conteúdo tem relação com **Grupo**, no entanto o conceito ainda não ficou estático. Neste grupo estão os estudantes A_3, A_5 e A_7.

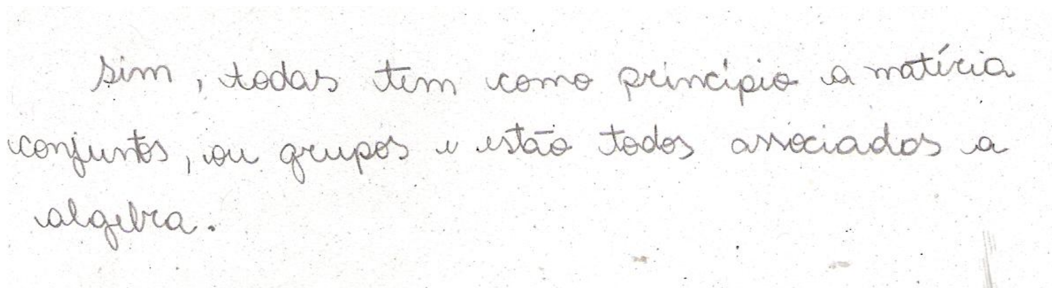

Sim, todas tem como princípio a matéria conjuntos, ou grupos e estão todos associados a algebra.

Figura 38 – Registro escrito do estudante A_3

Grupo 3 – Os estudantes responderam que existe relação entre as questões apresentadas e justificaram que envolviam as propriedades de **Grupos**, explicitando-as. Neste caso, acreditamos que os estudantes estão em um processo de reificação. Neste grupo está o estudante A_1.

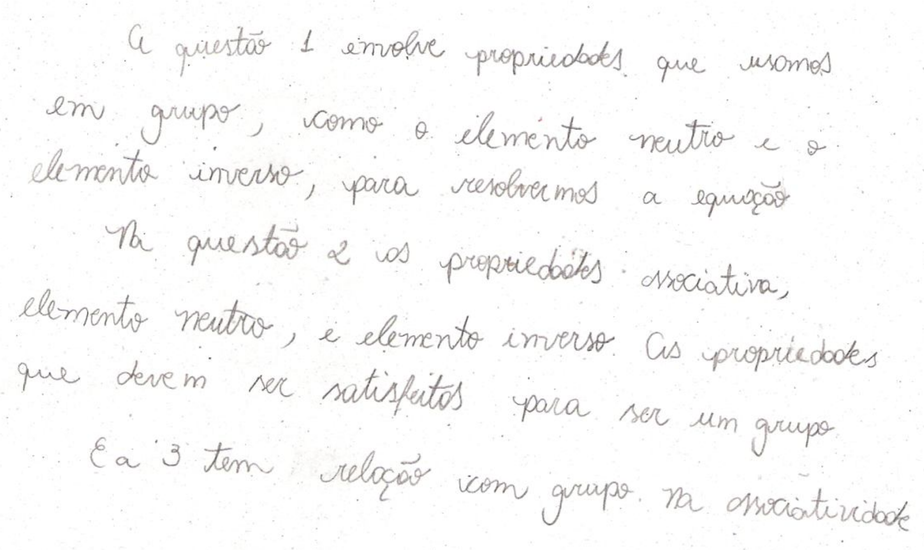

A questão 1 envolve propriedades que usamos em grupo, como o elemento neutro e o elemento inverso, para resolvermos a equação
Na questão 2 as propriedades associativa, elemento neutro, e elemento inverso. As propriedades que devem ser satisfeitas para ser um grupo
E a 3 tem relação com grupo na associatividade

Figura 39 – Registro escrito do estudante A_1

Grupo 4 – Os estudantes responderam que existe relação entre as questões apresentadas, exceto para a questão 3 e justificaram que envolviam as propriedades de **Grupos**. Segundo o referencial teórico, este se caracteriza como um estágio de transição do processo de condensação para o de reificação. Neste grupo está o estudante A_4.

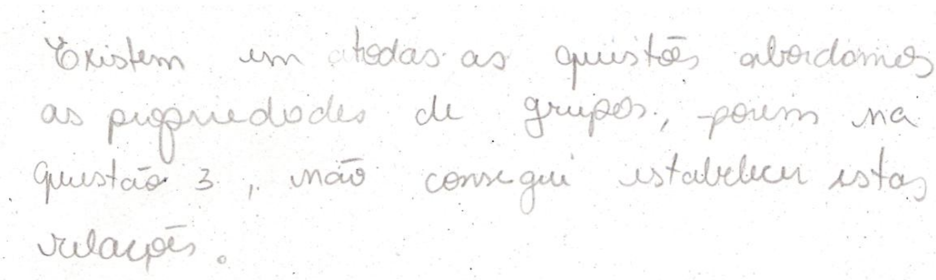

Existem em ~~a~~todas as questões abordamos as propriedades de grupos, porem na questão 3, não consegui estabelecer estas relações.

Figura 40 – Registro escrito do estudante A_4

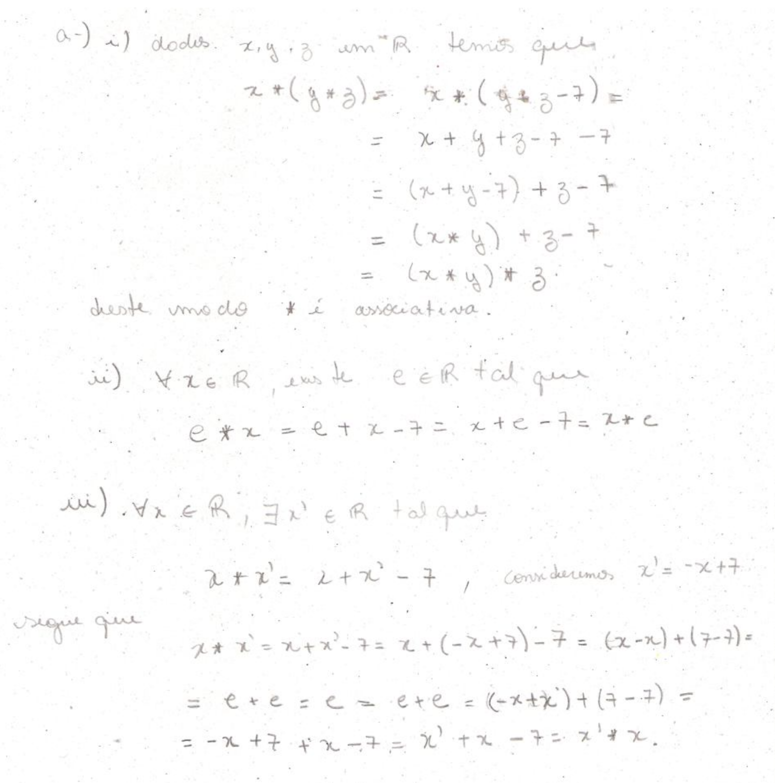
Questão 6

A questão tem um caráter operacional e sua resolução exige que o estudante saiba trabalhar com operações não usuais, utilizando as operações e propriedades usuais de conjuntos conhecidos, como os reais. Também exige o conhecimento do conceito de **Grupo**.

A resolução do item (a) exige que o estudante tenha conhecimento sobre o conjunto dos números reais com uma operação qualquer $(\mathbb{R}, *)$ e saiba verificar se o conjunto com essa nova operação goza das propriedades associativas, elemento neutro e simétrico.

Não faremos divisões em grupos, pois todos os estudantes apresentaram registros escritos similares.

Os registros escritos dos estudantes apresentaram a verificação das propriedades, do item (a), de maneira correta. Contudo, os registros escritos do estudante A_4 diferem dos demais pela maneira mais elegante de apresentação, conforme figura:


a-) i) dados x, y, z em $\mathbb{R}$ temos que

$$x*(y*z) = x*(y+z-7) =$$
$$= x+y+z-7-7$$
$$= (x+y-7)+z-7$$
$$= (x*y)+z-7$$
$$= (x*y)*z$$

deste modo $*$ é associativa.

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, existe $e \in \mathbb{R}$ tal que

$$e*x = e+x-7 = x+e-7 = x*e$$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists x' \in \mathbb{R}$ tal que

$$x*x' = x+x'-7$$, consideremos $x' = -x+7$

segue que

$$x*x' = x+x'-7 = x+(-x+7)-7 = (x-x)+(7-7) =$$
$$= e+e = e = e+e = (-x+x)+(7-7) =$$
$$= -x+7+x-7 = x'+x-7 = x'*x.$$

Figura 41 – Registro escrito do estudante A_4

De acordo com o referencial teórico, os estudantes estão em um estágio de reificação, pois sabem utilizar o conceito em outros contextos que não o de **Grupos**, isto é, sabem aplicar o conceito, pois este já se tornou estático.

A resolução do item (b) depende exclusivamente da resolução do item anterior, pois a definição de **Grupo** nos diz que para ser **Grupo** o conjunto com uma operação deve satisfazer as propriedades associativas, elemento neutro e simétrico.

Com a exceção do estudante A_4, que não respondeu este item, todos os demais responderam de maneira correta. Sendo assim podemos inferir, de acordo com o referencial teórico, que eles estão em uma fase de reificação, pois observaram as propriedades, fizeram a relação com a definição e assim deram sua resposta.

Questão 7

A resolução da questão exige que o estudante saiba verificar a ordem das propriedades no conceito de **Grupo** e ainda, como elas podem se alternar sem modificar a definição. Esta questão trabalha a concepção estrutural do conceito de **Grupo**.

Faremos uma divisão em dois grupos:

Grupo 1 – Os estudantes apresentaram de maneira correta todas as ordens que não alteram a definição de **Grupo** e, ao justificarem, argumentaram somente que o elemento neutro deveria vir antes do elemento simétrico. Os estudantes deste grupo, segundo o referencial teórico, estão em um estágio de reificação, pois entenderam a definição como algo estático, e conseguiram verificar as diversas ordens. Neste grupo temos os estudantes A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.

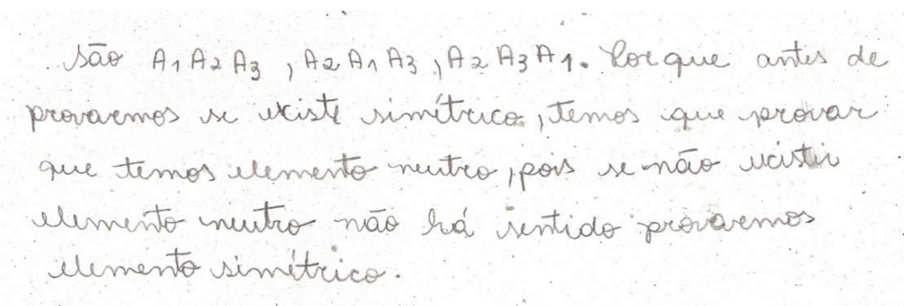

São $A_1 A_2 A_3$, $A_2 A_1 A_3$, $A_2 A_3 A_1$. Porque antes de provaremos se existe simétrico, temos que provar que temos elemento neutro, pois se não existir elemento neutro não há sentido provaremos elemento simétrico.

Figura 42 – Registro escrito do estudante A_3

Grupo 2 – Os estudantes também apresentaram as ordens de maneira correta, sem alterar a definição de **Grupo**, mas ao justificarem, além de argumentarem a importância do elemento neutro estar antes do elemento simétrico, abordaram a questão da associatividade dizendo que esta pode estar em qualquer ordem. De acordo com o referencial teórico, os estudantes estão em um estágio de reificação, pois a definição se tornou algo estático, e eles conseguiram enxergar as diversas ordens que se mantém num **Grupo**. Neste grupo temos os estudantes A_1, A_7.

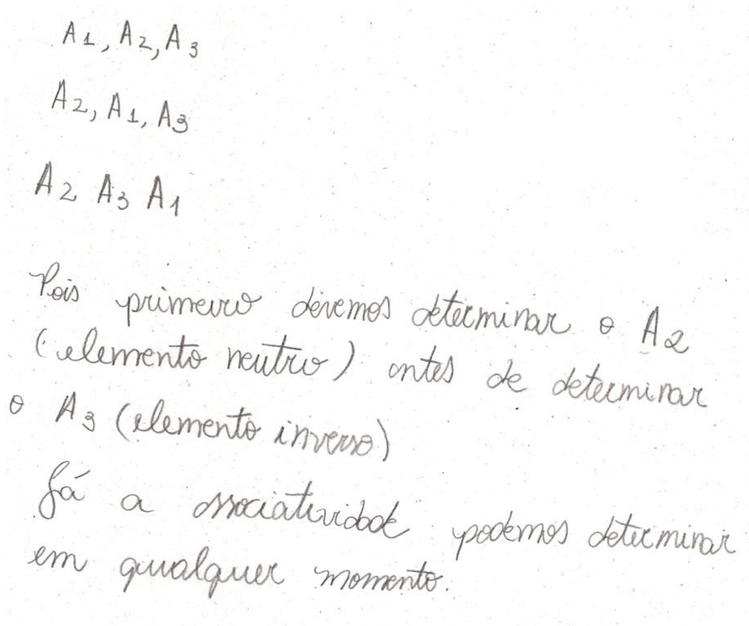


Figura 43 – Registro escrito do estudante A_1

Questão 8

A resolução da questão exige que o estudante saiba verificar o conceito de **Grupo** em diversas situações. Ele tem que analisar cada item de acordo com o seu conhecimento sobre o conceito de **Grupo**. Esta questão tem uma concepção estrutural.

No item (a) não há necessidade de dividir em grupos, pois todos os estudantes, de maneira correta, afirmaram que em um **Grupo** o elemento neutro é único. Podemos então inferir que a fase é a de reificação.

No item (b), dividiremos em quatro grupos:

Grupo 1 – Os estudantes afirmaram que num **Grupo** o elemento neutro e o inverso são únicos, logo a equação linear terá apenas uma solução. Observamos que alguns confundiram propriedades com operações, segundo nosso referencial teórico, eles estão em uma fase de transição de interiorização para a condensação. Mas apesar de escreverem erroneamente, consideramos essa justificativa, pois entendemos que os estudantes devem ter pensado corretamente. Neste grupo temos os estudantes: A_1, A_2, A_6, A_7.

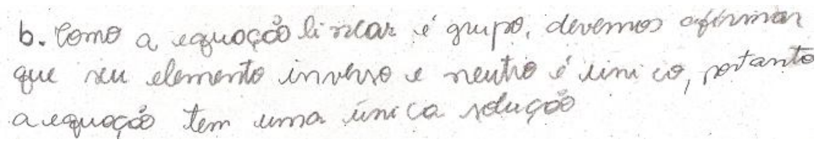


Figura 44 – Registro escrito do estudante A_6

Grupo 2 – Os estudantes deste grupo marcaram que o item é verdadeiro, mas não justificaram. Neste caso acreditamos que os estudantes estão em uma fase de interiorização do conceito. Nesta situação é imprescindível a justificativa, pois é por meio dela que poderemos ver qual a fase manifestada, considerando que trata-se de uma questão de verdadeiro ou falso. Neste grupo temos somente o estudante A_3.

Grupo 3 – Os estudantes deste grupo afirmaram que: Se (G, +) e (G, ·) estiverem definidos, a equação linear é da forma ax+b = 0 e assim tem-se uma solução. A necessidade de um objeto mental, no caso (G, +) e (G, ·), leva-nos a inferir que os estudantes estão em um processo de condensação. Neste grupo temos somente o estudante A_5.

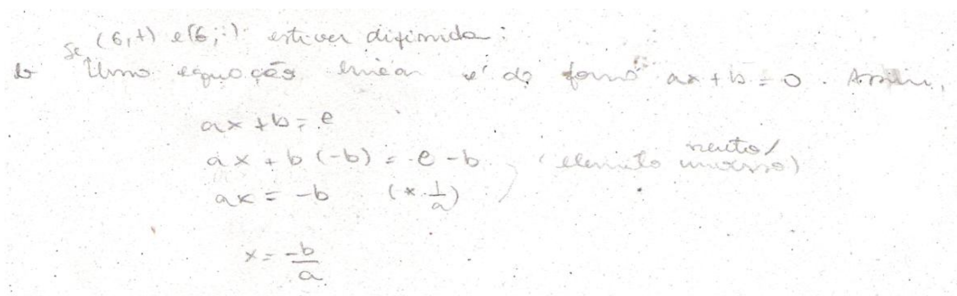


Figura 45 – Registro escrito do estudante A_5

Grupo 4 – O estudante que faz parte deste grupo colocou que a afirmação é falsa e um contra exemplo. Neste grupo temos somente o estudante A_4.

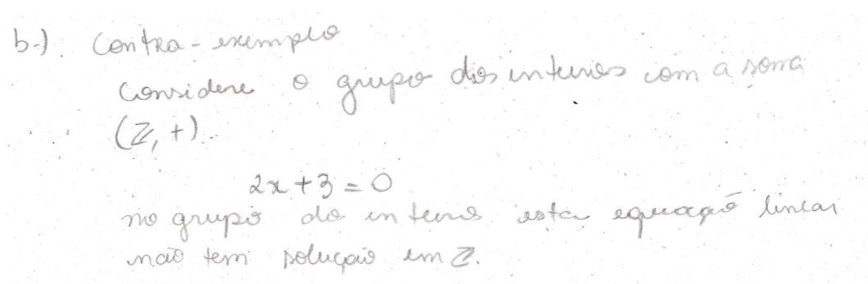


Figura 46 – Registro escrito do estudante A_4

No item (c), dividimos os registros em alguns grupos:

Grupo 1 – Os estudantes assinalaram que o item é verdadeiro, contudo não justificaram. Acreditamos que os estudantes estão em uma transição de interiorização para condensação, pois a falta da justificativa nos leva a crer que eles necessitam construir este objeto mental. Neste grupo temos somente o estudante A_3.

Grupo 2 – Os estudantes assinalaram que o item é verdadeiro, exibindo a solução. Segundo o referencial teórico os estudantes estão em um estágio de reificação, pois conseguem discernir o conceito em outras situações. Neste grupo temos somente o estudante A_5.

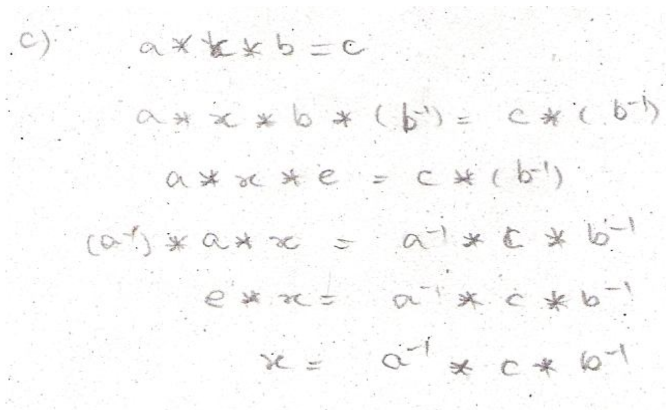


Figura 47 – Registro escrito do estudante A_5

Grupo 3 – Os estudantes assinalaram que o item é verdadeiro, justificando que se deve ao fato de ser **Grupo**. Podemos inferir, segundo o referencial teórico, que os estudantes estão em um estágio de reificação. O estudante A_1 ainda afirma que a operação tem uma única solução. Neste grupo temos os estudantes A_1 e A_7.

Grupo 4 – Os estudantes assinalaram que o item é verdadeiro, justificando que $a*x*b=c$ pertence a um **Grupo**. De acordo com a justificativa, podemos inferir que os estudantes ainda estão em um estágio de interiorização do conceito, pois mesmo acertando a resolução da questão 6, operacional, ainda não conseguem interiorizar um contexto estrutural e não conseguem ver a definição em outros objetos. Neste grupo temos o estudante A_6.

Grupo 5 – Os estudantes assinalaram que o item é falso, justificando que depende da operação. O estudante A_4 ainda afirmou que com a soma existe uma única solução e com a multiplicação não existe solução. Neste caso, podemos inferir que os estudantes estão em uma fase de condensação do conceito, pois o fato de explicitarem as operações nos mostra que necessitam de um objeto mental. Neste grupo temos os estudantes A_2 e A_4.

No item (d), todos respondem falso à afirmação do item, apenas diferenciando a justificativa:

Grupo 1 – Os estudantes afirmaram que o vazio não pode ser **Grupo**, pois não tem como demonstrar as propriedades de **Grupo**s. Alguns ainda colocam que não existe elemento no conjunto vazio e, portanto, não podemos provar as propriedades. Neste grupo temos os estudantes A_3, A_4, A_5 e A_6. Acreditamos que este grupo está em fase de reificação, pois conseguem enxergar a definição em outros conceitos.

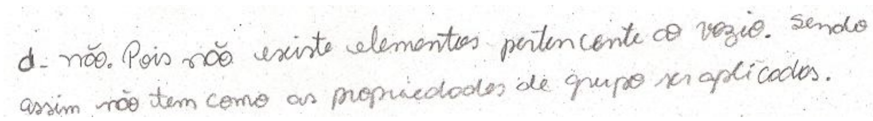

d- não. Pois não existe elementos pertencente ao vazio. Sendo assim não tem como as propriedades de grupo ser aplicados.

Figura 48 – Registro escrito do estudante A_6

Grupo 2 – Os estudantes afirmaram que para ser **Grupo** deve ser diferente do vazio ou não ter elementos. Neste grupo temos os estudantes A_1, A_2 e A_7. Mesmo tendo uma resposta diferenciada do grupo anterior também podemos inferir que estão em um processo de reificação do conceito.

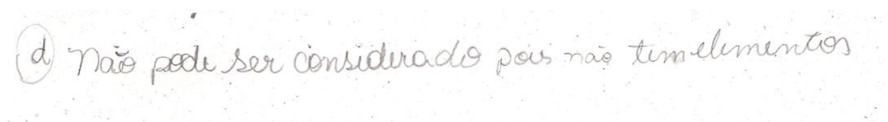

d) Não pode ser considerado pois não tem elementos

Figura 49 – Registro escrito do estudante A_2

Feita as análises, apresentaremos agora um quadro mostrando a relação entre os estudantes e as fases, que ficaram evidentes durantes estas análises, tanto nas questões com concepção operacional quanto nas com concepção estrutural. Os números do quadro referem-se aos itens das questões.

	Questões com concepção Operacional				Questões com concepção Estrutural			
	Interiorização	Condensação	Reificação	Nenhuma	Interiorização	Condensação	Reificação	Nenhuma
A1	5	5	2			2	7	
A2	5	2	3	2		3	6	
A3	1	4	4	3	2	1	6	
A4	5	1	4	2		3	4	2
A5	3	6	3			2	7	
A6	4	6	2		1	1	7	
A7	6	4	2			3	6	

Pelo quadro, podemos inferir que, em relação às questões com concepção operacional, as fases mais observadas foram interiorização e condensação. Recordemos que em nossa análise dessas questões os alunos precisaram de um objeto mental para resolvê-las. Já nas questões com concepção estrutural, a condensação e a reificação ficam evidenciadas. Em nossa análise verificamos que nessas questões o objeto mental se apresentava de maneira organizada e o estudante conseguia enxergar o conceito como uma estrutura estática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve o intuito de fazer uma investigação dos conhecimentos sobre o conceito de **Grupo** que são mobilizados por estudantes do Curso de Matemática, habilitação licenciatura, da UEL, que já cursaram disciplinas de conteúdos algébricos. Optamos por este assunto, pois sempre nos preocupou pela dificuldade da compreensão deste conceito e sua necessidade para a formação de professores.

Na literatura, encontramos em Sfard (1991) concepções e fases num contexto mais global, e com base nesta apresentamos as mesmas concepções e fases mais focadas no conceito de **Grupo**.

No desenvolvimento histórico encontramos informações que nos auxiliaram a montar o instrumento de coleta, com **Grupos de permutações**. Entender as origens do conceito de **Grupo** e ainda que o desenvolvimento do conceito de **Grupo** se deu de maneira bastante lenta e emanou de um sistema operacional para um estrutural. Notamos também que este processo apresentou-se nas fases que Sfard (1991) defende, de maneira a interiorizar, condensar e reificar o conceito.

Nos livros didáticos utilizados na disciplina de Álgebra A, encontramos as concepções do conceito de **Grupo** que foram, provavelmente, apresentadas aos estudantes, sujeitos de nossa pesquisa, durante a disciplina. Nesta análise, verificamos que estes apresentam o conceito de maneira exclusivamente estrutural deixando a impressão ao leitor que o conceito de **Grupo** é mecânico, ou seja, primeiro verificam se possui a propriedade associativa, depois elemento neutro e por último elemento simétrico.

Os exercícios destes livros apresentam características operacionais e estruturais, e a resolução destes, de acordo com o referencial teórico, pode fazer com que o estudante passe pelas fases de interiorização e condensação.

Com todas estas análises feitas, elaboramos um conjunto de questões como instrumento de coleta de modo a atingirmos nossos interesses. As questões foram formuladas com o objetivo de verificar quais os conhecimentos sobre o conceito de **Grupo** são mobilizados por estudantes e se eles sabem trabalhar na perspectiva das concepções operacional e estrutural.

Com as análises dos dados produzidos pela aplicação do conjunto de questões, localizamos, nos registros escritos desses estudantes, os seguintes conhecimentos mobilizados: noção de conjuntos, operações de conjuntos, definição, propriedade e exemplos de **Grupo**, conjuntos numéricos, operações em conjuntos numéricos, propriedades das operações nos conjuntos numéricos, matrizes, funções, aplicações, transformações lineares no plano, uso de linguagem algébrica, simbologia algébrica, conjunto vazio.

Também das análises dos registros escritos dos estudantes, podemos concluir que para alguns deles a questão que exigia conhecimentos de conjuntos numéricos suas operações e propriedades, aparentemente, não foi concebida operacionalmente. Assim também ocorreu com a questão que envolvia conhecimento de outros conjuntos numéricos e suas respectivas operações e propriedades. No entanto, quanto aos conjuntos, como os racionais munidos da operação de multiplicação, as matrizes com a operação de multiplicação, os "**Grupo**s **lineares**" e os "conjuntos de resto módulo m", inferimos que a maioria dos estudantes não os conceberam operacionalmente. Ainda estariam em um estágio de interiorização do conceito e tal situação causou um prejuízo na concepção estrutural destes conjuntos, pois segundo a autora, há a necessidade de complementar as duas concepções, pois se conceber somente operacionalmente, não garantirá que conceberá estruturalmente.

Neste instante gostaríamos de enfatizar que em alguns momentos ficamos em dúvida qual seria a fase manifestada, pois em algumas questões afirmamos que o estudante estava em um processo de reificação e em outras que estava em um processo de interiorização. O que ocorreu foi que houve momentos em que os estudantes estavam trabalhando com conjuntos nos quais acreditamos que tenham maior familiaridade, como por exemplo, o conjunto de matrizes ou os conjuntos numéricos, enquanto, em outros trabalharam com conjuntos que não tinham tanta afinidade, como os Grupos Lineares. Por conta disso, a não justificativa de um item na questão dois, leva-nos a crer que o estudante estava numa fase de reificação, enquanto que, na questão oito, de verdadeiro ou falso, a não justificativa nos remete a uma interiorização.

A maioria dos estudantes manifestou a concepção operacional com relação às simetrias de um triângulo eqüilátero, no entanto, não conceberam a relação com os **Grupos** de permutação. Assim, podemos inferir que não conceberam estruturalmente.

A quase totalidade dos estudantes concebeu estruturalmente quando questionada sobre a definição de **Grupos**, que ocorreu nas questões em que deveriam ter conhecimentos sobre o conceito de **Grupo** com operações não usuais.

Em relação à questão que exigiu dos estudantes conhecimentos sobre o que é um **Grupo** e alguns exemplos dessa estrutura, notamos que eles concebem o conceito de maneira estrutural.

Na questão em que os estudantes tinham que saber a ordem das propriedades do conceito de **Grupo**, a maioria concebeu de modo estrutural.

Quanto à questão que exigia dos estudantes conhecimentos de como verificar o conceito de **Grupo** em diversas situações, inferimos que os mesmos não o conceberam "totalmente" de maneira estrutural, principalmente ao serem questionados sobre equações lineares.

Com este quadro podemos inferir que ao responderem questões que tinham um caráter operacional, a maioria dos estudantes não teve dificuldade. Mas ao responderem questões estruturais, notamos que ainda não o concebem de tal maneira. Neste caso, acreditamos que os estudantes estão em um estágio bastante avançado do ponto de vista operacional, mas não do estrutural. Destacamos ainda que as questões de concepção estrutural foram questões que necessitavam apenas da definição.

Assim, podemos concluir que os conhecimentos mobilizados pelos estudantes foram, em sua grande maioria, de caráter operacional e a concepção estrutural apareceu timidamente em algumas questões. As fases ocorreram em todos os registros escritos, havendo destaque para a interiorização e a condensação.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, R.C. e BIKLEN, S.C. **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto,1994.

DOMINGUES, H. H. e IEZZI,G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 1982.

DOMINGUES, H. H. e IEZZI, G. **Álgebra moderna.** São Paulo: Atual, 2003.

FRALEIGH, J.B. **A first course in abstract algebra**. Massachusetts: Addison-Wesley, 1974.

FERREIRA, A. B. H. *In:* **Dicionário Aurélio on-line**. Disponível em: http://www.dicionariodoaurelio.com. Acesso em 23/06/09.

HERSTEIN, I. N. **Tópicos de álgebra**. São Paulo: EDUSP, 1970.

JAPIASSU, H. e MARCONDES, D. *In:* **Dicionário básico de filosofia**. Jorge Zahar: Rio de Janeiro,1998.

KAPUT, J.J. Teaching and Learning a new algebra with understanding. **Mathematics classrooms that promote understanding.** Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999.

KATZ, V.J. **A history of mathematics:** an introduction. 2.ed. London: Addison Wesley, 1998.

LAJOIE, C. and MURA, R. Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quocient. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Vol. 24, nº 1, PP.45-80, 2004.

MILIES, F. C. P. Uma breve introdução à história da teoria de grupo. In: **Atas da XII Escola de Álgebra**, Sociedade Brasileira de Matemática, Minas Gerais, 1992.

PIAGET, J. **A epistemologia genética; sabedoria e ilusões da filosofia; problemas de psicologia genética**. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides for the same coin. **Educational Studies in Mathematics**. Vol 22, pp. 1-36, 1991

TALL, D. **Advanced mathematical thinking.** Kluwer Academic Publisher: United Kingdom, 2002.