Universidade
Estadual de Londrina

DIRCEU DOS SANTOS BRITO

APRENDER GEOMETRIA EM PRÁTICAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

UMA COMPREENSÃO FENOMENOLÓGICA

Londrina
2018

DIRCEU DOS SANTOS BRITO

APRENDER GEOMETRIA EM PRÁTICAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

UMA COMPREENSÃO FENOMENOLÓGICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina – UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida – Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina
2018

DIRCEU DOS SANTOS BRITO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina – UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Ademir Donizeti Caldeira
Universidade Federal de São Carlos – UFSC

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Tiago Emanuel Klüber
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Londrina, 06 de março de 2018.

Dedico este trabalho à minha Família:

- ♥ *à minha esposa Cláudia e minhas filhas Elisa e Esther pelo afeto imensurável e apoio incondicional; e,*
- ♥ *aos meus pais Jair e Odete que reservaram em seus corações um lugar eternamente meu.*

AGRADECIMENTOS

É por compreender que minha vida é inerente ao mundo percebido e ao mundo humano que já não posso permanecer indiferente à figura que os meus atos assumem na perspectiva do outro. Cito esta consequência ética da fenomenologia[1] *de Merleau-Ponty para reafirmar a importância das pessoas e instituições que viabilizaram a realização deste trabalho e expressar a elas a minha gratidão, citando-as nominalmente.*

Agradeço à minha orientadora, professora Lourdes Maria Werle de Almeida pelo seu profissionalismo, disponibilidade, franqueza, perspicácia, generosidade e humildade. É com essas e com muitas outras de suas qualidades que a professora Lourdes tem, nesses últimos 15 anos, me acolhido, ensinado, apoiado e me direcionado para que eu encontrasse o meu próprio caminho na pesquisa.

Agradeço aos sujeitos desta pesquisa, isto é, aos estudantes que afetuosamente acolheram minha pesquisa, trabalhando com afinco para realizar as tarefas e me auxiliando no registro dos dados. Ademais, gentilmente autorizaram e buscaram de seus pais a autorização para o uso de suas imagens e depoimentos que enriqueceram sobremaneira esta pesquisa.

Agradeço também aos membros da banca, os professores Ademir Donizeti Caldeira, Regina Luzia Corio de Buriasco, Tiago Emanuel Klüber e Valdeni Soliani Franco pela maneira generosa e competente com que ofereceram suas valiosas contribuições para me ajudar a compreender minhas interrogações nesta pesquisa.

Agradeço aos meus colegas do GRUPEMMAT, Ademir, Adriana, Ana Paula, Bárbara, Bianca, Camila, Cíntia, Daiany, Emerson, Gustavo, Henrique, Jeferson, Karina, Leandro, Letícia e Thiago, pelo companheirismo e ricas discussões sobre esse trabalho.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – Doutorado e à Secretaria de Pós-Graduação do Centro de Ciências Exatas por todo o tempo e dedicação dispensados, por meio de seus professores e funcionários.

Agradeço à Secretaria de Estado da Educação do Paraná – SEED – pela concessão de licença remunerada nos anos de 2014 e 2015 e que me possibilitou dedicar-me integralmente aos estudos e à pesquisa neste período.

[1] (MERLEAU-PONTY, 2015, p.50)

Todos puxavam o mundo para si,
para o consertar consertado.
Mas, cada um só vê e entende
as coisas dum seu modo.

João Guimarães Rosa/ *Riobaldo*
Grande Sertão Veredas

BRITO, Dirceu dos Santos. **Aprender Geometria em Práticas de Modelagem Matemática**: Uma Compreensão Fenomenológica. 2018. Número total de folhas. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação, segundo a perspectiva fenomenológica, da questão: *como os estudantes aprendem geometria em práticas de Modelagem Matemática*? Para responder a esta questão, foram desenvolvidas três práticas de Modelagem Matemática com estudantes do 7º do Ensino Fundamental de uma escola pública de Londrina. Essas práticas foram filmadas e relatos escritos, dizendo como perceberam sua aprendizagem, também foram produzidos pelos estudantes. Esses dois tipos de registros, filmagens e relatos, foram organizados, respectivamente, em Cenas Significativas e em Unidades de Discurso, os quais, mediante reduções sucessivas, convergiram para 12 invariantes: Momentos Significativos, Percepções do Início da Aprendizagem, Aspectos Contextuais da Prática de MM, Razões que Sustentam a Aprendizagem, Obstáculos e Dificuldades, Investigação e Aprendizagem, Percepções do Eu, Participação do Outro, O Professor e o Ensino, Modos de Expressar Compreensões, Percepções da Geometria na Prática de MM, Percepções Acerca do Tema Investigado. Em mais uma redução, esses 12 invariantes convergiram para 4 Núcleos de Ideias que respondem à interrogação de pesquisa. Esses Núcleos, que dizem dos modos como a aprendizagem da geometria se dá em práticas de Modelagem Matemática, são: *Temporalidade e Constituição da Aprendizagem*; *Modos de Proceder e Abertura à Aprendizagem*; *Vivência da Relação Eu/Outro/Nós na Aprendizagem* e *Vivência da Relação Geometria/Tema na Aprendizagem*.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Aprendizagem. Geometria. Fenomenologia. Educação Matemática.

BRITO, Dirceu dos Santos. **Learning Geometry in Mathematical Modelling Practices**: A Phenomenological Understanding. 2018. Número total de folhas. Doctoral thesis (Post-Graduation on the Teaching of Sciences and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2018.

ABSTRACT

This doctoral thesis presents an investigation, according to the phenomenological perspective, of the question: how do students learn geometry in Mathematical Modelling practices? To answer this question, three practices of Mathematical Modelling were developed with students from the 7th grade of a public school in Londrina. These practices were filmed and written reports, telling how they perceived their learning, were also produced by the students. These two types of recording, filming and reporting, were organized, respectively, in Significant Scenes and Discourse Units, which, through successive reductions, converged to 12 invariants: Significant Moments, Perceptions of the Beginning of Learning, Contextual Aspects of the Practice of MM, Reasons for Learning, Obstacles and Difficulties, Research and Learning, Perceptions of the Self, Participation of the Other, Teacher and Teaching, Modes of Expression Understanding, Perceptions of Geometry in MM Practice, Perceptions on the Subject Investigated. In a further reduction, these 12 invariants converge to 4 Ideas Cores that respond to the research question. These Core, which speak of the ways in which the learning of geometry occurs in practices of Mathematical Modeling, are: Temporality and Formation of Learning; Modes of Proceeding and Openness to Learning; Experience of the Relationship I/Other/Us in the Learning and Experience of the Relationship Geometry/Theme in the Learning.

Key words: Modelling Mathematics. Learning. Geometry. Phenomenology. Mathematics Education.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho de pesquisa apresenta uma investigação norteada pela interrogação: *como os estudantes aprendem geometria em práticas de modelagem matemática?*[2] A afirmação de que a investigação, aqui relatada, é direcionada por uma interrogação tem o propósito de identificar este trabalho com a concepção de que pesquisar é "perseguir uma interrogação em diferentes perspectivas" (BICUDO, 2011, p.22). Interrogação, nesta concepção, remete a um sentido que difere do sentido de pergunta, problema ou hipótese, pois estes conceitos são empregados no contexto da chamada pesquisa científica de modo a antecipar uma solução possível, ainda que não específica e determinada. A interrogação é uma indagação para a qual não se tem possíveis respostas prévias como orientação e comporta-se como "um pano de fundo onde as perguntas do pesquisador encontram seu solo, fazendo sentido" (BICUDO, 2011, p.23). Portanto, nessa concepção de pesquisa, "o caminho da questão para aquele que pergunta faz parte da sua experiência vivida, e esse caminho precisa ser visualizado para que o indagante se dê conta do solo histórico e cultural em que está se movendo" (BICUDO, e KLÜBER, 2013, p.27).

Compreender a interrogação como um *pano de fundo* ou *caminho da questão* significa afirmar que ela se instala como *intencionalidade*[3], sendo constituída quando o pesquisador sente-se *desacertado* com a "presença de algo que não quer integrar-se nas opiniões preestabelecidas" (KLUTH, 2005, p.40) de maneira que uma pergunta, ancorada nessa posição *desajeitada*, precisa ser explicitada, ou seja, precisa ser esclarecido *o que* a interrogação interroga e *como* se constrói o conhecimento acerca do que nela é interrogado. Esse esclarecimento pode, por sua vez, auxiliar na delimitação da região de inquérito do investigado e no delineamento dos procedimentos metodológicos do trabalho investigativo. Em vista desta compreensão, retomo, neste capítulo, algumas experiências vividas e que possibilitaram o esclarecimento e a explicitação da interrogação que norteia esta investigação. Com essa descrição, pretendo explorar as razões que conduziram minha opção pela fenomenologia como

---

[2] Para evitar repetições e abreviar a escrita, daqui por diante "práticas de modelagem matemática" será anotada simplesmente como "práticas de MM".

[3] Intencionalidade vem do latim *intendo*, *tendi*, *tentum*, *tentere*, e significa tender numa direção, estender, tornar atento, sustentar, dar intensidade, afirmar com força (BICUDO, 2010, p. 31). Intencionalidade é entendida como a característica essencial da consciência na medida em que a consciência é sempre dirigida para algo que não é ele mesmo a consciência. Isto é, a consciência tende sempre a considerar um objeto, o qual sempre transcende o ato por meio do qual aparece (GIORGI, 1997 p.389).

perspectiva filosófica para sustentar, do ponto de vista ontológico e epistemológico, os procedimentos metodológicos e a organização da estrutura deste trabalho.

1.1 Da Experiência Vivida à Questão de Pesquisa

A interrogação que gerou esta pesquisa adquiriu características predicativas[4] a partir 2012, com uma prática de MM que desenvolvi com estudantes internados no Centro de Socioeducação[5] situado em Londrina. O tema escolhido foi a revitalização de uma praça pública localizada no centro da cidade de Londrina. Investigamos com os estudantes duas questões: (*i*) como construir uma rede de caminhos com o menor comprimento possível, interligando os principais pontos da praça e (*ii*) como organizar a relação entre as áreas verdes, destinadas aos jardins, e as áreas de circulação de pessoas (largos). A investigação dessas duas questões conduziu os estudantes ao estudo de métodos de otimização geométrica presente na resolução de problemas clássicos da Geometria[6] Euclidiana, entre os quais o Problema de Heron, o Problema de Fermat-Steiner e o Problema Isoperimétrico. Essa investigação permitiu também que os estudantes elaborassem croquis, diagramas e construções geométricas que subsidiaram a confecção de um projeto de reforma e revitalização da praça. Esse projeto foi apresentado pelos estudantes em painéis, contendo todos os croquis, diagramas e construções geométricas, e em duas maquetes, uma da praça atual e outra da praça reformada e revitalizada.

[4] Embora a interrogação tenha ganhado aspectos predicativos a partir de 2012, isto não significa que ela tenha se originado aí, pois, do ponto de vista fenomenológico, a constituição de uma interrogação de pesquisa é anterior à sua explicitação verbal, sendo, inclusive, condição de possibilidade dessa explicitação. Em outros termos, a relação intencional entre consciência e objeto intencional não é constituída a posteriori a partir de um julgamento expresso de forma predicativa, mas é constituída a priori na experiência e anterior ao julgamento de forma pré-predicativa.

[5] CENSE é a sigla para os Centros de Socioeducação que são instituições mantidas pelo Governo do Estado do Paraná e destinadas à internação de adolescentes que cumprem medidas socioeducativas aplicadas em decorrência do cometimento de atos infracionais.

[6] Omitiremos aqui os detalhes acerca dos enunciados desses problemas e suas resoluções, remetendo ao leitor interessado a indicação das referências (BRITO, 2013), (BRITO e ALMEIDA, 2014) e (BRITO e ALMEIDA, 2015)

Figura 1: Painéis (à direita) e as maquetes (à esquerda) construídas pelos estudantes

Fonte: O próprio autor

A descrição dessa prática de MM integra a dissertação apresentada ao mestrado profissional em matemática, PROFMAT – UEL. O objetivo dessa dissertação é discutir a abordagem de conteúdos de geometria do Ensino Fundamental em práticas de MM e, na elaboração dessa dissertação, deparei-me, mais explicitamente, com questões vinculadas à aprendizagem da geometria em práticas de MM. Como evidenciar a aprendizagem da geometria em práticas de MM? Como as práticas de MM qualificam a aprendizagem da geometria? Que aspectos observáveis caracterizam essa aprendizagem? E, em que sentido essa aprendizagem se diferencia da aprendizagem que ocorre em outras práticas educativas? Perguntas como estas levaram-se a buscar nos referenciais teóricos, comumente empregados na Educação Matemática, o que diziam sobre a aprendizagem da geometria. Esta busca, entretanto, não me permitiu compreender a *especificidade* da aprendizagem da geometria em práticas de MM, tornando claro que eu estava na "presença de algo que não quer integrar-se nas opiniões preestabelecidas (KLUTH, 2005, p.40)".

Este desacerto entre o dito e o vivido mostrou-me a necessidade de investigar a aprendizagem da geometria em práticas de modelagem matemática. Embora esta questão já orbitasse minhas preocupações desde a elaboração da dissertação para o mestrado profissional em 2013, sua redação definitiva e seu esclarecimento, todavia, foi se construindo ao longo do período que vai de 2013 até 2017. Mais precisamente, a elaboração do projeto de pesquisa, visando o ingresso no programa de doutorado em 2014 e o esforço contínuo, realizado a partir desta data, para formular a questão de pesquisa da tese foram dois momentos em que busquei, de maneira mais rigorosa, o esclarecimento do que é interrogado nessa interrogação e de como podemos conhecer esse interrogado.

E, o que interroga essa interrogação? Ela indaga como os estudantes aprendem geometria em práticas de MM. Este *como*, que a interrogação interroga, indaga os *modos* pelos quais os estudantes vivenciam, em práticas de MM, experiências de aprendizagem da geometria. A interrogação solicita a explicitação desses *modos*. Mas, como explicitar esses modos ou, mais precisamente, como se constrói o conhecimento acerca desse interrogado? A própria interrogação nos dá uma direção. Ao dirigir nosso olhar para o interrogado, ela solicita que se busque sujeitos que vivenciam esse fenômeno, isto é, estudantes que estejam aprendendo geometria em práticas de MM e que se deixe manifestar como eles vivenciam essa aprendizagem que se dá. A interrogação, portanto, solicita que se busque nos modos de expressão, isto é, nas falas, gestos, olhares, movimentos corporais, compreensões intersubjetivas, em suma, toda gesticulação linguística dos estudantes que revele o que é indagado na interrogação.

Estas considerações indicam que a aprendizagem inquirida na interrogação não deve ser tomada como algo que se dá em si mesma, já pronta e separada do sujeito que a vivencia ou daquele que a percebe, mas deve ser tomada como ela se mostra *intencionalmente* para aquele que a interroga. Isto é, a aprendizagem deve ser abordada como "constituindo e se mostrando em diferentes modos, de acordo com a perspectiva do olhar e na temporalidade histórica de suas durações e respectivas expressões mediadas pela linguagem e por ela transportadas" (BICUDO, 2011, p.41). Essa compreensão direciona a investigação da aprendizagem da geometria em práticas de MM para uma abordagem fenomenológica.

1.2 Opção pela Fenomenologia e Estrutura da Tese

Inquirir, segundo uma abordagem fenomenológica, os modos pelos quais se dá a aprendizagem da geometria em práticas de MM significa assumir a importância ontológica e epistemológica do *ir-à-coisa-mesma*, isto é, assumir que para compreender um fenômeno é preciso ir a ele mesmo "sem teorias sobre sua explicação causal e tão livre quanto possível, de pressupostos e de preconceitos" (MARTINS, 1994, p. 15). Ir-à-coisa-mesma significa, em suma, deixar que o fenômeno se mostre, por si mesmo, àquele que *intencionalmente* o interroga. A abordagem fenomenológica sustenta-se, portanto, na concepção de *realidade percebida*, ou seja, a realidade é aquela que se mostra na percepção ou intuição do sujeito que conhece, de modo que o mundo é assumido como sendo sempre e necessariamente correlato à consciência.

Considerar como dado da realidade unicamente aquilo *tal como é dado* à percepção ou intuição como *presença* ou *fenômeno* requer um movimento de *redução*. Reduzir, em sentido fenomenológico, significa suspender os juízos prévios ou pressuposições e *descrever* aquilo que se mostra, exatamente como se mostra, sem recair em *explicações*, *construções* ou *interpretações*. Segundo Giorgi (2014) estas três vias de acesso ao fenômeno se distinguem radicalmente da *descrição*, pois, para dar conta do fenômeno, em algum momento elas o abandonam, substituindo-o por alguma de suas *representações*. Esse autor afirma que explicar “o que é dado à consciência pressupõe, ao mesmo tempo, aquilo que está presente, mas exige disso se desvincular, para ser possível dar-lhe conta”. Ainda segundo Giorgi (2014), a construção é uma forma de dar conta de um fenômeno que envolve “momentos hipotéticos ou especulativos, que também nos distanciam do mero enunciado daquilo que é dado”. Por fim, Giorgi (2014) argumenta que a interpretação, para dar conta de um fenômeno, “traz, seja devido a uma teoria, seja por razões pragmáticas, uma perspectiva que a evidência intuitiva não requer necessariamente”.

A abordagem fenomenológica privilegia a *descrição* no sentido de que “ela não opera por abstração sob abstração, mas com o compreendido nos vividos reduzidos em intuição pura” (BICUDO, 2011, p.45). Todavia, essa abordagem não se detém em descrições de individualidades, de singularidades da experiência vivida pelo sujeito, mas “visa mostrar as estruturas em que a experiência relatada se dá, deixando transparecer, nessa descrição, as suas estruturas universais” (BICUDO, 2011, p. 46). Esse movimento que busca transcender o que está individualmente descrito e avançar em direção à estrutura do fenômeno é conhecido como *redução eidética* ou *redução à essência*. É por conta desse movimento que Merleau-Ponty (2014) define a fenomenologia como “o estudo das essências, e todos os problemas, segundo ela, resumem-se em definir essências”. Essência diz do sentido fundamental que se mantém mais duradouramente num determinado contexto e sem o qual o fenômeno não poderia se apresentar tal como ele é. Essência é uma “identidade constante que contém as variações que um fenômeno é capaz de sofrer, e que as limita” (GIORGI, 2014, p.395).

A investigação relatada neste trabalha possui uma abordagem fenomenológica porque incorpora as três características principais desse método, segundo Giorgi (2014): a descrição, a redução fenomenológica e a busca das essências. Essas três características estão presentes em todos os capítulos desta tese e são fundamentais para entender como ela está estruturada. Ao passar em revista algumas concepções teóricas, oriundas da região de inquérito da Educação Matemática, acerca da aprendizagem da geometria e da aprendizagem em práticas de MM, o capítulo 2 já efetua um movimento redutivo. Ao analisar crítica e reflexivamente essas concepções, buscamos compreender os pressupostos que sustentam a visão de mundo e de conhecimento que elas carreiam e, com isso, efetuar um movimento *redutivo*, desonerando a linguagem com a qual descrevemos a aprendizagem da geometria em práticas de MM. Em síntese, o capítulo 2 torna efetiva a compreensão de que a "descrição é uma fala sobre nossa experiência, mas também sobre os preconceitos desde onde explicamos tal experiência" (MÜLLER, 2001, p. 134).

O capítulo 3, por sua vez, procura apresentar os desdobramentos metodológicos da abordagem fenomenológica. Assim, esse capítulo coloca em evidência como investigamos as experiências de aprendizagem dos estudantes em práticas de MM sem prejulgamentos e sem projetar pensamentos prontos na análise dessas experiências. Para isso, lançamos mão dos conceitos de redução fenomenológica, descrição e busca de essências para destacar as características fenomenológicas de nossa investigação. Apresentamos também aspectos gerais das três práticas de MM que desenvolvemos com os estudantes e, com isso, explicitamos o modo como se deu o delineamento do cenário da pesquisa. Por fim, apresentamos os procedimentos para organização e análise dos dados registrados na investigação.

Já o capítulo 4 apresenta a Análise Ideográfica das Cenas Significativas, constituídas de registros em vídeo ou filmagens das aulas em que se deu as práticas de MM, e dos Discursos, extraídos dos relatos individuais em que os estudantes descrevem como sua aprendizagem se deu. Assim, o capítulo 4 relata como a Análise Ideográfica conduziu à explicitação de Unidades Significadas de Cenas e de Discursos que dizem do fenômeno interrogado, isto é, essas Unidades Significativas evidenciam sentidos da aprendizagem geométrica em práticas de MM. Assim, cada Unidade de Cena e cada Unidade de Discurso é seguida de uma Unidade Significativa que, em sequência, interpretada à luz da interrogação de pesquisa.

O capítulo 5, por sua vez, apresenta a Análise Nomotética em que se busca os grandes invariantes do fenômeno e as suas estruturas essenciais. Por isso, a Análise Nomotética é apresentada em duas reduções. Na primeira redução, 12 grandes invariantes do fenômeno são encontrados, a saber: Momentos Significativos, Percepções do Início da Aprendizagem, Aspectos Contextuais da Prática de MM, Razões que Sustentam a Aprendizagem, Obstáculos e Dificuldades, Investigação e Aprendizagem, Percepções do Eu, Participação do Outro, O Professor e o Ensino, Modos de Expressar Compreensões, Percepções da Geometria na Prática de MM e Percepções Acerca do Tema Investigado. Numa segunda redução, esses 12 invariantes conduzem a 4 Núcleos de Ideias que dizem das estruturas essenciais do fenômeno. São eles: *Temporalidade e Constituição da Aprendizagem*; *Modos de Proceder e Abertura à Aprendizagem*; *Vivência da Relação Eu/Outro/Nós na Aprendizagem* e *Vivência da Relação Geometria/Tema na Aprendizagem*. A apresentação desses 4 Núcleos de Ideias segue-se da sua interpretação em que conceitos teóricos são empregados explicitar uma compreensão fenomenológica de como os estudantes aprendem geometria em práticas de MM.

Por fim, o capítulo 6 retoma o caminho percorrido na investigação com o objetivo de delinear elementos para uma *metacompreensão* da pesquisa realizada. Para isso, retomamos a constituição da interrogação de pesquisa e o modo como essa interrogação direcionou a escolha dos procedimentos metodológicos e à compreensão do fenômeno investigado. O capítulo 6, portanto, apresenta um movimento reflexivo sobre o que foi investigado, sobre como a pesquisa foi conduzida e ainda, sobre como essa pesquisa responde ou não à interrogação que a gerou. Por fim, o capítulo 6 inclui uma reflexão que busca pelo sentido que essa investigação faz para aquele que sobre ela reflete, para os membros da comunidade que investiga a Modelagem na Educação Matemática, ou seja, reflete sobre a relevância do tema investigado para a região de inquérito.

2 APRENDIZAGEM, GEOMETRIA E MODELAGEM MATEMÁTICA

Este capítulo reúne e discute sentidos que o termo *aprendizagem* assume nas pesquisas vinculadas à educação em geometria e às práticas de MM. O objetivo aqui é o de analisar crítica e reflexivamente os pressupostos que sustentam esses sentidos, ou seja, que sustentam a compreensão, usualmente veiculada na pesquisa em Educação Matemática, acerca da aprendizagem em geometria e na MM. Com essa análise, visamos desonerar, de pressuposições e preconceitos, o uso da linguagem com a qual fazemos a descrição da aprendizagem da geometria em práticas de MM. Este capítulo busca, portanto, efetuar um movimento redutivo e, com isso, caminhar em direção a uma compreensão fenomenológica da aprendizagem da geometria em práticas de MM.

2.1 Uma Compreensão Inicial do Verbo Aprender

Em nossa *atitude natural*, reconhecemos experiências como sendo *de* aprendizagem sem que tenhamos que pensar *explicitamente* o sentido que caracteriza essas experiências. Isto significa que tomamos a aprendizagem como um *fato*, algo já dado e que existe para além dos modos subjetivos que permeiam a apreensão do seu sentido. Já sob a perspectiva da *atitude fenomenológica*, assume-se que o sentido do fenômeno aprendizagem é constituído pela consciência, isto é, que esse sentido se dá sempre para uma consciência que o apreende e que o estrutura, e não se dá nos fatos e de maneira independente dos modos subjetivos de apreensão. Desse modo, compreender a aprendizagem, sob o ponto de vista da fenomenologia, significa explicitar o sentido fundamental sem o qual a aprendizagem não pode se apresentar à consciência tal como ela é, ou seja, o sentido que contém todas as variações possíveis que o fenômeno *aprendizagem* pode sofrer, e que as limita.

Mas, como explicitar esse sentido fundamental? Uma possibilidade de explicitar esse sentido fundamental é procurar convergências nos diferentes entendimentos do verbo aprender, começando, por exemplo, pelo seu sentido etimológico. Segundo Cunha (2007) o verbo *aprender* vem, por síncope, do latim *apprehendere* que significa apoderar-se, tomar posse, agarrar algo e mantê-lo preso junto de si. O termo latino *prehendere* remete tanto à ação de agarrar com as mãos quanto à ação de agarrar com a mente, de modo que o verbo aprender, na sua origem etimológica, incorpora os sentidos de aprender com o corpo e aprender com a mente. A reunião destes dois sentidos abre-nos uma possibilidade de interpretação do verbo aprender: quem aprende toma posse, se apropria, se apodera do conhecimento mediante a experiência do corpo e/ou mediante a aquisição de significados intelectuais. Essa interpretação, por sua vez, pode conduzir a dois entendimentos.

O primeiro entendimento é que experiência e conhecimento possuem, na aprendizagem, uma relação diacrônica, ou seja, experienciamos com o corpo para compreender com a mente. Este entendimento é expresso, por exemplo, na definição de David Kolb (apud ILLERIS, 2013, p.103) de que “aprender é transformar a experiência em conhecimento”. Esta definição subentende que a experiência não é conhecimento, mas é a base para a criação de conhecimento, de modo que a transformação da experiência em conhecimento ocorre, segundo esse autor, quando observações e reflexões realizadas sobre uma experiência concreta levam à formação de conceitos abstratos e generalizações, os quais são empregados ativamente em novas experiências concretas para tomar decisões e resolver problemas. Esta afirmação é esquematizada no chamado ciclo da aprendizagem de Kolb (apud ILLERIS, 2013, p. 104):

Figura 2: Ciclo da aprendizagem de Kolb

Fonte: Illeris (2013)

Mas, se aprender é transformar a experiência em conhecimento, o resultado dessa aprendizagem, aquilo que é efetivamente aprendido, pode ser visto como um resíduo, um precipitado de conteúdos intelectuais que são armazenados pela pessoa que aprende. Neste entendimento, a pessoa que aprende e armazena o que é aprendido não se transforma, uma vez que ela é apenas depositária do conhecimento. É somente a experiência que se transforma em conhecimento.

O segundo entendimento é que experiência e pensamento possui uma relação sincrônica, isto é, experiência e significação não se dão separadamente, mas formam uma unidade. Neste entendimento, a aprendizagem pode ser vista como uma transformação que se dá com a *pessoa*[7] no seu todo e o resultado da aprendizagem deixa de ser um precipitado de conteúdos, mas é sempre a própria pessoa que aprende. Se o que se transforma na aprendizagem é a própria pessoa que aprende, então pessoalidade é uma característica constituinte da aprendizagem. Este entendimento da aprendizagem está presente, por exemplo, na definição de Jarvis (apud ILLERIS, 2013, p. 35):

> A aprendizagem humana é a combinação de processos ao longo da vida, pelos quais a pessoa inteira – corpo (genético, físico e biológico) e mente (conhecimentos, habilidades, atitudes, valores, emoções, crenças e sentidos) – experiencia as situações sociais, cujo conteúdo percebido é transformado no sentido cognitivo, emotivo ou prático (ou por qualquer combinação) e integrado à biografia individual da pessoa, resultado em uma pessoa continuamente em mudança (ou mais experienciada).

Em vista dessas considerações, como esboçar uma caracterização da aprendizagem sob a luz da fenomenologia? Primeiro, quando inquirimos acerca da aprendizagem, é em direção à pessoa que aprende que dirigimos o nosso olhar. É ela, na totalidade dos seus modos de expressão, que revela o sentido de aprender. Assim como o fenômeno cor é indissociável de sua superfície, também o fenômeno aprendizagem é indissociável da pessoa que aprende. Por isso, a *pessoalidade* da aprendizagem é uma de suas características essenciais. Ademais, se o fenômeno da aprendizagem somente se expressa em uma pessoa, é porque toda pessoa expressa algum tipo de inacabamento. É por conta desse inacabamento que a aprendizagem se mostra como um florescer contínuo de possibilidades de ser e de viver, isto é, se manifesta como *transformação*. Além dessa segunda característica essencial da aprendizagem, é preciso ainda reconhecer que a aprendizagem é um fenômeno que se dá em modos de expressão. Mais simplesmente, a aprendizagem se expressa na fala, gestos, olhares, registros simbólicos, modos de agir, enfim, em gesticulações linguísticas do corpo-próprio que dizem do nosso modo ser e de viver. Esses modos de expressão atuam, seguindo esse nosso entendimento, como *índice existencial*, ou seja, ao mesmo tempo em que revelam a aquisição de conhecimentos inéditos, deixa transparecer modos de ser e de viver da pessoa que aprende. Concluímos então que que a expressão da aprendizagem como *índice existencial* é sua terceira característica essencial.

[7] Segundo Bello (2004), o termo pessoa significa, para a fenomenologia, o ser humano tomado na complexidade dos seus aspectos.

Vamos exemplificar essas três características essenciais da aprendizagem. Se um estudante afirma que “o ferro de passar roupas esquenta porque é ligado na tomada” e, por alguma razão, se dá conta da inadequação desta afirmação e a reformula, dizendo “o ferro de passar roupas esquenta porque possui um resistor”, então percebemos, *imediatamente*[8], que aí se houve uma aprendizagem porque percebemos que aí ocorreu uma *transformação*. Mas, essa *transformação* não expressa somente a aquisição conceitual do significado de *resistor* como algo que produz calor ao ser percorrido por uma corrente elétrica, mas mostra-se como uma *transformação* que se dá essencialmente no modo como a *pessoa* que apreendeu esse significado se relaciona com o seu mundo. A expressão dessa aprendizagem, portanto, atua como um *índice existencial*, revelando como se dá a relação dessa pessoa com o seu mundo. Após estabelecermos essa compreensão inicial de aprendizagem, passemos agora a examinar mais diretamente o significado de aprender geometria e aprender na MM.

2.1 APRENDER GEOMETRIA EM PRÁTICAS EDUCATIVAS

Como os estudantes aprendem geometria na escola? Esta questão, embora formulada de forma definitiva, costuma gerar respostas diversas. Em parte, isto ocorre porque o próprio termo geometria é empregado, em Educação Matemática, de maneira ambígua. Segundo Usiskin (1998), falta clareza sobre o objeto de estudo da geometria, pois “nem os geômetras concordam quanto à natureza de sua matéria” (1998, p.32). A falta de clareza sobre o que a geometria estuda se reflete na compreensão ambígua acerca de como se dá a sua aprendizagem porque não se estabelece de maneira rigorosa o que se entende por geometria. Mas, o que é geometria?

Segundo Hardy (1925), uma antiga resposta é: *a geometria é a ciência do espaço*. A presença abundante de formas geométricas na natureza, artes, artesanato, arquitetura, indústria, reforçam esse sentido da geometria. O surgimento das geometrias não euclidianas e convicção de que a relação entre geometria e espaço físico possui um caráter convencional, enfraqueceu essa definição. Além disso, a própria palavra “*espaço*” é ambígua, pois ora é entendida como o espaço físico, como o ambiente em que as coisas se dispõem, ora é entendida como espaço cognitivo, como estrutura mental que permite organizar as experiências perceptivas ou visuais. A afirmação kantiana de que o espaço não deriva da experiência

[8] *Imediatamente* significa que não precisamos antes formular um juízo ou aplicar uma definição para identificar a aprendizagem.

perceptiva, mas é uma condição a priori para que essa experiência ocorra, se vincula a essa ideia de espaço cognitivo.

Vincula-se também a essa ideia a definição de que a geometria é um *modo de pensar ligado essencialmente à visualização*. Segundo Atiyah (2003) a geometria é "menos um ramo da matemática do que uma maneira de pensar que se propaga por toda a matemática". A geometria, segundo esse autor, é a parte da matemática na qual o pensamento dominante é o visual, assim como a álgebra é aquela parte na qual o raciocínio sequencial é o predominante. A construção de figuras, a confecção de desenhos, o uso de objetos da geometria como veículo para representar conceitos científicos (inclusive matemáticos) cuja origem não é visual ou física reforçam essa ideia da geometria como *visualização*.

Uma terceira definição de geometria considera como espaço entidades abstratas e formais, de modo que a geometria é a teoria matemática dessas entidades. Neste caso, é mais adequado falar em geometrias, pois dependendo das propriedades consideradas desse espaço tem-se geometrias distintas. Argumentando em favor dessa visão, Hardy (1925) afirma que o geômetra puro se interessa mais pelas propriedades que um espaço possui do que pelo que ele realmente é ou representa. Pontos, retas e planos não são tomados pelo geômetra como objetos espaciais, mas como um sistema de entidades formais sujeitas a certas relações lógicas. O sistema que interessa ao geômetra é expresso pelos axiomas da sua geometria. São os axiomas que caracterizam os sistemas e não as propriedades espaciais dos objetos geométricos considerados. De fato, a forma tradicional de apresentação da geometria nos livros didáticos, enfatizando definições, teoremas e demonstrações baseadas no raciocínio dedutivo reforçam essa visão da *geometria como uma coleção de sistemas lógicos* (HARDY, 1925, p.22).

Em vista dessa multiplicidade de sentidos que a geometria revela, tentar entender como se dá sua aprendizagem parece ser uma tarefa inglória. Uma saída interessante para esse impasse é, ao invés de buscar uma definição cabal, admitir, como faz Usiskin (1998), que essa multiplicidade de sentidos é uma característica fundamental da geometria e que, no limite, ousamos afirmar que ela é uma coleção de objetos, conceitos ou modos de pensar que servem de modelos para investigar diversos temas. Se a geometria se mostra como um estudo do mundo real ou do espaço físico é porque modelos geométricos permitem expressar uma compreensão acerca da mensuração e relações espaciais dos objetos físicos. E ainda, se a geometria está vinculada à *visualização* é porque ela possui modelos que possibilitam alcançar uma compreensão visual de objetos que não são originalmente visuais. Por fim, se a geometria pode ser entendida como uma coleção de sistemas lógicos é porque o geômetra pode construir modelos geométricos a partir de entidades abstratas e formais geradas no interior da própria matemática. Esta é uma compreensão multifacetada da geometria, mas entendo que esse ponto de vista é o que permite discutir adequadamente como a questão de sua aprendizagem tem sido abordada na pesquisa em Educação Matemática.

2.1.1 Aprendizagem da Geometria em Quatro Teorias

Vejamos como os trabalhos de pesquisa procuram, a seu modo, explicar como a aprendizagem da geometria se dá, partindo de um entendimento particular da natureza da geometria. Discutiremos como isto ocorre em quatro abordagens teóricas[9], começando pelo trabalho de Piaget e Inhelder (1993). Em seu estudo sobre o desenvolvimento da capacidade da criança de representar o espaço, esses autores assumem que a geometria é um conhecimento do espaço, entendido como espaço cognitivo. Mais precisamente, para Piaget e Inhelder (1993), o espaço cognitivo é construído pelo indivíduo a partir da experiência com o espaço perceptivo, mas não é uma cópia mental deste, nem é abstraído exclusivamente das informações oriundas da percepção. O espaço cognitivo é engendrado pela inteligência, mediante ações intelectuais realizadas pelo indivíduo.

Segundo Piaget e Inhelder (1993), é do espaço cognitivo, engendrado pelo indivíduo, que deriva o conhecimento geométrico. E como isto se dá? Esses autores se inspiram na abordagem da geometria do *Programa Erlangen*[10] e propõem que primeiro a criança constrói o espaço *topológico* e que, neste estágio, ela aprende apenas as relações de vizinhança, separação, ordem, entorno, envolvimento e de continuidade. Num estágio posterior, o espaço da criança torna-se *euclidiano* no sentido de que ela apreende a constância das dimensões dos objetos, percebendo-as como invariantes no decurso de seus deslocamentos, e *projetivo* na medida em que ela aprende a coordenar diferentes pontos de vista sobre um objeto, ou seja, a

---

[9] A escolha dessas quatro teorias levou em conta a constatação de Clements e Battista (2003), Keith (1998) e Kuzniak (2007) de que essas teorias abordam questões diretamente ligadas às práticas educativas escolares e situam-se entre as mais empregadas como referencial teórico na pesquisa em Educação Matemática.

[10] O *Programa Erlangen*, proposto pelo matemático Félix Klein, é uma tentativa de unificar e classificar as diferentes geometrias empregando o conceito de grupo de transformações. Cada geometria é definida pelo seu grupo de transformações ou grupo de simetrias, de maneira que cada geometria estuda as propriedades do espaço que se mantêm invariantes sob o seu grupo de transformações.

coordenar diferentes perspectivas.

Já o modelo teórico de Van Hiele aborda a questão de como se dá a aprendizagem da geometria, tomando, segundo Villiers (2010), a geometria como o estudo das figuras, ou seja, como o estudo dos polígonos, curvas, poliedros e qualquer outro objeto geométrico que pode ser *representado* seja com instrumentos de desenho, seja com *software* de geometria dinâmica, seja empregando modelos físicos. Assim, segundo Villiers (2010), para o modelo de Van Hiele, espaço é a folha de papel, a tela do computador, as dobraduras e qualquer meio que permite a representação de figuras.

O modelo teórico de Van Hiele emprega essa concepção de geometria para, segundo Villiers (2010), propor que o desenvolvimento do pensamento geométrico se dá em, pelo menos, quatro níveis, partindo das experiências perceptivas e se completando com a aquisição de capacidades discursivas e conceituais. De acordo com esse modelo teórico, no primeiro nível, o estudante adquire habilidades de *reconhecimento* visual das figuras pela sua aparência global ou pela sua forma, sem, no entanto, conseguir explicitar as suas propriedades geométricas. Já no segundo nível, o estudante adquiri a habilidade de *análise* das propriedades das figuras e consegue empregar a terminologia técnica adequada para descrevê-las, mas sem correlacionar figuras ou propriedades das mesmas. No terceiro nível, o estudante desenvolve a habilidade de *ordenação* lógica das propriedades das figuras por meio de sequências curtas de dedução e entende as correlações entre as figuras como, por exemplo, a inclusão de classe. Por fim, no quarto nível, o estudante adquire a habilidade de *dedução,* isto é, ele aprende a desenvolver sequências mais longas de enunciados e compreende o significado da dedução e do papel dos axiomas, teoremas e provas.

Outra abordagem teórica à questão da aprendizagem geométrica é proposta por Duval (1995) que considera a geometria de um ponto de vista cognitivo, ou seja, se interessa principalmente em diferenciar, classificar e caracterizar os processos cognitivos empregados na resolução de problemas geométricos. O modelo teórico de Duval (1995) assume que a geometria é um sistema de registros de representação semiótica e, em função disso, se propõe a descrever como os processos cognitivos, empregados na *diferenciação* e *coordenação* desses registros, conduzem a diferentes modos de apreensões em geometria. Para Duval (1995), a atividade geométrica envolve três tipos imbricados de *processos cognitivos* e que cumprem funções epistemológicas específicas. O primeiro envolve os processos de *visualização* e diz respeito à interpretação perceptiva das representações espaciais, cumprindo a função de ilustrar proposições e auxiliar na exploração heuristicamente situações geométricas complexas. Já os processos de *construção* envolvem a elaboração de configurações com ferramentas (régua, compasso, software) e desempenham, neste caso, a função de fornecer modelos. O último tipo são os processos de *raciocínio* que englobam as atividades discursivas desenvolvidos na atividade geométrica e efetuam a função de extensão do conhecimento com a elaboração de *provas* e *explicações*.

A comunicação entre esses três tipos de processos requer, na atividade geométrica, diferentes registros de representação semiótica. Segundo Duval (1995), a *diferenciação* e a *coordenação* desses registros evitam que os objetos da geometria sejam, por um lado, confundidos com suas representações e, por outro lado, contribuem para que esses objetos sejam reconhecidos em todas as suas representações possíveis. É a diferenciação e a coordenação dos diferentes registros, na atividade geométrica, que explica como se dá a aprendizagem da geometria. São estes processos que levam à apreensão conceitual dos objetos da geometria. Segundo Duval (2012), a apreensão dos objetos geométricos ocorre de quatro modos: (i) *apreensão perceptiva* que se dá no reconhecimento automático e imediato das formas de uma figura em uma situação geométrica; (ii) *apreensão sequencial* que se dá na descoberta ou descrição da ordem de uma determinada construção; (iii) *apreensão discursiva* que consiste em interpretar uma figura mediante uma descrição verbal, em que algumas de suas propriedades são determinadas explicitamente; e (iv) a*preensão* operatória centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial (de partida) e sua reorganização perceptiva determinada pelas suas modificações.

A quarta e última abordagem teórica aqui discutida, acerca da questão da aprendizagem da geometria, parte da constatação de que os problemas em geometria admitem soluções de natureza distintas, ou seja, desde soluções aproximadas, baseada na evidência intuitiva, até soluções exatas ou formais, baseadas no raciocínio sobre as propriedades das figuras. Para descrever essas diferenças, Kuzniak (2014) abandona a ideia de definir a geometria de maneira única e adota a noção de *paradigmas*[11]. Um paradigma, neste caso, indica uma maneira peculiar de propor problemas geométricos, construir e justificar suas soluções, ou seja, um paradigma é um modo de classificar a geometria. Em particular, Kuzniak (2014)

[11]Segundo Thomas Kuhn, os “paradigmas são as realizações cientificas universalmente reconhecidas que, durante algum tempo, fornecem problemas e soluções modelares para uma comunidade de praticantes de uma ciência” (Kuhn, 1991, p.13). Neste sentido, um paradigma é composto por todas as crenças, técnicas e valores compartilhados por um grupo de cientistas.

classifica a geometria em três paradigmas.

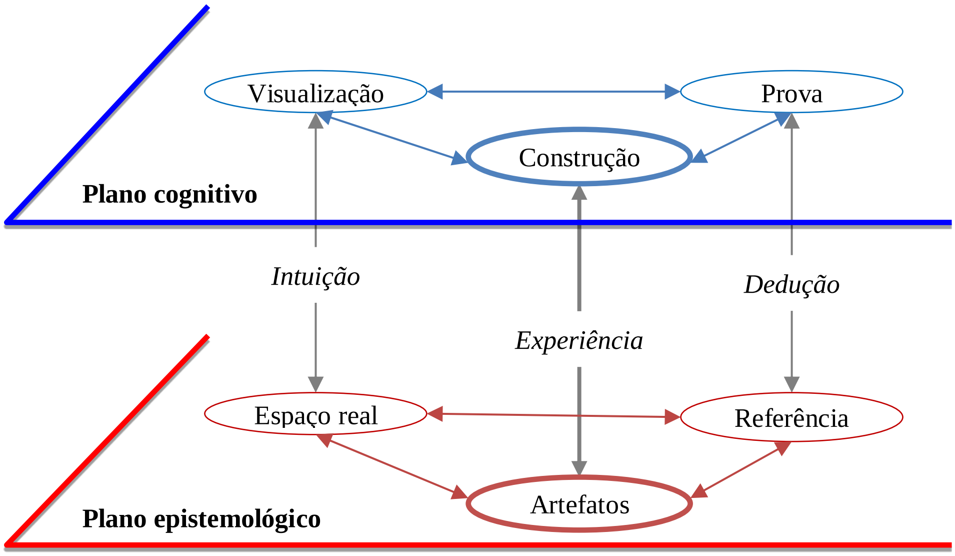
O primeiro paradigma Kuzniak (2014) chama de g*eometria natural*. Essa geometria tem na realidade sensível a fonte de validação de suas afirmações, de modo que a elaboração e justificação de soluções dos problemas apoiam-se no uso de instrumentos (régua, compasso, transferidor, software de geometria) e em objetos físicos como as dobraduras, por exemplo. Já a *geometria natural axiomática* é o paradigma que tem, como fonte de validação, as leis hipotético-dedutiva e, por isso, a validação é sempre garantida por demonstrações. O conjunto de axiomas desse paradigma, porém, está próximo da intuição, podendo ser incompleto ou parcial, pois a axiomatização é tida, neste caso, como um processo em andamento. Finalmente, o paradigma *geometria axiomática formalista* trabalha com objetos teóricos sem qualquer referência a objetos concretos. Seu sistema de validação é formal, baseado num sistema de axiomas completo e independente e seu único critério de validade é sua coerência ou sua ausência de contradições.

Para vincular essa noção de paradigma a questão da aprendizagem escolar da geometria, Kuzniak (2014) lança mão do conceito de *espaço de trabalho geométrico*. Este conceito refere-se ao "ambiente organizado para permitir o trabalho das pessoas que resolvem problemas geométricos" (KUZNIAK, 2014, p. 316). A teoria desse autor propõe que cada espaço de trabalho geométrico se articula em dois níveis: o *epistemológico* e o *cognitivo*, como ilustra a figura 3.

O *epistemológico* refere-se à dimensão puramente matemática da atividade geométrica, sendo caracterizado por três componentes que interagem entre si: (i) um espaço real e local como suporte material, isto é, esse espaço inclui um conjunto de objetos concretos (palpáveis); (ii) um conjunto de artefatos como instrumentos de desenho ou software; e (iii) um quadro teórico de referência apoiado em definições e propriedades. Já o *nível cognitivo* é centrado na pessoa ou no sujeito que articula cognitivamente os componentes do nível epistemológico, fazendo uso e se apropriando do conhecimento geométrico em sua prática. Esse nível é constituído pelos processos de *visualização, construção* e *raciocínio* da teoria de Duval (1995), já discutida aqui.

Esses dois níveis se articulam de acordo com o objetivo da atividade e do paradigma geométrico adotado. A teoria de Kuzniak (2014) apresenta o diagrama da figura 3 para ilustrar como se dá essa articulação. Assim, o espaço real pode se conectar com a visualização por meio da intuição. Já os artefatos ou instrumentos de desenho podem se ligar à construção mediante às experiências perceptivas. E, por fim, o sistema teórico de referência pode se concatenar às provas por meio da dedução.

Figura 3: Interações entre plano cognitivo e epistemológico.



Fonte: (KUZNIAK, 2014)

Segundo o modelo teórico de Kuzniak (2014), a aprendizagem da geometria se dá em diferentes rotas de criação e desenvolvimento de espaços de trabalho geométrico pelos estudantes. Vejamos dois exemplos. Se um estudante inicia sua atividade geométrica construindo uma figura com instrumentos ou um objeto real com artefatos e percebe, com essa experiência, a existência de propriedades que podem ser demonstradas num sistema axiomático de referência, então sua rota de trabalho geométrico acontece no sentido *Espaço real-Artefatos-Construção-Prova-Referência*. Mas, se um estudante inicia sua atividade com uma abordagem discursiva, por exemplo, analisando as demonstrações das propriedades de uma figura e, com isso, identifica uma maneira interessante de efetuar a construção dessa figura, então sua rota se dá no sentido *Referência-Prova-Visualização-Espaço real-Artefatos-Construção*.

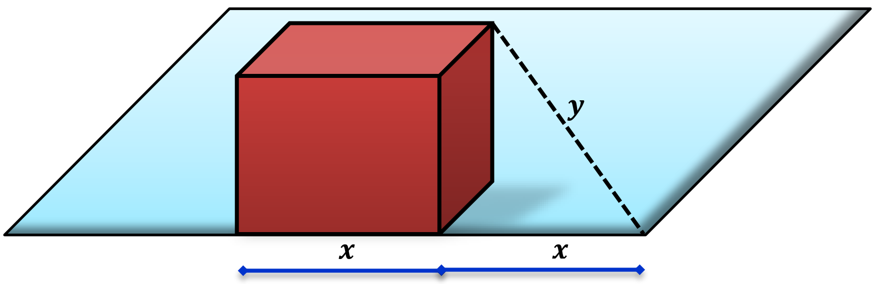
2.1.2 Um Exercício de Análise Reflexiva

Como afirmamos, os modelos teóricos efetuam suas explicações acerca da aprendizagem geométrica, assumindo pressupostos acerca da natureza do conhecimento geométrico. Esta afirmação, porém, é insuficiente para entender como esses modelos teóricos efetivam suas explicações. Mais do que a concepção de geometria, é preciso considerar ainda que esses modelos também carreiam pressupostos que sustentam uma concepção de realidade e de conhecimento. Para discutir esses pressupostos e caminhar em direção a uma compreensão fenomenológica da aprendizagem em geometria, vamos aqui realizar um pequeno exercício de análise reflexiva a partir de uma atividade geométrica.

Essa atividade consiste em solicitar aos estudantes que resolvam o seguinte problema: *se você tem uma caixa fechada e só dispõe de uma régua graduada, como você pode obter o comprimento da diagonal interior dessa caixa, sem abri-la*? Uma solução possível desse problema é a aplicação do teorema de Pitágoras. E como isso aconteceria? Depois de "ver" a caixa como um bloco retangular e "ver" que sua diagonal interior é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a diagonal de uma face e uma aresta da caixa, o estudante pode emprega a régua graduada para medir esses catetos e, com isso, aplica o teorema de Pitágoras para calcular o comprimento da diagonal.

Uma outra solução possível é com realizando uma construção. E, como isto se daria? Depois de "ver" que a caixa pode ser movimentada livremente sobre uma mesa e, com isso, sua diagonal interna pode ser transladada no espaço, o estudante coloca a caixa sobre uma mesa retangular, "cobrindo" com a caixa um dos seus cantos, isto é, fazendo coincidir as duas arestas da base da caixa com os dois lados que formam um canto da mesma. Em seguida, ele move a caixa até que ela percorra, sobre a mesa, uma distância igual ao comprimento x de sua aresta, como mostra a figura 4. Feita essa construção, basta ele usar a régua graduada para medir o comprimento y que vai do canto da mesa até o vértice oposto da caixa. Uma variação desta segunda solução é o estudante construir com a régua, em escala apropriada, um triângulo retângulo cujos catetos correspondam à diagonal de uma face e a uma aresta da caixa, perpendicular a essa diagonal.

Figura 4: Bloco Retangular apoiado sobre uma superfície também retangular



Fonte: O próprio autor

Como as ações, expressas nessas duas soluções, poderiam ser interpretadas à luz dos modelos teóricos da aprendizagem geométrica? Empregando a teoria piagetiana, poder-se-ia afirmar que a experiência visual forneceu aos estudantes, nas duas soluções, informações acerca do "espaço" *caixa-mesa*. Essas informações perceptivas são estruturadas pela inteligência desses estudantes em relações topológicas, projetivas e euclidianas, construindo, com isso, representações conceituais do problema. É a capacidade da inteligência de construir e operar sobre essas representações que permitem aos estudantes obter, nos dois casos, a solução do problema. Em síntese, nessa explicação, a experiência visual exerce um papel coadjuvante, cabendo ao pensamento, identificado, na teoria piagetiana, como inteligência, o poder de construir e operar sobre as representações do espaço, produzindo significações para o problema. Essa explicação sugere, portanto, que a aquisição do conhecimento geométrico se dá *com* e *no* pensamento que opera sobre representações espaciais, conferindo a elas significado.

Sob a luz da teoria de Van Hiele, as ações realizadas na solução do problema da caixa, poderiam ser vistas como habilidades presentes em cada nível do modelo teórico. Primeiro, os estudantes realizaram um *reconhecimento* perceptivo da caixa em seus aspectos globais. Em seguida, efetuaram uma *análise* das propriedades geométricas da caixa para, com isso, *ordenar* essas propriedades. Finalmente, os estudantes desenvolvem *deduções* para obter as duas soluções apresentadas. Essa explicação atribui às capacidades discursivas e conceituais, presentes nos níveis de *análise*, *ordenação* e *dedução* da teoria de Van Hiele, o poder de operar sobre as informações perceptivas adquiridas no nível de *reconhecimento*. Com isto, essa explicação também confere às experiências perceptivas um papel de coadjuvante do pensamento, pois fornecem, no nível do *reconhecimento*, informações que o pensamento emprega para construir representações que são operadas com o propósito de analisar, ordenar, classificar, definir e deduzir as propriedades geométricas.

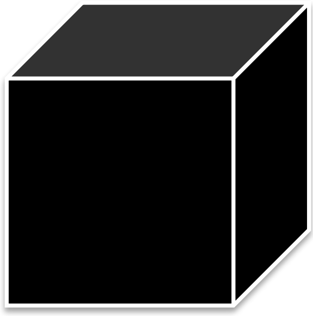
Por sua vez, as ações efetivadas no problema da caixa poderiam ser interpretadas a luz da teoria de Duval como uma sequência de diferenciação e coordenação de registros de representação semiótica. Assim, quando "veem" a caixa como um bloco retangular, os estudantes efetuam uma *apreensão perceptiva*. É esse modo de apreensão que permite aos estudantes, por exemplo, identificar e descrever a diagonal como a hipotenusa de um triângulo retângulo. Com isso, eles realizam uma *apreensão discursiva* que os possibilita de realizarem a construção e/ou aplicar o teorema de Pitágoras que correspondem, respectivamente, à *apreensão sequencial* e à *apreensão operatória*. Nessa explicação, são os processos cognitivos que detém o poder de operar sobre os diferentes registros de representação semiótica. Por isso, essa explicação expressa o entendimento de que experiência desempenha um papel coadjuvante, isto é, auxilia os processos cognitivos, mas não possuir poder cognitivo de produzir significações.

Por fim, uma explicação, baseada no modelo teórico de Kuzniak, diria que as duas soluções correspondem a criação de duas rotas de trabalho geométrico. Na primeira, a atividade se inicia com a identificação das propriedades geométricas da caixa, ou seja, inicia-se com a *visualização* de um *espaço real*. Em seguida, usa-se o *artefato* régua para obter medidas que são empregadas na aplicação do teorema de Pitágoras. A aplicação desse teorema requer a utilização de um sistema de *referência* para obter a solução. Portanto, essa rota do trabalho geométrico é *Visualização-Espaço real-Artefato-Referência*. Na segunda solução, a atividade inicia com o *espaço real* caixa-mesa e com a *visualização* desse espaço para identificar a possibilidade de transladar, sobre a mesa, a diagonal interna da caixa. Concluir que é possível sobrepor o canto da mesa com a caixa equivale a efetivar uma *prova* sobre a congruência entre dois ângulos retos. Em seguida, realiza-se a *construção*, sobrepondo a caixa no canto da mesa e, com isso, pode-se empregar o *artefato* régua para obter a solução desejada. Esta rota do trabalho geométrico é, portanto, *Espaço real-Visualização-Prova-Construção-Artefatos*. Nessa explicação, as capacidades discursivas e conceituais, ligadas à *prova* e *referência* são atribuições protagonizadas pelo pensamento. O pensamento, portanto, detém o poder o poder de construir e operar com as representações e, com isso, produzir significações. Às experiências perceptivas, essa explicação destina um papel coadjuvante, que auxilia o pensamento, mas não detém o poder de produzir significações.

Esse singelo exercício de análise visa expor sentidos que indicam como *experiência*, *pensamento* e *representação* são empregados para explicar como a aprendizagem da geometria se dá. Como já argumentamos, as explicações elaboradas sob a luz dos modelos teóricos remetem às experiências perceptivas um papel de coadjuvante, no sentido de que elas, por si mesmas, não produzem significações, mas subsidiam o pensamento que detém exclusivamente o poder de construir e manipular representações e, por isso, podem atribuir significado aos objetos da geometria. Consequentemente, esses modelos teóricos veiculam a ideia de que aprender é um processo que ocorre inteiramente na mente do estudante, ou seja, aprender geometria é uma atividade puramente intelectual que acontece *no* pensamento e *por causa* do pensamento.

Ao entender que as significações são atribuições exclusivas do pensamento, esses modelos teóricos carreiam uma concepção de realidade e de conhecimento que rompe com a unidade entre experiência e fenômeno (significação) mediante o uso da noção de representação. Essa ruptura caracteriza a chamada dualidade cartesiana entre sujeito e objeto. Segundo Müller (2001), a ontologia cartesiana pressupõe a separação entre pensamento (*res cogitans*) e mundo (*res extensa*) e entende que o conhecimento decorre da "capacidade do pensamento de representar clara e distintamente" o mundo. A dualidade cartesiana, portanto, não reconhece o valor cognitivo de nossas experiências porque, nas palavras de Müller (2001), "elas não podem representar coisa alguma, senão de uma forma confusa". Segundo a concepção cartesiana, a relação entre um objeto visto e seu significado é estabelecida *no* pensamento e *pelo* pensamento.

Figura 5: Representação bidimensional de um cubo



Fonte: O próprio autor

Mas, segundo a concepção cartesiana, como o pensamento produz significações? Por exemplo, se vejo desenhado numa folha de papel, a imagem mostrada na figura 5, ou seja, se vejo um quadrado e dois paralelogramos adjacentes ao quadrado, o que me leva a dizer que essa imagem significa um cubo? Segundo a crença cartesiana, embora minha experiência perceptiva me mostre efetivamente um quadrado e dois paralelogramos é o meu pensamento que me diz que essa imagem é a de um cubo. Mas, como isto ocorre? Segundo essa concepção, para que essa imagem possa valer como a de um cubo é necessário que o quadrado e os paralelogramos possam ser "pensados" como sendo as faces de um cubo, ou seja, é necessária uma ação do pensamento que, investido de um poder de representação, corrige a forma e as dimensões dos paralelogramos, tais como dadas pela experiência, transformando-os em faces quadradas. É por causa do poder de representação do pensamento que é atribuído à imagem vista o significado de cubo. É, portanto, o pensamento que liga a imagem vista ao significado de cubo.

Esse argumento é contestado, do ponto de vista da fenomenologia, por Merleau-Ponty (2014). Segundo esse autor, para que a representação bidimensional seja percebida como coisa em profundidade, como um cubo, não representamos suas faces não vistas, nem associamos ao desenho imagens mentais do cubo como sendo visto de perfil ou de diferentes ângulos para corrigir as deformações das arestas, dos ângulos e das faces, nem associamos ao desenho um pensamento contendo a definição de cubo propondo que a imagem vista é a de um sólido formado por seis faces quadradas congruentes. Nas palavras de Merleau-Ponty (2014, p. 356):

> O ato que corrige as aparências, que dá aos ângulos agudos ou obtusos valor de ângulos retos, aos lados deformados valor de quadrado, não é o pensamento das relações geométricas de igualdade e do ser geométrico ao qual elas pertencem, é o investimento do objeto por meu olhar que o penetra, o anima, e faz as faces laterais valerem imediatamente como "quadrados vistos de viés", a ponto de que nós mesmo os vemos sob seu aspecto perspectivo de losango.

Mas, como a experiência perceptiva institui à imagem vista o significado de cubo? Para que eu veja a imagem como um cubo é preciso, segundo Müller (2001), que "meu olhar se polarize sobre um de seus perfis, tomando-o como dado espacial, para logo a seguir transpô-lo em direção a outro perfil, do qual o anterior não está desvinculado, mas retido como horizonte ou perfil temporal" (p.203). É esse horizonte temporal dos diferentes perfis do desenho que faz com que pontos situados no mesmo plano sejam percebidos como localizados em profundidade e isto ocorre antes mesmo que as relações geométricas que esses perfis guardam em si sejam pensadas. A conclusão de Merleau-Ponty (2015, p.36) é que "a síntese que compõe os objetos percebidos e que afeta com um sentido os dados perceptivos não é uma síntese intelectual", mas é uma síntese operada como expressão da experiência corporal. Isto é, "para serem percebidas, enfim, as coisas necessitam de que meu corpo empreste a elas uma estruturação temporal, que é a estruturação temporal segundo a qual minha própria espacialidade está desdobrada" (MÜLLER, 2001, p.203).

Se a significação do cubo é instituída pela expressividade da nossa experiência corporal e não pelo poder de representação do nosso pensamento, então nossas experiências perceptivas não desempenham um papel coadjuvante na aquisição do conhecimento geométrico, mas são elas que exprimem os fenômenos e as significações geométricas que são aprendidas pelo pensamento. Essa afirmação parece evidente quando se trata de uma atividade de reconhecimento visual uma figura, mas para as atividades discursivas ou conceituais presentes nas demonstrações de teoremas, as nossas experiências corporais parecem não ter um papel relevante na expressão de significações. Por isso, precisamos analisar esse caso com cuidado.

Em uma demonstração, o geômetra usualmente elabora seu argumento fazendo construções sobre uma figura e modificando-a para passar da hipótese para a tese. Entretanto, ao contrário do que acontece com um desenho que perde suas características originais quando lhe são acrescentados novos traços, a figura sobre o qual o geômetra efetua suas construções se mantém idêntica a si mesma ao longo da demonstração. Como isto se dá? Segundo a concepção cartesiana, se supomos que, para manter a identidade da figura, o geômetra deve fixar sua atenção nas propriedades que a caracterizam, então devemos supor que existe uma atividade de síntese do pensamento fazendo com que, de um momento a outro da demonstração, as propriedades da figura não sejam esquecidas. Com isso, é preciso concluir que o geômetra representa para si mesmo a figura, lançando mão de uma entidade ideal que existe separada e independentemente do seu exemplar empírico, utilizado pelo geômetra como mero meio auxiliar para realizar a demonstração.

Entretanto, sob o ponto de vista fenomenológico, não é a atividade de representação operada pelo pensamento, mas, sim, é o mecanismo de sedimentação de nossas experiências na linguagem que permite explicitar o processo de demonstração em geometria. Para explorar esta afirmação, Merleau-Ponty (2014) descreve e analisa as experiências perceptivas requeridas na demonstração do teorema que diz ser a soma dos ângulos internos de um triângulo igual à soma de dois retos. Diz a descrição de Merleau-Ponty (2014):

> "Penso no triângulo, no espaço[12] com três dimensões ao qual se supõe que ele pertença, no prolongamento de um de seus lados, na paralela que se pode traçar por um de seus vértices ao lado oposto, e percebo que esse vértice e essas linhas formam uma soma de ângulos igual à soma dos ângulos do triângulo e igual, por outro lado, a dois retos".

Se, em cada instante, o triângulo permaneça, para mim, o mesmo na demonstração porque, do meu presente, reabro o passado imediato, mantendo constante, assim, a configuração da figura sensível, que não varia. Não varia porque ao longo da demonstração, um rastro de sedimentação de experiências vai se formando e cada novo passo retoma os anteriores, de modo que a essência do triângulo se mantém idêntica nesse mecanismo de

---

[12] Quando diz que o triângulo pertence ao espaço com três dimensões, Merleau-Ponty está, nessa afirmação, descrevendo uma experiência perceptiva, ou seja, está descrevendo como o geômetra percebe o triângulo enquanto efetua uma construção. Seria equivocado, portanto, tomar suas palavras como uma definição de triângulo ou como uma apresentação ingênua ou leiga do triângulo.

sedimentação. A essência do triângulo, segundo Merleau-Ponty (2014, p. 516), não é dada pela sua definição ou como ideia, ou seja, não é dada pelo pensamento, mas pelo modo como o triângulo ocupa o espaço e se situa como pólo de meus movimentos, ou seja, pela maneira como se situa para mim como um sistema de posições espaciais e um campo de movimentos possíveis. Isto é, quando na demonstração, o geômetra emprega termos como *prolongo*, *traço*, *constato*, *etc*, ele faz referência a um conjunto de possibilidades de ação do corpo, principalmente, das mãos e dos olhos, de modo que a essência do triângulo é apreendida pelo geômetra como "a fórmula de uma atitude, uma certa modalidade de meu poder sobre o mundo, uma estrutura" (MERLEAU-PONTY, 2014, p. 516). A essência do triângulo é, portanto, instituída pela experiência corporal e é a expressividade dessa experiência que fornece ao pensamento, num só golpe, a certeza de a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos. Segundo Merleau-Ponty (2014, p. 518):

> "Se posso, por meio de uma construção, fazer aparecer as propriedades do triângulo, se a figura assim transformada não deixa de ser a mesma figura da qual eu parti, e se enfim posso operar uma síntese que conserva o caráter de necessidade, não é que minha construção esteja subtendida por um conceito de triângulo em que todas as propriedades estariam incluídas, e que, saído da consciência perceptiva, eu chegue ao *eidos*: é que eu efetuo a síntese da nova propriedade por meio do corpo, que de um só golpe me insere no espaço, e cujo movimento autônomo me permite alcançar, por uma série de passos precisos, esta visão global do espaço. Longe de que o pensamento geométrico transcenda a consciência perceptiva, é ao mundo da percepção que tomo de empréstimo a noção de essência".

Ao final dessa longa citação Merleau-Ponty (2014) expressa a compreensão de que a geometria e toda a atividade geométrica possui seu primado na percepção e não no pensamento. Segundo essa compreensão, se temos a certeza e aceitamos como verdade que todos os triângulos possuem a soma dos ângulos internos igual a dois retos, é porque temos a experiência de um triângulo real, constituído como um *campo de movimentos possíveis* do nosso corpo. Um triângulo que se mostra à nossa percepção em perfis, se mostra à uma percepção em perspectiva traçada a partir do ponto zero, que é o corpo-próprio. É dessa percepção perspectivada que o triângulo se mostra como uma *fórmula motora* constituída pelo meu corpo.

Enquanto se move a si mesmo e se projeta em direção ao mundo, meu corpo é intencionalidade e, portanto, "condição de possibilidade, não apenas da síntese geométrica, mas ainda de todas as operações expressivas e de todas as aquisições que constituem o mundo cultural" (MERLEAU-PONTY, 2014, p. 519). É na expressividade de nossas experiências corporais, na expressividade de nossas *gesticulações linguísticas*, que a aprendizagem geométrica se mostra, pois esta, na sua forma originária, se dá justamente como um ato de expressão de nossas experiências corporais. Por isso, a aprendizagem geométrica não é um ato circunscrito à nossa subjetividade, nem a nossa espacialidade atual. Se posso aprender geometria com o outro é porque os atos desse outro, expressos em sua conduta corporal, não me são estranhos porque eu próprio os experimento. De fato, com diz Merleau-Ponty (2015, p.39):

> Assim como o meu corpo, enquanto sistema de minhas apreensões do mundo, funda a unidade dos objetos que percebo, assim também o corpo de outrem, enquanto portador de condutas simbólicas e da conduta do verdadeiro, é arrancado da condição de um de meus fenômenos, propõe-me a tarefa de uma comunicação verdadeira e confere a meus objetos a dimensão nova do ser intersubjetivo ou da objetividade.

Essa afirmação, ao mesmo tempo em que indica a subjetividade, intersubjetividade e objetividade como dimensões de um mesmo movimento, de uma mesma totalidade, mostra também como as idealidades geométricas adquirem características predicativas ou de objetividade. Mais especificamente, a objetividade das idealidades geométricas é constituída na dialética subjetividade/intersubjetividade e se dá primordialmente na comunicação do cossujeitos, isto é, pelo canal aberto na percepção do outro e pela comunicação do compreendido, sustentada em modos linguísticos de expressão.

2.2 Aprender em Práticas de Modelagem Matemática

Este tópico visa discutir como a aprendizagem em práticas de MM tem sido compreendida na pesquisa em Educação Matemática. Argumentei, no tópico anterior, que a explicação de como a aprendizagem da geometria se dá, vincula-se à compreensão que se tem da própria geometria. Este tópico caminha também nessa direção e interroga como se dá a relação entre concepção de MM e compreensão da aprendizagem MM. Essa interrogação, porém, não visa antecipar respostas para a questão investigada nesta tese, nem esboçar um quadro de referência para efeito de comparação. O que essa interrogação visa é explorar de que modo os pressupostos subjacentes à concepção de MM na Educação Matemática sustentam explicações acerca da aprendizagem na MM.

Explorar a questão da aprendizagem na MM, entretanto, é mais complicado do que em relação à geometria. E isto se deve, primeiro, ao fato que o tema da aprendizagem é pouco explorado na pesquisa em MM e, segundo, ao fato de que a própria MM é ainda compreendida de maneira ambígua[13] na Educação Matemática. Com relação a esse tema, Cruz e Araújo (2017), numa investigação sobre concepções de aprendizagem em trabalhos de pesquisa, apontam que 85% dos 75 trabalhos analisados usam a palavra "aprendizagem", porém, apenas quatro desses trabalhos abordam explicitamente esse tema. Segundo Cruz e Araújo (2017), os poucos estudos que investigam explicitamos o tema aprendizagem na MM se limitam a aplicar uma teoria, advinda do campo da psicologia da aprendizagem, sem vinculação estrutural e conceitual com a aprendizagem na MM. Entre os estudos estão BRAGA (2015) que investiga a aprendizagem na MM, utilizando a teoria da atividade de Engeström, SOUZA e BARBOSA (2014) que aborda a aprendizagem na MM, empregando a teoria da aprendizagem como discurso de Anna Sfard e BORSSOI (2004) que aborda esse tema via teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel.

Em maior quantidade, porém, são os trabalhos que abordam o tema da aprendizagem na MM de maneira indireta, ou seja, investigando questões que orbitam esse tema. Por exemplo, Palharini, Tortola e Almeida (2017) abordam, sob a luz da filosofia de Wittgenstein, a necessidade de utilização de provas por recorrência em atividades de MM e Silva e Almeida (2015), empregando a semiótica peirceana, investigam a atribuição de significado em atividades de MM. Em geral, a utilização de teorias advindas de "fora" da MM e a pulverização de esforços para investigar questões pontuais ou específicas dessas teorias, fazem com que o tema da aprendizagem seja tratado de maneira superficial nesses trabalhos de pesquisa.

Embora pouco explorado ou explorado superficialmente, o tema da aprendizagem na MM tem sido apontado como um ponto de convergência da pesquisa em Educação Matemática. Kaiser et al (2006), por exemplo, apontam essa convergência em alguns trabalhos que caminham em direção à construção de uma *teoria didática para a MM*, isto é, uma teoria global que conecta vários aspectos do ensino e da aprendizagem na MM. Esse movimento na pesquisa se caracteriza, segundo Kaiser et al (2006), pela utilização de conceitos teóricos oriundos da própria MM, tais como os conceitos de ciclo de modelagem, autenticidade, competências, matematização, bloqueios e rotas. Porém, esses conceitos surgem vinculados a

---

[13] Emprego o termo ambiguidade por dois motivos: o primeiro, para dizer da confusão, apontada por Galbraith (2014), entre os aspectos ontológicos e epistemológicos da MM, isto é, quando a realidade subjacente à MM é tomada pelas afirmações acerca do conhecimento sobre a MM; o segundo, para dizer de um tipo de reducionismo, apontado por Klüber (2012), em a MM, coisa-mesma, é tomada como um de seus possíveis desdobramentos, por exemplo, identificando a MM como atividade, metodologia, estratégia, alternativa pedagógica.

questões específicas e ainda não formam um quadro teórico geral para a MM.

Já em relação à compreensão acerca da MM, as confusões se originam de vários modos. Uma primeira confusão, apontada por Klüber (2012), se dá quando a MM, *coisa-mesma*, é tomada como uma de suas manifestações, prevalecendo, como sua característica dominante, um de seus possíveis desdobramentos ou um de seus usos pontuais. Por exemplo, quando se toma a MM como atividade, método, estratégia, ambiente de aprendizagem, alternativa pedagógica ou tendência, corre-se o risco de descaracterizá-la, atribuindo à MM um sentido *sui generis*. Uma segunda confusão ocorre, segundo Galbraith (2015), pela "substituição das considerações sobre o que a MM é, pela forma como esta expressão é interpretada, tanto em si mesma, como em relação ao seu papel nas ações em ambientes educacionais". Esse tipo de confusão é chamado, por Galbraith (2015), de *falácia epistêmica* que significa uma "confusão entre ontologia e epistemologia", ou seja, quando "as proposições acerca da natureza de uma realidade são substituídas pelas proposições acerca do conhecimento dessa realidade". Uma substituição comum desse tipo é confundir uma prática de MM com a teoria empregada para interpretá-la. Esclarecer esse tipo de confusão requer distinguir a *realidade subjacente* à MM das teorias que tratam dessa realidade, ou seja, requer distinguir os aspectos ontológicos dos epistemológicos da MM.

Em vista dessas dificuldades, não vamos aqui discutir ou adotar definições específicas de MM ou de aprendizagem na MM. Como nosso interesse é entender a relação entre pressupostos subjacentes à MM e os modos de ver a aprendizagem na MM, apresentamos, neste tópico, uma visão muito geral desses dois temas. Primeiro, discutimos algumas noções que sustentam a concepção de MM na Educação Matemática, a saber, as noções de *realidade subjacente* à MM, de teorias de MM e de práticas de MM. Em seguida, exploramos alguns sentidos que o termo *aprendizagem* tem assumido na pesquisa em MM. Por fim, retomamos algumas afirmações examinadas ao longo do tópico para discutir a possibilidade de construir uma compreensão fenomenológica da aprendizagem na MM.

2.2.1 A Modelagem na Educação Matemática

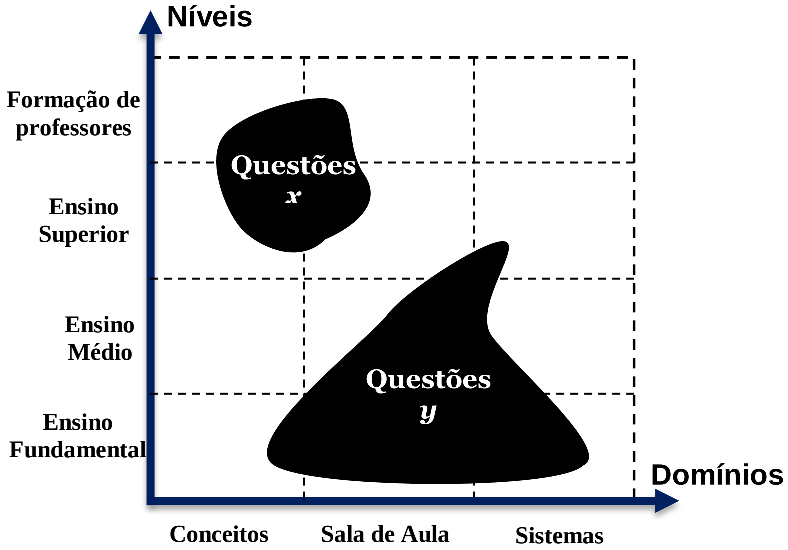
A Modelagem na Educação Matemática pode ser entendida como um conjunto de *teorizações* expressas na forma de conceitos, explicações, relatos, perguntas, "coisas" que habitam na linguagem. Mas, a Modelagem na Educação Matemática também é um *fazer* que, neste caso, não se dá exclusivamente na linguagem, mas pode se expressar em "coisas" tangíveis ou observáveis que podem ser vivenciadas como experiência perceptiva. Esse domínio do *fazer*, obviamente, se conecta com o domínio das *teorizações*, servindo como sua *realidade subjacente*. Pode-se entender que as *teorizações* decorrem da vivência dessa *realidade subjacente*, pois teorias são construídas justamente para abordar, sob algum aspecto, essa realidade. Consequentemente, para compreender as teorias, como diz Klüber (2013), "precisamos vivenciá-las para preencher lacunas que não cabem na escrita que nos foi apresentada", precisamos, enfim, vivenciar sua *realidade subjacente*. Em vista dessas considerações, compreendo que um modo de tentar entender o que é Modelagem Matemática na Educação Matemática é investigar como se dá essa relação entre teoria e realidade.

Mas, o que se entende por *realidade subjacente* à Modelagem na Educação Matemática? Um primeiro entendimento para essa expressão refere-se, segundo Galbraith (2015), à *realidade subjacente* às teorias que abordam o processo de construção de modelos matemáticos ou teorias para o ciclo de MM. Segundo esse autor, essa *realidade subjacente* decorre do fato de que "no nosso mundo existem coisas que geram problemas e que alguns desses problemas podem ser abordadas de forma produtiva com a aplicação de *matemática*". Além dessa realidade "como resolução de problemas do mundo real", existe também "uma crença/pressuposição de que os indivíduos podem ser ajudados a se tornar melhores nesta atividade mediante uma ação educacional" (GALBRAITH, 2015, p.341).

Um segundo entendimento para a expressão *realidade subjacente* é expressa por Sriraman (2005) que emprega a noção de *sistemas complexos* para caracterizar essa realidade. É para os sistemas complexos que são direcionadas as questões de pesquisa sobre MM. Sriraman (2005) exemplifica essa afirmação, dizendo que quando tentamos entender como os estudantes se engajam na resolução de problemas do mundo real, direcionamos nossa questão para três sistemas complexos: sistemas do "vida real" que acontecem em situações cotidianas; sistemas conceituais utilizados para delimitar, modelar ou produzir significado para os sistemas da "vida real"; e sistemas constituídos por esquemas que os pesquisadores utilizam para descrever e explicar as habilidades dos alunos em MM.

Um terceiro entendimento para *realidade subjacente* à Modelagem na Educação Matemática é o que faz referência às práticas de MM e tudo o que possibilita, sustenta ou norteia essas práticas. Esse entendimento é expresso por Niss et al (2007) que representam essa *realidade subjacente* num diagrama constituído por um sistema de dois eixos coordenados (ver figura 6). O eixo das abscissas representa três *domínios*: *conceitos*, que indicam as concepções e crenças acerca da MM; *sala de aula*, vista como um amplo indicador de localização das práticas de MM; e *sistemas* que referem ao ambiente institucional (político, estrutural, organizacional, administrativo, financeiro, social, físico) que exerce influência sobre as práticas de MM. O eixo das *ordenadas* representam os níveis educacionais, separados, como usualmente se faz na maioria dos países, em: nível primário; secundário; superior; e formação de professores. Esse diagrama mapeia, segundo Niss et al (2007), as questões de pesquisa acerca da MM, pois, segundo esses autores, essas questões interrogam objetos, fenômenos, situações, que são constituídos como combinações entre *domínios* e *níveis de ensino*.

Figura 6: A realidade subjacente à Modelagem na Educação Matemática

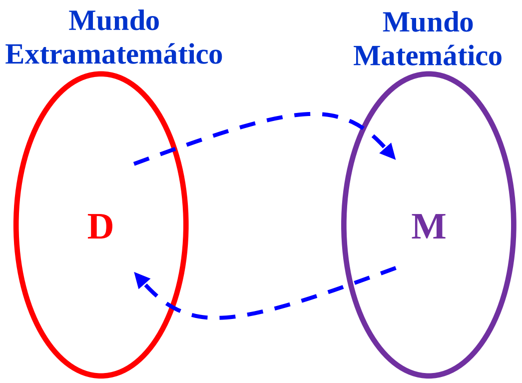


Fonte: (NISS et al, 2007)

Em vista desses entendimentos que assume a expressão *realidade subjacente*, cabe perguntar como se dão, a partir desses sentidos, as *teorizações* para a Modelagem na Educação Matemática. Segundo Galbraith (2015), essas teorizações acontecem quando a *realidade subjacente* é vista através de uma *lente epistemológica*, ou seja, com um interesse delimitado e segundo uma concepção específica de conhecimento. Assim, segundo esse autor, *lentes epistemológicas* distintas, direcionadas aos aspectos *ontológicos* da Modelagem na Educação Matemática, resultam em teorias também distintas. Vejamos como isso se dá em alguns exemplos.

Por exemplo, olhar a *resolução de problemas do mundo real* com uma lente epistemológica que visa explicar como se dão as transições entre o mundo real e a matemática na MM pode conduzir, segundo Galbraith (2015), a uma teoria que pensa o ciclo de modelagem como constituído de um domínio de interesse extramatemático, D, um domínio matemático M e um mapeamento do domínio extramatemático feito a partir do domínio matemático (ver figura 7). De acordo com essa teoria, objetos, relações, fenômenos, hipóteses, perguntas, etc. do domínio D são identificados e selecionados como relevantes para os propósitos da situação em D e, em seguida, são mapeados e “traduzidos” em objetos, relações, fenômenos, hipóteses, perguntas, etc. do domínio M. Decisões matemáticas, manipulações, inferências e resultados obtidos em M são reconvertidos, traduzidos de volta, em D, isto é, são interpretados como conclusões em D. Esse movimento de conversão (M→D) e reconversão (D→M) caracteriza o chamado ciclo de modelagem matemática que pode ser repetido muitas vezes, dependendo da validação e avaliação do modelo em relação ao domínio, até que as conclusões resultantes em D, relativas aos objetivos do modelo, sejam consideradas satisfatórias.

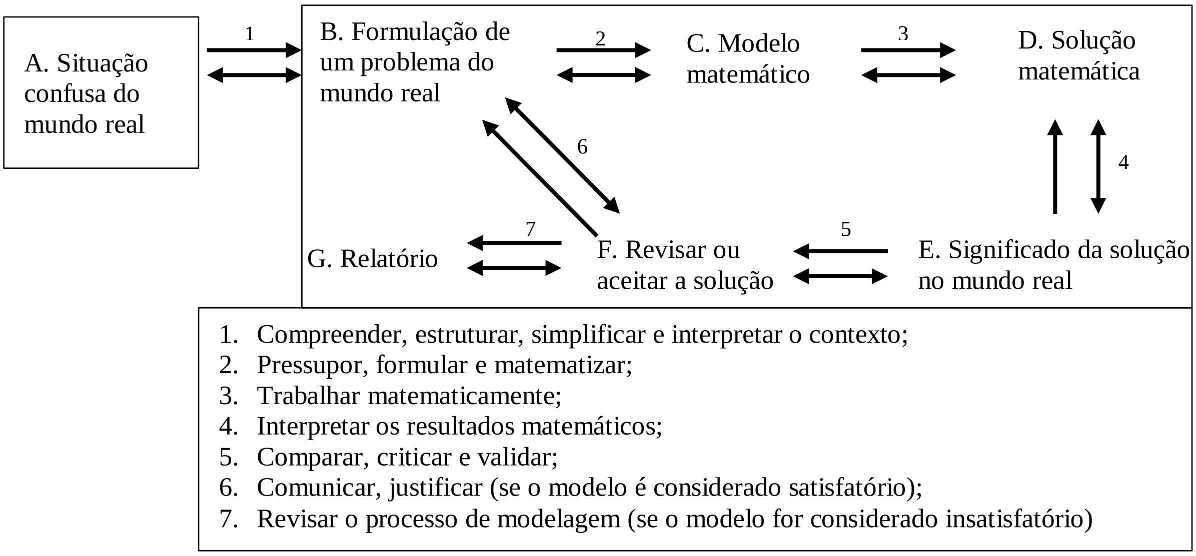
Figura 7: O mundo da matemática e o resto do mundo.



Fonte: (NISS et al, 2007)

Mas, se a *resolução de problemas do mundo real* é vista através de uma lente epistemológica com forte interesse educacional, que tipo de teoria pode ser construída? Se a lente epistemológica visa os processos cognitivos dos estudantes envolvidos na MM, então essa teoria precisa identificar as etapas ou os subprocessos presentes na conversão (M→D) e na reconversão (D→M) do ciclo de MM. Uma teoria com essa característica é a proposta por Galbraith e Stillman (2006). Essa teoria identifica no ciclo de modelagem cinco transições (ver figura 8). A primeira é de uma situação confusa do mundo real para a formulação de problema real (A↔B). A segunda transição é do problema real para a formulação de um modelo matemático (B↔C). A terceira vai de um modelo matemático para uma solução matemática (C↔D). A quarta vai de uma solução matemática para o significado dessa no mundo real (D↔E). Finalmente, a quinta transição vai do significado da solução no mundo real para revisão ou aceitação do modelo (E↔F).

Figura 8: Processo ou ciclo de modelagem matemática, segundo Galbraith e Stillman (2006).



Fonte:(GALBRAITH e STILLMAN, 2006)

Para que essa teoria atenda a interesses educacionais, Galbraith e Stillman (2006) traduzem as transições em termos de ações mentais expressas em verbos: a primeira transição inclui as ações de *compreender*, *estruturar*, *simplificar* e *interpretar* o contexto; a segunda inclui as ações de *pressupor*, *formular* e *matematizar*; a terceira, a ação de *trabalhar* matematicamente; a quarta a ação de *interpretar* os resultados matemáticos e a quinta as ações de *comparar*, *criticar* e *validar*. Além dessas ações, Galbraith e Stillman (2006) incluem as ações de *comunicar* e *justificar* (no caso de o modelo ser considerado satisfatório) e as ações de *refazer* o processo de modelagem (no caso do modelo ser considerado insatisfatório). Essas transições e suas respectivas ações mentais são organizadas pelos seus autores no diagrama da figura 8.

Se a *realidade subjacente* à MM é o *recorte social e sistêmico* representado na figura 6, outros tipos de teorias podem ser construídos, dependendo da lente epistemológica através da qual essa realidade é olhada. Modelos teóricos sobre a autenticidade em práticas de MM, o desenvolvimento de competências, a aprendizagem da matemática, a transferência da aprendizagem, são construídos de acordo com diferentes perspectivas metodológicas e com variados propósitos. A diversidade dessas teorias resulta em "múltiplas vozes" para Modelagem na Educação Matemática. Essas vozes podem ser agrupadas em *gêneros* (GALBRAITH, 2012), *perspectivas* (KAISER e SRIRAMAN, 2006) ou *estilos de pensamento* (KLÜBER, 2012) e expressam diferentes concepções de MM. Mas, o que essas "múltiplas vozes" dizem sobre o que a Modelagem é na Educação Matemática?

Para explorar essa questão, Galbraith (2011), analisando a relação entre *estrutura* e *propósito* presente nos diversos gêneros de Modelagem reconhecidos pela comunidade internacional, identifica seis sentidos para a Modelagem na Educação Matemática. Segundo Galbraith (2011), o primeiro sentido diz que a MM se refere a *situações com problemas reais que servem como ponto de partida para introduzir abstrações*. Como exemplo, esse autor indica uma prática em que estudantes investigam dois orçamentos para contratação de um serviço de encanamento. Os dois orçamentos calculam o preço do serviço, somando uma taxa fixa a um valor que varia em função do tempo gasto na realização do serviço. Essa é, portanto, uma situação com um problema real, cuja solução envolve o estudo de funções afim, expressas pela relação $y = ax + b$. A elaboração de representações tabulares, gráficas e algébricas para essa situação pode conduzir os estudantes às abstrações dos conceitos de *inclinação* e *intersecção entre retas* que dependem do contexto do problema.

Um segundo sentido para MM é proposto pela teoria *Modelagem Emergente* de Gravemeijer (2007). "Emergente", nesse caso, refere-se tanto à natureza do processo pelo qual modelos matemáticos emergem da experiência dos estudantes quanto ao processo pelo qual esses modelos servem de base para o surgimento de conhecimentos matemáticos do tipo formal, ou seja, que não dependem mais dos modelos matemáticos dos quais se originaram. Gravemeijer (2007) exemplifica esse sentido, descrevendo uma prática de MM em que estudantes investigam o efeito da colocação de um radar sobre a redução da velocidade de veículos. Os estudantes dispõem das velocidades dos veículos antes e depois da colocação do radar, ou seja, dispõem de dois conjuntos de dados que são representados em gráficos de dispersão e gráficos de quartis, mediante o emprego o uso de um software adequado. A visualização dessas representações levou os estudantes a investigar o modo como as velocidades estavam agrupadas ou distribuídas antes e depois do radar. Com isso, os estudantes empregaram os conceitos de mediana e quartis para analisar a densidade da distribuição dos dados. Nessa prática, o modelo emergente é dado pelas representações gráficas que conduziram à abstração dos conceitos de mediana, quartis e densidade. A Modelagem Emergente, neste sentido, pode ser definida como um processo de *abstração como construção* em que o conhecimento matemático é fundamentado nas experiências dos estudantes (GRAVEMEIJER, 2007).

O terceiro sentido para MM é Modelagem como *ajuste de curva*. A enorme disponibilidade de *softwares* de *regressão* tem permitido, segundo Galbraith (2011), que um modelo possa ser construído como um artefato puramente técnico, ou seja, que seus parâmetros sejam determinados a partir de um conjunto de dados sem que o estudante saiba de onde esses dados vieram ou em completa ignorância dos aspectos contextuais subjacentes à situação real investigada. Essa concepção de Modelagem levanta, segundo Galbraith (2011), uma questão teórica profunda, a da autoridade relativa dos dados como tais, em relação à estrutura teórica subjacente à sua geração. Embora o ajuste de curva seja uma técnica importante para as práticas de MM, o seu uso ostensivo e descontextualizado conduz a uma aberração do conceito de Modelagem. Um exemplo de boa prática de MM como *ajuste de curva* é descrito por Galbraith (2011): os estudantes investigam a relação entre os recordes de halterofilismo e os pesos dos atletas recordistas. Uma parábola invertida foi ajustada pelos estudantes para modelar os dados, levando-se em conta o fato de que o peso levantado primeiro aumenta com o peso corporal, mas, a partir de um certo valor (categoria dos superpesados), começa a diminuir, uma vez que o peso corporal prejudica a capacidade de levantamento. Essa é uma boa prática de ajuste de curva porque, segundo Galbraith (2011), os estudantes levaram em conta os aspectos contextuais do problema investigado.

O quarto sentido com o qual é a Modelagem é reconhecida é o de *problemas com enunciados* (*word problems*, em inglês). Segundo Galbraith (2011), essa concepção resulta da constatação, em várias pesquisas, de que os estudantes tendem a ignorar os fatores contextuais dos problemas de matemática e aplicar, muitas vezes de maneira incorreta, procedimentos que eles acreditam ser implícitos à matemática escolar. Por exemplo, a crença de que todo problema matemático tem uma solução exata e que essa solução é única e obtida exclusivamente com operações efetuadas com todos dados do problema leva os estudantes a desconsiderar, muitas vezes, aspectos contextuais, soluções aproximadas, múltiplas soluções, ausência de solução, excesso ou falta de dados, que caracterizam os problemas reais fora da escola. Explorar essas características dos problemas reais é o principal objetivo das práticas de MM envolvendo *problemas com enunciados*. A Modelagem, neste sentido, é um tipo de intervenção que visa lidar com as dificuldades dos estudantes em resolver problemas reais.

O quinto sentido de MM é o de *veículo* para abordagem de temas específicos do currículo de matemática. Utilizar MM para abordar funções, equações diferenciais, geometria, probabilidade, é um modo de ver a Modelagem como veículo. As práticas de MM, neste caso, são organizadas para que temas específicos de matemática sejam empregados pelos estudantes ao longo da investigação. Como o objetivo principal é o conteúdo curricular, questões como a autenticidade da MM ou o interesse dos estudantes são subordinados, se necessário, ao objetivo principal. Segundo Galbraith (2011), uma prática de MM vinculada a essa ideia foi a investigação de um problema, proposto pelo professor, envolvendo a localização de um hospital para atender três grandes cidades reais, isto é, com dados reais. Os estudantes, inicialmente, abordaram o problema a sua maneira e, posteriormente, o professor retomou as suposições, estratégias, parâmetros, interpretações e justificativas fornecidos pelos estudantes para desenvolver/sistematizar o conteúdo matemático vinculado ao objetivo principal da prática.

O sexto e último sentido para a Modelagem é o de *resolução de problemas do mundo real*. Galbraith (2011), que emprega essa mesma ideia para definir *realidade subjacente* à MM, afirma que essa ideia se originou entre os pesquisadores que utilizam a matemática profissionalmente, ou seja, que constroem modelos matemáticos para efetivamente resolver problemas que são demandados do mundo real ou de fora do contexto educacional. O objetivo principal das práticas de MM, nesse caso, é que os estudantes desenvolvam habilidades de MM e, com isso, construam resultados matematicamente produtivos para os problemas que surgem em seu mundo. Há, portanto, nesse caso, dois propósitos concorrentes: desenvolver habilidades de MM e utilizar produtivamente o conhecimento matemática curricular. O diagrama da figura 8 é utilizado, nesse caso, para descrever como se dá a prática de MM como indicador dos andaimes (*scaffolding*, em inglês) que devem ser alcançados para desenvolver as habilidades de MM.

Embora esses seis modos de entender a Modelagem expressem, individualmente, visões coerentes da relação teoria-prática, quando tomados em conjunto apresentam, segundo Galbraith (2011), inconsistências e inferências mal elaboradas que induzem a compreensões equivocadas sobre o que a Modelagem é na Educação Matemática. Analisando a relação entre *estrutura* e *propósito* das práticas de MM, Galbraith (2011) aponta que todos esses modos de compreender a Modelagem podem ser resumidos em apenas dois: *Modelagem como conteúdo* e *Modelagem como veículo*. A primeira categoria é caracterizada pelo propósito de “desenvolver habilidades de construir e utilizar modelos matemáticos” e a segunda categoria caracteriza-se pelo propósito de “construir modelos para aprender matemática” (GALBRAITH, 2012, p. 5). Segundo Galbraith (2012), essas duas categorias constituem uma dualidade porque a relação entre MM como veículo e como conteúdo tem duas orientações distintas, dependendo de quem é *fim* e quem é o *meio*.

Quando Galbraith (2012) mostra que *estruturas* distintas, compartilhando dos mesmos *propósitos*, podem desembocar em *práticas* muito semelhantes, ele nos apresenta um modo esclarecedor de ver a MM, pois sugere que a *estrutura* da MM pode não determinar a *prática* de MM. Entretanto, quando Galbraith (2012) sugere que as *práticas* podem ser determinadas pelos *propósitos*, ele está assumindo que o sentido dessas práticas pode ser determinado por algo externo a elas, como, por exemplo, objetivos educacionais expressos em currículos de matemática.

Considero essa posição inadequada porque, ainda que o professor possa se perguntar: *como posso desenvolver uma prática de MM a partir da estrutura X ou a partir do propósito Y?* Isto não garante que o sentido dessa prática de MM seja determinado pela estrutura X nem pelo propósito Y. Esse mesmo professor pode, após ter desenvolvido essa prática, se perguntar: *qual é o sentido que a estrutura X e o propósito Y assumiram nessa minha prática de MM?* Essa pergunta pode levar o professor a perceber que sua prática de MM apresentou o sentido X' para a estrutura X e um sentido Y' para o propósito Y. Isto é, os sentidos de X e de Y são constituídos pelo que efetivamente ocorreu na prática de MM. Se é pelo *o que* os estudantes aprendem e pelo *como* essa aprendizagem se dá que se pode explicitar os sentidos da *estrutura X* e do *propósito Y* na prática de MM, então podemos assumir que *aprendizagem* pode é um aspecto estrutural e uma fonte de sentido para a MM. Esse modo de ver a MM é radicalmente diferente daqueles apresentados até aqui, pois ao invés de procurar o *sentido* da minha prática de MM a partir de uma *estrutura* ou de um *propósito*, eu busco compreender a *estrutura* e o *propósito* a partir do *sentido* da minha prática. É deste ponto de visto que busco compreender o que é Modelagem na Educação Matemática e o que é aprendizagem em práticas de MM.

2.2.1 A Aprendizagem Como Estrutura da Modelagem Matemática

O que significa afirmar que a aprendizagem é um aspecto estrutural e fonte de sentido para a MM? Vou abordar essa questão a partir de um relato pessoal. Enquanto escrevo este capítulo, entre uma pausa e outra, busco em *sites* de notícias informações sobre a proposta do Governo Federal de reforma da Previdência Social. Esse tema obviamente é de meu interesse. Mas, não é do meu interesse porque desejo fazer um “trabalho de MM” ou porque pretendo explorá-lo em sala de aula. Ele me interessa porque desejo compreendê-lo, porque a reforma me afeta, porque desejo me posicionar em relação aos argumentos contra e a favor da reforma.

Essa busca me leva a uma reportagem[14] publicada em 18/04/2017 no site G1, portal de notícias da Globo. Leio a reportagem com atenção e interesse. A manchete diz "Governo aumenta previsão de rombo do INSS para R$ 10 trilhões em 2060". Já o *lead* da reportagem diz "Estimativa divulgada na LDO de 2018 prevê que déficit do INSS representará 11,29% do PIB em 2060; em 2018; previsão é de rombo de R$ 202,17 bilhões, ou 2,79% do PIB". O texto da reportagem informa que o Governo Federal mudou a metodologia de cálculo do *rombo* e que usou projeções demográficas e do crescimento do PIB para estimar o *déficit* do INSS para 2060. Uma projeção demográfica, informada na reportagem, diz "Em 2060, para cada pessoa com mais de 60 anos, teremos 1,6 pessoa com idade entre 16 e 59 anos".

Como investigar esse tema? Posso começar, por exemplo, analisando se as projeções demográficas utilizadas pelo Governo são razoáveis ou não. Para isso, posso considerar a taxa de natalidade, de mortalidade, de imigração, de expectativa de vida e, adotando hipóteses adequadas, posso obter, por exemplo, uma série geométrica ou um modelo exponencial e comparar minhas previsões com as projeções informadas na reportagem. Caso fique insatisfeito com os resultados, posso buscar outras informações, considerar outros fatores, estudar outros modelos de crescimento populacional, comparar com outros países, analisar questões correlacionadas ao tema como, por exemplo: (*i*) quais são as implicações das projeções demográficas utilizadas pelo governo para a futura provisão de empregos, habitação, saúde, educação, segurança?; (*ii*) as previsões do crescimento do PIB utilizada pelo Governo são equivocadas?; (*iii*) os dados disponíveis são confiáveis?; (*iv*) a mídia tem sido tendenciosa na divulgação das previsões do Governo?

Estas perguntas sugerem que minha investigação pode não ter fim, que o meu ciclo de MM pode ficar sempre se reiniciando. Se minha investigação pode não ser conclusiva, que sentido tem a afirmação de que a MM é *resolução de problemas do mundo real*? E, se meu "problema" não é efetivamente "resolvido" na MM, por que devo insistir na investigação do meu tema? Minha resposta a esta questão é que toda vez que completo o ciclo de Modelagem, alcanço uma compreensão sobre o tema melhor do que possuía no seu início. E, se reinicio o ciclo de Modelagem é porque busco uma compreensão ainda melhor sobre esse tema. Um *modelo matemático* é, segundo essa resposta, um modo de expressar uma compreensão sobre o

[14] (MARTELLO, 2017)

tema investigado e sua *validação* é a avaliação que faço dessa compreensão e que me leva a reiniciar ou não ciclo de MM.

Se a necessidade de compreensão direciona minha prática de MM, então o que identifico como ciclo de MM pode ser visto como aquilo que foi compreendido nessa prática. De fato, se busco, retrospectivamente, descrever o meu ciclo de MM, é para aquilo que compreendi, é para minhas experiências de aprendizagem, que lanço o meu olhar. Não existe, nesse sentido, ciclo de MM se não houver aprendizagem na MM, pois meu ciclo de MM é *constituído* nas minhas experiências de aprendizagem. Essa relação umbilical entre ciclo de MM e aprendizagem na MM é corroborada em dois trabalhos de pesquisa: no primeiro, Ferri (2006) compara ciclos teóricos de MM com os ciclos empiricamente observados nas práticas de MM dos estudantes e identifica diferenças significativas entre as fases; no segundo, Galbraith e Stillman (2006) desenvolve um quadro teórico (*framework*, em inglês) para identificar bloqueios dos estudantes nas transições dos ciclos teóricos. Esses dois estudos mostram que o ciclo de MM efetivamente realizado pelos estudantes depende do eles aprendem na prática de MM.

É, portanto, no sentido do que expomos até aqui, que a aprendizagem pode ser entendida como um aspecto estrutural e fonte de sentido para a MM. É somente porque a aprendizagem ocorre em práticas de MM que se pode falar em *estrutura*, *ciclo*, *propósito*, *validação*. E, se queremos compreender o sentido que esses termos assumem na MM, precisamos interrogar a aprendizagem na MM. Precisamos entender o que aprendemos em práticas de MM e como essa aprendizagem se dá. A questão acerca de *como* essa aprendizagem se dá é investigada nesta tese de doutorado. Já a questão sobre *o que* aprendemos em práticas de MM encontra na literatura a indicação de pelo menos três tipos distintos de abordagem.

A primeira consiste em reunir diversas evidências para afirmar que, em práticas de MM, aprendemos matemática. As práticas de MM promovem a aprendizagem da matemática, segundo Swan et al (2007), porque requerem o uso de diferentes tipos de representação matemática e estimulam a comunicação com essas representações. Com isso, elas oportunizam a formulação e resolução de questões matemáticas genuínas. Já Halverscheid (2008) afirma que as práticas de MM promovem a aprendizagem da Matemática porque, na sua etapa de *matematização*, ocorrem *ações epistêmicas* que levam à *abstração* e à construção de novos conhecimentos matemáticos.

A segunda abordagem busca indícios que, em práticas de MM, os estudantes aprendem a utilizar a Matemática de forma produtiva para investigar temas de seu interesse. É isso que faz Blum e Ferri (2009) ao responder afirmativamente à questão "*a Modelagem pode ser ensinada e aprendida?*". Muitos pesquisadores entendem que aprender Modelagem significa desenvolver competências de MM. Segundo Maaß (2006), essas competências incluem: (*i*) competências para compreender o problema real e estabelecer um modelo baseado na realidade, (*ii*) competências para configurar um modelo matemático a partir do modelo real, (*iii*) competências para resolver questões matemáticas dentro deste modelo matemático, (*iv*) competências para interpretar resultados matemáticos numa situação real, e (*v*) competências para validar a solução. A aprendizagem dessas competências requer conhecer e controlar seu próprio pensamento em práticas de MM, ou seja, requer, segundo Kaiser e Brand (2015), uma capacidade de *metacognição*.

Por fim, a terceira abordagem defende que, em práticas de MM, os estudantes podem aprender a identificar, interpretar, avaliar e criticar o papel que a Matemática desempenha na sociedade. De fato, segundo Barbosa (2006), "os modelos matemáticos não são descrições neutras sobre uma realidade independente", mas são construídos a partir de interesses, às vezes, ocultos. Como muitas argumentações e decisões sociais ou políticas são realizadas com base em modelos matemáticos, é importante, acredita Barbosa (2006), que os estudantes tenham a oportunidade de discutir a natureza e o papel desses modelos. Essa aprendizagem equivale, portanto, a aquisição de uma *competência crítica* (ALRØ e SKOVSMOSE, 2006) ou o desenvolvimento de uma *materacia* (D'AMBRÓSIO, 1999).

2.2.3 Compreensão Fenomenológica da Aprendizagem na MM

Que sentido assumem *experiência*, *representação* e *pensamento* nas teorias de MM? E, sob uma compreensão fenomenológica da aprendizagem na MM, que sentido esses termos assumem? Responder, de maneira clara e rigorosa, a essas duas perguntas é um trabalho que transcende em muito aos esforços empregados na elaboração deste tópico e, por isso, aqui procuro apenas estabelecer diferença radical entre compreender a aprendizagem na MM sob a luz da fenomenologia e sob o ponto de vista da atitude natural. Mas, em que consiste a radicalidade dessa diferença?

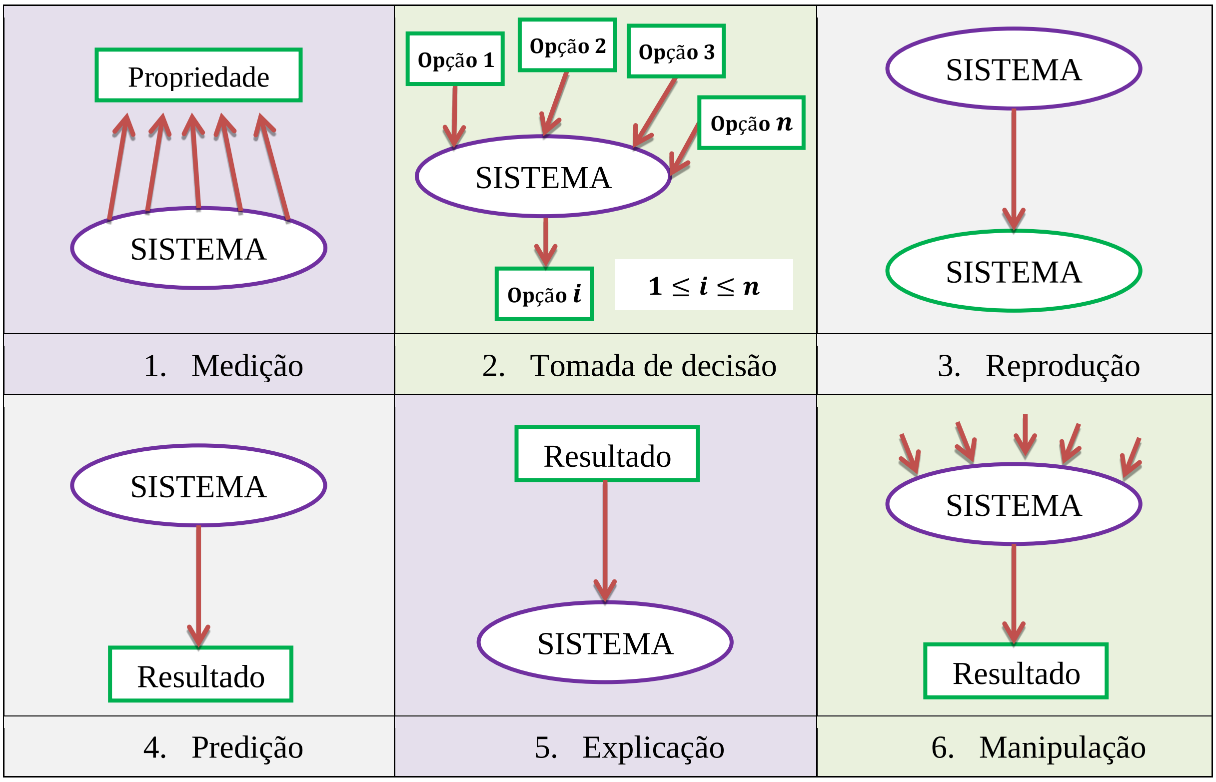
Reside na concepção de realidade em cada atitude. Na atitude fenomenológica, o interesse está dirigido aos modos subjetivos e aos modos de manifestação da experiência que permanecem não temáticos na atitude natural, pois segundo Moura (1989, p.201), "o especificamente fenomenológico se estabelece na correlação entre os vividos e os modos de doação dos objetos, não na correlação entre vivido e objeto". A realidade, sob o ponto de vista fenomenológico, é tomada como realidade percebida e, portanto, não separada de quem a percebe. Já na atitude natural, a atenção é, segundo Moura (1989, p. 202), "dirigida às coisas, abstraindo os modos subjetivos de doação que necessariamente permeiam a experiência das coisas". Em outros termos, a atitude natural exclui a subjetividade que necessariamente permeia a compreensão das coisas e assume, com isso, a separação entre sujeito e objeto.

As teorias para o ciclo de MM, como as ilustradas nas figuras 7 e 8, ao tomarem a Modelagem como *resolução de problemas do mundo real*, sugerem que construir um modelo matemático é construir uma *representação* matemática de algum objeto, aspecto ou recorte da realidade, de modo que a matematizar é tomada como sinônimo de construção de representações. Resolver um problema, neste sentido, significa obter uma resposta para uma questão mediante a manipulação de representações matemáticas. Essas teorias, em suma, pressupõem uma lacuna entre o *ver* e o *visto* e tomam o *visto* como "aquilo mesmo, estável, isto é, a realidade ôntica, sem considerar que o visto já é o enlaçado pela percepção, enlaçado pela rede intersubjetiva daqueles que buscam modelar" (KLÜBER, 2012, p. 379).

Essas teorias veiculam representações de ciclos de MM que são utilizadas, segundo Galbraith (2012), para subsidiar a descrição do processo dinâmico das práticas de MM e como fornecedor de uma "infraestrutura intelectual" formada de andaimes (*scaffolding*, em inglês) para auxiliar na aprendizagem da MM. Essas teorias, portanto, acabam, via representações de ciclo de Modelagem, "formatando" um modo de ver e de compreender a aprendizagem na MM. Considerar que a *matematização* é um processo de *representação* faz com que essas teorias assumam implicitamente a concepção de conhecimento sustentada na dualidade cartesiana entre sujeito e objeto. Essas teorias veiculam, com isso, uma concepção de aprendizagem na MM que confere ao *pensamento* o poder de construir e manipular representações e, por isso, detentor exclusivo da capacidade de produzir significações. Às nossas *experiências*, essas teorias conferem um papel apenas coadjuvante, ou seja, o papel de fornecer ao pensamento sensações e impressões confusas a respeito do mundo.

A crítica à essa concepção de aprendizagem na MM requer um olhar sobre a experiência de construir modelos matemáticos e interrogar, por exemplo, por que construímos modelos matemáticos? Em uma abordagem etnográfica a essa questão, Thompson e Yoon (2007) investigaram a prática de modeladores matemáticos profissionais e concluíram que, em todos os casos, a razão predominante que motiva a construção de um modelo é que as situações investigadas abrigam informações que não são diretamente acessíveis, de modo que a obtenção dessas informações depende da identificação e estudo de um *sistema*. Esse *sistema* é construído em função do tipo de informação que se procura e do modo como se pretende obtê-la. Um modelo matemático é, portanto, um modo de extrair informações de uma situação via *sistema*.

Figura 9: Taxonomia das seis situações que demandam a construção de um modelo matemático



Fonte: (THOMPSON e YOON, 2007)

Thompson e Yoon (2007) identificaram, em seu estudo, seis tipos de informação que se busca extrair de uma situação associados, respectivamente, a seis modos distintos de extrair esses seis tipos de informação (ver figura 9). Os tipos de informação podem ser: (i_1) a medida de alguma propriedade do sistema; (i_2) uma maneira de justificar uma decisão entre várias alternativas para o sistema; (i_3) um "molde" (*templates*, em inglês) que permite fazer uma réplica do sistema; (i_4) uma previsão de algum resultado do sistema; (i_5) uma explicação de algum resultado do sistema, e; (i_6) uma compreensão de como manipular o sistema para que ele produza algum resultado desejado. Já os modos de obter essas informações podem ser: (m_1) a propriedade a ser medida não é diretamente percebida, por isso, essa medida é estimada mediante a construção de um modelo matemático que gera essa propriedade do sistema; (m_2) se existem várias opções e apenas uma deve ser escolhida, um modelo do sistema é criado para avaliar os prós e os contras de cada opção de modo que uma escolha justificada possa ser feita; (m_3) as características essenciais do sistema são traduzidas na forma de "moldes" (*templates*, em inglês) com instruções para a reprodução do sistema; (m_4) o sistema não pode ser percebido diretamente sob condições desejadas, por isso, um modelo matemático é construído para fornecer informações do comportamento do sistema nas condições desejadas; (m_5) algum resultado incomum do sistema é observado, por isso, um modelo do sistema é desenvolvido para explicar como o sistema produziu esse resultado incomum, e; (m_6) modelos são construídos quando queremos saber como manipular o sistema para que ele forneça um resultado desejado.

O que esse estudo de Thompson e Yoon (2007) parece sugerir é que, embora a construção de modelos possa ser feita de várias maneiras, essa construção serve fundamentalmente para extrair uma informação de um sistema e não para representá-lo. De fato, se descrevemos, sem preconceitos, nossas próprias experiências de MM, não identificamos nelas nenhum ato de representação. Vejamos, como exemplo, minha descrição da investigação sobre tema "Reforma da Previdência Social". Para compreender o tema, preciso obter informações que não estão na reportagem e nem disponíveis em outros lugares. O número de habitantes, a expectativa de vida e o valor do PIB que o Brasil terá em 2060 são, por exemplo, informações que preciso saber e que não estão disponíveis. Para obter essas informações, utilizando modelos matemáticos, adoto hipóteses sobre o crescimento populacional, sobre a evolução da expectativa de vida, sobre o crescimento do PIB. Considero, portanto, um *sistema* no qual o comportamento dessas variáveis é previsível, isto é, o valor dessas variáveis para 2060 pode ser calculado utilizando modelos.

Mas, enquanto adoto hipóteses e construo ou utilizo esses modelos matemáticos, não percebo em mim nenhum ato de *representação*. Não parece evidente, portanto, que a *matematização* na MM esteja obrigatoriamente atrelada às *representações*. Assim como o pensamento, no sujeito falante, não é uma representação, pois, como exemplifica Merleau-Ponty (2014), o "orador não pensa antes de falar, nem mesmo enquanto fala; sua fala é o seu pensamento", o meu pensamento, enquanto realizo a *matematização,* também não é uma representação. A *matematização*, enquanto linguagem, já é o meu pensamento e, por isso, *é* o modo pelo qual *reconheço* minhas intenções significativas. Eu só me dou conta do que estou pensando, quando me volto para as minhas *gesticulações linguísticas*, ou seja, para a minha fala, meus gestos corporais, minha escrita, meus registros simbólicos. A *matematização*, portanto, não é uma representação do meu pensamento sobre o mundo, mas é uma operação de *expressão* pela qual apreendo o sentido das minhas gesticulações linguísticas na MM. A *matematização* é uma operação que induz significações fenomênicas sobre o tema investigado. A adoção de hipóteses e a construção de modelos na investigação do tema "Reforma da Previdência Social" induzem à apreensão de significados inéditos desse tema, por exemplo, antevendo o resultado financeiro da Previdência Social em 2060.

Um modelo matemático, no sentido do que expomos, não é um retrato ou representação do "mundo real", mas sim, "um modo linguístico de expressar e tornar objetiva uma compreensão de alguns aspectos postos em destaque no que concerne ao tema que foi investigado" (KLÜBER, 2012, p. 381). Contrapondo-se à visão dualista de MM como *resolução de problemas do mundo real*, a MM, vista sob perspectiva da atitude fenomenológica, pode ser entendida, segundo Klüber (2012), como "um modo de ver o visto com matemática". Compreendendo a *matematização* como uma operação de expressão pela qual apreendo o sentido de meus gestos linguísticos, posso entender a aprendizagem na MM como uma aquisição que se dá pela expressividade das experiências corporais, isto é, pela capacidade dessas experiências de exprimir significações e oferecer ao pensamento uma compreensão acerca do tema investigado.

3 SOBRE OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Como já anunciamos, este trabalho de investigação busca apresentar uma compreensão fenomenológica da aprendizagem da geometria em práticas de MM. A expressão “compreensão fenomenológica” indica que esta investigação é realizada sob a perspectiva da *atitude fenomenológica*. Mas, o que caracteriza uma pesquisa conduzida sob essa perspectiva? E, em que sentido a investigação, relatada neste trabalho, é conduzida sob a perspectiva fenomenológica? Abordar essas duas questões é o objetivo deste capítulo. Para isso, vamos inicialmente apresentar três características que, segundo Giorgi (2014), são imprescindíveis na pesquisa fenomenológica: a redução fenomenológica (*epoché*), a descrição e a busca das essências. Em seguida, discutimos como essas características se desdobram na escolha dos procedimentos metodológicos empregados nesta investigação. Em particular, discutimos o delineamento do cenário da pesquisa de campo para a manifestação do fenômeno e os procedimentos metodológicos utilizados na apresentação e análise dos dados obtidos nessa pesquisa de campo.

3.1 Redução, Descrição e Busca de Essências

Como se conduz uma pesquisa qualitativa segundo a perspectiva da atitude fenomenológica? A pesquisa qualitativa, como lembra Bicudo (2011), trabalha com a qualidade, mas, segundo essa autora, a qualidade que interessa à pesquisa fenomenológica é aquela que se mostra na percepção, é a qualidade percebida no par fenômeno/percebido. Na atitude natural, diz Bicudo (2011), “a qualidade é tomada como já dada e pertinente ao objeto”, é como se a qualidade fosse do objeto e passível de ser observada. Ao assumir a atitude fenomenológica, a pesquisa qualitativa tematiza a atitude natural e descreve os modos de manifestação do par fenômeno/percebido. Segundo a metáfora de Sokolowski (2004, p. 59), “quando entramos na atitude fenomenológica, nós rastejamos para fora da atitude natural, elevamo-nos sobre ela, nós a teorizamos, distinguimos e descrevemos a ambos os correlatos, subjetivos e objetivos, que a compõem”.

Assumir a atitude fenomenológica requer, portanto, um movimento de *redução*: a *atenção* dirigida às características do objeto cede lugar à atenção dirigida aos modos subjetivos de doação desse objeto. Essa neutralização das intenções naturais que ocorre quando contemplamos essas intenções é um tipo de redução fenomenológica chamada de *epoché*[15]. Realizar a *epoché* é o modo pelo qual a realidade é tomada como *fenômeno*. Fenômeno, segundo Bicudo (2011), diz do que se mostra por si mesmo e em si mesmo na percepção ou na intuição. Efetuar, por exemplo, a *epoché* na investigação da aprendizagem implica em tomá-la tal como ela se mostra em nossas experiências e nos limites dessas experiências, deixando entre parênteses os pressupostos ou prejuízos veiculados pelas teorias ou pelo conhecimento do senso comum.

Um exemplo de realização da *epoché* na investigação da aprendizagem é dado por Giorgi (2014, p.392) que diz "minha abordagem consiste em pedir aos sujeitos que me descrevam situações da sua vida cotidiana, nas quais eles tenham experimentado a aprendizagem de alguma coisa". Essas descrições dos sujeitos são analisadas, segundo esse autor, sem levar em conta teorias de aprendizagem ou experiências pessoais de aprendizagem. Segundo Giorgi (2014), tanto as teorias como as experiências pessoais de aprendizagem estão presentes na análise "*enquanto possibilidades*, e não como proposições determinantes", pois a análise utiliza os termos que o próprio sujeito emprega na descrição de sua experiência de aprendizagem e não dos termos fornecidas por uma teoria ou pelas experiências pessoais do pesquisador.

Colocar em *epoché* as teorias e as experiências pessoais e deixar que o fenômeno se mostre em si mesmo e por si mesmo à percepção é um procedimento metodológico que viabiliza a *descrição* do que se mostra à percepção. A *descrição* é o modo de dar conta do que é percebido na percepção. Por isso, a *descrição* é um procedimento privilegiado na pesquisa fenomenológica. De fato, fazer pesquisa fenomenológica consiste, segundo Salanskis (2006), em "descrever, para cada tipo de objeto, portanto para cada região, o gênero de *intencionalidade* que lhe corresponde". Mas, em que consiste a descrição fenomenológica? Segundo Mohanty (1989), "descrever é utilizar a linguagem, de modo articular os objetos intencionais da consciência nos limites das coerções impostas pela evidência intuitiva".

Mas, como descrever a aprendizagem da geometria em práticas de MM? Em vista do que expomos até aqui, essa pergunta requer que retornemos à interrogação de pesquisa. O que diz a interrogação? Diz que o fenômeno investigado é a aprendizagem da geometria em práticas de MM e que entender *como essa aprendizagem se dá* é o que se indaga na

[15] *Epoché* ou *epoqué* é uma palavra de origem grega e significa suspensão.

interrogação. Mas, esse *como*, que a interrogação indaga, não deve ser visto como uma sequência de procedimentos do tipo protocolo. Esse *como* significa *os modos* pelos quais essa aprendizagem se mostra em nossa percepção ou intuição. A interrogação nos conduz, portanto, ao nosso primeiro procedimento metodológico: descrever essa aprendizagem tal como ela se mostra intencionalmente àquele que a interroga. Mas, como ir à aprendizagem *tal como ela se mostra*, como *ir-à-coisa-mesma* dessa aprendizagem e descrevê-la?

As leituras efetuadas acerca do conceito fenomenológico de *expressão*, na obra de Merleau-Ponty, abrem um caminho. Segundo Müller (2001, p.25), *expressão* refere-se à “maneira como as significações emergem em nossas experiências”, isto é, *expressão* diz da íntima vinculação entre a “(*i*) natureza implicativa dos gestos empregados em nossas experiências, (*ii*) e as significações fenomênicas reveladas por tais experiências”. A implicação, nesse caso, significa que, segundo Müller (2001), “quando nossas experiências simbólicas fazem sentido, os gestos que as compõem não formam um conjunto aleatório de movimentos”, mas implicam significações. Isto é, nossas experiências gestuais ou nossas gesticulações linguísticas implicam em significações fenomênicas, de modo que operação envolvida nessa implicação é a de *expressão*. Descrever a expressividade de nossas experiências significa, portanto, descrever como nossas *gesticulações linguísticas* (fala, movimentações corporais, olhares, compreensões intersubjetivas) implicam em significações fenomênicas.

A compreensão da noção de *expressão* abre, portanto, um caminho para entender que toda a aprendizagem humana possui seu primado na percepção, pois corpo-próprio[16] não é apenas um espaço expressivo dentre outros, mas a origem dos demais. Com isso, entendemos que a aprendizagem geométrica se dá como um ato de expressão de nossas experiências corporais, pois, como diz Merleau-Ponty (2014), o “corpo-próprio é condição de possibilidade de toda síntese geométrica”. É a compreensão do sentido de *expressão* que conduz ao entendimento da *matematização* na MM como uma operação que induz significações fenomênicas sobre o tema investigado e pela qual apreendo o sentido de meus gestos linguísticos na MM. A partir deste entendimento, a aprendizagem na MM pode ser vista como uma aquisição que se dá pela expressividade de nossas experiências corporais, pela capacidade dessas experiências de exprimir significações e oferecer ao pensamento uma compreensão acerca do tema investigado.

[16] Corpo-próprio ou corpo encarnado é “entendido como intencionalidade motriz e ponto zero a partir do qual as perspectivas se alinham na visibilidade do que se mostra” (BICUDO, 2010, p.17).

Em vista dessa compreensão do sentido fenomenológico de *expressão*, entendemos que a descrição da aprendizagem geométrica em práticas de MM é a descrição da expressividade das *gesticulações linguísticas* dos estudantes enquanto atuam, falam, gesticulam, comunicam, se movimentam, escrevem, desenham, em práticas de MM. Mas, essas descrição não se limita a registrar modos de expressão, mas busca descrever como essas *gesticulações linguísticas* implicam em significações, de modo que a significação produzida não é descrita separadamente do gesto linguístico que a produziu.

Inspirado no exemplo discutido por Merleau-Ponty (2002), vamos analisar como o jovem Gauss teria aprendido a efetuar a soma dos n primeiros números naturais. Desafiado a obter a soma dos n primeiros números naturais, Gauss, segundo especulação de Merleau-Ponty (2002), teria iniciado o processo de juntar $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Todavia, *olhando* para os registros dessa série, ele *vê* derivar dela os pares de valor constante que irá *contar*, em vez de efetuar a soma. Ele *vê* que a soma dos n primeiros números naturais é formada de $n/2$ somas parciais e que cada uma é igual a $(n + 1)$. Ao se dar conta de que a soma dos n primeiros naturais pode ser obtida, aplicando a fórmula $(n/2)\,(n + 1)$, Gauss apreende um novo sentido esse problema. A apreensão desse sentido inédito resulta do modo como os *gestos linguísticos* foram empregados na resolução do problema.

Portanto, descrever como se dá a apreensão desse sentido requer, nesse caso, que o sentido apreendido não seja tomado separado dos *gestos linguísticos* que o originaram. Mas, requer descrever como esse sentido, apreendido por Gauss, foi produzido pelos gestos linguísticos presentes na fala, na produção dos registros escritos para a série $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, nos *olhares* que buscaram e *viram* aparecer nesses registros os pares de valor constante. Para Merleau-Ponty (2002), nesse caso, já saber o que os números naturais são, saber como registrá-los ou como registrar a série $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ constituem-se em significados já sedimentados ou já *apreendidos*, ou seja, constituem uma *linguagem falada*. Mas, o sentido inédito, produzido a partir dos gestos linguísticos, constitui uma *linguagem falante*. É, portanto, na *linguagem falante* que a aprendizagem se dá ou se expressa. Descrever, enfim, como se dá a aprendizagem da geometria em práticas de MM significa colocar sob o foco como os gestos linguísticos implicam numa *linguagem falante* e, portanto, num sentido inédito para a geometria.

A descrição da aprendizagem da geometria na MM, por si só, ainda não expressa uma compreensão fenomenológica dessa aprendizagem, pois a descrição, na pesquisa fenomenológica, não é um fim em si mesma. A descrição de particularidades, singularidades, contingências, que se mostram na percepção, interessa apenas na medida em que essa descrição revela a *estrutura* do fenômeno investigado. Isto quer dizer que a pesquisa fenomenológica busca "transcender o individualmente relatado na descrição e avançar em direção à sua estrutura, ou seja, do nuclear das vivências sentidas e descritas" (BICUDO, 2011, p.46). Esse movimento é chamado de redução *eidética* ou redução à *essência*. Mas, como sabemos se uma estrutura é a *essência* do fenômeno?

Bicudo (2010) sugere que, diante dessa pergunta, a estrutura encontrada seja submetida ao procedimento de *variação imaginativa*, ou seja, ao "procedimento intencional de imaginar outras maneiras de o núcleo estrutural, constituído ao longo das reduções, poder ser, trabalhando na esfera do 'como se'. Por exemplo, vamos supor que diferentes experiências de aprendizagem em geometria apontam a *visualização* como uma estrutura dessa aprendizagem, ou seja, a aprendizagem geométrica se mostra como *visualização*. Utilizando a variação imaginativa, perguntamos se, sem *visualização*, ainda há aprendizagem geométrica. Se a resposta é afirmativa, então concluímos que a visualização é um invariante desse tipo de aprendizagem.

3.2 Delineando o Cenário de Pesquisa

Onde se manifesta o fenômeno da aprendizagem em práticas de MM? O advérbio *onde*, nesta pergunta, sugere que esse fenômeno se localiza num lugar. Considerar que fenômeno é algo que se dá objetivamente no espaço é um modo de tomá-lo do ponto de vista da atitude natural, pois se afirmamos que fenômeno é o que se mostra à percepção ou à instituição, isto quer dizer que ele não é tomado como um "objeto objetivamente posto e dado no mundo exterior ao sujeito e que pode ser observado, manipulado, experimentado, medido, contado por um sujeito observador" (BICUDO, 2011, 30). Fenômeno é o que se mostra *em um ato* de percepção ou intuição efetuado por um sujeito individualmente contextualizado. O advérbio *onde* remete, portanto, não a um lugar, mas a um ato de um indivíduo situado num contexto.

Desse ponto de vista, a construção do cenário de pesquisa para a manifestação da aprendizagem da geometria em práticas de MM requer o delineamento de condições contextuais que viabilizam a percepção dessa aprendizagem. Os elementos contextuais referem-se às práticas de MM. Os sujeitos individualmente contextualizados são os estudantes e o professor/pesquisador. O fenômeno percebido é a aprendizagem que se mostra a esses sujeitos quando olham para essas práticas de MM.

Com o propósito de delinear o cenário da pesquisa para a manifestação da aprendizagem da geometria em práticas de MM, optamos em trabalhar com duas turmas do Ensino Fundamental, pois nesse nível de ensino o número de aulas de Matemática, 5 por semana, é maior que no Ensino Médio. Além disso, os conteúdos de geometria previstos no currículo do Ensino Fundamental possibilitam organizar/planejar práticas MM envolvendo temas bem variados. Por fim, nos anos finais do Ensino Fundamental tradicionalmente o trabalho com a álgebra dos polinômios assume considerável período tempo e exige grande esforço dos estudantes nas aulas de Matemática. A geometria desses anos finais, por sua vez, costuma ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A geometria se torna, portanto, um pretexto para exercícios de álgebra.

Em razão desses motivos, optamos em desenvolver três práticas de MM com duas turmas de estudantes no 7º e no 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola[17] pública da cidade de Londrina. Essas duas turmas tinham, em média, 30 estudantes cada. As duas primeiras práticas foram desenvolvidas em 2016, quando essas turmas estavam no 7º ano, e a terceira prática foi desenvolvida, em 2017, com essas mesmas duas turmas, quando já estavam no 8º ano. Na elaboração dessas práticas buscou-se dar destaque a temas e conteúdos de geometria que se mostram importantes e motivadores para os desdobramentos de compreensões e trocas intersubjetivas entre os estudantes.

Desse modo, buscamos estruturar práticas de MM de modo que as manifestações do fenômeno investigado pudessem ser descritas e compreendidas. Para isso, buscamos organizar um cenário em que estudantes e professor-pesquisador pudessem realizar procedimentos de investigação sobre temas de MM e, com isso, suas compreensões sobre esses temas possam ser expressas, empregando, além do modo linguístico fornecido pelos entes geométricos, outros modos de expressão como, por exemplo, gestos, fisionomias, compreensões intersubjetivas, movimentações corporais, olhares. Essas três práticas de MM possuem características distintas, tanto no que se refere ao conteúdo geométrico quanto ao tipo de soluções possíveis e encaminhamento da investigação do tema junto com os alunos. A seguir,

[17] Colégio Estadual Professora Adélia Dionísia Barbosa, situado na região norte da cidade de Londrina.

vamos fazer uma apresentação de cada uma dessas três práticas, enfatizando os aspectos conceituais e didáticos que as caracterizam como práticas de MM e que contribuem para viabilizar a aprendizagem da geometria.

3.2.1 Prática 1: Por que a Latinha de Refrigerante Fica em Equilíbrio?

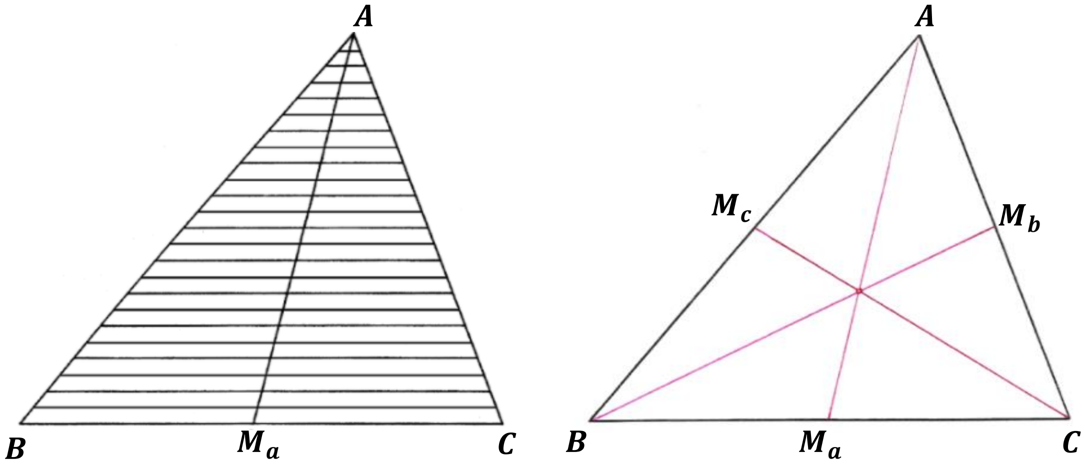
O tema dessa prática é a investigação de estruturas inclinadas nas construções e na arquitetura. Essa prática foi inspirada num experimento didático de MM sugerido por Alsina (2005) e discutido mais detalhadamente por Mason (2001). Esse experimento consiste em investigar por que uma lata de refrigerante fica em equilíbrio, apoiada sobre sua borda numa superfície horizontal, quando seu conteúdo líquido está situado num intervalo de, aproximadamente, $50\,ml$ e $200\,ml$. A exploração desse experimento visa investigar com os estudantes as condições de equilíbrio de estruturas inclinadas, empregando, para isto, o conceito de centro geométrico.

Os conceitos de centro geométrico, centro de gravidade e centro de massas são importantíssimos em muitas das aplicações da matemática e particularmente no estudo das condições de equilíbrio das chamadas *estruturas inclinadas* da arquitetura. Segundo Alsina (2005), a "arquitetura é baseada essencialmente na verticalidade", mas existem "casos de patologias construtivas onde aparecem inclinações" como, por exemplo, a Torre de Pisa e as coberturas de casas em países chuvosos ou com neve cujo ângulo de inclinação varia conforme o clima da região. As condições de equilíbrio das estruturas inclinadas em arquitetura são, segundo Alsina (2005), uma fonte inesgotável de problemas de MM e um tema potencialmente interessante para ser investigado nas aulas de matemática.

Mas, como os conceitos de centro geométrico, centro de gravidade, centro de massas e condições de equilíbrio aparecem na investigação desse tema? Para responder a esta questão, precisamos entender melhor o significado de cada um desses conceitos. Vamos começar com o conceito de centro geométrico. *Centro geométrico* ou *centroide* é um ponto associado a uma forma geométrica. Intuitivamente, centro geométrico pode ser pensado como um ponto de simetria de uma forma geométrica. Por exemplo, centro de um retângulo obtido no encontro de suas duas diagonais. Pode-se demonstrar que toda reta que passa pelo centro do retângulo, divide esse retângulo em duas partes de áreas iguais. Essa propriedade é a característica fundamental do centro geométrico ou centroide de qualquer figura plana, podendo ser tomada como sua definição. Assim, para toda região plana $\mathfrak{R}$, diz que se ponto C é o centro geométrico ou centróide de $\mathfrak{R}$, se qualquer que seja a reta l que passa por C divide $\mathfrak{R}$ em duas regiões de mesma área.

Uma consequência direta dessa definição é que para figuras muito simétricas, como quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e círculos, o centroide corresponde ao centro de simetria dado pela intersecção das diagonais, no caso dos quadriláteros notáveis, ou dos diâmetros, no caso dos círculos. Porém, para figuras sem simetrias é preciso recorrer ao uso do Cálculo Infinitesimal e, em particular, da noção de limite. Por exemplo, para encontrar o centroide de um triângulo ABC qualquer podemos imaginá-lo dividido em tiras muito finas, conforme ilustra a figura 10. Sendo cada tira muito estreita, podemos pensá-las como retângulos, de modo que seus centroides estejam alinhados sobre a mediana AM_a, indicada na figura 10. Desse modo, o centroide do triângulo estará sobre essa mediana. Repetindo esse mesmo raciocínio para as outras medianas BM_b e CM_c, concluímos que o centróide do triângulo ABC está localizado no ponto de intersecção das suas três medianas.

Figura 10: Triângulo decomposto em retângulos muito estreitos.

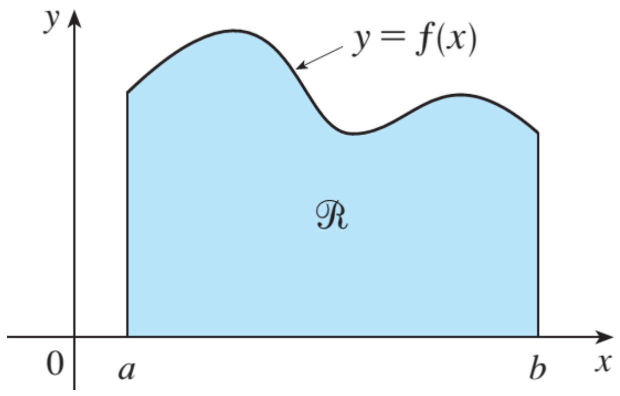


Fonte: O próprio autor

A despeito da simplicidade desse caso, a obtenção do centro geométrico de uma região plana qualquer não apresenta uma regra geral e, por isso, costuma ser uma tarefa trabalhosa que exige analisar caso a caso. Por exemplo, para uma região plana $\mathfrak{R}$, do tipo mostrada na figura 11, limitada entre as retas $x = a$ e $x = b$, acima do eixo x e abaixo do gráfico da função f, em que f é uma função contínua, o centroide pode ser obtido utilizando Cálculo Integral. Vamos omitir aqui os detalhes desse procedimento, mas esses detalhes podem ser consultados em Stewart (2010) que demonstra que, se o centroide ou centro geométrico de

$\mathfrak{R}$ está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, então:

Figura 11: Região plana limitada por uma função f



$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x f(x)dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx$$

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Fonte: (STEWART, 2010)

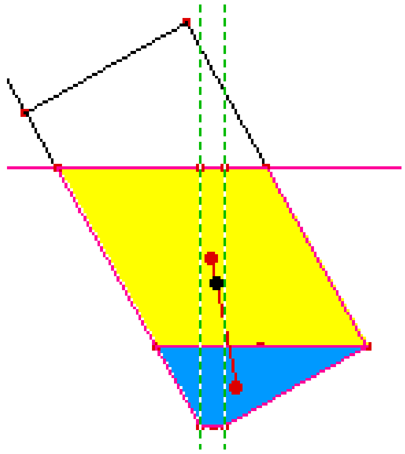
O centro geométrico é, sob determinadas condições, um modelo matemático para o centro de gravidade e para o centro de massas dos corpos. Essas condições determinadas correspondem às hipóteses simplificadoras da realidade em uma modelagem matemática. Por exemplo, para que o centro geométrico seja uma aproximação adequada do centro de massa de um objeto é necessário supor que a massa desse objeto esteja uniformemente distribuída, ou seja, sua densidade seja uniforme, homogênea. E, para que o centro geométrico seja uma aproximação adequada do centro de gravidade de um objeto é preciso supor que, além da densidade uniforme, esse objeto esteja submetido a um campo gravitacional constante. Essas condições mostram que centro geométrico, centro de massa e centro de gravidade são conceitos distintos, coincidindo apenas em situações nas quais todas as condições apontadas aqui sejam atendidas.

Vamos tentar aqui esclarecer melhor essa distinção. Centro geométrico, como já dissemos, é um ponto da figura que satisfaz a uma condição de simetria em relação à sua área, no caso das figuras planas, ou em relação ao seu volume, no caso das figuras espaciais. O centro de massas de um objeto, por sua vez, é o ponto que indica uma posição média de toda a massa que constitui esse objeto. Portanto, um objeto possui centro de massa mesmo que não esteja submetido a um campo de gravidade. Finalmente, o centro de gravidade pode ser definido como o ponto no objeto tal que se esse objeto for apoiado por este ponto e solto do repouso, vai permanecer em equilíbrio em relação à Terra. É possível, portanto, existir objetos cujos centros geométrico, de massa e de gravidade não coincidam.

Um exemplo interessante que ilustra bem a distinção entre esses três conceitos é dado por uma forma triangular recortada de uma folha de cartolina. Sabemos que seu centro de gravidade é dado pelo seu baricentro, ou seja, pelo encontro de suas medianas. Mas, nem toda reta que passa pelo baricentro divide o triângulo em duas partes com áreas iguais, ou seja, o baricentro não corresponde ao centro geométrico do triângulo. Mais impressionante ainda é que nenhum ponto do triângulo satisfaz a essa propriedade, ou seja, o triângulo não possui centro geométrico. Os detalhes da demonstração desses resultados serão aqui omitidos, mas podem ser consultados em (ASSIS, 2008).

Feitas estas considerações, voltemos à nossa questão inicial: como esses conceitos são empregados para explicar por que a lata de refrigerante fica em equilíbrio, apoiada sobre sua borda, somente quando a quantidade de seu conteúdo líquido se situa numa determinada faixa de valores? Obviamente que a resposta está relacionada com a localização do seu centro de gravidade nessa faixa. A condição de equilíbrio da lata, assim como de qualquer estrutura inclinada, é que a linha vertical que passa pelo seu centro de gravidade, passe também pela borda sobre a qual a lata está apoiada. O problema aqui consiste em mostrar que, nessa faixa, o centro de gravidade de lata está efetivamente na mesma direção vertical da borda da lata, conforme ilustra a figura 12.

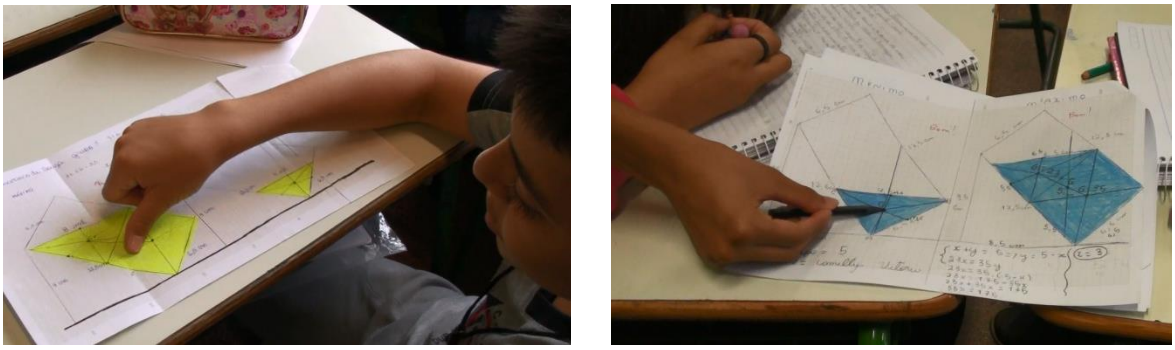
Figura 12: Corte vertical e centros geométricos nas quantidades máxima e mínima de líquido.



Fonte: (MASON, 2001)

Resolver esse problema exige, portanto, determinar o centro de gravidade da lata nas quantidades máximas e mínimas em que ela fica em equilíbrio. Sabemos que quando a lata está totalmente cheia ou totalmente vazia, o seu centro de gravidade pode ser aproximado pelo seu centro geométrico. Porém, quando retiramos líquido da lata cheia ou quando colocamos líquido na lata vazia, seu centro de gravidade *desce*, ficando abaixo do seu centro geométrico, até atingir uma altura mínima quando então volta a subir. A complexidade envolvida nesse *deslocamento* do centro de gravidade da lata exige simplificações e a construção de um modelo que simule essa situação. Supondo-se que a lata possa ser aproximada por um cilindro reto de base quadrada, isto é, supondo-se que podemos ignorar a circularidade da lata e a concavidade de sua base, um modelo que possibilita a simulação desse *deslocamento* do centro de gravidade pode ser dado pela figura do corte vertical do cilindro de base quadrada.

Figura 13: Construções representando as quantidades máxima e mínima e líquido



Fonte: O próprio autor

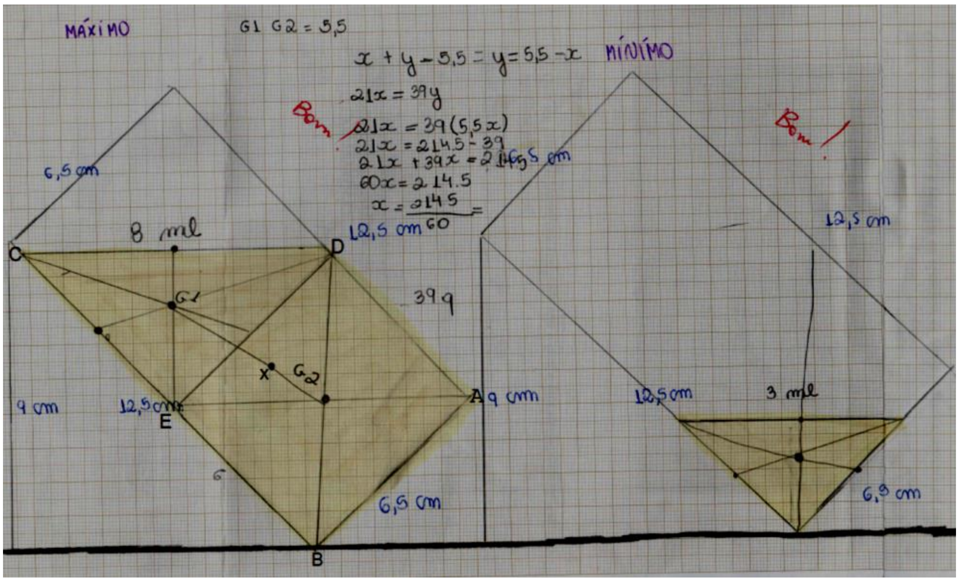
Efetuando as medidas da lata, do ângulo de inclinação e da altura da água é possível construir uma representação bidimensional do corte vertical da lata que possibilita uma aproximação do seu centro de gravidade nas quantidades máximas e mínimas de líquido em que ela fica em equilíbrio. Essa aproximação pode ser dada pelo centro geométrico da parte da figura com líquido, ou seja, ignorando-se a parte vazia da lata. Assim, na quantidade mínima, a parte com líquido é representada por um triângulo, cujo centro de gravidade, como já vimos pode ser obtida pelo seu baricentro.

Na quantidade máxima, a parte com líquido é dada por um trapézio retângulo, cujo centro de gravidade pode ser obtido decompondo-se o trapézio em um retângulo e um triângulo, nos quais é construído o centro de gravidade de cada um, separadamente. Em seguida, traça-se um segmento que une esses dois centros de gravidade. O centro de gravidade do trapézio será o ponto que divide esse segmento de forma proporcional à área do triângulo e do retângulo que o compõe. Consequentemente, o centro de gravidade do trapézio é um ponto deslocado em relação ao ponto médio do segmento, em direção à parte de maior área, ou seja, o retângulo. Vamos exemplificar esse procedimento utilizando os registros escritos e gráficos de um dos estudantes, conforme ilustra na figura 14.

Neste caso, a parte ocupada pelo líquido tem a forma de um trapézio retângulo

$ABCD$, retângulo em A e B. Este trapézio pode ser decomposto, formando o retângulo $ABED$ e o triângulo CDE. Construindo as medianas do triângulo CDE e as diagonais do retângulo $ABED$, obtemos, respectivamente, os centros geométricos G_1 e G_2 dessas figuras. É possível demonstrar que o centro geométrico do trapézio ABCD, indicado por X, pertence ao segmento G_1G_2, dividindo em dois de modo que $\overline{XG_2} \cdot \acute{a}rea\ (ABED) = \overline{XG_1} \cdot \acute{a}rea\ (CDE)$. Sabendo que o valor de $\overline{G_1G_2} = \overline{XG_2} + \overline{XG_1}$ pode ser obtido com o uso de uma régua e que $\acute{a}rea\ (ABED)$ e $\acute{a}rea\ (CDE)$ podem ser calculadas diretamente a partir das figuras, então utilizando $\overline{XG_2} \cdot \acute{a}rea\ (ABED) = \overline{XG_1} \cdot \acute{a}rea\ (CDE)$, podemos calcular $\overline{XG_1}$ e $\overline{XG_2}$ e, com isso, determinar a localização de X.

Figura 14: Construção efetuada para obter o centro geométrico na quantidade máxima de líquido



Fonte: O próprio autor

Uma interpretação da construção dessa *aproximação* do centro de gravidade pelo centro geométrico da parte com líquido da lata é que, se a linha vertical que passa por esse centro geométrico passar também pela borda sobre a qual a lata está apoiada, então ela permanece em equilíbrio. Noutras palavras, as retas verticais que passam pelos centros geométricos, nas quantidades máximas e mínimas em que a lata fica em equilíbrio, passam também pela extremidade do segmento que representa a borda sobre a qual a lata está apoiada.

Com relação ao encaminhamento didático, essa prática iniciou-se com considerações gerais, feitas pelo professor-pesquisador, sobre a presença de estruturas inclinadas na arquitetura, na natureza e na indústria, e, em seguida, os estudantes foram organizados em grupos de 4 a 6 membros, recebendo cada grupo uma folha de papel A4 pautada com o enunciado do quadro da figura 15 e espaço para escrever suas conclusões. Cada grupo recebeu também uma lata com refrigerante, uma proveta graduada e uma régua para efetuarem as medidas. As questões levantadas com os estudantes para serem investigadas foram as seguintes: (*i*) Quais são as quantidades, máxima e mínima, de líquido com as quais a lata permanece em equilíbrio, apoiada sobre sua borda? e (*ii*) Por que somente nessa faixa de valores, entre a quantidade mínima e máxima, a lata permanece em equilíbrio?

Figura 15: Quadro com enunciado da prática de MM

Se você abrir uma lata de refrigerante e for bebendo aos pouquinhos, chegará um momento em que a lata ficará em equilíbrio, de forma inclinada e apoiada em sua borda, podendo girar em torno do ângulo de inclinação.

Fonte: O próprio autor

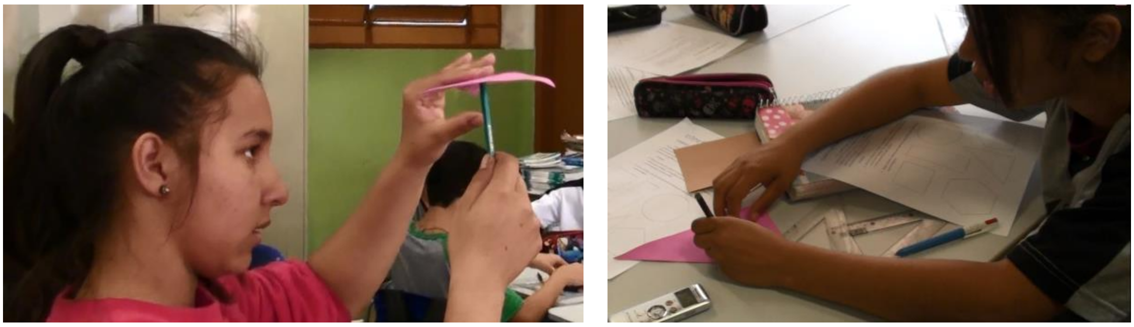
Diante dessa proposta, os estudantes realizaram a identificação e exploração “ingênua” do problema mediante a observação, experimentação e descrição informal do equilíbrio da lata. Efetuaram também as medidas para responder à questão (*i*) e elaborada uma explicação para responder à questão (*ii*). Essas atividades duraram cerca de duas aulas de 50 minutos cada e estão expressas nas imagens da figura 16. Em seguida, os estudantes foram convidados a fazer simplificações e a construção de um modelo que simulasse uma lata inclinada em equilíbrio. Utilizando as medidas já obtidas os estudantes construíram uma representação plana do corte vertical da lata inclinada. Essas atividades, por sua vez, duraram cerca de 1 aula de 50 minutos cada e estão expressas nas imagens da figura 16.

Figura 16: (esquerda) medições da lata e (direita) construção da representação do corte vertical

Fonte: O próprio autor

Seguiu-se a essas atividades, a atividade de matematização, ou seja, a investigação de métodos experimentais e analíticos para a obtenção do centro geométrico e centro de gravidade de triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, círculos e trapézios recortados de papel cartolina. O método experimental, neste caso, consistiu em obter o centro de gravidade com um *fio de prumo*, ou seja, um barbante, amarrado numa ponta com um peso, determina a direção vertical da força gravitacional. Escolhendo alguns pontos próximos da extremidade das figuras, os estudantes usaram o *fio de prumo* para determinar eixos que se cruzam no centro de gravidade. Essas atividades foram realizadas em uma aula de 50 minutos e estão expressas nas imagens da figura 17.

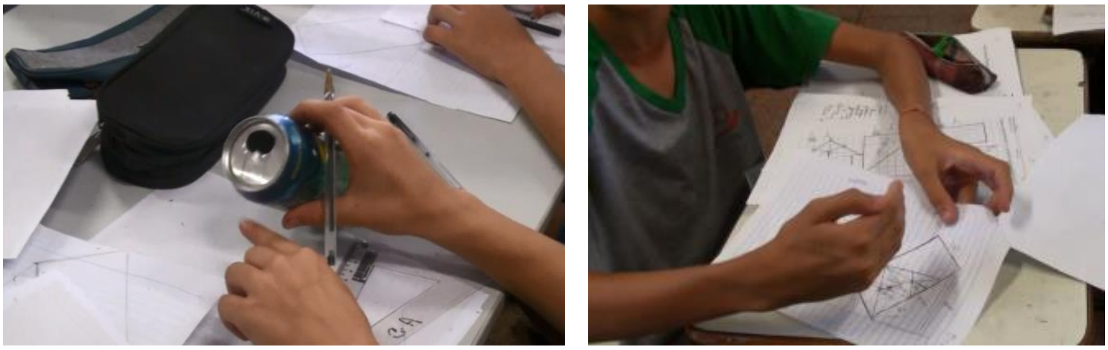
Figura 17: Obtenção experimental do centro geométrico de figuras



Fonte: O próprio autor

Depois disso, os estudantes foram convidados a discutir a resolução do problema propriamente dito. Isto ocorreu com a construção dos centros de gravidade da parte com líquido do corte transversal da lata inclinada, nas quantidades máxima e mínima, e a verificação de que a vertical que passa por esses pontos passa na extremidade do segmento que representa a borda sobre a qual a lata está apoiada. Essas atividades duraram uma aula de 50 minutos e estão expressas nas imagens da figura 18. Finalmente, a interpretação da solução ocorreu com a elaboração e apresentação de uma explicação do porquê a lata fica em equilíbrio somente numa faixa de quantidades de líquido e uma avaliação de como as construções geométricas elaboradas foram coerentes com essa explicação. Essa atividade durou também 1 aula de 50 minutos e está expressa nas imagens da figura 18.

Figura 18: Obtenção do centroide da figura (esquerda) e explicação do equilíbrio da lata (direita)



Fonte: O próprio autor

3.2.2 Prática 2: Que Tipo de Amarração de Calçados é Mais Adequado Para Você?

O tema dessa prática MM busca explorar, com os estudantes, métodos geométricos de otimização utilizados no estudo dos percursos de comprimento mínimo. Para explorar esse assunto, propomos aos estudantes a investigação das diferentes técnicas de amarração do cadarço do tênis e dos efeitos que tipo de amarração tem para a segurança, sustentação e conforto no uso dos calçados. Essa prática iniciou-se com os estudantes lendo e discutindo dois pequenos textos (ver Apêndices) de fisioterapia esportiva que ilustram como as diferentes técnicas de amarração permitem harmonizar o calçado com as características específicas do pé, como o calcanhar estreito, pé largo, arco baixo ou alto.

Com essa investigação, os estudantes podem construir simulações de percursos, utilizando uma malha pontilhada, e empregar o método das *transformações geométricas* para analisar o comprimento os percursos de cada tipo de amarração. O termo otimização costuma ser empregado em matemática para referir-se a métodos de determinação de valores extremos que uma função pode assumir num certo intervalo. Otimização geométrica, nesse sentido, diz da determinação de valores extremos de alguma grandeza geométrica, tais como comprimento, perímetro, área, volume e ângulo. Métodos de otimização, abordados nos cursos de Ensino Superior empregam usualmente cálculo diferencial, programação linear ou outros métodos algébricos que não estão são ensinados nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. Em geometria, porém, muitos problemas de otimização podem ser resolvidos empregando o chamado método das *transformações geométricas*. Trata-se de empregar as transformações de simetria (axial e rotacional), reflexão, rotação, dilatações, dentre outras, para levar uma figura a uma situação mais simples de se lidar e, com isso, determinar o valor extremo procurado.

Mas, em que consiste exatamente esse método das *transformações geométricas*? Antes de mostrar como esse método pode ser empregado na otimização de percursos, vamos exemplificar sua aplicação com o chamado Problema de Heron, ilustrado na figura 19. Este problema pode ser assim enunciado: *sejam dados, num mesmo plano, uma reta l e dois pontos A e B no mesmo lado de l. Ache um ponto X sobre l de tal forma que a soma $AX + BX$ seja mínima*. A solução desse problema consiste obter o percurso mais curto para ir de A até B, passando por um ponto X de l.Vamos apresentar a seguinte solução envolvendo a transformação de reflexão: seja B' a imagem refletida de B, em relação a l. Como consequência das propriedades da simetria, tem-se $XB = XB'$ para todo X em l. Assim,

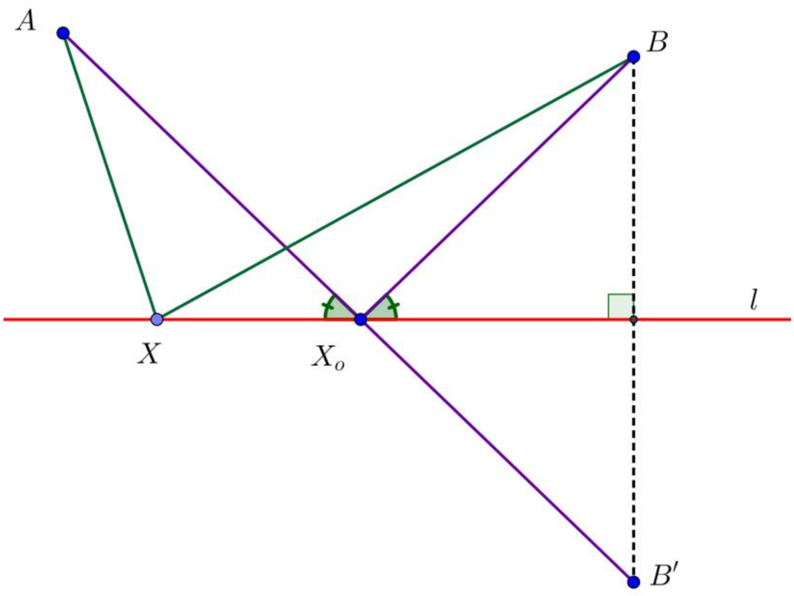
$$AX + XB = AX + XB' \geq AB'$$

A igualdade, nesta expressão, ocorre precisamente quando X é o ponto de interseção X_o de l com o segmento AB'. Assim, para todo ponto X em l, diferente de X_o, tem-se que

$$AX + XB \geq AB' = AX_o + X_oB$$

Esta última expressão mostra que X_o é o único ponto de $l$com essa propriedade, sendo, portanto, a única solução do problema. Outra propriedade importante de X_o, cuja demonstração omitiremos aqui, é que os ângulos formados pelos segmentos AX_o e X_oB com a reta l têm medidas iguais. Finalmente, vale observar que, além da transformação de reflexão, utilizamos nesse argumento a chamada *desigualdade triangular* quando afirmamos que para todo para todo X em l temos $AX + XB' \geq AB'$. *Desigualdade triangular* expressa a propriedade que a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo sempre excede o comprimento do terceiro lado, a menos que os três lados estejam alinhados. Esta propriedade é fundamental em muitos problemas de otimização geométrica e será necessária para a compreensão de algumas Cenas Significativas desta prática.

Figura 19: Construção da solução do problema de Heron

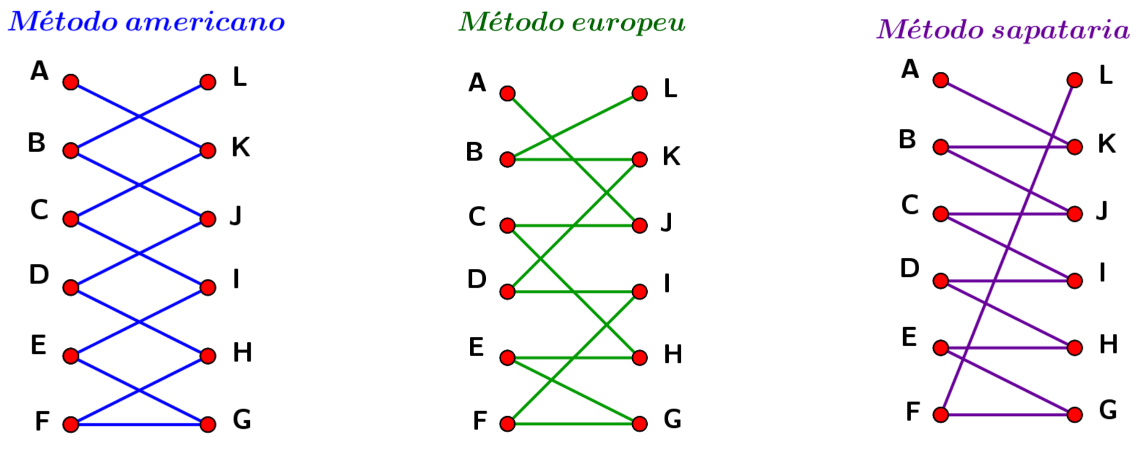


Fonte: O próprio autor

Como o método das transformações geométricas pode serem pregado na investigação dos percursos mínimos das amarrações de cadarços? Primeiro, o problema de determinar um método de amarração que "economiza" mais cadarço é um caso particular do problema clássico do *caixeiro viajante* que consiste em determinar uma rede viária que lhe permite visitar todas as cidades de uma região, voltando à sua casa sem passar duas vezes pela mesma cidade. De modo análogo, no problema do cadarço, a solução consiste em determinar um percurso de comprimento mínimo em que o fio do cadarço, começando do primeiro furo de um lado do calçado, deve percorrer todos os outros furos uma única vez, saindo no primeiro furo do outro lado do calçado. Sob determinadas hipóteses de simplificação, a solução deste problema consiste na otimização de percursos construídos com segmentos retos sobre uma malha pontilhada.

Uma abordagem geral desse tipo de problema pode ser, evidentemente, bastante trabalhosa e ir muito além do objetivo do trabalho realizado com meus alunos do Ensino Fundamental. Por isso, optamos aqui em analisar casos particulares mais simples, adotando com os estudantes, hipóteses que simplificam bastante o tema. Nossas hipóteses simplificadoras consistem em considerar apenas os três tipos de amarrações de cadarço expressos nos esquemas da figura 20, chamados de método americano, europeu e sapataria, supor que esses métodos se referem ao mesmo calçado de seis furos, os quais estão distribuídos com igual distância em duas linhas paralelas verticais. Assim, determinar qual das três amarrações gasta menos cadarço, significa explicar qual faz o menor percurso par ir de A até L, passando uma única vez por todos os outros furos?

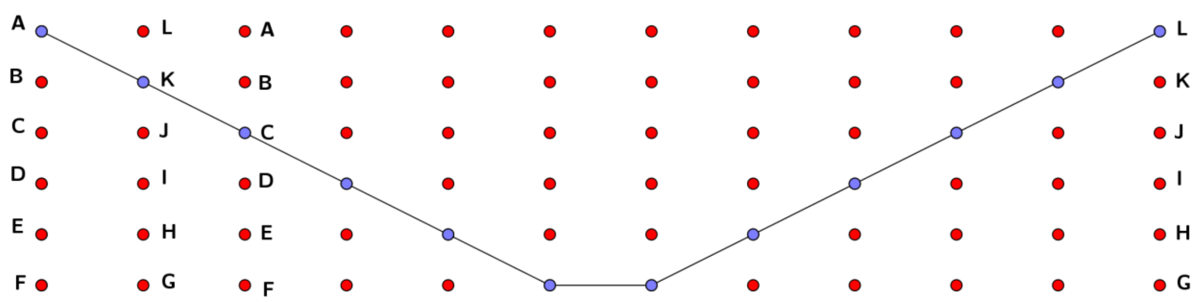
Figura 20: Representação dos três métodos de amarração de cadarços



Fonte: O próprio autor

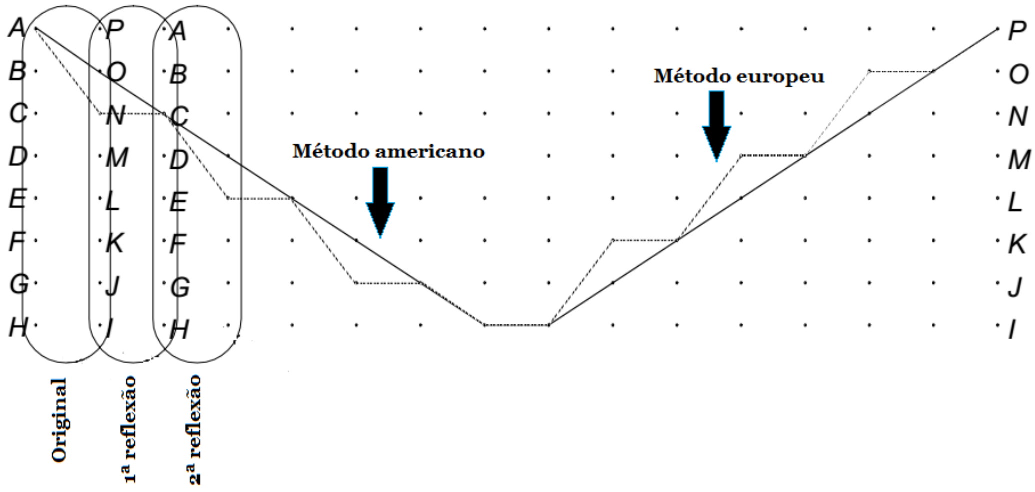
Uma solução para esse problema, empregando o método das transformações geométricas, consiste em refletir a amarração do cadarço numa malha pontilhada. Se o calçado possui n pares de furos, então a malha terá n linhas horizontais e $2n$ linhas verticais de pontos que representam os orifícios do calçado por onde passa o cadarço. A distância entre as linhas verticais representa distância entre os pares de furos do calçado e a distância entre as linhas horizontais representa a distância entre os furos de um mesmo lado do calçado. As duas primeiras linhas verticais correspondem ao percurso original do cadarço na amarração. A segunda e a terceira linha vertical correspondem à primeira reflexão, a terceira e a quarta linha vertical correspondem, por sua vez, à segunda reflexão e assim por diante, como ilustra a figura 21, para o caso de um calçado com seis pares furos.

Figura 21: Reflexão do método americano numa malha pontilhada



Fonte: O próprio autor

Figura 22: Comparação das reflexões dos métodos americano e europeu

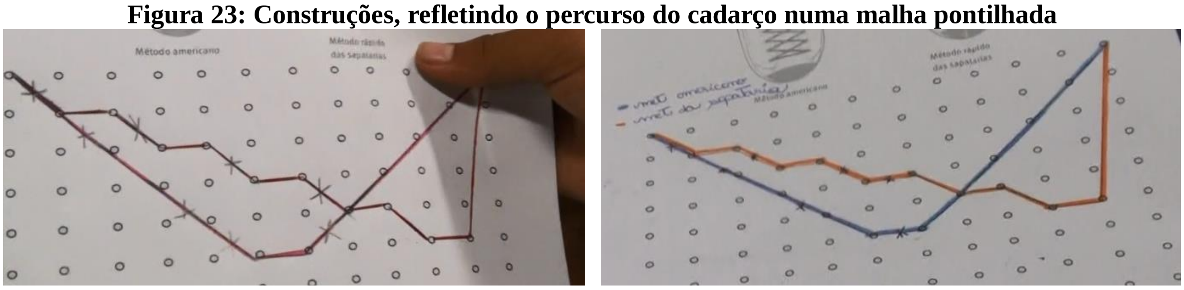


Fonte: O próprio autor

Usando esse diagrama, podemos comparar os métodos americano e europeu. É possível ver, nesse diagrama, que em algumas reflexões, as duas amarrações coincidem, em outras não. Analisando as reflexões onde os traçados não são coincidentes, podemos observar que o percurso do método americano é um dos lados de um triângulo e que o percurso do método europeu são os outros dois. Empregando a chamada *desigualdade triangular*, podemos concluir que o percurso do padrão americano é sempre menor que o padrão europeu quando nas reflexões em que essas amarrações não coincidem e, por isso, concluímos que o método europeu sempre gasta mais cadarço do que o método americano. Embora essa conclusão não dependa da quantidade n de pares de furos e nem das distâncias entre os furos, ela depende de uma característica particular do traçado dos percuros: a formação de triângulos onde os segmentos não coincidem. Assim, comparar diversos tipos de amarrações, principalmente, onde uma observação direta dos percursos traçados pouco ajuda exige a elaboração de uma solução mais geral para o problema.

Um exemplo de solução mais geral desse problema consiste em eliminar os segmentos com o mesmo comprimento nos dois percursos, já que eles contribuem com o mesmo comprimento nos dois, e reorganizar os segmentos restantes na forma de um triângulo e, empregando a *desigualdade triangular*, analisar a relação entre os comprimentos dos dois percursos. Vamos exemplificar essa solução mais geral com a comparação entre os métodos americano e sapataria mostrados na figura 22. Observe na figura 22 que, para calçados com oito pares de furos, a reflexão dos métodos americano e sapataria na malha pontilhada forma dois percursos com seis segmentos de mesmo comprimento: um horizontal e cinco inclinados. Eliminando-se esses seis segmentos sobram cinco segmentos inclinados para o padrão americano e quatro segmentos horizontais e um diagonal grande no padrão sapataria conforme mostra a figura 23.

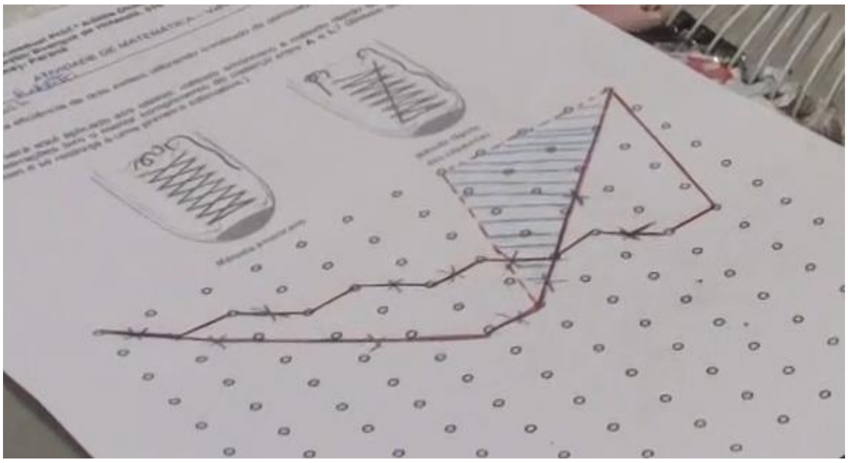
Figura 23: Construções, refletindo o percurso do cadarço numa malha pontilhada



Fonte: O próprio autor

Efetuando translações é possível agrupar os cinco segmentos do método americano para formar um único segmento, agrupar os quatro segmentos horizontais do método sapataria também num único segmento e, transladando a diagonal que sobrou deste método, formar um triângulo de modo que um lado corresponda ao método americano e os outros dois lados correspondam ao método sapataria. Empregando a *desigualdade triangular*, concluímos, portanto, que o método sapataria gasta mais cadarço do que o método americano.

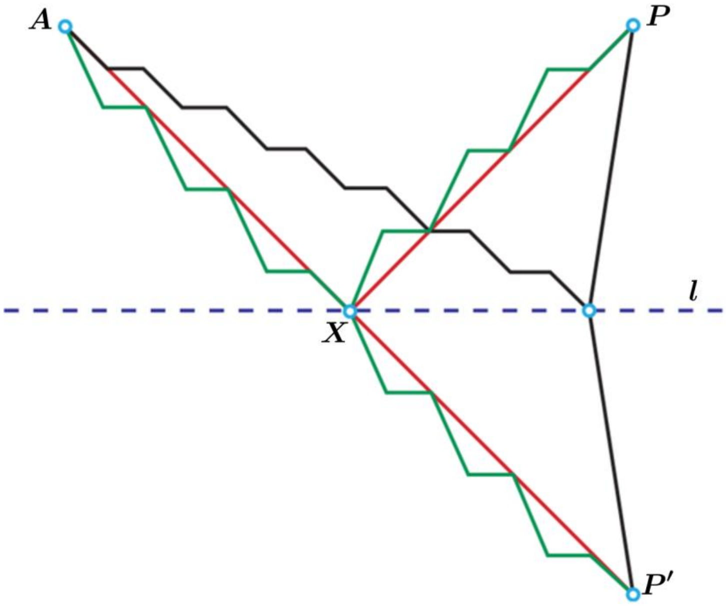
Figura 24: Construção, comparando os métodos americano e sapataria rápida



Fonte: O próprio autor

Outro exemplo de solução mais geral do problema consiste em eliminar os segmentos de mesmo comprimento e refletir os percursos formados com os segmentos restantes em relação a um mesmo eixo, como mostra a figura 25. Decidir qual amarração economiza mais cadarço significa determinar o percurso mais curto para ir de A até P, passando pelo eixo de reflexão. Empregando o *Problema de Heron*, discutido anteriormente, concluímos que o método americano é o que gasta menos cadarços dos três métodos apresentados.

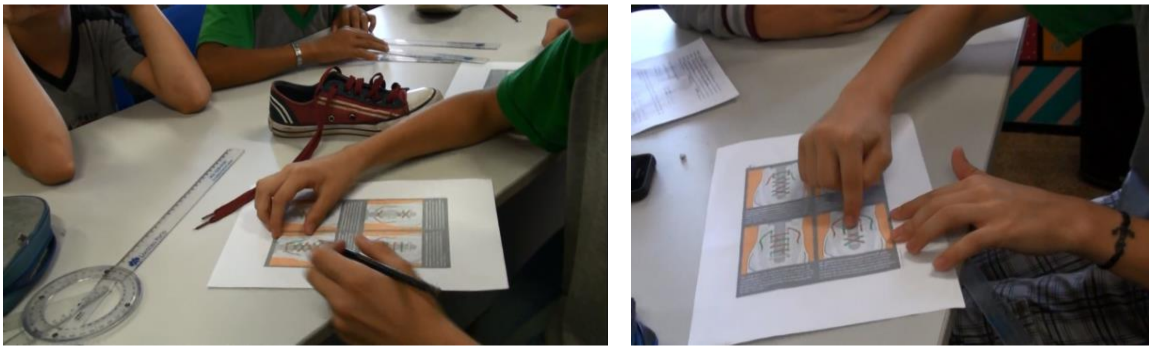
Figura 25: Reflexão dos métodos americano, sapataria e europeu em relação a reta l



Fonte: O próprio autor

Feitas essas considerações, vamos agora discutir o encaminhamento didático dessa prática de MM. Com relação ao encaminhamento didático, iniciamos a prática com o professor propondo aos estudantes para estudar as diferentes técnicas de amarração de cadarços. Neste primeiro momento os estudantes foram organizados em grupos para efetuarem a leitura dos dois textos (ver Apêndices). Isto é, os estudantes foram organizados em grupos de 4 a 6 membros, recebendo cada grupo duas folhas de papel A4 contendo esses textos citados. Cada grupo recebeu também uma fita métrica para efetuarem as medidas e uma placa de papelão para construir um molde simulando os furos de um calçado, mas os grupos optaram em utilizar um calçado de um de seus membros. Algumas das questões levantadas com os estudantes para serem investigadas foram as seguintes: (*i*) Qual é a relação entre o método de amarração e o conforto dos pés? e (*ii*) Que tipo de amarração economiza mais cadarço?

Figura 26: Estudantes explicam as diferenças de comprimento nas amarrações



Fonte: O próprio autor

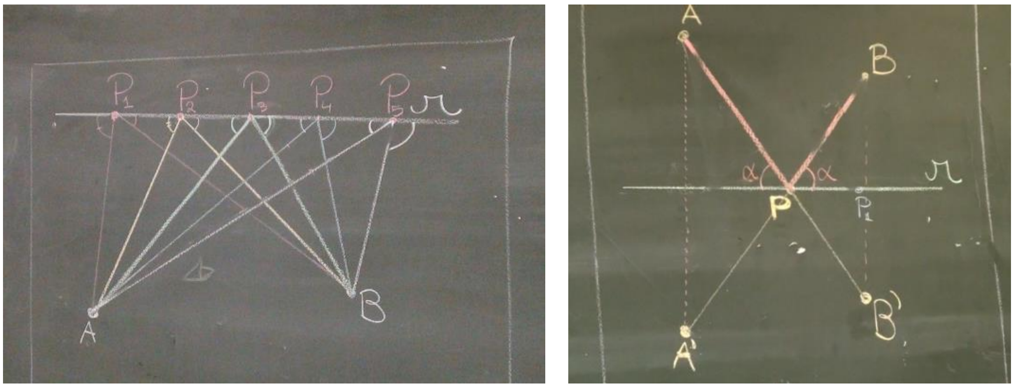
A prática 2 iniciou-se, portanto, com a identificação e exploração “ingênua” do problema mediante a observação, experimentação e descrição informal de cada método de amarração. Foram ainda efetuadas as medidas para responder à questão (*i*) e elaborada uma explicação para responder à questão (*ii*). Essas atividades duraram cerca de duas aulas de 50 minutos cada e estão expressas nas imagens da figura 27. Em seguida, os estudantes foram convidados a fazer simplificações e a construção de um modelo que simulasse o percurso do cadarço em cada método. Utilizando as medidas já obtidas os estudantes construíram, na malha pontilhada, uma representação plana do percurso do cada cadarço em cada método. Essas atividades, por sua vez, duraram cerca de 1 aula de 50 minutos cada e está expressa nas imagens da figura 27.

Figura 27: Estudantes efetuam a construção da reflexão do cadarço numa malha pontilhada

Fonte: O próprio autor

Seguiu-se a essas atividades, a atividade de matematização, ou seja, a investigação de métodos experimentais e analíticos para a obtenção do percurso de comprimento mínimo. O método experimental, neste caso, consistiu em obter o percurso de comprimento do Problema de Heron construindo vários percursos possíveis, medindo seus comprimentos e identificando o de menor comprimento. Já o método analítico consistiu em discutir com os estudantes o método das transformações geométricas na solução do Problema de Heron, a desigualdade triangular e a reflexão das amarrações dos cadarços na malha pontilhada. Essas atividades duraram cerca de uma aula de 50 minutos e está expressa nas imagens da figura 28.

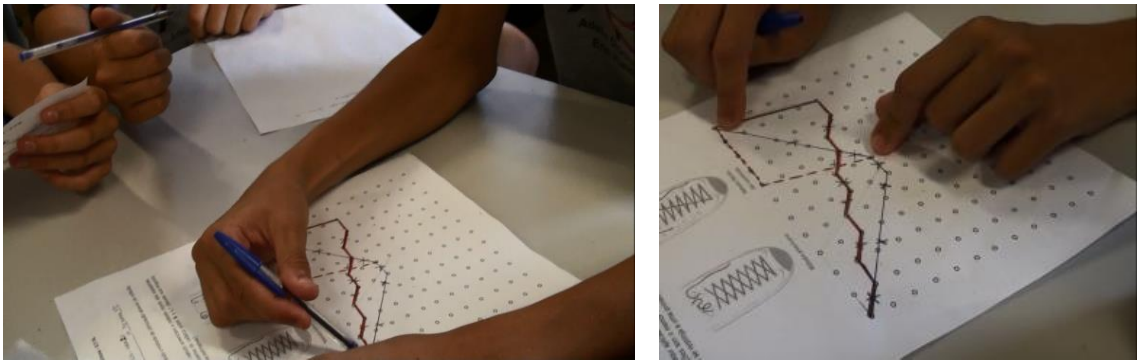
Figura 28: Construções efetuadas para discutir a solução do Problema de Heron



Fonte: O próprio autor

Depois disso, os estudantes foram convidados a discutir a resolução do problema propriamente dito. Isto ocorreu com a eliminação dos segmentos coincidentes nas diferentes amarrações aplicação da desigualdade triangular. Essas atividades duraram uma aula de 50 minutos e estão expressas nas Cenas Significativas 4 e 5. Finalmente, a interpretação da solução ocorreu com a elaboração e apresentação de uma explicação do porquê o método americano é o que gasta menos cadarço. Essa atividade durou também 1 aula de 50 min e está expressa nas imagens da figura 29.

Figura 29: Estudantes explicam a condição de minimalidade do percurso do cadarço



Fonte: O próprio autor

3.2.3 Prática 3: Que Escola os Estudantes Querem Para a Reforma do Ensino Médio?

O tema dessa prática foi motivado pelo movimento de ocupação das escolas do Paraná, ocorrido em outubro de 2016, visando pressionar o Governo Federal para retirar a proposta de reforma do Ensino Médio feita via medida provisória. De acordo a imprensa local, das 2147 escolas do Paraná 850 chegaram a ser ocupadas pelos estudantes, de modo que nessas escolas as aulas ficaram suspensas e os estudantes organizaram passeatas, palestras e atividades, visando expor sua posição sobre a proposta de reforma. Entretanto, os estudantes que promoveram e participaram desses eventos eram na sua quase totalidade do Ensino Médio. Os estudantes do Ensino Fundamental ficaram em casa e não participaram das discussões promovidas pelos estudantes do Ensino Médio.

A escola em que foram desenvolvidas as práticas de MM 1 e 2 também foi ocupada pelos estudantes. A prática 2 foi, inclusive, interrompida por conta disso, sendo retomada em novembro quando a ocupação já tinha sido encerrada. A ideia de abordar esse tema nas aulas de matemática ocorreu nesse período. Foram dois os motivos que despertaram meu interesse: primeiro, observei que, mesmo entre os estudantes que realizaram a ocupação, havia pouca informação sobre os itens da reforma e, segundo, os estudantes do Ensino Fundamental, inclusive os que estavam desenvolvendo as práticas 1 e 2 de MM, não participaram das discussões sobre a reforma do Ensino Médio e, na sua maioria, não se davam conta de que seriam os principais atingidos pelos efeitos da reforma, mais atingidos do que os estudantes que já estavam no Ensino Médio. Percebi que, em comparação com os temas das práticas 1 e 2, o tema da reforma do Ensino Médio parecia muito mais urgente e relevante, naquele momento, ser abordado com os estudantes. Com isso, decidi abordar esse tema com esses estudantes e comecei a pensar numa prática de MM que viabilizassem essa abordagem. Em face da exiguidade de tempo e a necessidade de concluir coleta de dados da prática 2, no ano de 2016 não foi possível abordar o tema da reforma do Ensino Médio. Por isso, esse tema ficou para ser abordado em 2017, com os mesmos estudantes das práticas 1 e 2.

E como abordamos esse tema com esses estudantes? Para iniciar uma discussão com os estudantes sobre o tema, usamos a leitura de uma reportagem[18] veiculada pelo site do jornal Gazeta do Povo, cuja manchete diz "*Reforma do ensino médio: entenda o que muda*". Essa reportagem informa os principais pontos da reforma e os argumentos a favor e

[18] (DRECHSEL, 2017)

contra cada uma desses pontos. O ponto que gerou mais discussão foi o aumento da carga horária que hoje é de 2.400 horas nos três anos do ensino médio (800 horas por ano) para 4.200 horas (1.400 horas por ano). Com uma conta rápida, os estudantes perceberam que, com essa nova carga horária, teriam que permanecer um pouco mais de 7 horas por dia na escola. Com essa informação, procurei encaminhar a discussão para uma das principais consequências da reforma que é a implantação de escolas de Ensino Médio de período Integral.

Essa discussão gerou muito interesse dos estudantes que, na sua maioria, se posicionaram contra a reforma, entendendo que a escola atual não tem condições de atender em período integral. Diante dessa posição dos estudantes, solicitei que eles se organizassem em grupos de 4 a 5 pessoas para discutir uma proposta de uma escola de Ensino Médio Integral. Você acha que a sua escola está preparada para atender a reforma do Ensino Médio? Em caso negativo, que deveria mudar na tua escola para que ela pudesse atender os estudantes do Ensino Médio em período Integral? Estas duas perguntas orientaram as discussões nos grupos e o resultado foi muito interessante, pois, ao mesmo tempo em que afirmavam que a escola não tinha condições para atender a reforma, também não sabiam precisar o quê precisar mudar na escola. Citaram apenas necessidade de ampliar o refeitório e melhorar a qualidade da merenda escolar. Defenderam também que nenhuma das escolas da região poderia atender em a reforma, pois todas atendem atualmente turmas de Ensino Fundamental e Médio e não dispõe de salas suficientes para ampliar o período do Ensino Médio.

Em razão dessas afirmações dos estudantes, propus a eles que realizassem uma pesquisa sobre as quatro escolas da região para saber o número de estudantes matriculados no Ensino Fundamental e Médio, o número de salas de aula, número de quadras esportivas, bibliotecas, tamanho da área construído, tamanho da área disponível para construção e todo tipo de informação que pudesse servir para fazer uma proposta de mudança nas escolas para atender a reforma do Ensino Médio. Propus também que pesquisassem algum exemplo de Escola de Ensino Médio Integral e que estrutura essa escola possuía.

As informações sobre as quatro escolas da região foram obtidas no *site* da Secretaria de Educação do Paraná que mantém atualizadas os dados de todas as escolas do estado. Capturando imagens aéreas das escolas no Google Earth, os estudantes tiveram acesso ao tamanho da área construída, aos tipos de construções e ao tamanho da área disponível para construção. Pesquisando na internet os estudantes escolheram a Escola Sesc do Rio de Janeiro como exemplo de estrutura que uma escola de período integral precisa ter. Essa escola dispõe de alojamentos para os estudantes, biblioteca, teatro, ginásio coberto, piscina semiolímpica, campo de futebol, quadras poliesportivas, salas de dança, rede de internet, ginástica e musculação, dentre outros espaços.

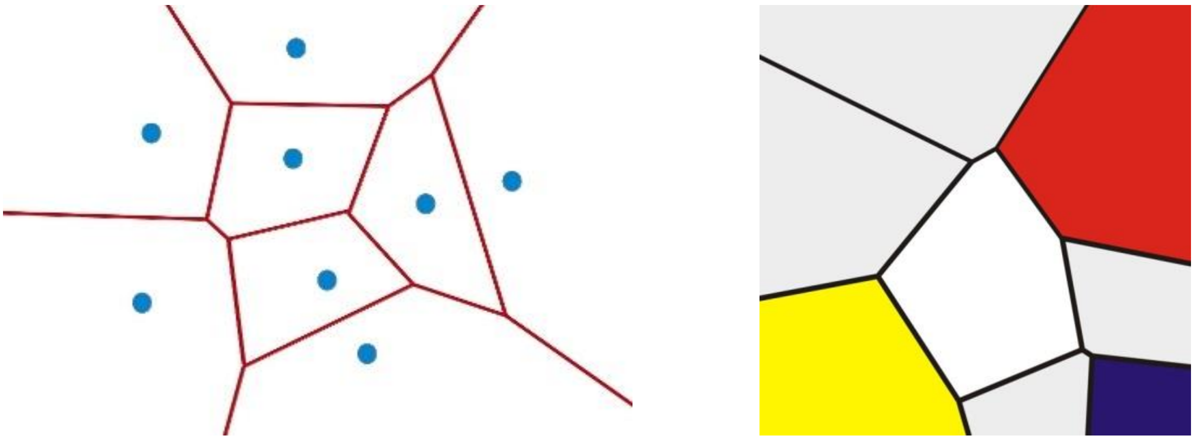
Utilizando essas informações os estudantes estimaram que nessas quatro escolas da região um total de 1200 estudantes estariam entrando no Ensino Médio em 2019, ou seja, o ano em que eles mesmos entrariam para o Ensino Médio. Utilizando a escala das imagens aéreas obtiveram a distância entre essas escolas e a distância entre cada escola e a casa de cada membro do grupo. Ao efetuar o cálculo da área construída em cada escola, os estudantes perceberam que as escolas mais antigas foram construídas na forma de retangular mais comprida e mais estreita, enquanto as escolas construídas mais recentemente possuem formas retangulares menos comprida e mais largas. Essa observação veio acompanhada da constatação de que essas construções mais recentes aproveitam melhor o "espaço", pois possuem áreas maiores com menos perímetro. Perceberam também que as escolas são relativamente próximas uma da outra e que nenhuma possui salas de aulas suficientes para atender os estudantes do Ensino Médio em período Integral.

Com essas informações, conduzi as discussões com os estudantes elaborassem propostas para a implantação do Ensino Médio Integral nas quatro escolas da região. Entre as propostas, chegamos ao consenso de que as quatro escolas atuais deveriam atender exclusivamente os estudantes do Ensino Fundamental e uma nova escola deveria ser construída para atender os estudantes do Ensino Médio Integral. Levantamos também, com esses estudantes, três questões que deveriam ser investigadas para a elaboração de um projeto de escola de Ensino Médio Integral. A primeira questão é *como distribuir os estudantes do Ensino Fundamental entre as quatro escolas da região?* A segunda*, qual é o melhor local para construir uma escola de Ensino Médio Integral?* A terceira e última questão é *como deve ser uma escola de Ensino Médio Integral?* Com isso, passamos a organizar a abordagem dessas três questões nas aulas de Matemática. Vejamos a seguir como organizamos o encaminhamento da investigação dessas questões com os estudantes.

A primeira questão refere-se ao problema de dividir a região atendida pelas quatro escolas em Áreas de Abrangências e, por isso, organizamos material para que os estudantes pudessem investigar *como distribuir os estudantes em áreas de abrangências das escolas*. O primeiro material é um texto de uma página sobre o Sistema de Georreferenciamento empregado pela Secretaria de Educação para direcionar os estudantes da rede pública à escola estadual mais próxima de sua residência. O texto informa que esse Sistema utiliza o conceito de Área de Abrangência para relacionar as residências e vagas escolares segundo o critério de proximidade. Cada escola tem sua Área de Abrangência que estabelece os limites da região em seu entorno, abrangendo as residências que estão mais próximas dessa escola do que de qualquer outra do mapa. O mapeamento das escolas e residências e sua divisão em Áreas de Abrangência são feitos utilizando a conta de energia elétrica, de modo que cada poste de luz é georreferenciado. O segundo material distribuído aos grupos é uma folha com uma imagem extraída do Google Earth de uma fotografia aérea da região das quatro escolas. Com esses dois materiais, os grupos foram orientados pelo professor a estabelecer critérios para dividir no mapa a região em quatro Áreas de Abrangências, uma para cada escola.

A partir da apresentação desses critérios pelos grupos de estudantes, direcionamos a discussão em torno desses critérios para introduzir o Diagrama de Voronoi como método para obter Áreas de Abrangências. Esse diagrama consiste numa representação geométrica obtida na divisão de uma região em um conjunto de áreas de abrangência estabelecendo relações de proximidades entre si. Por exemplo, relações de proximidade entre uma empresa com seus concorrentes ou de uma unidade de serviço público com as outras unidades que prestam o mesmo tipo de serviço. Determinar a área de abrangência de hospitais, escolas, polícia ou bombeiro é importante para melhorar a acessibilidade da população aos serviços, garantir uma igualdade na distribuição dos recursos além de reduzir os custos e otimizar a utilização de equipamentos e serviços.

Figura 30: Exemplos de *diagramas de Voronoi* com oito sítios e oito células



Fonte: O próprio autor

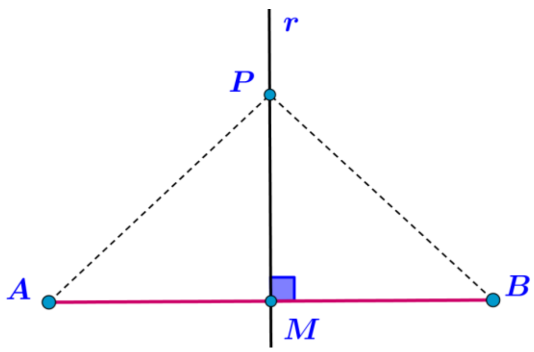
Interpretando as unidades de serviços como pontos e as áreas de abrangência como regiões disjuntas de um plano geométrico, esse problema pode assim ser enunciado: dado um número finito de pontos distintos (*sítios*) de um plano, decomponha esse plano em regiões disjuntas (*células*) contendo cada uma exatamente um sítio de modo que todos os outros pontos dentro da célula estejam mais perto do sítio de sua célula do que de qualquer outro sítio. Mais formalmente: seja $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ o conjunto de n pontos (sítios) num plano. Queremos subdividir esse plano em n células de tal modo que cada célula contenha exatamente um sítio. Um ponto arbitrário (x, y) desse plano pertence à célula correspondente a um sítio p_i com coordenadas (x_{pi}, y_{pi}) se e somente se

$$\sqrt{\left(x - x_{pi}\right)^2 + \left(y - y_{pi}\right)^2} < \sqrt{\left(x - x_{pj}\right)^2 + \left(y - y_{pj}\right)^2} \qquad (*)$$

para todo p_j com $j \neq i, 1 \leq j, i \leq n$. Isto é, a distância euclidiana a partir de (x, y) para qualquer outro local é maior do que a distância de (x, y) a p_i.

Se os limites das células assim definidas são compostos de semirretas ou segmentos que formam polígonos convexos, então a resolução desse problema consiste em determinar essas semirretas e segmentos. No argumento que se segue mostramos como esses limites podem ser obtidos pelas mediatrizes dos segmentos que unem cada par de sítios. Em sua definição mais usual, a mediatriz do segmento AB é a reta perpendicular a esse segmento que passa pelo seu ponto médio M. A sua propriedade mais importante é que todo ponto da mediatriz de AB equidista de A e B.

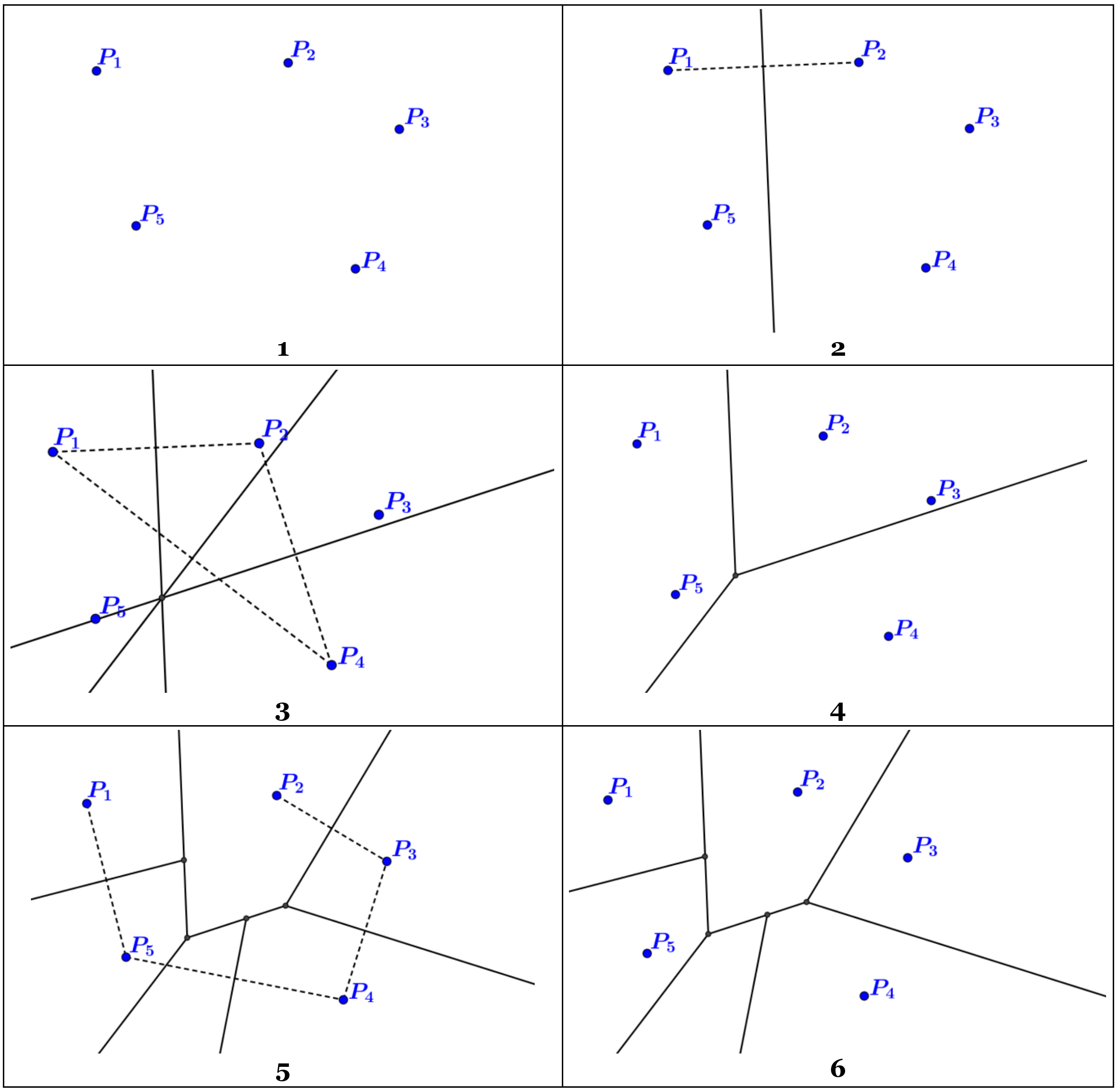
Figura 31: Segmento AB e sua mediatriz r

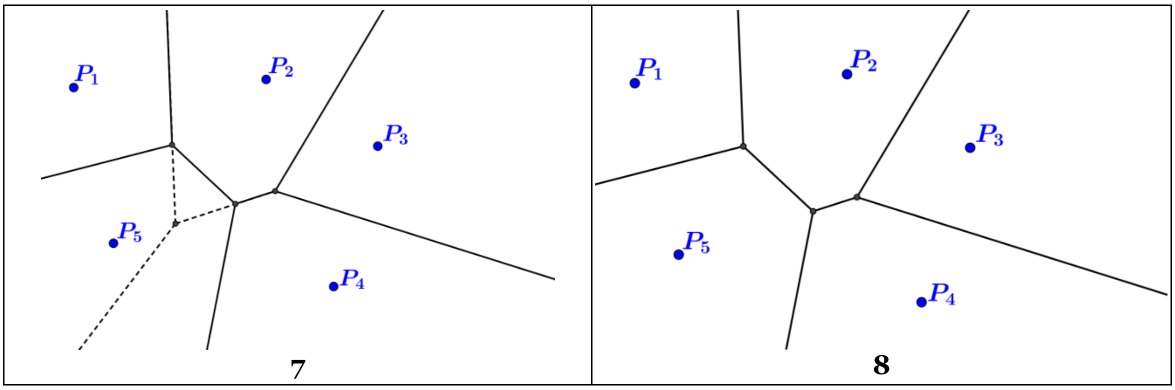


Fonte: O próprio autor

Essa propriedade pode ser demonstrada pelo seguinte argumento: seja r a mediatriz de AB, M o ponto médio de AB e P um ponto de r. Pelo caso de congruência LAL, os triângulos PMA e PMB são congruentes. Longo, $PA = PB$. Nesse caso, vale a recíproca da implicação, ou seja, todo ponto fora da mediatriz não equidista de A e B. Isso significa que a mediatriz r divide o plano em dois semiplanos cada um contendo uma das extremidades de AB de modo que se um ponto está num desses semiplanos, então ele está mais próximo da extremidade contida nesse semiplano do que da extremidade contida no outro semiplano. A mediatriz define, portanto, uma relação de proximidade entre os pontos do plano e as extremidades A e B. Essa propriedade define um método que permite construir o Diagrama de Voronoi. O quadro da figura 32 ilustra a aplicação desse método na decomposição de um plano em cinco regiões.

Figura 32: Sequência de construção de um Diagrama de Voronoi

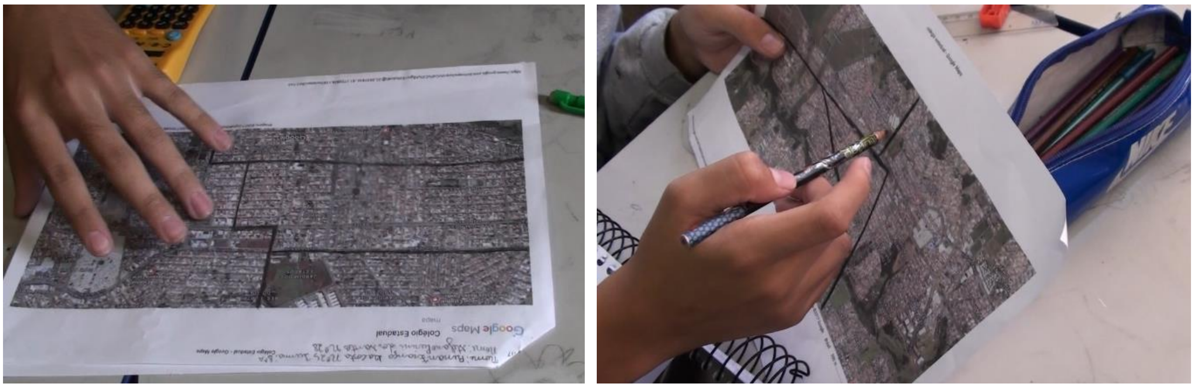




Fonte: O próprio autor

Para encaminhar a abordagem do Diagrama de Voronoi, primeiro propus aos estudantes o problema de obter as Áreas de Abrangências para o caso de duas escolas e, com isso, orientamos os estudantes na construção da mediatriz e identificação de suas propriedades geométricas. Depois propus o mesmo problema para o caso de três escolas e, em seguida, para quatro escolas e, desse modo, orientei os estudantes no método de obter Áreas de Abrangências com o Diagrama de Voronoi. Questionei os estudantes sobre a necessidade de assumir hipóteses simplificadoras para empregar o Diagrama de Voronoi como um modelo matemático. Interpretar a realidade topográfica da região como um plano geométrico, supor que a população dessa região está homogeneamente distribuída sobre esse plano, que cada escola a mesma capacidade de atendimento e que o caminho mais curto entre dois locais é sempre dado por um segmento de reta, significa adotar hipóteses que simplificam e estruturam a representação da situação real convertendo-a numa idealização geométrica.

Figura 33: Estudantes investigam como dividir um mapa regiões, utilizando o Diagrama de Voronoi



Fonte: O próprio autor

Por sua vez, investigar *onde construir uma escola de Ensino Médio Integral* na região viabilizou a organização de atividades para abordar com os estudantes o conceito de centro de uma população. Esse conceito é uma ampliação do conceito usual de centro geométrico ou centroide. Investigar o centro de uma população distribuída sobre uma região do mapa é um modo empregar a noção de centro geométrico como um modelo matemático e, por isso, é um modo de enriquecer a aprendizagem da noção de centro no Ensino Fundamental que é tradicionalmente identificado como o centro do círculo.

Mas, como o centroide pode ser usado como um modelo matemático para investigar o centro de uma população? A noção de centroide pode ser entendida como uma posição média de uma forma geométrica ou de uma distribuição de formas. O centroide de um retângulo, por exemplo, é o ponto desse retângulo com a seguinte propriedade: toda reta que passa por esse ponto divide o retângulo em duas regiões de mesma área. É nesse sentido que o centroide ocupa uma posição média da figura. O ponto médio de um segmento de reta e o baricentro de um triângulo são dois outros exemplos de centroide de uma forma geométrica. É justamente o significado do centroide como posição média de uma forma geométrica que viabiliza seu uso na investigação da distribuição espacial de uma população.

Em particular, a noção de centroide pode ser empregada para investigar dois fenômenos geográficos importantíssimos que são a *acessibilidade* e a *dispersão*. Determinar a localização de equipamentos públicos de modo que sejam acessíveis a populações definidas e caracterizar a dispersão dos fenômenos em torno de um ponto é útil para resumir a dispersão espacial dos indivíduos em torno de um local definido. Por exemplo, se a dispersão de indivíduos com uma certa doença é menor em torno de um determinado local, isto pode significar que o risco de desenvolver essa doença é maior em posições próximas a esse local.

Segundo Rogerson (2012), a noção de centroide de uma população é um pouco diferente de centroide de um polígono porque, enquanto no polígono o centroide ocupa uma posição média em relação a sua área, o centroide da população ocupa uma posição média em relação à localização de cada indivíduo. Assim, se cada indivíduo de uma população pode ser identificado espacialmente pelas coordenadas x e y, então as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centroide dessa população podem ser calculadas pela média aritmética das coordenadas x e y de todos os indivíduos dessa população. Mas, se uma população está distribuída em n sub-regiões (bairros, cidades, escolas), de modo que o centroide da sub-região i, com $1 \leq i \leq n$, é localizado espacialmente pelas coordenadas x_i e y_i e o número de pessoas que vivem nessa sub-região é w_i, então, tomando cada valor de w como um peso da sub-região i, a média ponderada das coordenadas x e y fornecem a localização do centro médio da população, isto é:

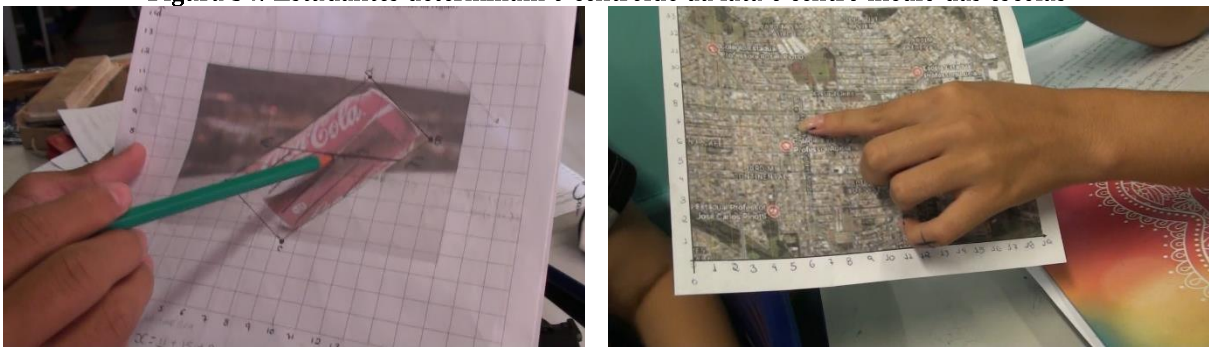
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i}^{n} w_i}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{\sum_{i}^{n} w_i}$$

Conceitualmente, esse modo de calcular o centro médio de uma população pressupõe uma simplificação, a saber, que toda a população da sub-região i vive concentrada no centroide dessa sub-região. A variação na localização do centro médio da população de um país, por exemplo, fornece uma compreensão sobre como se dá a migração nesse país. Além disso, segundo Rogerson (2012), o centro médio tem a propriedade de minimizar a soma dos quadrados das distâncias que as pessoas devem viajar para chegar ao centro médio. Assim, se um hospital fica localizado no centro médio da população de uma cidade, então a soma dos quadrados das distâncias entre a localização das pessoas e esse hospital é a menor possível. Embora essa minimização não seja a ideal, pois a melhor seria minimizar a soma das distâncias, ao invés da soma dos quadrados das distâncias, o centro médio é uma boa aproximação para se determinar a localização da escola de Ensino Médio Integral.

Com relação aos encaminhamentos didáticos adotados para investigar com os estudantes *onde* construir uma escola do Ensino Médio Integral na região. Essa investigação foi realizada em grupos de 4 a 5 estudantes que, em posse de um mapa da região e de um texto contendo informações sobre o número de estudantes matriculados em cada escola, buscaram estabelecer critérios para determinar um local para a construção da nova escola. Inicialmente, os grupos sugeriram diferentes critérios, como por exemplo, o local escolhido deveria: (*i*) ser um terreno grande e sem construções; (*ii*) estar próximo do terminal de ônibus urbano rodoviário; (*iii*) estar próximo das atuais quatro escolas existentes; e (*iv*) estar próximo do centro do mapa da região.

Discutimos com os estudantes a possibilidade de adotar todos ou em parte esses critérios e solicitamos que ordenassem esses critérios segundo a importância de cada um. Argumentamos também que se os estudantes iriam, no Ensino Fundamental, estudar na escola mais próxima de sua casa, seria razoável que a escola de Ensino Médio fosse construída mais próxima das quatro escolas, ou seja, o critério de proximidade com as quatro escolas atuais deveria ter prioridade. Além disso, o número de estudantes de cada uma dessas escolas é importante porque quanto mais estudantes uma escola tem mais próxima dela deveria ser construída a nova escola do Ensino Médio. Assim, chegamos ao consenso de que o número de estudantes deveria ser um peso para aproximar a localização da nova escola.

Figura 34: Estudantes determinam o centroide da lata e centro médio das escolas



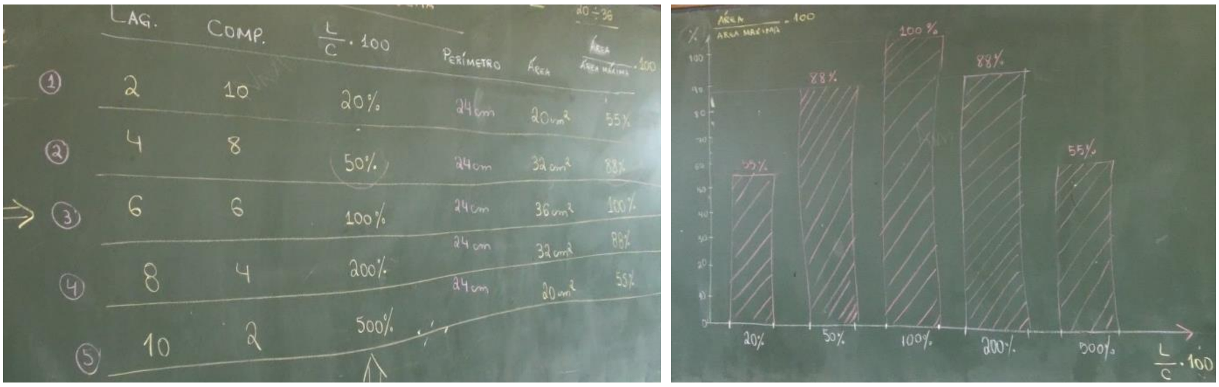
Fonte: O próprio autor

Após o estabelecimento desses dois critérios, ou seja, proximidade com as escolas atuais e número de estudantes dessas escolas, questionei os estudantes como levar em conta esses dois critérios para determinar o local da escola de Ensino Médio? Com esse questionamento, procurei direcionar os estudantes para o uso de um sistema de coordenadas para determinar o centro da população. Discutimos o caso em que houvesse apenas duas escolas e, com isso, a determinamos o local calculando a média ponderada das coordenas x e y. Em seguida, discutimos como generalizar esse cálculo e considerar um número maior de escolas. Com essa discussão, encaminhamos a sistematização do método empregado para calcular o centro médio de uma população. Cada escola foi considerada uma sub-região e o seu número de estudantes foi tomado como a população dessa sub-região. A localização de cada escola foi tomada como o centroide dessa sub-região. A sistematização desse método viabilizou o cálculo das coordenadas do local para a construção da escola de Ensino Médio Integral.

A terceira questão que investigamos com os estudantes é *como deve ser uma escola de Ensino Médio Integral?* Esta questão investigada com os estudantes levou em conta os aspectos estruturais que devem ter uma escola para atender estudantes de Ensino Médio em período Integral (salas de aulas, alojamentos para os estudantes, piscina, sala de música, restaurante, teatro, biblioteca, quadra coberta, campo de futebol, dentre outros). Ficou decidido que cada grupo elaboraria um projeto em planta baixa e construiria uma maquete com esses elementos. Desse modo, os estudantes foram orientados a discutir como deveria ser a forma dessas construções, tendo em vista o problema de otimizar essas construções, ou seja, área máxima com o menor perímetro possível. Como já dissemos, quando os estudantes efetuaram as medidas das áreas construídas das quatro escolas da região, eles perceberam que as escolas mais antigas possuem formatos retangulares "mais compridos" e "mais estreitos" do que as escolas mais novas. A observação desse fato fez com que os estudantes considerassem a relação entre comprimento e largura para avaliar a otimização dos espaços na elaboração do projeto de escola do Ensino Médio Integral. Propomos, então, aos estudantes uma investigação sobre a variação da área de retângulos de perímetro fixado quando seu comprimento e largura variam.

Para encaminhar essa investigação, discutimos com os estudantes a variação da área de um retângulo de comprimento c e largura l em que a soma $c + l$ é fixada em $12\ cm$, ou seja, o perímetro é fixado em $24\ cm$. Construindo uma tabela (ver figura 35), os estudantes puderam perceber que a área máxima se dá quando $c = l = 6\ cm$, ou seja, quando se tem um quadrado de lado $6\ cm$. Depois, os estudantes investigaram a relação entre as porcentagens $\frac{Largura}{Comprimento}$ e $\frac{Área}{Área\ Máxima}$. Construindo um gráfico de barras verticais (figura 35), os estudantes puderam perceber que se a largura é 50% do comprimento, ou seja, se $l = 4\ cm$ e $c = 8\ cm$, então a área do retângulo é $88{,}9\%$ da área máxima, pois a área máxima, neste caso, é de $36\ cm^2$ e a área do retângulo $4\ cm \times 8\ cm$ é de $32\ cm^2$. Essa investigação permitiu discutir com os estudantes a possibilidade de elaborar um modelo gráfico e uma escala para avaliar a otimização dos espaços em prédios escolares.

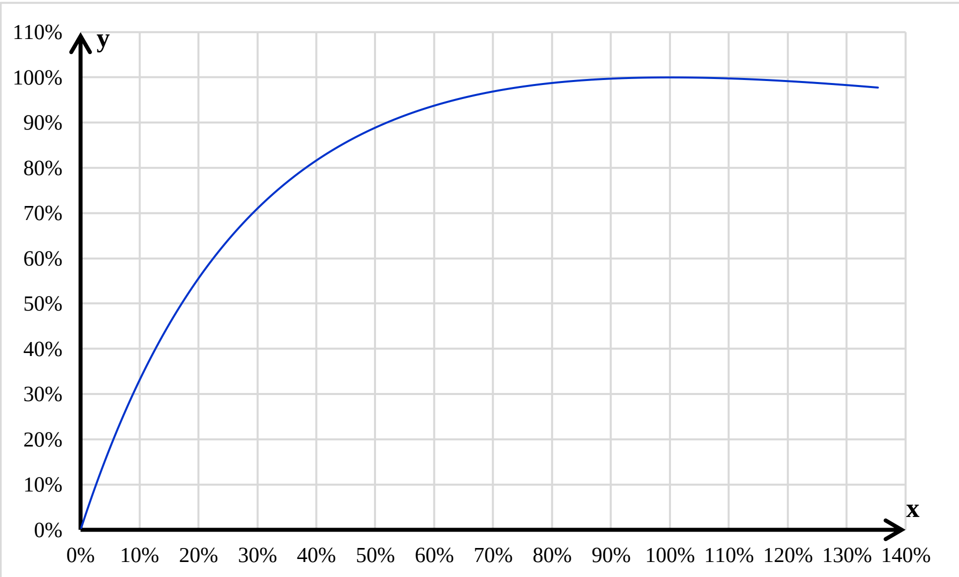
Figura 35: Registros da discussão sobre a otimização da área de retângulos de mesmo perímetro.



Fonte: O próprio autor

Esse modelo, estabelecido com os estudantes fundamenta-se no seguinte argumento: se um retângulo possui comprimento c e largura l, então sua área é $A = cl$ e seu semiperímetro é $p = c + l$. Mantendo seu perímetro fixado e variando c e l, percebemos que a área máxima que esse retângulo pode atingir é quando comprimento e largura forem iguais, ou seja, $c_{máx} = l_{máx} = p/2$. Como $\frac{p}{2} = \frac{c+l}{2}$, então a área máxima será dada por $A_{máx} = \left(\frac{c+l}{2}\right)^2$. Com essas informações, pode-se escrever $\frac{A}{A_{máx}} = \frac{4cl}{c^2+cl+l^2}$. Se, no segundo membro dessa equação, dividirmos o numerador e denominador por c^2, teremos $\frac{A}{A_{máx}} = \frac{\frac{4l}{c}}{1+\frac{l}{c}+\left(\frac{l}{c}\right)^2}$ que pode ser reescrita como $\frac{A}{A_{máx}} = \frac{\frac{4l}{c}}{\left(1+\frac{l}{c}\right)^2}$. Esta última expressão é um modo de escrever $\frac{A}{A_{máx}}$ em função de $\frac{l}{c}$. Escrevendo $y = \frac{A}{A_{máx}}$ e $x = \frac{l}{c}$, temos a expressão $y = \frac{4x}{(1+x)^2}$. Atribuindo valores para x e calculando os valores de y, podemos estudar o comportamento dessa função construindo o seu gráfico, conforme ilustra a figura 36.

Figura 36: Gráfico da função que descreve a otimização da área de retângulos de mesmo perímetro.



Fonte: O próprio autor

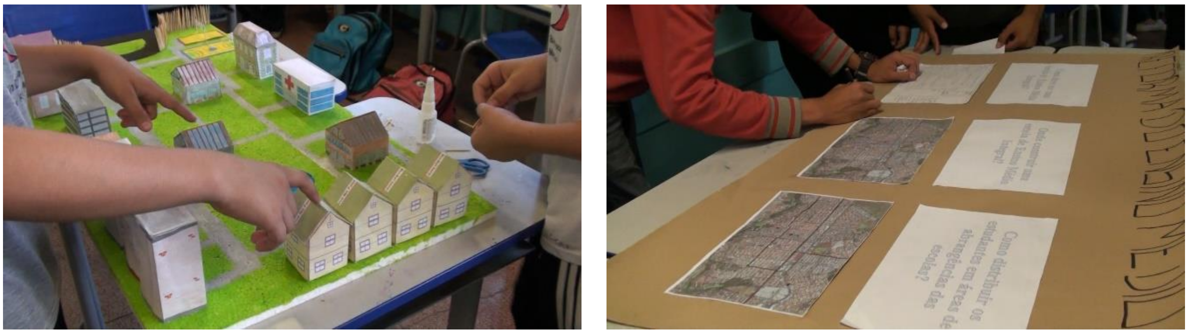
Os estudantes construíram, para essa função, uma "versão" gráfica em barras verticais (ver figura 37). Analisando esse gráfico, os estudantes puderam perceber que a área do retângulo cresce e atinge seu valor máximo quando $\frac{l}{c} = 1$, ou seja, quando a largura e comprimento são iguais. Depois desse valor máximo, o valor da área decresce mais lentamente. Com esse gráfico de barras verticais, os estudantes puderam avaliar que, para um retângulo ter 70% ou mais da área máxima, sua largura deveria ser, no mínimo, 30% do comprimento. Assim, os estudantes consideraram esse limite um valor razoável para empregar na elaboração do projeto da escola de Ensino Médio Integral. Por exemplo, se um espaço da escola tem a forma retangular então a relação entre o menor e o maior lado deve ser igual ou superior a 30%.

Figura 37: Gráficos de barras verticais, utilizados pelos estudantes

Fonte: O próprio autor

Em vista da relevância do tema investigado nessa prática de MM para os demais estudantes da escola, organizamos uma apresentação das maquetes e a discussão entre estudantes e professores da escola sobre a necessidade de compreender os problemas relacionados a implantação da reforma e do Ensino Médio Integral. Em particular, o problema da falta de estrutura das atuais escolas para efetivar essa implementação. Dessa discussão, surgiu algumas propostas que foram encaminhadas aos órgãos competentes da Secretaria de Educação do Paraná.

Figura 38: Apresentação das maquetes das escolas e dos painéis sobre a prática de MM



Fonte: O próprio autor

3.3 Sobre o Registro, Organização e Análise dos Dados

Priorizar a descrição dos *gestos linguísticos* dos estudantes e a descrição do modo como esses gestos implicam em significações conduzem à adoção, para esta investigação, de dois instrumentos de coleta de dados: (i) um relato individual no qual os estudantes podem expressar discursivamente como perceberam que sua aprendizagem geométrica ocorreu em cada prática de MM, e (ii) a filmagem da atuação dos estudantes em cada prática de MM, de modo a registrar como suas falas, gestos, comunicações intersubjetivas, movimentações corporais, escritas, desenhos, produzem significações para a geometria e para o tema investigado. A utilização desses dois instrumentos de coleta de dados tornou necessária a elaboração de dois modos de organização desses dados: os discursos extraídos dos relatos dos estudantes estão organizados em Quadros e as os dados coletados com a filmagem foram organizados em Cenas Significativas. Esses dois modos de organização dos dados viabilizam a efetivação da chamada Análise Ideográfica.

A Análise Ideográfica[19] se refere, segundo Bicudo (2011, p.58), "ao emprego de ideogramas, ou seja, de expressões de ideias por meio de símbolos". A Análise Ideográfica busca dar visibilidade às ideias expressas nas descrições, destacando dessas descrições as Unidades Significativas. Essas Unidades Significativas resultam da leitura atenta das descrições em sua totalidade na qual o pesquisador procura pelo sentido das experiências vividas pelo sujeito. Esse sentido se mostra em unidades que são evidenciadas "diretamente na descrição sempre que o pesquisador perceber uma mudança relevante no significado da situação vivida e relatada pelo sujeito" (BICUDO, 2011, p.57).

As Unidades Significativas são estabelecidas, resumindo e destacando os sentidos da descrição e colocando em frases "indicando momentos distinguíveis na totalidade do texto da descrição" (BICUDO, 2011. p.57). As Unidades Significativas, portanto, não estão prontas na descrição, mas são articuladas pelo pesquisador que descreve as expressões dos sujeitos em uma linguagem predicativa e compatível com aquela do campo de inquérito do pesquisador.

Vamos mostrar como efetuamos, neste trabalho, a Análise Ideográfica das Cenas Significativas e dos Quadros de Discursos. As Cenas Significativas são, na abordagem fenomenológica, recortes mais amplos das transcrições da filmagem que amarram vários significados em seu movimento. Esses recortes são de grande importância diante da interrogação formulada, pois revelam um *núcleo de significado*, isto é, um "pólo de convergência de falas, gestos, fisionomias, compreensões intersubjetivas, entre outros atos de expressão" (DETONI e PAULO, 2011, p.102) que permite ao pesquisador destacar as Unidades

[19] A análise Ideográfica também é chamada de Idiográfica que vem de idiossincrasia, do que é muito individual.

Significativas do fenômeno investigado. Portanto, cada cena se constitui numa totalidade de sentido, num *núcleo de significação*, que permite compreender seu desenvolvimento e seu desfecho. E, no próprio enredamento da Cena podemos destacar os sentidos a que interrogação interroga, ou seja, permite destacar as Unidades Significativas que revelam, em cada cena, indícios do investigado.

Assim, as Cenas Significativas estão, neste trabalho, organizadas em quadros com duas colunas, contendo o código da Unidade Significativa de Cena e as Expressões dos Sujeitos na Cena. Seguida de cada Unidade de Cena, acrescentamos uma linha para explicitação da Unidade Significativa da Cena, conforme ilustra o quadro da figura 39. A leitura atenta de cada um desses quadros, buscando extrair os sentidos solicitados pela interrogação de pesquisa, conduzem à explicitação das Unidades Significativas da Cena (USC). Essas Unidades Significativas das Cenas são descritas na forma de asserções e codificadas sequencialmente, de modo que o primeiro dígito indica a prática, o segundo indica a cena e o terceiro indica a unidade significativa. Assim, o código USC.1.3.15, indica a décima quinta USC, destacada da cena 3 que foi extraída da prática 1.

Figura 39: Quadro das Cenas Significativas e suas USC

Código da USC	Expressões dos sujeitos
Código da Unidade de Cena	Diálogos, gestos, movimentações corporais, registros escritos ou gráficos.
USC. x. y. z	Explicitando a Unidade Significativa da Cena

Fonte: O próprio autor

Os Quadros de Discursos, por sua vez, foram extraídos dos relatos individuais dos estudantes. Esses relatos foram obtidos mediante a solicitação feita numa folha pautada contendo em seu cabeçalho o seguinte enunciado: *tente se lembrar das coisas que você aprendeu nessa atividade e descreva, o mais detalhadamente que você puder, as situações nas quais essa aprendizagem ocorreu para você*. Com esse enunciado, visamos destacar a percepção dos estudantes de como se deu não apenas a aprendizagem geométrica ou a aprendizagem do tipo conceitual, mas também a aprendizagem de habilidades para fazer MM de tudo o que se mostra como aprendizagem para os estudantes.

A partir da leitura cuidadosa desses relatos, destacamos as Unidades de Discurso. Essas Unidades são recortes *escaneados* (digitalizados) desses relatos e, portanto, estão escritas na linguagem dos estudantes. Para que sejam articulados seus diferentes sentidos, essas Unidades são reescritas em asserções articuladas na linguagem do pesquisador e, com isso, obtém-se as Unidades Significativas do Discurso. Esse movimento é organizado em Quadros de Discursos. Nesses Quadros, as Unidades Significativas de Discurso são codificadas sequencialmente, iniciando com a sigla USD seguida do primeiro dígito, indicando a prática de MM e o segundo dígito indica a Unidade Significativa de Discurso. Assim, o código USD.2.13, por exemplo, indica a décima terceira Unidade Significativa de Discurso de um relato feito sobre a prática 2 de MM. Organizamos a apresentação desse movimento de Análise Ideográfica em Quadros de Discursos contendo com três linhas, conforme ilustra a figura 40. A primeira linha contém o código da USD, a segunda contém a Unidade de Discurso, escrita na linguagem dos estudantes, e a terceira linha contém a Unidade Significativa de Discurso, escrita na linguagem do pesquisador e na forma de asserções que articulam os sentidos da Unidade de Discurso.

Figura 40: Quadro de Análise Ideográfica das Unidades Significativas de Discurso

Código da USD	USD. x. y
Unidade de Discurso	Discurso extraído dos relatos escritos na linguagem dos estudantes.
Asserções Articuladas da USD:	Os discursos escritos na linguagem dos estudantes são reescritos na linguagem do pesquisador, explicitando o sentido da unidade de discurso.

Fonte: O próprio autor

A obtenção das Unidades Significativas USD e USC constituem a Análise Ideográfica e viabilizam o movimento de análise que busca explicitar a estrutura do fenômeno, a chamada Análise Nomotética. Segundo Machado (1994, p.42), "o termo *nomotético* deriva-se de *nomos*, que significa uso de leis, portanto, normatividade ou generalidade, assumindo um caráter de princípio ou lei". Portanto, a Análise Nomotética diz do movimento de reduções sucessivas que busca a transcendência dos aspectos individuais da *análise ideográfica*, ou seja, busca as grandes convergências ou Núcleo de Ideias que revelam a estrutura do fenômeno.

Segundo Bicudo (2011), a Análise Nomotética solicita *insights* dados pela variação imaginativa, procedimento no qual são imaginadas variações das características do fenômeno para destacar as que são essenciais, as que limitam sua identidade. Esse procedimento, portanto, toma os individuais como casos de compreensões mais gerais, mediante reduções sucessivas. Em resumo, a Análise Nomotética parte do sentido que as Unidades Significativas USD e USC expõem e avança em busca de convergências, mediante reduções sucessivas, até obter os grandes invariantes: os Núcleos de Ideias que revelam a estrutura do fenômeno investigado.

4 ANÁLISE IDEOGRÁFICA: EXPLICITANDO UNIDADES DE SIGNIFICADO

Este capítulo visa apresentar as Unidades Significativas obtidas na Análise Ideográfica dos Quadros de Discursos e das Cenas Significativas. Primeiro, vamos apresentar as Unidades Significativas de Cena (USC). As Cenas Significativas constituem-se de recortes das filmagens em que observamos expressões coletivas ou individuais que fazem sentido ao que o pesquisador busca compreender, ou seja, fazem sentido como aprendizagem da geometria em práticas de MM. A Análise Ideográfica dessas Cenas é apresentada em quadros, conforme mostra a figura 39. Esses quadros apresentam as expressões dos sujeitos e comentários do pesquisador no contexto da Cena. Os sentidos a que remetem essas expressões e esses comentários são articulados pelo pesquisador numa asserção que chamo de Unidade Significativa da Cena (USC).

Em seguida, explicitamos as Unidades Significativas de Discursos (USD) extraídas dos Quadros de Discursos. Esses Quadros são constituídos de recortes dos relatos elaborados individualmente pelos estudantes como resposta à seguinte solicitação: *tente se lembrar das coisas que você aprendeu ao longo dessa atividade e descreva em detalhes, tanto quanto possível, as situações nas quais essa aprendizagem ocorreu para você*. Esses recortes, que chamo de Unidades de Discurso, estão escritos na linguagem dos estudantes e, por isso, são reescritos na linguagem do pesquisador que buscar articular os sentidos de cada Unidade de Discurso numa asserção. Essa asserção é o que identificamos e codificamos como Unidade Significativa de Discurso (USD). Todo esse movimento é organizado em Quadros, conforme ilustra a figura 40.

4.1 ANÁLISE IDEOGRÁFICA DA PRÁTICA 1

Para efetivar a Análise Ideográfica da prática 1, apresentamos e analisamos 4 Cenas Significativas que percebemos a manifestação da aprendizagem da geometria em práticas de MM. Além disso, essas Cenas também apontam sentidos que os relatos ainda não mostram. Com relação aos relatos, selecionamos 10 relatos (ver Apêndices), dos quais extraímos 12 Unidades de Discurso. Embora sejam 52 o número de relatos obtidos para essa prática de MM, escolhemos apenas 10 relatos para serem analisados porque isso torna a apresentação dos dados mais curta e menos repetitiva.

4.1.1 Unidades Significativas das Cenas da Prática 1

Cena 1: Compreensões acerca das condições de equilíbrio de objetos

A cena mostra o trabalho do grupo formado pelos estudantes Lucas, Felipe, Wellington e Daniel que, após conseguirem determinar as quantidades máximas e mínimas de líquido com as quais a lata de refrigerante fica em equilíbrio, trabalham na elaboração de uma explicação para o fato de que somente entre essas quantidades a lata fica em equilíbrio. Sem conseguir uma explicação satisfatória, o grupo decide chamar o professor para pedir ajuda. Wellington começa explicando o que pensou e, em seguida, o professor procura ajudar o grupo comparando o equilíbrio da lata com o equilíbrio de outros objetos.

Quadro 1: Descrição da Cena 1 da Prática 1

Código da USC	**Expressões dos sujeitos**
01	**Figura 41: Estudantes estudam as condições de equilíbrio da lata**  WELLINGTON: *Eu acho que... é porque... quando tem bastante água..., ela passa **acima**... do nível de equilíbrio e quando tem pouca água, fica **abaixo** do nível de equilíbrio.* (Wellington fala, procurando com dificuldade as palavras, estende a mão aberta virada para baixo para acentuar a palavra **nível**, levanta e abaixa a mão, respectivamente, na pronúncia de **acima** e **abaixo**.
USC.1.1.01	O estudante utiliza gestos corporais e emprega intuitivamente as noções de altura, nível da água, nível de equilíbrio para expressar sua compreensão sobre as condições de equilíbrio da lata.
02	PROFESSOR: *É... tem a ver com isso, mas pensa no seguinte, ó, se você pegar um objeto, como um caderno desses ou um livro que seja, prá você colocar ele em equilíbrio, apoiado no dedo, você precisa colocar o dedo **onde**?* WELLINGTON: *No **meio**!* (Wellington expressa se reposicionando seu corpo na

<table>
<tr><td></td><td>direção do professor e enfatizando a palavra meio).

PROFESSOR: E, por que, se você apoiar o dedo aqui na ponta, o caderno não fica em equilíbrio?

WELLINGTON: ...porque é mais pesado daquele lado, ali! (Wellington enfatiza a pronúncia de ali com um gesto de indicação com o dedo)</td></tr>
<tr><td>USC.1.1.02</td><td>O estudante percebe no exemplo discutido pelo professor uma possibilidade de compreender as condições de equilíbrio dos objetos.</td></tr>
<tr><td>03</td><td>DANIEL: Professor! Professor! O Lucas consegue equilibrar o livro, girando na ponta do dedo! Mostra aí, Lucas! (Daniel fala com convicção e entusiasmo, enfatizando a palavra girando com o gesto de girar o dedo indicador)

Figura 42: Lucas gira o caderno com o dedo apoiado no ‘centro geométrico’ do caderno

O professor utiliza a performance do Lucas para retomar a discussão sobre centro de gravidade e o ponto de equilíbrio.

PROFESSOR: Beleza, Lucas! Então, vamos lá ... para que o Lucas mantenha o caderno em equilíbrio, ele precisa manter o dedo no centro do caderno. Por que... no centro?

WELLINGTON: (...) porque ele manja do bagulho ... porque ele divide o peso do caderno no centro. (Wellington gesticula para enfatizar a palavra divide)</td></tr>
<tr><td>USC.1.1.03</td><td>A interação entre os membros do grupo faz com seus membros se aproximem da compreensão de que as condições de equilíbrio dos objetos dependem da distribuição simétrica dos seus pesos em relação ao ponto de apoio.</td></tr>
<tr><td>04</td><td>O professor tenta retomar a discussão sobre a experiência em que a lata fica em equilíbrio.

PROFESSOR: Então, no caso da água, por que só nessa quantidade ... nesse intervalo, a lata fica em equilíbrio?

FELIPE: ... porque fica dividido? (dá ênfase a palavra dividido).

PROFESSOR: O quê ... que fica dividido?</td></tr>
</table>

FELIPE: *A lata fica em equilíbrio porque o peso fica dividido! É porque o peso da água fica dividido... o que tem de peso de um lado, tem que ser a mesma coisa do outro.* (Felipe enfatiza a pronúncia de **um lado** e **do outro**, gesticulando a mão para um lado e para outro lado)

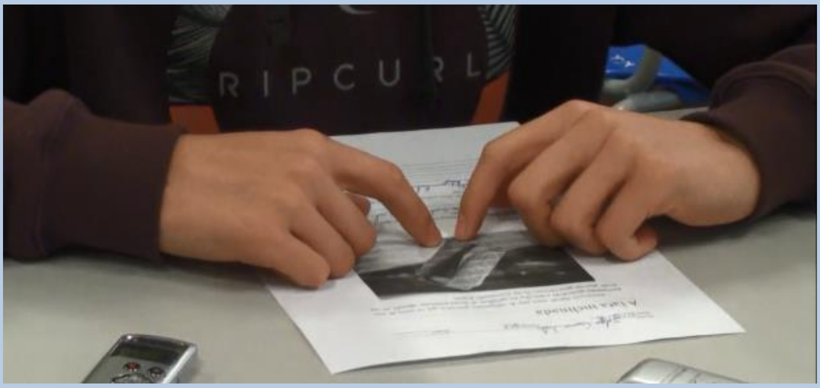
O professor retoma apresentada pelo Felipe para discutir a relação entre o equilíbrio e a linha vertical que passa pelo centro de gravidade da lata.

PROFESSOR: *..., mas o peso da água fica dividido* ***onde*** *...,* ***aí na lata****?*

Felipe pega uma folha com a imagem de uma lata de refrigerante inclinada sobre sua borda para responder à pergunta do professor.

FELIPE: *...ó, porque tem quantidades iguais dos dois lados da lata* ***entre a base****, a base da água, tipo aqui ó, aqui ... aqui é a base...e tem quantidades iguais de água aqui e aqui ó... então passando desse nível mais ou menos aqui, ó... que é nesse nível... ele já começa a desequilibrar a lata... porque não são mais quantidades iguais.*

Figura 43: Felipe explica as condições de equilíbrio, utilizando uma imagem da lata inclinada



USC.1.1.04	As ideias desenvolvidas anteriormente são retomadas e rearticuladas pelo estudante, mostrando a realização de uma síntese da compreensão do grupo sobre as condições de equilíbrio da lata.

Essa cena mostra duas compreensões para as condições de equilíbrio. A primeira é expressa na fala de Wellington que usa a ideia de “nível de equilíbrio” para se referir a altura do nível da água nas quantidades máxima e mínima em que a lata fica em equilíbrio. Assim, ele entende que há dois níveis de equilíbrio. Quando a lata tem muita água e o nível dessa água fica acima do “nível de equilíbrio”, então a lata cai. E, quando a lata tem pouca água e o nível dessa água fica abaixo do nível de equilíbrio, então a lata cai. A segunda compreensão é expressa na fala de Wellington indicando que a assimetria do peso é a causa do desequilíbrio do livro apoiado no dedo. Com isso, Wellington percebe a possibilidade de vincular a ideia de equilíbrio à distribuição simétrico do peso. Essa ideia é utilizada explicitamente por Felipe quando, utilizando gestos, indica na imagem da lata, a linha que passa pela base de apoio e afirma que ela divide o peso em duas partes iguais.

Assim, a sequência de diálogos dessa cena mostra duas mudanças significativas na compreensão dos estudantes sobre as condições de equilíbrio de um objeto. A primeira mudança é a percepção de que essas condições de equilíbrio dependem da distribuição simétrica do peso do objeto em relação ao ponto de apoio. Essa compreensão é expressa na experiência com o livro. Mas, a noção de peso que os estudantes empregam é intuitiva, ou seja, o equilíbrio não é percebido como resultado de anulação de forças. Assim, quando utilizam a noção de peso para explicar o equilíbrio da lata eles recorrem à simetria física da lata ou à simetria da área da imagem representada no papel. Os gestos empregados nessa explicação mostram que compreensão do equilíbrio encaminha para uma abordagem geométrica. Neste sentido, essa cena manifesta a aprendizagem da geometria como desdobramento uma compreensão prévia que direciona a investigação na MM para uma abordagem geométrica.

Cena 2: Obtenção de medidas e construção do corte vertical da lata

A cena mostra o trabalho realizado com todos os grupos no qual o professor procura discutir coletivamente a necessidade de construir uma representação bidimensional da lata de refrigerante inclinada para se determinar seu *ponto de equilíbrio*. A obtenção das medidas necessárias para a construção do corte vertical que “mostre” os detalhes do interior da lata, nas quantidades máxima e mínima de líquido com as quais ela fica em equilíbrio, também é discutida nesta cena. O professor inicia a aula discutindo coletivamente, ou seja, com todos os grupos, a necessidade de se construir uma representação bidimensional que ajude a determinar a linha de gravidade e o centro geométrico da parte da lata com a água. Também é discutido quais medidas devem ser obtidas e como obtê-las.

Quadro 2: Descrição da Cena 2 da Prática 1

Código da USC	Expressões dos sujeitos

<table>
<tr>
<td>01</td>
<td>

Figura 44: Estudantes busca determinar as medidas da lata

PROFESSOR: *Então, a questão aqui é a* ***seguinte****: por que, quando vocês colocam na latinha de 50 a 200 ml de água..., por que ela fica em equilíbrio?*

RENAN: ... *porque fica na metade... porque a quantidade de água divide... pela linha que passa pela base, passa pelo apoio aqui, ó, divide o peso prá cá e o peso prá cá, iguais...* (apontando para a lata)

PROFESSOR: *Isso! Isto, mesmo! Então, a questão que vou colocar prá vocês agora é* ***como*** *achar* ***exatamente*** *por* ***onde*** *passa essa linha que divide o peso e achar* ***onde*** *fica o ponto de equilíbrio da água... porque... no exemplo do caderno, como a gente faz para achar o ponto de equilíbrio?*

RENAN: ... *a gente coloca o caderno na ponta do dedo e procura* ***onde*** *divide o peso, onde o caderno fica parado, em equilíbrio...* (exemplificando com gestos)

Figura 45: Renan gesticula para indicar o equilíbrio de um objeto apoiado na ponta do dedo

</td>
</tr>
<tr>
<td>USC.1.2.01</td>
<td>As condições de equilíbrio da lata são entendidas como consequência da distribuição simétrica do peso da água.</td>
</tr>
<tr>
<td>02</td>
<td>

PROFESSOR: *É isso,* ***mas****... e* ***dentro*** *da lata, como a gente faz par achar o ponto de equilíbrio? Não dá para colocar o dedo* ***lá dentro****, certo?*

EMANUELLY: *Professor, como a gente vai ver o centro da água, se a latinha é* ***fechada****?* (mostrando perplexidade)

</td>
</tr>
</table>

	PROFESSOR: *Então, **aí** é que tá o nosso problema! A gente não pode trabalhar **diretamente** com a lata, certo? É preciso fazer um desenho dela. Qual é a ideia, então? Fazer um desenho que mostre prá gente **o que** acontece lá dentro da lata.* GUILHERME: *Mas, ... como a gente vai desenhar o que acontece lá dentro da lata, se não dá prá ver o que acontece lá dentro?* (enfatizando sua fala com gestos)
USC.1.2.02	As intervenções do professor são complementadas e rearticuladas de modo a explicitar o problema de como determinar as medidas de dentro da lata para construir a representação do corte vertical da lata inclinada.
03	PROFESSOR: *Pensa comigo assim: quando a gente coloca uma lata sobre a mesa e ela fica em equilíbrio, inclinada, ... se a gente olhar essa lata assim ... de lado... você só vê a lateral, ... que figura geométrica poderia ser utilizada para representar o que estamos vendo?* (posicionando como se olhasse a lateral da lata inclinada de perfil e gesticulando verticalmente para indicar o corte vertical na lata) VÁRIOS VOZES: *Um quadrado! Um retângulo!*
USC.1.2.03	A representação bidimensional do corte vertical da lata inclinada é percebida como tendo a forma geométrica retangular.
04	PROFESSOR: *Um **retângulo**! É um **retângulo**! É isso, isso mesmo! Agora, se a gente representa a lata por um retângulo, que medidas a gente deve saber da lata para fazer o desenho?* GUILHERME: *As laterais???* (mostrando hesitação) PROFESSOR: ***Os lados!** O comprimento e a altura do retângulo..., mas, vejam só! A largura do retângulo, neste caso, no caso da lata, corresponde ao diâmetro da base, **certo**? Porque a base da lata é um círculo, então vocês vão precisar medir o diâmetro dele, **entenderam**?... mas, não só isso, tem mais! Que outra medida eu preciso fazer para construir o desenho da lata inclinada?* EMANUELLY: *Precisa medir aqui, ó... essa medida aqui... da altura da lata.* (indicando a distância da borda superior da lata até a superfície da mesa) **Figura 46: Emanuelly indica a altura que precisa ser medida na lata**  PROFESSOR: ***Certo!** Essa altura **aí, mesmo**! Mas, também a altura da água...*

porque... pensa, como vai ficar a água lá dentro da lata?

(...) Silêncio.

PROFESSOR *Deixa então colocar essa questão assim: como vai ficar a* ***linha da superfície*** *dessa água?*

NICOLE: *Fica* ***reta****, assim, ó, ... a água fica assim, acompanhando a mesa... fica...* (gesticulando para expressar uma reta paralela à superfície da mesa).

EMANUELLY: *... fica* ***paralela*** *à mesa?* (colocando uma mão acima da outra no ar)

Figura 47: Emanuelly indica com as mãos o paralelismo entre as superfícies da água e da mesa

PROFESSOR: *É isso, mesmo! A linha da superfície da água* ***sempre*** *fica paralela à mesa! É preciso usar essa informação prá medir a altura da água? Mas a questão é como medir a altura da água, lá dentro? Como a gente vai medir se a lata é fechada? Não tem como enfiar a régua lá dentro, tem?*

EMANUELLY: *Não pode cortar a lata?* (risos dos colegas) *... é, ué! Se cortar, dá para pegar um lápis... ou um canudinho de papel... sabe um papel enroladinho... e enfia lá dentro... ele vai molhar até a altura da água...* (gesticulando)

Figura 48: Emanuelly indica com o gesto das mãos como enrolar o papel

PROFESSOR: *Isso, mesmo!* ***Boa ideia****! Já temos ideias de como medir a altura da água, a altura da quantidade máxima e da mínima. É preciso medir* ***as duas****!*

USC.1.2.04	A sequência de diálogos da cena se dá em torno do problema de como obter

	as medidas para efetuar a construção bidimensional do corte vertical da lata inclinada. A representação bidimensional da forma geométrica da água dentro da lata inclinada é percebida como sendo um polígono em que a linha que representa a superfície da água deve ser paralela à linha que representa à base de apoio.
05	MARIA ISABEL: *Professor, a gente pode fazer um desenho e marcar essas medidas?* PROFESSOR: ***Pode*** *e* ***deve****! Então vamos recapitular: qual é a primeira coisa que você precisa fazer para desenhar a lata inclinada? Ou melhor, que traços devem ser feitos* ***primeiros*** *e quais devem ser feitos depois?* GUILHERME: *Primeiro, a gente desenha o chão... ou melhor... a mesa... assim, ó...* (gesticulando para indicar o traçado da linha da superfície da mesa) PROFESSOR: *... a linha da superfície da mesa!* (gesticula) *E, depois???* GUILHERME: *... depois o lado da lata... o lado inclinado... assim ó, depois as larguras... e depois fecha em cima.* (utilizando um esquadro para mostrar como a construção deve ser feita) **Figura 49: Guilherme indica como fazer a construção bidimensional do corte vertical da lata** 
USC.1.2.05	A sequência de procedimentos para efetuar a construção do corte vertical da lata inclinada são expressos empregando uma sequência de gestos complementos com o uso da latinha e de um esquadro.

Essa cena apresenta algumas características típicas de uma prática de MM. Primeiro, o reconhecimento da impossibilidade de localizar o centro geométrico da lata inclinada do mesmo modo que se localiza o centro geométrico de um livro faz claro a necessidade de construir uma representação bidimensional do corte vertical da lata inclinada que, nesse, cumpre a função de *modelo matemático*. A identificação do corte vertical como uma forma geométrica retangular inclui várias *simplificações* da situação original. Já a descrição para a obtenção da medidas necessárias para a construção do corte vertical requer reconhecer e definir as variáveis que devem ser levadas em conta na construção do modelo matemático. A compreensão de que o nível da água deve ser representado paralelamente à superfície de apoio e a descrição da sequência de procedimentos para a construção do corte vertical já envolve a utilização de noções e procedimentos da geometria e, por isso, encaminha a investigação para uma abordagem geométrica da situação.

Cena 3: Aprendendo significados da noção de centro geométrico

A cena mostra o trabalho realizado com todos os grupos no qual o professor procura discutir coletivamente como determinar o centro geométrico de figuras planas empregando apenas material de desenho (régua, esquadro e compasso). Os alunos, conhecedores de como obter esse ponto com o fio de prumo, interagem com o professor e entre si, utilizando esse conhecimento. A cena começa com o professor desenhando na lousa um retângulo e perguntando aos alunos como obter seu centro geométrico.

Quadro 3: Descrição da Cena 3 da Prática 1

Código da USC	Expressões dos sujeitos
01	PROFESSOR: *Veja, se eu tenho um retângulo* (desenhando na lousa) *como é que eu sei ... como eu acho, melhor dizendo, o centro geométrico desse retângulo?* LAURA: *Divide no* ***meio****.* (gesticulando para mostrar a direção vertical em que deve ser dividido o retângulo) **Figura 50: Estudantes efetuam a construção de centros geométricos de polígonos**  PROFESSOR: *Divide no meio. Como a gente divide no meio, o retângulo?* JOÃO MARCOS: *Dobra ele!* (gesticulando para indicar como o retângulo deve ser dobrado) PROFESSOR: *Não! Eu não posso dobrar o retângulo, isto aqui é um desenho. Esse é o problema. Não posso dobrar, nem recortar, nem pendurar no fio de prumo. Só posse desenhar sobre ele.*
USC.1.3.01	A construção do centro geométrico do retângulo é percebida como um

	procedimento similar ao utilizada com dobraduras ou utilizando um fio de prumo. Por isso, a transição da manipulação física da figura para a construção de traçados sobre a figura ainda é lenta.
02	THAINÁ: *Faz uma linha ligando os pontos, assim, ó.* (gesticulando para indicar como deve ser feita a ligação entre os vértices do retângulo para construir suas diagonais) **Figura 51: Thainá gesticula a construção das diagonais de um retângulo**  JOÃO MARCOS: *É tipo uma **cruz**, professor!* MATHEUS: *Faz as linhas ligando todos os pontos!* PROFESSOR: *Então, se eu anotar aqui, ó, este vértice **A**, este vértice **B**, este **C** e este **D**, então o que eu vou ligar aqui?* VÁRIAS VOZES: *O **A** no **C** e o **D** no **B**.* PROFESSOR: *Isso! O vértice **A** liga com vértice **C** e o vértice **B** liga com o vértice **D**.* (desenhando na lousa) *Então, onde tá o centro geométrico?* VÁRIAS VOZES: *No meio!*
USC.1.3.02	A necessidade de efetuar uma construção sobre o retângulo é percebida e indicada nos gestos e movimentações corporais. A introdução de notações para os vértices do retângulo torna a comunicação mais verbal e menos gestual.
03	PROFESSOR: *Isso! O centro geométrico é aqui, no meio, onde as diagonais se cruzam. Então, para achar o centro geométrico do retângulo, basta construir as suas diagonais, certo? Agora, olha aqui, ó! E o triângulo? Ele não tem diagonais. Então, como vamos achar seu centro geométrico?* MATHEUS: *Faz as linhas!*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
PROFESSOR: Sim, vamos fazer linhas, mas quais linhas?

(...)Silêncio.

PROFESSOR: Então, olha aqui, ó, prá gente construir o centro geométrico do triângulo, a gente tem que ver como ele foi achado com o barbante. A linha do barbante que sai daqui, ó, deste vértice aqui, ó, ela vai para o outro lado, para este lado oposto aqui, ó, e atinge esse lado, onde? Dá pra perceber ou não? (Intercala a fala com o gesto de pegar a peça triangular e mostrar o ponto de equilíbrio construído com a ajuda do fio de prumo)

PEDRO: Na metade. Mais ou menos na metade, né?

PROFESSOR: Tá certo, na metade! Agora olha para este outro vértice aqui, ó, a linha que sai dele atinge o outro lado, onde? (mostrando a peça triangular para os estudantes)

VÁRIAS VOZES: Na metade também!

PROFESSOR: Então, acho que vocês já entenderam como a gente faz para achar o centro geométrico do triângulo. Então, vamos lá, que linhas preciso construir neste caso ?

Figura 52: Laura indica com gestos os movimentos da construção do baricentro do triângulo

LAURA: Sempre na metade. A linha vai até a metade ... daí, as linhas vão passar no meio, se cruzam no meio ... daí o meio é o centro geométrico. (Laura intercala sua fala com gestos feitos com a mão de cruzar “linhas no ar”)
</td>
</tr>
<tr>
<td>USC.1.3.03</td>
<td>A construção do baricentro do triângulo é percebida como menos intuitiva do que a construção do centro geométrico do retângulo. A observação da obtenção experimental do baricentro com o fio de prumo viabiliza a descrição dos procedimentos para a construção do baricentro do triângulo.</td>
</tr>
</table>

Essa cena mostra uma transição acerca do modo de compreender os procedimentos para a obtenção do centro geométrico de figuras. Inicialmente, os estudantes sugerem que isso pode ser feito com um procedimento de manipulação da figura, como uma dobradura ou utilizando um fio de prumo. Mas, ao compreender que a obtenção do centro do retângulo não pode ser feita com dobradura, os estudantes sugerem, empregando gestos, que essa obtenção pode ser realizada com a construção das diagonais do retângulo. Os movimentos corporais que simulam a construção dessas diagonais são “traduzidos” na fala de que é preciso “ligar” os pontos do retângulo; é preciso construir uma “cruz” no retângulo; ou é preciso ligar todos os pontos, querendo dizer que é preciso ligar os vértices. Esses gestos e falas encontram um outro modo de expressão na fala do professor quando anota os vértices com as letras A, B, C e D, e constrói, com os estudantes, as diagonais AC e o BD. Em face da pergunta acerca da construção do ponto de equilíbrio do triângulo, os estudantes, primeiro hesitantes, depois percebem uma analogia com a experiência de determinar esse ponto com o fio de prumo e sugerem a construção das medianas mediante gestos que simulam os movimentos utilizados nessa construção. Assim, inicialmente, as compreensões dos estudantes acerca da construção do centro geométrico são expressas, majoritariamente, em seus gestos corporais e, em seguida, com a introdução de notações adequadas, a expressão dessas compreensões na fala se torna perceptível.

Cena 4: Expressando compreensões sobre o tema investigado

A cena mostra o trabalho do grupo formado pelos estudantes Kauan, Kaio, William, João Victor e Gabriel que, após construírem o centro geométrico da representação bidimensional (corte vertical) da lata com água nas quantidades mínimas e máximas, preparam uma apresentação para socializar com os demais grupos o modo como obtiveram o centro geométrico nesses dois casos e explicar a relação entre o centro geométrico e o equilíbrio da lata nesse intervalo. A cena começa quando o professor pergunta ao grupo como responderam a essas duas questões.

Quadro 4: Descrição da Cena 4 da Prática 1

Código da USC	Expressões dos sujeitos
01	PROFESSOR: *O que vocês precisam falar primeiro é* ***como*** *acharam o centro geométrico da lata e depois explicar* ***por que*** *ela fica em equilíbrio. Então, como vocês acharam o centro geométrico da lata?*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Figura 53: Estudantes (à esquerda) e William explicam sua construção (à direita)

WILLIAM: *Fazendo as ligações ... ligando os pontos do triângulo, na quantidade mínima. Na máxima, a gente separou em dois ... num retângulo e num triângulo, daí calculou!* (mostra o desenho, indicando com o dedo as linhas traçadas para obter o centro geométrico)

PROFESSOR: *Como vocês calcularam, na quantidade máxima? Eu gostaria que vocês explicassem como vocês para achar o centro geométrico da lata aí na figura?*

WILLIAM: *(...) bem, primeiro foi o da área ... do retângulo ..., depois no triângulo ... que a gente usou prá fazer aqui a proporção, aqui ó, nesse pedaço... é prá dividir essa distância fazendo a proporção com a área, depois foi só resolver a proporção.* (primeiro, mostra no desenho, indicando, com o dedo, o segmento que une os centros geométricos do triângulo e do retângulo, depois aponta para os cálculos)

</td>
</tr>
<tr>
<td>

USC.1.4.01

</td>
<td>

Os procedimentos para obter o centro geométrico são descritos como diferentes tipos de ação (construir, decompor, calcular, equacionar) que se articulam em diferentes modos de expressão: a fala, os registros escritos, as construções geométricas, registros algébricos.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

02

</td>
<td>

PROFESSOR: *E por que a lata fica em equilíbrio?*

(...) Silêncio (William levanta o dedo).

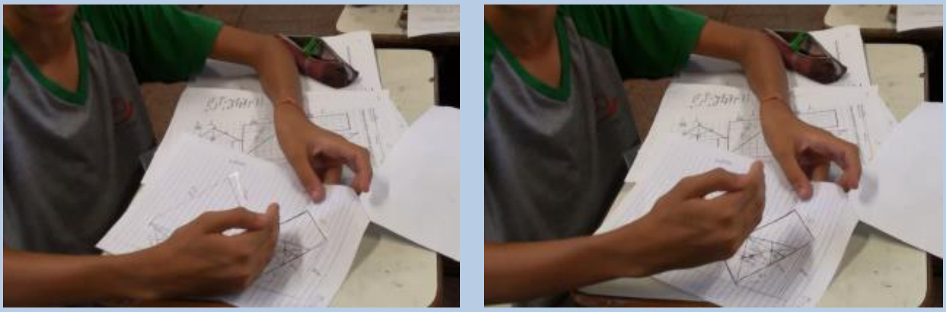
PROFESSOR: *Fala aí William, porque ela fica em equilíbrio?*

Figura 54: William mostra a linha vertical de equilíbrio da lata

WILLIAM: *Porque o centro geométrico divide equivalente ... o peso e a massa da água ficam equivalentes.* (William aponta, com o dedo, a construção geométrica na folha para mostrar a direção da linha de gravidade na vertical que divide o peso da lata em duas quantidades iguais)

PROFESSOR: *Não entendi!?*

</td>
</tr>
</table>

	Figura 55: William gesticula para indicar a linha vertical de equilíbrio da lata  WILLIAM: *Porque o centro geométrico, que divide a massa e o peso da água, **tá rente**, assim ... tá na mesma linha do apoio*. (William gesticula, batendo sobre o desenho com o lado da mão, na direção vertical, isto é, bate com o lado de “fora” da mão na direção da linha que liga o centro geométrico o ponto de apoio da lata)
USC.1.4.02	O equilíbrio da lata é num intervalo de 50 ml a 200 ml de líquido é percebido como uma relação entre o centro geométrico da parte do líquido com a linha vertical de gravidade. Inicialmente, entende-se que que essa linha divide o peso da lata e, em seguida, essa explicação é reformulada com a afirmação de que o centro geométrico está na linha vertical que passa pela base de apoio da lata.
03	PROFESSOR: *Sim, mas ...* KAIO: *... é que a lata tá inclinada, assim, ó* (mostra com o lápis). *Daí o ponto de apoio dela vai ser reto, assim, ó,* (gesticula a mão) *na mesma linha do centro geométrico.* **Figura 56: Kaio mostra a linha vertical que passa pelo centro geométrico da lata**  (Kaio mostra, utilizando um lápis e a movimentação vertical da mão, como estão relacionados a inclinação da lata, a linha vertical ligando seu centro geométrico e seu ponto de apoio). PROFESSOR: *Sim, isso tá certo, mas não explica porque ela fica em equilíbrio somente no intervalo, entre uma quantidade máxima e mínima?* GABRIEL: *É porque ... se você colocar o dedo aqui, ó, prá apoiar, nesse ponto de apoio aqui, esse ponto de apoio tá na direção do centro geométrico* (gesticula). *É como se o centro geométrico estivesse bem em cima do apoio... tá nessa direção aqui, ó* (gesticula, colocando o dedo na direção do centro geométrico). (Gabriel gesticula para reforçar a explicação dos colegas, ou seja, para afirmar que, na situação de equilíbrio, o centro geométrico e a base de apoio estão na mesma vertical).
USC.1.4.03	A compreensão de que, quando a lata está em equilíbrio sobre a mesa, a linha vertical da gravidade que passa pelo centro geométrico da lata passa

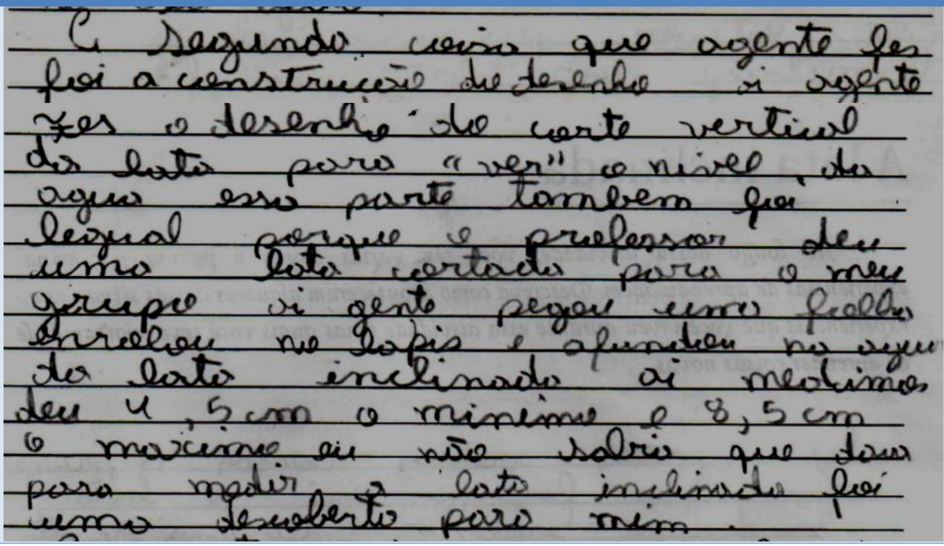
	também pela sua borda, apoiada sobre a mesa, é expressa em gestos, movimentações corporais e na fala.
04	PROFESSOR: *Mas, o ponto de apoio e o centro geométrico ficam sempre na mesma linha vertical?* (gesticula) JOÃO VICTOR: *Não! Só quando a lata tá em equilíbrio.* (João Victor mostra ter entendido o questionamento do professor) PROFESSOR: *E quando ela não está em equilíbrio? Onde fica o centro geométrico da lata? O que eu quero saber é: por que a lata cai se o apoio e o centro geométrico não estão alinhados na **vertical**?* (gesticula) JOÃO VICTOR: *É tipo o celular. A lata vai tá como o celular, assim. O apoio e o centro geométrico vão estar retos na vertical, assim. E quando a água estiver assim, o centro fica aqui, daí equilibra o peso. Tipo, se você coloca muita água, daí o centro fica aqui, daí ela cai.* **Figura 57: João Victor indica utilizando o aparelho de celular a linha vertical de equilíbrio da lata**  (João Victor pega um celular para mostrar com gestos a relação entre nível da água, centro geométrico e linha vertical que passa pelo ponto de apoio) PROFESSOR: *Entendi, mas por que a lata cai quando a água tá **abaixo** do mínimo ou **acima** do máximo?* (gesticula) JOÃO VICTOR: *Se ela estiver mais vazia do que o mínimo, o centro geométrico fica do lado de cá, daí ela cai prá cá. Se ela estiver mais cheia do que o máximo, daí o centro geométrico fica do lado de lá, daí ela cai prá lá.* **Figura 58: João Victor mostra as condições de equilíbrio de uma estrutura inclinada**  (João Victor emprega o celular novamente para mostrar com gestos da mão a relação entre centro geométrico, ponto de apoio, linha vertical e o equilíbrio nos níveis máximo e mínimo de água na lata)
USC.1.4.04	O fato de que o centro geométrico nem sempre pertencer à vertical que passa pelo apoio é expressa na explicação sobre a perda de equilíbrio da

	lata. Essa explicação é efetuada com o uso de celular que complementa os gestos para indicar quando o centro de gravidade está “antes” e “depois” da linha que passa pela base de apoio da lata.

Essa cena mostra que o modo como os estudantes descrevem o procedimento para a obtenção do centro geométrico revela que eles produziram significações para essa noção, não apenas seu significado geométrico, mas também sobre como utilizar esse conceito para explicar as condições de equilíbrio dos objetos. Ao empregar esse conceito para explicar as condições de equilíbrio da lata, os estudantes expressam uma compreensão da relação entre centro geométrico, linha vertical de gravidade e ponto de apoio. Neste sentido, a aprendizagem do conceito de centro geométrico se dá como a aquisição de um modo linguístico de expressão e não apenas como a aquisição de significado conceitual ou uma aprendizagem conceitual. A explicação da condição de equilíbrio da lata se dá em modos de expressão que inclui os significados conceituais dos objetos geométricos, mas inclui também outros modos de expressão como, por exemplo, a fala, a escrita, os gestos, os olhares, os registros simbólicos, movimentações de objetos ou qualquer *gesticulação linguística* que impliquem em significações.

4.1.2 Unidades Significativas dos Discursos da Prática 1

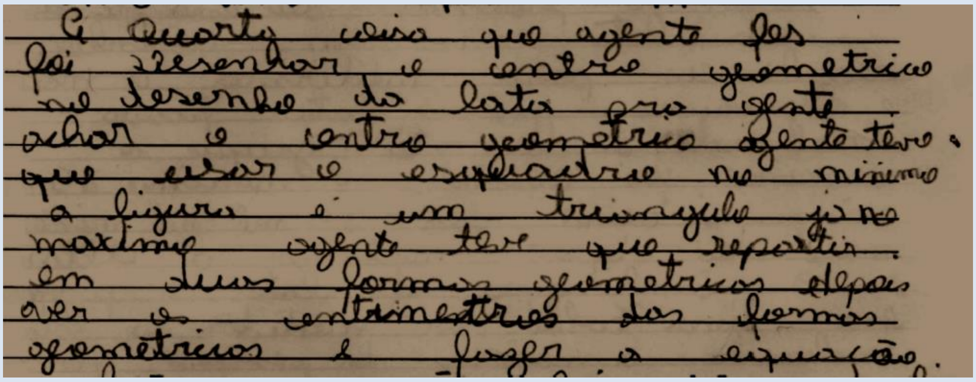
Quadro 5: Descrição da Unidade Discurso 1 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.01**
Unidade de Discurso	 C Segundo coisa que agente fez foi a construção do desenho a agente fez o desenho do corte vertical da lata para “ver” o nível da agua essa parte tambem foi legual porque o professor deu uma lata cortada para o meu grupo a gente pegou uma folha enrolou no lapis e afundou na agua da lata inclinada ai medimos deu 4,5cm o minimo e 8,5 cm o maximo eu não sabia que dava para medir a lata inclinada foi uma descoberta para mim.

Asserção Articulada da USD	*A segunda atividade que o grupo fez foi construir uma representação do corte vertical da lata e, para isso, tinham que obter as medidas. O grupo utilizou uma lata com a parte de cima cortada para visualizar o nível da água e utilizando um lápis enrolado numa folha de papel estimaram o nível máximo e mínimo da altura da água que a lata permanecia em equilíbrio. Perceber que era possível obter essas medidas foi uma descoberta para a estudante.*

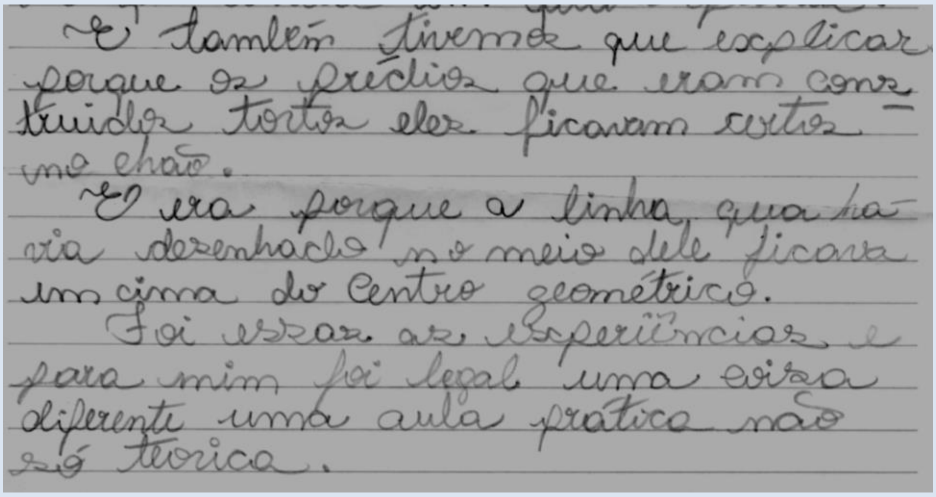
A estudante destaca nesse relata a aprendizagem de procedimentos de medidas que, visando construir uma representação plana do nível da água, teve que ser criativa, utilizando uma lata cortada e um lápis enrolado num papel para efetuar as medidas. Essa Unidade de Discurso indica que a estudante vê que essa sua aprendizagem se como uma “descoberta” depois de ter enfrentado esses pequenos desafios que exigiram criatividade e habilidade para efetuar as medidas.

Quadro 6: Descrição da Unidade Discurso 2 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.02**
Unidade de Discurso	 a Quarta coisa que agente fez foi desenhar o centro geometrico no desenho da lata pra gente achar o centro geometrico agente teve que usar o esquadro no minimo a figura é um triangulo já no maximo agente teve que repartir em duas formas geometricas depois ver os centrometros das formas geometricas e fazer a equação.
Asserção Articulada da USD	*A quarta atividade é a construção para determinar o centro geométrico no desenho do corte vertical da lata. Para isso, o grupo utilizou o esquadro. No nível mínimo, a parte com água foi representada por um triângulo e no máximo foi representada o grupo teve que decompor a figura em duas formas geométricas e, analisando as medidas dessas formas, utilizar uma equação para calcular o centro geométrico.*

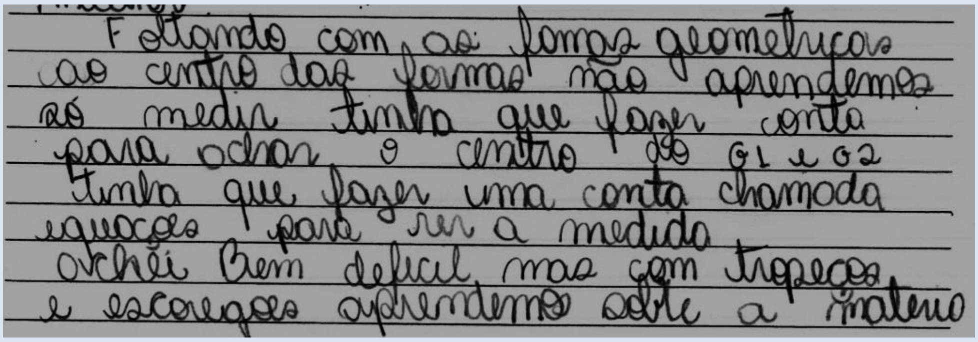
A Unidade de Discurso descreve a aprendizagem do método para determinar o centro geométrico de uma forma geométrica. No caso do triângulo foi empregado o esquadro e no caso da decomposição da forma geométrica foi utilizada uma equação a partir das medidas da figura. Essa Unidade de Discurso indica que a estudante percebe que essa aprendizagem se deu a partir da análise de uma situação e das possibilidades e condições que essa situação colocava.

Quadro 7: Descrição da Unidade Discurso 3 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.03**
Unidade de Discurso	 E também tivemos que explicar porque os prédios que eram construidos tortos eles ficavam certos no chão. E era porque a linha que havia desenhado no meio dele ficava em cima do Centro geométrico. Foi essas as experiências e para mim foi legal uma coisa diferente uma aula prática não só teorica.
Asserção Articulada da USD	*Uma atividade do grupo era explicar porque os prédios construídos de forma inclinada permaneciam em equilíbrio. A explicação era que a linha de gravidade desses prédios passava pelo seu centro de gravidade. Essa atividade é considerada prazerosa e diferente porque envolve uma aula prática e não apenas teórica.*

A estudante descreve a como o grupo utilizou o conhecimento sobre condições de equilíbrio adquirido com a experiência da latinha para explicar ou expressar uma compreensão sobre outras situações. Essa Unidade de Discurso indica que a estudante vê sua aprendizagem na MM se deu de maneira prática e que os conhecimentos adquiridos nessa aprendizagem podem ser transferidos para outras situações, para explicar outras situações parecidas.

Quadro 8: Descrição da Unidade Discurso 4 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.04**
Unidade de Discurso	 Estando com as formas geometricas os centro das formas não aprendemos só medir tinha que fazer conta para achar o centro do G1 e G2 Tinha que fazer uma conta chamada equações para ser a medida Achei Bem deficil mas com tropeços e escorregões aprendemos sobre a materia

Asserção Articulada da USD	*A atividade sobre as formas geométricas e a determinação do centro geométrico dessas formas não requer apenas saber medir, mas exige também saber fazer cálculos. Por exemplo, para determinar o centro geométrico de uma figura, decomposta em duas outras, foi preciso determinar o centro geométrico entre os centros de cada uma dessas partes em que foi decomposta. Aprender a utilizar um sistema de equações para determinar esse centro foi bastante dificultoso, envolvendo tentativas e erros.*

O estudante descreve dois tipos de aprendizagem nessa Unidade de Discurso: uma aprendizagem envolvendo habilidades de desenho, construção de figuras e medidas; e a aprendizagem envolvendo habilidades com cálculos e manipulações algébricas. Enquanto o primeiro tipo de aprendizagem é visto como mais fácil, o segundo tipo envolve dificuldades. A aprendizagem desse segundo tipo envolveu, nesse caso, tentativas e erros que o estudante descreve como “tropeços e escorregões”. O estudante vê sua aprendizagem na prática de MM como envolvendo diferentes tipos de aprendizagens e, em alguns desses tipos, a aprendizagem se dá envolvendo obstáculos, dificuldades e erros.

Quadro 9: Descrição da Unidade Discurso 5 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.05**
Unidade de Discurso	Não tem um jeito exato de falar como eu aprendi sobre esses três assuntos mas o que eu posso dizer é que eu prestei bastante atenção nas explicações do professor. E coloquei em pratica o que aprendi. Eu aprendi o que é o centro geometrico usando um fio prumo. Eu aprendi como determinar usando calculos e desenhos tipo traçamos algumas linhas na figura e onde as linhas se encontra é o ponto geo-metrico
Asserção Articulada da USD	*A estudante entende que não é possível descrever precisamente como aprendeu os assuntos envolvidos na prática de MM, mas o que ela pode perceber é que ela teve que estar muito atenta às orientações do professor e teve que colocar em prática o que aprendeu. Aprendeu o que é centro geométrico usando um fio de prumo, aprendeu como determinar o centro geométrico usando cálculos e efetuando construções.*

Essa Unidade de Discurso indica que a estudante percebe que sua aprendizagem geométrica se deu colocando em prática as orientações do professor. Neste sentido, essa aprendizagem se mostra como resultado de uma ação: a aprendizagem do centro geométrico se deu realizando experiências exploratórias com o fio de prumo e efetuando cálculos e construções. A estudante percebe que sua aprendizagem da geometria na MM se dá articulando outras aprendizagens, tais como saber colocar em prática conhecimentos e efetuar construções e experimentos.

Quadro 10: Descrição da Unidade Discurso 6 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.06**
Unidade de Discurso	Logo após Tivemos que desenhar a lata usando algumas medidas o meu desenho ficou errado Tinha que Ter um angulo di 90° mais o meu passou então Tentei de novo em caso. Ná pra medir a agua usamos Proveta gradluada.
Asserção Articulada da USD	*A estudante descreve que seu grupo teve que desenhar o corte vertical da lata, utilizando as medidas obtidas, mas seu desenho teve um erro de construção, pois deveria ter um ângulo de 90º, mas esse ângulo ficou maior do que 90º. A estudante diz que refez a construção em casa e que para medir a quantidade de água na lata utilizou uma proveta graduada.*

A estudante descreve sua aprendizagem, apontando a necessidade de precisão na realização das medidas e necessidade de utilizar corretamente essas medidas na construção do corte vertical da lata. A estudante percebe essa necessidade de precisão quando relata que teve que refazer sua construção. Essa Unidade de Discurso indica que a estudante percebe que sua aprendizagem geométrica se dá em situações em que a precisão e a correção são condições exigidas para se obter um resultado satisfatório.

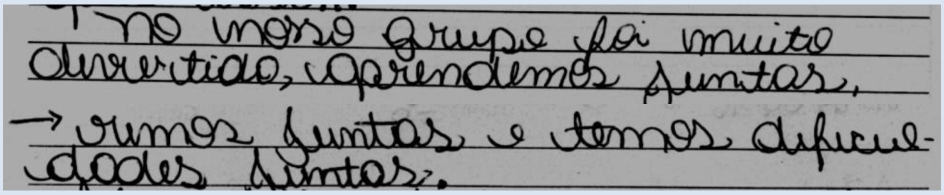
Quadro 11: Descrição da Unidade Discurso 7 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.07**
Unidade de Discurso	Na terceira atividade eu e o meu grupo fizemos de um jeito diferente nós colocamos o lapis até acho o centro geometrico e depois marcamos o lugar e assim não prescisamos usar o barbante foi mais fácil e pratico, depois para fazermos o di-senho tivemos dificuldade porque ero dificil incontrá o lugar exato do centro geometrico

Asserção Articulada da USD	*A estudante descreve que ela e seu grupo inventaram um procedimento diferente para localizar o centro geométrico das formas construídas com moldes de cartolina. O grupo utilizou um lápis para equilibrar esses moldes e, com isso, determinou o centro geométrico sem precisar do fio de prumo. A dificuldade do grupo apareceu quando precisaram determinar o centro geométrico utilizando uma construção, pois neste caso, o centro construído não correspondia exatamente como o centro geométrico obtido com o lápis.*

Aprender a determinar o centro geométrico empregando vários métodos, inclusive inventando novos métodos e avaliar esses métodos é uma característica da aprendizagem em práticas de MM percebida pela estudante. Assim, essa Unidade de discurso indica que que a estudante percebe que sua aprendizagem na MM se dá numa situação em que possibilidades de se chegar um resultado podem ser inventadas ou estão disponíveis. Essas possibilidades podem ser avaliadas e uma possibilidade pode escolhida por se mostrar mais adequada do que as outras.

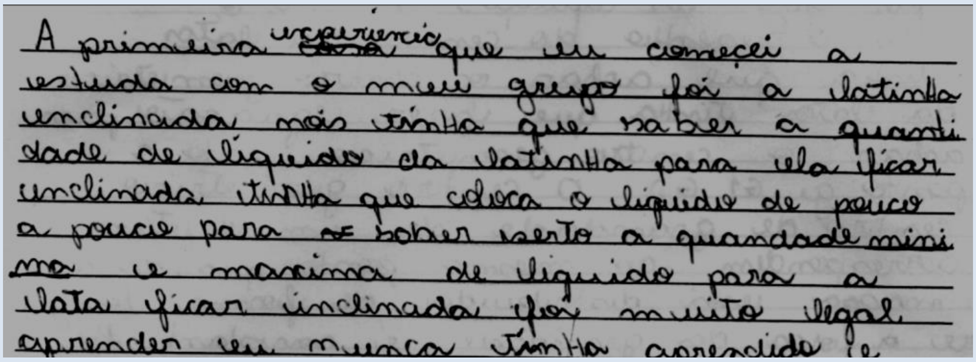
Quadro 12: Descrição da Unidade Discurso 8 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.08**
Unidade de Discurso	 no nosso grupo foi muito divertido, aprendemos juntas, → rimos juntas, e temos dificul-dades juntas.
Asserção Articulada da USD	*O trabalho realizado em grupo, na prática de MM, é percebido como sendo muito prazeroso, divertido, porque a aprendizagem acontece em conjuntamente, acontece enquanto os membros do grupo riem e enfrentam cooperativamente as dificuldades que aparecem.*

A estudante descreve o trabalho em grupo e a importância desse trabalho em grupo para sua aprendizagem. Em seu relato ela aponta dificuldades na realização das medidas e nas construções geométricas, ao mesmo tempo, aponta que a interação com os colegas de grupo ajudou em sua aprendizagem. Essa Unidade de Discurso indica que a estudante percebe que sua aprendizagem na MM se deu na interação com os outros membros do grupo.

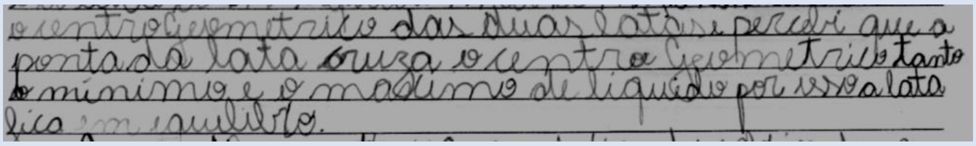
Quadro 13: Descrição da Unidade Discurso 9 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.09**

Unidade de Discurso	 A primeira ~~ideia~~ experiencia que eu comecei a estuda com o meu grupo foi a latinha enclinada mais tinha que saber a quantidade de liquido da latinha para ela ficar enclinada tinha que coloca o liquido de pouco a pouco para ~~se~~ saber serto a quandade minima e maxima de liquido para a lata ficar inclinada foi muito legal aprender eu nunca tinha aprendido
Asserção Articulada da USD	*A primeira investigação realizada pelo grupo foi para determinar as quantidades máxima e mínima que a lata permanece em equilíbrio. Essa investigação é percebida como um experimento em que a água tinha que ser colocada pouco a pouco para determinar precisamente essas quantidades.*

O estudante descreve a investigação realizada pelo seu grupo e percebe em sua realização duas características dessa atividade: a natureza empírica da investigação que oferece incertezas e possibilidades de erro e a necessidade de controlar o experimento para obter precisão nas medidas. Essa Unidade de Discurso indica que o estudante percebe que sua aprendizagem se deu num ambiente de caráter experimental, em que a atividade exploratória está sujeita a erros e acertos e o controle do experimento é um modo de conseguir precisão nos resultados.

Quadro 14: Descrição da Unidade Discurso 10 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.10**
Unidade de Discurso	 o centro Geometrico das duas latas e percebi que a ponta da lata cruza o centro Geometrico tanto o minimo e o maximo de liquido por isso a lata fica em equilibrio.
Asserção Articulada da USD	*O estudante percebe que se a linha vertical da gravidade passa pelo ponto de apoio da latinha, em sua borda, e pelo seu centro geométrico então a latinha permanece em equilíbrio.*

A verificação de que o modelo matemático, expresso na construção geométrica, esclarece a razão física do equilíbrio da lata é percebido pelo estudante como um modo como sua aprendizagem se deu. Essa Unidade de Discurso indica, portanto, que o estudante percebe que sua aprendizagem se dá numa situação em que precisa expressar uma compreensão, de modo que essa compreensão é expressa no modelo matemático construído.

Quadro 15: Descrição da Unidade Discurso 11 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.11**
Unidade de Discurso	quantidade de água, aprendemos muitas coisas em grupo pois o trabalho era em grupo aprendemos com que quantidade de água a lata fica aprendemos a quanti- dade do mínimo e do máximo se juntamos várias vezes no laboratório de ciências para aprender muito mais. aprendemos também que o peso se divide em dois ou a lata fica em equi- líbrio. A segunda experiência
Asserção Articulada da USD	*A estudante descreve que várias vezes, ao longo da prática de MM, seu grupo se juntou no laboratório de ciência para aprender ainda mais e que, dentre as coisas que aprendeu foi que a simetria do peso, estabelecida pela linha de gravidade, é um dos motivos que leva a latinha a ficar em equilíbrio.*

A estudante descreve sua aprendizagem como acontecendo em razão da interação com o grupo e do fato dessa interação ocorrer num ambiente de investigação. Aprender que o equilíbrio da lata tem a ver com a simetria do peso é percebido pela estudante como resultado dessa interação e desse ambiente de investigação.

Quadro 16: Descrição da Unidade Discurso 12 da Prática 1

Código da USD	**USD.1.12**
Unidade de Discurso	Desenhamos tudo isso em uma folha e desenhamos o "corte vertical da lata" e "vemos" o nível d'água inclinado, no desenho d'água encontramos o centro geométrico e também em forma
Asserção Articulada da USD	*O estudante descreve que seu grupo representou todas as medidas obtidas na construção do corte vertical da lata inclinada e, com isso, seu grupo conseguir visualizar o nível da água inclinada com o objetivo de determinar, nessa construção, o centro de gravidade da lata.*

O estudante descreve uma situação em que o modelo geométrico é utilizado para visualizar um fenômeno físico, de modo que essa visualização oferece uma compreensão sobre a determinação do centro geométrico. Essa Unidade de Discurso indica que o estudante percebe que sua aprendizagem na prática de MM se deu numa situação em que a situação requeria utilizar a geometria como visualização.

4.2 ANÁLISE IDEOGRÁFICA DA PRÁTICA 2

Para efetivar a Análise Ideográfica da prática 2, selecionamos 8 relatos (ver Apêndices), dos quais extraímos 8 Unidades de Discurso. Embora sejam 58 o número de relatos obtidos para essa prática de MM, escolhemos apenas 8 relatos para serem analisados porque isso torna a apresentação dos dados mais curta e menos repetitiva. Com relação às Cenas Significativas, apresentamos e analisamos 4 delas porque percebemos que essas evidenciam a manifestação da aprendizagem da geometria em práticas de MM e aponta sentidos que os relatos ainda não mostraram.

4.2.1 Unidades Significativas das Cenas da Prática 2

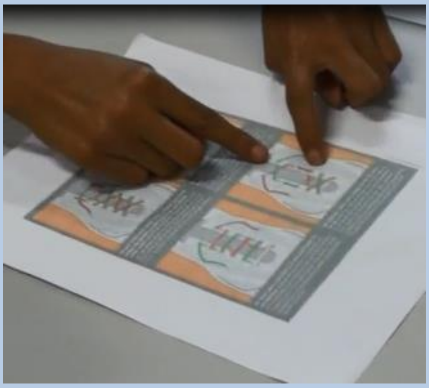
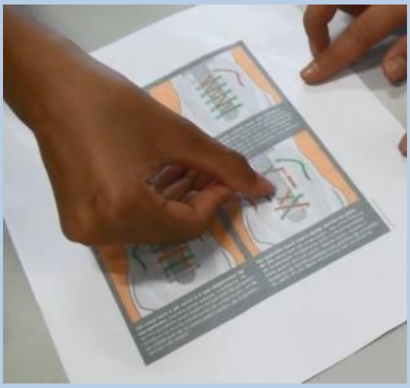
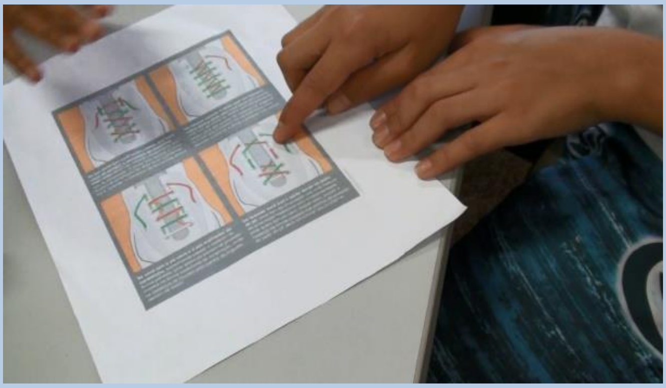
Cena 1: Compreensões sobre as trajetórias dos cadarços

A cena 1 mostra o trabalho do grupo formado pelos estudantes Guilherme, Maria Isabel, Maria Fernanda, Yara, Eduarda e Camilly que após obterem as medidas das quatro amarrações de cadarço, elabora uma explicação para o fato de algumas amarrações economizarem mais cadarço do que outras. A cena começa quando o professor, que percorre a sala para observar o trabalho dos estudantes, pergunta ao grupo acerca dessa explicação.

Quadro 17: Descrição da Cena 1 da Prática 2

Código da USC	Expressões dos sujeitos
01	**Figura 59: Estudantes explicam o gasto de cadarço em cada método de amarração**  PROFESSOR: *Então, a questão prá vocês é a seguinte: como a maneira com que é realizada a amarração faz com que sobra mais ou sobra menos cadarço?* YARA: *Porque numa, o cadarço faz um percurso **maior**... **passa** em mais lugares e em outra **passa menos*** (gesticula, indicando no gesto da mão o percurso do

	cadarço na amarração). **Figura 60: Yara gesticula para indicar o percurso do cadarço na amarração** 
USC.2.1.01	A estudante emprega as noções de "passar em mais lugares" e "passar em menos lugares" para explicar o método que gasta mais e menos cadarço. Essa explicação é expressa no gesto de traçar no ar, com o dedo, um percurso percorrendo em ziguezague vários pontos.
02	PROFESSOR: *Sim, mas, por que o cadarço faz um percurso maior numa e na outra menos? O que tem no jeito de amarrar o...* MARIA ISABEL: *É que tem vários modelos ... tem uns que passam por cima e passam por baixo ... vai* ***gastando*** *bastante pedaço de cadarço..., por exemplo, a amarração em x, a amarração em x eu acho que* ***gasta menos*** *porque ele vai sempre em linha, assim, ó.* (indicando no gesto da mão, os tipos de amarração de cadarço) PROFESSOR: *E a que gasta mais?* MARIA ISABEL: *Agora esta daqui eu acho que gasta mais porque o cadarço passa por* ***baixo*** *e passa por* ***cima****.* (indicando no gesto da mão, a amarração que gasta mais cadarço). CAMILLY: *Porque tem umas amarrações que o cadarço dá mais volta do que outras.* PROFESSOR: *Mas, qual sobra mais cadarço?* CAMILLY: *A quarta.* PROFESSOR: *E por que vocês acham que ela economiza mais cadarço que as outras?* EDUARDA: *E porque tem pouco, ó, ela cruza pouco. Fica até um buraco aqui, ó.* (indicando com o dedo o aspecto visual da amarração que indica por que ela gasta menos cadarço). **Figura 61: Eduarda mostra porque um método economiza mais cadarço do outro**

	 
USC.2.1.02	As estudantes percebem que, como, nas amarrações, o cadarço se cruza, formando um x, então a amarração gasta menos, porque o cadarço "vai sempre em linha", ou seja, seu percurso tende para uma linha reta. Em sua explicação, as estudantes indicam perceber que comprimento do percurso do cadarço sobre o papel, depende do ângulo que o cadarço forma em sua amarração. A explicação do cadarço que gasta mais emprega a ideia de que o gasto tem a ver com passar em mais lugares, ou seja, se, num percurso, a trajetória inclui mais pontos em ziguezague, então seu comprimento é maior.
03	GUILHERME: *Ela dá menos* ***voltas****, ó.* (indicando com o dedo a amarração que gasta menos cadarço) **Figura 62: Guilherme explica o percurso do cadarço em cada amarração**  PROFESSOR: *E a que sobra menos cadarço?* GUILHERME: *É a terceira?* PROFESSOR: *E por que vocês acham que ela gasta mais cadarço?* GUILHERME: *É porque ela faz bastante, ó. Ela faz bastante ziguezague, ó. Ela vai prá lá, ela volta, ela passa por baixo, ó. Entendeu?* (indicando no desenho o modo como a amarração gasta mais cadarço). **Figura 63: Guilherme explica a relação entre o tipo de amarração e a economia de cadarço**

	 
USC.2.1.03	O número de "voltas" é percebido como determinante no comprimento do cadarço gasto na amarração. Num percurso, quanto maior o número de pontos percorridos na trajetória, maior será o comprimento do percurso. Ir em linha é contrário de ir em ziguezague e, como em linha reta é o caminho mais curso, quanto menos ziguezague ou em quanto menos lugares o cadarço passar, mais curto será o comprimento do cadarço gasto.

O modo como os estudantes explicam porque um método de amarração gasta mais ou menos cadarço do que outro revela que eles assumem pressupostos e constroem hipóteses sobre o tema investigado que expressam dois modos de compreender a situação. A primeira é expressa na ideia de que o comprimento do cadarço depende do número de ziguezagues que ele faz na amarração. Essa ideia é sustenta no seguinte raciocínio geométrico: se o segmento de reta AB fornece a menor distância entre os pontos A e B, então qualquer outro percurso entre A e B terá um comprimento que será tanto menor quanto mais se aproximar de uma reta, ou seja, quanto menos ziguezague entre A e B realizar. A segunda compreensão é expressa na ideia de que o comprimento do cadarço depende do ângulo que ele forma no tipo de amarração. Essa compreensão é apenas esboçada na afirmação de que as amarrações formam um x e na afirmação de que numa amarração fica um buraco, provocado pela diferença entre ângulo de incidência e ângulo de reflexão, e, por isso, é mais curta.

Nessas duas compreensões, a trajetória do cadarço é expressa em gestos linguístico como, por exemplo, percorrer em ziguezague vários pontos no ar com a ponta do dedo para expressão um método de amarração. Esses gestos indicam a importância da movimentação corporal na compreensão da situação. Enquanto a primeira compreensão é mais intuitiva e "vaga" do ponto de vista da construção do argumento, a segunda compreensão é mais operacional, pois relaciona a medida de ângulos com o comprimento do cadarço. Essa segunda compreensão, portanto, direciona a investigação para uma abordagem geométrica do tema.

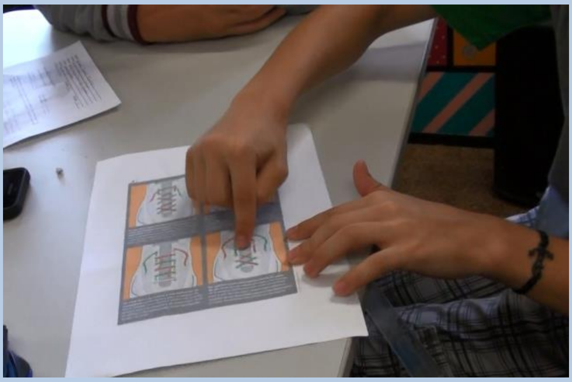
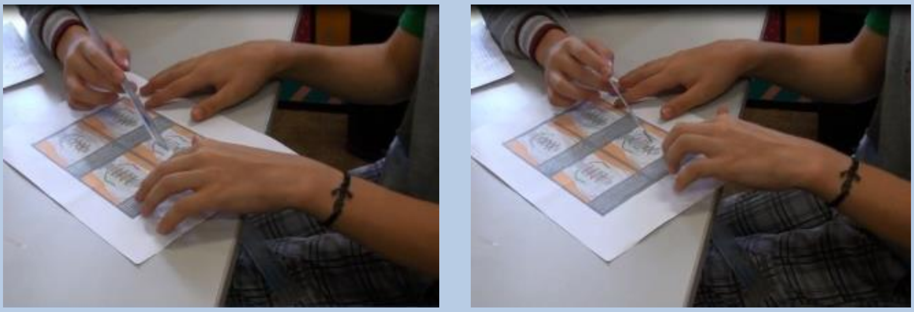
Cena 2: Investigando a condição de minimalidade de percursos

A cena mostra o trabalho do grupo formado pelos estudantes Kaio, Lucas, João Victor e Gabriel. Após obter as medidas das diversas amarrações, esse grupo elaborou uma explicação relacionando o percurso do cadarço, isto é, o caminho que o cadarço percorre quando vai de um furo até outro, com a sobra maior ou menor das pontas do cadarço no tênis. A cena começa quando o professor pede ao grupo para descrever o jeito que o cadarço vai de um furo até outro.

Quadro 18: Descrição da Cena 2 da Prática 2

Código da USC	Expressões dos sujeitos
01	**Figura 64: Estudantes investigando o percurso do cadarço em cada amarração**  PROFESSOR: *Como o cadarço vai de um furo até outro furo nessa amarração?* (apontando para a imagem da amarração na folha) KAIO: *Vai assim ...* (gesticula). *Para o* ***lado*** *assim e* ***descendo*** ... (procurando as palavras e fazendo o gesto de percorrer com o dedo o caminho percorrido pelo cadarço) **Figura 65: Kaio indica nos gestos o percurso do cadarço**  PROFESSOR: *Na transversal?* KAIO: *Assim não é* ***diagonal****? É* ***diagonal****, não é?* PROFESSOR: *Nesse caso, é melhor chamar de transversal. Diagonal é de polígono. Mas, chamar de diagonal não tá errado também, não. E o que mais? Qual é o outro jeito de...* JOÃO VICTOR: *Na* ***horizontal****, na* ***vertical*** *ou pode ir de* ***baixo*** *até em* ***cima****,* ***direto****. Vai variando.* (acompanhando, respectivamente, a pronúncia das palavras *horizontal*, *vertical*, *baixo*, *cima* e *direto* para com gestos de desenhar no ar os possíveis caminhos do cadarço na amarração).

	Figura 66: João Victor indica nos gestos o percurso do cadarço na amarração 
USC.2.2.01	A descrição do percurso do cadarço é realizada articulando a fala com os gestos de percorrer com o dedo o percurso do cadarço numa imagem impressa ou no “ar”. Esse percurso é descrito incialmente como “vai para o lado” e “vai descendo”. Em seguida, essa descrição emprega os termos “diagonal”, “transversal”, “horizontal” e “vertical” para caracterizar a direção do cadarço na amarração.
02	PROFESSOR: *E, como horizontal, vertical, transversal se combinam pro cadarço ficar mais curto?* KAIO: *Como assim?* PROFESSOR: *Por exemplo, se o cadarço vai de um furo até outro furo do outro lado do tênis, que tipo de percurso teria o menor comprimento?* JOÃO VICTOR: *Eu acho que o jeito de amarração assim, ó,* ***cruzando****, assim, gasta menos cadarço ... porque o cadarço* ***vai*** *e* ***volta****, deste furo até o outro lado,* ***direto*** *na* ***diagonal****... na* ***transversal****.* (indicando na imagem impressa) **Figura 67: João Victor explica o percurso do cadarço** 
USC.2.2.02	A variação no comprimento gasto do cadarço é percebido como estando relacionado com o modo como o cadarço vai de um lado até outro. Se, na amarração, o cadarço percorre um furo até outro na diagonal, indo direto ao furo do outro lado, então ele percorre um comprimento menor.
03	PROFESSOR: *E, que tipo de percurso gastaria mais cadarço?* OÃO VICTOR: *Eu acho que é este aqui, ó. Porque o cadarço vai primeiro prá* ***baixo****, na* ***vertical****, depois vai pro outro* ***lado****, na* ***horizontal****, ele não vai* ***direto*** *na* ***diagonal****.* (acompanha sua fala, gestos de indicar na figura a amarração que gasta mais cadarço).

	Figura 68: João Victor explica o comportamento dos ângulos em cada amarração  GABRIEL: *É porque ele vai assim, ó, fazendo mais **ângulos**, na vertical e depois na horizontal. Porque na **diagonal** gastaria menos.* (explica, indicando com gestos os ângulos presentes na amarração) **Figura 69: Kaio explica a relação entre os ângulos e o comprimento do cadarço** 
USC.2.2.03	A amarração de percurso mínimo é relaciona com o ângulo forma entre a direção do cadarço e o lado, onde se situa a fileira de furos. Se a direção do cadarço para na diagonal, direto para o furo mais próximo no lado oposto, então percorre uma distância menor.

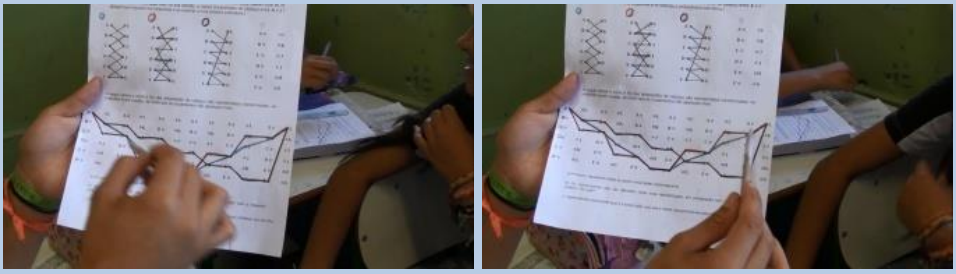
Ocorre nessa cena uma mudança relevante no modo como os estudantes descrevem o percurso do cadarço e relaciona características geométricas dessa descrição com a condição de minimalidade do percurso. Inicialmente os estudantes explicam empregando uma descrição que emprega expressões do tipo “vai para o lado”, “vai descendo”, “ir de baixo até em cima, direto”. Utilizam também termos próprios da geometria como “diagonal”, “transversal”, “horizontal” e “vertical”, mas não vincula esses termos ao comprimento do percurso do cadarço. A mudança ocorre quando esses termos são empregados para se referir aos ângulos que o cadarço forma com o lado do tênis. As amarrações em que a direção do cadarço forma ângulos de incidência e de reflexão congruentes são os possuem comprimentos menores. Isto que quer dizer essa constatação abre uma possibilidade de investigar a relação entre o ângulo e a condição de minimalidade do percurso.

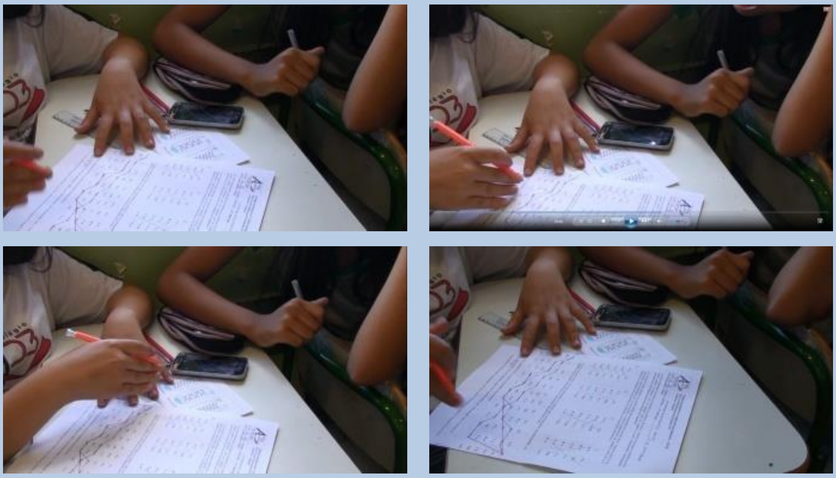
Cena 3: Propondo, testando e reformulando hipóteses

A cena mostra o trabalho do grupo formado pelos estudantes Emanuelly, Jennyfher, Natália e Emilly que, após obterem a construção das imagens refletidas dos três tipos de amarração numa mesma malha pontilhada, analisam essa construção para explicar por que algumas economizam mais cadarço do que outras. A cena começa quando o professor, que percorre a sala observando o trabalho dos estudantes, pergunta ao grupo como elaboraram sua explicação.

Quadro 19: Descrição da Cena 3 da Prática 2

Código da USC	Expressões dos sujeitos
01	**Figura 70: Estudantes discutem as condições de minimalidade da amarração do cadarço**  PROFESSOR: *Então, vocês já decidiram qual a amarração tem o comprimento mais curto?* EMANUELLY: *O primeiro, a do cadarço americano, aqui, ó.* PROFESSOR: *E qual é a mais longa?* EMANUELLY: *O da sapataria é o mais longo.* PROFESSOR: *Então o mais curto é o método americano, depois o o método europeu e o mais longo é o da sapataria? É isso, né?* CORO: *É.* PROFESSOR: *Então a questão é **explicar** isso. **Explicar** por que o método americano é o mais curto e os outros mais longos.* EMANUELLY: *Eu acho que é porque o método americano... o caminho vai mais **reto**, ó, vai mais **direto** do começo até o final. Os outros faz mais **volta**, faz mais **curvas**, ó. O método americano não dá tantas **curvas** quanto os outros caminhos.* PROFESSOR: *Então mostra isso aí prá mim no desenho o que você chama de curva. Vamos ver!* **Figura 71: Emanuelly discute a minimalidade do percurso do cadarço.**

	 EMANUELLY: *Aqui, ó, essas curvinhas aqui.* (indicando no desenho os ângulos formados na imagem refletida da amarração)
USC.2.3.01	Ao percorrer visualmente a linha que representa o comprimento do cadarço na construção geométrica, as estudantes elaboram a explicação de que a condição de minimalidade do comprimento do cadarço depende do número de “curvas” (vértices), ou seja, a linha que faz mais ziguezague é a mais longa.
02	PROFESSOR: *Ah! O que você chama de curva são esses ângulos formados aqui? Então quanto mais ângulos, mais longo é o comprimento da amarração?* EMANUELLY: *É. Eu acho que sim porque o mais curto é o que tem menos ângulos.* PROFESSOR: *Quantos ângulos têm no método americano?* EMANUELLY: *São dois, não são? Porque vem... vem... e vem assim na diagonal, depois tem esse pedacinho aqui na **horizontal** e volta na **diagonal** até o fim. Então são dois **ângulos** só, mesmo.* (acompanhando sua fala com gestos de apontar no desenho, indicando o sentido do uso das palavras *vem*, *diagonal*, *horizontal* e *ângulos*). **Figura 72: Emanuelly compara as reflexões de dois métodos de amarração**  PROFESSOR: *E os outros dois métodos, têm quantos ângulos cada um?* JENNYFHER: (...) (conta os ângulos) *O europeu tem 10 ângulos.* (...) (conta os ângulos) *E o da sapataria também tem dez.* PROFESSOR: *Então isso não vale, tá vendo? Porque o método europeu e o da sapataria ...* JENNYFHER: *... têm comprimentos diferentes, mas o mesmo tanto de ângulos. Mas, e o método americano? Prá ele vale. Ele é mais curto e o com menos ângulo. Então tem a ver, né?*
USC.2.3.02	A contagem do número de ângulos em cada método de amarração coloca em questão a hipótese de que a condição de minimalidade está relacionada com o número de ângulos. A estudante não descarta totalmente a hipótese porque verifica que ela vale para o método de comprimento mínimo, mas

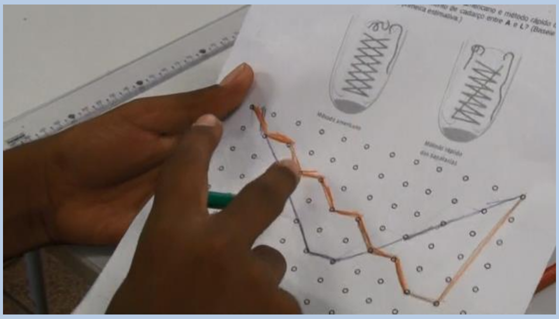
	busca uma reestruturação do modo como ela vê a construção.
04	PROFESSOR: *Eu também acho que tem a ver, mas não vale como regra geral, né. Por exemplo, como ter mais ângulos explicaria que o método europeu é mais longo que o método americano?* EMILLY: *Por causa dos ângulos, o método europeu não segue em linha* ***reta****, vai formando* ***triângulos****, ó. Enquanto o americano vai* ***direto****, nesse* ***lado*** *aqui, ó, do triângulo, o método europeu vai por dois lados que esse* ***ângulo****, aqui, ó.* (empregando as palavras *reta, direto, triângulo, lados* e *ângulo* para descrever os gestos de apontar e movimentar a mão para indicar a direção do percurso do cadarço). **Figura 73: Emilly gesticula para indicar os ângulos do percurso do cadarço** 
USC.2.3.03	Ao retornar à comparação entre os métodos de amarração, a estudante descreve a construção geométrica de dois métodos e destaca a formação de triângulos em um caso e a não formação de ângulo no outro. A fala e os gestos da estudante indicam uma aproximação com a propriedade da desigualdade triangular.

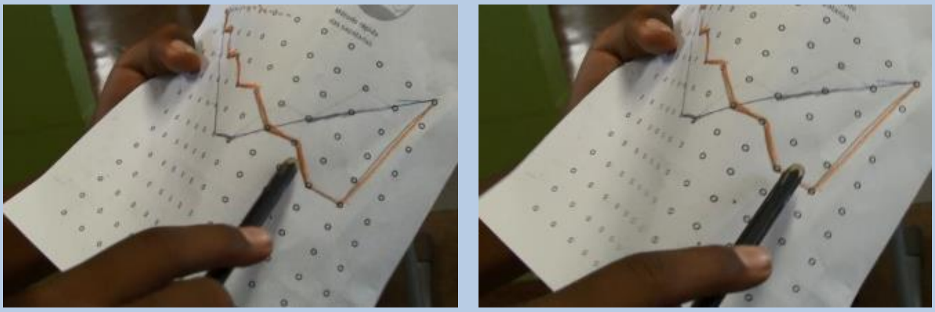
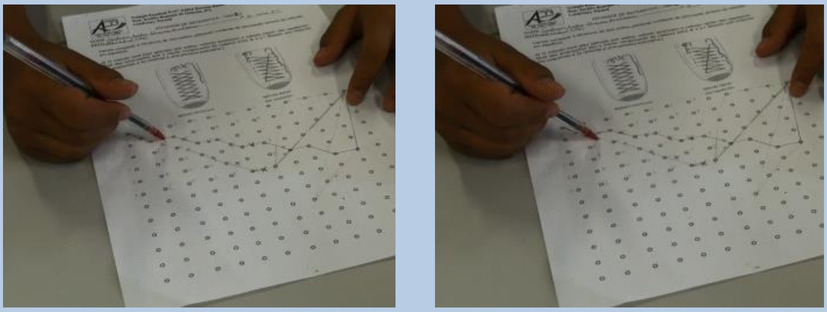
A cena mostra uma transição na abordagem da investigação da condição de minimalidade do percurso do cadarço. Primeiro as estudantes propõem a explicação de que essa condição está relacionada com o número de ângulos na construção. Em seguida, essa hipótese é questionada e um contraexemplo é apontado. Com isso, as estudantes reformulam sua explicação fazendo referência aos triângulos que aparecem em amarrações que não possuem o menor comprimento. Essa transição caracterização uma aprendizagem. E como se deu essa aprendizagem? O modo como essa aprendizagem se deu está relacionado com a formulação de hipóteses, verificação da plausibilidade dessas hipóteses e reestruturação ou colocação de novas hipóteses. Tem-se, neste caso, uma abertura a novas possibilidades de compreensão. Além disso, outro aspecto importante acerca do modo como essa aprendizagem se deu vincula-se a interação entre os membros do grupo e o professor, ao diálogo realizado e as compreensões intersubjetivas que aí ocorreram.

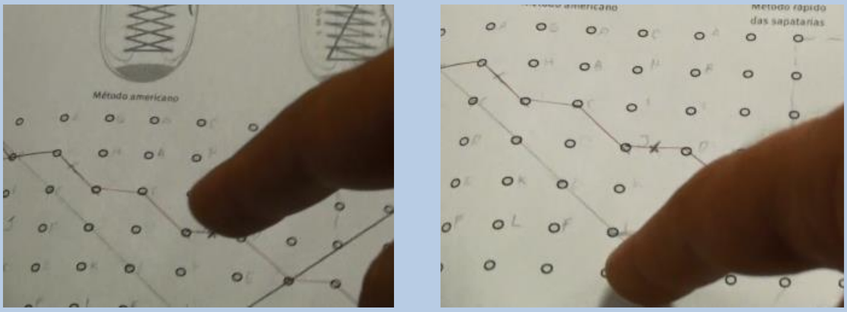
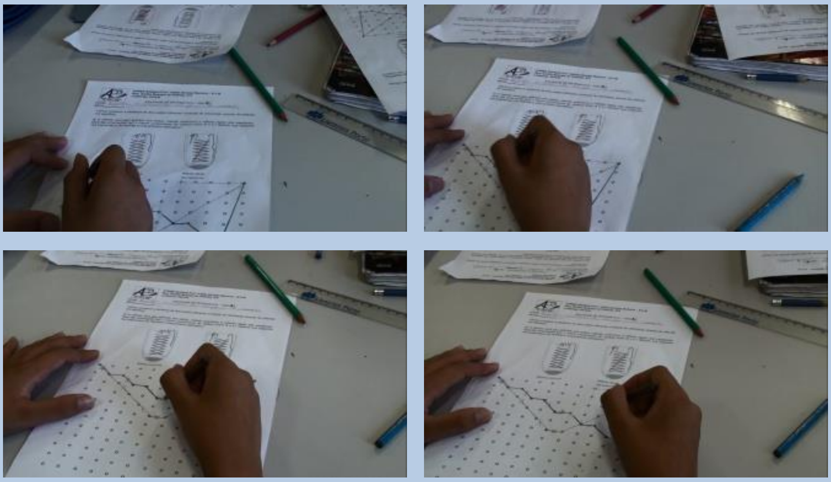
Cena 4: Aprendendo a simplificar a construção geométrica

A cena mostra o trabalho realizado com todos os grupos no qual o professor procura discutir o procedimento de simplificar a construção, feita numa malha pontilhada, das imagens de duas amarrações de cadarço, eliminando concomitantemente, em cada uma delas, os segmentos de mesmo comprimento. A cena começa quando o professor questiona os grupos como simplificar essa construção.

Quadro 20: Descrição da Cena 4 da Prática 2

Código da USC	Expressões dos sujeitos
01	**Figura 74: Estudantes investiga como simplificar as representações na malha pontilhada**  PROFESSOR: *Veja aí na construção, tem segmentos de mesmo tamanho nas duas amarrações. Como a gente pode utilizar isso* ***simplificar*** *essas amarrações?* (gesticula a mão indicando, na palavra simplificar, o “corte” dos segmentos de mesmo comprimento) PEDRO: *Dá prá tirar o que é igual. Aqui, ó, tem uma diagonal numa e uma diagonal na outra, daí a gente* ***tira***, ***risca***. **Figura 75: Construção elaborada para comparar métodos de amarração**  PROFESSOR: Isso. *Você diz eliminar as partes iguais, os segmentos de mesmo tamanho, né? Porque isso funciona, sim. Mas por que funciona, né? Por que a gente pode fazer isso? Quer dizer, por que eliminar os segmentos iguais não altera a relação entre quem é maior e quem é menor?* WILLIAM: *Porque tá* ***tirando*** *só o que é igual. Daí, o que* ***sobra***, *se é maior continua maior, não* ***altera***.

	PEDRO: *É... porque... a gente já sabe que o cadarço americano é menor e o da sapataria é maior... quando tira dos dois um pedaço igual, o da sapataria continua maior e o americano continua menor.* **Figura 76: Comparação de métodos de amarração representadas na malha pontilhada** 
USC.2.4.01	Eliminar os segmentos congruentes nas duas representações é percebido como um procedimento para simplificar a construção. A validade desse procedimento de eliminar os segmentos iguais vincula-se a não alteração da relação de desigualdade, pois se retirar trechos iguais em duas amarrações, a relação entre seus comprimentos não se altera.
02	PROFESSOR: *É. Essa explicação tá correta. Boa explicação, aliás! Então, veja só, prá simplificar a gente pode ver aí quais os segmentos são iguais, com mesmo comprimento, e eliminar eles. Então, o que dá prá eliminar, aí?* CHRISTIAN: *Pode eliminar esta **daqui** com esta daqui...* (apontando com a caneta para o desenho) **Figura 77: Simplificações das reflexões das amarrações**  PROFESSOR: *Não. Esta daqui é horizontal e esta daqui é diagonal. Você não pode eliminar as duas... porque, veja, elas são de mesmo tamanho?* CHRISTIAN: *Ah, não, né? Elas são diferentes. Então tem que ser **diagonal** com **diagonal** e **horizontal** com **horizontal**?* (gesticulando na diagonal e depois na horizontal) PROFESSOR: *É, isto se forem do **mesmo tamanho**. Por exemplo, quantas horizontais dá prá eliminar nas duas amarrações?*
USC.2.4.02	A palavra simplificar é compreendida incialmente como uma exclusão de segmentos, não necessariamente congruentes, mas que visualmente podem ser percebidos como de mesmo tamanho. Após a verificação de que os segmentos horizontal e diagonal não possuem o mesmo tamanho, os estudantes reformulam sua afirmação e indicam que simplificar é eliminar os segmentos de mesma direção, ou seja, diagonal com diagonal

	e horizontal com horizontal.
03	KAUAN: *Só duas, uma de cada, ó, porque a amarração americana só tem uma horizontal, o da sapataria tem cinco, mas daí só dá prá eliminar uma aqui e outra aqui.* (apontado para o desenho os segmentos horizontais que podem ser excluídos) **Figura 78: Simplificações dos percursos representados na malha pontilhada**  PROFESSOR: *É, isto aí, uma de cima e a outra de baixo. E as diagonais, aí? Quantas de cada dá prá eliminar?* KAUAN: ***Essas** duas primeiras, aqui, ó. Depois **essa** com **essa**. **Essas** aqui não. **Essas** aqui, sim. **Essas**, sim. E essas. Então são cinco de cada.* (enfatizando com o gesto de apontar o lápis para o desenho o sentido do uso das palavras *essas* e *essa*). **Figura 79: Kauan indica possibilidades de simplificar as representações** 
USC.2.4.03	A realização do procedimento de simplificação é percebida como uma enumeração uma a uma dos que podem ser eliminados e anotá-los com alguma marca.
04	CHRISTIAN: *Mas, essas duas aqui, ó, uma tá **descendo** e a outra tá **subindo**, pode eliminar assim mesmo, professor?* PROFESSOR: *Pode porque a direção da diagonal não importa, o que importa aí é o **tamanho**, ter o mesmo **comprimento**. É importante ver o que sobra, por exemplo, o que sobrou em cada amarração, aí de vocês?* PEDRO: *Da amarração americana sobrou cinco diagonais. É cinco diagonais na americana que sobrou. Já na sapataria sobra quatro horizontais e uma diagonal grande, essa aqui, ó.* (gesticulando para apontar no desenho os

	segmentos que sobraram depois da eliminação. PROFESSOR: *É isso, tá vendo, ó. Não* ***sobra*** *segmentos iguais nas duas amarrações. Não há* ***nenhum*** *segmento de mesmo tamanho nas duas sobras.*
USC.2.4.04	Os estudantes tornam efetiva sua compreensão do procedimento para eliminar segmentos congruentes, indicando os segmentos que seriam eliminados e os que sobrariam depois dessa eliminação.

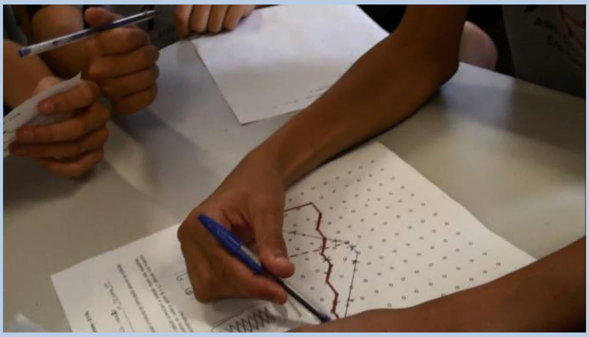
A cena apresenta significados produzidos pelos estudantes acerca do procedimento de eliminar concomitantemente, nos dois métodos de amarração, segmentos de mesmo comprimento. Esses significados são expressos nas justificações dos estudantes para a validade desse procedimento. A simplificação da construção é percebida inicialmente como um ato baseado unicamente na acuidade visual. Por isso, segmentos visualmente percebidos como de tamanhos aproximadamente iguais poderiam ser eliminados na simplificação. Mas, a necessidade de construir uma justificação para esse procedimento auxilia na reformulação desse significado inicial. Afirmar que eliminar segmentos iguais de dois percursos não altera sua relação de ordem, ou seja, o que era menor antes da eliminação continua sendo menor depois da eliminação, atribui um novo significado ao procedimento adotado, pois sua justificação deixa de ser exclusivamente baseada na acuidade visual e passa a se apoiar numa relação lógica formal.

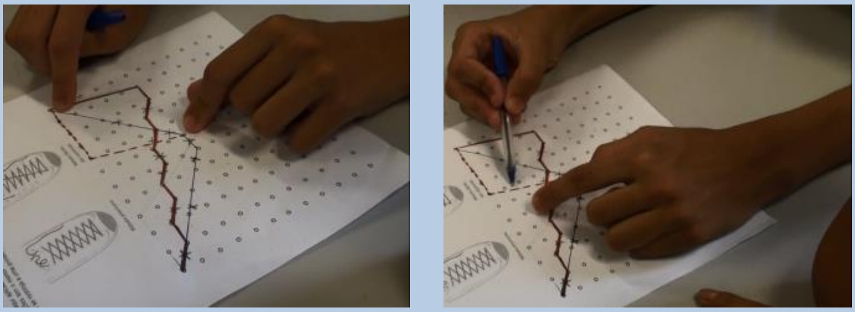
A efetivação da compreensão desse novo significado se dá com a indicação que os estudantes de quais segmentos seriam eliminados e quais sobrariam segundo essa relação lógica formal. É essa efetivamente que torna claro a ocorrência da aprendizagem do procedimento para simplificar a construção, pois essa efetivação marca uma transformação no modo dos estudantes de compreender a construção. O modo como essa aprendizagem se dá vincula-se ao momento em que os estudantes, ao invés de aplicar uma norma ou um procedimento, voltam-se para justificá-la.

Cena 5: Empregando o significado da desigualdade triangular

A cena mostra o trabalho realizado pelo grupo formado pelos estudantes Christian, William, Kauan, Gabriel, Lucas e João Victor que após simplificarem a representação de duas amarrações de cadarço na malha pontilhada, buscam construir um triângulo para comparar seus comprimentos. A cena começa quando o professor questiona o grupo como fizeram essa construção do triângulo.

Quadro 21: Descrição da Cena 5 da Prática 2

Código da USC	Expressões dos sujeitos
01	**Figura 80: Estudantes investigam as condições de minimalidade de percurso com segmentos retos**  PROFESSOR: *Como vocês formaram o triângulo com as* ***sobras****? Prá* ***onde*** *vocês transportaram as sobras?* CHRISTIAN: *As cinco diagonais coloquei aqui, ó, nessa diagonal aqui, ó, formando um lado do triângulo. As horizontais vai lá em cima e a diagonal grande vem prá cá, fechando o triângulo.* (percorrendo com a ponta da caneta para mostrar os lados do triângulo formado com os segmentos transportados) **Figura 81: Christian explica as condições de minimalidade da amarração**  PROFESSOR: *Mas, quais* ***desses lados*** *aí é do método americano e quais é do método da sapataria?* CHRISTIAN: *O método da sapataria é esses dois lados aqui, ó. O método americano fica tudo num lado só, aqui. Fica assim, sapataria-sapataria-americano.* (mostrando no desenho onde estão os segmentos de cada método)
USC.2.5.01	O procedimento de construir um triângulo com as sobras de segmentos é percebido e descrito como sapataria-sapataria-americano, ou seja, um lado é o método americano e os outros dois é o método sapataria. Esse procedimento viabiliza a comparação entre dois métodos de amarração utilizando a desigualdade triangular.
02	PROFESSOR: *Tá. E por que o método sapataria é maior?* CHRISTIAN: *Porque esses dois lados que é o método sapataria...* ***somando*** *os dois fica* ***maior*** *do que o lado do método americano.* WILLIAM: *E também o método americano é menor porque sempre a reta é o caminho mais curto.* (mostrando compreender a afirmação de Christian) PROFESSOR: *É, mas explica isso aí com seu desenho.*

	WILLIAM: *É porque essa reta azul aqui é o percurso que... é o* ***tamanho****, é o* ***tamanho*** *da linha... da amarração americana como se estivesse* ***estendida*** *assim... e essa linha vermelha é a amarração da sapataria como se estivesse* ***estendida****. Então dá prá ver que o vermelho é* ***maior*** *do que o azul porque o azul é* ***reto*** *e o vermelho, não.* (indicando com o dedo e com a caneta o sentido do uso das palavras *tamanho, estendida, maior* e *reto*) **Figura 82: William explica a minimalidade de percursos com segmentos de reta** 
USC.2.5.02	A construção efetuada para comparar os métodos de amarração é descrita. O método americano é mais curto porque seus segmentos que sobram ficam na mesma direção diagonal, enquanto no método sapataria os segmentos que sobram possuem dois tipos de direções, horizontal e vertical, completando o triângulo. Essa explicação é percebida como fundamentada na desigualdade triangular.

A cena mostra como os estudantes utilizam a construção do triângulo com as sobras dos segmentos dos dois métodos de amarração permite comparar dois a dois cada método. Desse modo, a desigualdade triangular é utilizada um modo gráfico de expressar uma compreensão acerca do tema investigado. Ver uma amarração como dois lados de um triângulo e a outra amarração como o terceiro lado desse triângulo, de modo que a comparação entre os métodos de amarração implica em produzir significado para a desigualdade triangular e, ao mesmo tempo, utilizar a desigualdade como um modo linguístico de expressão, um modo de expressar uma compreensão sobre o tema investigado.

4.2.2 Unidades Significativas dos Discursos da Prática 2

Quadro 22: Descrição da Unidade Discurso 1 da Prática 2

Código da USD	**USD.2.01**

Unidade de Discurso	É tambem fizemos o método do Reflectão ele é assim agente mede quantos centimetros da reta r até a letra A depois fizemos a letra a deposição da folha com as medidas ai fizemos a mesma coisa com a letra B depois pegamos a letra A de baixo e ligamos com a letra B de cima e quando essa linha ligo com a reta r esse é o ponte P. é o menor caminho pois ele refletido como um espelho fica uma reta.
Asserção Articulada da USD	*A estudante descreve que aprendeu a efetuar uma construção utilizando o método de reflexão e que este método consiste em medir as distâncias de dois pontos, A e B, até uma reta r e refletir esses pontos em relação a essa reta r, obtendo os pontos simétricos A' e B'. Ligando, nessa construção, os pontos A e B' é possível obter o ponto P que determina o menor percurso para ir de A até B, passando por r. A estudante descreve que esse percurso é o menor possível porque o segmento $AP + PB'$ fica inteiramente contido numa reta (ver figura 28).*

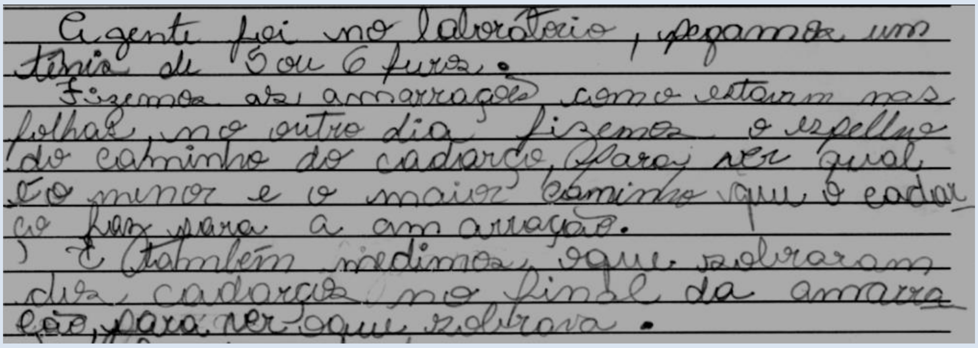
A estudante descreve nessa Unidade de Discurso uma construção empregada na investigação do comprimento do cadarço em cada método de amarração. Nessa Unidade, a estudante destaca nessa construção o fato de que a minimalidade do percurso é consequência de a reflexão ficar contida numa reta. Desse modo, essa Unidade de Discurso indica que a estudante percebe que sua aprendizagem dessa condição de minimalidade se deu a partir da realização da investigação de uma construção e de uma constatação visual dessa condição.

Quadro 23: Descrição da Unidade Discurso 2 da Prática 2

Código da USD	**USD.2.02**
Unidade de Discurso	Para achar o ~~tamanho~~ que sobra mais cardarço nos desenharmos o triangulo e o metodo que sobrava mais cadarço era tipo assim e que a soma de um triangulo é sempre maior que o terceiro lado
Asserção Articulada da USD	*O procedimento para comparar o comprimento de diferentes métodos de amarração de cadarço é percebido como um modo de achar o que sobra do cadarço. Esse procedimento é descrito como uma construção de um triângulo com os dois cadarços para compará-los. Se em um método o cadarço forma os dois lados do triângulo e no outro método o cadarço formar o terceiro lado, então o primeiro método é maior porque, em qualquer triângulo, a soma de dois lados é sempre maior que o terceiro.*

Essa Unidade de Discurso é destacada de uma descrição sequencial da prática de MM, de modo que essa Unidade descreve o momento em a desigualdade triangular é empregada para saber qual método de amarração “sobra” mais cadarço. Essa Unidade de Discurso parece indicar que a estudante percebe que sua aprendizagem da desigualdade triangular se deu em meio a realização de uma investigação, de modo que a desigualdade triangular surge como uma técnica ou uma estratégia para comparar diferentes métodos de amarração.

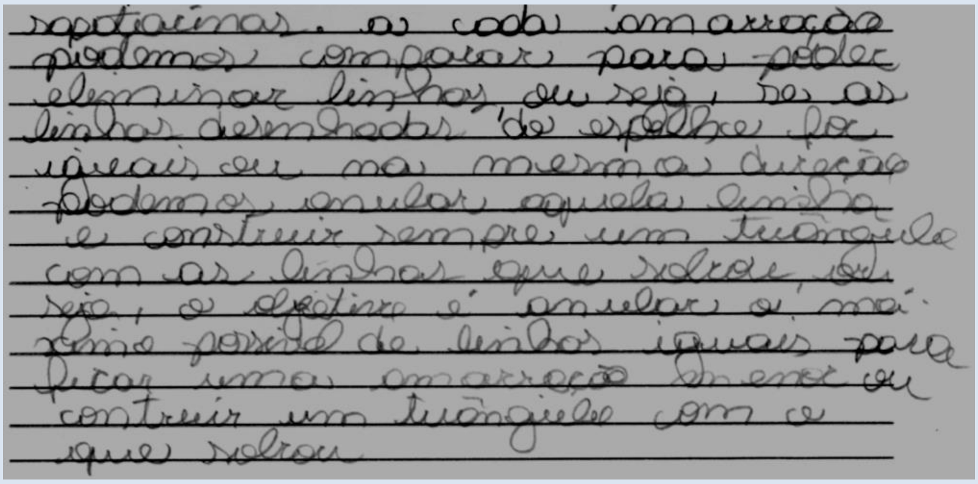
Quadro 24: Descrição da Unidade Discurso 3 da Prática 2

Código da USD	**USD.2.03**
Unidade de Discurso	 A gente foi no laboratório, pegamos um tênis de 5 ou 6 furos. Fizemos as amarrações como estavam nas folhas, no outro dia fizemos o espelho do caminho do cadarço, para ver qual é o menor e o maior caminho que o cadarço faz para a amarração. E também medimos que sobraram dos cadarços no final da amarração, para ver o que sobrava.
Asserção Articulada da USD	*Os estudantes foram ao laboratório de ciências e lá utilizaram tênis de 5 e 6 furos para realizar os diferentes tipos de amarração segundo os diagramas de uma folha. No outro dia, os estudantes refletiram o percurso do cadarço para verificar qual tinha o menor e o maior percurso do cadarço em cada amarração.*

Tendo em vista que essa Unidade de Discurso foi destacada de uma relato que descreve sequencialmente a prática de MM, relacionando o que foi aprendido com a situação em essa aprendizagem se deu, então essa Unidade de Discurso parece indicar que a estudante percebe que sua aprendizagem do método de reflexão se deu a partir da realização da investigação de um experimento, feito no laboratório de ciências, no qual os estudantes, em grupo, exploraram os diferentes métodos de amarração de cadarços.

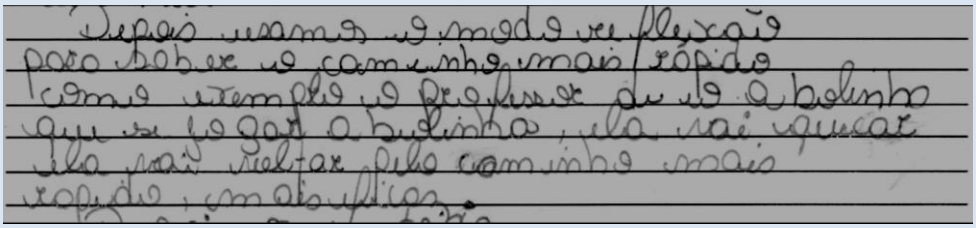
Quadro 25: Descrição da Unidade Discurso 4 da Prática 2

Código da USD	**USD.2.04**

Unidade de Discurso	 sapatilhas. a cada amarração podemos comparar para poder eliminar linhas ou seja, se as linhas desenhadas do espelho for iguais ou na mesma direção podemos anular aquela linha e construir sempre um triângulo com as linhas que sobrar, ou seja, o objetivo é anular o máximo possível de linhas iguais para ficar uma amarração menor ou contruir um triângulo com o que sobrou
Asserção Articulada da USD	*A estudante descreve o procedimento para comparar os comprimentos de dois métodos de amarração. Se as duas amarrações possuem, concomitantemente, "segmentos" de mesmo comprimento, então esses "segmentos" podem ser eliminados, de modo que a construção pode ser simplificada. O objetivo desse procedimento é eliminar o máximo possível de "segmentos" iguais nos dois métodos e efetuar a construção do triângulo com o que sobrou.*

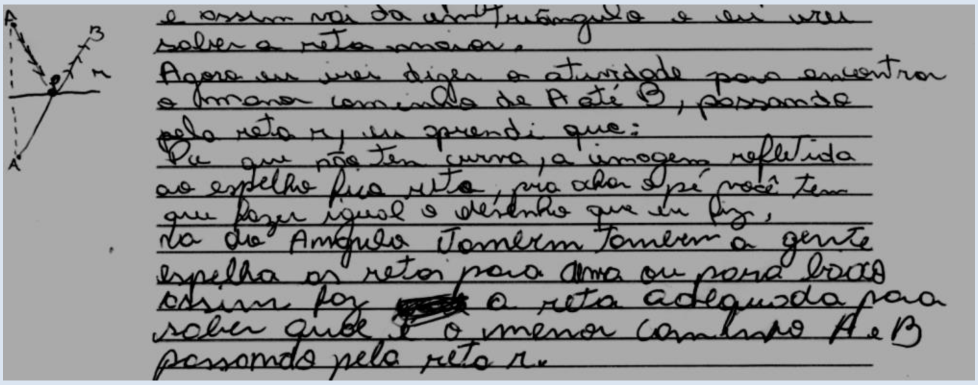
A estudante descreve um procedimento para simplificar as construções que comparam diferentes métodos de amarração de cadarço. Neste caso, simplificar significa empregar a lei do cancelamento na geometria. De fato, a elaboração do procedimento de eliminar concomitantemente, nos dois métodos de amarração, os segmentos congruentes expressa uma compreensão geométrica da lei algébrica do cancelamento. Assim, essa Unidade de Discurso indica que a estudante percebe que sua aprendizagem, acerca dessa lei do cancelamento, se dá como a aquisição de um método para simplificar a construção, visando investigar um tema.

Quadro 26: Descrição da Unidade Discurso 5 da Prática 2

Código da USD	**USD.2.05**
Unidade de Discurso	 Depois usamos o modo reflexão para saber o caminho mais rápido como exemplo o professor deu o a bolinha que se jogar a bolinha, ela vai quicar ela vai voltar pelo caminho mais rápido, mais simplificado.
Asserção Articulada da USD	*O estudante percebe que aprendeu o método de reflexão com o experimento da bolinha que consiste em jogar uma bolinha de borracha contra o piso para "ver" que o ângulo de ida (incidência) é o mesmo que o ângulo da volta (reflexão).*

O estudante expressa nessa Unidade de Discurso sua aprendizagem de uma propriedade geométrica importante presente no método de reflexão. Essa propriedade é a congruência de ângulo na construção efetuada para determinar o menor percurso para ir de um ponto A até um ponto B, passando por uma reta r. A estudante indica que sua aprendizagem se deu a partir de um experimento em o professor lançou uma bolinha de borracha contra o piso e solicitou aos estudantes que observassem os ângulos de ida e volta, ou seja, os ângulos de incidência e de reflexão.

Quadro 27: Descrição da Unidade Discurso 6 da Prática 2

Código da USD	**USD.2.06**
Unidade de Discurso	 e assim vai da um Triângulo e eu vou saber a reta menor. Agora eu vou dizer a atividade para encontrar o menor caminho de A até B, passando pela reta r, eu aprendi que: Pa que não tem curva, a imagem refletida ao espelho fica reta, pra achar o pé você tem que fazer igual o desenho que eu fiz, na do Ângulo Também Também a gente espelha as retas para cima ou para baixo assim faz a reta adequada para saber qual é o menor caminho A e B passando pela reta r.
Asserção Articulada da USD	*O estudante descreve o que aprendeu na atividade que investiga o menor caminho que vai do ponto A até o ponto B, passando pela reta r. Quando se reflete A em relação a r, obtendo A', verifica-se que a linha $A'B$ não tem curva, ou seja, está contida numa reta. Na construção que o desenho mostra, ângulos e retas são refletidos como num espelho, de modo que a construção da reta $A'B$ determina o ponto P que define o menor caminho: sai de A, vai até P e, de lá, vai até B.*

Ao descrever o que aprendeu, o estudante indica que essa aprendizagem se deu a partir da investigação de uma questão, a saber, como determinar um percurso de comprimento mínimo entre os pontos A e B e a reta r. O estudante expressa sua compreensão sobre essa questão empregando um desenho que é utilizada como parte do discurso. Assim, essa Unidade de Discurso indica que o estudante percebe que sua aprendizagem se deu também como a aquisição de um modo de argumentar, de empregar diferentes modos de expressão como recursos de argumentação.

Quadro 28: Descrição da Unidade Discurso 7 da Prática 2

Código da USD	**USD.2.07**

Unidade de Discurso	Já mais tarde desenhamos o método da desigualdade triangular, depois que desenhamos tudo, fizemos uma escala do menor para o maior que ficou na seguinte ordem: método americano, método Europeu, método rápido dos sapateiros
Asserção Articulada da USD	*Depois que a construção é realizada, o uso da desigualdade triangular permite ordenar os métodos de amarração do menor para o maior comprimento.*

Essa Unidade de Discurso descreve o emprego da desigualdade triangular para ordenar os diferentes métodos de amarração de acordo com o comprimento do cadarço "gasto" em cada amarração. Essa Unidade parece indicar, nesse sentido, que a estudante percebe que sua aprendizagem da desigualdade triangular se deu num ambiente de investigação em que o conhecimento geométrico (desigualdade triangular) surge com um modo linguístico de expressar uma compreensão sobre o tema investigado.

Quadro 29: Descrição da Unidade Discurso 8 da Prática 2

Código da USD	**USD.2.08**
Unidade de Discurso	No começo achei bem confuso, e me perguntei pra que isso? ao longo das atividades fui entendendo +/-. Depois veio a minha dificuldade pra saber como era o certo na posição certa. ainda tenho poucas dificuldades pra saber sobre onde devo cortar o cadarço. com a ajuda de umas amigas, e do professor pude entender pra poder fazer todos
Asserção Articulada da USD	*A estudante percebe que no começo achou a prática de MM meio confusa e se perguntou: para que isso? Ao longo das atividades ela foi entendendo parcialmente o que deveria fazer. Também percebe que sua dificuldade em saber a posição correta, sobre eliminar os "segmentos" iguais nos dois métodos para simplificar a construção. Percebe que a ajuda dos colegas e do professor pode entender e realizar as atividades.*

A estudante expressa sentimentos de dúvidas de incertezas, de não saber onde vai chegar e nem o que deve fazer em cada momento. Encerra seu discurso dizendo a ajuda dos colegas e do professor foram fundamentais para conseguir entender e fazer todas as coisas na prática de MM. A estudante expressa, portanto, que percebe que sua aprendizagem se deu num ambiente de investigação, em que não uma definição prévia do que deveria fazer ou de onde deveria chegar. O auxílio dos colegas e do professor foram essenciais nessa aprendizagem que a estudante percebe como envolvendo um entender e um fazer.

4.3 Análise Ideográfica da Prática 3

Para efetivar a Análise Ideográfica da prática 3, apresentamos e analisamos 4 Cenas Significativas que evidenciam a manifestação da aprendizagem da geometria em práticas de MM e aponta sentidos que os relatos ainda não mostraram. Com relação aos relatos, de um total de 124, selecionamos 17 relatos (ver Apêndices), dos quais extraímos 19 Unidades de Discurso. O número de relatos e o número de Unidades Significativas de Discursos analisados neste tópico é maior do que nas práticas de MM anteriores porque, nesta prática de MM, separamos a elaboração dos relatórios em duas etapas. Primeiro, os estudantes realizaram um relatório que descreve situações envolvendo a aprendizagem de como dividir o mapa em Áreas de Abrangências, utilizando o Diagrama de Voronoi, de como calcular o centro de equilíbrio das escolas e também a elaboração de uma planta baixa para a construção de uma escola de Ensino Médio Integral. O segundo relatório inclui a descrição de situações envolvendo a aprendizagem de área e perímetro de retângulos e procedimentos gráficos para analisar a otimização de espaços em prédios escolares. Esse segundo relatório inclui também descrição das maquetes da escola de Ensino Médio Integral.

4.3.1 Unidades Significativas das Cenas da Prática 3

Cena 1: Construindo critérios para Áreas de Abrangências

A cena 1 mostra os estudantes trabalhando na tarefa de dividir o mapa contendo quatro escolas em Áreas de Abrangência, cada uma contendo uma das quatro escolas da região. O grupo também deve indicar um local para construção de uma escola de Ensino Médio Integral para atender as quatro escolas da região. Tanto a divisão em Áreas de Abrangências quanto a localização da escola devem ser feitas segundo critérios. Os estudantes devem apresentar esses critérios. O grupo exibido na cena é formado pelos estudantes Guilherme, Emanuelly, Vanessa e Natália que, após efetuarem a construção, são solicitados a apresentar ao professor os critérios. A cena começa quando o professor pergunta ao grupo acerca desses critérios.

Quadro 30: Descrição da Cena 1 da Prática 3

<table>
<tr><th>Código da USC</th><th>Expressões dos sujeitos</th></tr>
<tr><td>01</td><td>

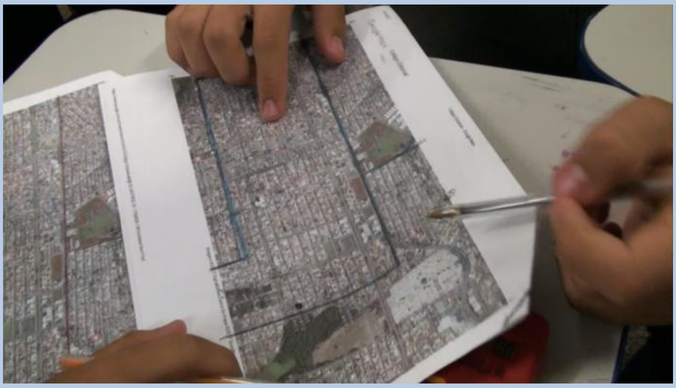
Figura 83: Estudantes investigam Áreas de Abrangências

PROFESSOR: *O que eu quero saber de vocês é como vocês fizeram essa construção? O que vocês pensaram... que critérios vocês utilizaram para fazer essa divisão no mapa?*

GUILHERME: *Como assim?*

PROFESSOR: *Por exemplo, essa faixa aqui é de que escola?* (apontando para o mapa)

Figura 84: Professor e Guilherme apontam uma faixa no mapa



GUILHERME: *É do Adélia*.

PROFESSOR: *Então, é do Adélia, mas como você decidiu que essa faixa ia ser do Adélia?*

GUILHERME: *Então, é porque eu pensei no espaço de salas que tinha aqui no Adélia e quantos alunos cabiam e quem tava mais perto prá chegar no Adélia, então pensei no lugar que não ficava tão longe prá chegar no Adélia. Aí eu fiz* (a construção).

PROFESSOR: *E a do Lúcia Barros*?

GUILHERME: *Mesma coisa, também pensei nisso. Aí fui comparando todas as escolas e vi que toda essa região aqui (*aponta no mapa*) tá mais próxima do Lúcia Barros*.

</td></tr>
</table>

	PROFESSOR: *Tá, então porque que essas duas regiões daqui são maiores?* (apontando no mapa) GUILHERME: *É porque as duas escolas são maiores.* PROFESSOR: *Ah, então se o colégio é maior a região é maior? É isso?* GUILHERME: *É. É isso!*
USC.3.1.01	Os estudantes dividem o mapa em Áreas de Abrangências adotando como critério que o tamanho dessa Área deve ser proporcional ao tamanho da escola, ou seja, quanto maior o número de salas de aula, maior deve ser sua Área de Abrangência.
02	PROFESSOR: *Então vocês não consideraram as distâncias entre as escolas?* GUILHERME: *Como assim? A gente só pensou na região onde os alunos moram.* **Figura 85: Professor apontando para o mapa**  PROFESSOR: *Olha aqui, ó, por exemplo, quem mora aqui tá na região do Pinotti, mas é mais perto estudar no Adélia, entendeu?* (apontando no mapa) GUILHERME: *Ah, entendi..., mas daí como a gente divide?* EMANUELLY: *Eu acho que devia mudar... a fronteira aqui, ó, tinha que ser mais prá cá... tinha que passar aqui bem no meio.* PROFESSOR: *Então, seria melhor vocês refazerem a construção ... e, considerar esse critério aí.*
USC.3.1.02	Em face do questionamento do professor, acerca do problema da proximidade, os estudantes decidem refazer sua construção.
03	(...) depois de alguns minutos. PROFESSOR: *Vocês terminaram, já?* VANESSA: *Já terminamos... a gente fez em outra folha?* EMANUELLY: *É que a gente teve que dá uma mudada.* VANESSA: *É que a gente fez a divisão agora através das distâncias entre as escolas.* PROFESSOR: *Mas, as regiões ficaram do mesmo tamanho ou de tamanhos diferentes? O que vocês fizeram de diferente na construção?*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
EMANUELLY: Tá diferente ... porque aqui, ó, nessa região... quem ficar prá fora desta fronteira é mais rápido.... é mais perto estudar no Roseli do que no Adélia e quem mora prá cá (da fronteira) é mais perto estudar no Adélia.

Figura 86: Emanuelly mostra no mapa as Áreas de Abrangências


PROFESSOR: E do Pinotti? É mais perto também?

EMANUELLY: Do Pinotti é daqui prá cá. É mais perto também.

PROFESSOR: E o do Lúcia Barros?

EMANUELLY: Do Lúcia Barros é prá fora desta fronteira aqui. É prá cá.

Figura 87: Emanuelly mostra divisão das Áreas de Abrangências


PROFESSOR: Então a fronteira divide mais ou menos no meio. Da fronteira... é igual as distâncias? E quem mora na fronteira?

Figura 88: Professor aponta as divisões no mapa


EMANUELLY: Daí quem mora na fronteira eu acho que pode escolher onde vai estudar?
</td>
</tr>
<tr>
<td>USC.3.1.03</td>
<td>Reformulando sua construção, os estudantes adotam como critério a proximidade da moradia do estudante em relação à escola de sua Área de Abrangência.</td>
</tr>
<tr>
<td>04</td>
<td>PROFESSOR: E onde deveria construir a escola de Ensino Médio Integral?</td>
</tr>
</table>

	NATÁLIA: *A gente não viu isso ainda*. PROFESSOR: *Mas, onde você acha que deveria ser construída?* NATÁLIA: *Eu acho.... que deveria ser aqui, ó, onde ainda não tem escola ainda. Tinha que ser bem longe das outras*. PROFESSOR: *Mas, aí não fica longe? Quem mora aqui, por exemplo, e faz o Ensino Fundamental no Adélia vai fazer o Ensino Médio aí? Não vai ficar longe?* VANESSA: *Então tinha que ficar... assim olhando no centro da imagem... tinha que ficar entre todas as escolas, por aqui ó.* PROFESSOR: *Mas, por que aí neste ponto?* VANESSA: *Ah, porque fica melhor né. Fica mais bem localizada entre toda a região, né? Fica mais bem distribuída.* NATÁLIA: *É, se ficar mais no centro, fica bem prático, mais acessível prá todos.*
USC.3.1.04	O diálogo entre os estudantes aponta para a adoção de um critério baseado na proximidade para a localização da escola de Ensino Médio Integral. Essa escola deveria ser localizada de tal modo que ficasse acessível ou mais próxima de todos os estudantes e, por isso, uma localização central entre as escolas já existentes é sugerida.

Esta cena mostra uma reformulação de uma construção de critérios tanto para dividir o mapa em Áreas de Abrangências quanto para localizar a construção de uma escola de Ensino Médio Integral, visando atender os estudantes das quatro escolas da região. foi desenvolvida com os estudantes e será analisa na continuidade da pesquisa. Inicialmente os estudantes dividem as Áreas de Abrangências, tendo como critério que escolas maiores, com maior número de salas de aulas, devem ter Áreas de Abrangências maiores. Mas, esse critério é insuficiente porque um estudante pode morar na região de abrangência de uma escola e ter como mais próxima de sua casa uma escola de outra Área de Abrangência. Esse questionamento, feito pelo professor, leva os estudantes a reformular sua construção e acrescentar um critério de que as fronteiras de cada Área de Abrangência definem uma relação de proximidade, ou seja, quem mora na fronteira possui a mesma distância a mesma distância entre duas escolas, mas quem mora antes ou depois da fronteira terá necessariamente, como escola mais próxima, a escola da Área de Abrangência onde mora.

Do mesmo modo, a localização do ponto que deveria ser construída a nova escola, utilizou incialmente um critério da homogeneidade da distribuição no mapa, ou seja, a nova escola deveria ser construída num local onde ainda não tem escola. Mas, em seguida, considerando que essa nova escola deve justamente atender os estudantes que saem do Ensino Fundamental das escolas atuais e vão para o Ensino Médio Integral, os estudantes reformulam seu critério e procuram um ponto de localização equidistante às escolas atuais, ou sejam, um ponto central entre essas escolas.

Essas duas reformulações nos critérios marcam dois momentos significativos de aprendizagem e mostram a aquisição de uma compreensão inicial que encaminha a investigação para uma abordagem geométrica. Em outras palavras, utilizar critérios baseadas na relação de proximidade e na forma e medida das Áreas de Abrangências encaminham a investigação para uma aprendizagem da geometria. Além disso, essa cena mostra a importância do Outro na reformulação dos critérios e na abertura para novas possibilidades de significações para o tema investigado.

Cena 2: Aprendendo os significados do Diagrama de Voronoi

A cena 2 mostra um grupo de estudantes trabalhando na tarefa de empregar a construção de mediatrizes para dividir o mapa contendo quatro escolas em Áreas de Abrangência, cada uma contendo uma das quatro escolas da região. Essa cena mostra o trabalho do grupo formado pelos estudantes William, Kauan, Felipe e Christian que após aprenderem a construir o diagrama de Voronoi para dois e três pontos, devem elaborar a construção do diagrama de Voronoi para as quatro escolas do mapa e avaliar se essa construção é adequada ou não para dividir as regiões de abrangência. A cena começa quando o professor pergunta ao grupo acerca dessa construção.

Quadro 31: Descrição da Cena 2 da Prática 3

Código da USC	Expressões dos sujeitos
01	**Figura 89: Estudantes estudam as condições de equilíbrio da lata**  PROFESSOR: *Então, vamos ver aqui com esse grupo. William, como você fez a sua divisão? O que eu quero saber é como vocês estão construindo aí o*

<table>
<tr><td></td><td>Diagrama de Voronoi?

WILLIAM: Eu liguei todas as escolas com uma linha, fechando assim (indicando no mapa). Aí peguei o... o.... o negócio aqui que você me emprestou (o compasso) e abri mais do que a metade (do segmento) e fui fazendo os círculos. Daí achei esses dois pontos e fiz a mediatriz aqui (mostra no mapa).</td></tr>
<tr><td>USC.3.2.01</td><td>O estudante utiliza gestos corporais e emprega os instrumentos de desenho como um meio de expressão para descrever o procedimento geométrico da construção.</td></tr>
<tr><td>02</td><td>KAUAN: Esse bagulho de usar o compasso não é comigo não! É louco demais!

PROFESSOR: Mas, vocês tão fazendo juntos, né? O trabalho de vocês tá ficando igual?

KAUAN: Tá parecido, mas eu não sei se tá certo.

PROFESSOR: Então, descreve prá mim a primeira coisa que você fez?

KAUAN: Primeiro eu fim uma linha Pinotti até o Adélia... depois do Adélia até o Roseli, do Roseli até o Lúcia e do Lúcia pro Pinotti.

PROFESSOR: Tá certo! E o que você tá fazendo agora?

KAUAN: Achando a mediatriz... a mediatriz de cada um.

PROFESSOR: E como constrói a mediatriz? Entre o Roseli e o Lúcia Barros, por exemplo?

KAUAN: Eu faço esse círculo aqui, depois outro aqui... e daí marco esse ponto aqui e aqui (constrói no mapa a mediatriz, como mostra a figura 90)

Figura 90: Kauan mostrando como constrói a mediatriz

PROFESSOR: Até aí tá tudo certo! Mas, como essa mediatriz divide entre as duas escolas?</td></tr>
</table>

	KAUAN: *Como assim?* PROFESSOR: *O que eu quero saber é se você entende porque tem que ser uma mediatriz entre essas duas escolas. Por exemplo, se o aluno mora exatamente na mediatriz ele vai estudar onde? E, se ele morar prá cá ou prá lá da mediatriz?* KAUAN: *Se ele morar prá cá, ele vai estudar no Roseli. Se morar da mediatriz prá lá ele vai morar no Lúcia.* PROFESSOR: *Mas, porque isso? Por que a mediatriz define a fronteira da Área de Abrangência?* KAUAN: *É que ela fica bem no meio...* CHRISTIAN: *É que na mediatriz a distância é igual, tanto faz estudar no Roseli ou no Lúcia. Mas, por exemplo, se ele mora aqui, desse lado, então vai estudar no Roseli que é mais perto.*
USC.3.2.02	A mediatriz é percebida como um meio de efetuar uma divisão do mapa seguindo um critério de proximidade.
03	PROFESSOR: *É isso, então como ficaria a divisão do mapa?* CHRISTIAN: *Agora falta uma mediatriz aqui, outra aqui e outra aqui, ó. Tem que se quatro, né?* **Figura 91: William mostrando sua construção no mapa**  WILLIAM: *Professor, eu já construí as mediatrizes. O que eu faço agora?* (mostrando sua construção) PROFESSOR: *Deixa eu ver... essa mediatriz dá prá fechar com essa aqui, ó. As duas fecham aqui. E esta aqui se encontrar com esta ... não... esta daqui não... ah sim esta com esta, ó.* (mostrando na construção de William) **Figura 92 Professor mostrando no mapa**  WILLIAM: *Então liga duas e depois essas outras duas e daí fecha aqui? Fecha essas duas com essas duas?* PROFESSOR: *É isso, tenta fazer isso e vê se fica bom?*
USC.3.2.03	A interação entre os membros do grupo e participação do professor define

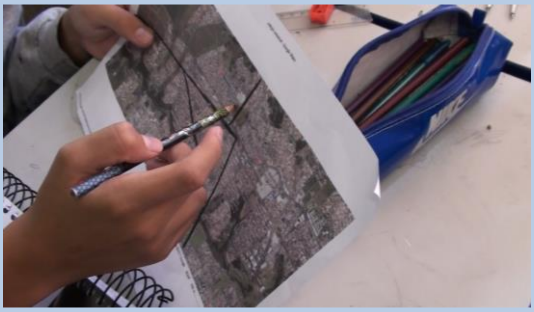
<table>
<tr><td></td><td>o modo como as mediatrizes serão conectadas para construir o diagrama de Voronoi.</td></tr>
<tr><td>04</td><td>

(...) William e Kauan efetuam a construção.

PROFESSOR: *Deixa eu ver como vocês fizeram? Vocês dividiram em quatro Áreas de Abrangências? Então explica prá mim como você fizeram essa divisão.*

KAUAN: *Primeiro a gente ligou os pontos. Depois a gente usou o compasso prá achar as metades* (mediatrizes). *Depois apagamos* (as linhas auxiliares) *e só ajeitamos aqui* (mostrando no mapa).

Figura 93: Mostrando no mapa



WILLIAM: ... *a gente ligou as mediatrizes, fechando aqui* (mostrando no mapa de Kauan).

Figura 94: William mostra no mapa de Kauan

PROFESSOR: *Entendi. Então é a Área de Abrangência do Adélia.*

WILLIAM: *Aqui, ó, dentro desse triângulo é do Adélia.*

Figura 95: William mostrando no mapa

PROFESSOR: *Mas, veja, o Adélia é a maior escola e tá com a menor região, com a menor Área de Abrangência. Não é estranho, isso?*

CHRISTIAN: *Então essa construção aí não deu certo?*

PROFESSOR: *O que vocês acham? Essa divisão parece adequada prá vocês?*

KAUAN: *Eu acho que não. Tinha que ser a uma divisão que a maior escola ficasse com a maior região.*

WILLIAM: *Mas, tem como fazer as duas coisas? Usar as mediatrizes e fazer*

</td></tr>
</table>

	com que a maior escola tenha a maior Área de Abrangência?
USC.3.2.04	A avaliação que estudantes e professor fazem da construção com o diagrama de Voronoi conduz a conclusão de que é preciso combinar dois critérios: o da proximidade e da proporcionalidade da Área de Abrangência com o tamanho da escola. Essa conclusão leva o grupo a elaboração de um novo diagrama.

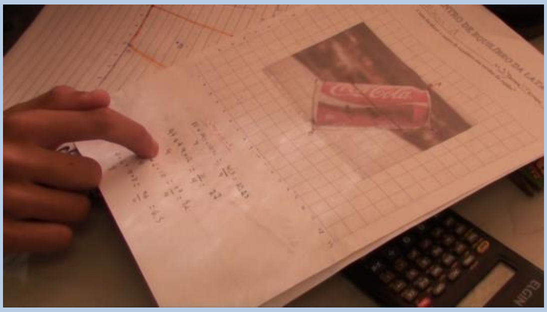
Essa cena mostra como os estudantes produzem significados para o conceito geométrico de mediatriz. A construção da mediatriz de um segmento já tinha sido discutida com os estudantes, mas a solicitação de empregar esse conceito para obter Áreas de Abrangências de uma região do mapa, ajudou os estudantes a relacionar esse conceito com o critério da proximidade. Um significado é que a mediatriz de um segmento contido num plano, estabelece, entre os pontos desse plano e os dois extremos desse segmento, uma relação de proximidade. Com isso, os estudantes podem compreender o Diagrama de Voronoi como um modelo matemático que estabelece no plano uma relação de proximidade entre seus pontos.

A cena destaca o uso do conceito de mediatriz para construir o Diagrama de Voronoi. E mostra como os estudantes vão transitando do significado puramente geométrico para o tema que está sendo investigado. A cena destaca também a participação das interações entre os membros do grupo e o professor para enfrentar obstáculos e produzir significados novos para as construções. Importante também é a avaliação do modelo matemático produzido. A percepção de que o modelo não atendia a um critério que é o da proporcionalidade da Área de Abrangência em relação ao tamanho de cada escola, levou os estudantes, com o questionamento do professor, a considerar a necessidade de buscar um novo modelo matemático. Em suma, a aprendizagem geométrica nessa cena envolve aprender a expressar uma compreensão das Áreas de Abrangências com o Diagrama de Voronoi. Além disso, o diálogo constante com o professor e entre os membros do grupo mantém sempre vivo as razões que conduzem à aprendizagem da geometria.

Cena 3: Do centro geométrico ao centro médio ponderado de populações

A cena 3 mostra o grupo dos estudantes João Vitor, Ruwany, Ketlin e Natália Michelle trabalhando na tarefa de localizar no mapa o centro médio de populações das quatro escolas. Essa localização visa indicar um local no mapa para construção de uma escola de Ensino Médio Integral para atender as quatro escolas da região. Para introduzir o assunto, o professor discute com os estudantes como calcular os centros geométricos de um segmento de reta e de um triângulo quando estes são dados por coordenadas cartesianas. Após isso, apresenta aos estudantes o problema de calcular os centros da lata de refrigerante inclinada, retomando a questão já investigada na prática 1 e o centro, e das quatros escolas. O grupo dessa cena, determinam primeiro as coordenadas do centro geométrico da lata, calculando a média aritmética das abscissas e das ordenadas dos pontos que contornam a latinha. A cena começa quando o professor solicita ao grupo que expliquem os procedimentos adotados.

Quadro 32: Descrição da Cena 3 da Prática 3

Código da USC	Expressões dos sujeitos
01	**Figura 96: Ruwany, João Vitor, Ketlin e Michelle**  PROFESSOR: *Eu gostaria que vocês me explicassem como vocês calcularam os centros da lata... é prá eu fazer esse registro. Como vocês calcularam?* RUWANY: *Primeiro a gente desenhou um retângulo em torno da lada porque ela não é certo* (apresenta cantos com curvas). *Depois, a gente pegou as coordenadas aqui dos cantos e foi somando... e dividi pelo número de coordenadas que somei, que é quatro, depois fiz todas, daí eu joguei* (localizou no plano cartesiano) *e deu o centro.* **Figura 97: Ruwany mostra como calculou o centroide da lata**  PROFESSOR: *Que centro é esse?* RUWANY: *É esse centro aqui, da lata.* PROFESSOR: *Da lata vazia ou da lata com líquido?* RUWANY: *Da lata vazia! O centro da lata com líquido é aqui, ó.*

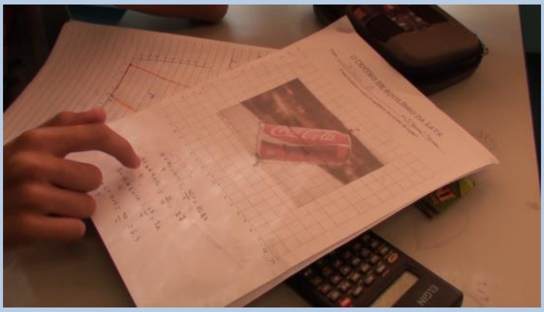
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Figura 98: Ruwany mostra o centroide calculado

PROFESSOR: *E como vocês calcularam o centro da lata com líquido?*

RUWANY: *A gente marcou a linha... o nível da água, daí, mesma coisa, a gente foi pegando as coordenadas... somou tudo e dividiu... só que agora deu cinco por que agora tinha cinco lados, então dividiu tudo por cinco, daí achou o centro geométrico aqui dessa parte com água.*

Figura 99: Ruwany explica o equilíbrio da lata



</td>
</tr>
<tr>
<td>

USC.3.3.01

</td>
<td>A imagem da lata de refrigerante é aproximada pela figura de uma retângulo, de modo que essa imagem seja dada pelas coordenadas dos vértices do retângulo. Com essa construção os estudantes associam o centro geométrico da lata com o ponto obtido calculando a aritmética das coordenadas dos vértices do retângulo.</td>
</tr>
<tr>
<td>

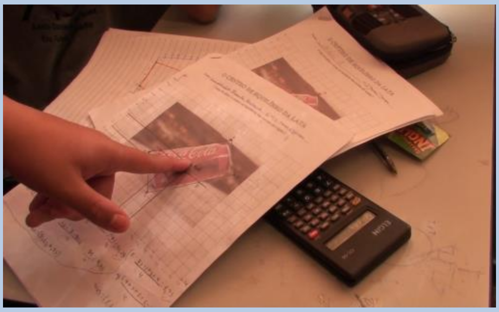
02

</td>
<td>

PROFESSOR: *E por que ela* (a lata) *fica em equilíbrio nessa quantidade com água? O que dá prá ver com esses centros que vocês calcularam sobre o equilíbrio da lata?*

JOÃO VITOR: *Dá prá ver, tipo assim no desenho, que a lata vazia... ou cheia, tanto faz... o centro fica aqui bem no meio, fora da linha do apoio. Ela cai porque fica fora, não fica na mesma linha...*

Figura 100: João Vitor explica o equilíbrio da lata



PROFESSOR: *E quando tá com água? Ela fica em equilíbrio?*

</td>
</tr>
</table>

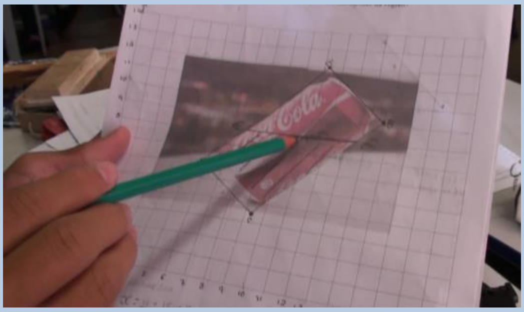
	JOÃO VITOR: *É porque daí fica aqui quase na mesma linha e daí dá apoio, fica apoiado.* **Figura 101: João Vitor explica o equilíbrio da lata** 
USC.3.3.02	Para explicar o equilíbrio da lata, os estudantes relacionam o centro do retângulo (a lata) e o centro do trapézio (parte com água) com o alinhamento vertical entre esses geométricos e um vértice do retângulo situado no eixo das abscissas (o ponto da base de apoio da lata).
03	PROFESSOR: *Então vocês calcularam o centro só da parte com líquido, nesse caso, vocês não consideraram a parte que fica vazia. Mas, a parte vazia também não pesa?* RUWANY: *Como assim? A gente fez como no ano passado, ué?* PROFESSOR: *É, mas tem um problema. Quando a lata fica, por exemplo, pela metade de água, ela fica em equilíbrio, não é? Até a metade ela tem líquido, então ela tá bem pesada aí, mas, da metade prá cima, onde ela tá vazia, também tem peso, bem menor porque ela tá vazia, mas tem um peso aí. Esse peso de cima não influencia? O que vocês acham?* JOÃO VITOR: *Eu acho que influencia pouco porque a parte com água é mais pesada.* PROFESSOR: *E no caso de você ir diminuindo a água, até ficar bem pouquinho, aí esse peso de cima vai ser importante?* RUWANY: *É, se ficar maior que a parte de baixo, aí sim... porque dái fica pouco peso em baixo e mais peso em cima, na parte vazia.* PROFESSOR: *Então, é isso, é essa questão que eu quero colocar... se esse peso da parte vazia é importante como usar eles nos cálculos?*
USC.3.3.03	O questionamento do professor conduz os estudantes a reconhecer a insuficiência da explicação inicial e a necessidade de reformular o modelo.
04	(...) silêncio. PROFESSOR: *Prá usar esses pesos diferentes, de cima e de baixo, no cálculo da média das coordenadas, é preciso usar uma média ponderada.* JOÃO VITOR: *Como assim?* PROFESSOR: *Calcula o centro dessa parte de cima e o centro dessa parte de baixo, com a água, aí vocês calculam um ponto aqui, entre os dois centros, só que não soma as coordenas e divide por dois, vocês multiplicam as coordenadas pelos seus pesos.*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
JOÃO VITOR: Eu não entendi nada.

PROFESSOR: Olha só, esse x da parte de baixo, você multiplica pelo peso da parte de baixo, digamos uns 100 gramas, e esse x da parte de cima, multiplica pelo peso de cima, sei lá uns 10 gramas, daí sim, você soma e divide pela soma desses dois pesos, por 100 + 10. Com o y é a mesma coisa, multiplica, soma e depois divide.

(...) João Vitor calcula, ajudado pelo grupo e localiza o novo centro no plano cartesiano.

PROFESSOR: Tá vendo aí, subiu um pouco o centro, quando considera o peso de cima, o centro sobe um pouquinho, mas continua nessa faixa aqui que passa pela base de apoio.

Figura 102: Professor mostra o centroide da imagem


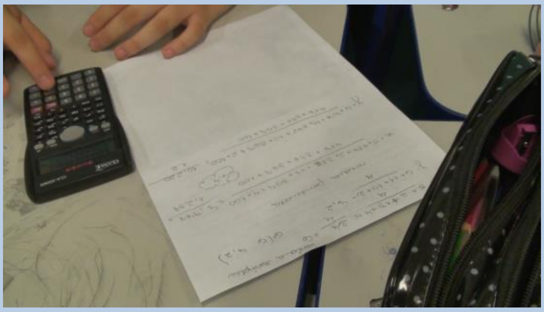
</td>
</tr>
<tr>
<td>USC.3.3.04</td>
<td>O professor auxilia os estudantes a entender o cálculo e o significado do uso da média ponderada para calcular o centro de uma população.</td>
</tr>
<tr>
<td>04</td>
<td>
RUWANY: E o centro das escolas, a gente faz do outro jeito?

PROFESSOR: Tem que ver se vai considerar o número de alunos? Os pesos, nesse caso, são os números de alunos. Por exemplo, se for considerar o número de alunos, a escola nova vai ficar mais próxima de qual escola?

JOÃO VITOR: Do Adélia, que tem mais alunos.

PROFESSOR: É, do Adélia. Mas, faz dos dois jeitos, calcula com o número de alunos e sem os números de alunos e depois compara.

(...) João Vitor calcula e os seus colegas acompanham.

Figura 103: João Vitor calculo o centroide


PROFESSOR: Então mostra aí, vocês todos aí, mostra onde ficou localizado o centro com a média simples (média aritmética)?

KETLIN: Aqui, ó no 6 e 7,2 (coordenadas $x = 6$ e $y = 7{,}2$)
</td>
</tr>
</table>

Figura 104: Ketlin mostra o centroide calculado no mapa

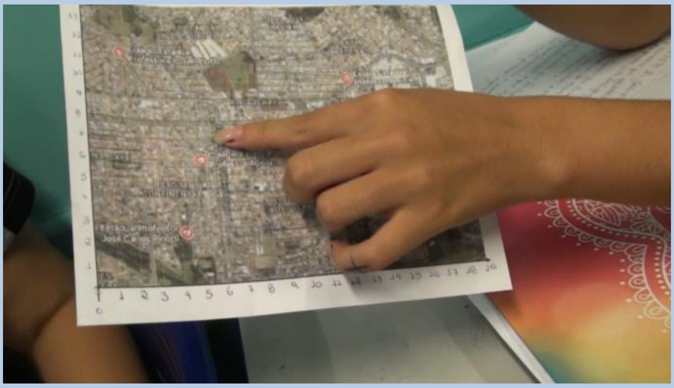
PROFESSOR: *E o da média ponderada? Onde tá localizado?*

KETLIN: *A gente não marcou ainda, mas deu no 6 ao 8* (coordenadas $x = 6$ e $y = 8$).

PROFESSOR: *Ah, subiu um pouquinho, né. Marca aí prá você ver. Por que vocês acham que a média ponderada subiu um pouquinho.*

KETLIN: *Porque as escolas, olha só, tem que ver o número de alunos das escolas. As escolas que tem mais alunos é o Adélia, o Roseli e depois o Lúcia Barros... tem mais alunos prá cima, por isso, a média ponderada dá aqui em cima.*

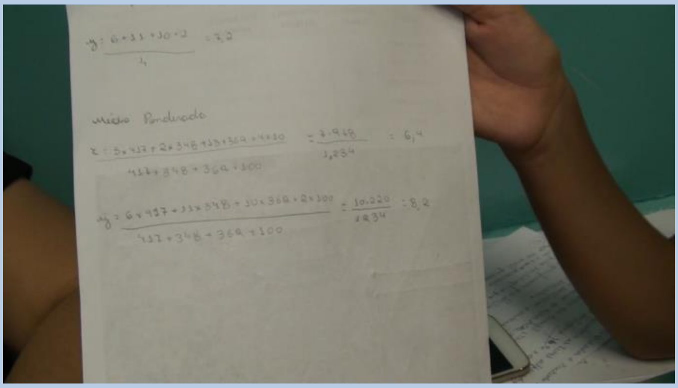
Figura 105: Ketlin mostra o centro das escolas



JOÃO VITOR: *Mas, olhando no mapa, a diferença é pequena. Subiu só um pouquinho, nem faz diferença se a escola ficar no 6 e 7,2 ou no 6 e 8.*

PROFESSOR: *É, a diferença é muito pequena, mesmo. Mas, por que isso acontece?*

Figura 106: Ketlin mostra os cálculos



KETLIN: *É que o número de alunos é aproximado. Ó, o Adélia tem 417, o Roseli tem 348, o Lúcia Barros tem 308 e o Pinotti, 190. O único diferente é o Pinotti,*

	por isso, que ficou quase igual (a média aritmética das coordenadas ficou aproximadamente igual a média ponderada)
USC.3.3.05	Ao efetuarem o cálculo com a média ponderada, os estudantes percebem outro modo de compreender o sentido da palavra centro, isto é, centro não como ponto equidistante ou centro como centroide de um polígono, mas centro como um ponto de equilíbrio de populações. Ao identificar que o centro médio e o centro ponderado das escolas são bem aproximados, os estudantes reavaliam o modelo matemático construído e interpretam o significado geométrico de média ponderada.

Essa cena apresenta incialmente como os estudantes reinterpretam o problema de explicar o equilíbrio da lata inclinada. Ao invés de utilizarem construções geométricas, os estudantes empregam coordenadas e interpretam a solução desse problema em termos de média aritmética e média ponderada das coordenadas de vértices de figuras geométricas. A adoção de um sistema de coordenadas cartesianas permite aos estudantes produzir novas interpretações para o problema de determinar o centro geométrico de uma figura, assim como permite interpretar a ideia de centro com outros significados. Da ideia de centro geométrico, os estudantes transitam para a ideia de centro de populações. Da ideia de centro como local de equidistância ou como local onde retas dividem polígonos em áreas iguais (ideia de centroide), os estudantes passam uma compreensão de centro como ponto que otimiza distâncias ou como ponto de equilíbrio de populações.

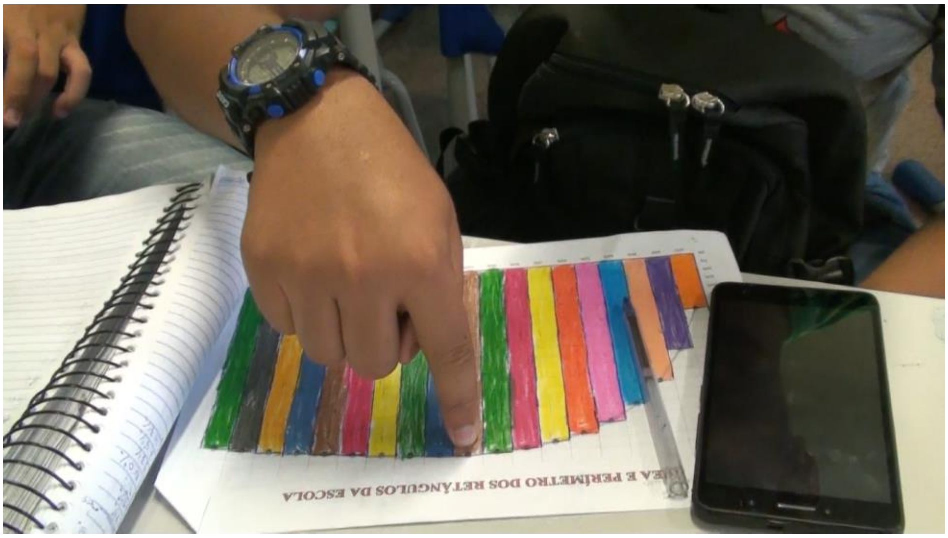
Esta transição caracteriza a manifestação da aprendizagem na cena. Nesse caso, a ideia de centro geométrico serve como uma metáfora linguística-visual para se tratar de centro de populações. Nesse caso, o conhecimento geométrico cumpre duas funções: serve como um modo linguístico-visual para expressar uma compreensão sobre o tema investigado e serve como uma metáfora para interpretar modelos matemáticos de outros domínios da matemática, como é o caso do cálculo de médias.

Cena 4: Analisando a otimização dos espaços em prédios escolares

A cena 4 mostra um grupo, formado pelos estudantes Kauêh, Heglin, Emanuelle e Geovanna, trabalhando na tarefa de construir uma escala para avaliar a otimização dos espaços em prédios escolares. Mais especificamente, a tarefa dos estudantes consiste em estabelecer, utilizando o gráfico da figura 107, uma escala para avaliar a otimização da área de construções retangulares e, com isso, otimizar o aproveitamento dos espaços para a construção de uma maquete de uma escola de Ensino Médio Integral. Esse gráfico, como vimos no tópico

3.2.3, relaciona em barras verticais as porcentagens $\frac{Largura}{Comprimento}$ e $\frac{Área}{Área\ Máxima}$, permitindo avaliar "quanto falta" para uma construção retangular atingir a área máxima, mantendo fixado o seu perímetro.

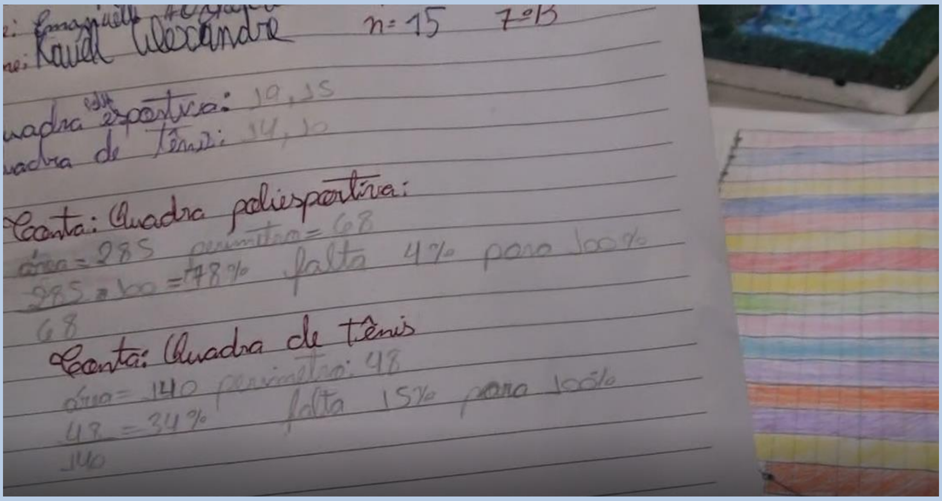
Figura 107: Escala para avaliar a otimização da área de construções retangulares



Quadro 33: Descrição da Cena 4 da Prática 3

Código da USC	Expressões dos sujeitos
01	**Figura 108: Grupos de estudantes elaboram sua escala de otimização**   PROFESSOR: *Como vocês fizeram ... como vocês definiram a relação entre largura e comprimento nos retângulos da maquete?* KAUÊH: *A gente já fez os cálculos para a quadra poliesportiva e quadra de tênis... falta dos outros.* PROFESSOR: *É... e como ficou?* KAUÊH: *A gente fez aqui* (mostra o caderno). *A quadra poliesportiva ficou com faltando 4% para 100% e a quadra de tênis ficou faltando 15% para 100%.*

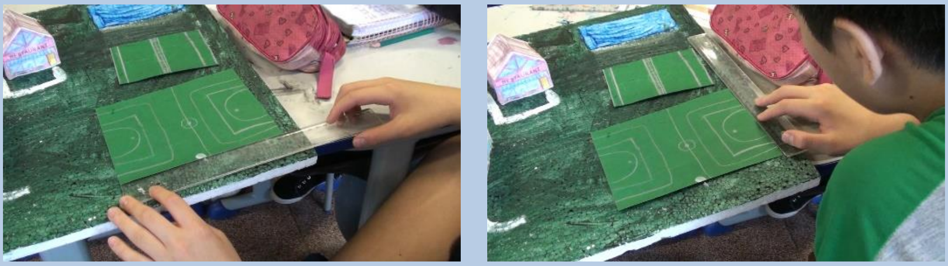
Figura 109: Kauêh mostra o caderno com seus cálculos



PROFESSOR: *E como vocês fizeram esses cálculos? Como vocês chegaram nesses números?*

KAUÊH: *Primeiro, a gente mediu assim, na quadra poliesportiva, o comprimento deu 19 e a largura de 15.*

Figura 110: Kauêh mostra como efetuou as medidas na maquete



PROFESSOR: *E o que vocês fizeram com essas medidas?*

HEGLIN: *A gente pegou a largura e dividiu pelo comprimento* (..) *e deu esse número aqui, ó* (mostrando a calculadora).

Figura 111: Heglin mostra cálculo efetuado na calculadora

PROFESSOR: *Deu 78%... é só multiplicar por 100 que dá 78%. E como vocês chegaram nos 4% que faltam prá área máxima?*

HEGLIN: *Porque aqui em baixo tá no 70 e aqui em cima fica maior que 95, daí falta uns 4 prá 100%* (mostrando no gráfico).

USC.3.4.01 Os estudantes descrevem e explicam como efetuaram as medidas e as

	operações para concluir, utilizando o modelo gráfico de barras verticais que a quadra poliesportiva está otimizada em 96%, ou seja, falta 4% para ela atingir a área máxima.
02	PROFESSOR: *Ah! Entendi, mas e a quadra de tênis? Como vocês fizeram? Por que deu esse número aí de 34%?* HEGLIN: *A gente fez a mesma coisa... deu 14 de comprimento e 10 de largura, daí dividiu...* (dividindo na calculadora.). *Dá esse aqui, ó.* PROFESSOR: *É, então, deu 71%, né? Não 34%, como vocês falaram.* KAUÊH: *Mas, tá aqui no caderno, tá certo!* (mostrando novamente o cálculo no caderno). PROFESSOR: *Eu acho que tá diferente porque vocês dividiram a área pelo perímetro. Por isso, deu 34%. E como vocês usaram esse valor de 34 % no gráfico?* HEGLIN: *A gente usou esse valor, aqui no gráfico, assim, e achou que faltava uns 15% para chegar na área máxima. Mas, tá errado. Deve faltar uns 5%, só.* **Figura 112: Heglin mostra no gráfico como interpretou a otimização das construções retangulares**  PROFESSOR: *É, mas esses 15% também não estariam corretos. Veja aí no gráfico, se a largura é 30% do comprimento, vai faltar mais prá área máxima, né?* HEGLIN: *Ah! É mesmo, faltaria uns 30% para a área máxima. É que cada quadrinho do gráfico é 10 e a gente pensou que fosse 5.*
USC.3.4.02	O questionamento do professor levou os estudantes a perceber um equívoco em seus cálculos para avaliar a otimização da quadra de tênis. Ao invés de dividir a largura pelo comprimento, eles dividiram o perímetro pela área. Os estudantes também percebem que realizam uma leitura equivocada do gráfico.
03	PROFESSOR: *Beleza! Mas, veja, a quadra poliesportiva e a quadra de tênis tem tamanhos padronizados, acho que não dá prá escolher o comprimento e largura. Mas, se pudesse mudar, quanto seria?* EMANUELLE: *Eu acho que esse tamanho é o ideal, mesmo. Tipo assim, se a largura tem uns 70% do comprimento, então falta uns 4% prá área máxima*

	(mostrando no gráfico). *É um tamanho bom, eu acho.* PROFESSOR: *E para as outras construções? Vocês acham que essa razão de 70% também é boa?* HEGLIN: *É, sim, é uma boa proporção... porque daí fica faltando só uns 5% da área máxima.* PROFESSOR: *Então a escala de vocês vai ser esta? A largura tem de ser igual ou superior a 70% do comprimento? Prá faltar uns 5% da área máxima? Vocês acham isso o ideal?* VÁRIAS VOZES: *Sim!*
USC.3.4.03	A interação entre os membros do grupo e professor conduz os estudantes a utilizar o modelo gráfico para avaliar a otimização das quadras poliesportiva e de tênis. Com base, nesses dois casos, os estudantes estabelecem uma escala para avaliar os espaços escolares, ou seja, se um espaço retangular é considerado adequado se sua área é igual ou superior a 95% da área máxima.

Essa cena mostra como os aprendem a utilizar um modelo gráfico para avaliar a otimização de espaços escolares retangulares. Além de mostrar a introdução à ideia de otimização geométrica, um conceito fundamental em MM, essa cena mostra possibilidades dos estudantes ressignificar a relação entre área e perímetro. Pensar em figuras que possuem área máxima, tendo fixado seu perímetro introduz os estudantes em questões interessantíssimas da geometria, como os problemas isoperimétricos, por exemplo. Inicialmente os estudantes apenas demonstram saber calcular área e perímetro de retângulos e a entender parcialmente a interpretar o modelo gráfico. Em seguida, com a ajuda do professor, os estudantes aprender a utilizar o modelo gráfico e a utilizar a forma das quadradas esportivas para estabelecer uma escala para analisar a otimização de espaços escolares.

4.3.2 Unidades Significativas dos Discursos da Prática 3

Quadro 34: Descrição da Unidade Discurso 1 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.01**

Unidade de Discurso	O centro de equilíbrio das escolas agente usou a média simples, e a média ponderada. Agentre usou os números da tabela e com base nesses números agente usa pra fazer as contas média simples e media ponderada eu achei muito fácil, com esses números agente descobre o centro de equilíbrio das escolas mais perto agente usou o Colégio Adelia, Pinotti, Lucia Barros e o colégio Roseli.
Asserção Articulada da USD	*Diz que o cálculo do centro de populações das escolas foi calculado usando a média aritmética das coordenadas e a média ponderada que, neste caso, utiliza como pesos as quantidades de alunos de cada escola. Esse cálculo é percebido como fácil e o que permite determinar a localização do ponto mais perto das quatro escolas da região.*

O estudante destaca, nessa Unidade de Discurso, o procedimento empregado para cálculo o centro de populações das quatro escolas. Desta que a realização desse cálculo foi fácil e indica compreender o significado que esse cálculo possui de determinar uma localização segundo a proximidade com as quatro escolas. Essa Unidade de Discurso indica que a estudante vê que essa sua aprendizagem se deu como a aquisição de procedimento de cálculo e de uma interpretação geométrica dos resultados obtidos nesse procedimento.

Quadro 35: Descrição da Unidade Discurso 2 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.02**
Unidade de Discurso	Agente também fez o centro de equilíbrio de uma lata de coca-cola. Agente pegou o tamanho da lata de coca-cola e com forme o tamanho dela era um número, e com esse número agente fez conta (ma) média aritmética pra saber onde (o ponto) que a lata fica em equilíbrio. Algumas coisas eu já lembrava porque o senhor já tinha passado alguns desses conteúdos gostei bastante fácil e bem divertido. Espero que aprendemos mais.
Asserção Articulada da USD	*A estudante relata que também calculou o centro de equilíbrio da lata de refrigerante inclinada, utilizando as coordenadas cartesianas dos vértices da imagem da lata. Cita o uso da média aritmética para determinar esse centro e diz que muitas das coisas relacionadas a esse cálculo, a estudante já lembrava de ter feito na prática 1, relacionada no ano anterior. Alguns das que aprendeu sobre essa prática 1, a estudante gostou bastante, pois achou fácil e bem divertido. Espera aprender ainda mais coisas parecidas.*

A estudante direciona sua descrição para o cálculo do centro de equilíbrio da lata utilizando um sistema de coordenadas cartesianas. Procura destacar também, nessa descrição, a importância de já ter realizado a prática 1 e que isso tornou se aprendizagem mais fácil e divertida. Essa Unidade de Discurso indica que a estudante vê sua aprendizagem como relacionada com o que ela aprendeu na prática 1, de modo que ela emprega essa aprendizagem anterior para tornar a aprendizagem mais eficiente.

Quadro 36: Descrição da Unidade Discurso 3 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.03**
Unidade de Discurso	Dividimos o mapa com a seguinte forma: onde cada um mora e o local mais perto do colégio e dividimos onde cada um vai estudar.
Asserção Articulada da USD	*O estudante descreve o que significou dividir o mapa em Áreas de Abrangências. Descreve que dividiu o mapa segundo o critério da proximidade, ou seja, considerando que as Áreas de Abrangências definem regiões de moradia que são mais próximas da escola de sua Área de Abrangência. As Áreas de Abrangências definem onde cada aluno vai estudar.*

O estudante destaca nesse relato a razão que sustenta a aprendizagem do conceito de mediatriz e do Diagrama de Voronoi. A adoção do critério de proximidade define como o mapa será dividido, ou seja, define o modelo matemático que será adotada. Define também onde cada estudante deve estudar. Essa Unidade de Discurso indica que a estudante vê que essa sua aprendizagem é movida por razões sustentadas no tema e na investigação do tema.

Quadro 37: Descrição da Unidade Discurso 4 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.04**
Unidade de Discurso	tive muita dificuldade em aprender a fazer a mediatriz, mas meu professor veio e me ajudou a fazer. Achei muito legal também porque enquanto vamos fazendo os trabalhos ele ia filmando e mostrando os jeitos que agente fazia, a gente tinha que explicar o modo de fizemos para camera.
Asserção Articulada da USD	*A estudante diz teve dificuldades para aprender a construir a mediatriz (no Diagrama de Voronoi), mas o professor veio e a ajudou a efetuar essa construção. Achou isso muito positivo. Considerou positivo também o fato do professor filmar e indicar os modos que os estudantes faziam as coisas na prática de MM. O fato de que explicar para o professor e para a câmera foi também positivo.*

Essa Unidade de Discurso aponta dificuldades e superação de dificuldades com a ajuda do professor. A estudante destaca também o fato das aulas serem filmadas e o professor, com o objetivo de registrar os que os estudantes faziam, sempre questionava os estudantes, solicitando explicações sobre o modo como faziam as coisas. Essa Unidade de Discurso indica que a estudante vê que sua aprendizagem se deu como uma interação com o professor e decorrente da exigência de explicar de expressar compreensões sobre o que faziam e sobre como faziam.

Quadro 38: Descrição da Unidade Discurso 5 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.05**
Unidade de Discurso	Bom eu aprendi essas coisas e muitas outras coisas, aprendi sobre áres de abrangencia, sobre o cento de equilibrio das escolas, agente ficou com o professor dois anos seguido então são sempre experiências novas que aprendemos, tipo
Asserção Articulada da USD	*A estudante diz que aprendeu várias coisas e, entre elas, aprendeu sobre Áreas de Abrangências e centro de equilíbrio das escolas. Diz também que estudou matemática dois anos seguidos com o professor e que ele procura sempre diversificar suas práticas, propondo coisas novas.*

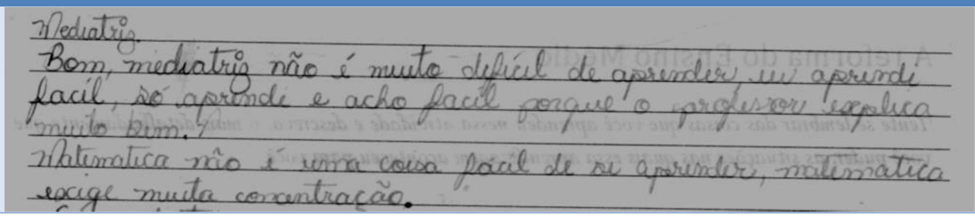
A estudante destaca nesse relato a aprendizagem de Áreas de Abrangências e centro de equilíbrio. Cita também o papel da diversificação das abordagens do professor na aprendizagem de novas experiências. Essa Unidade Significativa de Discurso indica que a estudante vê sua aprendizagem geométrico ocorrer em função dos temas investigados e do caráter imprevisível e não rotineiro das práticas de MM. Percebe sua aprendizagem como se dando num cenário de investigação em que a atuação do professor, como alguém que propõe novas experiências, é muito importante.

Quadro 39: Descrição da Unidade Discurso 6 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.06**
Unidade de Discurso	• Aprendi como localizar o centro de equilibrio das escolas da região, completando uma tabela com as coordenadas da localizacão das escolas da região, caucular o centro de equilibrio e depois essa conta o número de alunos de cada escola. Aprendi sobre a média ponderada, Sobra média Aritimética. Ex:
Asserção Articulada da USD	*A estudante descreve que aprendeu como localizar o centro de equilíbrio das escolas da região, completando uma tabela com as coordenadas e com o número de alunos de cada escola. Aprendeu a calcular o centro com a média aritmética e com a média ponderada.*

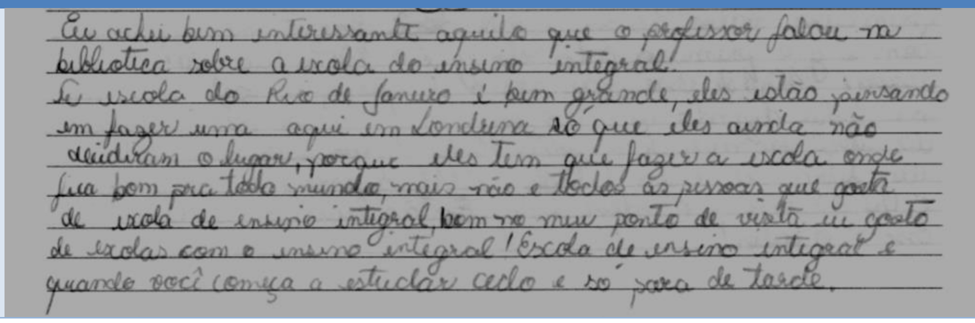
Essa Unidade de Discurso destaca a aprendizagem dos procedimentos de cálculo para determinar o centro de equilíbrio das escolas. O estudante indica perceber a relação entre esses procedimentos e o significado de centro de equilíbrio. Essa Unidade de Discurso indica que a estudante vê que sua aprendizagem se dá como uma aquisição de procedimentos metódicos que empregados para obter um resultado.

Quadro 40: Descrição da Unidade Discurso 7 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.07**
Unidade de Discurso	 Mediatriz Bom, mediatriz não é muito dificil de aprender, eu aprendi facil, só aprendi e acho facil porque o professor explica muito bem. Matematica não é uma coisa facil de se aprender, matematica exige muita concentração.
Asserção Articulada da USD	*A mediatriz é percebida como um conteúdo de geometria fácil de aprender. A estudante se percebe como aprendendo somente facilmente esse conteúdo porque as explicações do professor são boas. Percebe ainda que a matemática não é uma coisa fácil de ser aprendida, pois exige muita concentração.*

A estudante descreve como se percebe na aprendizagem da mediatriz que, segundo ela, é um conteúdo que se aprende sem dificuldades, mas precisa das explicações do professor. Depende da qualidade dessas explicações. A matemática é aprendida com dificuldade, exigindo atenção e foco, durante as aulas. Essa Unidade Significativa de Discurso mostra que a estudante percebe que sua aprendizagem se dá num ambiente em que a atuação do professor é muito importante, assim como a concentração do estudante.

Quadro 41: Descrição da Unidade Discurso 8 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.08**
Unidade de Discurso	 Eu achei bem interessante aquilo que o professor falou na biblioteca sobre a escola do ensino integral! A escola do Rio de Janeiro é bem grande, eles estão pensando em fazer uma aqui em Londrina só que eles ainda não decidiram o lugar, porque eles tem que fazer a escola onde fica bom pra todo mundo, mais não e todos as pessoas que gosta de escola de ensino integral, bom no meu ponto de vista eu gosto de escolas com o ensino integral! Escola de ensino integral e quando você começa a estudar cedo e só para de tarde.
Asserção Articulada da USD	*A estudante cita uma discussão promovida pelo professor sobre a estrutura de uma escola de Ensino Médio Integral em que o professor apresenta, como exemplo, uma escola do estado do RJ. A estudante percebe a necessidade de construir em Londrina uma escola de período integral como um fato positivo e aponta a importância de determinar uma localização para essa escola que seja boa para todos os estudantes.*

A estudante destaca nesse relato a importância do tema e a relevância subjetiva da investigação da localização do centro de equilíbrio das escolas. A estudante parece perceber que sua aprendizagem ocorre movida e sustentada por questões relevantes do tema. Ao mesmo tempo em que se percebe em relação a importância do tema como alguém que têm um posicionamento em relação ao tema, a estudante se coloca como alguém que avalia as questões investigadas, atribuindo a elas importância em relação ao tema.

Quadro 42: Descrição da Unidade Discurso 9 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.09**
Unidade de Discurso	Planta Baixa • Eu fiz um desenho por uma de como deveria ser uma escola do novo ensino medio, mas na minha opinião eu prefiro o ensino medio ATUALMENTE, mas eu acho que o governo não vai conseguir fazer muitas escolas igual da planta que eu fiz e isso foi isso que eu entendi.
Asserção Articulada da USD	*O estudante descreve a elaboração de uma planta baixa de uma escola para o Ensino Médio Integral. Entende que uma escola para essa modalidade exige uma estrutura adequada, mas vê com desconfiança as ações do governo e considera que o governo não vai fazer muitas escolas iguais a de sua planta baixa. Por isso, prefere o Ensino Médio como é atualmente.*

O estudante relata a realização de uma planta baixa para um projeto de escola de Ensino Médio Integral, mas descreve com ceticismo a viabilidade da construção de escolas iguais a da sua planta baixa. Essa Unidade de Discurso indica que o estudante vê que sua aprendizagem se dá na investigação de um tema relevante, mas não percebe sua ação na MM como resolução de um problema, pois, nesse caso, o problema só poderá ser resolvido com a ação do governo, com a ação de políticas públicas adequadas. O modelo fornece uma compreensão sobre o tema investigado, mas a solução depende de fatores externos ao modelo.

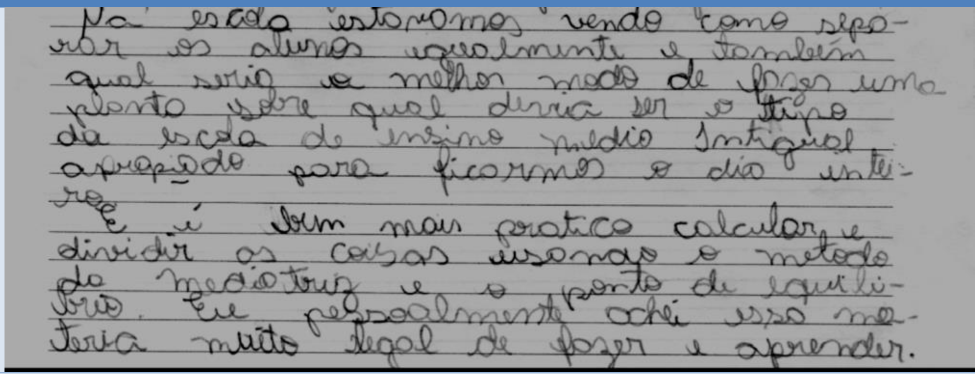
Quadro 43: Descrição da Unidade Discurso 10 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.10**
Unidade de Discurso	• colegio mais perto. a parte mais interessante foi desenhar uma planta baixa de uma escola do ensino médio de tempo integral, gosto de desenhar plantas e achei divertido criar algo assim usando os requisitos que precisamos para estudar integralmente.

Asserção Articulada da USD	*O estudante diz que a parte mais interessante da prática de MM foi a elaboração de uma planta baixa de uma escola de Ensino Médio Integral. Achou essa atividade divertida, pois teve que pensar em todos os requisitos que uma escola de período integral precisa ter para atender adequadamente os estudantes.*

O estudante destaca nesse relato a aprendizagem de procedimentos para a elaboração de uma planta baixa de uma escola de Ensino Médio Integral. Cita que foi prazeroso investigar os aspectos estruturas que se exige de uma escola de Ensino Médio Integral. Essa Unidade Significativa de Discurso indica que o estudante vê que sua aprendizagem se dá como uma prática de investigação, de criatividade e de "descobertas".

Quadro 44: Descrição da Unidade Discurso 11 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.11**
Unidade de Discurso	 Na escola estamos vendo como separar os alunos igualmente e também qual seria a melhor modo de fazer uma planta sobre qual deveria ser o tipo da escola de ensino médio Integral aproveitando para ficarmos o dia inteiro. E é bem mais prático calcular e dividir as coisas usando o método da mediatriz e o ponto de equilíbrio. Eu pessoalmente achei essa matéria muito legal de fazer e aprender.
Asserção Articulada da USD	*O estudante descreve que estão aprendendo como distribuir os alunos nas quatro escolas da região de maneira igual, ou seja, com o mesmo critério. E, também estão aprendendo a melhor maneira de elaborar um projeto de escola de Ensino Médio Integral que fosse mais adequada para atender os estudantes da região. A estudante percebe como bem mais prático realizar essa distribuição dos estudantes nas quatro escolas utilizando a construção de mediatrizes e o ponto de equilíbrio. A estudante percebe esse conteúdo geométrico muito prazeroso tanto de aprender quanto de fazer.*

A estudante destaca nesse relato a investigação das questões de distribuir os estudantes nas quatro escolas da região e de indicar um local para a construção de uma escola de Ensino Médio Integral. A estudante cita também uma investigação para elaborar uma planta baixa de uma escola adequada de período integral. Essa Unidade Significativa de Discurso indica que a estudante percebe sua aprendizagem geométrica vinculada à investigação de questões ligadas ao tema. Percebe a geometria e sua aprendizagem em práticas de MM como prazerosa.

Quadro 45: Descrição da Unidade Discurso 12 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.12**
Unidade de Discurso	Aprendi a calcular o centro de equilíbrio das escolas e eu encontrei completando com as coordenadas da localização das escolas da região; e em seguida eu calculei o centro de equilíbrio, pra depois eu calcular o centro de equilíbrio levando em conta o número de alunos de cada escola. Eu calculei o centro de equilíbrio da latinha, primeiro dividi a lata em 6 pontos para encontrar o centro da latinha e o centro de equilíbrio com a água.
Asserção Articulada da USD	*O estudante percebe que aprendeu a calcular o centro de equilíbrio das escolas, utilizando um sistema de coordenadas. Primeiro, aprendeu a calcular utilizando a média aritmética e depois, considerando o número de alunos como peso, aprendeu a calcular utilizando a média ponderada. Percebe que esse cálculo está relacionado com a determinação do centro geométrico da latinha inclinada de refrigerante.*

O estudante destaca nesse relato a aprendizagem de procedimentos para calcular o centro de equilíbrio das escolas utilizando coordenadas cartesianas. E, relaciona essa aprendizagem com a aprendizagem do centro geométrico da latinha de refrigerante. Neste sentido, o estudante emprega a geometria para interpretar o cálculo de médias. A geometria é percebida como uma fonte de sentido para outros domínios da matemática. Essa Unidade Significativa de Discurso parece indicar que o estudante vê sua aprendizagem vinculada, nesse caso, à possibilidade de utilizar a geometria para significar outros conteúdos de matemática.

Quadro 46: Descrição da Unidade Discurso 13 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.13**
Unidade de Discurso	Aprendemos sobre porcentagem e gráficos e que para mim foi a parte mais complicada de todas as atividades, tive muita dificuldade com Larg ÷ comp x 100, mas graças aos esforços do professor consegui entender do que se tratava e como resolver os problemas. Descobrimos que as escolas antigas igual a Adelia, não tem uma planta baixa muito Boa poderá ter uma area maior com o mesmo perímetro, assim usando melhor o espaço com mais salas, para ter mais vagas
Asserção Articulada da USD	*A estudante percebe que aprendeu sobre porcentagem e gráficos e que, na sua opinião, essa foi a parte mais complicada de todas as outras coisas que aprendeu. Percebe que teve muita dificuldade com a relação* $\frac{Larg.}{Comp.} \times 100$, *mas que, em virtude do empenho do professor ela conseguiu entender do que*

	se tratava e como utilizar o modelo gráfico para avaliar a otimização de espaços em prédios escolares. Utilizando esse modelo gráfico, a estudante cita que descobriu que as escolas antigas não eram adequadas, do ponto de vista da otimização da área, pois não aproveitavam adequadamente os espaços e, por isso, tinham menos salas de aulas e menos vagas.

A estudante destaca nesse relato a aprendizagem de procedimentos de para construir um modelo gráfico para avaliar a otimização dos espaços em prédios escolares. Afirma que teve muita dificuldade em entender a construção do modelo, principalmente com o significado da razão entre largura e comprimento de formas retangulares. Mas, com o empenho do professor, a estudante diz ter conseguido entender e aplicar esse modelo. Essa Unidade de Discurso revela que a estudante vê sua aprendizagem acontecendo num contexto de investigação no qual compreender o significado dos aspectos matemáticos do modelo é exigido para a compreensão do tema. A estudante se percebe na prática de MM e percebe a importância da atuação do professor e da geometria.

Quadro 47: Descrição da Unidade Discurso 14 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.14**
Unidade de Discurso	A parte mais legal desse trabalho foi fazer os graficos e medir os graficos e as tabelas e a Kilometragem dos colegios a colegios o total de alunos de cada escola e o numero de turmas em 2020 e quanto cada colegio tem de tamanho
Asserção Articulada da USD	*A parte mais positiva da prática de MM é percebida como sendo construir o modelo gráfico e utilizá-lo para avaliar a otimização dos espaços dos prédios escolares. O estudante percebe também que a pesquisa, utilizando imagens do Google Earth, das medidas das quatro escolas da região e da pesquisa do número de alunos e da projeção do número de alunos dessas escolas para 2020, foram também atividades positivas.*

Essa Unidade de Discurso descreve como positiva a aprendizagem envolvida na construção do modelo gráfico com barras verticais e no uso desse modelo para avaliar a otimização das escolas da região. O estudante percebe que essa aprendizagem se dá em um ambiente de investigação, de pesquisa, de modo que a construção e uso de modelos matemáticos é parte constituinte dessa investigação.

Quadro 48: Descrição da Unidade Discurso 15 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.15**

Unidade de Discurso	Algumas coisas que queremos nas escolas: piscinas, vestuários, salas, quadras cobertas, computadores e outras aulas opcionais, vi formas e como ver sua área e seu perímetro, distâncias de escolas a outra, distância da minha casa a escola. Nós fizemos uma maquete, nela era pra nós colocarmos a escola, o bairro e as coisas que queríamos na escola, foi bem legal, fizemos um debate falando sobre a reforma do Ensino Médio, nele havia perguntas e respostas, achei bem interessante.
Asserção Articulada da USD	*A estudante cita coisas que gostaria que a escola de período integral tivesse (piscinas, vestiários, quadras esportivas, salas de aula, computadores). A estudante percebe que aprendeu sobre área, perímetro, distâncias entre as escolas, distâncias entre as casas dos estudantes e a escola. A estudante cita também a construção da maquete em que seu grupo colocou todas as coisas que uma escola de Ensino Médio Integral deve ter. Essa construção da maquete é percebida como prazerosa, assim como a discussão promovida pelo professor em que os estudantes formulavam e respondiam perguntas sobre a reforma do Ensino Médio.*

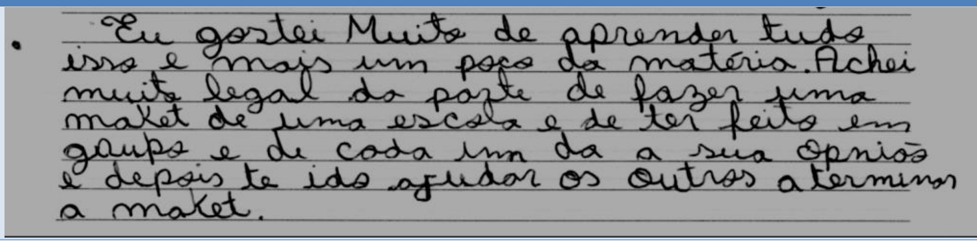
Essa Unidade de Discurso relata elementos que o grupo considerou para a elaboração da maquete da escola de Ensino Médio Integral e relaciona a construção da maquete com a aprendizagem de área, perímetro e distâncias. Perceber a construção da maquete e as discussões sobre a reforma do Ensino Médio como prazerosas indica que a estudante percebe que sua aprendizagem se deu num contexto de atividades práticas, envolvendo a manipulação de objetos físicos, e num contexto em que a discussão, o questionamento, a apresentação de opiniões e argumentos estão presentes.

Quadro 49: Descrição da Unidade Discurso 16 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.16**
Unidade de Discurso	Os colegios de antigamente eram bem mais estreitos e compridos e a área era bem pequena e não cabe tantos carteiros, mesas, etc. mas escolas bem planejadas e atuais, já tem mais área por que o formato se semelham com quadrado e cabem mais carteiros e salas tambem.
Asserção Articulada da USD	*Afirma-se que os colégios de antigamente eram bem mais estreitos e compridos e a área era bem pequena e, por isso, não cabia tantas carteiras, mesas. Nas escolas bem planejadas e atuais, já tem mais área porque o formato se assemelha com um quadrado e, por isso, cabem mais carteiras e salas de aula.*

Essa Unidade de Discurso indica como aprendizagem o resultado de uma investigação em que estudantes empregaram um modelo gráfico para avaliar a otimização dos espaços nos prédios escolares. O estudante destaca que aprendeu a fazer essa avaliação e que constatou que as escolas mais antigas são mais compridas e estreitas, ou seja, são menos otimizadas em sua área. Já as escolas planejadas recentemente possuem formatos mais próximos de um quadrado e, por isso, são mais otimizadas. Essa Unidade Significativa de Discurso indica que o estudante vê que sua aprendizagem se deu em um ambiente de pesquisa e que a geometria é percebida como um modo de expressar uma compreensão.

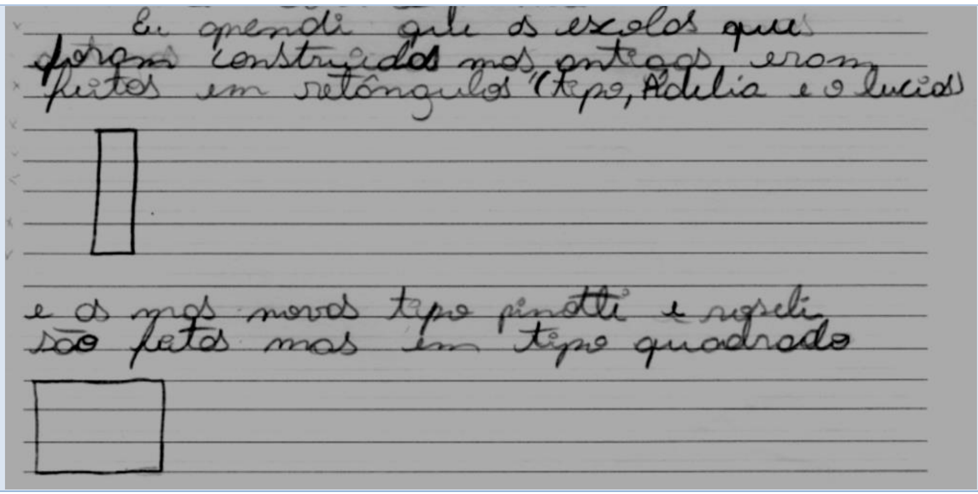
Quadro 50: Descrição da Unidade Discurso 17 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.17**
Unidade de Discurso	 • Eu gostei Muito de aprender tudo isso e mais um poco da matéria. Achei muito legal da parte de fazer uma maket de uma escola e de ter feito em grupo e de cada um da a sua opniõs e depois te ido ajudar os outros a terminar a maket.
Asserção Articulada da USD	*O estudante afirma que gostou muito de aprender todas as coisas relacionadas à reforma do Ensino Médio e aprender mais um pouco de matemática. Considera positiva e prazerosa a atividade da construção da maquete da escola, de cada um poder apresentar suas opiniões e poder ajudar os demais grupos na elaboração da maquete.*

Esse trecho destaca a aprendizagem sobre o tema investigado e sobre a própria Matemática. As atividades de construção da maquete, interação com o grupo e abertura para a discussão e manifestação de opiniões são consideradas prazerosas. Essa Unidade Significativa de Discurso aponta que a estudante percebe sua aprendizagem vinculada a um ambiente de atividades práticas, discussão de opiniões e colaboração entre os estudantes.

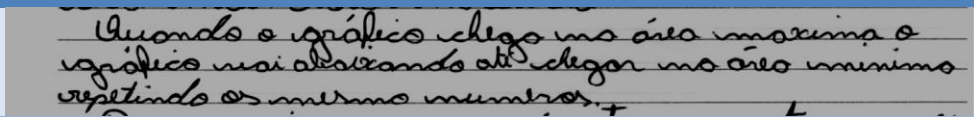
Quadro 51: Descrição da Unidade Discurso 18 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.18**

Unidade de Discurso	
Asserção Articulada da USD	*O estudante percebe a aprendizagem de que as escolas mais antigas foram construídas em formatos retangulares mais "estreitas" e "compridas", como exemplo, cita as escolas Adélia e o Lúcia Barros. Já as escolas novas são construídas com formatos mais próximos de um quadrado, como exemplificam as escolas Pinotti e Roseli.*

Essa Unidade de Discurso destaca a aprendizagem do procedimento para avaliar a otimização de espaços em prédios escolares. O uso de construções como parte do discurso aponta que o estudante percebe a geometria como um modo linguístico de expressão. Essa Unidade de Discurso indica que o estudante vê sua aprendizagem como a aquisição de maneiras de compreender seu mundo e num ambiente de investigação.

Quadro 52: Descrição da Unidade Discurso 19 da Prática 3

Código da USD	**USD.3.19**
Unidade de Discurso	
Asserção Articulada da USD	*O estudante descreve o comportamento do modelo gráfico de barras verticais utilizado para avaliar a otimização de espaços em prédios escolares. Diz que quando o gráfico cresce até atingir a área máxima e, depois disso, vai decrescendo e repetindo os mesmos valores de área, antes de atingir a área máxima.*

Esse trecho destaca a aprendizagem da análise do comportamento do modelo gráfico. O estudante percebe essa aprendizagem vinculada à avaliação da otimização de espaços em prédios escolares. Essa Unidade Significativa de Discurso indica que o estudante vê sua aprendizagem do modelo gráfico vinculada à análise de uma situação e percebe o modelo com um modo de compreender o tema investigado.

5 ANÁLISE NOMOTÉTICA: À PROCURA DE CONVERGÊNCIAS

A Análise Ideográfica constitui, como já argumentamos, num movimento de redução ao destacar os sentidos percebidos pelo pesquisador que dizem da interrogação de pesquisa. Partindo da Análise Ideográfica e, portanto, dos sentidos articulados nas USD e USC, a Análise Nomotética busca explicitar convergências, visa explicitar os grandes invariantes do fenômeno investigado. A Análise Nomotética consiste, portanto, num esforço de leitura e interpretação das asserções articulas USD e USC, buscando identificar o que têm em comum, quanto ao sentido percebido. Essa leitura e interpretação é também um movimento de redução que procede sempre fazendo convergir significados, apontando para Núcleo de Ideias.

É a interrogação de pesquisa que, mais uma vez, dá a direção em busca desses Núcleos de Ideias. Tendo em vista que a interrogação desta pesquisa inquiri *como os estudantes aprendem geometria em práticas de MM* e que o interrogado desta interrogação diz dos *modos* pelos quais os estudantes vivenciam, em práticas de MM, experiências de aprendizagem da geometria, a Análise Nomotética deve buscar os sentidos globais e estruturais desses *modos* que a interrogação indaga. Direcionado por essa compreensão, a Análise Nomotética que efetuamos indicou a manifestação de 12 grandes invariantes que dizem desses modos que a interrogação indaga. Na continuidade do movimento de redução, partindo desses 12 grandes invariantes, chegamos a 4 Núcleos de Ideias que desvelam do fenômeno investigado o que se busca compreender na interrogação. Este capítulo procura apresentar esses dois movimentos de redução.

5.1 CONSTRUÇÃO DOS INVARIANTES[20] DO FENÔMENO

Os 12 grandes invariantes desvelados dos sentidos articulados das USD e USC são os seguintes: Momentos Significativos, Razões que Sustentam a Aprendizagem, Percepções do Início da Aprendizagem, Aspectos Contextuais da Prática de MM, Percepções do Eu, Participação do Outro, Obstáculos e Dificuldades, O Professor e o Ensino, Investigação e Aprendizagem, Modos de Expressar Compreensões, Percepções da Geometria na Prática de MM e Percepções Acerca do Tema Investigado. Esses 12 invariantes são aqui apresentados em quadros, contendo uma síntese do sentido de cada um e a indicação das asserções articuladas

[20] O termo invariante, como já discutimos no tópico 3.1, refere-se a uma característica essencial do fenômeno, ou seja, trata-se de um aspecto estrutural. Um invariante é uma convergência de sentidos expressos nas unidades USC e USD. Assim, afirmar que Momentos Significativos é um invariante do fenômeno aprendizagem em práticas de MM significa dizer que o sentido de um conjunto considerável de unidades USC e USD convergem para esse invariante.

USD e USC que constituem esse sentido. Após cada quadro, efetuamos uma resumida interpretação do invariante.

Quadro 53: Explicitação do Invariante Momentos Significativos

Invariante	Momentos Significativos
Sentido do Invariante	*Ocorrências que se deram ao longo das práticas de MM e que são percebidas como relevantes para a aprendizagem geométrica.*
Asserções Articuladas USD e USC	USC.1.1.04, USC.1.2.04, USC.2.5.01, USC.2.2.03, USC.2.3.01, USC.3.1.02, USC.3.2.04, USC.3.3.01, USD.1.01, USD.2.01, USD.2.02, USD.3.04, USD.3.10, USD.3.13, USD.3.14, USD.3.15, USD.3.17

Compreendo que um momento é significativo se ele se destaca dos demais, formando em si uma unidade de sentido que direciona os acontecimentos que se dão a partir dele. Por exemplo, a USC.1.1.04 mostra como um grupo de estudantes retomam e rearticulam ideias que vinham sendo discutidas no grupo sobre as condições de equilíbrio e realizam uma síntese para expressar uma compreensão sobre as condições de equilíbrio da lata. Esse momento é significativo porque direciona a investigação do tema para uma abordagem geométrica. Em outro exemplo, a USD.1.01 revela como momento significativo a atividade de construir uma representação do corte vertical da lata e obtenção das medidas internas da lata. Perceber como era possível obter essas medidas foi percebido como significativo porque é visto como um momento de descoberta pelo estudante.

Quadro 54: Explicitação do Invariante Razões que Sustentam a Aprendizagem

Invariante	Razões que Sustentam a Aprendizagem
Sentido do Invariante	*A percepção da ocorrência da aprendizagem geométrica manifesta os porquês ou as razões que direcionam e sustentam essa ocorrência.*
Asserções Articuladas USD e USC	USC.1.4.01, USC.1.4.02, USC.2.2.02, USC.2.2.03, USC.2.3.02, USD.1.03, USD.1.09, USD.3.02, USD.3.08, USD.3.13, USD.3.14, USD.3.15, USD.3.16, USD.3.17, USD.3.19

O termo *razões* aqui é entendido como sinônimo de *porquês*, ou seja, o fundamento que justifica ou embasa uma explicação. Portanto, as razões que sustentam a aprendizagem são os porquês que explicam o início e a manutenção da ocorrência da aprendizagem geométrica dos estudantes. Por exemplo, a USC.1.4.01 mostra como um grupo de estudantes significam procedimentos para obter o centro geométrico, descritos como construir, decompor, calcular, equacionar, se desdobram em diferentes modos de expressão: a fala, os registros escritos, as construções geométricas, registros algébricos. Com isso, esses procedimentos justificam e explicam a manifestação desses modos de expressão. Em outro exemplo, a USD.3.16 descreve uma compreensão da otimização dos espaços em prédios escolares. O estudante compreende que os colégios de antigamente eram bem mais estreitos e compridos e a área era bem pequena e, por isso, não cabia tantas carteiras, mesas. Já nas escolas mais bem planejadas, como as atuais, a área é mais otimizada porque o formato se assemelha com um quadrado, cabendo mais carteiras e mais salas de aula. Essa compreensão do estudante explica a ocorrência da aprendizagem sobre otimização da área de retângulos e a aprendizagem do modelo gráfico para analisar a otimização dos espaços escolares.

Quadro 55: Explicitação do Invariante Percepções do Início da Aprendizagem

Invariante	Percepções do Início da Aprendizagem
Sentido do Invariante	*A vivência da aprendizagem em práticas de MM revela percepções acerca de como se dá a origem da aprendizagem geométrica.*
Asserções Articuladas USD e USC	USC.1.1.04, USC.2.3.01, USC.2.3.03, USC.2.4.02, USC.3.1.01, USC.3.1.02, USD.1.01, USD.1.05, USD.2.05, USD.3.04, USD.3.02, USD.3.13

Compreendo que a aprendizagem se inicia quando uma transformação significativa ocorre no modo de abordar o tema na investigação. O início marca o momento de transição entre uma abordagem dada pelos modos de expressões convencionais para o modo de expressão específico da geometria para abordar o tema investigado. As percepções do início da aprendizagem geométrica manifestam, portanto, a aquisição de um modo linguístico de expressão específico da geometria que permite compreender o tema de um outro ponto de vista. Por exemplo, a USC.2.3.03 mostra como um grupo de estudantes, ao retornar à comparação entre os métodos de amarração e descrever a construção geométrica de dois métodos, destaca a formação de triângulos em um caso e a não formação de ângulo no outro. Essa percepção do estudante evidencia uma aproximação com a propriedade fundamental da desigualdade triangular, ou seja, marca o início da aprendizagem dessa propriedade. Em outro exemplo, a USD.1.05 mostra que a estudante percebe que não é possível descrever precisamente como aprendeu os assuntos envolvidos na prática de MM, mas o que percebe que precisou estar muito atenta às orientações do professor e colocar em prática o que aprendeu. Essa vivência, percebida pela estudante, indica que a aprendizagem da geometria se inicia no modo como as orientações do professor são transformadas em ações na prática de MM. A aprendizagem do centro geométrico é percebida pela estudante como se originando na colocação em prática das orientações do professor sobre como utilizar o fio de prumo.

Quadro 56: Explicitação do Invariante Aspectos Contextuais da Prática de MM

Invariante	Aspectos Contextuais da Prática de MM
Sentido do Invariante	*O modo como a aprendizagem geométrica se dá na prática de MM é percebida contra um fundo, um entorno, que revela aspectos do local ou do espaço onde essa aprendizagem se dá. Num sentido mais amplo, a percepção da aprendizagem geométrica manifesta aspectos contextuais do ambiente em a prática de MM acontece.*
Asserções Articuladas USD e USC	USC.1.1.01, USC.1.1.04, USC.1.3.03, USC.1.4.04, USC.3.1.01, USC.3.4.01, USD.1.05, USD.1.06, USD.1.11, USD.2.03, USD.3.02, USD.3.05, USD.3.06, USD.3.15, USD.3.17

Cada prática de MM é fundamentalmente um acontecimento que se dá num contexto específico, sempre individualizado, ou seja, um contexto que inclui um local, um espaço de trabalho, uma organização desse espaço, uma turma específica de estudantes, um professor com habilidades também específicas. Todos esses aspectos dizem do contexto em que a prática de MM se dá. Por exemplo, USC.1.4.04 mostra que um grupo de estudantes expressa a compreensão de que o centro geométrico nem sempre pertence à vertical que passa pelo apoio e que, quando isso acontece, a lata perde o equilíbrio. Para expressar essa compreensão, o grupo de estudantes recorrem ao uso de um celular que complementa os gestos para indicar quando o centro de gravidade está “antes” e “depois” da linha que passa pela base de apoio da lata. Esse é um aspecto contextual dessa prática de MM e que diz de como a aprendizagem se deu nesse contexto específico. Em outro exemplo, a USD.2.03 revela a percepção de que a aprendizagem geométrica se deu no ambiente “laboratório de ciências” e que nesse ambiente a investigação de diferentes tipos de amarrações, utilizando tênis de 5 e 6 furos e uma folha com diagramas, permitiu a identificação do menor e o maior percurso do cadarço em cada amarração.

Quadro 57: Explicitação do Invariante Percepções do Eu

Invariante	Percepções do Eu
Sentido do Invariante	*Ao elaborar seus relatos em que descreve sua aprendizagem, estudantes eventualmente lançam um olhar para si próprio, seus sentimentos, vontades valores, características pessoais, de modo que esse olhar manifesta a presença do Eu no modo como a aprendizagem geométrica se dá.*
Asserções Articuladas USD e USC	USD.1.04, USD.1.05, USD.1.06, USD.1.07, USD.2.08, USD.3.02, USD.3.04, USD.3.05, USD.3.07, USD.3.08, USD.3.09, USD.3.10, USD.3.13

As percepções do Eu se manifestam relacionadas à aprendizagem geométrica de muitos modos. Por exemplo, a USD.2.08 mostra que a estudante se percebe meio confusa no começo da prática de MM, se perguntando "para que isso?" e entendendo parcialmente o que deveria fazer. Já a USD.3.07 revela a percepção de um Eu que aprende facilmente, que vê a mediatriz como um conteúdo de geometria fácil de se aprender. Em USD.3.10, por sua, o Eu é percebido como alguém que possui o gosto e a habilidade para o desenho. Por isso, considera a elaboração de uma planta baixa de uma escola de Ensino Médio Integral e a pesquisa sobre os requisitos que uma escola de período integral precisa ter, a parte mais interessante da prática de MM. Por fim, a USD.3.09 revela um Eu que emite opiniões, que se posiciona em relação ao tema investigado. Ao descrever a elaboração de uma planta baixa de uma escola para o Ensino Médio Integral, o estudante vê com desconfiança as ações do governo e considera que o governo não vai fazer muitas escolas iguais a de sua planta baixa. Por isso, prefere o Ensino Médio como é atualmente.

Quadro 58: Explicitação do Invariante Participação do Outro

Invariante	**Participação do Outro**
Sentido do Invariante	*Percepções da ocorrência da aprendizagem em práticas de MM manifestam, além do próprio estudante que aprende, a presença e a influência de outras pessoas.*
Asserções Articuladas USD e USC	USC.1.1.02, USC.1.1.03, USC.2.1.02, USC.3.1.02, USC.3.1.04, USC.3.4.03, USD.1.08, USD.2.08, USD.3.04, USD.3.05, USD.3.07, USD.3.17

A presença e a influência do Outro na aprendizagem geométrica se mostram de diferentes modos. Por exemplo, a USC.1.1.03 mostra que a interação entre os membros do grupo faz com eles se aproximem da compreensão de que as condições de equilíbrio dos objetos dependem da distribuição simétrica dos seus pesos em relação ao ponto de apoio. A influência do Outro se dá, neste caso, como uma busca de uma compreensão consensual. Já em USD.2.08, a presença e a influência do Outro se mostram como apoio e ajuda. Neste caso, a estudante percebe que suas dificuldades e desorientação foram sendo progressivamente superadas pela ajuda dos colegas e do professor. Finalmente, a unidade USD.3.17 mostra que a estudante percebe como positiva e prazerosa a atividade da construção da maquete da escola, pois apresentou suas opiniões aos membros de seu grupo e ajudou os demais grupos na elaboração da maquete. Neste sentido, a presença e influência do Outro se dá como possibilidade de compartilhar o que se aprendeu.

Quadro 59: Explicitação do Invariante Obstáculos e Dificuldades

Invariante	**Obstáculos e Dificuldades**
Sentido do Invariante	*A vivência da aprendizagem geométrica em práticas de MM manifestando a presença e a superação de obstáculos e dificuldades.*
Asserções Articuladas USD e USC	USC.1.3.01, USC.3.1.02, USC.3.4.02, USD.1.04, USD.1.07, USD.2.08, USD.3.04, USD.3.07, USD.3.13

Obstáculos e dificuldades na aprendizagem geométrica em práticas podem se manifestar de diferentes modos. Por exemplo, a USC.1.3.01 mostra como uma compreensão equivocada acerca das construções geométricas funciona como um obstáculo para a aprendizagem geométrica. Nesta unidade, a construção do centro geométrico do retângulo é percebida como um procedimento similar ao utilizada com dobraduras ou utilizando um fio de prumo e, por isso, a transição da manipulação física da figura para a construção de traçados sobre ela se dê lentamente. Já a unidade USD.3.13 manifesta a percepção da dificuldade de produzir significado para a relação $\frac{Larg.}{Comp.} \times 100$ e que precisou da ajuda do professor para conseguiu entender do que se tratava e como utilizar o modelo gráfico para avaliar a otimização de espaços em prédios escolares.

Quadro 60: Explicitação do Invariante O Professor e o Ensino

Invariante	**O Professor e o Ensino**
Sentido do Invariante	*A atuação do professor e as situações em que essa atuação ocorre na forma de ensino, ou seja, na forma de orientações, explicações, indagações, sistematizações, esclarecimentos, manifestadas na percepção do modo como a aprendizagem geométrica se dá em práticas de MM.*
Asserções Articuladas USD e USC	USC.1.1.02, USC.1.2.02, USC.3.1.02, USC.3.2.03, USC.3.3.03, USC.3.3.04, USC.3.4.02, USD.1.05, USD.2.08, USD.3.04, USD.3.05, USD.3.07, USD.3.13

Uma primeira manifestação da atuação do professor se dá na USC.1.1.02 em que o estudante percebe, no exemplo do caderno apoiado na ponta do dedo, uma possibilidade de compreender as condições de equilíbrio em objetos de peso homogêneo e formato geométrico conhecido. Este exemplo discutido pelo professor introduz os estudantes numa primeira aproximação da aprendizagem de centro geométrico. Uma outra manifestação da atuação do professor na forma de ensino é mostrada na unidade USC.3.3.04 que revela como a atuação do professor auxiliou os estudantes a entender o cálculo e o significado do uso da média ponderada para calcular o centro de equilíbrio de populações. Finalmente, a atuação do professor pode se dar como um estilo, como um modo de organizar propor as atividades de ensino. Por exemplo, a unidade USD.3.05 mostra a percepção de que conhecer o professor e o professor diversificar suas práticas, propondo sempre novas experiências de aprendizagem, é importante para a aprendizagem geométrica em práticas de MM.

Quadro 61: Explicitação do Invariante Investigação e Aprendizagem

Invariante	Investigação e Aprendizagem
Sentido do Invariante	*Manifestações de atitudes de investigação na percepção da ocorrência da aprendizagem geométrica em práticas de MM.*
Asserções Articuladas USD e USC	USC.1.1.04, USC.1.2.01, USC.1.2.04, USC.1.3.01, USC.2.1.01, USC.2.1.02, USC.2.1.03, USC.2.2.01, USC.2.3.02, USC.2.4.01, USC.2.5.01, USC.3.1.01, USC.3.1.03, USC.3.2.03, USC.3.3.01, USD.1.02, USD.3.03, USD.3.05, USD.3.08, USD.3.10, USD.3.11, USD.3.13, USD.3.14

Compreendo investigação como a busca de uma compreensão direcionada por uma interrogação. Como esse sentido de investigação se manifesta nas percepções da ocorrência da aprendizagem geométrica em práticas de MM? Por exemplo, a unidade USC.1.2.04 mostra que uma investigação direcionada para a obtenção das medidas que possibilitam a construção bidimensional do corte vertical da lata inclinada, conduziu os estudantes à compreensão de que a forma geométrica da água dentro da lata inclinada é um polígono em que a linha que representa a superfície da água deve ser paralela à linha que representa à base de apoio. Em outro exemplo, a unidade USD.2.06 mostra que a investigação da questão geométrica que requer a determinação do menor caminho que vai do ponto A até o ponto B, passando pela reta r, conduz os estudantes ao método de reflexão e da desigualdade triangular. Finalmente, a unidade USD.3.14 manifesta como uma investigação sobre imagens do Google Earth conduziu os estudantes à compreensão do modelo gráfico utilizado para a avaliar a otimização dos espaços dos prédios escolares.

Quadro 62: Explicitação do Invariante Modos de Expressar Compreensões

Invariante	Modos de Expressar Compreensões
Sentido do Invariante	*Modos de expressar compreensões manifestados na percepção da ocorrência da aprendizagem geométrica em práticas de MM.*

Asserções Articuladas USD e USC	USC.1.1.01, USC.1.1.04, USC.1.2.01, USC.1.2.05, USC.1.3.02, USC.2.1.01, USC.2.2.01, USC.2.4.03, USC.2.4.04, USC.1.4.01, USC.1.4.03, USC.3.1.03, USC.3.1.04, USC.3.2.01, USC.3.3.02, USC.3.4.01, USD.2.06, USD.3.01, USD.3.04, USD.3.09, USD.3.11, USD.3.18, USD.3.19

As compreensões que se dão na ocorrência da aprendizagem geométrica em práticas de MM são manifestadas em modos linguísticos de expressão. São exemplos de modos de expressão a fala, os gestos, as movimentações corporais, os olhares, os registros escritos, os símbolos. Desde um ponto de vista fenomenológica, a compreensão se dá como apreensão do sentido produzido pela relação de implicação entre modos de expressão. Por exemplo, a USC.1.1.04 mostra que a compreensão da necessidade de efetuar uma construção sobre o retângulo é percebida e expressa nos gestos e movimentações corporais dos estudantes, porém a introdução de notações para os vértices do retângulo torna a comunicação mais verbal e menos gestual. Em outro exemplo, as unidades USC.2.4.03 e USC.2.4.04 mostram que a compreensão do procedimento de simplificação de uma construção geométrica é expressa em gestos de registrar num diagrama os segmentos congruentes que seriam eliminados. Neste caso, gestos, registros simbólicos e o diagrama são modos de expressão que se relacionam para produzir um sentido que é compreendido pelo estudante. Finalmente, um terceiro exemplo é dado pela unidade USD.3.18 em que o estudante emprega registros escritos e desenhos geométricos para expressão sua compreensão acerca da otimização dos espaços em prédios escolares.

Quadro 63: Explicitação do Invariante Percepções da Geometria na Prática de MM

Invariante	**Percepções da Geometria na Prática de MM**
Sentido do Invariante	*Manifestação da presença e do papel do conhecimento geométrico na percepção da vivência da aprendizagem em práticas de MM.*
Asserções Articuladas USD e USC	USC.1.2.03, USC.2.4.01, USC.2.5.02, USC.3.2.02, USC.3.3.05, USD.1.04, USD.1.10, USD.1.12, USD.2.01, USD.2.02, USD.2.07, USD.3.01, USD.3.06, USD.3.07, USD.3.08, USD.3.11, USD.3.13, USD.3.14, USD.3.16, USD.3.18, USD.3.19

Compreendo que a aprendizagem da geometria não se resume na aquisição de significados conceituais ou o domínio de procedimentos e habilidades específicas, mas sempre inclui a aquisição de uma compreensão ampla acerca da natureza e do papel do conhecimento geométrico. Por exemplo, na unidade USC.1.2.03 a representação bidimensional do corte vertical da lata inclinada é percebida como tendo uma forma geométrica retangular, de modo que esta forma geométrica fornece uma compreensão da forma da água no interior da lata, ou seja, a geometria é percebida como um modo de "ver" o que acontece no mundo. Em outro exemplo, a unidade USC.2.5.02 mostra que uma construção efetuada para comparar os métodos de amarração é percebida como fundamentada na desigualdade triangular. Neste sentido, o conhecimento geométrico, expresso na propriedade da desigualdade triangular, é percebido com um fundamento, como modo de garantir a certeza das explicações. Por fim, a unidade USC.3.2.04 indica que a avaliação da divisão do mapa utilizando o Diagrama de Voronoi conduz o grupo à busca de um novo diagrama. O conhecimento geométrico, neste caso, é percebido como falível, ou seja, nem tudo que se afirmar, com base nesse conhecimento, pode ser validado.

Quadro 64: Explicitação do Invariante Percepções Acerca do Tema Investigado

Invariante	**Percepções Acerca do Tema Investigado**
Sentido do Invariante	*Percepções da presença e influência do tema investigado na prática de MM sobre a aprendizagem geométrica manifestadas na vivência dos estudantes.*
Asserções Articuladas USD e USC	USC.1.1.03, USC.1.4.04, USC.2.2.02, USC.2.2.03, USC.3.1.01, USC.3.1.03, USC.3.2.04, USC.3.3.05, USD.2.03, USD.2.05, USD.3.02, USD.3.03, USD.3.06, USD.3.08, USD.3.09, USD.3.11, USD.3.19

O sentido do termo *tema* pode ser entendido de modo amplo como aquilo para o qual se direciona a investigação nas práticas de MM com o propósito de alcançar uma compreensão. Em práticas de MM busca-se alcançar uma compreensão sobre algo que pode ser identificado como o *tema investigado*. A relação que se estabelece com o *tema investigado* na MM pode-se dar de vários modos. Por exemplo, as unidades USC.1.1.03 e USD.2.05 referem-se, respectivamente, a investigação dos temas "condições de equilíbrio de objetos" e "percursos de comprimento mínimo". Nestes dois casos, os temas se manifestam como fundamento empírico para sustentar a argumentação sobre uma propriedade geométrica. O uso do caderno apoiado na ponta do dedo e o lançamento de uma bolinha de borracha contra o piso expõe a presença física do tema e serve para ilustrar a verificação empírica da localização do centro geométrico e da congruência entre ângulo de incidência e ângulo de reflexão.

A presença do *tema investigado* na percepção da ocorrência da aprendizagem geométrica pode-se dar também como algo que confere relevância subjetiva a essa aprendizagem. Por exemplo, a unidade USD.3.09 manifesta que a aprendizagem de um modelo para avaliar a otimização de espaços em prédios escolares viabiliza a construção de uma opinião sobre políticas públicas do governo. Neste caso, a presença do tema confere relevância subjetiva para essa aprendizagem. O tema investigado também se manifesta como tendo um papel heurístico na aprendizagem geométrica. Por exemplo, as unidades USC.2.2.02 e USC.2.2.03 mostram que a observação de imagens de diferentes tipos de amarração conduz os estudantes à elaboração da hipótese de que o comprimento do percurso está relacionado com o ângulo formado entre a direção do cadarço e o lado, onde se situa a fileira de furos. Por fim, a presença do tema investigado se manifesta na avaliação acerca da adequação, eficiência, simplicidade, operacionalidade do modelo geométrico construído. Neste caso, o tema investigado é um modo de explicitar as qualidades (boas ou ruins) do modelo matemático. Por exemplo, a unidade USC.3.2.04 mostra que a avaliação da divisão do mapa com o Diagrama de Voronoi conduz ao reconhecimento das limitações de seu uso. O tema investigado, neste caso, confere uma qualidade negativa ao modelo matemático.

5.2 Construção e a Interpretação dos Núcleos de Ideias

O objetivo desta investigação é alcançar uma compreensão fenomenológica da interrogação: *como os estudantes aprendem geometria em práticas de MM*? Do que expomos até aqui, esta investigação conduziu a explicitação de 12 invariantes do fenômeno investigado. Na continuidade do movimento de redução, partimos desses 12 invariantes e interpretando-os à luz da interrogação, percebemos o surgimento de novas convergências de significados indicando 4 Núcleos de Ideias que expressam a essência do fenômeno investigado.

Dos invariantes Momentos Significativos, Percepções do Início da Aprendizagem e Aspectos Contextuais da Prática de MM percebemos convergir o Núcleo de Ideias *Temporalidade e Constituição da Aprendizagem*. Já os sentidos que articulam os invariantes Razões que Sustentam a Aprendizagem, Obstáculos e Dificuldades e Investigação e Aprendizagem convergem o Núcleo *Modos de Proceder e Abertura à Aprendizagem*. Os invariantes Percepções do Eu, Participação do Outro e O Professor e o Ensino convergem para o Núcleo *Vivência da Relação Eu/Outro/Nós na Aprendizagem*. Por fim, o Núcleo de Ideias *Vivência da Relação Geometria/Tema na Aprendizagem* reúne os sentidos dos invariantes Modos de Expressar Compreensões, Percepções da Geometria na Prática de MM e Percepções Acerca do Tema Investigado. Sintetizamos essa convergência dos 12 invariantes para os 4 Núcleos de Ideias no quadro 65. Após esse quadro, efetuamos a apresentação e interpretação de cada um desses 4 Núcleos de Ideias.

Quadro 65: Convergências das Unidades Significativas para as Núcleo de Ideias

UNIDADES USC E USD	INVARIANTES	O SENTIDO REVELADO NO INVARIANTE	NÚCLEO DE IDEIAS
USC.1.1.04, USC.1.2.04, USC.2.5.01, USC.2.2.03, USC.2.3.01, USC.3.1.02, USC.3.2.04, USC.3.3.01, USD.1.01, USD.2.01, USD.2.02, USD.3.04, USD.3.10, USD.3.13, USD.3.14, USD.3.15, USD.3.17	**Momentos Significativos**	Ocorrências que se deram ao longo das práticas de MM e que são percebidas como relevantes para a aprendizagem geométrica.	**Temporalidade e Constituição da Aprendizagem**
USC.1.1.04, USC.2.3.01, USC.2.3.03, USC.2.4.02, USC.3.1.01, USC.3.1.02, USD.1.01, USD.1.05, USD.2.05, USD.3.04, USD.3.02, USD.3.13	**Percepções do Início da Aprendizagem**	A vivência da aprendizagem em práticas de MM revela percepções acerca de como se dá a origem da aprendizagem geométrica.	
USC.1.1.01, USC.1.1.04, USC.1.3.03, USC.1.4.04, USC.3.1.01, USC.3.4.01, USD.1.05, USD.1.06, USD.1.11, USD.2.03, USD.3.02, USD.3.05, USD.3.06, USD.3.15, USD.3.17	**Aspectos Contextuais da Prática de MM**	O modo como a aprendizagem geométrica se dá na prática de MM é percebida contra um fundo, um entorno, que revela aspectos do local ou do espaço onde essa aprendizagem se dá. Num sentido mais amplo, a percepção da aprendizagem geométrica manifesta aspectos contextuais do ambiente em a prática de MM acontece.	
USC.1.4.01, USC.1.4.02, USC.2.2.02, USC.2.2.03, USC.2.3.02, USD.1.03, USD.1.09, USD.3.02, USD.3.08, USD.3.13, USD.3.14, USD.3.15, USD.3.16, USD.3.17, USD.3.19	**Razões que Sustentam a Aprendizagem**	A percepção da ocorrência da aprendizagem geométrica manifesta os porquês ou as razões que direcionam e sustentam essa ocorrência.	**Modos de Proceder e Abertura à Aprendizagem**
USC.1.3.01, USC.3.1.02, USC.3.4.02, USD.1.04, USD.1.07, USD.2.08, USD.3.04, USD.3.07, USD.3.13	**Obstáculos e Dificuldades**	A vivência da aprendizagem geométrica em práticas de MM manifestando a presença e a superação de obstáculos e dificuldades.	
USC.1.1.04, USC.1.2.01, USC.1.2.04, USC.1.3.01, USC.2.1.01, USC.2.1.02, USC.2.1.03, USC.2.2.01, USC.2.3.02, USC.2.4.01, USC.2.5.01, USC.3.1.01, USC.3.1.03, USC.3.2.03, USC.3.3.01, USD.1.02, USD.3.03, USD.3.05, USD.3.08, USD.3.10, USD.3.11, USD.3.13, USD.3.14	**Investigação e Aprendizagem**	Manifestações de atitudes de investigação na percepção da ocorrência da aprendizagem geométrica em práticas de MM.	
USD.1.04, USD.1.05, USD.1.06, USD.1.07, USD.2.08, USD.3.02, USD.3.04, USD.3.05, USD.3.07, USD.3.08, USD.3.09, USD.3.10, USD.3.13	**Percepções do Eu**	Ao elaborar seus relatos em que descreve sua aprendizagem, estudantes eventualmente lançam um olhar para si próprio, seus sentimentos, vontades valores, características pessoais, de modo que esse olhar manifesta a presença do Eu no modo como a aprendizagem geométrica se dá.	**Vivência da Relação Eu/Outro/Nós na Aprendizagem**
USC.1.1.02, USC.1.1.03, USC.2.1.02, USC.3.1.02, USC.3.1.04, USC.3.4.03, USD.1.08, USD.2.08, USD.3.04, USD.3.05, USD.3.07, USD.3.17	**Participação do Outro**	Percepções da ocorrência da aprendizagem em práticas de MM manifestam, além do próprio estudante que aprende, a presença e a influência de outras pessoas.	
USC.1.1.02, USC.1.2.02, USC.3.1.02, USC.3.2.03, USC.3.3.03, USC.3.3.04, USC.3.4.02, USD.1.05, USD.2.08, USD.3.04, USD.3.05, USD.3.07, USD.3.13	**O Professor e o Ensino**	A atuação do professor e as situações em que essa atuação ocorre na forma de ensino, ou seja, na forma de orientações, explicações, indagações, sistematizações, esclarecimentos, manifestadas na percepção do modo como a aprendizagem geométrica se dá em práticas de MM.	
USC.1.1.01, USC.1.1.04, USC.1.2.01, USC.1.2.05, USC.1.3.02, USC.2.1.01, USC.2.2.01, USC.2.4.03, USC.2.4.04, USC.1.4.01, USC.1.4.03, USC.3.1.03, USC.3.1.04, USC.3.2.01, USC.3.3.02, USC.3.4.01, USD.2.06, USD.3.01, USD.3.04, USD.3.09, USD.3.11, USD.3.18, USD.3.19	**Modos de Expressar Compreensões**	Modos de expressar compreensões manifestados na percepção da ocorrência da aprendizagem geométrica em práticas de MM.	**Vivência da Relação Geometria/Tema na Aprendizagem**
USC.1.2.03, USC.2.4.01, USC.2.5.02, USC.3.2.02, USC.3.3.05, USD.1.04, USD.1.10, USD.1.12, USD.2.01, USD.2.02, USD.2.07, USD.3.01, USD.3.06, USD.3.07, USD.3.08, USD.3.11, USD.3.13, USD.3.14, USD.3.16, USD.3.18, USD.3.19	**Percepções da Geometria na Prática de MM**	Manifestação da presença e do papel do conhecimento geométrico na percepção da vivência da aprendizagem em práticas de MM.	
USC.1.1.03, USC.1.4.04, USC.2.2.02, USC.2.2.03, USC.3.1.01, USC.3.1.03, USC.3.2.04, USC.3.3.05, USD.2.03, USD.2.05, USD.3.02, USD.3.03, USD.3.06, USD.3.08, USD.3.09, USD.3.11, USD.3.19	**Percepções Acerca do Tema Investigado**	Percepções da presença e influência do tema investigado na prática de MM sobre a aprendizagem geométrica manifestadas na vivência dos estudantes.	

Núcleo 1: Temporalidade na Constituição da Aprendizagem

Como já vimos, o invariante Momentos Significativos diz das ocorrências que se deram ao longo das práticas de MM e que são percebidas como relevantes para a aprendizagem geométrica. Esses momentos são relevantes porque formam em si uma unidade de sentido que direciona os acontecimentos que se dão a partir dele. Já o invariante Percepções do Início da Aprendizagem explicita que a vivência da aprendizagem em práticas de MM revela percepções acerca de como se inicia a aprendizagem geométrica. E como se dá esse início? Se dá quando uma compreensão prévia do tema investigado se encaminha para uma compreensão que se expressa no modo específico da geometria. As percepções do início da aprendizagem geométrica manifestam, portanto, a aquisição do modo linguístico de expressão específico da geometria. Por fim, o invariante Aspectos Contextuais da Prática de MM remete à percepção de um fundo, de um entorno que revela aspectos locais e espaciais de onde essa aprendizagem se dá. Assim, esses aspectos contextuais *situam* a aprendizagem da geometria em práticas de MM em relação ao olhar de um observador que vê aprendizagem de um ponto de vista específico e contra um horizonte específico. Portanto, a aprendizagem não é constituída por um observador universal, mas situado num tempo e espaço específicos.

Esses três invariantes revelam a presença do tempo, do espaço e do observador na constituição da aprendizagem geométrica que se dá em práticas de MM. Mas, não se trata de um tempo como sequência de momentos e um espaço como soma de lugares que se dão independentes do observador. É na trama tecida pelo observador/tempo/espaço que essa aprendizagem é constituída. É por conta desta trama que podemos falar da *temporalidade* como constituinte da aprendizagem geométrica em práticas de MM. Assim, a *Temporalidade na Constituição da Aprendizagem* forma um Núcleo de Ideias que articula os sentidos dos três invariantes aqui discutidos. Mas, o que significa afirmar que a temporalidade é constituinte da aprendizagem geométrica em práticas de MM?

Para abordar esta questão, vamos procurar esclarecer o entendimento de *temporalidade*. Do ponto de vista da fenomenologia, segundo Sokolowski (2014, p.141), três níveis da temporalidade podem ser distinguidos. O primeiro é o *tempo do mundo*, dos relógios, dos calendários, ou seja, o tempo transcendente ou objetivo que pode ser medido e que se dá como uma sucessão de instantes independentes da nossa subjetividade. O segundo nível é o *tempo interno*, o tempo imanente ou subjetivo, isto é, pertence à duração e às sequências de atos e experiências mentais, aos eventos da vida da consciência. Se recordamos de um acontecimento, por exemplo, restabelecemos a duração dos eventos segundo critérios de nosso tempo interno. O tempo interno não é público, mas privado. Por fim, o terceiro nível é a *consciência do tempo interno*, é o estar consciente do tempo interno. O segundo nível sozinho não é suficiente para responder pela sua própria consciência-de-si, por isso, é preciso introduzir esse terceiro nível para responder pelo que nós experienciamos no segundo. Esse terceiro nível constitui a temporalidade das atividades que ocorrem em nossa vida consciente e, por isso, permite que objetos internos apareçam como estendidos temporalmente e ordenados.

É esse terceiro nível da temporalidade, ou seja, é a consciência do tempo interno que é constituinte dos fenômenos que se mostram em nossa experiência. E como isto se dá? Segundo Müller (2001, p.29), as partes de nossa experiência guardam entre si uma relação de não-independência. Cada parte tem na outra um complemento ou continuidade. Ademais, para que essas partes exprimam um fenômeno é necessário que haja entre elas uma relação de implicação. Todavia, para compreender como se dá essa relação de implicação, não basta considerar o modo espacial, segundo o qual essas partes se manifestam. É preciso, nesse caso, considerar o modo temporal segundo o qual essas partes se mostram, pois segundo Müller (2001), o tempo é a realização elementar da estrutura implicativa de nossa experiência. Assim, se meus gestos estão imbricados em minha fala e minha fala é tributária das falas já faladas que tenho acesso e minha visão é cúmplice da organização material dos dados no espaço, é porque todos esses dispositivos se polarizam como horizontes temporais uns dos outros, exprimindo uma só significação.

Diante desse entendimento de temporalidade, o Núcleo *Temporalidade na Constituição da Aprendizagem* nos conduz à compreensão de que Momentos Significativos, Percepções do Início da Aprendizagem e Aspectos Contextuais da Prática de MM dizem do tempo-vivido dos estudantes em que as partes não-independentes de suas experiências implicaram em significações fenomênicas. Por exemplo, se na USC.1.1.04 os estudantes retomam e rearticulam ideias sobre as condições de equilíbrio e isso direciona a investigação do tema para uma abordagem geométrica é porque a temporalidade de suas experiências implica em uma significação. Apenas para não ficar num único exemplo, podemos ver que na USD.1.05, a estudante percebe que não é possível descrever precisamente como aprendeu os assuntos envolvidos na prática de MM, mas que percebe que precisou estar muito atenta às orientações do professor e colocar em prática o que aprendeu. Essas partes de sua experiência, ficar atenta e colocar em prática, expressam um sentido que constitui o início de sua aprendizagem geométrica.

Núcleo 2: Modos de Proceder e Abertura à Aprendizagem

A manifestação das Razões que Sustentam a Aprendizagem, como vimos, diz dos *porquês* que explicam o início e a manutenção da ocorrência da aprendizagem geométrica em práticas de MM. Essas Razões, portanto, expressam possibilidades, expressam modos dessa aprendizagem acontecer. Por sua vez, a manifestação da presença e da superação de Obstáculos e Dificuldades expressa a presença de bloqueios que podem ser ou não transpostos ou contornados, mas que impõem sempre a necessidade de avaliar possibilidades de seguir em frente. De modo parecido o invariante Investigação e Aprendizagem manifesta atitudes de investigação na percepção da ocorrência da aprendizagem geométrica em práticas de MM e, com isso, expressa a procura de compreensão. Esses três invariantes convergem, portanto, para razões, situações ou atos que abre possibilidades de aprender geometria em práticas de MM. Esses três invariantes expressam a exposição mútua entre estudante e geometria e, assim, direcionam para o Núcleo *Modos de Proceder e Abertura à Aprendizagem*.

Como já vimos, a unidade USD.3.16 descreve uma compreensão da otimização dos espaços em prédios escolares e essa compreensão do estudante possibilita a ocorrência da aprendizagem sobre otimização da área de retângulos e a aprendizagem do modelo gráfico para analisar a otimização desses espaços escolares. Essa compreensão do estudante abre a possibilidade de a aprendizagem geométrica ocorrer. De modo parecido, a unidade USC.1.3.01 mostra como uma compreensão equivocada acerca das construções geométricas funciona como um obstáculo para a aprendizagem geométrica. A superação desse tipo de obstáculo requer uma compreensão que direciona as possibilidades de interpretar o fenômeno da construção geométrica. Por fim, a unidade USC.1.2.04 mostra que uma investigação direcionada para obtenção das medidas, visando a construção bidimensional do corte vertical da lata inclinada, conduz os estudantes à interpretação de que a forma geométrica da água dentro da lata inclinada é um polígono em que a linha que representa a superfície da água deve ser paralela à linha que representa à base de apoio.

Em todos esses casos manifesta-se uma abertura à aprendizagem geométrica nas práticas de MM. Essa abertura requer das estudantes compreensões prévias acerca do tema investigado, da prática de MM, da geometria, de si mesmos enquanto estudantes, das aulas de matemática. Mas, aqui não falamos de *compreensão* no sentido intelectual. Trata-se de uma compreensão como "estar bem adaptado, testemunhar silenciosamente, sem verbalizar e sem aplicar regras, sentir-se em casa numa atividade, numa situação, em relação a um contexto" (SALANSKIS, 2011, p.27). Compreender, em sentido fenomenológico, quer dizer aqui o mesmo que "navegar de modo pertinente" (Ibidem), não se referindo, portanto, a significados ou ao pensamento.

Essa abertura também requer de os estudantes estar em *disposição* para à aprendizagem geométrica. Em termos mais específicos, estamos em *disposição* "sempre que nos encontramos em uma situação (em um mundo), com uma orientação particular para essa situação, constituída por tais coisas como disposição, inclinação, crenças, experiência passada, e assim por diante" (CERBONE, 2006, p.87). Encontrar-se em disposição significa que não efetuamos escolhas a partir de um ponto de vista neutro, ausente dessa disposição, pois nosso passado condiciona o modo pelo qual confrontamos qualquer situação particular e, portanto, condiciona os modos nos quais as situações se manifestam a nós. Esse passado, porém, não é estático, nem seu sentido é fixado, mas sua interpretação é dinamicamente afetada pelo modo como projetamos para nossas possibilidades.

Reunindo os sentidos que os termos *compreensão* e *disposição* assumem na fenomenologia heideggeriana, podemos interpretar o Núcleo *Modos de Proceder e Abertura à Aprendizagem* dizendo que *compreensão* e *disposição* são constituintes da *abertura* à aprendizagem geométrica porque preparam previamente o caminho, possibilitando a articulação de um *discurso*, de uma *interpretação*. Só há interpretação porque há abertura e só há abertura porque há compreensão e disposição. A expressão Modos de Proceder, que articula esse Núcleo, diz dos atos que direcionam o olhar dos estudantes para perceber a manifestação do tema, da geometria e de si mesmos nas práticas de MM. O direcionamento desse olhar, expresso nas noções de compreensão e disposição, estabelece as condições de possibilidade de interpretação dos porquês, dos obstáculos, das dificuldades e dos modos de investigação que encaminham para a aprendizagem da geometria em práticas de MM.

Núcleo 3: Vivência da Relação Eu/Outro/Nós na Aprendizagem

Percepções do Eu, Participação do Outro e O Professor e o Ensino são invariantes que revelam a aprendizagem geométrica em práticas de MM como se dando num espaço de cossujeitos, “companheiros de situações, que mediante compreensões e respectivas comunicações bem-sucedidas, vão estabelecendo maneiras comuns de expressão e comunicação” (BICUDO, 2001, p.37). De fato, o movimento reflexivo dos estudantes, quando da elaboração dos relatos em que descrevem retrospectivamente sua aprendizagem, manifesta atos em que os estudantes lançam um olhar para si próprios, ao mesmo tempo em que se percebem junto aos outros. De modo semelhante, as percepções da presença e influência do Outro na aprendizagem manifesta também a presença do Nós, da interação se dá entre o Eu e o Outro. na prática de MM. É basicamente a vivência dessa relação que se dá nas manifestações do invariante O Professor e o Ensino. Os sentidos desses três invariantes, portanto, convergem a vivência da subjetividade e intersubjetividade na aprendizagem da geometria em práticas de MM, formando o Núcleo *Vivência da Relação Eu/Outro/Nós na Aprendizagem*.

Vejamos como se dá a vivência dessa relação nas práticas de MM. A unidade USD.2.08 mostra uma estudante percebendo-se meio confusa se perguntando “para que isso?”. Esse perceber-se revela a dimensão dos atos reflexivos do Eu. De fato, “a vivência da reflexão instala o ato de nos dar conta de nós, do que estamos fazendo, e realiza atos de decisão e avaliação” (BICUDO, 2010, p.36). Semelhantemente, as unidades USD.3.07, USD.3.10 e USD.3.09 revelam as dimensões psíquica e espiritual[21] do Eu, ao manifestarem, respectivamente, a percepção de um Eu que aprende facilmente, de um Eu que possui o gosto e a habilidade para o desenho e de um Eu que emite opiniões e se posiciona em relação ao tema investigado. Ao revelar essas dimensões do Eu, essas unidades já se lançam e abrangem a circunvizinhança do que está no mundo-vida, incluindo o Outro, pois manifestam que o Eu e o Outro possuem a mesma estrutura. Manifestam que “o perceber, o refletir, a lembrança, a imaginação e a fantasia são iguais para todos, como atos, como vivências, como estruturas de vivências, ao passo que os conteúdos podem ser os mais diferentes possíveis” (BELLO, 2004, p.50).

Perceber que temos uma estrutura em comum, mas com experiências de conteúdos diversos, nos permite superar o isolamento e o relativismo e se dar conta dos atos da

[21] Para saber mais sobre as dimensões psíquica e espiritual, ver (BELLO, 2004)

intersubjetividade e da objetividade. Como ilustram as unidades USD.2.08 e USD.3.17, a presença e a influência do Outro podem se manifestar como ajuda e como possibilidade de compartilhar o que se aprendeu. É a comunicação entre os cossujeitos que torna possível essas manifestações da presença e influência do Outro. Mas, o que torna possível a comunicação entre os cossujeitos? É o ato que manifesta o Outro como semelhante ao Eu. Esse ato, chamado de entropatia (BELLO, 2004), revela a vida psíquica e espiritual do Outro pela percepção de sua corporeidade. A percepção da corporeidade do Outro conduz ao reconhecimento de que ele está vivendo coisas que eu também posso viver. A comunicação e a linguagem, possibilitadas pela entropatia, também conduz aos atos da objetividade. Como mostra a unidade USC.1.1.03, a interação entre os cossujeitos conduziu a uma compreensão consensual acerca das condições de equilíbrio dos objetos. É a linguagem e a comunicação entre esses cossujeitos que tornaram possível expressar uma compreensão objetiva do tema investigado e constituir a idealidade “centro geométrico”. A objetividade, deste ponto de vista, é constituída, portanto, na dialética subjetividade/intersubjetividade.

Núcleo 4: Vivência da Relação Geometria/Tema na Aprendizagem

O invariante Modos de Expressar Compreensões, como vimos, reúne sentidos que manifestam modos linguísticos de expressar compreensões acerca da geometria e do tema investigado. Por exemplo, a USC.1.1.04 mostra que a compreensão da necessidade de efetuar uma construção sobre o retângulo é percebida e expressa nos gestos e movimentações corporais dos estudantes. A introdução de notações para os vértices do retângulo, por sua vez, inseriu novos modos de expressar essa compreensão que transcendem a comunicação gestual e direta. Semelhantemente, as unidades USC.2.4.03 e USC.2.4.04 mostram que a compreensão do procedimento de simplificação de uma construção geométrica é expressa nos gestos de registrar num diagrama os segmentos congruentes que seriam eliminados. Os modos de expressão, portanto, se manifestam, nas práticas de MM, em atos de compreensão da relação geometria/tema investigado.

Já o invariante Percepções da Geometria na Prática de MM manifesta a presença e o papel do conhecimento geométrico na vivência de sua aprendizagem. As unidades USC.1.2.03, USC.2.5.02 e USC.3.2.04 manifestam a geométrica, respectivamente, como um modo de “ver” o que acontece no mundo, como um modo de garantir a certeza das explicações e como um conhecimento falível, que nem todas as afirmações apoiadas num modelo geométrico podem ser validadas. Com isso, essas unidades revelam que a presença e o papel da geometria em práticas de MM se dão articulados com os modos de expressão e com o tema investigado na prática de MM.

O invariante Percepções Acerca do Tema Investigado, por sua vez, manifesta a presença e influência do tema investigado sobre a aprendizagem geométrica dos estudantes. As unidades USC.1.1.03, USD.2.05, USD.3.09, USC.2.2.02, USC.2.2.03 e USC.3.2.04 manifestam, como já vimos, diferentes modos do tema investigado ser percebido nas práticas de MM. Podem ser percebidos como fundamento empírico para sustentar a argumentação sobre uma propriedade geométrica, como algo que confere relevância subjetiva a essa aprendizagem e como um modo de explicitar as qualidades (boas ou ruins) do modelo matemático. Percebemos então que a manifestação do tema investigado se mostra articulada com os modos de expressão e com o conhecimento geométrico.

Essas interpretações dos invariantes Modos de Expressar Compreensões, Percepções da Geometria na Prática de MM e Percepções Acerca do Tema Investigado procuram explicitar sua convergência para um Núcleo de Ideias em que modos de expressão/geometria/tema investigado são vivenciados como uma unidade de sentido que expressa como se dá a aprendizagem em práticas de MM. Portanto, ao articular as manifestações de modos de expressão/geometria/tema investigado, o Núcleo *Vivência da Relação Geometria/Tema na Aprendizagem* mostra-se como constituinte da aprendizagem geométrica em práticas de MM. Para esclarecer esta afirmação, vamos explorar a relação entre idealidades geométricas e matematização da natureza, segundo a perspectiva husserliana.

Idealidade significa um modo de ser ideal, isto é, idealidade é um modo de qualificar um objeto. Afirmar que os objetos da geometria são idealidades significa, portanto, qualifica-los de ideais. Husserl (2012), no texto *a origem da geometria*, analisa como se dá a constituição das idealidades geométricas, descrevendo os atos intencionais nos quais essa constituição se dá. O ato da intuição sensorial, pelo qual percebemos os objetos do mundo sensível, fundamenta ou dá sustentação, segundo Husserl (2012) ao ato da intuição essencial. É esse ato que viabiliza a constituição das idealidades geométricas. Mas, como isso se dá?

Vejamos um exemplo. Posso me imaginar lixando e polindo a superfície de uma mesa de modo a torná-la cada vez mais lisa. Posso me imaginar fazendo isso até atingir um ponto em que a superfície não pode ser mais polida, isto é, até atingir o limite do polimento. Esse limite, percebido em uma intuição essencial, é a superfície do plano geométrico. Segundo Husserl (2012), a livre variação imaginativa, que descarta das coisas percebidas suas imperfeições, constitui o domínio de objetos ideais. Esse ato, também chamado de abstração intencional, separa e reúne aspectos do mundo empírico, dados na intuição sensorial, e efetua uma síntese intencional. Essa síntese, porém, é insuficiente para outorgar existência objetiva e durabilidade às idealidades. O movimento de constituição das idealidades geométricas requer a construção de um sistema linguístico que as expressa. Idealidades geométricas são, portanto, constituídas em modos de expressão específicos que outorgam a elas objetividade. Mas, como essas idealidades geométricas são aplicadas à natureza?

Para abordar essa questão, vamos analisar o conceito de matematização da natureza, segundo a fenomenologia husserliana. Husserl (2012) entende há dois níveis de matematização da natureza. O primeiro é o que decorre da arte da medição, cuja idealização dá origem à geometria. Segundo Husserl (2012), "a *arte da medição empírica*, com a sua função objetivadora empírico-prática, foi idealizada e converteu-se, então, no procedimento do pensar puramente geométrico, uma vez transformado o interesse prático em puramente teórico". Assim constituída, a geometria torna-se a ciência das *figuras espaço-temporais* e, por isso, viabiliza a investigação das dimensões espaço-temporais dos objetos físicos. Nesse primeiro nível, a matematização se dá de maneira direta e como um modo de expressar uma compreensão acerca das qualidades espaço-temporais dos objetos, ou seja, tamanho, posição, movimento.

Porém, falta matematizar as outras qualidades perceptíveis dos objetos como, por exemplo, cor, som, odor, textura, intensidade. Essas outras qualidades sensíveis, Husserl (2012) chama de *plena*[22]. A matematização dos *plena* constitui o segundo nível da matematização e requer, segundo Husserl (2012), assumir uma *hipótese de causalidade universal*, a saber, pressupor relações causais entre as qualidades objetivas ligadas a pura ocorrência no mundo das figuras e as qualidades sensíveis do *plena*. Por exemplo, a medida da temperatura dos corpos, realizada com um termômetro com uma de mercúrio, pressupõe uma relação causal entre a intensidade da temperatura e a dilatação do mercúrio. Essa dilatação é uma qualidade objetiva, é uma dimensão espaço-temporal da coluna de mercúrio. Já a temperatura é uma qualidade sensível, sem dimensão espaço-temporal. Vincular a temperatura à dilatação do mercúrio é um modo de geometrizá-la, de matematizá-la de forma indireta. Segundo Husserl (2012):

> A matematização indireta do mundo que se perfila, então, como objetivação metódica do mundo intuível fornece fórmulas numéricas gerais [...] As fórmulas exprimem manifestamente conexões causais gerais, "leis da

[22] *Plena*, plural de *plenum*, em latim significa "completo" ou plenitude. Segundo Husserl (2012, p. 22), o *plenum* sensível é "aquilo que se apresenta nas chamadas qualidades 'específicas' dos sentidos, cor som, odor e similares, em gradações próprias".

> natureza", leis de dependências reais sob forma de dependências "funcionais" de valores numéricos.

Esse segundo nível de matematização converte, portanto, as qualidades sensíveis dos *plena* em idealidades geométricas. Por exemplo, expressar a qualidade *sonora* dos objetos como uma senoidal é um modo de converter essa qualidade em uma idealidade geométrica. A senoidal, nesse caso, é um modo linguístico de expressar uma compreensão acerca da sonoridade. Neste sentido, para que a matematização alcance uma compreensão objetiva dos plena é necessário que as qualidades sensíveis da natureza encontrem na geometria um modo linguístico de expressão. É na geometria e em toda a matemática que as idealidades constituídas a partir dos *plena* encontram modos de expressão que lhes outorgam existência objetiva e durabilidade.

Esse entendimento de Husserl (2012) acerca da constituição das idealidades geométricas e da matematização da natureza ilumina os sentidos manifestados para o Núcleo *Vivências da Relação Geometria/Tema na Aprendizagem*. Ao explicitar as imbricações entre constituição de idealidades geométrica, matematização dos plena e modos linguísticos de expressão, Husserl (2012) nos conduz ao entendimento de que modos de expressão/geometria/tema investigado é uma estrutura constituinte da aprendizagem geométrica em práticas de MM.

6 APONTAMENTOS PARA UMA METACOMPREENSÃO

Este capítulo busca efetuar uma metacompreensão da pesquisa apresentada. Em outras palavras, busca efetuar um movimento de pensar o pensado, busca efetuar um movimento reflexivo que se volta sobre as análises efetuadas, buscando entender o sentido do que foi investigado. E o que foi investigado? Como já dissemos, a interrogação deste trabalho questiona como os estudantes aprendem geometria em práticas de MM e a pesquisa, gerada por esta interrogação, busca alcançar uma compreensão fenomenológica dessa aprendizagem. O primeiro ponto desse movimento de metacompreensão diz da legitimidade dessa pesquisa. Mais diretamente, com que legitimidade alguém que não é fenomenólogo[23], nem é membro de um grupo que estuda assiduamente fenomenologia, pode falar em compreensão fenomenológica da aprendizagem?

Diante desta questão, devo começar dizendo que este trabalho expressa uma compreensão pessoal do que significa investigar a aprendizagem em práticas de MM, segundo a visão da fenomenologia. Ao dizer que essa compreensão é *minha*, quero explicar que, devido às condições peculiares em que se deu essa pesquisa, muitas das escolhas que se impuseram ao longo do caminho tive que fazê-las a partir das minhas próprias interpretações que fiz da fenomenologia. Essas escolhas, porém, foram direcionadas pelo fenômeno percebido e pela interrogação que gerou essa pesquisa. Além disso, essas escolhas não foram tomadas a partir de critérios individuais, mas com base nas coisas que li, ouvi e vivenciei. Por isso, as minhas escolhas expressam uma compreensão de uma comunidade, na medida em que expressa *minha* percepção do que os outros compreenderam sobre a pesquisa fenomenológica. É essa relação dialética entre subjetividade/intersubjetividade que conduz à objetividade da pesquisa. Entendo, portanto, que a legitimidade do conhecimento na pesquisa fenomenológica se deve, por um lado, à relação intencional pesquisador/fenômeno investigado e, por outro lado, pelo caráter dialético do movimento subjetividade/intersubjetividade/objetividade.

O segundo ponto dessa metacompreensão diz da interrogação. Até compreender que minha busca era investigar como os estudantes aprendem geometria em práticas de MM, tive outras compreensões da interrogação. Incialmente formulei a questão de pesquisa em termos de conceitos teóricos. Mais especificamente, uma das primeiras versões da questão pesquisa é: Qual é o significado da aprendizagem da geometria nas práticas de

[23] Chamo de fenomenólogo o praticante da fenomenologia, alguém que se dedica de maneira sistemática a efetuar análises com base na fenomenologia.

modelagem matemática nos aspectos cognitivos e epistemológicos do trabalho geométrico do aluno? Agora compreendo que esta pergunta busca pelo sentido que os conceitos de plano cognitivo e plano epistemológico de Kuzniak (2014) assumem em práticas de MM. Embora essa pergunta seja legítima e ainda faça sentido para mim, ela não tem características fenomenológicas, pois lança sobre o fenômeno uma estrutura teórica que dificulta a percepção de sua manifestação. Uma outra versão da questão de pesquisa é: O que é isto, a aprendizagem geométrica em práticas de MM? Essa versão aponta para as características estruturais do fenômeno, visando explicitá-las. Embora essa questão tenha sentido fenomenológica, ela não privilegia o tempo-vivido nas vivências dos sujeitos. Ou seja, o modo como os estudantes vivenciam as experiências de aprendizagem não é privilegiado nessa versão, o que é privilegiado são os aspectos estruturantes do fenômeno. Por isso, nos encaminhamos para a formulação da questão de pesquisa enfatizando o como os estudantes aprendem geometria em práticas de MM.

A formulação dessa versão definitiva da questão de pesquisa, porém, nos conduziu a outros questionamentos. Esse é o terceiro ponto que devo retomar. Por exemplo, se interrogo pelo *como* essa aprendizagem se dá, então já estou assumindo que essa aprendizagem ocorre efetivamente em práticas de MM? Se interrogo pelo como, é porque estou pressupondo uma concepção universal de aprendizagem, ou seja, estou assumindo que o sentido de aprender já está posto? Essas questões se mostraram mais agudas no momento da leitura e explicitação das Unidades de Significado. Afinal, como identificar a ocorrência da aprendizagem geométrica nas Cenas Significativas ou nos relatos dos estudantes? Essa identificação não pressupõe que eu assumi uma definição particular de aprendizagem?

Esses questionamentos me conduziram à compreensão de que a aprendizagem, do ponto de vista da fenomenologia, é sempre a aprendizagem percebida. Embora, se possa falar de uma aprendizagem efetiva ou existente, o que está sendo considerado como dado de pesquisa é aquilo que é percebido como aprendizagem. Assim, a aprendizagem nos relatos é o que os estudantes percebem como sendo aprendizagem e a aprendizagem nas Cenas é o que eu, professor-pesquisador, percebo como sendo aprendizagem. E o que é percebido como sendo aprendizagem? No tópico 2.1, procuro esboçar, num pequeno exercício hermenêutico, o modo como a aprendizagem é percebida nas Cenas, ou seja, como manifestação de transformações que se dá na maneira do estudante se relacionar com o tema ou com a geometria em práticas de MM.

Outro ponto que devo aqui retomar diz do modo como a pesquisa respondeu à questão que a gerou. Inicialmente, a leitura dos trabalhos de Merleau-Ponty direcionou a pesquisa para uma compreensão não dualista da aprendizagem, isto é, uma compreensão que privilegia o papel das experiências perceptivas e das gesticulações linguísticas do corpo-próprio na aprendizagem da geometria em práticas de MM. O capítulo 2 ainda carrega fortemente essa compreensão. Mas, o esforço efetuado para explicitar as Unidades de Significados, deixando que o fenômeno se mostre nessas Unidades por si mesmo, sem impor uma interpretação prévia, conduziu à construção dos 12 invariantes e aos 4 Núcleos de Ideias.

E como esses 4 Núcleos de Ideias respondem à questão que gerou essa pesquisa? O primeiro Núcleo revela a *temporalidade* como constituindo da aprendizagem geométrica em práticas de MM. O segundo Núcleo explicita o fenômeno da *abertura*, que se manifesta em práticas de MM, como condição de possibilidade os estudantes fazer interpretações e, com isso, aprender geometria. Já o terceiro Núcleo, ao evidenciar a relação Eu/Outro/Nós nas práticas de MM, aponta para a importância dos atos da *subjetividade*, *intersubjetividade* e *objetividade* na aprendizagem na geometria. Por fim, o quarto Núcleo mostra como a relação *modos de expressão/geometria/tema investigado* é constituinte da aprendizagem da geometria em práticas de MM.

A exposição dessa compreensão, acerca do modo como esta pesquisa reponde à questão que a gerou, nos conduz ao último ponto para uma metacompreensão deste trabalho. Que sentido essa compreensão assume na região de inquérito da Modelagem na Educação Matemática? Para abordar esse ponto é preciso considerar a natureza de uma compreensão fenomenológica e sua relação com a elaboração de teorias. Uma compreensão fenomenológica descreve uma estrutura de sentido, ou seja, explicita uma essência que condiciona a possibilidade de conhecimento. Isto é, ao expor os aspectos estruturais de nossa experiência dos fenômenos, a compreensão fenomenológica estabelece as condições de possibilidade de conhecê-los e de avaliar o alcance e os limites desse conhecimento. Como diz Merleau Ponty (2014. p. 3):

> Todo o universo da ciência é construído sobre o mundo vivido, e se queremos pensar a própria ciência com rigor, apreciar exatamente seu sentido e seu alcance, precisamos primeiramente despertar essa experiência do mundo da qual ela é a expressão segunda. A ciência não tem e não terá jamais o mesmo sentido de ser que o mundo percebido, pela simples razão de que ela é uma determinação ou uma explicação dele.

Retornando ao nosso último ponto e parafraseando essa citação de Merleau-Ponty, entendo que esta investigação, ao procurar despertar a experiência da aprendizagem geométrica em práticas de MM, pode contribuir para pensar as teorizações sobre esse tema de maneira rigorosa e "apreciar exatamente seu sentido e seu alcance" (Ibidem). De fato, há a necessidade de teorizações para a aprendizagem na Modelagem na Educação Matemática. Em particular, como vimos no capítulo 2, esse tema sem considerar uma compreensão fenomenológica que pode auxiliar na elaboração de uma teoria da aprendizagem em práticas de MM. Neste sentido, a presente pesquisa concentra sua atenção no fenômeno da aprendizagem, mas do ponto de vista dos fundamentos, isto é, não aceitando um modelo único e esquemático da aprendizagem, mas buscando uma teoria que D'Amore (2007) chama de uma *epistemologia da aprendizagem*. Este é, naturalmente, o próximo passo desta investigação.

REFERÊNCIAS

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. 2006.

ALSINA Claudi. (2005). **Los secretos geométricos en diseño y arquitectura** (pp. 339-352). En M. I. Marrero y J. Rocha (coord.). Horizontes matemáticos. La Laguna. Servicio de Publicaciones de la Universidad de la Laguna, 2005.

ASSIS, André Koch Torres. **Arquimedes, o centro de gravidade ea lei da alavanca**. Montreal: Apeiron, 2008.

BARBOSA, J. C. (2003) What is mathematical modelling? In S. J. Lamon, W. A. Parker, & S. K. Houston (Eds.), **Mathematical modelling: a way of life. ICTMA11** (pp. 227-234). Chichester: Horwood Publishin.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective**. ZDM, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.

BELLO, Ângela Ales. **Fenomenologia e ciências humanas: psicologia, história e religião**. EDUSC, 2004.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. **Revemat: revista eletrônica de educação matemática**, v. 9, p. 7-20, 2014.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. **Pesquisa qualitativa em educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica**, p. 99-112, 2004.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. SciELO-Ed. UNESP, 2010.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. **Revemat: revista eletrônica de educação matemática**, v. 9, p. 7-20, 2014.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; KLÜBER, Tiago Emanuel. A questão de pesquisa sob a perspectiva da atitude fenomenológica de investigação//The research issue according to the perspective of phenomenological investigation attitude. **CONJECTURA: filosofia e educação**, v. 18, n. 3, p. 24-40, 2013.

BICUDO, M.A.V (org). A pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica. São Paulo: Cortez Editora, 2011.

BLOMHØJ, M., & HØJGAARD Jensen, T. (2007). What's all the fuss about competencies. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), **Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI** study (pp. 45–56). New York: Springer.

BLUM, Werner; FERRI, Rita Borromeo. Mathematical modelling: Can it be taught and learn? **Journal of mathematical modelling and application**, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.

BORSSOI, A. H. (2004). **A aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino**. Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina.

BRAGA, Roberta Modesto. **Aprendizagem em modelagem matemática pelas interações dos elementos de um sistema de atividade na perspectiva da teoria da atividade de Engestrom**. 2015. 133 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2015. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas.

BRITO, D. S. **Problemas de otimização geométrica aplicados ao estudo de praças: Uma experiência de ensino com atividades de Modelagem Matemática**. 2013.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. de. Modelagem Matemática na Socioeducação. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 8, n. 3, p. 196-212, 2014.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem com geometria, google earth e os caminhos mínimos de uma praça pública. **Ciência e Natura**, v. 37, n. 3, 2015.

CERBONE, David R. **Fenomenologia**. Trad. Caesar Souza. Petrópolis: Vozes, 2013. 292p.

CLEMENTS, Douglas H.; BATTISTA, Michael T. **Geometry and spatial reasoning**. 1992.

CUNHA, Antônio Geraldo da. **Dicionário etimológico da língua portuguesa**. 3 ed. Rio de Janeiro: Lexikon, 2007.

CRUZ, W. F. N. e ARAÚJO, J. L. **Concepções de aprendizagem presentes nos trabalhos apresentados na IX CNMEM**. In: X CNMEM – Congresso Nacional de Modelagem em Educação Matemática, 2017, Maringá. Anais do X CNMEM, 2017.

D'AMBRÓSIO, U. (1999) **Literacy, matheracy and technocracy: a trivium for today. Mathematical thinking and learning**, 1 (2), 131-153.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. Editora Livraria da Física, 2007.

DE VILLIERS, Michael. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 12, n. 3, 2010.

DETONI, A. R.; PAULO R. M. A organização dos dados da pesquisa em cenas. In: BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia: confrontos e avanços**. São Paulo: Cortez, 2011.

DOLLE, Jean-Marie. Para compreender Jean Piaget: uma iniciação à psicologia genética piagetiana. In: **Para compreender Jean Piaget: uma iniciação à psicologia genética Piagetiana**. Editora agir, 2000.

DRECHSEL, Denise. Reforma do ensino médio: entenda o que muda. Gazeta do Povo, Curitiba. 29/09/2016, 11h58. http://www.gazetadopovo.com.br/educacao/reforma-do-ensino-medio-entenda-o-que-muda-d5rx09um4puohbzqihu7r0p5g. Acessado em 12/08/2017.

DUVAL, Raymond. Geometry from a cognitive point of view. **NEW ICMI STUDIES SERIES**, v. 5, p. 37-51, 1995.

DUVAL, Raymond; MORETTI, TradMéricles Thadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 38, n. 2, 2006. p. 86-95.

FERRI, Rita Borromeo. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

GALBRAITH, Peter. (2015). Modelling, education, and the epistemic fallacy. In G.A. Stillman, W. Blum & M.S. Biembengut (Eds.), **Mathematical modelling in education research and practice – cultural, social and cognitive influences,** 339–348, Heidelberg: Springer.

GALBRAITH, Peter. Models of modelling: genres, purposes or perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.

GALBRAITH, Peter. Models of modelling: Is there a first among equals. In: **Mathematics: Traditions and [new] practices** (Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia and the Australian Association of Mathematics Teachers). 2011. p. 279-287.

GALBRAITH, Peter; STILLMAN, Gloria. A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 143-162, 2006.

GIORGI, Amedeo. Sobre o método fenomenológico utilizado como modo de pesquisa qualitativa nas ciências humanas: teoria, prática e avaliação. **POUPART, Jean. et al. A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos. Trad. Ana Cristina Nasser**, v. 2, p. 386-409, 4° Edição, 2014.

GRIGORAŞ, Roxana; GARCIA, Fco Javier; HALVERSCHEID, Stefan. Examining mathematising activities in modelling tasks with a hidden mathematical character. In: **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. Springer Netherlands, 2011. p. 85-95.

HALVERSCHEID, Stefan. Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments. **ZDM**, v. 40, n. 2, p. 225-234, 2008.

HOUDEMENT, Catherine; KUZNIAK, Alain. Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In: **Proceedings of CERME**. 2003. p. 1-10.

HUSSERL, E. **A crise das ciências europeias e a fenomenologia transcendental** (DF Ferrer, Trad.). Rio de Janeiro, RJ: Forense Universitária, 2012.

ILLERIS, K. **Teorias contemporâneas da aprendizagem**. Porto Alegre: Penso, 2013.

JARVIS, Peter. Aprendendo a ser uma pessoa na sociedade: aprendendo a ser eu. In: KNUD, Illeris. **Teorias Contemporâneas da Aprendizagem** (Org.). Tradução de Ronaldo Cataldo Costa. Porto Alegre: Penso, 2013.

JONES, Keith. Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**, v. 18, n. 1-2, p. 29-34, 1998.

KAISER, G. e BRAND, S. (2015). Modelling competencies: past development and further perspectives. In G.A. Stillman, W. Blum & M.S. Biembengut (Eds.), **Mathematical modelling in education research and practice – cultural, social and cognitive influences**, 129–149, Heidelberg: Springer

KAISER, Gabriele; BLOMHØJ, Morten; SRIRAMAN, Bharath. Towards a didactical theory for mathematical modelling. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 82-85, 2006.

KAISER, Gabriele; SRIRAMAN, Bharath. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KLÜBER, Tiago Emanuel. **Uma metacompreensão da modelagem matemática na educação matemática**. 2012. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

KLUTH, V. S. **Estruturas da Álgebra: investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento**. 2005. 193f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

KUHN, Thomas S. **A estrutura das revoluções científicas**. Tradução de Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. 2011.

KUZNIAK, Alain et al. WG 7 Report from Geometrical Thinking To Geometrical Work. **WORKING GROUP 7. Geometrical Thinking 954**, p. 955, 2007.

KUZNIAK, Alain. Understanding geometric work through its development and its transformations. In: **Transformation-A Fundamental Idea of Mathematics Education**. Springer New York, 2014. p. 311-325.

MAAß, Katja. What are modelling competencies? **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 113-142, 2006.

MACHADO, Nilson José. Epistemologia e Didática: as concepções de conhecimentos e inteligência e a prática docente. In: **Epistemologia e Didatica: as concepções de conhecimentos e inteligência e a pratica docente**. Cortez, 2002.

MACHADO, Nílson José. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. **Revista da Faculdade de Educação**, v. 15, n. 2, p. 161-166, 1990.

MACHADO, Ozeneide Venâncio de Mello. Pesquisa Qualitativa: Modalidade Fenômeno Situado. In: BICUDO, M. A. V. & ESPOSITO, V. H. C. **Pesquisa Qualitativa em Educação**. São Paulo: UNIMEP, 1994.

MARTELLO, Alexandro. Governo aumenta previsão de rombo do INSS para R$ 10 trilhões em 2060. G1, Brasília. 18/04/2017 06h00. Atualizado 18/04/2017 06h00. https://g1.globo.com/economia/noticia/governo-aumenta-previsao-de-rombo-do-inss-para-r-10-trilhoes-em-2060.ghtml. Acessado em 25/12/2017.

MARTINS, Joel; BOEMER, Magali Roseira; FERRAZ, Clarice Aparecida. A fenomenologia como alternativa metodológica para pesquisa: algumas considerações. **Revista Escola de Enfermagem da USP**, v. 24, n. 1, p. 139-47, 1990.

MASON, John. Modelling modeling: Where is the centre of gravity of-for-when teaching modelling. **Modelling and mathematics education. ICTMA**, v. 9, p. 39-61, 2001.

MERLEAU-PONTY, M. (2014). **Fenomenologia da percepção** (C. Moura, Trad.). São Paulo: Martins Fontes. (Texto original publicado em 1945)

MERLEAU-PONTY, Maurice. **A prosa do mundo**. Editora Cosac Naify, 2014.

MERLEAU-PONTY, Maurice. **O primado da percepção e suas consequências filosóficas**. Autêntica, 2015.

MOHANTY, J. N. (1989). **Transcendental phenomenology: An analytic account**. Oxford, UK: Blackwell

MOURA, Carlos Roberto. **Crítica da Razão na Fenomenologia**. São Paulo: Nova Stella-EDUSP, l989.

MÜLLER, Marcos José. **Merleau-Ponty: acerca da expressão**. Edipucrs, 2001.

NISS, M.; BLUM, W.; GALBRAITH, P. L. Introduction. In.: BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H-W.; NISS, M. (Orgs.). **Modelling and Applications in Mathematics Education**. The 14 ICMI Study. New York: Springer, 2007. p. 3-32.

OLIVEIRA, Lívia. A construção do espaço, segundo Jean Piaget. **Revista Sociedade & Natureza**, v. 17, n. 33, 2006.

PALHARINI, Bárbara Nilvada; TORTOLA, Emerson; DE ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Mathematical Modelling and Proof by Recurrence: An Analysis from a Wittgensteinian Perspective. In: **Mathematical Modelling and Applications**. Springer, Cham, 2017. p. 129-139.

PALM, Torulf. Features and impact of the authenticity of applied mathematical school tasks. **Modelling and applications in mathematics education**, p. 201-208, 2007.

PERRENET, Jacob; ZWANEVELD, Bert. The many faces of the mathematical modeling cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 6, p. 3-21, 2012.

SILVA, Karina Alessandra Pessoa; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Caminhos do Significado em Atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os interpretantes. **Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 52, 2015.

PFANNKUCH, Maxine; ZIEDINS, Ilze. A modelling perspective on probability. In: **Probabilistic Thinking**. Springer Netherlands, 2014. p. 101-116.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel. **A representação do espaço na criança**. Tradução de Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PRENTICE, William E. **Fisioterapia na prática esportiva**. Uma abordagem baseada em competências. Porto Alegre: AMGH, 2012. 880p

ROGERSON, Peter A. **Métodos estatísticos para a geografia**: um guia para o estudante. 7ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2012. 348 p.

SALANSKIS, Jean-Michel. **Heidegger**. Tradução de Evando Nascimento. São Paulo: Estação Liberdade, 2011.

SALANSKIS, Jean-Michel. **Husserl**. Tradução Carlos Alberto Ribeiro de Moura. São Paulo: Estação Liberdade, 2006.

SOKOLOWSKI, Robert. **Introdução à fenomenologia**. Edições Loyola, 2004.

SOUZA, Elizabeth Gomes; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Contribuições teóricas sobre aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**: Revista de Educação Matemática, v. 22, n. 41, p. 31-58, 2014.

SRIRAMAN, Bharath; ENGLISH, Lyn D. Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. **ZDM**, v. 37, n. 6, p. 450-456, 2005.

SRIRAMAN, Bharath; ENGLISH, Lyn. Surveying theories and philosophies of mathematics education. In: **Theories of mathematics education**. Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 7-32.

SRIRAMAN, Bharath; LESH, Richard A. Modeling conceptions revisited. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 247-254, 2006.

SWAN, M., TURNER, R., YOON, C., & Muller, E. (2007). The roles of modelling in learning mathematics. In **W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, & M. Niss, (Eds.), Modelling and applications in mathematics education**: The 14th ICMI Study (pp. 275-284). NY: Springer.

THOMPSON, M, and YOON, C, 2007, Why build a mathematical model? Taxonomy of situations that create the need for a model to be developed, in **R. A. Lesh, E. Hamilton, J. J. Kaput (eds.), Foundations for the Future in Mathematics Education**, Laurence Earl Baum Associates, London, pp. 193—200.

URIBE L. C. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. **Revista Colombiana de Educación**, N. º 60. Primer semestre 2011 Bogotá, Colombia. pp 41-60

USISKIN, Zalman. **Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry**. CDASSG Project. 1982.

VOS, Pauline. Authenticity in extra-curricular mathematics activities: Researching authenticity as a social construct. In: **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. Springer International Publishing, 2015. p. 105-113.