Universidade Estadual de Londrina

KEILA TATIANA BONI

INVARIANTES OPERATÓRIOS E NÍVEIS DE GENERALIDADE MANIFESTADOS POR ESTUDANTES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL EM TAREFAS NÃO-ROTINEIRAS

Londrina
2014

KEILA TATIANA BONI

INVARIANTES OPERATÓRIOS E NÍVEIS DE GENERALIDADE MANIFESTADOS POR ESTUDANTES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL EM TAREFAS NÃO-ROTINEIRAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2014

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

B715i Boni, Keila Tatiana.
Invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental em tarefas não-rotineiras / Keila Tatiana Boni. – Londrina, 2014.
143 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2014.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Cálculo das operações – Teses. 3. Educação matemática – Teses. 4. Capacidade matemática nas crianças – Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

KEILA TATIANA BONI

INVARIANTES OPERATÓRIOS E NÍVEIS DE GENERALIDADE MANIFESTADOS POR ESTUDANTES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL EM TAREFAS NÃO-ROTINEIRAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

____
Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina

____
Profª. Drª. Eleni Bisognin
Centro Universitário Franciscano

____
Profª. Drª. Simone Luccas
Universidade Estadual do Norte do Paraná

Londrina, 1 de dezembro de 2014.

Aos meus pais, Nelson e Aparecida (in memorian):
vocês sempre serão minha fonte de inspiração
e meus exemplos de vida.

Ao meu esposo Eliel,
com quem compartilho minhas conquistas,
meus sonhos, meus fracassos e, sobretudo, o meu amor.

AGRADECIMENTOS

Quando escolhemos seguir um caminho tendo em vista a realização de um sonho, já sabemos, desde o início, que muitos momentos da caminhada não serão fáceis. Diante de momentos difíceis, além de muita fé, perseverança e dedicação para enfrentarmos as dificuldades e alcançarmos nossos objetivos, o incentivo das pessoas que torcem pelo nosso sucesso são primordiais para continuarmos à luta.

E, quando nossos sonhos são alcançados, é impossível nos esquecermos de agradecer a todos estes que fizeram parte de toda a trajetória.

É nessa perspectiva que inicio agradecendo a Deus, simplesmente, por **tudo**! Em especial, nesse momento, agradeço por sempre me abençoar e capacitar para conquistar tudo aquilo a que Ele me destina.

À minha família, começando pelos meus pais, Nelson e Aparecida *(in memorian*), com quem aprendi, dentre tantas lições, que o sucesso provém de nossa vontade e dedicação. Obrigada por todos os esforços para permitir que eu chegasse aonde cheguei. Agradeço, ainda, aos meus irmãos Bruno e Lucyellen, por acreditarem em mim e me apoiarem o tempo todo.

Ao Eliel, meu esposo e melhor amigo, que foi a pessoa que acompanhou de perto toda essa trajetória, me apoiando e acreditando (e me fazendo acreditar!) no meu potencial para concluir com sucesso essa jornada. Obrigada pela paciência e por compreender meus necessários distanciamentos durante essa importante empreitada.

A todos os amigos e familiares que me apoiaram e torceram por mim desde o início desta caminhada de pesquisa, compartilhando comigo vários momentos de alegrias e de ansiedades durante toda essa caminhada.

Aos amigos, colegas e professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL, por esses dois anos de aprendizado que foram essenciais durante a trajetória de pesquisa.

Aos integrantes do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPMAT), pelas valiosas contribuições no desenvolvimento desta pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio financeiro, por meio do Programa Observatório da Educação.

À direção e à equipe de professores da Escola em que esta pesquisa foi realizada, que se colocaram à disposição para o que fosse preciso. Um agradecimento especial para a Profª Magna, que coordenou os encontros do Projeto "*Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática*", por todos os momentos de aprendizagem que me proporcionou.

Aos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de 2013, que participaram da pesquisa e que desenvolveram o que lhes foi proposto com muita dedicação e empenho.

À Renata e ao Diego pela valiosa colaboração para esta pesquisa, mas, principalmente, pela amizade e pelas altas emoções, conversas e risos compartilhados durante nossas viagens para Apucarana.

Às professoras componentes da banca, Profª Eleni Bisognin e Profª Simone Luccas, por aceitarem ser banca deste trabalho e cujas contribuições foram essenciais.

E, é claro, um agradecimento mais que especial à minha orientadora, Profª Angela Marta, pela confiança depositada em mim desde o início, pelos valiosos ensinamentos, não só teóricos, mas, sobretudo, humanos: com você aprendi o quanto relações de amizade entre professor e aluno são essenciais no processo de aprendizagem. Obrigada pela paciência, conselhos, enfim, obrigada por me acompanhar com tanta dedicação durante toda essa caminhada.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

“O futuro com que sonhamos não é inexorável. Temos de fazê-lo, de produzi-lo, ou não virá da forma como mais ou menos queríamos. É bem verdade que temos de fazê-lo não arbitrariamente, mas com os materiais, com o concreto que dispomos e mais com o projeto, com o sonho por que lutamos”.

Paulo Freire

BONI, Keila Tatiana. **Invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental em tarefas não-rotineiras**. 2014. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo investigar, em tarefas matemáticas não-rotineiras, invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por seis estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola Municipal de Apucarana – PR em procedimentos de cálculo. Para tanto, utilizamos estudos relacionados a procedimentos de cálculo, pensamento aritmético e pensamento algébrico, e elementos das teorias dos Campos Conceituais e de Níveis de Generalidade para a análise das informações. Tais informações, as quais foram coletadas por meio de gravações em áudio, registros escritos e diários de campo, foram submetidas a procedimentos analíticos à luz da Análise Textual Discursiva. Concluímos que os estudantes participantes da pesquisa se encontravam em um nível de transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica factual. Tal conclusão foi pautada a partir das manifestações dos estudantes, sobretudo em linguagem natural expressa oralmente, em que fica evidente a percepção de características invariantes relacionadas aos procedimentos de cálculo que, devido à maneira e frequência com que foram utilizadas, as instituímos como invariantes operatórios do tipo teoremas-em-ação.

Palavras-chave: Educação matemática. Procedimentos de cálculo. Invariantes operatórios. Níveis de generalidade.

BONI, Keila Tatiana. **Operatory invariants and levels of generality manifested by students in the early years of elementary school in non-routine tasks.** 2014. 143 p. Dissertation (Masters in Teaching Science and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2014.

ABSTRACT

This research aims to investigate in non-routine mathematical tasks, operatory invariants and levels of generality expressed by six students of the 5th year of elementary school in a Municipal School in Apucarana - PR in calculation procedures. Therefore, we use the related calculation procedures, arithmetic thinking and algebraic thinking, theories and elements of the Conceptual Fields and Levels of Generality for information analysis studies. These data, which were collected through audio recordings, written registers and daily field, were subjected to analytical procedures in the light of Textual Analysis Discursive. We conclude that students participating in the research were at a level of transition between arithmetic generality and algebraic generality factual. This conclusion was based from the manifestations of students, mainly expressed in natural language orally, in which the perception of invariant characteristics related to the calculation procedures is evident that due to the manner and frequency with which they were used, as instituted operatory invariants of type theorems-in-action.

Keywords: Mathematics education. Calculation procedures. Operatory invariants. Levels of generality.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

DELINEAMENTO DA PESQUISA

Durante experiência como docente, em especial, com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano), dois fatores relacionados ao ensino e a aprendizagem de Matemática causavam inquietações. Primeiro, que muitos estudantes que ingressavam no 6º ano apresentavam dificuldades em compreender os resultados que obtinham por meio de algoritmos (adição, subtração, multiplicação e divisão) e em interpretar e selecionar as informações relevantes de um problema a fim de solucioná-lo. Essa situação era preocupante, sobretudo, porque se percebia que essa dificuldade, muitas vezes, ocorria apenas na sala de aula, mas diante de situações cotidianas, como nas que envolvem compras e trocos, muitos desses mesmos estudantes apresentavam estratégias próprias de cálculo para encontrar resultados exatos ou aproximados para essas situações.

Assim sendo, a conjectura era de que os estudantes não conseguiam relacionar a Matemática escolar com a Matemática que utilizavam em situações cotidianas, e que um modo de reverter essa situação poderia ser investigar que estratégias de cálculo são utilizadas por eles em situações análogas às do cotidiano para, então, comunicar e estudar essas estratégias em sala de aula, bem como auxiliá-los a desenvolver outras diante de problemas matemáticos propostos em aula, contribuindo para que esses estudantes pensassem de uma forma flexível, crítica e criativa.

O segundo fator se refere à introdução da álgebra simbólica que ocorre, em geral, no 7º ano. Nesse momento percebia que ocorria uma ruptura entre aritmética e álgebra o que ocasiona, muitas vezes, um dos momentos mais assustadores aos estudantes com relação à Matemática, pois, até então, estes não estavam habituados com uma linguagem simbólica alfanumérica. Diante dessa situação, a suposição era que a álgebra era introduzida muito cedo, não sendo os estudantes desse ano escolar capazes de compreender conceitos tão abstratos.

Todavia, ao iniciarmos os estudos sobre o assunto, encontramos vários autores (BLANTON; KAPUT, 2005; KIERAN, 2004; PIMENTEL; VALE, 2009; entre outros) que defendem que o pensamento algébrico precisa ser fomentado mais cedo, já nos anos iniciais, integrado com o ensino da aritmética.

Além da experiência como docente, nos primeiros encontros realizados em uma escola municipal de Apucarana, a qual faz parte de um projeto do Programa Observatório da Educação[1] ao qual esta pesquisa está vinculada, percebemos que essas preocupações não eram exclusivas dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental. Professores dos anos iniciais, participantes do projeto desenvolvido na referida escola, explanaram sobre suas dificuldades com relação ao processo de ensino e de aprendizagem de Matemática envolvendo o cálculo mental e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nessa perspectiva, pensamos em investigar as estratégias de cálculo mental que estudantes dos anos iniciais manifestam diante de situações-problemas. Porém, logo percebemos a dificuldade que encontraríamos em resgatar o cálculo mental realizado pelos estudantes que, de acordo com alguns autores (GÓMEZ, 1995; CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995; entre outros), é o cálculo realizado “de cabeça”.

Buscando contornar esse problema, nos apoiamos em Parra (1996) uma vez que ela defende que, apesar do cálculo ser essencialmente mental, não exclui a utilização de ferramentas externas, tal como a escrita, para a realização de cálculos intermediários durante o processo mental. Assim, buscando unir as duas preocupações já mencionadas, o cálculo mental e o pensamento algébrico, pensamos em investigar e analisar características do pensamento algébrico em procedimentos operatórios de cálculo mental (PARRA, 1996) que estudantes do Ensino Fundamental apresentam na resolução de problemas.

Nas palavras da autora

> Os procedimentos de cálculo mental se apóiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre o número (PARRA, 1996, p. 189).

Assim sendo, ao compararmos nossas ideias com o que expõe Parra (1996) sobre o cálculo mental, e nos apoiando em estudos sobre o pensamento aritmético e algébrico, percebemos a estreita relação entre eles. De acordo com Pimentel e Vale (2009), as ideias aritméticas possuem um caráter potencialmente algébrico, uma vez

[1] Explicaremos no capítulo 3, seção 3.1.

que os números concretos podem ser tratados como instâncias de ideias mais gerais.

Comparando a definição de Parra (1996) para os procedimentos de cálculo mental com os estudos de Pimentel e Vale (2009) com relação ao caráter algébrico da aritmética, bem como ao considerarmos outros estudos relacionados a ambos os temas, percebemos que a aritmética não pode ser vista como uma parte distinta da álgebra, não podendo haver rupturas entre ambas no processo de ensino, afinal, tal como o cálculo mental se apóia nas propriedades do sistema de numeração decimal e das operações, o pensamento algébrico igualmente pode ser desenvolvido a partir dessas propriedades. Assim, estratégias de cálculo mental podem ser vistas como generalizações de procedimentos aritméticos, sendo a generalização a base de emergência do pensamento algébrico (PIMENTEL; VALE, 2009).

Contudo, mesmo nos apoiando em Parra (1996) com relação ao resgate do cálculo mental, concluímos que pouco poderia ser inferido, uma vez que apenas cálculos intermediários são registrados na escrita. Nesse sentido, optamos por incluir a análise de outros meios semióticos (DUVAL, 2009, 2012; RADFORD, 2006; VERGNAUD, 2009), em especial, a linguagem natural expressa oralmente.

Em acordo com o exposto, nos propomos, nesta pesquisa, investigar na linguagem oral e no registro escrito de estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, mais especificamente do 5º ano, os procedimentos de cálculo[2], que nesta pesquisa denominamos *esquemas* (VERGNAUD, 1990, 1996, 2003, 2005, 2009), manifestados durante a realização de um episódio de ensino[3] envolvendo tarefas não-rotineiras[4], visando identificar nesses esquemas alguns invariantes operatórios (VERGNAUD, 1990, 1996, 2003, 2005, 2009) e os níveis de generalidade (RADFORD, 2006) alcançados pelos estudantes.

Ao realizarmos uma busca no Banco de Dissertações e Teses da CAPES (25/04/2014) e no Portal Domínio Público (25/04/2014), utilizando os termos “cálculo mental”, “estratégias de cálculo”, “procedimentos de cálculo” “invariantes operatórios”, “campos conceituais” e “generalização”, localizamos, entre

---

[2] Destacamos que em nossa pesquisa nos referimos aos processos e às maneiras pelos quais os estudantes buscam solucionar problemas matemáticos pela denominação “procedimentos de cálculo”. Porém, em outras pesquisas, alguns autores denominam (em geral, com o mesmo sentido) de “estratégias de cálculo”.

[3] Explicaremos no Capítulo 3, subseção 3.1.3.

[4] Entendemos como tarefas não-rotineiras aquelas que não fazem parte da rotina escolar dos estudantes.

dissertações de mestrados e teses de doutorados, poucos trabalhos semelhantes ao que a presente pesquisa propõe.

Com relação aos procedimentos e/ou estratégias de cálculo mental, e considerando apenas aqueles trabalhos realizados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, ao lermos os resumos verificamos investigações cujos focos foram, por exemplo: i) identificar estratégias e/ou procedimentos de cálculo mental adotados por docentes (BENITES, 2011); e, ii) a construção e o resgate de conceitos matemáticos (quatro operações básicas) e a habilidade de cálculo mental no ensino e aprendizagem da Matemática, fazendo uso de jogos como recursos (ANANIAS, 2010).

Unindo o cálculo mental com a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, verificamos trabalhos em que: i) investigaram invariantes operatórios tendo como foco o cálculo mental (GONÇALVES, 2008); e, ii) investigaram as contribuições de estratégias e/ou procedimentos de cálculo mental para aprender conceitos nos campos aditivos e multiplicativos (GUIMARÃES, 2009).

Quanto ao termo "generalização", encontramos poucos trabalhos desenvolvidos nos anos iniciais do Ensino Fundamental no ensino de Matemática, com relação ao cálculo mental ou a Teoria dos Campos Conceituais, porém, reconhecemos a existência de muitos trabalhos envolvendo generalização quando o foco é o pensamento algébrico.

Dessa forma, observamos que nenhum dos trabalhos voltados para os termos que utilizamos como disparadores de busca têm como tema central de estudo *a investigação de invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes do 5º ano ao se envolverem com tarefas não-rotineiras*, sendo essa investigação realizada por meio da análise de registros escritos e linguagem natural expressa oralmente. Além disso, nos esquemas que esboçamos, por meio dos quais investigamos os invariantes operatórios e níveis de generalidade, consideramos procedimentos de cálculo em geral, dentre os quais incluímos o cálculo mental.

Assim, propomos nesta investigação a seguinte questão norteadora: *estudantes do Ensino Fundamental, quando submetidos a tarefas matemáticas não-rotineiras, manifestam em seus procedimentos de cálculo invariantes operatórios e níveis de generalidade?*

Tendo em vista responder à questão proposta para a pesquisa, indicamos o seguinte objetivo: *investigar em tarefas matemáticas não-rotineiras as manifestações de invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em procedimentos de cálculo.*

Visando atingir esse objetivo, indicamos como objetivos específicos:

– Investigar a maneira como os estudantes se envolvem com cada tarefa não-rotineira, bem como investigar as relações que eles estabelecem com as informações fornecidas por essas tarefas, visando, assim, conhecer a matemática dos estudantes[5], ou seja, os conhecimentos matemáticos que os estudantes já possuem e colocam em ação ao se envolverem com tarefas não-rotineiras;
– Investigar indícios de invariantes operatórios por meio do esboço dos possíveis esquemas manifestados pelos estudantes durante envolvimento com a tarefa não-rotineira, sendo estes esboços construídos a partir de características evidenciadas em procedimentos de cálculo utilizados por estes estudantes;
– Analisar nos esquemas e nos invariantes operatórios indícios dos níveis de generalidade alcançados pelos estudantes.

O presente texto está organizado em cinco capítulos, os quais abordam os aspectos teóricos e metodológicos dessa pesquisa, bem como as análises realizadas a partir das informações coletadas e as discussões a cerca dos resultados e conclusões possibilitados pelo processo de análise.

Nos dois primeiros capítulos apresentamos a fundamentação teórica: no capítulo 1 nos referimos à Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud e no capítulo 2 trazemos discussões sobre o caráter algébrico da aritmética, enfatizando essa relação por meio dos estudos sobre objetivação, meios semióticos de objetivação e níveis de generalidade de Luís Radford.

No capítulo 3 explicitamos os procedimentos adotados e a trajetória de pesquisa, trazendo esclarecimentos sobre o projeto ao qual esta investigação está

[5] Entendemos por *matemática dos estudantes*, em acordo com Steffe e Thompson (2000), como o conjunto de conhecimentos matemáticos manifestados por eles independentemente de nossas interações.

vinculada, o contexto e os participantes da pesquisa, bem como as opções metodológicas.

No capítulo 4 descrevemos as tarefas submetidas à análise, bem como o processo de realização destes, por meio dos quais esboçamos os possíveis esquemas de resolução dos estudantes e inferimos características que consideramos relevantes nos procedimentos de cálculo desses estudantes durante envolvimento com a tarefa não-rotineira proposta, sendo estas características que constituíram as unidades de análise da pesquisa. Ainda, nesse capítulo, tratamos da parte final da análise das informações coletadas, apresentando as categorizações das unidades de análise e divulgando as interpretações que emergiram durante todo o processo analítico. Constituímos, portanto, nesse capítulo, os momentos de desconstrução e de reconstrução, de acordo com a Análise Textual Discursiva.

Nas Considerações Finais, tecemos algumas reflexões e conclusões pautadas na pesquisa desenvolvida, tendo em vista a problemática e os objetivos que engendraram essa investigação.

CAPÍTULO 1
A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Neste capítulo, tendo em vista a problemática e o objetivo da pesquisa, apresentamos elementos da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud nos quais nos apoiamos no decorrer da investigação, em especial, no processo de análise e interpretação das informações coletadas.

Introduzindo essa apresentação trazemos, na primeira seção, uma breve discussão à cerca do ensino e da aprendizagem da aritmética elementar, visando destacar em que contexto insere-se a Teoria dos Campos Conceituais.

A partir da segunda seção trazemos esclarecimentos sobre essa teoria, bem como detalhamos os seus principais aspectos: conceito, situações, esquemas, invariantes operatórios e representações simbólicas dos conceitos.

Por fim, na quarta seção, apresentamos os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, as quais são essenciais para esta investigação, uma vez que o foco desta no primeiro momento das análises é a investigação de esquemas e invariantes operatórios manifestados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental diante de tarefas não-rotineiras, considerando que estes estudantes conhecem, até o momento, apenas as quatro operações matemáticas básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), sendo estas as principais constituintes dos campos conceituais que nos referimos.

1.1 Ensino e Aprendizagem da Aritmética Elementar: uma Breve Discussão

Problemas a serem resolvidos são o que, em geral, engendram as atividades matemáticas. Desta forma acreditamos que a matemática escolar, desde os anos iniciais, precisa enfatizar a resolução de problemas e de tarefas desafiadoras, uma vez que este pode ser um caminho mais eficaz para a compreensão das operações aritméticas elementares e para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos estudantes.

Com relação à compreensão das operações aritméticas elementares, a maneira como estas são, em geral, apresentadas nas aulas de matemática, conduz a maioria dos estudantes a resolver essas operações de maneira mecânica, ou seja, sem refletir sobre cada passo do processo de resolução, bem como sobre o resultado obtido.

Em concordância com o que descrevemos, Kamii (2002) menciona que no ensino tradicional da Matemática o professor apresenta aos estudantes *como* realizar as operações aritméticas fundamentais – adição, subtração, multiplicação e divisão – e, em seguida, lhes propõe problemas semelhantes para simplesmente praticar. Diante disso, a autora defende que o processo de ensino da matemática deveria ocorrer ao contrário: "nós não dizemos às crianças o que fazer e, em vez disso, damos problemas de modo que elas usem o que sabem para inventar novas formas de resolvê-los." (KAMII, 2002, p. 231).

A autora pontua a vantagem desse processo inverso de ensino:

> No esforço para imaginar uma forma de lidar com problemas, as crianças criam novas relações (por abstração construtiva). As relações que uma criança criou de dentro para fora não são esquecidas como as relações absorvidas do ambiente. Uma relação criada pela criança também serve como base para invenções posteriores (KAMII, 2002, p. 231).

Entretanto, para que o educador seja capaz de mediar o desenvolvimento do raciocínio lógico do estudante por meio das invenções deste ao buscar resultados para situações-problemas, é essencial conhecer todos os mecanismos que envolvem a construção conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas (COMÉRIO, 2007). Essa posição é defendida por Vergnaud (1990, 1996, 2003, 2005, 2009) em sua teoria – *Teoria dos Campos Conceituais* –, na qual, a partir de agora, nos inseriremos.

1.2 A Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud: Discussões Iniciais

O professor Gérard Vergnaud é Doutor em Psicologia e sua tese foi orientada por Jean Piaget. Atuou como diretor de pesquisa por vários anos no Centro Nacional de Pesquisas Científicas (CNRS) da França na área de psicologia do desenvolvimento cognitivo e, atualmente, exerce docência e orientação de investigação na área de competências cognitivas em situação escolar e do trabalho na Universidade de Paris 8. Por sua contribuição teórica, bem como pela sua participação ativa na área de pesquisa em Educação Matemática, Vergnaud é considerado um grande nome do movimento francês *Didática da Matemática*[6].

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista que tem por objetivo proporcionar um enquadramento teórico para as investigações relacionadas às atividades cognitivas complexas, buscando compreender as filiações e rupturas na formação do conhecimento de crianças e adolescentes. E, apesar de Vergnaud não a considerar como uma teoria didática, ele admite que a Teoria dos Campos Conceituais seja de extremo interesse para a área educacional, uma vez que está estritamente ligada ao processo de aprendizagem e, portanto, apresenta implicações didáticas (VERGNAUD, 1990, 1996).

É preciso destacar que Vergnaud compreende por “conhecimentos” tanto o saber-fazer (capacidade de resolver problemas matemáticos), quanto o saber-expressar, ou seja, saber explicitar os objetos e suas propriedades (VERGNAUD, 1996). Além disso, vale destacar que apesar da Teoria dos Campos Conceituais ter sido elaborada, em início, para elucidar os processos de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações entre número e espaço, bem como da álgebra, essa teoria não é específica da matemática.

Foi nos trabalhos de Piaget que Vergnaud se fundamentou para elaborar a noção de *esquema*[7], um dos principais conceitos de sua teoria. Contudo, Moreira (2002, 2011) pontua que, para Vergnaud, alguns fatores essenciais foram desconsiderados por Piaget, dentre eles o fato de o desenvolvimento cognitivo depender de situações e de conceitualizações específicas, uma vez que, para Vergnaud, as dificuldades apresentadas pelos estudantes não são as mesmas de um campo conceitual para outro.

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud está, ainda, do mesmo modo fundamentada nos estudos de Vygotsky, sobretudo com relação à interação social, à linguagem e à simbolização na formação progressiva do sujeito diante de um campo conceitual.

---

[6] O movimento *Didática da Matemática* surgiu na França nos anos 60, no contexto de uma vasta discussão com relação ao ensino científico, rompendo, de certo modo, com as premissas das reformas precedentes. O objetivo de estudo da Didática da Matemática “[...] é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos [...]” (PAIS, 2001, p.11).

[7] Abordamos sobre *esquemas* na subseção 1.3.3 desse capítulo.

Mas, afinal, o que é campo conceitual? Vergnaud (1990, 1996) considera em primeiro lugar um campo conceitual como um conjunto de *situações*[8], no qual a análise, o tratamento e a apropriação requerem vários conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, porém, estritamente relacionados.

Moreira (2002) destaca algumas considerações importantes de Vergnaud com relação ao campo conceitual: i) a conceitualização do real é a essência do desenvolvimento cognitivo; ii) um conceito não é formado dentro de um só tipo de situação, assim como uma situação não é possível de ser analisada por meio de um só conceito; e iii) a construção e a apropriação de todas as propriedades de um conceito, bem como de todos os aspectos de uma situação é um processo bastante longo, e depende da experiência e da maturidade do sujeito.

Na matemática, a conceitualização do real: “[...] consiste em elaborar os meios intelectuais para tratar progressivamente situações mais e mais complexas, e se efetua ao longo do processo educativo por meio de uma variedade de situações de aprendizagem.” (KOCH; SOARES, 2005, p. 145).

Buscando sequenciar essa exposição sobre a Teoria dos Campos Conceituais, faz-se necessário explicitarmos os conceitos principais dessa teoria, os quais são essenciais para esta pesquisa.

1.3 Os Principais Conceitos da Teoria dos Campos Conceituais

Nas subseções a seguir buscamos explicitar conceitos fundamentais da Teoria dos Campos Conceituais, nos baseando nos pressupostos de Vergnaud na literatura estudada. Estes conceitos são: de conceito, de situações, de esquemas, de invariantes operatórios e de representações.

1.3.1 O Conceito de *Conceito* na Teoria de Vergnaud

Segundo Vergnaud (1990, 1996), um conceito só tem sentido para uma criança por meio das situações e dos problemas que ela resolve, sejam esses teóricos ou práticos. Nesse sentido, o autor pontua que a compreensão dos conceitos matemáticos se faz por meio de ações que, ao serem internamente

---

[8] Trazemos maiores esclarecimentos sobre *situações* na subseção 1.3.2 desse capítulo.

organizadas pelo sujeito, ganham significado nas situações às quais pertencem tais conceitos. Ainda, é nesse momento que se percebe a relevância da linguagem e da representação simbólica na conceitualização.

Diante do exposto, Vergnaud (1990, 1996) é conduzido a considerar um *conceito* como o tripleto[9] de três conjuntos: C = (S, I, R), em que:

S: é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito, ou seja, corresponde ao referente do conceito;

I: é um conjunto de invariantes sobre os quais repousa a operacionalidade dos esquemas, ou seja, é o conjunto de invariantes que podem ser identificados e utilizados pelos sujeitos nas situações, sendo que estes invariantes podem ser objetos, propriedades e relações. Este conjunto corresponde ao significado do conceito.

R: é um conjunto de formas linguísticas e não linguísticas, tais como a linguagem natural, os gráficos e diagramas, as equações algébricas, etc, que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento, correspondendo, portanto, ao significante do conceito.

Não apenas durante a sua utilização, mas no decorrer de toda a sua aprendizagem, o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito precisa ser estudado considerando ao mesmo tempo os três conjuntos. Afinal, como defende Moreira (2002) não existe, em geral, bijeção entre significantes e significados, assim como entre invariantes e situações. Sendo assim, não se pode reduzir o significado aos significantes, nem tão pouco às situações (VERGNAUD, 1990, 1996).

Dessa forma, os significantes (as representações) não correspondem diretamente ao objeto que representam. Em outras palavras, “a noção de representação não se reduz à noção de símbolo ou de signo, uma vez que ela cobre também a noção de conceito.” (VERGNAUD, 2009, p. 19).

Assim sendo, o conhecimento incide, ao mesmo tempo, no referente, nos significados e nos significantes, uma vez que o conhecimento não pode ser formado apenas por símbolos, mas igualmente por “conceitos e noções que refletem ao mesmo tempo o mundo material e a atividade do sujeito nesse mundo material.” (VERGNAUD, 2009, p. 19).

---

[9] Entendemos *tripleto* como um sistema de três elementos de um conjunto tomados numa ordem determinada.

1.3.2. As Situações

O conceito de *situação* na Teoria dos Campos Conceituais não é entendido em seu sentido mais amplo, como em situação didática. Como postula Brousseau (2008), a situação didática refere-se a todo o contexto ao qual o estudante está inserido, incluindo o professor e todo o sistema educacional, ou seja, “inclui tudo o que especificamente colabora no componente matemático de sua formação.” (BROUSSEAU, 2008, p. 53).

Em contrapartida, na Teoria dos Campos Conceituais, *situação* é compreendida como no sentido que os psicólogos atribuem usualmente a esse termo: as situações com as quais o sujeito se confronta são determinantes para seus processos cognitivos e suas respostas (VERGNAUD, 1996). Nessa perspectiva, Vergnaud (1990) considera o conceito de *situação*, mais especificamente, como o de *tarefa*[10], e considera que uma situação complexa pode ser analisada por meio de combinação de tarefas, sendo preciso conhecer as naturezas e dificuldades próprias destas.

Vergnaud (1996) distingue as situações em duas classes:

> 1 – classes de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
> 2 – classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso (VERGNAUD, 1996, p. 156).

Com relação a essas classes de situações, voltaremos a abordá-las na próxima seção, em que conceituaremos *esquema.*

Ainda, Vergnaud (1996) destaca duas ideias principais com relação ao sentido de situação:

> 1 – a ideia de variedade: existe uma grande variedade de situações num dado campo conceptual, e as variáveis de situação são um meio de gerar de forma sistemática o conjunto das classes possíveis;
> 2 – a ideia de história: os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles depararam e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas primeiras situações susceptíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes (VERGNAUD, 1996, p. 171).

---

[10] Nesse mesmo sentido de Vergnaud (1990), chamamos de *tarefas* as aplicações feitas aos nossos participantes da pesquisa.

De acordo com Vergnaud (1996, p. 171), a primeira ideia conduz à análise e à decomposição dos conceitos em elementos simples, bem como às suas possíveis combinações, “enquanto a segunda orienta para a procura de situações funcionais” que, em geral, suas importâncias estão relacionadas “à frequência com que se encontram”.

Diante do exposto podemos compreender que as diversas e variadas situações apresentam um papel imprescindível na atribuição de sentido ao conceito. Porém, tal como descreve Moreira (2002), baseando-se nos pressupostos de Vergnaud, o sentido não pertence às situações em si, nem às representações simbólicas, mas é oriundo da relação do sujeito com as situações e com os significantes.

Considerando que o sentido não está diretamente nas situações, nem nos significantes, concluímos que são os esquemas evocados pelo sujeito em dadas situações, ou diante de significantes, que formam o sentido da situação, ou do significante (MOREIRA, 2002). Todavia, Moreira (2002) enfatiza que uma situação ou uma representação não é capaz de evocar no sujeito todos os esquemas disponíveis e, portanto, um sentido atribuído para uma situação ou uma representação específica não significa ser o sentido do conceito neles envolvido para esse sujeito. O que o sujeito explicita é, portanto, apenas um dos esquemas possíveis, o que nos leva a defender a necessidade da matemática escolar envolver diversas situações e representações.

Na seção a seguir, trazemos maiores esclarecimentos sobre os esquemas.

1.3.3 Os Esquemas

Na perspectiva de Vergnaud (1990, 1996), os conceitos matemáticos são compreendidos pelo sujeito por meio de suas ações que, ao serem por ele organizadas internamente, passam a ter significado nas situações em questão. São essas ações e organizações internas que Vergnaud (1990, 1996) denomina de *esquemas*.

Para Vergnaud (1990, 1996), os esquemas correspondem à organização invariante do comportamento em determinadas situações. Nesse mesmo sentido, Moreira (2002) menciona que:

> Um esquema é um universal que é eficiente para toda uma gama de situações e pode gerar diferentes seqüências de ação, de coleta de informações e de controle, dependendo das características de cada situação particular (MOREIRA, 2002, p. 12).

Diante do exposto percebemos o quanto os esquemas estão relacionados às situações e, como já mencionamos na seção anterior, essas situações podem ser distinguidas em duas classes: para as quais o sujeito possui em seu repertório competências para tratar a situação e para as quais o sujeito não dispõe dessas competências.

Para ambas as classes de situações distinguidas pelo autor, Vergnaud (1990, 1996) aplica o conceito de *esquema*, ainda que este não funcione da mesma maneira nos dois casos. No primeiro caso, para uma mesma classe de situações, observa-se que os comportamentos são automatizados, podendo ser organizados por um esquema único e, no segundo caso, observa-se a utilização sucessiva de vários esquemas, os quais, para se alcançar a solução almejada poderão ser combinados, descombinados e recombinados, sendo esse processo, portanto, acompanhado de descobertas.

O conceito de esquema é, certamente, uma das maiores contribuições dos estudos de Piaget para a teoria de Vergnaud. De acordo com Nunes *et al.* (2005), o termo *esquema* na psicologia "é uma representação em que aparece apenas o essencial daquilo que é representado; os detalhes não aparecem" (NUNES *et al.*, 2005, p. 46). Nesse mesmo sentido, Vergnaud (1990) enfatiza que sempre há muito de implícito nos esquemas: "Um esquema repousa sempre sobre uma conceitualização implícita"[11](VERGNAUD, 1990, p. 3, tradução nossa).

Vergnaud (1990, 1996) profere que são nos esquemas que devem ser investigados os conhecimentos-em-ação[12] do sujeito, sendo estes os elementos cognitivos que permitem a ação do sujeito ser operatória.

Para Moreira (2002) cada esquema gera ações, cuja sequência depende dos parâmetros da situação. Quando em certa classe de situações o sujeito utiliza um esquema ineficaz, o mesmo se vê forçado a mudar ou modificar o esquema e, essa mudança é possível de ocorrer porque os comportamentos em uma determinada situação repousam sobre o repertório inicial de esquemas disponíveis para o sujeito,

---

[11] Un esquema reposa siempre sobre una conceptualización implícita.

[12] Correspondem aos teoremas-em-ação e conceitos-em-ação que explicaremos na próxima subseção, sobre os invariantes operatórios.

em especial, nos esquemas que “estão associados às classes de situações que parecem ter uma semelhança com a situação tratada atualmente.” (VERGNAUD, 2002, p. 4).

Assim, vários esquemas podem ser evocados sucessivamente e, até mesmo, simultaneamente. É nesse sentido que podemos observar as ideias piagetianas: os esquemas encontram-se no centro de todo o processo de adaptação das estruturas cognitivas, da assimilação e da acomodação. Contudo, os esquemas estão sempre relacionados às situações as quais se aplicam.

Nessa perspectiva, de acordo com Moreira (2002), o desenvolvimento cognitivo consiste na ampliação do repertório de esquemas e, nesse sentido, defende que “a educação, portanto, deve contribuir para que o sujeito desenvolva um repertório amplo e diversificado de esquemas, porém procurando evitar que esses esquemas se convertam em estereótipos esclerosados.” (MOREIRA, 2002, p. 12).

Em concordância com Moreira (2002), Teixeira (2005) acrescenta que:

> As concepções dos alunos se modificam ou se tornam menos estereotipadas somente se eles vivenciarem um vasto conjunto de situações diferentes, envolvendo objetos e relações matemáticas. Para conduzir e controlar o processo de conceitualização é preciso observar como os alunos lidam com tais objetos e relações. Isso só é possível por meio dos comentários e das representações dos alunos (TEIXEIRA, 2005, p. 24).

Assim sendo, em concordância com o exposto, acreditamos que um trabalho envolvendo diversificadas situações e representações para abordar um mesmo conceito contribui para que o estudante desenvolva vários esquemas, uma vez que, diante de situações e representações diferenciadas, este estudante precisará modificar ou combinar esquemas ou, até mesmo, formar outros novos durante o processo de conceitualização. Tudo isso contribuirá para que o estudante não se apóie em esquemas únicos, bem como em concepções, que permanecem inalteradas (estereotipadas).

Vergnaud (1996) destaca que a interação social contribui para a formação de esquemas. Deste modo, acreditamos que além das diversificadas situações e representações é essencial que durante o processo de ensino os estudantes tenham a oportunidade de interagirem e explicitarem seus envolvimentos com os conceitos abordados, pois assim, além de permitir ao professor “conduzir e controlar o processo de conceitualização." (TEIXEIRA, 2005, p. 24), contribuirá para que outros estudantes conheçam o objeto estudado por outros pontos de vista, conduzindo-os à substituição, combinação ou modificação de esquemas já formados ou, até mesmo, à formação de outros esquemas.

Moreira (2002) pontuou quatro elementos indispensáveis na composição do esquema:

- *As metas e antecipações* do objetivo que se deseja atingir diante de uma classe de situações, ou seja, são certos efeitos ou certos eventos que o sujeito espera;
- *As regras de ação* do tipo "se... então...", que são as responsáveis por originar os esquemas, uma vez que permitem a geração e a continuidade da sequência de ações no sujeito;
- *Os invariantes operatórios* (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), que conduzem o sujeito a reconhecer os elementos pertinentes à situação e que, portanto, "constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas." (MOREIRA, 2002, p. 12);
- *As possibilidades de inferências* que permitem "calcular" e "avaliar" as regras e antecipações a partir das informações fornecidas pelas situações, bem como a partir dos invariantes operatórios de que dispõe.

Dentre os elementos que constituem o esquema, os invariantes operatórios merecem destaque. Os motivos que justificam esse destaque, dentre outras considerações, apresentamos na próxima seção.

1.3.4 Os Invariantes Operatórios

Os conhecimentos contidos nos esquemas (conhecimentos-em-ação), que são denominados por Vergnaud (1990, 1996) como invariantes operatórios, caracterizam a base conceitual que permite a execução dos demais elementos e fazem a articulação entre teoria e prática (MOREIRA, 2002). Portanto, o reconhecimento de invariantes operatórios é a chave da generalização do esquema.

Os conhecimentos-em-ação, os quais são de maneira geral denominados de invariantes operatórios, são constituídos por conceitos-em-ação e teoremas-em-ação: o primeiro é uma categoria de pensamento que é considerado como pertinente, ou seja, corresponde aos conceitos que estão disponíveis para o sujeito em determinada situação, tais como, objetos, relações, condições ou circunstâncias e, o segundo, é subjacente ao comportamento do sujeito e é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real. Em síntese, “proposições podem ser verdadeiras ou falsas; conceitos podem ser apenas relevantes ou irrelevantes” (MOREIRA, 2002, p. 16).

A relação entre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação é dialética: um não existe sem o outro. Ambos formam o núcleo da representação e são responsáveis pela geração das ações pelos esquemas (MOREIRA, 2002).

Para Vergnaud (2009), a eficácia da representação é assegurada pelos invariantes operatórios, uma vez que lhe permite preencher sua dupla função: de refletir a realidade e de prestar-se a um cálculo relacional. Sendo assim, “são os invariantes que dão à representação seu caráter operatório. Daí seu nome.” (VERGNAUD, 2009, p. 308).

Sobre a integração de invariantes operatórios aos esquemas, bem como a relação entre esses e as representações, trazemos maiores esclarecimentos na subseção a seguir.

1.3.5. As Representações Simbólicas dos Conceitos

É possível traçarmos uma analogia entre as tarefas escolares e as tarefas com as quais o sujeito se depara em sua vida cotidiana: em ambas é preciso “analisar uma situação, representá-la, operar sobre essa representação para encontrar uma solução e aplicar a solução assim encontrada, recomeçar no caso do fracasso.” (VERGNAUD, 2009, p. 85).

Vergnaud (2009) explicita que a criança constrói representações mentais da realidade visando compreende-la e agir sobre ela. Dentre essas representações mentais, de acordo com esse mesmo autor, grande parte é inacessível ao observador externo, além do fato de que muitas vezes este observador pode estar despreparado para interpretar aquilo que a criança acreditou compreender ou fazer.

Entretanto, segundo o autor, algumas representações mentais são objetiváveis, ou seja, permitem que o observador externo perceba indicadores importantes nas produções do sujeito, tais como, linguagem natural, desenhos, operações feitas pelo sujeito, gestos analógicos, entre outros.

Com relação às representações mentais, Duval (2012) distingue estas das representações semióticas: as representações mentais consistem de um conjunto de imagens e de concepções que o sujeito possui acerca de um objeto, uma situação ou sobre aquilo que está associado ao objeto ou situação, sendo, portanto, produções internas; e, as representações semióticas, por sua vez, são produções externas compostas por signos pertencentes a um sistema de representações que contém inconvenientes próprios de significação e de funcionamento (DUVAL, 2012). Destacamos que por signo entendemos como um substituto ou representante de um objeto (PIERCE, 2000). Dentre as representações semióticas podemos citar uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica e um gráfico cartesiano.

Apesar das diferenças pontuadas, as representações mentais e as representações semióticas não podem ser postas como dois domínios diferentes (DUVAL, 2009). Em concordância com o que expõe Vergnaud com relação a algumas construções mentais serem objetiváveis, para Duval as representações semióticas constituem um meio de exteriorizar as representações mentais, tornando-as acessíveis a outrem.

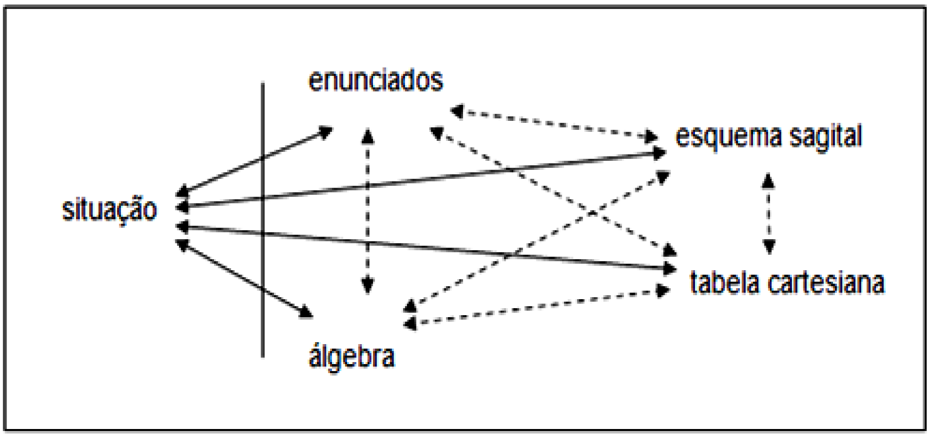
Ainda, "as representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento." (DUVAL, 2012, p. 270): i) o desenvolvimento das representações mentais está estritamente relacionado à interiorização das representações externas; ii) permitem a realização de diferentes funções cognitivas, tais como as de objetivação (expressão particular) e as de tratamento; e iii) facultam a produção de conhecimentos ao permitirem representações diversificadas de um mesmo objeto (DUVAL, 2012).

Assim, percebemos que tal como Duval (2002), Vergnaud (2009) atribui às diversificadas representações (que Duval denomina de representações semióticas) a função de objetivar as representações mentais que o estudante constrói da realidade, sendo possível exteriorizar a outra pessoa indícios destas por meio de diferentes meios semióticos.

Vergnaud (2009) destaca que as principais representações que são utilizadas no ensino da matemática são as expressões linguísticas ou enunciados da língua natural, os esquemas espaciais no plano (linhas, flechas, regiões do espaço e localizações) e as expressões algébricas. Além disso, o autor destaca que as representações, em especial das relações binárias, para as quais há dois esquemas espaciais principais (sagital, ou seja, por meio de setas, e tabela cartesiana), podem ocorrer da passagem de:

- uma situação a uma representação e reciprocamente (na figura 1, corresponde aos traços cheios). Por exemplo: descrever verbalmente as relações que existem entre crianças sentadas a uma mesa (ao lado de, em frente de, na mesma fila que, etc.)
- uma representação a outra (na figura 1, corresponde aos traços pontilhados). Por exemplo: escrever a equação algébrica correspondente a um dado enunciado ou compor um esquema sagital correspondente a um dado enunciado.

Figura 1 – Passagens de representações



Fonte: Vergnaud (2009, p. 86).

A representação, apenas quando reflete a realidade de maneira pertinente e homomorfa[13], é considerada operatória. Para Vergnaud (2009) essa noção de homomorfismo se aplica à função de passar da realidade à aplicação, ainda que isso não implique que a representação reflita e seja homomorfa a toda a realidade.

Com essa noção o autor procura elucidar que não seria possível compreender a representação se esta não caracterizasse um reflexo da realidade, como se fosse

[13] Um homomorfismo consiste em uma aplicação de um conjunto em outro, preservando a estrutura dos conjuntos.

uma simulação, permitindo prever os efeitos reais, bem como pensar as ações a serem executadas (VERGNAUD, 2009).

Mas, isso tudo não ocorre apenas entre uma representação e a realidade representada, pois, existem múltiplas representações e existem homomorfismos também entre uma representação e outra.

Em resumo, Vergnaud (2009) pontua que:

> Pode-se dizer que o pensamento consiste, ao mesmo tempo, em operações conceituais e pré-conceituais sobre os significados, e em operações simbólicas sobre os significantes, significantes estes que formam vários sistemas simbólicos distintos, tendo elos entre si próprios e com o significado (VERGNAUD, 2009, p. 300).

Duval (2012) destaca que um sistema semiótico é considerado um registro de representação quando permite três atividades cognitivas que são fundamentais: a formação de uma representação identificável, o tratamento de um registro de representação e a conversão entre registros de representação.

Para Duval (2012) uma representação é identificável quando permite que uma pessoa que não a produziu identifique seu sentido a partir das relações, características e dados do conteúdo representado. Assim, entendemos que a noção de representação identificável corresponde à noção de homomorfismo entre representação e realidade, bem como entre representações, tal como defende Vergnaud (2009).

O tratamento é uma transformação que ocorre dentro de um mesmo registro. Como exemplos, podemos citar a efetuação de um cálculo, realizado no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números, e a resolução de uma equação ou de um sistema de equações. Podemos considerar como exemplo a resolução da seguinte expressão numérica:

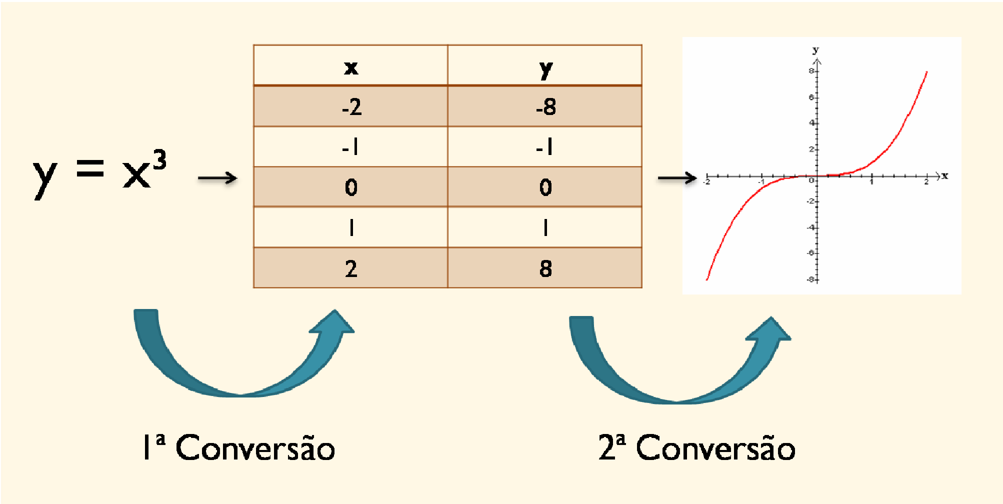
$$\{5 - [8(7 - 10) + 2] + 9(6 - 3)\}$$
$$\{5 - [8(-3) + 2] + 9(3)\}$$
$$\{5 - [-24 + 2] + 27\}$$
$$\{5 - [-22] + 27\}$$
$$\{5 + 22 + 27\}$$
$$54$$

Nesse exemplo, as expressões são equivalentes entre si. O que ocorreu foi apenas a transformação na representação, porém, conservando o registro numérico.

Entretanto, no tratamento “as compreensões do conceito matemático podem ser parciais, uma vez que um único registro pode não contemplar todas as características do objeto. Por isso, é adequada uma abordagem que relacione estes registros.” (VERTUAN, 2007, p, 24). É nesse sentido que Duval sugere a conversão, que é uma transformação de representações que consiste em alterar de registro, porém, conservando a referência aos objetos denotados.

Na figura a seguir apresentamos um exemplo de conversão:

Figura 2 - Conversão entre Registros de Representação Semiótica

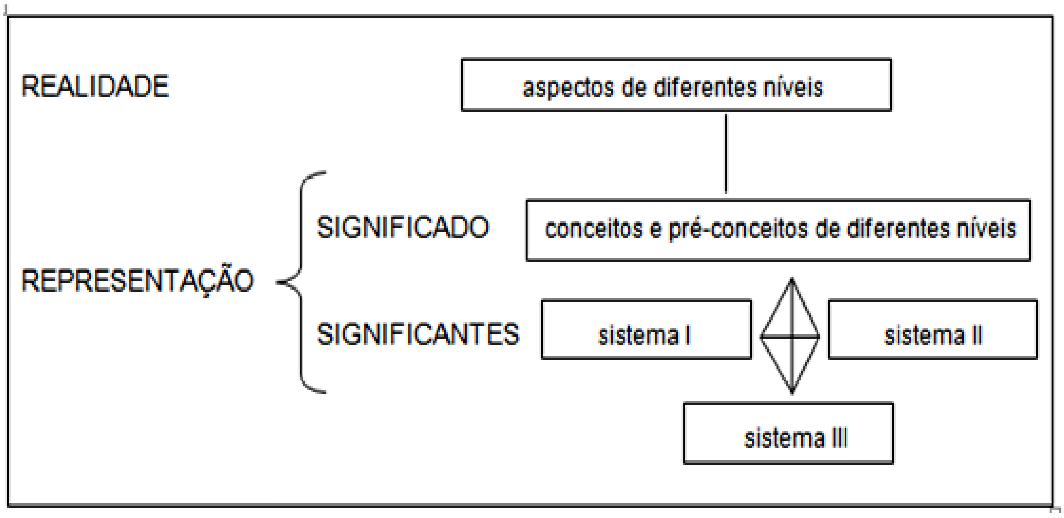


Fonte: Vertuan (2007, p. 24).

Duval (2012) destaca que a conversão é diferente e independente do tratamento: passar de um registro de representação para outro não consiste apenas em mudar de modo de tratamento, mas em explicar as diferentes propriedades e aspectos de um mesmo objeto, uma vez que diferentes registros que representam um mesmo objeto matemático, em geral, não explicitam totalmente as características desse objeto, mas parcialmente, e assim, aquilo que não é explicitado em um registro pode ser identificado em outro.

Em suma, traçando uma analogia entre o que expõe Vergnaud e o que expõe Duval, o funcionamento do pensamento consiste no trabalho de diferentes níveis ao mesmo tempo (relações, classes, elementos), assim como, diferentes sistemas simbólicos ao mesmo tempo (linguagem natural, linguagem algébrica, etc), conforme podemos observar na figura 3:

Figura 3 – Relação entre diferentes níveis e diferentes sistemas simbólicos



Fonte: Vergnaud (2009, p. 300).

Para Vergnaud (2009), é por meio das diferentes representações simultâneas, passando de uma representação para outra, que a criança raciocina. Nesse sentido, pensar não consiste apenas em passar de uma situação real para uma representação, mas do mesmo modo e, sobretudo, de uma representação à outra e a ela retornar. Afinal, são os critérios simbólicos que implicam em certas invariâncias no funcionamento do pensamento.

Do mesmo modo, Duval (2012) confere à coordenação entre registros um papel fundamental na apreensão conceitual dos objetos matemáticos. Isso porque a coordenação, segundo Duval (2012), não consiste apenas na conversão de um registro em outro, mas na compreensão de que todos esses registros fazem menção a um mesmo objeto, apresentando, cada qual, propriedades e características diferentes desse objeto, complementando-se entre si.

Dentre as diversificadas representações semióticas, Vergnaud (1990) destaca a linguagem natural. A esta o autor apresenta três funções:

- Ajuda a designar e, assim, a identificar os invariantes (objetos, propriedades, relações e teoremas);
- Contribui com o raciocínio e a inferência;
- Ajuda na antecipação dos efeitos e dos fins, no planejamento e no controle da ação.

Ainda, segundo o autor, o destaque para a linguagem natural dentre os significantes ocorre devido a sua dupla função: comunicar e representar. Além disso, a linguagem natural auxilia o pensamento. Essa última função da linguagem natural fica explícita quando o sujeito precisa planejar uma sequência de ações para lidar com uma situação para a qual não possui domínio suficiente: ainda que de maneira interiorizada, o sujeito verbaliza o que deve fazer, até que a sequência de ações se torne automatizada.

Do mesmo modo, na Matemática, Vergnaud (1990) defende que o funcionamento cognitivo do estudante comporta operações que são automatizadas progressivamente e, essa automatização, é certamente “uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da ação”[14] (VERGNAUD, 1990, p. 3, tradução nossa). Contudo, o autor esclarece que a automatização não impede que o sujeito mantenha o controle sobre sua ação, afinal, todos os nossos comportamentos envolvem tanto uma parte automatizada, quanto uma parte de decisão consciente (VERGNAUD, 1990).

Não obstante, é preciso ressaltar que as representações não são condições suficientes para a conceitualização, ainda que sejam fundamentais nesse processo. Vergnaud (1990) destaca que “são as ações do sujeito em situação que constituem a fonte e o critério da conceitualização”[15] (VERGNAUD, 1990, p. 20, tradução nossa).

Além disso, Vergnaud (2009) profere que o símbolo corresponde, simplesmente, à parte visível do *iceberg* conceitual, uma vez que a sintaxe de um sistema simbólico é apenas a parte que pode ser comunicada dentre o campo de conhecimento o qual representa, sendo essa sintaxe dependente da semântica que a engendrou, ou seja, da atividade prática e conceitual do sujeito no mundo real.

Tendo apresentado os principais conceitos da Teoria dos Campos Conceituais, apresentamos na figura 4, em resumo, esses conceitos, bem como suas relações:

[14] una de las manifestaciones más visibles del carácter invariante de la organización de la acción.
[15] sea la acción del sujeto en situación lo que constituye la fuente y el criterio de la conceptualización.

Figura 4 – Principais conceitos da Teoria dos Campos Conceituais e suas relações

Fonte: Da autora.

Por meio da figura apresentada mostramos que em determinado campo conceitual o sentido atribuído pelo sujeito para um conceito é oriundo da relação dele com as situações e representações diversas. Diante dessas situações e representações o sujeito evoca esquemas (organização invariante em determinadas situações e representações).

Na figura, percebemos que os invariantes operatórios estão contidos nos esquemas. Isso porque é nos esquemas que investigamos os conhecimentos em ação do sujeito (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), o que Vergnaud denomina de invariantes operatórios.

Além de tudo isso, na figura que apresentamos, as flechas vermelhas indicam uma relação que representa o que Vergnaud chama de tripleto entre situações, significados (esquemas e invariantes operatórios) e significantes (representações). As situações exigem certos conhecimentos para serem solucionadas e compreendidas, e são os esquemas e invariantes operatórios esses conhecimentos que são utilizados pelo sujeito para tratar as situações. As representações têm o papel fundamental de representar e comunicar as relações apropriadas, além de representar a situação.

Tendo apresentado os principais conceitos da Teoria dos Campos conceituais, abordamos, a seguir, os principais campos conceituais que estão em consonância com a presente pesquisa.

1.4 CAMPOS CONCEITUAIS

Vergnaud (1990, 1996), ao apresentar sua definição para campos conceituais, esclarece a reciprocidade entre situação e conceito, uma vez que um conceito abrange muitas situações, muitos invariantes e muitas simbolizações possíveis, porém, são as situações que dão sentido ao conceito. Assim sendo, a conceitualização por parte do sujeito é dependente de um conjunto relativamente amplo de situações que apresentam parentesco entre si, tais como a adição com a subtração e a multiplicação com a divisão.

Além dos campos conceituais envolvendo as operações aritméticas básicas, Vergnaud (1990, 1996) menciona sobre outros campos, expandindo-se para outros domínios como da eletricidade, da mecânica, das grandezas espaciais e da lógica das classes. Contudo, nos limitaremos apenas aos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, os quais são essenciais para a nossa pesquisa.

1.4.1 O Campo Conceitual das Estruturas Aditivas

De acordo com Vergnaud (1990, 1996) o campo conceitual das estruturas aditivas é um conjunto de situações, cujo tratamento implica em uma ou em várias adições ou subtrações, assim como em uma combinação destas operações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas.

Assim sendo, são constitutivos das estruturas aditivas conceitos como o de cardinal e de medida, de transformação temporal, seja de aumento (ganhar ou receber) ou de diminuição (perder ou gastar), de relação de comparação quantificada (“ter mais... que...” ou “ter menos... que...”), de composição binária de medidas, de composição de transformações e de relações, de inversão, de número natural e de número relativo, etc. Contudo, esses conceitos não aparecem sozinhos, mas representados por teoremas verdadeiros, os quais lhes atribuem sua função no tratamento das situações (VERGNAUD, 1990, 1996).

Destacamos que Vergnaud distingue cálculo numérico do cálculo relacional, enfatizando que é neste último que prevalecem as dificuldades. O cálculo numérico corresponde à resolução de um algoritmo, no qual não há conexão entre este com os aspectos semânticos e estruturais da situação e, portanto, não possuindo relações implícitas no cálculo (COMÉRIO, 2007).

Quanto ao cálculo relacional, este diz respeito à atividade matemática na qual se considera o contexto da situação, ou seja, “diz respeito aos números que nos enunciados podem representar estados ou transformações.” (PASSONI; CAMPOS, 2009, p. 49). Sendo assim, o cálculo relacional abrange as operações de pensamento que são necessárias no tratamento das relações envolvidas na situação que, como já mencionamos antes, nem sempre é explícito pelas crianças. Dessa forma, o cálculo relacional pode ser válido ou inválido: quando válido, pode ser expresso como teoremas (teoremas-em-ação), e quando inválido, pode ser expresso em forma de falsas inferências (COMÉRIO, 2007).

Vergnaud (1996, 2009) expõe que, em princípio, qualquer situação pode ser remetida para uma combinação de relações de base. Nas estruturas aditivas, o autor identifica seis relações de base e afirma que é a partir destas que é possível engendrar todos os problemas de adição e subtração.

Antes de apresentarmos as seis relações de base com seus respectivos exemplos, os quais são inspirados nos trabalhos de Vergnaud (2009), percebemos a necessidade de esclarecer, de antemão, os códigos que serão utilizados nos esquemas e nas equações:

Quadro 1 – Códigos utilizados em esquemas e equações

Símbolo(s)	Representação
□	Número natural (ℕ)
○	Número relativo (ℤ)
} ⏞	Composição de elementos de mesma natureza
↑ →	Uma transformação ou uma relação, ou seja, a composição de elementos de natureza diferente
n	Um número natural
(+ n) ou (− n)	Um número relativo
+	Adição de dois números naturais
+	Adição de um número natural e de um número relativo
✚	Adição de dois números relativos

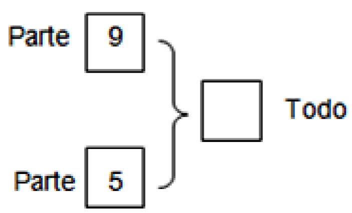
Fonte: Vergnaud (2009, p. 201).

- 1ª Relação de base[16]: **composição de duas medidas**

Duas medidas se compõem para resultar em uma terceira. Dessa forma, estão envolvidas nessa relação de base as situações que envolvem parte-todo, ou seja, para as quais se necessita subtrair uma parte do todo para se determinar a outra parte ou juntar uma parte com outra para obter o todo.

Exemplo: Carla tem 9 adesivos de estrelas e 5 adesivos de corações. Quantos adesivos ela tem ao todo?

Esquema:



Equação: $9 + 5 = ?$

[16] Vergnaud (2009) chama cada relação de base de *categoria*. Aqui optamos por denominá-las de *relação de base* para evitar confusão com nossas categorias nas análises.

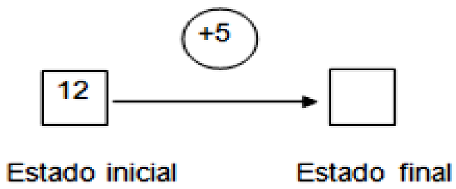
- <u>2ª Relação de base: **Transformação de uma medida inicial em uma medida final**</u>

Uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida. Assim, a incógnita pode ser qualquer um dos componentes da relação ternária, sendo essa incógnita obtida por meio de um acréscimo ou decréscimo em uma quantidade conhecida.

Exemplo: Carla tinha 12 adesivos. Ela ganhou 5 adesivos de sua mãe. Com quantos adesivos ela ficou?

Nesse caso, 12 e o resultado que será encontrado correspondem a números naturais, enquanto que +5 (ganhou 5) é um número relativo.

Esquema:



Equação: $12 + (+5) = ?$

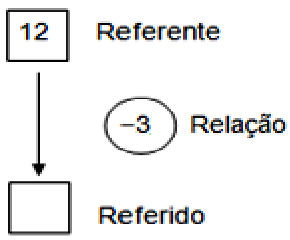
- <u>3ª Relação de base: **Relação de comparação entre duas medidas**</u>

Uma relação liga duas medidas, sendo essa relação quantificada. Essas duas medidas são o *referente* e o *referido*. Para determinar o referido, uma relação (a mais ou a menos) é estabelecida entre o referente e o referido.

Exemplo: Carla tem 12 adesivos. Amanda tem 3 menos que Carla. Quantos adesivos têm Amanda?

No exemplo, 12 e o resultado que se busca é um número natural, e −3 (3 a menos) é relativo.

Esquema:



Equação: $12 + (-3) = ?$

Segundo Vergnaud (2009), os problemas característicos das relações de base a seguir demonstram maior complexidade em relação aos primeiros apresentados, uma vez que envolvem mais de um raciocínio aditivo, ou seja, que envolvem perda ou ganho simultaneamente. Sendo assim, as possibilidades de situações que envolvem os raciocínios aditivos nessas categorias são inesgotáveis.

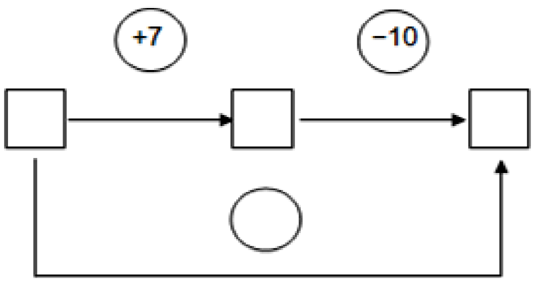
- 4ª Relação de base: **Composição de duas transformações**

Duas transformações se compõem para resultar em uma transformação. Ainda, as incógnitas podem ser tanto o estado inicial, o intermediário ou o final, quanto as transformações ocorridas.

Exemplo: Carla ganhou ontem 7 adesivos e hoje deu 10 adesivos para uma amiga. O que aconteceu com a quantidade de adesivos de Carla?

Nessa situação, todos os números envolvidos correspondem a números relativos. Além disso, percebemos que algumas quantidades, tais como o estado inicial e o final podem permanecer desconhecidos, uma vez que não são relevantes para o problema em questão. Essa é uma característica comum para as situações dessa relação de base.

Esquema:



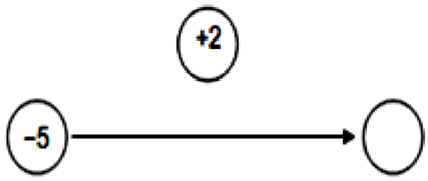
Equação: $(+7) + (-10) = ?$

- 5ª Relação de base: **Transformação de uma relação**

Uma transformação opera sobre um estado relativo para resultar em outro estado relativo.

Exemplo: Carla devia 5 adesivos para Amanda. Ela devolveu 2. Quanto ela ainda deve?

Esquema:



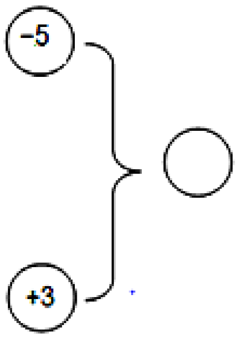
Equação: $(-5) + (+2) = ?$

- <u>6ª Relação de base: **Composição de duas relações**</u>

Dois estados relativos (relações) se compõem para resultar em um estado relativo. Essa situação é mais complexa para a criança, pois pode apresentar maior quantidade de dados e relações, requerendo que a criança resolva em etapas, utilizando diferentes procedimentos.

Exemplo: Carla deve 5 adesivos para Amanda, mas Amanda lhe deve 3. Quantos adesivos Amanda ainda deve a Carla?

Esquema:



Equação: $(-5) + (+3) = ?$

A complexidade dos problemas aditivos não varia apenas em função das diferentes relações de base apresentadas, mas, sobretudo, em função das diferentes classes de problemas que cada uma delas abrange.

Em geral, as dificuldades que os estudantes apresentam ao resolverem problemas de estruturas aditivas estão relacionadas à ausência de multiplicidade de problemas diferentes ensinados na escola. Nesse sentido, Vergnaud (2009) defende que o ensino precisa ser pautado em situações não homogêneas, em consequência de que os cálculos relacionais não são da mesma complexidade. Dessa forma, quanto mais complexa a situação, mais procedimentos não canônicos serão evocados pelo estudante, procedimentos esses que revelam, muitas vezes, uma boa compreensão da situação e preparam o estudante para descobrir outras soluções.

Nesse sentido, acreditamos que os caminhos utilizados pela criança na busca por um resultado, ainda que sejam errôneos, não podem ser desconsiderados pelo professor, afinal, por trás desses erros podem existir elementos que permitem inferir o que a criança de fato compreendeu e sobre os quais é possível apoiar-se para fornecer as explicações necessárias.

Considerando-se que cada situação envolve vários conceitos é que percebemos a relevância dos campos conceituais. No caso das estruturas aditivas, dentre os conceitos envolvidos podemos destacar: o conceito de medidas (relações de maior, menor e igual), de adição, de subtração, de transformação de tempo ("ontem eu tinha... quanto tenho agora?") e o de número (natural, inteiro ou decimal).

1.4.2 O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é entendido como o conjunto de situações que envolvem multiplicações e divisões de diferentes tipos ou a combinação dessas operações, bem como o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações.

Para Vergnaud (1990, 1996), as estruturas multiplicativas se diferenciam das estruturas aditivas, em especial, nas relações de base: as mais simples não são ternárias, mas quaternárias, isso porque os problemas mais simples envolvendo "multiplicação e divisão implicam a proporção simples de duas variáveis, uma relativamente à outra." (VERGNAUD, 1996, p. 174).

A partir das análises dos problemas envolvendo estruturas multiplicativas, Vergnaud (2009) mostrou que essas operações expressam diferentes significados contidos em várias situações e podem ser identificados a partir de três relações de base: isomorfismo de medidas**,** produto de medidas e proporção múltipla. Contudo, dentre essas três, explicitaremos apenas as duas primeiras, visto que são estas que mais se aproximam da faixa etária dos participantes desta pesquisa[17]. A proporção múltipla é uma relação de base mais complexa e que envolve problemas de

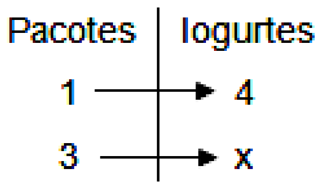
[17] Os participantes da pesquisa são apresentados no Capítulo 3, subseção 3.1.2.

proporcionalidade de, no mínimo, três grandezas, exigindo mais de uma operação em sua resolução.

- <u>1ª Relação de base: **Isomorfismo de medidas**</u>

Para Vergnaud (2009), a primeira grande forma de relação multiplicativa é a relação quaternária, na qual duas quantidades são medidas de certo tipo e as duas outras, de outro tipo. Vergnaud (2009) cita, dentre outros, o seguinte exemplo: “Tenho três pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?” (VERGNAUD, 2009, p. 239).

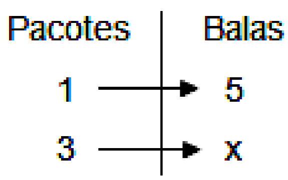
Esse exemplo pode ser representado por um esquema que mostra bem a relação existente entre as quatro quantidades, dentre elas, designamos de x a quantidade buscada:



O isomorfismo de medidas, portanto, comporta quatro quantidades e, nos problemas mais simples, uma dessas quantidades é igual a um, o elemento neutro da multiplicação nos inteiros. Assim sendo, existem três classes de problemas conforme a incógnita. Essas três classes são exemplificadas nos esquemas a seguir:

a) <u>Multiplicação</u>: envolve uma multiplicação simples, na qual, dependendo dos valores envolvidos é possível que a criança faça uso da adição reiterada (VERGNAUD, 2009).

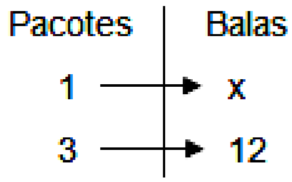
Exemplo: Carla tem 3 pacotes com 5 balas em cada. Quantas balas Carla têm ao todo?



No exemplo, pede-se para determinar a quantidade total de balas em 3 pacotes, sabendo-se que um pacote contém 5 balas. Diante dessa situação, é comum a criança fazer uso da adição reiterada (3 pacotes de balas é igual a 5 balas, mais 5 balas, mais 5 balas).

b) Divisão (busca do valor unitário): busca-se encontrar o valor unitário, conhecendo-se o elo de correspondência entre duas grandezas que são de natureza diferente (VERGNAUD, 2009).

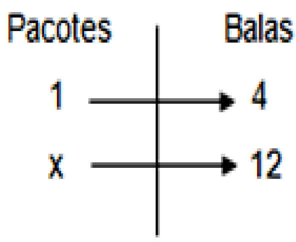
Exemplo: Carla tem 12 balas para dividir igualmente em 3 pacotes. Quantas balas serão colocadas em cada pacote?



No exemplo, sabe-se a quantidade total de balas existentes em três pacotes e procura-se determinar a quantidade de balas em um único pacote. Para isso, dividi-se 12 (quantidade total de balas) por 3 (quantidade de pacotes) para determinar x balas (quantidade de balas em um pacote).

c) Divisão (busca da quantidade de unidades): nesse caso o valor unitário é dado. O que se pretende descobrir é “o número de unidades da primeira espécie correspondente a uma grandeza dada de outra espécie” (VERGNAUD, 2009, p. 242).

Exemplo: Carla tem 12 balas e quer colocá-las em pacotes de modo que cada pacote tenha 4 balas. Quantos pacotes ela vai precisar?

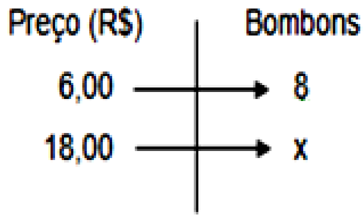


Nesse exemplo, sabe-se a quantidade total de balas e quantas balas serão colocadas em cada pacote. Para determinar quantos pacotes serão necessários para colocar as 12 balas (quantidade total), de maneira que cada pacote contenha 4 balas, a operação realizada é uma divisão ($12 \div 4$).

Outra classe, mais complexa que as apresentadas, pode ser mencionada: a da quarta proporcional, na qual são definidas três grandezas, onde a quarta é o valor buscado:

d) Quarta proporcional: o cálculo envolve uma multiplicação, tal como na classe a que apresentamos, porém nenhuma das quatro quantidades envolvidas é unitária. Sendo assim, após realizar a multiplicação faz-se necessário realizar uma divisão.

Exemplo: Carla vende bombons em sua escola. Amanda comprou 8 bombons e pagou R$6,00. Maria tem R$18,00 para comprar bombons de Carla. Quantos bombons a Maria poderá comprar?



Nesse exemplo, sabendo a quantidade de bombons que Amanda comprou com determinado valor em dinheiro, busca-se encontrar a quantidade de bombons que poderão ser comprados com o valor em dinheiro que Maria possui. Assim como na classe a, realiza-se uma multiplicação entre R$18,00 e os 8 bombons. Porém, como os 8 bombons não representam a quantidade correspondente ao valor em dinheiro da unidade de bombom, dividi-se o resultado obtido na multiplicação pelo valor dos 8 bombons (R$6,00).

Cada uma dessas três classes ainda pode se subdividir em numerosas subclasses, cujas dificuldades podem estar relacionadas, por exemplo, à magnitude dos números inteiros envolvidos e a números decimais.

- 2ª Relação de base: **Produto de medidas**

O produto de medidas consiste em uma relação ternária, ou seja, entre três quantidades. Nesta relação, uma quantidade é o produto das duas outras no plano numérico e no plano dimensional ao mesmo tempo. Vergnaud (2009, p. 253) cita como exemplo: “3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis?”

Analisando essa situação, temos:

“Chamemos de R = $\{a, b, c\}$ o conjunto dos rapazes e de M = $\{f, g, h, i\}$ o conjunto das moças. O conjunto C dos possíveis casais é o produto cartesiano do conjunto de rapazes pelo conjunto de moças, C = R x M” (VERGNAUD, 2009, p. 254). Ou seja, um casal consiste na associação de um elemento do primeiro conjunto, com um elemento do segundo:

		M			
		f	g	h	i
	a	(a, f)	(a, g)	(a, h)	(a, i)
R	b	(b, f)	(b, g)	(b, h)	(b, i)
	c	(c, f)	(c, g)	(c, h)	(c, i)

$$x\ casais = 3\ rapazes\ \cdot 4\ moças$$

Finalizando este capítulo, na perspectiva de Vergnaud, Brun (1996) pontua que os campos conceituais, as suas organizações num longo período de tempo e as suas formações por meio das situações, constituem estudos relevantes que relacionam os conteúdos matemáticos com a arquitetura cognitiva, além de apresentar noções aos professores de como representar estes conteúdos e de como agir de maneira a conseguir a formação dos conceitos em seus alunos.

Nesse sentido, Brun (1996, p. 26) recorda os passos apresentados por Vergnaud para o processo de conceitualização:

> – analisar e classificar a variedade das situações em cada campo conceptual.
> – descrever com precisão a variedade das condutas, dos procedimentos e dos raciocínios dos alunos face a cada situação.
> – analisar as competências matemáticas organizadas em esquemas e identificar as invariantes que constituem estes esquemas, relacionando-as com as invariantes das situações.
> – analisar a forma como a linguagem e outras atividades simbólicas tomam lugar nesses esquemas, como auxiliam os alunos, como são utilizadas pelos professores.

– seguir a transformação das invariantes implícitas (conhecimentos e teoremas em ato[18]) em objetos matemáticos bem identificados.

Ainda, acreditamos que o processo de ensino consiste, em primeira instância, em buscar entender as competências e concepções atuais dos estudantes diante de situações correspondentes a determinado campo conceitual para que, a partir delas, seja possível refletir sobre maneiras de abordar conceitos que lhes serão essenciais no futuro.

É nessa perspectiva que nos apoiamos na Teoria dos Campos Conceituais como uma das bases teóricas para a presente pesquisa, uma vez que pretendemos analisar conhecimentos atuais dos estudantes que podem apontar alguma relação com a álgebra, conhecimentos estes que podem contribuir para a apreensão de conceitos futuros neste campo de estudo.

Para tanto, faremos uso dos estudos de Vergnaud, em especial, nos seguintes aspectos:

→ com relação às situações, uma vez que entendemos que é por meio de problemas desafiadores, que em nossa pesquisa chamamos de tarefas não-rotineiras, que o conhecimento emerge. Afinal, diante de novas situações é que os estudantes se tornam capazes de utilizar, de maneira sucessiva, vários esquemas que já possuem (os quais são oriundos de outras situações que o sujeito julga serem similares à situação atual), coordenando-os de maneira a descobrir uma forma de buscar o resultado para a situação em questão;

→ com relação aos esquemas e aos invariantes operatórios, uma vez que é nos esquemas que podemos investigar os conhecimentos-em-ação (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação que genericamente chamamos de invariantes operatórios) do sujeito, os quais permitem que a sua ação seja operatória. Em nossa pesquisa foi por meio do esboço de alguns esquemas, os quais foram inferidos a partir das enunciações dos estudantes ao se envolverem com cada tarefa, que investigamos invariantes operatórios explicitados pelos estudantes;

→ com relação às representações, em especial, à linguagem natural, por meio da qual é possível que o estudante explicite à outrem aspectos de suas

[18] Os termos “conhecimentos e teoremas em ato” são aqui adotados no mesmo sentido que “conhecimentos-em-ação e teoremas-em-ação”.

representações mentais, uma vez que, em geral, os esquemas e os invariantes operatórios são representados mentalmente;

→ com relação aos campos aditivos e multiplicativos, os quais nos auxiliaram no esboço dos esquemas e na investigação dos invariantes operatórios;

→ com relação aos *conceitos*, em nossa pesquisa abordamos conceitos aritméticos (estruturas aditivas e multiplicativas) que podemos inferir como potencialmente algébricos.

Quanto a esses conceitos, bem como a esse caráter algébrico dos mesmos, trazemos esclarecimentos no capítulo subsequente.

CAPÍTULO 2
RELAÇÕES ENTRE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA: A TEORIA DE RADFORD

Neste capítulo fazemos uma abordagem sobre as relações existentes entre a aritmética e a álgebra enfatizando o caráter algébrico da aritmética por meio da generalização de propriedades dos números e das operações, bem como de procedimentos de cálculo. Essa abordagem é realizada na primeira seção desse capítulo.

Na segunda seção apresentamos elementos da teoria de Radford, enfatizando a objetivação e seus meios semióticos, bem como os níveis de generalidade, sendo estes últimos um dos objetivos que almejamos inferir em nossas análises, em concomitância aos invariantes operatórios manifestados pelos participantes desta pesquisa.

2.1 O CARÁTER ALGÉBRICO DA ARITMÉTICA: UMA BREVE DISCUSSÃO

O que tradicionalmente observamos no ensino de Matemática é que a aritmética antecede a álgebra. E, geralmente, é quando essa ruptura acontece que percebemos que surgem maiores dificuldades e aversões pela Matemática por parte de alguns estudantes.

Tendo em vista minimizar algumas consequências relativas às rupturas entre o ensino da aritmética e da álgebra, tais como as que acabamos de mencionar, alguns autores (BLANTON; KAPUT, 2005; KIERAN, 2004; MESTRE; OLIVEIRA, 2012; PIMENTEL; RADFORD, 2012; RIVERA, 2006; VALE, 2009, entre outros) defendem a possibilidade do pensamento algébrico ser fomentado mais cedo, já nos anos iniciais de escolaridade, adjacente ao ensino da aritmética, uma vez que este, como veremos, pode apresentar um caráter potencialmente algébrico.

Antes de nos inserirmos na abordagem potencialmente algébrica da aritmética, consideramos essencial destacar o que compreendemos por pensamento algébrico, o qual nos auxiliará a defender nossa posição à cerca de filiações entre aritmética e álgebra.

Segundo Kieran (2004, p. 149, tradução nossa), o pensamento algébrico nos anos iniciais abrange

> [...] o desenvolvimento de formas de pensar no âmbito das atividades para as quais a linguagem simbólica pode ser usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas para álgebra e com as quais podem se envolver sem usar qualquer linguagem simbólica, tais como analisar relações entre quantidades, observar a estrutura, estudar variações, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever.[19]

E para Blanton e Kaput (2005, p. 413, tradução nossa), o pensamento algébrico pode ser considerado como:

> [...] um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade.[20]

Compartilhando das definições de Kieran (2004) e de Blanton e Kaput (2005) para o pensamento algébrico, consideramos que a base para a emergência deste tipo de pensamento é a capacidade de generalização (PIMENTEL; VALE, 2009), e que esta, antes de ser representada por meio de uma linguagem simbólica, pode ser expressa por meio da linguagem natural e por outras diversas formas, as quais discutiremos mais adiante.

Mestre e Oliveira (2012), apoiando-se em Kieran (2007), enfatizam que nos anos iniciais do Ensino Fundamental há a necessidade de promover a generalização algébrica e que "uma das possíveis abordagens para o desenvolvimento do pensamento algébrico baseia-se no caráter potencialmente algébrico da aritmética, ou seja, na aritmética generalizada." (MESTRE; OLIVEIRA, 2012, p. 12).

Com relação ao caráter algébrico da aritmética, quando os estudantes encontram regularidades nas operações e sistemas numéricos, eles experimentam "a base para a exploração da generalização sobre os números e operações" (MESTRE; OLIVEIRA, 2012, p. 13). Sendo assim, conceitos relativos à aritmética

---

[19] Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting.

[20] […] a process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age appropriate ways.

podem ser considerados potencialmente algébricos por se apresentarem passíveis de serem generalizados. E, para que o processo de generalização ocorra na aritmética, Rivera (2006) sugere que, ao ensinar os sistemas numéricos, os estudantes sejam estimulados a perceberem as propriedades ou relações numéricas que existem em objetos particulares para que, progressivamente, percebam que estas são invariantes.

Além disso, Kieran (2004) recomenda ajustamentos no ensino de aritmética em geral, sendo necessário: i) desviar um pouco o foco do cálculo e da resposta numérica, dando mais atenção às relações; ii) focar-se nas operações, bem como nas suas inversas; iii) atentar-se, concomitantemente, com a representação e a resolução; iv) focar-se em números e letras, em detrimento de apenas em números; e, v) reforçar o significado do sinal de igual, destacando a noção de equivalência associada à este.

Com relação à aritmética generalizada, Blanton e Kaput (2005) apresentam como características: i) a exploração de propriedades e relações de números inteiros como, por exemplo, o resultado da subtração de um número por ele mesmo; ii) a exploração de propriedades das operações com números inteiros como, por exemplo, comutatividade e associatividade; iii) exploração do sinal de igualdade como expressão de uma relação entre quantidades; iv) tratamento algébrico do número, utilizando-os como variáveis; e, v) resolução de sentenças com números desconhecidos, envolvendo, por exemplo, conjuntos de equações ou equações individuais, porém, estas últimas envolvendo mais de uma incógnita ou a mesma incógnita repetida algumas vezes.

Nessa perspectiva, concordamos com o que defende Radford (2012, p. 02, tradução nossa) quando afirma que “[...] há algo inerentemente aritmético em álgebra e algo inerentemente algébrico na aritmética [...]”[21]. E, a partir do que foi exposto até então, entendemos que uma das coisas que há de inerente entre aritmética e álgebra é a generalização.

Contudo, nem toda maneira de expressar o geral a partir do particular pode representar uma generalização aritmética, nem tampouco, uma generalização algébrica. Visando compreender as diferenças entre generalizações, nos apoiamos

[21] [...] there is something inherently arithmetic in algebra and something inherently algebraic in arithmetic […].

em elementos da teoria de Radford (2006, 2010, 2011, 2012), na qual, a partir de agora, nos inseriremos.

2.2 Nossa Abordagem Teórica a Respeito de Generalização: a Teoria de Radford

Baseado nas primeiras pesquisas sobre a transição da aritmética para a álgebra (GRAY; TALL, 1994; KAPUT; SIMS-KNIGHT, 1983; KIERAN, 1981; FILLOY; ROJANO, 1989; SFARD, 1991; entre outros), em alguns trabalhos que caracterizam o pensamento algébrico (BOERO, 2001; CARRAHER; BRIZUELA; SCHILIEMANN, 2000; LINS, 2001; entre outros) e emergindo da perspectiva vygotskiana da Educação Matemática, Radford (2006) divulgou alguns resultados de sua pesquisa, na qual durante seis anos acompanhou a aprendizagem de álgebra de estudantes em níveis escolares equivalentes ao nosso Ensino Fundamental (anos finais) e Ensino Médio. Nesse trabalho, Radford (2006) teve por objetivo investigar o uso de signos e os processos de produção de sentido na álgebra quando estudantes de faixa etária entre 13 e 15 anos, dispostos em pequenos grupos, se envolviam com tarefas que abordavam generalização[22] de padrões.

Nesse trabalho percebemos que, em concordância com o que expusemos sobre a definição de pensamento algébrico (BLANTON; KAPUT, 2005; KIERAN, 2004), Radford (2006) defende que este tipo de pensamento consiste, em primeira instância, de uma maneira particular de refletir sobre objetos matemáticos. Ainda, para esse autor, o que caracteriza o pensamento algébrico são três elementos que estão diretamente relacionados: i) caráter indeterminado; ii) tratamento analítico; e, iii) uso de símbolos para designar objetos.

O Primeiro elemento, de acordo com o autor, corresponde ao envolvimento de objetos desconhecidos, tais como incógnitas e variáveis, no pensamento algébrico. Deste modo, pensar algebricamente envolve operar no desconhecido e, para isso, é preciso pensar analiticamente (segundo elemento), ou seja, é necessário considerar quantidades desconhecidas como se essas fossem números específicos (RADFORD, 2012). Quanto ao terceiro elemento, este corresponde ao fato dos objetos desconhecidos serem, por fim, representados por símbolos alfanuméricos.

---

[22] Para o autor, a generalização se baseia na sintetização de semelhanças entre coisas diferentes e, do mesmo modo, nas diferenças entre coisas semelhantes (RADFORD, 2010).

Ainda em concordância com Kieran (2004), Radford (2006) explicita que a álgebra não se reduz a simbolismo, ainda que este seja parte essencial da álgebra. Para justificar sua posição com relação ao simbolismo, Radford (2006, 2012) menciona contextos da história da Matemática que evidenciam a evolução de notações algébricas baseadas em discursos e outros meios semióticos, o que consequentemente explica sua atenção voltada à linguagem e outros recursos semióticos que antecederam as representações algébricas alfanuméricas apresentadas pelos estudantes durante o desenvolvimento de suas pesquisas.

No decorrer da história, a álgebra demandou tempo para ser refinada até chegar ao seu atual formalismo, sendo modificada de acordo com o momento histórico em que esteve inserida. Do mesmo modo, no ensino de Matemática, defendemos que os estudantes precisam de tempo e de situações oportunas para refinar suas ações, pois, “Tornar-se familiarizado com as práticas sedimentadas em formulações altamente sistematizadas, abstratas e compactas não é uma tarefa trivial para os nossos alunos.” (VELOSO, 2012, p. 38).

Em concordância com nosso posicionamento, Radford (2011, p. 308 e 309, tradução nossa) menciona que

> O pensamento algébrico não surge na ontogenia ao acaso, nem como uma consequência necessária da maturação cognitiva. Para fazer com que o pensamento algébrico apareça e seja acessível aos estudantes, algumas condições pedagógicas precisam ser criadas.[23]

Diante disso, percebemos a essencialidade do educador matemático considerar todo o processo de desenvolvimento do estudante até atingir a apropriação dos conceitos algébricos e suas representações por meio de simbolismo padrão, atribuindo maior relevância para os recursos semióticos que o estudante utiliza, em especial, à linguagem natural.

Considerando que o uso de letras não equivale a fazer álgebra, apoiando-se em Kieran (1989), Radford (2006) afirmou que pensar algebricamente é mais do que pensar no geral: é pensar sobre o geral de maneira que o torne distintamente algébrico tanto em sua forma de raciocínio, quanto em sua expressão, sendo capaz, inclusive, de fazer uso de simbolismo algébrico.

[23] Algebraic thinking does not appear in ontogeny by chance, nor does it appear as the necessary consequence of cognitive maturation. To make algebraic thinking appear, and to make it accessible to the students, some pedagogical conditions need to be created.

Tal como já mencionamos, em sua pesquisa Radford (2006) teve por objetivo investigar o uso de signos e os processos de produção de sentido na álgebra quando os estudantes, participantes da pesquisa, se envolviam com tarefas de padrões. Segundo esse autor, esse processo de produção de sentido na álgebra acontece mediante de *atividade multi-semiótica*[24] (linguagem natural, gestos, desenhos, etc), enquanto que o que está sendo percebido emerge progressivamente para o estudante. Este processo de percepção, que ocorre ao buscar atribuir sentido a determinado objeto, é que Radford (2006) denomina de *processo de objetivação*[25]. Durante esse processo de objetivação, as atividades multi-semióticas passam a ser denominadas de *meios semióticos de objetivação*[26].

Portanto, a objetivação corresponde a *tornar algo aparente*, ou seja, tornar algum aspecto do objeto aparente, fazendo uso de sinais e artefatos, tais como, símbolos matemáticos, gráficos, palavras, gestos, entre outros recursos semióticos (meios semióticos de objetivação).

A essencialidade desses meios semióticos deve-se ao fato de que "Um sistema semiótico nos oferece maneiras específicas para significar ou dizer certas coisas, enquanto outro sistema semiótico nos oferece outras formas de significação"[27] (RADFORD, 2006, p. 7, tradução nossa). Contudo, ainda que diferentes sistemas semióticos não sejam capazes de "dizer a mesma coisa", o que um deles expressa é pertinente à expressão do outro.

Com essa última afirmação baseada em Radford (2006), percebemos a concordância com o que expõe Duval (2012) e Vergnaud (2009) à uma das funções da utilização de diversificadas representações: uma representação não é capaz de representar toda a realidade e alguns aspectos que não são explícitos em uma representação podem se mostrar presentes em outra representação, o que nos mostra a essencialidade de no processo de conceitualização valorizar a abordagem de diversificados registros de representação.

Radford (2006) destaca o vínculo da objetivação com as dimensões sociais e culturais do conhecimento, uma vez que as interações ocorridas durante o processo de objetivação não são apenas entre objeto e estudante, mas, sobretudo, entre

[24] Versão nossa de "*Multi-semiotic activity*" (RADFORD, 2006, p. 6).
[25] Versão nossa de "process of *objectification*" (RADFORD, 2006, p. 6).
[26] Versão nossa de "*semiotic means of objectification*" (RADFORD, 2006, p. 6).
[27] A semiotic system provides us with specific ways to signify or to say certain things, while another semiotic system provides us with other ways of signification.

estudantes e entre estes e o professor (RADFORD, 2006). Por esse motivo, em sua pesquisa, Radford optou por separar os estudantes em pequenos grupos, pois, segundo o autor, é fundamental que os estudantes apreendam os objetos do conhecimento por outras perspectivas (RADFORD, 2006).

Por meio de sua pesquisa, ao buscar compreender os processos de produção de sentido dos estudantes ao se envolverem com tarefas de padrões, Radford (2006) inferiu que a objetivação do geral passa por vários níveis de generalidade [28], cada qual com sua complexidade, e, para que os níveis mais profundos sejam atingidos, é necessário que o sujeito continue seu processo de objetivação por meio de diversificados meios semióticos, que vão sendo contraídos à medida que níveis mais profundos vão sendo atingidos, uma vez que os significados vão sendo concentrados. A essa minimização de meios semióticos Radford (2006) chama de *contração semiótica*[29].

Todavia, ao distinguir diversas estratégias utilizadas pelos estudantes ao se envolverem em tarefas de padrões, Radford (2006) percebeu que muitas vezes essas estratégias não conduziam os estudantes à generalização e, quando conduziam, era possível identificar níveis diferentes de generalidade alcançados.

No quadro 2 apresentamos essas estratégias percebidas por Radford (2006) e, na sequência, explicamos cada uma delas.

Quadro 2 – Estratégias dos estudantes para lidar com atividades de padrões e a subdivisão das generalizações algébricas, de acordo com o seu nível de generalidade[30]

Indução ingênua	**Generalização**			
Adivinhação (Tentativa e erro)	Aritmética	Algébrica		
		Factual	Contextual	Simbólica

Fonte: Radford (2006, p. 15, tradução nossa).

[28] Em alguns momentos, o autor chama de "níveis de generalidade" e, em outros momentos, chama de "camadas de generalidade", porém, com o mesmo sentido. Em nossa pesquisa adotamos, apenas, "níveis de generalidade".
[29] Versão nossa de "*semiotic contraction*" (RADFORD, 2006, p. 12).
[30] Versão nossa de "Students' strategies for dealing with pattern activities and the subdivision of algebraic generalizations in accordance with their level of generality".

a) Indução ingênua

- Adivinhação (tentativa e erro): Radford (2006) chama essa estratégia de indução ingênua para diferenciá-la de outros tipos mais sofisticados de indução.

De acordo com esse autor, esta estratégia, ainda que possibilite a formação de uma regra em tarefas de padronização, não é considerada como generalização e, consequentemente, não conduz ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Isso porque a formação de regra é baseada em tentativa e erro e outras estratégias de adivinhação e, dessa forma, as regras formadas são apenas hipóteses, uma vez que sua conclusão não se baseia na percepção de características comuns em alguns termos e na generalização a outros que se seguem (RADFORD, 2006).

b) Generalização

Radford (2006) afirma que nem sempre a generalização é algébrica. Para esse autor, falar de generalização envolve o objeto de generalização e o objeto generalizado. Nesse sentido, o autor sugere:

> [...] que o processo que vai de uma à outra inclui dois componentes inter-relacionados. O primeiro é notar um traço comum em alguns determinados termos particulares. O segundo é de formar um conceito geral - um gênero - generalizando a semelhança notada a todos os termos da sequência. Para que uma generalização de padrões seja chamada de algébrica, eu sugeri um terceiro componente: a de que o gênero ou objeto generalizado cristaliza-se em um esquema, ou seja, em uma regra que prevê aquele com uma expressão de qualquer termo da sequência [...][31] (RADFORD, 2006, p. 15, tradução nossa).

Tendo definido generalização por meio dessas três componentes, Radford (2006) defende que as generalizações ainda são classificadas por níveis, os quais podem ser caracterizados pelos meios semióticos de objetivação que os estudantes utilizam quando envolvidos em processos de generalização.

Nesse sentido, Radford (2006) divide a generalização como aritmética e algébrica, sendo esta última subdividida em factual, contextual e simbólica e, sendo essas divisões e subdivisões os níveis de generalidade a que o autor se refere. A seguir, esclarecemos cada um desses níveis:

[31] [...] that the process that goes from one to the other includes two interrelated components. The first one is noticing a commonality in some given particular terms. The second one is to form a general concept –a *genus*− by generalizing the noticed commonality to all the terms of the sequence. In order for a generalization of patterns to be called algebraic, I have suggested a third component: that the genus or generalized object crystallize itself into a *schema*, i.e. a rule providing one with an expression of whatever term of the sequence […].

- Aritmética: de acordo com as três componentes que Radford (2006) utiliza para definir generalização, a generalização aritmética não é enquadrada como algébrica por não cumprir com o terceiro componente: “[...] a de que o gênero ou objeto generalizado cristaliza-se em um esquema, ou seja, uma regra que prevê aquele com uma expressão de qualquer termo da sequência [...].” (RADFORD, 2006, p. 15).

Em tarefas envolvendo padrões, a generalização aritmética ocorre quando o estudante percebe um traço comum em termos, reconhece que esse traço comum aplica-se aos termos subsequentes, mas não é capaz de usar essa informação para fornecer uma expressão que permita descobrir qualquer termo da sequência (RADFORD, 2006).

- Algébrica: a generalização é considerada algébrica quando cumpre com os três componentes sugeridos por Radford (2006) que já apresentamos. Assim sendo, em uma tarefa de padrões, além de perceber regularidades entre os termos da sequência, a generalização algébrica envolve o caráter indeterminado e analítico atribuído à álgebra.

Radford (2006) defende que a generalização algébrica é composta por três níveis de generalidade:

i) *Factual*: de acordo com Radford (2006), a generalização factual ocorre em uma camada primária de generalidade e, por isso, é a base da generalização algébrica, pois, por meio de sucessivas contrações semióticas, os estudantes progressivamente transformam essa generalização em outras mais elevadas (contextual e simbólica, como veremos mais adiante).

Na generalização factual a indeterminação “[...] não atinge o nível de enunciação: *é expressa em ações concretas*”[32] (RADFORD, 2006, p. 9, tradução nossa). Em outras palavras, na generalização factual a indeterminação não vai além dos números específicos: a generalidade ocorre apenas sobre ações realizadas sobre números, palavras, gestos e percepções (RADFORD, 2006). Assim, em síntese, nesse nível de generalização, a percepção de regularidades se baseia na coordenação rítmica de diversos recursos semióticos, tais como gestos, desenhos, e

[32] [...] does not reach the level of enunciation: it is *expressed in concrete actions.*

palavras e, portanto, “[...] a indeterminação permanece implícita e os recursos semióticos citados acima constituem a ‘substância’ das *fórmulas-ações* dos estudantes.” (VELOSO, 2012, p. 52).

Em tarefas de padrões a generalização factual se diferencia da generalização aritmética por, nesse nível, o estudante já ser capaz de apreender a regularidade entre termos consecutivos, relacionando-os à posição do termo. Além disso, a diferença entre generalidade aritmética e algébrica factual reside no fato de que o importante não é “[...] o resultado numérico em si, mas o caminho que os alunos iriam escolher/construir para elaborar uma regra ou método de cálculo [...].” (VELOSO, 2012, p. 50).

ii) *Contextual*: a generalização contextual difere da generalização factual por “nomear” a indeterminação de maneira que não se refira a um certo termo, mas a qualquer termo que quiser considerar, estabelecendo, assim, uma única ação (RADFORD, 2006).

Nesse nível de generalidade Radford (2006) destaca que ocorre a *contração semiótica*, ou seja, alguns dos diversos recursos semióticos que caracterizavam a generalidade factual são excluídos e compensados por uma concentração de significados, tornando, dessa forma, a indeterminação explícita. Em outras palavras, no nível de generalização contextual “[...] os estudantes têm que compensar a redução de recursos semióticos com uma concentração de significados no menor número de signos (palavras) através do qual a generalização é agora expressada”[33] (RADFORD, 2006, p. 12, tradução nossa).

A generalização contextual pode ser identificada quando o estudante consegue expressar, em linguagem natural (escrita ou oral), uma fórmula simbólica, sem fazer uso de simbolismo algébrico padrão. Afinal, expressar uma fórmula por meio de palavras é uma tarefa mais simples se comparada a expressão da mesma fórmula por meio de simbolismo.

iii) *Simbólica*: A generalidade simbólica é análoga à generalidade contextual. Conforme descreve Radford (2006), em ambos os níveis de generalidade o indeterminado é explícito. A diferença entre ambos os níveis consiste na nomeação

[33] [...] the students have to compensate for the reduction of semiotic resources with a concentration of meanings in the fewer number of signs (words) through which the generalization is now expressed.

da generalidade: enquanto que na generalidade contextual, como vimos, os objetos gerais são nomeados por meio de descrições, a generalidade simbólica é expressa por meio de um sistema semiótico alfanumérico (simbolismo algébrico padrão).

Apesar de nos apoiarmos em trabalhos de Radford cujo foco foi o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de tarefas envolvendo generalização de padrões, quando Radford (2006, 2012) afirma que o pensamento algébrico é caracterizado pela forma analítica em que se lida com números indeterminados, acreditamos que elementos de sua teoria, tais como processos de objetivação, meios semióticos de objetivação e níveis de generalidade, podem ser, do mesmo modo, considerados em outras tarefas, como por exemplo, em tarefas que envolvem equações.

Assim sendo, na busca por atendermos nosso objetivo com a pesquisa (*investigar e analisar o que estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental manifestam, em relação a invariantes operatórios e níveis de generalidade, ao serem submetidos a tarefas não-rotineiras*), nos apoiamos em nossos estudos sobre a teoria de Radford no que diz respeito:

→ aos processos de objetivação e meios semióticos de objetivação para investigar e analisar como os estudantes se envolvem com cada tarefa não-rotineira, buscando inferir sobre as relações que eles estabelecem com as informações fornecidas por essas tarefas, bem como inferir sobre a maneira pela qual os estudantes significam quantidades indeterminadas;

→ aos níveis de generalidade. Por meio dos esboços dos possíveis esquemas de resolução dos estudantes durante envolvimento com cada tarefa não-rotineira, os quais, de certa forma, já nos mostram indícios dos processos de objetivação e meios semióticos de objetivação dos estudantes durante envolvimento com as referidas tarefas, visamos analisar os níveis de generalidade atingidos por esses estudantes. Além disso, considerando os invariantes operatórios que pudemos identificar nas manifestações dos estudantes, bem como nossas inferências com relação ao caráter algébrico da aritmética ao analisarmos o tratamento de cada tarefa não-rotineira, do mesmo modo visamos analisar os níveis de generalidade atingidos por esses estudantes, no intuito de reforçar nossas inferências com relação às inerências entre aritmética e álgebra.

De maneira geral, considerando a fundamentação teórica que apresentamos nos capítulos 1 e 2, nossa conjectura é que a base para o desenvolvimento do pensamento algébrico é a generalização, porém, não nos referimos apenas à generalização algébrica, mas em especial, nos anos iniciais, à generalização aritmética, no sentido de que a aritmética possui um caráter potencialmente algébrico no que se refere às invariâncias das estruturas dos números e operações, relações, procedimentos de cálculo, etc., que podem ser generalizados pelos estudantes para várias situações dentro de um campo conceitual (nesta pesquisa envolvemos os campos aditivo e multiplicativo) e, esses caracteres invariantes podem ser exprimidos por intermédio de diversos meios semióticos que, em nossa pesquisa, nos limitaremos à linguagem natural expressa oralmente e às representações em registros escritos.

Tendo apresentado os referenciais teóricos, bem como algumas das implicações dessas teorias nesta pesquisa, apresentamos no capítulo a seguir o contexto em que esta foi desenvolvida e as opções metodológicas.

CAPÍTULO 3
OS PROCEDIMENTOS ADOTADOS E A TRAJETÓRIA DA PESQUISA

Tendo em vista a compreensão do contexto em que a pesquisa foi realizada, destacamos neste capítulo os aspectos que julgamos como principais para essa finalidade.

Na primeira seção abordamos a caracterização do projeto e do programa ao qual nossa pesquisa está vinculada, a descrição dos estudantes participantes desta pesquisa e, por fim, a apresentação dos procedimentos adotados para obter as informações necessárias para realização de nossa investigação.

Na segunda seção destacamos os aspectos que caracterizam a presente pesquisa como de natureza qualitativa e apresentamos nossa escolha metodológica para organização, análise e interpretação das informações coletadas: a *Análise Textual Discursiva* (MORAES; GALIAZZI, 2011). Além disso, nesta seção, relatamos o movimento investigativo que realizamos e trazemos esclarecimentos à cerca dos códigos que constituímos durante o processo de análise.

3.1 O CONTEXTO DA INVESTIGAÇÃO

Nas subseções a seguir descrevemos todo o contexto da investigação que consideramos relevantes para situar o leitor, bem como esclarecer as implicações deste contexto em nossa pesquisa. Nesse sentido, apresentamos, respectivamente, o projeto ao qual está vinculada essa investigação, os participantes da pesquisa e os procedimentos para a coleta das informações que foram submetidas à análise.

3.1.1 O Projeto “Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática”

Esta investigação está vinculada ao “Programa Observatório da Educação”, por meio do projeto “Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática”, do qual a pesquisadora é integrante.

O "Programa Observatório da Educação"[34] é o resultado da parceria entre a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), e é um programa de fomento que visa o desenvolvimento de estudos e pesquisas na área de educação.

Com relação ao projeto "Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática", este tem como objetivo principal estimular o crescimento da produção acadêmica atinente à formação de professores que ensinam Matemática, bem como à formação de recursos humanos em Educação Matemática, desde a Educação Básica até a pós-graduação (em níveis de mestrado e doutorado), que colaborem para a elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) (CYRINO, 2010).

De acordo com o portal do Ministério da Educação (MEC)[35], o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) é um indicador criado pelo governo federal para "medir" a qualidade do ensino nas escolas públicas. Este indicador é calculado a partir dos dados sobre aprovação escolar, que são obtidos no Censo Escolar, ou seja, por meio das informações enviadas pelas escolas e redes, e a partir das médias de desempenho nas avaliações do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), que no caso das escolas municipais, as quais abrangem o ensino dos anos iniciais do Ensino Fundamental, esta avaliação é a Prova Brasil[36]. Além dos resultados do IDEB servirem como meio de diagnosticar a qualidade do ensino brasileiro, as políticas de distribuição de recursos financeiros, tecnológicos e pedagógicos do Ministério da Educação (MEC) baseiam-se nesses resultados.

Contudo, destacamos que não é nossa pretensão promover discussões a respeito do IDEB, mas apenas apresentar o contexto em que está inserido o projeto "Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática". Nesse sentido, consideramos relevante explicar (ainda que superficialmente) o que é o IDEB e qual a finalidade de seus resultados, ao ponderarmos que um dos motivos que levou à

---

[34] Programa instituído pelo Decreto Presidencial nº 5.803, de 08 de junho de 2006.

[35] http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=180&Itemid=336&msg=1.

[36] A Prova Brasil é uma avaliação das escolas públicas, que foi criada em 2005 com a finalidade de avaliar as habilidades de estudantes que cursam os últimos anos escolares do Ensino Fundamental I e II (5º e 9º anos, respectivamente) em Língua Portuguesa (cujo foco é a leitura) e em Matemática (cujo foco é a resolução de problemas).

elaboração do referido projeto, bem como à escolha das escolas participantes, foi a nota obtida no IDEB.

No projeto estão envolvidas duas escolas públicas de Educação Básica: uma localizada no município de Paranavaí – PR, e a outra no município de Apucarana – PR, onde se desenvolveu nossa pesquisa. A escola de Apucarana – PR, nosso cenário de investigação, é uma escola municipal que oferta o Ensino Fundamental I em período integral: os estudantes permanecem na instituição no período matutino e vespertino.

Com o objetivo de investigar como contextos de formação colaboram para a aprendizagem de professores, participam do projeto professores da Educação Básica, estudantes de graduação (licenciatura em Matemática) da Universidade Estadual de Londrina (UEL) e, ainda, estudantes de pós-graduação (mestrado) e uma professora doutora que fazem parte do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da UEL. Dessa forma, os integrantes do projeto caracterizam uma *Comunidade de Prática de Professores que ensinam Matemática* (CYRINO, 2010).

O projeto foi elaborado para um período de quatro anos, tendo início no ano de 2011. Entretanto, a pesquisadora começou a participar do projeto em março de 2013, ano em que ingressou no curso de pós-graduação (mestrado) da Universidade Estadual de Londrina (UEL).

Os encontros aconteceram semanalmente, sendo realizados às terças-feiras, com duração de três horas. Nesses encontros, os quais eram conduzidos pela professora doutora e os estudantes de pós-graduação (mestrado), realizávamos discussões, situações-problemas, aplicação e adaptação de jogos e brincadeiras, entre outros, com as professoras da Educação Básica, sendo essas atividades desenvolvidas com base na Prova Brasil e visando enfrentar as dificuldades referentes ao ensino da Matemática naquele contexto. Nesse momento, os estudantes da graduação em Licenciatura em Matemática assumiam as salas de aula das professoras envolvidas no projeto, trabalhando com atividades e tarefas matemáticas apropriadas para cada idade e ano escolar.

Além de o projeto visar à elevação do IDEB, sua elaboração foi ainda orientada por outros objetivos mais específicos:

- Fortalecer o diálogo entre pesquisadores da área de Educação Matemática do PECEM, estudantes de mestrado e de doutorado do PECEM, estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UEL e professores que ensinam Matemática de Escolas da Rede Pública de Ensino do Paraná, por meio da formação de grupos de trabalho que desenvolvam atividades acadêmicas voltadas para o diálogo qualificado entre esses dois níveis de escolaridade.
- Investigar aspectos relativos à formação continuada desencadeados pelo diálogo entre os participantes para adoção de uma agenda de trabalho colaborativo e constituição de uma Comunidade de Prática de Professores que ensinam Matemática formada por pesquisadores, futuros professores de Matemática e professores de Matemática que atuam na Educação Básica.
- Investigar contextos em que os participantes desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, e comunicar suas idéias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem e interpretam problemas em uma variedade de situações.
- Propiciar um campo de investigação e formação profissional para os estudantes do PECEM e do curso de Licenciatura em Matemática, baseado na articulação entre teoria, prática docente e investigação, de modo a gerar uma reflexão sobre conteúdos matemáticos e, do modo como estes conteúdos se transformam em ensino.
- Fomentar, disseminar e desenvolver metodologias de prática de ensino significativas, para enfrentamento dos problemas na área de Matemática. (CYRINO, 2010, p. 05)

Com relação aos três primeiros objetivos listados, percebemos que o mesmo se cumpre por envolverem-se nesse projeto estudantes de graduação e mestrado, uma professora doutora e professoras da escola municipal de Apucarana que, ao se encontrarem semanalmente, desenvolvem trabalhos tendo em vista aprimorar a formação profissional dos professores que ensinam Matemática na referida escola.

Ainda, diante de alguns desses objetivos, é possível elucidarmos o quanto nossa pesquisa contribui para cumpri-los: i) com relação ao terceiro objetivo listado, o estendemos aos estudantes, uma vez que as tarefas aplicadas aos participantes desta pesquisa abrangeram uma variedade de situações envolvendo o pensamento aritmético e/ou algébrico, tais como, sequências e regularidades, relações entre quantidades desconhecidas e sentido de símbolo, o que exigiram dos participantes analisarem, interpretarem e resolverem essas situações. Além disso, a maneira como as tarefas foram desenvolvidas (em díades[37]) possibilitou que os participantes explicassem seus raciocínios e comunicassem suas ideias; ii) com relação ao quarto objetivo listado, o contato direto com o campo de investigação propiciou à pesquisadora momentos de estudos e reflexões no que compete ao ensino e a aprendizagem de Matemática, ao articular as teorias às quais nos apoiamos nessa investigação com a prática docente; e iii) com relação ao quinto objetivo listado, para

[37] Grupo de dois estudantes.

o enfrentamento de alguns problemas na área de Matemática no contexto em que foi realizada nossa pesquisa, mais especificamente com relação ao desenvolvimento de procedimentos de cálculo e do pensamento algébrico, propomos, nas considerações finais, algumas ideias baseadas nos resultados de nossa investigação como subsídios a serem agregados no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática objetivando, na medida do possível, potencializá-los.

3.1.2 Os Participantes da Pesquisa

Para realizarmos nossa investigação, escolhemos uma turma de 5º ano na qual havia, no ano de 2013, trinta e sete estudantes. Nossa justificativa para escolha dessa turma é que julgamos que estes estudantes apresentam habilidades de leitura e escrita que estudantes de outros anos escolares anteriores não apresentam. Além disso, como pretendíamos aplicar tarefas desafiadoras (que chamamos de não-rotineiras), inclusive tarefas do tipo que, em geral, são trabalhadas apenas com estudantes a partir do 7º ou 8º ano, acreditamos que, ainda que os participantes desta pesquisa não tivessem contato com uma linguagem simbólica algébrica, estes tiveram contato com maior quantidade de conceitos matemáticos se comparados aos estudantes dos anos escolares anteriores.

Nosso primeiro contato com a turma a ser investigada ocorreu no final do segundo semestre de 2013, quando já havíamos determinado as tarefas a serem aplicadas, bem como a metodologia de coleta das informações que pretendíamos adotar.

Em novembro de 2013 realizamos a aplicação de uma tarefa a seis estudantes do 5º ano, que desenvolveram essa tarefa em díades[38] e com a presença de um estudante de pós-graduação (inclusive a pesquisadora) em cada díade, cada qual tendo a disposição um gravador de voz e um diário de campo[39]. Estes estudantes foram selecionados pela professora da turma, a qual nos informou que selecionou aqueles que não apresentavam dificuldades para se expressarem oralmente (timidez) e que, segundo ela, apresentavam bom desempenho em Matemática. Essa tarefa que foi aplicada nos serviu apenas para averiguarmos se a

---

[38] Trazemos maiores esclarecimentos na próxima subseção (3.1.3).
[39] Trazemos maiores esclarecimentos sobre estes meios de coleta de informações na próxima subseção (3.1.3).

mesma era muito complexa para esse nível escolar e se a metodologia de coleta de informações seria profícua para atender aos nossos objetivos de pesquisa, portanto, não a utilizamos em nossas análises nesta dissertação.

Analisado o grau de dificuldade da tarefa proposta aos estudantes, bem como, a conformidade da metodologia de coleta de informações diante de nossos objetivos, optamos por continuar nossa investigação com seis estudantes do 5º ano, sendo cinco deles os mesmos que participaram da aplicação-teste, e um deles substituído por outro porque havia faltado à escola naquele dia. Ressaltamos, nesse momento, que ao nos referirmos a esses estudantes no processo de análise utilizamos os códigos E1, E2,..., E6, correspondendo, respectivamente, ao estudante 1, estudante 2, e assim sucessivamente, visando resguardar a identidade destes estudantes.

Ressaltamos, ainda, que tarefas parecidas foram aplicadas posteriormente à turma toda. Contudo, devido a grande quantidade de estudantes na turma, era inviável investigarmos a linguagem natural expressa oralmente e, dessa forma, nos limitamos nessa aplicação à apenas registros escritos.

Assim, decidimos por não analisarmos as tarefas aplicadas à turma toda, e os motivos que nos levaram a optar pela aplicação com apenas seis estudantes são, em suma: i) porque era preciso delimitar nossa pesquisa devido ao tempo que tínhamos disponível para a realização desta e, portanto, diante de tanto material para análise, nos vimos forçados a realizarmos escolhas; ii) porque diante das informações coletadas nas gravações (em linguagem natural expressa oralmente) percebemos a quantidade de informações relevantes para nossa pesquisa que não eram expressas nos registros escritos; e, iii) porque percebemos que as informações obtidas com a aplicação a apenas seis estudantes já seriam suficientes para atendermos nossos objetivos com a pesquisa.

Uma vez descrito o cenário de investigação e os participantes da pesquisa, na próxima subseção explicitamos os procedimentos e metodologia para obtenção das informações.

3.1.3 A Coleta das Informações

Tendo em vista nossa questão de pesquisa e nossos objetivos, fazia-se necessário encontrarmos uma metodologia de coleta de informações que nos permitisse explorar a matemática dos estudantes. Nessa perspectiva, optamos por coletar as informações necessárias para nossa investigação à luz da *Metodologia dos Experimentos de Ensino*, segundo Steffe e Thompson (2000), a qual tem como foco principal o raciocínio dos estudantes.

Esses mesmos autores descrevem um experimento de ensino como "uma ferramenta exploratória, derivada da entrevista clínica de Piaget e voltada para a exploração da matemática dos estudantes"[40] (STEFFE; THOMPSON, 2000, p. 273 apud MENK, 2005, p. 34).

A metodologia dos experimentos de ensino não é padronizada e, portanto, o pesquisador é responsável por criar tarefas e/ou atividades de maneira que atendam aos seus objetivos. Ainda, de acordo com Menk (2005), um experimento de ensino é constituído, basicamente, por uma sequência de episódios de ensino, que no caso de nossa investigação, realizamos um episódio de ensino o qual foi composto por uma tarefa.

Destacamos ainda que esta tarefa que constituiu o episódio de ensino foi diferente daquelas que os estudantes comumente lidam na rotina escolar e, por isso, a denominamos de tarefa *não-rotineira*[41].

O termo *tarefa* que adotamos é no mesmo sentido de Vergnaud (1990, 1996): a consideramos como situações diversas, cada qual com seu nível de complexidade, que tratam de um mesmo campo conceitual que, no caso de nossa investigação, envolvemos os campos aditivos e multiplicativos, focando no caráter algébrico destes por meio da generalização.

Com relação à escolha de tarefas não-rotineiras, partimos do pressuposto de que tarefas desafiadoras, diferentes das habituais,

> [...] motiva os alunos a encontrar a solução, possibilita maior uso dos recursos de comunicação, estimula a interação entre os alunos, permite o desenvolvimento de diferentes estratégias, proporciona o desencadeamento de idéias, o desenvolvimento e a formação dos conceitos matemáticos (COMÉRIO, 2007, p. 100).

Além disso, para Vergnaud (1990, 1996), é diante de situações desafiadoras que o estudante mobiliza sucessivamente, e até simultaneamente, vários esquemas,

---

[40] Tradução de Menk (2005) de "[…] an exploratory tool, derived from Piaget's clinical interview and aimed at exploring student's mathematics."

[41] Consideramos questões não-rotineiras as questões que "muito pouco ou quase nunca aparecem na sala de aula ou no livro didático." (BURIASCO, 1999, p. 95).

os quais podem ser combinados ou modificados, caracterizando, desse modo, um momento de descobertas.

De acordo com Steffe e Thompson (2000) para cada episódio faz-se necessário a presença de um agente de ensino, uma testemunha e, pelo menos, um método de registro. Na nossa investigação, além da pesquisadora, houve a colaboração de dois estudantes de pós-graduação (mestrado), que além de cumprirem a função de testemunhas, cumpriram a função de agentes de ensino: os seis estudantes foram dispostos em díades (formando, assim, três díades) e cada díade contou com a presença de um estudante de pós-graduação (inclusive a pesquisadora), os quais se responsabilizaram pelos métodos de registros adotados e pelas intervenções necessárias.

Destacamos que nos referimos às testemunhas, durante as análises, como T1, T2 e T3 (Testemunhas 1, 2 e 3, respectivamente). Com relação às díades, durante as análises as denominamos de D1, D2 e D3 (Díade 1, 2 e 3, respectivamente). Assim, T1 foi testemunha da díade D1, T2 foi testemunha da díade D2 e, T3, da díade D3.

Vale ressaltar que em nenhum momento as tarefas foram explicadas para os estudantes. As intervenções eram realizadas apenas quando os estudantes apresentavam respostas para as tarefas sem manifestar como as obtiveram ou quando conversavam muito baixo entre si, sendo, nesses momentos, questionados pela pesquisadora ou testemunhas a explicitarem como conseguiram seus resultados. Essas intervenções contribuem para que o pesquisador participe de maneira positiva e efetiva no processo de pesquisa, uma vez que ajuda o estudante a “se expressar e desta forma, mostrar seus pensamentos ao entrevistador” (VILLARREAL, 1999, p. 52).

Justificamos nossa escolha por distribuir os estudantes em díades partindo de pressupostos dos referenciais teóricos em que nos apoiamos: para Vergnaud (1996) a interação social contribui para a formação de esquemas, por meio dos quais investigamos invariantes operatórios. Além disso, esse autor destaca a linguagem natural dentre as demais formas de representação, pois atribui a ela a função não só de representar, mas de comunicar e auxiliar o pensamento (VERGNAUD, 2009); e, ainda, para Radford (2006), desenvolver um trabalho com pequenos grupos de estudantes contribui para que estes apreendam os objetos do conhecimento por outras perspectivas.

Quanto aos métodos de registro, como a intenção, em primeira instância, era evidenciar as compreensões dos estudantes diante das tarefas propostas, bem como compreender os caminhos percorridos por eles na busca por respostas para as tarefas, percebemos por meio da aplicação teste que apenas os registros escritos não eram suficientes, visto que muitos não sabiam como escrever o que pensavam e falavam. Dessa forma, nas aplicações, além de considerarmos os registros escritos, optamos por disponibilizar para cada díade um gravador de voz para que fosse possível compreendê-los por meio da comunicação entre eles.

Outro método de registro adotado foi o diário de campo que, assim como o gravador de voz, cada testemunha tinha um disponível para cada díade. Por intermédio do diário de campo foi possível registrarmos outras informações relevantes para a nossa pesquisa, além daquelas coletadas por meio dos registros escritos e gravação de voz. Para Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 118-119), o diário de campo é um instrumento rico na coleta de informações, uma vez que nele “[...] o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos.”

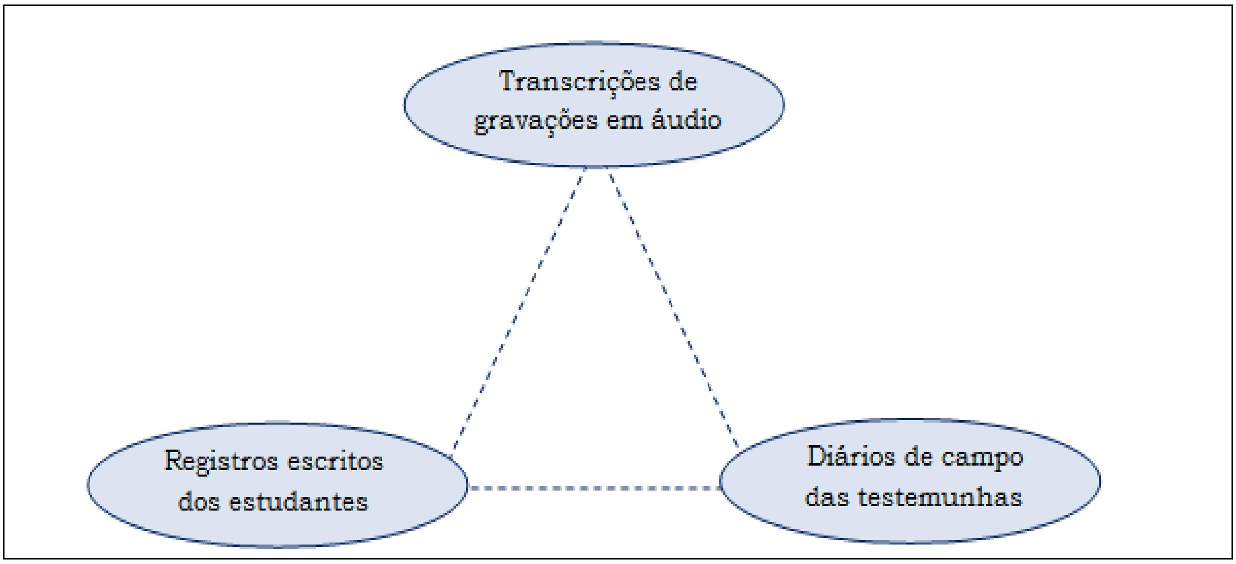
A investigação realizada com as díades formadas a partir dos seis estudantes selecionados ocorreu no dia 12 de novembro de 2013, no laboratório de informática da escola, pois esse era um local silencioso e que possuía estrutura e espaço físico suficientes para realizar a nossa pesquisa de maneira a não atrapalhar, sobretudo, as gravações.

As tarefas que constituíram nosso episódio de ensino, num total de sete tarefas, foram sendo aplicadas uma a uma, cuidando para que a próxima tarefa só tivesse início assim que todas as díades tivessem encerrado a tarefa anterior. Como as tarefas demandaram curto período de tempo para suas realizações, e os estudantes se demonstraram interessados e envolvidos com as mesmas, optamos por aplicar todas as tarefas no mesmo dia (por esse motivo consideramos essas tarefas como constituintes de um mesmo episódio de ensino). Após a realização das três primeiras tarefas, liberamos os estudantes para um intervalo de aproximadamente dez minutos e, em seguida, retornamos à investigação.

No momento em que os estudantes estavam envolvidos com a sexta tarefa, fomos informados que a sala de informática seria utilizada por uma professora com sua turma e, portanto, precisamos nos locomover para a sala de aula onde essa professora estava inicialmente. Apesar disso, após nos acomodarmos, os estudantes retomaram normalmente às suas tarefas.

Para o processo de análise e interpretação, todas as gravações em áudio foram transcritas, sendo estas transcrições consideradas no processo de análise em conjunto com os registros escritos de cada estudante e os registros em diário de campo de cada testemunha. Dessa forma, consideramos que as informações coletadas se apresentam enriquecidas, uma vez que não fizemos uso de apenas um método de coleta, mas fizemos a *triangulação* destes.

Figura 5 – Triangulação dos instrumentos de coleta de informações



Fonte: Da autora.

De acordo com Yin (2005), a triangulação é um fundamento lógico para utilizar várias fontes de evidências ao permitir o cruzamento de informações obtidas por meio de diferentes instrumentos de coleta de informações. No caso da nossa pesquisa, como já relatamos, esses instrumentos de coleta foram os registros escritos dos estudantes, as transcrições de gravações em áudio e os diários de campo, conforme apresentamos na figura 5.

Como podemos observar nessa figura 5, as transcrições de gravações em áudio encontram-se no ápice do triângulo, e o motivo dessa localização é porque o consideramos como o principal meio de informação para nossa pesquisa, uma vez que foi na linguagem natural, em especial, que nos apoiamos em nossas análises, porém, sempre adjacente com os demais instrumentos que estão representados nos demais vértices do triângulo: estes contribuíram para enriquecer as informações obtidas por meio das gravações.

De acordo com Yin (2005), cada instrumento apresenta particularidades, as quais se tornam a base para o descobrimento e a compreensão do fenômeno sendo investigado, tornando as interpretações realizadas mais confiáveis.

Em concordância com o exposto, Farmer *et al.* (2006), citado por Ollaik e Ziller (2012, p. 234), defendem que a “[...] triangulação é um enfoque metodológico que contribui para a validade dos resultados de uma pesquisa quando são utilizados múltiplos métodos, teorias, fontes e pesquisadores.”

No que diz respeito ao processo de validação da pesquisa, evidencia-se que buscamos realizar a *triangulação teórica*, ou seja, utilizamos mais de uma teoria para analisarmos e interpretarmos um mesmo conjunto de informações de um estudo (DENZIN, 1989 apud DUARTE, 2009).

Com relação à triangulação teórica, as teorias utilizadas foram: Campos Conceituais, de Vergnaud; Níveis de Generalidade, de Radford; e, teorias sobre o caráter algébrico da aritmética, em especial aritmética generalizada, de Blanton e Kaput (2005). Além disso, incluímos à essas teorias as nossas inferências.

3.2 A Escolha Metodológica para Análise das Informações

Perante a problemática de nossa pesquisa, bem como dos objetivos a ela traçados, optamos por uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo, em conformidade com os pressupostos de Bogdan e Biklen (1994). Assim sendo, justificamos nossa pesquisa como de natureza qualitativa pelos seguintes aspectos:

1) a fonte de informações são as anotações em diários de campo e os registros orais e escritos dos estudantes, os quais foram obtidos no ambiente natural, ou seja, no ambiente escolar, e a investigadora, ainda que com o auxílio de testemunhas, foi o instrumento principal, uma vez que foi a responsável por orientar todo o processo;

2) buscamos descrever os fatos o mais fielmente possível e, para isso, fizemos uso de três instrumentos de registro (registros escritos, gravações de voz e diários de campo), tendo em vista atribuir maior credibilidade à pesquisa por meio da triangulação entre estes instrumentos;

3) com a pretensão inicial de investigarmos a matemática dos estudantes diante das situações-problemas (tarefas) a eles propostas, buscamos focar nossa atenção a todo o processo deles na obtenção dos resultados, independente da resposta final estar correta ou não;

4) ao coletarmos as informações nossa intenção não era confirmar ou infirmar hipóteses previamente estabelecidas, mas fazer inferências de maneira indutiva por meio da impregnação com as informações coletadas, possibilitando a emergência de novas compreensões dos fenômenos sendo investigados (MORAES, 2003);

5) as tarefas propostas aos estudantes não correspondem a tarefas rotineiras, sendo assim, buscamos compreender as manifestações orais e escritas desses estudantes ao se envolverem com essas tarefas aparentemente desafiadoras para eles, buscando, sempre que possível, se esforçar para olhar para as tarefas com o olhar dos estudantes. Nesse sentido, afirmamos que nos interessamos pelos significados atribuídos pelos estudantes, uma vez que compreendemos *significado* como "o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se *poderia* dizer, e, sim, o *que efetivamente se diz* no interior de uma atividade. Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto." (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 145-146).

Como modalidade da pesquisa qualitativa, optamos por seguir procedimentos à luz da *Análise Textual Discursiva* (MORAES, 2003; MORAES; GALIAZZI, 2011) para organizarmos, analisarmos e interpretarmos as informações obtidas. Essa modalidade é apresentada na sequência.

3.2.1 A Análise Textual Discursiva

A análise textual discursiva é uma modalidade da pesquisa qualitativa que

> [...] pode ser compreendida como um processo auto-organizado de construção de compreensão em que novos entendimentos emergem de uma sequência recursiva de três componentes: desconstrução dos textos do *corpus*, a *unitarização*; estabelecimento de relações entre os elementos unitários, a categorização; o captar do novo emergente em que a nova compreensão é comunicada e validada (MORAES, 2003, p. 192).

Esta modalidade de pesquisa, segundo Moraes (2003) e Moraes e Galiazzi (2011), constitui-se em uma modalidade de análise cujos encaminhamentos transitam entre a análise de conteúdo e a análise de discurso. Dessa forma, essas três metodologias de análise encontram-se em um mesmo domínio, a da análise textual, sendo a análise textual discursiva diferente das análises de conteúdo e de discurso por questões de “[...] profundidade e complexidade dos fenômenos.” (MORAES; GALIAZZI, 2011, p. 160).

Com relação à profundidade e complexidade dos fenômenos em estudo, por meio da análise textual discursiva visa-se aprofundar a compreensão e produzir novos entendimentos a partir destes fenômenos. Em suma, com essa modalidade de pesquisa a pretensão não é testar hipóteses no intuito de refutá-las ou confirmá-las ao término da investigação, mas atingir uma compreensão mais aprofundada (MORAES, 2003).

Quanto aos materiais que podem ser submetidos a esse tipo de análise, Moraes (2003) e Moraes e Galiazzi (2011) afirmam que podem ser tanto textos já existentes, quanto materiais produzidos a partir de entrevistas, observações, anotações diversas, entre outros. Em nosso presente estudo, os materiais submetidos a procedimentos analíticos à luz da análise textual discursiva foram produzidos a partir de transcrição de gravações em áudio, de registros escritos de estudantes e de registros da pesquisadora e das testemunhas em diário de campo. Estes materiais a que nos referimos constituem o nosso *corpus* da pesquisa, termo adotado na análise textual discursiva que foi reproduzido da análise de conteúdo de Bardin (2004).

Com relação ao *corpus* da pesquisa, Moraes (2003) afirma que os materiais que o constitui não podem ser considerados como dados, mas como informações. Sua afirmação é justificada ao assumir que

> Os textos não carregam um significado a ser apenas identificado; são significantes exigindo que o leitor ou pesquisador construa significados com base em suas teorias e pontos de vista. Isso exige que o pesquisador em seu trabalho se assuma como autor das interpretações que constrói dos textos que analisa. Naturalmente nesse exercício hermenêutico de interpretação é preciso ter sempre em mente o outro pólo, o autor do texto original (MORAES, 2003, p. 194).

Dessa forma, esse é um dos aspectos que nos levou a considerar a análise textual discursiva como uma modalidade de análise profícua para nossa investigação: ao buscar compreender as manifestações dos estudantes envolvidos em nossa investigação, não nos limitamos ao que estava explícito, mas nos assumimos como autores de nossas inferências e interpretações, porém, nos apoiando nos referenciais teóricos que adotamos.

Partindo da conjectura de que qualquer texto pode originar leituras diferentes (MORAES, 2003), sendo estas dependentes dos pressupostos teóricos de cada leitor, acreditamos que a leitura que realizamos dos materiais do nosso *corpus* corresponde a uma leitura do latente ou implícito, uma vez que não focamos apenas nas interpretações manifestas que poderiam ser compartilhadas com facilidade por diferentes leitores, mas buscamos realizar uma leitura mais aprofundada, bem como interpretar as informações obtidas nos fundamentando em nossos referenciais teóricos.

Além disso, Moraes (2003) esclarece que não há a necessidade de se trabalhar com todo o *corpus*, mas pode-se definir apenas uma amostra por meio do critério de saturação. A saturação é entendida como o momento em que, ao introduzir novas informações nos resultados da análise, já não ocorrem mais modificações nos resultados obtidos. Isso foi o que consideramos a partir das primeiras análises do *corpus* da nossa pesquisa: percebemos que não havia a necessidade de aplicar e analisar mais tarefas, uma vez que a tarefa que aplicamos já nos permitiu atingir resultados suficientes para atendermos os objetivos de pesquisa.

Nessa perspectiva, optamos por explicitar no presente trabalho a análise de apenas uma tarefa, a qual consideramos como aquela que nos possibilitou compreensões suficientes a respeito do fenômeno em questão (invariantes operatórios e níveis de generalidade).

Moraes e Galiazzi (2011, p. 112) descrevem que:

> A análise textual discursiva pode ser entendida como o processo de desconstrução, seguido de reconstrução, de um conjunto de materiais lingüísticos e discursivos, produzindo-se a partir disso novos entendimentos sobre os fenômenos e discursos investigados. Envolve identificar e isolar enunciados dos materiais submetidos à análise, categorizar esses enunciados e produzir textos, integrando nestes descrição e interpretação, utilizando como base de sua construção o sistema de categorias construído.

Nesse sentido, ao ter delimitado o *corpus* da pesquisa, dá-se início à desconstrução do texto e sua unitarização, o que caracteriza o primeiro passo do processo de análise. Esse processo pode ser considerado como um esforço do pesquisador em construir significados sob os significantes dos materiais em análise.

Nesse processo, portanto, é realizado “recortes” do *corpus*, destacando os detalhes e elementos de acordo com os objetivos da pesquisa. Dessa maneira, “[...] pretende-se conseguir perceber os sentidos dos textos em diferentes limites de seus pormenores, ainda que compreendendo que um limite final e absoluto nunca é atingido.” (MORAES, 2003, p. 195). Esses “recortes” a que nos referimos correspondem às *unidades de análise* ou *unidades de significado* ou *de sentido*.

Em nossa pesquisa, após realizarmos o que Bardin (2004) denomina como *leitura flutuante*, momento este em que o analista permite ser invadido pelas impressões e orientações provenientes da leitura inicial, identificamos nas transcrições das gravações em áudio, sempre considerando de maneira adjacente os registros escritos e os diários de campo, os excertos que nos permitiriam esboçar possíveis esquemas de resolução dos estudantes, por meio dos quais buscamos analisar e evidenciar características que nos permitissem inferir sobre invariantes operatórios e níveis de generalidade. Assim, consideramos que nesse momento realizamos a desconstrução do nosso *corpus* e constituímos nossas unidades de análise, que são no total de dezessete, representadas simbolicamente por numerais romanos (**I, II, III,..., XVII**).

Esse momento, segundo Moraes (2003) é um movimento gradativo, tanto de explicitação, quanto de refinamento das unidades de análise. O autor chama a atenção, ainda, para que o pesquisador atente para não perder a noção do todo, ou seja, ao desconstruir o *corpus* em unidades de análise é primordial que se atente para não descontextualizar totalmente essas unidades de maneira que se perca a ideia do todo.

Moraes (2003) defende que esse momento de desorganização é essencial, pois, segundo ele, é necessário desestabilizar a ordem e desorganizar o conhecimento existente para que seja possível atingir novas compreensões. Nesse sentido, a unitarização corresponde a um esforço de impregnação intensa do pesquisador com o fenômeno investigado, o que contribuirá para a “[...] emergência de novos entendimentos.” (MORAES, 2003, p. 209).

Esses novos entendimentos emergirão a partir do segundo momento do ciclo da análise textual discursiva: a *categorização*. Esse momento constitui-se como “[...] um movimento intuitivo de reconstrução.” (MORAES, 2003, p. 209).

O momento da categorização é quando emergem interpretações criativas e originais, sendo estas oriundas “[...] da capacidade do pesquisador estabelecer e identificar relações entre as partes e o todo, tendo como base uma intensa impregnação no material de análise.” (MORAES, 2003, p. 196). Essas interpretações a que nos referimos emergem, portanto, a partir de sucessivos processos de comparação entre as unidades de análise, visando agrupá-las de acordo com elementos semelhantes entre si.

As categorias podem ser definidas *à priori*, podem ser emergentes, mistas ou constituídas de maneira intuitiva. As categorias *à priori* são como Bardin (2004) denomina de “caixas” onde são organizadas unidades de análise em comum, sendo estas categorias originárias dos referenciais teóricos. As categorias emergentes são aquelas construídas a partir das informações do *corpus*. As categorias mistas são aquelas que envolvem tanto categorias *à priori*, quanto emergentes, sendo estas responsáveis por aperfeiçoar as primeiras. E, por fim, as categorias intuitivas são aquelas originárias de inspirações repentinas tendo seus fundamentos na fenomenologia (MORAES, 2003).

Consideramos que nossas categorias são *à priori*, porém, para uma destas categorias, definimos subcategorias que consideramos como mistas, uma vez que partimos de subcategorias *à priori* com relação a níveis de generalidade, sendo estes baseados em nossos referenciais teóricos. Porém, na tentativa de estabelecermos relação entre invariantes operatórios e níveis de generalidade, bem como envolver nossas inferências[42] baseadas em outros autores nessa relação, concluímos que subcategorias emergentes contribuíram para aperfeiçoar nossas subcategorias *à priori*.

Para a apresentação das categorias, são elaborados códigos. No caso da presente pesquisa os códigos que utilizamos para especificar cada categoria são **IO** (Invariantes Operatórios) e **NG** (Níveis de Generalidade). Ainda, para esta última categoria, definimos cinco subcategorias cujos códigos que utilizamos para especificá-las são: $\mathbf{S_1, S_2, \ldots, S_5}$.

Com relação às propriedades das categorias, Moraes (2003) e Moraes e Galiazzi (2011) destacam que: i) as categorias necessitam ser pertinentes tanto com os objetivos, quanto com os objetos de análise; ii) as categorias de um mesmo conjunto precisam ser homogêneas, ou seja, a construção delas precisa ser feita a partir de um mesmo princípio; e, iii) como um texto possibilita múltiplas leituras, a

---

[42] Segundo Moraes (2003, p. 205), “[...] o inferir constitui-se num esforço do pesquisador em ir além do dito e do percebido.”

propriedade da exclusão mútua não se aplica à análise textual discursiva, portanto, uma mesma unidade de análise pode ser categorizada em mais de uma categoria.

Segundo Moraes (2003), cada categoria (e subcategorias, se houver) precisam ser descritas:

> Descrever é apresentar as categorias e subcategorias, fundamentando e validando essas descrições a partir de interlocuções empíricas ou ancoragem dos argumentos em informações retiradas dos textos. Uma descrição densa, recheada de citações dos textos analisados, sempre selecionadas com critério e perspicácia, é capaz de dar aos leitores uma imagem mais fiel dos fenômenos que descreve. Essa é uma das formas de sua validação (MORAES, 2003, p. 204).

O próximo passo da análise textual discursiva é o de explicitar um argumento geral a partir dos argumentos parciais de cada categoria, sendo este argumento expresso em um *metatexto* visando expressar a compreensão do todo (MORAES, 2003; MORAES; GALIAZZI, 2011).

Esse processo de expressar argumentos, segundo Moraes (2003), é auto-organizado e intuitivo, e as compreensões são aprofundadas de acordo com as “idas e voltas” aos primeiros passos da análise.

O metatexto, portanto, é uma construção do pesquisador por meio do qual expressará os significados e sentidos que percebeu a partir do *corpus*, bem como argumentos descritivo-interpretativos que promulguem suas compreensões atingidas em relação ao fenômeno investigado e com base no *corpus*.

Em síntese, Moraes (2003, p, 210) descreve os três passos, que ele denomina de ciclos:

> Inicialmente, leva-se o sistema até o limite do caos, desorganizando e fragmentando os materiais textuais da análise. A partir disso, possibilita-se a formação de novas estruturas de compreensão dos fenômenos sob investigação, expressas então em forma de produções escritas.

Na sequência, apresentamos no capítulo 4 os processos de desconstrução e unitarização de nossa pesquisa, bem como as categorizações destas. Ainda, no mesmo capítulo, trazemos o processo de construção: as categorias e o metatexto.

CAPÍTULO 4
PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DAS INFORMAÇÕES: DA DESCONSTRUÇÃO À RECONSTRUÇÃO

No presente capítulo apresentamos os ciclos da análise textual discursiva, os quais são caracterizados por Moraes (2003) e Moraes; Galiazzi (2011) como os processos de desconstrução e de reconstrução.

No primeiro ciclo (desconstrução), após a delimitação do *corpus*, inicia-se o processo de unitarização que consiste de realização de “recortes” do *corpus*, os quais são denominados de *unidades de análise*, visando destacar os elementos considerados pelo pesquisador como mais pertinentes para atingir seus objetivos com a pesquisa, sendo, portanto, um momento exaustivo e dependente de um esforço extremo do pesquisador em construir significados sob os significantes dos materiais em análise, contudo, atentando para não perder a noção do *corpus* como um todo.

Na primeira subseção apresentamos e descrevemos a tarefa que submetemos à análise, bem como descrevemos, de maneira geral, os procedimentos de resolução dos estudantes envolvidos na pesquisa.

Na segunda seção, abordamos sobre a análise das informações coletadas, sendo esta seção organizada da seguinte maneira: apresentação da pré-análise e da exploração do material, quando esboçamos esquemas de procedimentos de resolução de cada díade, sendo estes esquemas de acordo com as interpretações das informações coletadas por meio da gravação em áudio, diários de campo e registros escritos dos estudantes. Por meio dos esboços dos esquemas, bem como representações dos tratamentos de cada díade para cada equação, inferimos características que foram constituídas como unidades de análise que consideramos como pertinentes para atender ao objetivo da pesquisa.

Por meio do esboço dos esquemas, bem como dos registros escritos e relatos em diários de campo, evidenciamos algumas características (unidades de análise) que nos auxiliaram inferir sobre alguns invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados pelos estudantes. Essas inferências são baseadas em nossos estudos sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, bem como algumas teorias sobre aritmética generalizada e à luz da teoria de Radford sobre níveis de generalidade.

No segundo ciclo (reconstrução), apresentamos as inferências referentes às unidades de análise, evidenciando relações entre estas com invariantes operatórios e níveis de generalidade. Assim, nesse momento, apresentamos o que Moraes (2003) e Moraes e Galiazzi (2011) consideram como *processo de reconstrução*.

Na terceira seção apresentamos as categorias e subcategorias definidas para a presente pesquisa, bem como a categorização das unidades de análise.

Estas categorias foram definidas *à priori*, de acordo com os referenciais teóricos adotados. Para uma dessas categorias, definimos subcategorias, as quais foram consideradas como mistas, pois, partindo de subcategorias *à priori*, na tentativa de estabelecer uma relação entre os embasamentos teóricos desta pesquisa e as nossas inferências, concluímos que subcategorias emergentes contribuíram para aperfeiçoá-las. Estas subcategorias que consideramos como emergentes, representam uma mescla entre pares de subcategorias estabelecidas *à priori*.

Na quarta seção apresentamos o metatexto, expressando as compreensões atingidas a partir do processo de análise.

Destacamos que reconhecemos que as categorizações das unidades de análise que evidenciamos e elencamos são baseadas em nossas inferências, pois, como boa parte do processo de conceitualização e formação de esquemas são mentais, consideramos que o estudante manifestou apenas aspectos de invariantes operatórios e níveis de generalidade, e, além disso, consideramos como inferências por reconhecermos que interpretações nossas são inclusas durante todo o processo de análise.

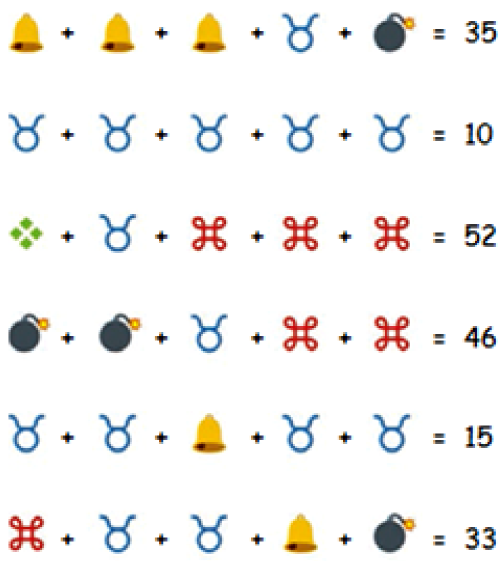
4.1 Descrição da Tarefa Não-Rotineira e dos Procedimentos de Resolução de Cada Díade

4.1.1 Descrição da Tarefa Não-Rotineira

A figura a seguir mostra a tarefa não-rotineira proposta às díades, tarefa esta que foi submetida às análises.

Figura 6 – Tarefa não-rotineira

1) Observe as expressões abaixo:



Quanto vale cada um dos desenhos dessas somas? Explique como pensou.

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 73).

A fonte da tarefa proposta é um livro didático do 8º ano (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012), mais especificamente, um capítulo que aborda sobre cálculo algébrico, o qual revê os procedimentos para solucionar equações envolvendo números desconhecidos (incógnitas) e aborda a resolução de problemas envolvendo equações. Em geral, nesse ano escolar (8º ano), os estudantes já tiveram contato com símbolos alfanuméricos para representar as incógnitas. Nesse sentido, consideramos a tarefa desafiadora e não-rotineira para os participantes desta pesquisa (estudantes do 5º ano), uma vez que estes ainda não tiveram contato com esse tipo de representação envolvendo símbolos alfanuméricos.

Nessa perspectiva, a tarefa pode ser considerada, de acordo com nossos estudos sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, como uma situação para a qual os estudantes “não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o quer ao êxito, quer ao fracasso.” (VERGNAUD, 1996, p. 156), sendo nesse tipo de situação que o sujeito tem a oportunidade de formar novos esquemas a partir daqueles que já possui.

O objetivo com essa tarefa é que o estudante encontre meios de determinar o valor de cada símbolo, a partir do conhecimento sobre a soma de alguns destes em cada linha, linhas estas que representam equações de primeiro grau, bem como a partir do reconhecimento de que figuras iguais apresentam valores iguais, independentemente das linhas (equações) em que se encontram.

4.1.2 Descrição dos Procedimentos de Resolução das Díades

Antes de iniciarmos a apresentação dos procedimentos de resolução da tarefa não-rotineira de cada díade, é necessário descrevermos:

Quadro 3 – Menção a cada símbolo da tarefa não-rotineira

Símbolo	**Menção**
♉	Símbolo azul
🔔	Sino
💣	Bomba
⌘	Símbolo vermelho
❖	Símbolo verde

Fonte: Da autora.

Iniciando as descrições, esclarecemos que serão apresentados, respectivamente, os procedimentos de resolução adotados pelas díades D1, D2 e D3 para cada equação da tarefa não-rotineira proposta, na sequência de resolução de cada díade.

Esclarecemos, ainda, que as descrições que serão realizadas são baseadas nas observações da pesquisadora e das testemunhas, bem como em seus relatos em diários de campo e gravações em áudio.

A díade D1, constituída pelos estudantes denominados de E1 e E2, iniciou a tarefa pela segunda equação, justificando que seria mais fácil começar por essa por apresentar todos os símbolos iguais (símbolo azul). Em seguida, tendo descoberto o valor do símbolo azul, optaram por operar sobre a quinta equação justificando que nesta havia apenas um símbolo que eles não conheciam: o sino. A próxima operação foi realizada sobre a primeira equação, na qual já conheciam o valor do símbolo azul e do sino, faltando apenas calcular o valor da bomba. O próximo passo era determinar o valor do símbolo vermelho. Tendo em vista que existia um símbolo verde na terceira equação, na qual havia também símbolos vermelhos, sendo ambos os símbolos desconhecidos, as únicas opções que lhes restaram eram as equações quarta e sexta.

Nesse momento, o estudante E1 decidiu operar sobre a quarta equação, enquanto E2 preferia operar sobre a sexta equação. Ao serem questionados pela testemunha T1 a respeito de se seria possível operar sobre qualquer uma dessas equações, ambos reconheceram que sim, seria possível. Entrando em um acordo, optaram pela quarta equação, explicando que nesta há menos símbolos diferentes (bomba e símbolo azul), além do símbolo vermelho que se quer descobrir o valor, se comparado à sexta equação (símbolo azul, sino e bomba).

Por fim, operaram sobre a terceira equação, a única que possui o símbolo verde em questão.

Um fator ao qual nos atentamos foi quanto à rapidez com que efetuaram todos os cálculos, manifestando-os oralmente. Dessa forma, o tempo decorrido para a realização dessa tarefa não corresponde exatamente à execução dos cálculos, mas à preocupação deles em registrarem algoritmos para explicar como determinaram o valor de cada símbolo.

A díade D2, composta pelos estudantes E3 e E4, iniciou pela segunda equação, determinando o valor do símbolo azul. Em seguida, escolheram operar sobre a primeira equação e, como nesta havia dois símbolos desconhecidos (a bomba e o sino), a alternativa encontrada por eles foi realizar a estratégia de tentativa e erro. Ao determinarem valores para o sino e a bomba por meio dessa estratégia, de maneira que fosse obtido o resultado da soma (35), eles optaram por operar na sexta equação para descobrir o valor do símbolo vermelho. Nesse momento, percebemos que E4 começou utilizando como estratégia a adição dos valores dos símbolos já conhecidos por eles (símbolo azul, sino e bomba), mas E3 o convenceu de que eles estavam fazendo tudo errado, pois estavam operando fora de ordem, ou seja, para esse estudante as equações precisavam ser operadas na ordem em que aparecem. Sendo assim, como já operaram sobre a primeira e sobre a segunda equação, decidiram por operar sobre a terceira, se deparando, mais uma vez, com uma equação envolvendo duas incógnitas: o símbolo vermelho e o símbolo verde. Assim, estipularam valores para os símbolos desconhecidos por meio de tentativa e erro.

Ao operarem sobre a quarta equação, a díade D2 já havia determinado valores para todos os símbolos. Portanto, a operação realizada nesse momento serviria apenas para confirmar os valores obtidos. Como a estratégia de tentativa e erro foi realizada sobre cada equação, desconsiderando que símbolos iguais em equações diferentes têm o mesmo valor, logo perceberam que a soma dos valores dos símbolos que encontraram não correspondia ao resultado da quarta equação (46). Após realizarem alguns cálculos e obterem sempre o mesmo resultado (38), ouvimos um barulho na gravação que parecia ser de um objeto sendo jogado sobre a mesa (um lápis ou uma caneta), demonstrando nervosismo por não conseguirem obter o resultado pedido. Nisso, desistem, encerrando a tarefa.

Assim como a díade D1, a díade D3, composta pelos estudantes E5 e E6, foi operando sobre as equações que, sucessivamente, continham menor quantidade de símbolos desconhecidos. Dessa forma, a ordem das equações em que operaram foi: a segunda, a quinta, a primeira, a sexta e a terceira.

Todos os cálculos foram realizados com rapidez e mentalmente, sendo expressos de maneira oral, sem o auxílio da escrita. Apenas após o término da tarefa, ou seja, após descobrirem os valores de todos os símbolos, a testemunha T3 pediu para que E5 e E6 realizassem registros escritos.

Com relação à ordem das equações escolhidas para tratamento, percebemos que esta foi análoga à ordem escolhida pela díade D1, com exceção de que, para determinar o símbolo vermelho, apesar de reconhecerem que tanto na quarta, quanto na sexta equação seria possível determinar o valor do símbolo vermelho, a díade D1 escolheu operar sobre a quarta equação. Já a díade D3 escolheu operar sobre a sexta equação, utilizando a quarta apenas para verificar os resultados obtidos para alguns símbolos.

4.2 Análise das Informações

Nesta subseção será realizada a análise das informações obtidas, levando em consideração as inferências sobre procedimentos de cálculo dos estudantes envolvidos na pesquisa, segundo interpretações sobre características manifestadas pelos estudantes.

As características consideradas nesse processo inicial de análise correspondem, entre outros fatores, ao que Blanton e Kaput (2005) defendem como características da aritmética generalizada, que são elas:

i) a exploração de propriedades das operações com números inteiros como, por exemplo, comutatividade, associatividade, elemento neutro, entre outros;

ii) a exploração do sinal de igualdade como expressão de uma relação entre quantidades;

iii) tratamento algébrico do número, utilizando-os como incógnitas e considerando que símbolos iguais correspondem a mesmos valores;

iv) resolução de sentenças com números desconhecidos em equações, envolvendo mais de uma incógnita ou a mesma incógnita repetida algumas vezes.

À luz da análise textual discursiva, na fase de pré-análise, realizamos a transcrição das gravações[43] em áudio o que, em conjunto com os registros escritos e as anotações das testemunhas em diário de campo, constituíram o *corpus* da pesquisa.

Na sequência, realizamos a exploração do material, quando organizamos os dados brutos presentes no corpus. Neste processo, estabelecemos unidades de análise de acordo com as características de aritmética generalizada defendidas por Blanton e Kaput (2005), bem como outros aspectos semelhantes defendidos por outros autores (KIERAN, 2004; PIMENTEL; VALE, 2009; entre outros) cujos trabalhos envolvem o pensamento algébrico.

4.2.1 A Pré-análise e a Exploração do Material: Estabelecimento das Unidades de Análise

Apresentamos, neste item, o processo detalhado de pré-análise e exploração do material que nos permitiram estabelecer as unidades de análise, em pertinência ao que propõe a presente pesquisa.

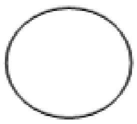
[43] As transcrições das gravações, na íntegra, são apresentadas no Anexo B.

Nessa perspectiva, apresentamos as unidades de análise que inferimos em cada equação da tarefa não-rotineira, de acordo com os procedimentos de resolução de cada díade, e, no final desta apresentação, incluímos uma síntese das unidades de análise estabelecidas.

Para melhor compreensão de como inferimos as unidades de análise, para cada díade esboçamos esquemas para a resolução de cada equação da tarefa proposta, esboços esses que representam as interpretações que emergiram a partir da análise dos materiais do *corpus*. Destacamos que as falas, nas quais nos apoiamos para construir os esboços dos esquemas, são oriundas das transcrições das gravações em áudio.

Porém, antes de apresentarmos os esquemas que esboçamos, é necessário relembrarmos alguns códigos, de acordo com Vergnaud (2009), que utilizamos para construir os esquemas de cálculos relacionais:

Quadro 4 – Códigos utilizados nos esboços dos esquemas

Figura	Nome	O que representa
	Retângulo	Um número natural
	Círculo	Um número relativo (transformação ou relação)
	Flecha	Uma transformação ou uma relação entre elementos de natureza diferente
	Linha vertical	Relação quaternária

Fonte: Vergnaud (2009, p. 201).

Ao arquitetarmos alguns esquemas é possível que utilizemos outras figuras. Quando esse for o caso, explicitaremos o que tal figura representa após a utilizarmos.

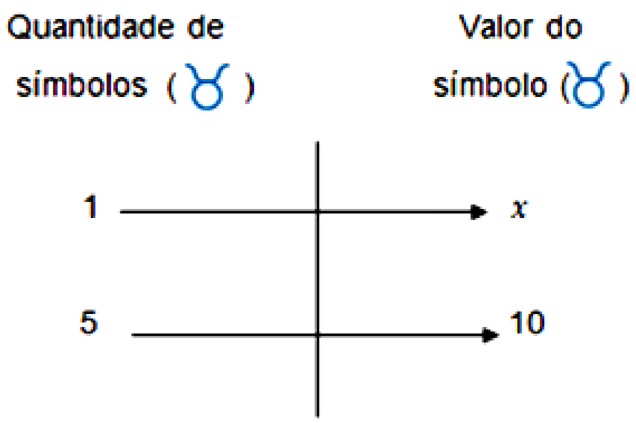
Quadro 5 – Esquemas da díade D1 para a tarefa não-rotineira

<table>
<tr><th>ORDEM DAS EQUAÇÕES</th><th>ESQUEMAS</th></tr>
<tr><td>

<u>**2ª equação**</u>

"**E1** – *O 2º é mais fácil, então, a gente vai fazer primeiro.*
T1 – *Por que é mais fácil?*
E1 – *Porque todos os desenhos são os mesmos.*
T1 – *E o que vocês vão fazer?*
E1 – *10 vezes... é 10 dividido por 5.*"

</td><td>



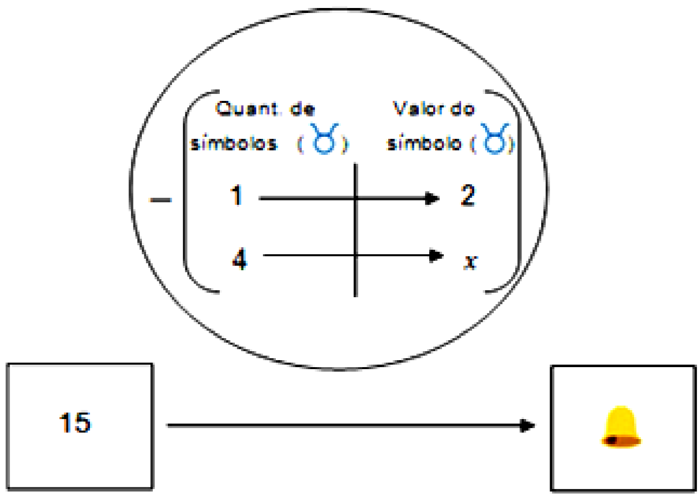
</td></tr>
<tr><td>

<u>**5ª equação**</u>

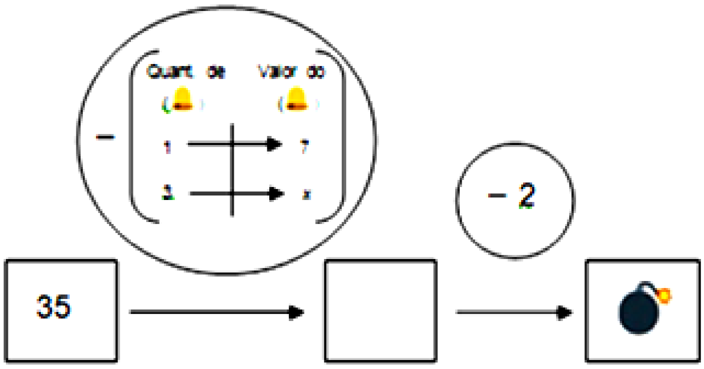
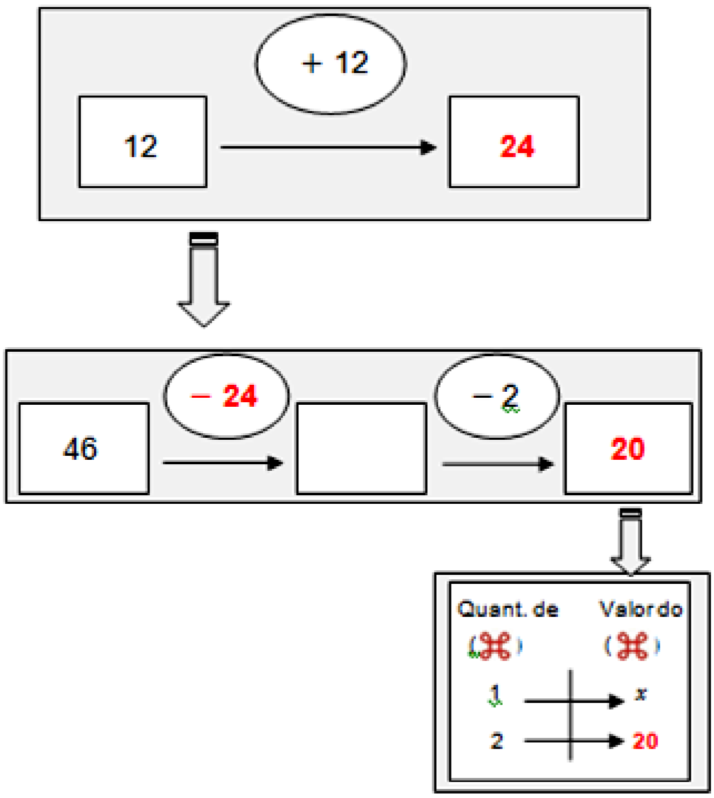
"**E1** – *E agora a gente vai fazer... o 5º, porque ele tem quase todos os mesmos, só tem um que é diferente.*
T1 – *E o que vocês vão fazer agora?*
E1 – *A gente vai somar dois mais ... é dois vezes o 4.* [...]
E2 – *Esse sininho aqui vale 8, porque 4 vezes 2 é 8.*
E1 – *Mas só que a gente teve que descobrir qual que é esse, e daí a gente fez 15 menos 8 para descobrir o valor do sino. E o valor do sino é 7.*"

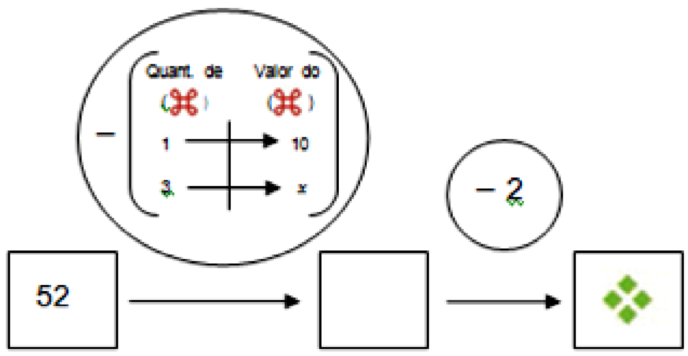
Diário de Campo: ao mencionar "*qual que é esse*" o estudante apontava para o sino.

</td><td>



</td></tr>
</table>

<u>1ª equação</u> "**E1** – *E agora dá para fazer o 1º, porque a gente vai fazer 35... primeiro sete vezes o três menos 35... é 35 menos o resultado, daí o resultado menos 2. O valor dessa bomba é 12, porque 14 menos 2 é 12... é que tinha tirado os 21 que é o valor de todos esses, menos 35 dá... dá 14, e 14 menos 2 dá 12.*" **Diário de Campo**: ao mencionar "*é o valor de todos esses*" o estudante apontava para os três sinos.	
<u>4ª equação</u> "**E1** – *E agora vamos fazer...* **E2** – *A última.* **E1** – *Não, a linha quatro.* **T1** – *Dá para fazer qualquer uma das duas?* **E1** – *Dá, porque aqui o que sobrar... o resultado tem que dividir por dois, daí dá para descobrir. Mas a última tem mais desenhos do que aqui.* **E2** – *É, então, é melhor fazer a quarta*. **E1** – *Tem que fazer 12 mais 12... Agora a gente faz o 24... é o 46 menos o 24. Dá 22. Agora a gente faz 22 menos o 2.* **E2** – *Agora a gente tem que fazer 20 dividido por 2. E vai dar 10.*"	

<u>3ª equação</u> "**E1** – *E agora, dá para fazer a 3ª.* **T1** – *E como vocês vão descobrir o valor do verde?* **E1** – *Nós vamos fazer 10 vezes o 3, daí o resultado menos 52, o resultado menos 2, e vai descobrir.* **E1** – *Esse desenho verde vale 20*."	

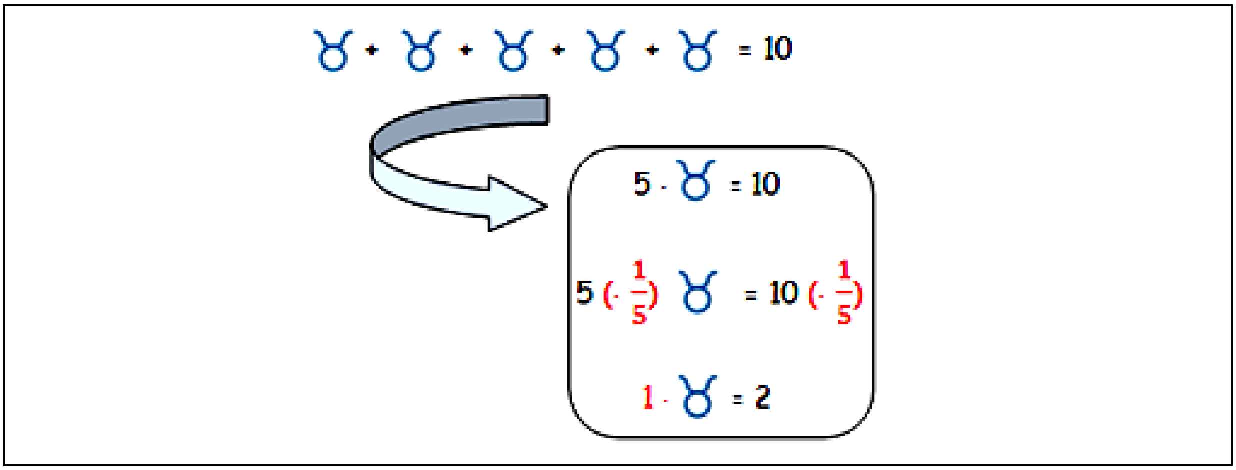
Fonte: Da autora.

Tendo esboçado os esquemas de resolução da díade D1 para obter os valores de cada símbolo da tarefa, apontamos alguns aspectos que pudemos inferir como unidades de análise. Para realizar essa identificação, nos organizamos de maneira a contemplar os esquemas na ordem em que os estudantes da díade D1 apresentaram.

No primeiro esquema, o qual representa a operação sobre a segunda equação da tarefa, pudemos identificar, de acordo com Vergnaud (2009), um isomorfismo de medidas, ou seja, o esquema representa a correspondência entre duas espécies de quantidades: as quantidades do símbolo azul em questão e os valores equivalentes a determinadas quantidades desse símbolo. Por meio dessa correspondência entre as duas grandezas de naturezas diferentes, busca-se descobrir o valor unitário, sendo necessário, para tanto, realizar uma divisão.

Apesar desse procedimento nos parecer totalmente aritmético, quando a díade D1 menciona "*10 dividido por 5*" e, analisando o isomorfismo de medidas tal como esquematizamos, podemos inferir que o procedimento adotado pela díade para determinar o valor do símbolo azul possui um caráter algébrico. O tratamento desse procedimento pode ser ilustrado tal como apresentamos na Figura 7.

Figura 7 – Tratamento da 2ª equação – Díade D1



Fonte: Da autora.

Na Figura 7 podemos observar que a díade D1 converte a adição repetida de símbolos iguais (adição reiterada) como uma multiplicação do símbolo pela quantidade de repetições do mesmo. Nessa conversão podemos destacar uma característica: *o reconhecimento da adição reiterada, ou seja, soma de n parcelas iguais, como uma multiplicação do fator que se repete n vezes*. No caso, o símbolo azul é o fator que se repete e o número de repetições (5 vezes) corresponde ao número cardinal desse símbolo.

Para chegar ao resultado que a díade obteve (*10 dividido por 5*), reconhecemos outra característica no tratamento realizado por esses estudantes: *a utilização do inverso multiplicativo de 5.* Essa inferência se baseia no fato da díade reconhecer que é possível obter o valor de cada símbolo azul realizando a divisão do total (10) pela quantidade de símbolos (5). Nisso, reconhecemos ainda, que de maneira implícita, os estudantes da díade D1 manifestam: *o elemento neutro da multiplicação* (1).

Vale destacar desde já, que em nenhum momento estamos afirmando que as características que estamos inferindo são manifestadas pelos estudantes de maneira consciente. Assim, justificamos que nossas inferências se baseiam na maneira como os estudantes lidam com cada tarefa: nesse primeiro caso, assim como nos casos subsequentes, fazemos uma analogia entre a maneira como os estudantes lidaram com a tarefa, com a maneira que esta poderia ter sido resolvida por uma pessoa que tem conhecimento sobre propriedades dos números e operações, bem como sobre a resolução de equações do primeiro grau, equações essas que correspondem à tarefa proposta.

Diante de tudo isso, percebemos que para determinar o valor do símbolo azul, a díade D1 evocou um esquema cujo tratamento é análogo ao de uma equação do primeiro grau do tipo $ax = b$: ainda que sem expressar simbolicamente, o tratamento realizado para obtenção do resultado corresponde ao tratamento desse tipo de equação.

O segundo passo da díade D1 foi operar sobre a quinta equação. Conforme observamos no esquema que corresponde à operação realizada pelos estudantes desta díade, houve a realização de um processo aritmético misto, ou seja, envolvendo relações aditivas e multiplicativas.

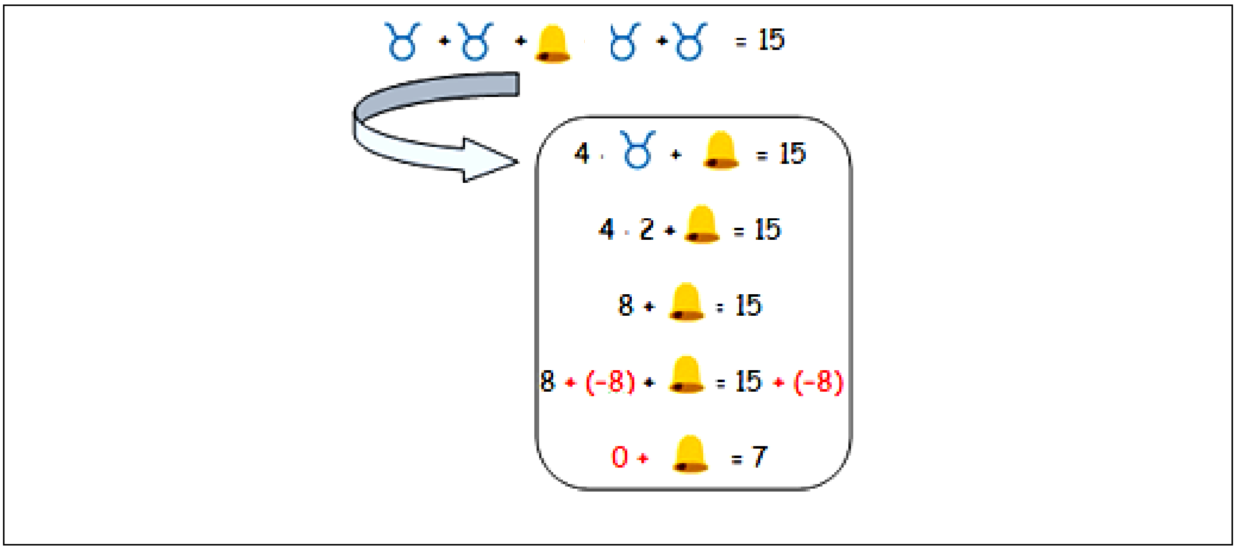
Em primeiro lugar, a operação consistiu em um isomorfismo de dois tipos de medidas (quantidade de símbolos azuis e os respectivos valores desse símbolo), no qual se visa descobrir o valor de quatro símbolos sabendo-se o valor do símbolo unitário, sendo necessário, portanto, realizar uma multiplicação.

Tendo realizado esse processo, o valor obtido por meio da relação multiplicativa, torna-se um número relacional (−8) na relação aditiva. Nessa relação aditiva, o número relacional obtido simboliza uma transformação que opera sobre uma medida inicial (15) para resultar em uma medida final: o valor do sino. Nessa transformação é preciso subtrair os valores do símbolo azul (o que explica o sinal de menos) para determinar o valor do sino.

No tratamento da operação sobre a quinta equação, é possível observarmos, mais uma vez, como característica: *a adição reiterada como uma multiplicação*. O reconhecimento dessa característica é reforçado pela fala de E1 “*A gente vai somar dois mais... é dois vezes o* quatro”, onde percebemos que antes de explicitar a multiplicação, ela estava começando a realizar uma adição reiterada de quatro símbolos iguais de valor dois.

Além desse, outras características foram manifestadas: *o elemento oposto de 8 (−8)*, o qual, ao ser evocado, acarretou no *elemento neutro da adição*, o qual correspondeu aos símbolos azuis. Dessa forma, mais uma vez nos deparamos com um tratamento análogo ao de uma equação do primeiro grau, sendo esta do tipo $ax + b = c$, que por fim, ao adicionar o elemento oposto de b ($-b$) aos dois lados da igualdade, reduziu-se a equação à forma $ax = d$, onde d consideramos como o resultado obtido da soma de c, pelo oposto de b. Ainda, no exemplo que apresentamos a seguir, o a vale 1, o elemento neutro da multiplicação nos inteiros. A Figura 8 ilustra o que explicamos.

Figura 8 – Tratamento da 5ª equação – Díade 1

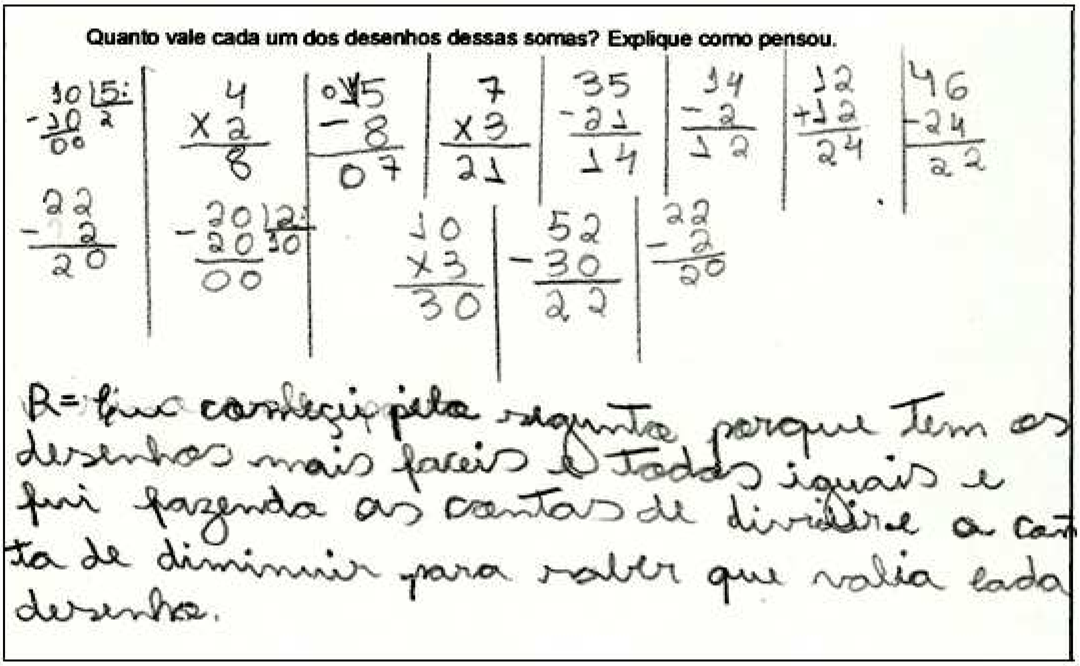


Fonte: Da autora.

Ainda, ao analisarmos o enunciado de E2 "[...] *quatro vezes dois* [...]" e seu registro escrito, inferimos: *a propriedade comutativa da multiplicação*. Na enunciação ele fala sobre multiplicar *quatro vezes o dois*, enquanto no registro escrito ele montou o algoritmo correspondente a *duas vezes o quatro*, atribuindo para ambos o mesmo resultado.

O registro escrito de E2 é apresentado na figura a seguir:

Figura 9 – Registro do estudante E2



Fonte: Da autora.

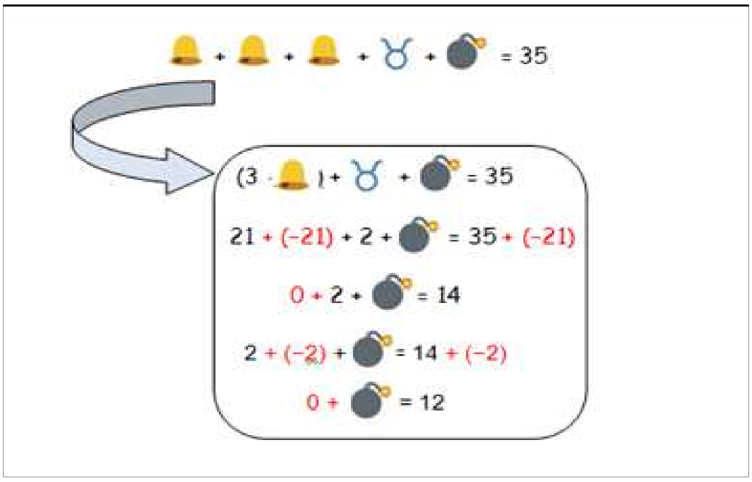
Ainda pudemos inferir a característica correspondente à *propriedade associativa da adição*. Afinal, ainda que de maneira implícita, a díade D1 reconhece que se somarem primeiro os símbolos azuis e por último o sino, que está exatamente no meio da equação, obterão o mesmo resultado do que se somassem o valor dos símbolos na ordem em que aparecem.

A próxima operação foi realizada sobre a primeira equação. Pelo esquema esboçado percebemos que a estratégia adotada pela díade D1 foi subtrair os valores já conhecidos (do sino e do símbolo azul) para determinar o valor da bomba. Para isso, foi realizado um processo aritmético misto, envolvendo relações aditivas e multiplicativas.

O primeiro passo foi utilizar um isomorfismo de medidas, no qual já era conhecido o valor unitário do sino, e visava-se descobrir o valor de três sinos, sendo necessário, portanto, realizar uma multiplicação. Em conseguinte, o resultado obtido na relação multiplicativa tornou-se um número relacional (-21) na relação aditiva. Esse número relacional serviu para transformar a medida inicial (35) em uma medida intermediária. Chamamos de medida intermediária porque ainda era preciso realizar uma transformação sobre esse resultado para, então, determinar a medida final: ainda era preciso subtrair o valor do símbolo azul (-2). Diante do exposto percebemos que a díade D1, após realizar o isomorfismo de medidas, que é uma relação de base do campo multiplicativo, repetiu duas vezes a transformação de uma medida inicial em outra, o que caracteriza uma relação de base do campo aditivo.

Para facilitar a identificação de algumas características operatórias utilizadas pela díade D1 no processo para obtenção do valor da bomba, esboçamos na Figura 10 o tratamento dado por esses estudantes na primeira equação da tarefa.

Figura 10 – Tratamento da 1ª equação – Díade 1



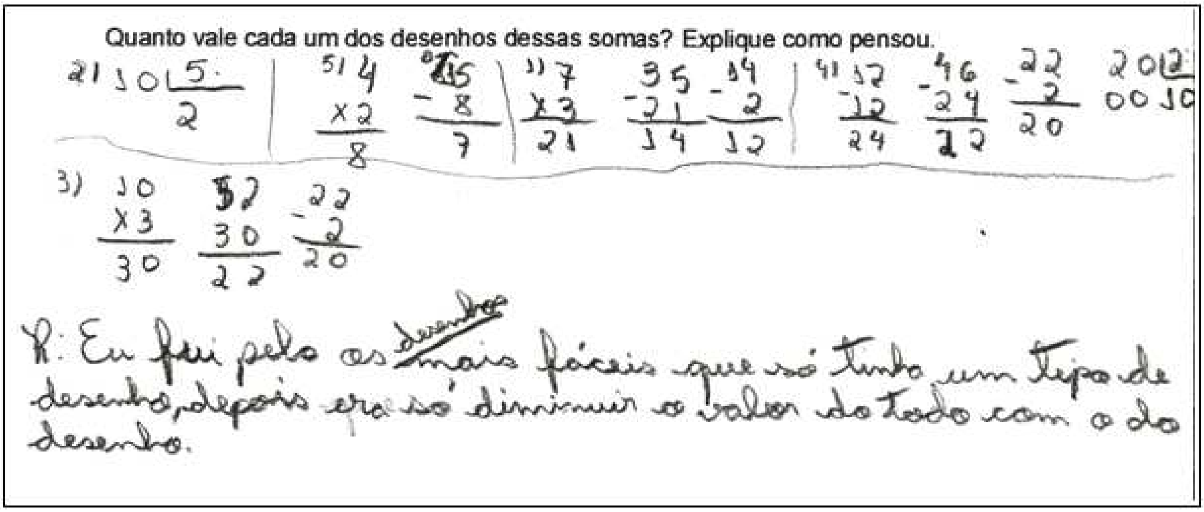
Fonte: Da autora.

No esboço do tratamento realizado podemos perceber, mais uma vez, uma analogia com o tratamento de uma equação do primeiro grau do tipo $ax + b = c$.

Quanto às características, percebemos no primeiro passo do tratamento *a adição reiterada como uma multiplicação*, no segundo e no quarto passo, adição pelo *elemento oposto* (−21 e −2), e o *elemento neutro da adição com números inteiros* no terceiro e no quinto passo.

Tal como no tratamento da quinta equação que analisamos anteriormente, ao compararmos a enunciação de E1 "[...] *primeiro sete vezes o três menos* [...]" com seu registro escrito, conforme mostra a figura a seguir, percebemos, mais uma vez, a propriedade *comutativa da multiplicação*, uma vez que atribui o mesmo resultado para as operações $7 \cdot 3$ e $3 \cdot 7$.

Figura 11 – Registro do estudante E1



Fonte: Da autora.

Além disso, consideramos essencial destacar dois excertos de quando E1 explica como operar sobre essa equação de maneira a obter o valor da bomba: “[...] *primeiro sete vezes o três menos 35... é 35 menos o resultado* [...]” e “[...] *é que tinha tirado os 21 que é o valor de todos esses* [apontando para os três sinos], *menos 35 dá... dá 14* [...]”. Destacamos os dois excertos, pois estes nos chamaram a atenção no que concerne à operação de $35 - 21$: no primeiro excerto, E1 se preocupa em corrigir que dos 21 não serão diminuídos os 35, mas ao contrário, dos 35 serão diminuídos os 21, mostrando reconhecer que há diferença nos resultados de ambas as operações. Sendo assim, E1 manifesta que: *na subtração de números naturais, subtrai-se o número menor do maior.*

Contudo, no segundo excerto, E1 disse ter realizado a operação $21 - 35 = 14$. Ao enunciar o resultado 14 percebemos que ele desconsidera que realizar essa operação não é equivalente a $35 - 21 = 14$, a qual seria a correta. Nesse caso, a propriedade comutativa da adição não se aplica, pois, $21 \neq -21$ e $-35 \neq 35$. Pela propriedade comutativa da adição teríamos:

$$21 - 35 = -35 + 21 = -14$$

e

$$35 - 21 = -21 + 35 = 14$$

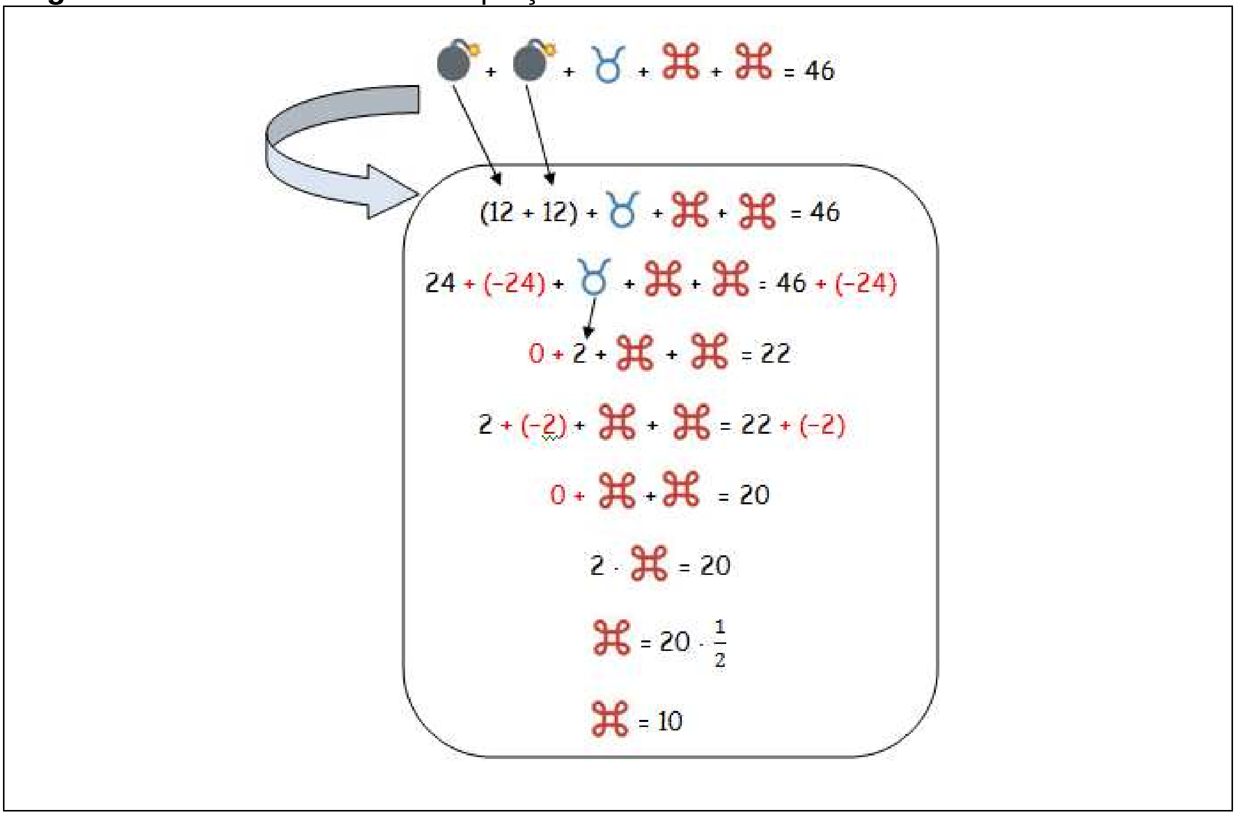
Diante do exposto inferimos que E1 nos forneceu essa resposta ou por simples distração, ou pelo fato de ainda não ter conhecimento sobre operações com números inteiros ($\mathbb{Z}$ = $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$), uma vez que até o 5º ano, em geral, são estudados apenas o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$ = $0, 1, 2, 3, \ldots$) e, em consequência, as operações nesse conjunto. Nesse sentido o que ocorreu foi que E1 não considerou o número 21 como um número relacional, mas simplesmente como um número natural. Ainda, ao inferirmos isso, consideramos o registro escrito de E1 (apresentado na Figura 11), em que o algoritmo realizado ($35 - 21$) está correto.

Ao operarem sobre a quarta equação, visando obter o valor do símbolo vermelho, a díade D1 novamente fez uso de um processo misto, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, porém, de maneira ligeiramente mais complexa. A partir do que manifestaram oralmente, pudemos inferir a formação sucessiva de três esquemas. Ao esboçarmos esses esquemas, visando diferenciá-los, separamos cada um deles dentro de um quadro preenchido na cor cinza e flechas preenchidas dessa mesma cor indicam a ordem em que foram desenvolvidos esses esquemas. Ainda, os números destacados em vermelho correspondem a aqueles números naturais que se tornaram relacionais em outro esquema.

No primeiro esquema os estudantes operaram no campo aditivo, transformando uma medida inicial em uma final, sendo esta correspondente ao valor das duas bombas. Em seguida, o resultado da soma das duas bombas (24) torna-se um número relacional (-24) que foi subtraído do resultado total apresentado na quarta equação (46). Em seguida, do resultado obtido, subtraiu-se o valor de um símbolo azul (−2). Dessa forma, foram realizadas, sucessivamente, duas transformações: uma sobre a medida inicial, obtendo uma intermediária, e uma sobre esta obtendo uma medida final. Por fim, o resultado obtido correspondia a dois símbolos vermelhos. Assim, a díade D1 operou no campo multiplicativo ao realizar um isomorfismo de medidas: conhecendo o valor de dois símbolos vermelhos, obtiveram o valor do símbolo unitário por meio de uma divisão.

Ilustramos na Figura 12 o tratamento da díade D1 sobre a quarta equação da tarefa:

Figura 12 – Tratamento da 4ª equação – Díade 1



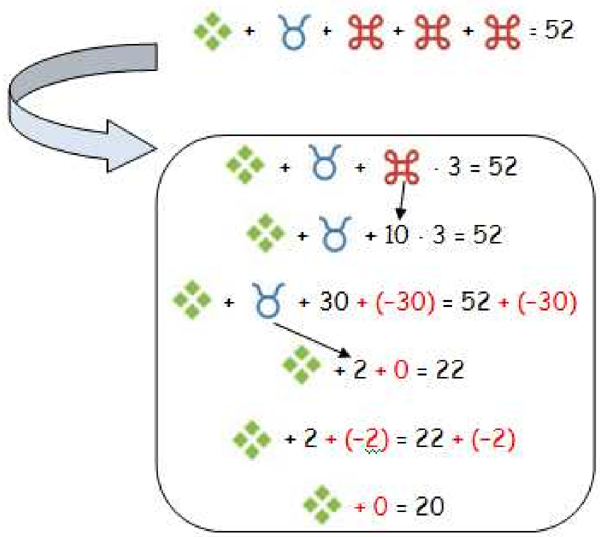
Fonte: Da autora.

No tratamento da quarta equação inferimos, outra vez, um processo análogo ao tratamento de uma equação do primeiro grau do tipo $ax + b = c$. Quanto às características identificamos: *adição pelo elemento oposto* no segundo e no quarto passo do tratamento que esboçamos (−24 e −2), *elemento neutro da adição* no terceiro e no quinto passo, *adição reiterada como multiplicação* na passagem do quinto para o sexto passo e *utilização do inverso multiplicativo* de 2 no sétimo passo.

Na terceira equação, o tratamento foi análogo à primeira: por meio do isomorfismo de medidas, obteve-se o valor de três símbolos vermelhos a partir do conhecimento do valor de um único símbolo vermelho. Em seguida, o número natural obtido na resolução do isomorfismo de medidas se tornou um número relacional na relação aditiva. Esta, por sua vez, pode ser caracterizada como duas realizações sucessivas de transformação sobre uma medida inicial para resultar em uma final, pois, após subtrair o resultado encontrado no isomorfismo de medidas, subtraiu-se o valor de um símbolo azul (−2).

O tratamento sobre a terceira expressão, mais uma vez, corresponde ao tratamento de uma equação do tipo $ax + b = c$, tal como apresentamos na Figura 13.

Figura 13 – Tratamento da 3ª equação – Díade 1



Fonte: Da autora.

Ao esboçarmos o tratamento da terceira equação, identificamos: *adição reiterada como multiplicação* ao descrever os três símbolos vermelhos como equivalente a três vezes esse símbolo, a *adição pelo elemento oposto* (-30 e -2) no terceiro e no quinto passo do tratamento esboçado e *elemento neutro da adição* nos passos quatro e cinco. Ainda, no primeiro passo percebemos que a díade D1 começa a operação pelos três símbolos vermelhos que são apresentados no final da expressão. Assim, identificamos a característica que corresponde à *propriedade associativa da adição*, pois a díade D1 reconhece que o resultado final será o mesmo independente da ordem em que serão somadas as parcelas.

Ao compararmos o excerto da fala de E1 com seu registro escrito (apresentado na Figura 11), identificamos: *a propriedade comutativa da multiplicação*. O excerto ao qual nos referimos é “[...] *Nós vamos fazer 10 vezes o 3* [...].” No registro escrito, E1 desenvolveu o algoritmo correspondente a três vezes o dez. Assim, podemos inferir que E1 reconhece que ao alterar a ordem dos fatores na multiplicação, não altera o produto (*propriedade comutativa da multiplicação*).

Contudo, na continuação desse excerto: “[...] *Nós vamos fazer 10 vezes o 3, daí o resultado menos 52* [...]”, inferimos que, de maneira errônea, E1 manifesta a propriedade comutativa da adição: do resultado de dez vezes o três (30), o estudante subtrai 52 como se o resultado fosse equivalente a subtrair 30 de 52. Contudo, como já mencionamos na análise do tratamento referente à primeira expressão, inferimos que a operação enunciada por E1 demonstra a falta de conhecimento sobre a operação no conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z} = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$) ou, simplesmente, distração ao enunciar, pois no registro escrito, a operação realizada está correta. Além disso, ao operar mentalmente (cujos indícios foram manifestados oralmente), o estudante evocou resultados intermediários e final corretos.

De uma maneira mais geral podemos, ainda, destacar algumas características relevantes. A díade D1, tendo descoberto os valores de cada símbolo da tarefa, por meio das equações 1, 2, 3, 4 e 5, não consideraram necessário operar sobre a sexta equação. Assim, pudemos inferir que a díade D1 reconhece que não há essa necessidade porque os *símbolos iguais correspondem a valores iguais*. Sendo assim, tendo em vista que já descobriram os valores correspondentes a cada símbolo por meio do tratamento das demais equações, é possível que a díade tenha percebido que operar sobre a sexta equação serviria apenas para confirmar o valor encontrado para os mesmos.

Para reforçar essa nossa constatação, consideramos quando os estudantes da díade D1 queriam descobrir o valor do símbolo vermelho, tendo como opções operar sobre a quarta ou a sexta equação, justificando que seria possível operar sobre qualquer uma destas, porém, na quarta equação havia menos símbolos diferentes, o que tornaria a operação menos trabalhosa do ponto de vista deles.

Quanto à ordem das equações que escolheram operar, nos permite identificar que: *a operação de uma equação do primeiro grau só é possível de ser realizada quando se tem apenas uma incógnita*, ou seja, quando se desconhece o valor de um símbolo apenas.

Ainda, no tratamento de cada equação da tarefa proposta inferimos que a díade D1 *reconhece o sinal de igualdade (=) como uma relação entre quantidades*, e não apenas de maneira operacional, ou seja, como indicador do resultado de uma operação. Nossa inferência se baseia no fato dos estudantes da díade D1 fazerem uso do elemento oposto na adição e do inverso multiplicativo em ambos os lados da igualdade. Ao agirem dessa forma, os estudantes E1 e E2 manifestaram conhecer, ainda que de maneira implícita, que para manter a equivalência, cada ação na equação exige operações equivalentes em ambas as quantidades (BLANTON e KAPUT, 2005).

Na sequência, apresentamos os esquemas correspondentes aos procedimentos sobre cada equação da tarefa não-rotineira que interpretamos a partir de manifestações da díade D2.

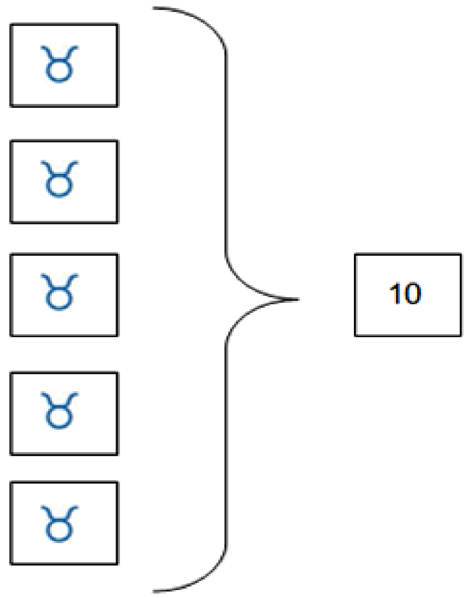
Quadro 6 – Esquemas da díade D2 para a tarefa não-rotineira

<table>
<tr><th>ORDEM DAS EQUAÇÕES</th><th>ESQUEMAS</th></tr>
<tr><td>

<u>2ª equação</u>

“**E3** – *Esse daqui vale 2.*
T2 – *E como você sabe?*
E3 – *Porque é 2, 4, 6, 8, 10. Aqui deu 10. Agora tem que fazer o desenho com quanto que vale?*
T2 – *E quanto vale? Vocês disseram que esse daqui valia quantos?*
E4 – *Dois*.
T2 – *Como você descobriu que é 2 esse daqui?*
E4 – *Porque somando a segunda fileira dá pra ver que é dois cada um, porque são cinco desenhos e o resultado é 10.*
T2 – *Mas o que tem a ver esses cinco desenhos para o resultado ser 10? Por que tem cinco desenhos e o resultado é 10?*” [não responderam]

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

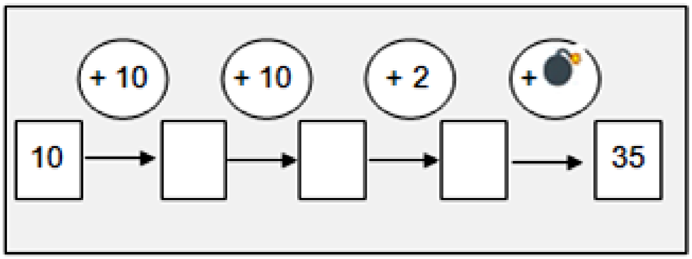
<u>1ª equação</u>

“**E4** – *Esse daqui é 10, eu acho*.
E3 – *É, eu também acho.*
E4 – *E esse daqui deve valer 3, porque 30, 32, 35. Não vai valer tanto assim porque se for cinco, aqui vai dar 17 e aqui vai dar... um monte!*
E3 – *Vai ter que dar 18!*
T2 – *Qual vocês fizeram agora?*
E4 – *Esse. Nós achamos que é 10.*
T2 - *Vocês acham que é? Será que não tem outro jeito de saber se é 10 mesmo ou não?*
E3 – *Tem como valer 12 esse sino aqui. Ah, tem um monte de jeito!”*

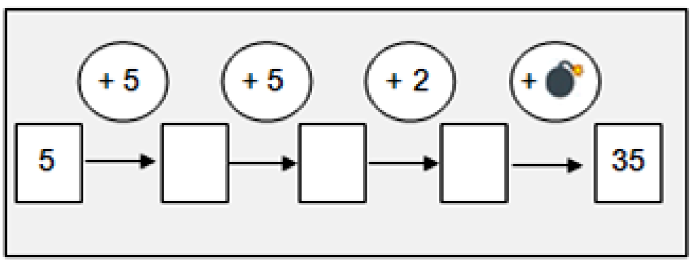
Diário de Campo: ao mencionar “*não vai valer tanto assim*” o estudante refere-se à bomba.

</td><td>

Esquema de E3 e E4:



Esquema de E4:



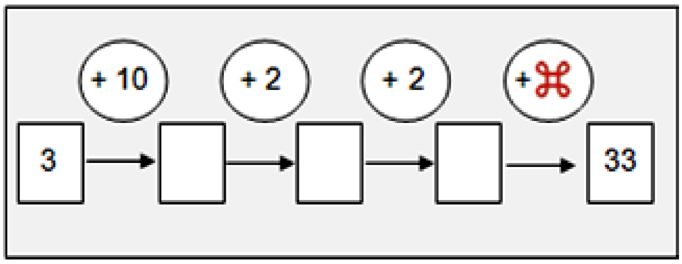
</td></tr>
</table>

<u>6ª equação</u>

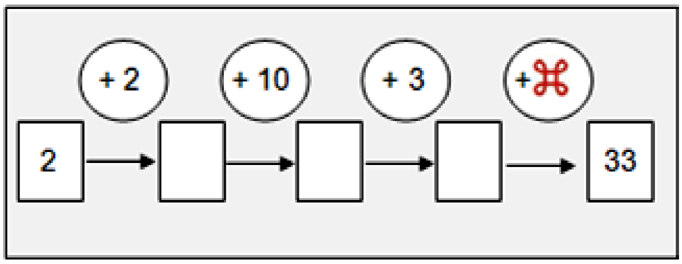
“**E4** – *Dez, se esse daqui valer 3, 13, 15, 17...*
E3 – *Peraí, vamos somar os que nós já sabemos. Dois com mais 10, 12, com mais...*
E4 – *2 com 2, 4, mais 10, 14, mais 3, 17.*
T2 – *Deu 17 no resultado?*
E3 – *Dezessete. Agora falta esse vermelho aqui. Vai dar 16”.*

Diário de Campo: É possível verificar que os alunos utilizam a ideia de “falta” para realizar subtrações e, além disso, utilizam com frequência contagens com os dedos.

Esquema de E4:



Esquema de E3 e E4:



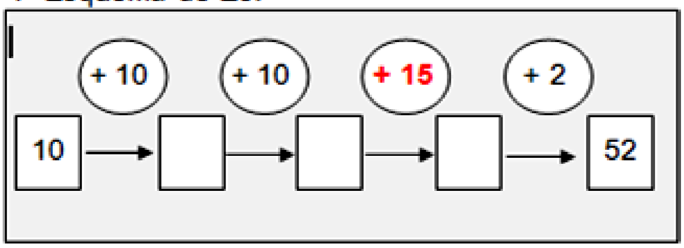
<u>3ª equação</u>

“**E3** – *Vamos lá! Dois com mais esse verdinho... esse daqui é difícil! Dez mais 10 mais 10, 30. Mais 15, 45... não dá... 20, 40, 60... não dá também... 15, 30, 45...*
E4 – *Dá para descobrir esse vermelho no de baixo, né?*

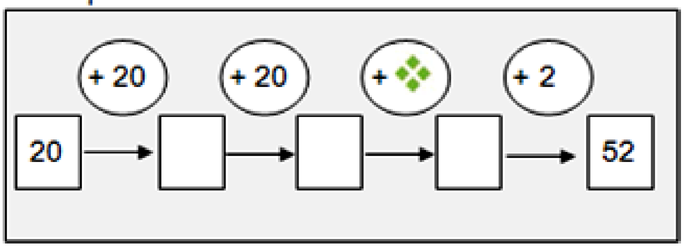
Diário de Campo: E4 estava utilizando a adição dos símbolos que eles já sabiam o valor, mas E3 o convenceu a analisar a expressão três da qual não conheciam todos os símbolos.

E4 – *Quinze... 45, 47... 48, 49, 50, 51, 52! Vale 5 esse daqui!*”

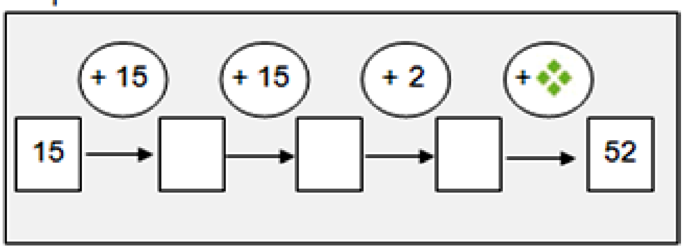
1º Esquema de E3:

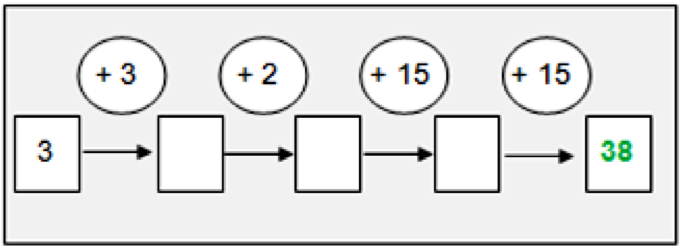


2º Esquema de E3:



Esquema de E3 e E4:



<u>4ª equação</u> “**E4** – *Opa, não terminou não. Vai ter que somar tudo.* **E3** – *Por que somar tudo?* **E4** – *Para saber todos os valores. Nós não somamos essa 4ª linha... 3, 6, 8,...15 mais 15, 16, 17, 18,...* **E3** – *38...* **E4** – *26! 27, 28, 29, 30, [...], 38. Opa! Fiz errado! 38, 39, 40, [...], 53! Ahn? Peraí, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38.* **Diário de Campo**: Conferem as contas novamente e continuam obtendo o resultado 38. Assim, desistem. **E4** – *Ahhh... pronto!*”	

Fonte: Da autora.

Considerando os esboços dos possíveis esquemas evocados pela díade D2, apresentaremos nossas primeiras análises e interpretações as quais nos possibilitaram inferir algumas características operatórias.

Seguindo a ordem dos esquemas evocados pelos estudantes da díade D2, conforme mostra o Quadro 6, o primeiro esquema que analisamos corresponde à operação sobre a segunda equação. Diante desta equação, a díade D2 rapidamente descobriu que o valor do símbolo azul seria dois, pois, como há cinco símbolos iguais e o resultado é dez, apenas o valor dois satisfaz a equação. Ao analisarmos a resposta do estudante E4 “*Porque somando a segunda fileira dá pra ver que é dois cada um, porque são cinco desenhos e o resultado é 10*”, quando ele menciona “*dá pra ver que é dois*”, inferimos que o fato de se tratar de valores pequenos e de haver apenas um tipo de símbolo facilitou a atribuição de um valor que pôde ser resgatado da memória. Esse fato ainda nos leva a inferir que os estudantes não consideraram o sinal de igualdade (=) como uma relação entre quantidades, mas simplesmente como *indicador do resultado de operações*, o que foi verificado também no tratamento de outras equações como veremos mais adiante.

Além disso, percebemos na fala de E3 “*Porque é 2, 4, 6, 8, 10. Aqui deu 10”*, que os estudantes realizam *sobrecontagem* de dois em dois, o que indica apropriações de regularidades do sistema de numeração decimal, com relação aos múltiplos naturais de dois.

De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (2009), identificamos que o esquema evocado pelos estudantes no tratamento da segunda equação corresponde à relação de base composição de medidas, a qual envolve situações parte-todo, uma vez que os estudantes somaram as cinco partes iguais a dois para obterem o todo (10).

Na sequência, os estudantes da díade D2 operaram sobre a primeira equação. Diferentemente da díade D1, a díade D2 não considerou que seria mais fácil operar sucessivamente sobre as equações que apresentavam apenas um símbolo desconhecido.

Como podemos observar nos dois esquemas esboçados (os quais são destacados por quadros coloridos de cinza), nessa primeira equação os estudantes realizaram, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 2009) a relação de base *composição de duas transformações*. No caso, porém, a composição foi realizada não apenas entre duas transformações, mas entre quatro, e reconhecemos essa relação de base pelo fato da incógnita não estar na medida final, como ocorre, por exemplo, na relação de base *transformação de uma medida inicial em uma medida final*, mas estar nas transformações. Com isso inferimos, ainda, que mais uma vez os estudantes consideram *o sinal de igualdade (=) como indicador do resultado de uma operação*. Essa inferência se baseia no fato dos estudantes considerarem o valor trinta e cinco apenas como o resultado da relação aditiva entre os símbolos, não considerando esse valor como equivalência que poderia contribuir na determinação de valores dos símbolos desconhecidos.

De maneira análoga ao tratamento dessa equação, percebemos nos esquemas esboçados no Quadro 6, com relação ao tratamento de outras equações, que a mesma relação de base (VERGNAUD, 2009) é utilizada pela díade D2 e que o mesmo aspecto com relação ao sinal de igualdade é manifestado.

Sendo a primeira uma equação de primeiro grau apresentando duas incógnitas (o sino e a bomba), a única estratégia encontrada pelos estudantes da díade D2 foi a de tentativa e erro. Nessa estratégia os estudantes optaram por atribuir valores iguais para os três sinos, manifestando que *símbolos iguais correspondem a valores iguais*, e, em seguida, pensar no valor que “faltava” para obter o resultado trinta e cinco.

Essa *ideia de “falta” nas operações de subtração* é relatada em diário de campo pela testemunha T2 como sendo utilizada com frequência pelos estudantes da díade D2. Contudo, esta ideia de falta ainda nos permite inferir outra característica: *reconhecem que na subtração de números naturais, subtrai-se o número menor do maior*.

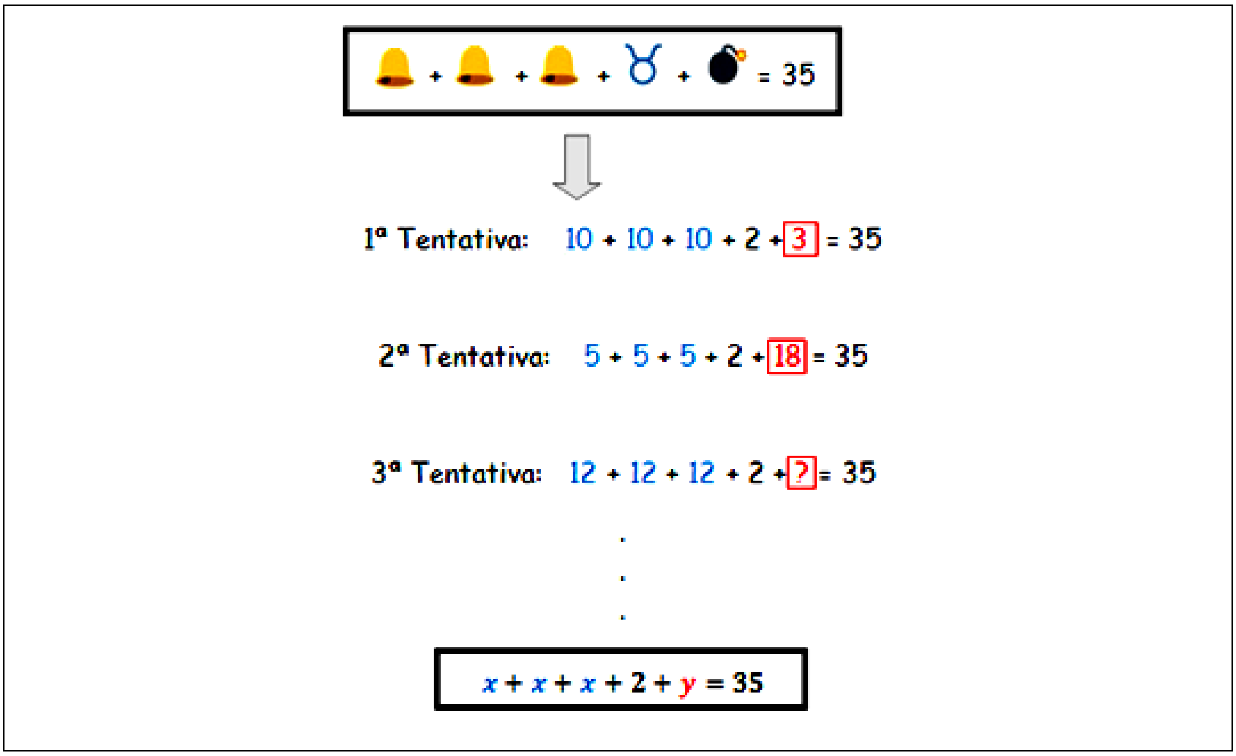
Quanto aos valores atribuídos ao sino, percebemos que não foram escolhidos pelos estudantes aleatoriamente: como mostram os dois esquemas esboçados no Quadro 7, os valores escolhidos foram o dez e o cinco, talvez por considerarem esses valores como mais simples para operarem. Nisso, mais uma vez percebemos a apropriação desses estudantes com relação às regularidades do sistema de numeração decimal, pois exprimem corretamente os múltiplos de dez e de cinco.

Realizada a estratégia de tentativa e erro, os estudantes da díade D2 concluem que o valor do sino é dez, pois, se fosse cinco, o valor da bomba seria muito grande. Porém, não justificam porque acreditam que a bomba não poderia ter um valor dessa grandeza.

Ao utilizarem a estratégia de tentativa e erro para determinar valores para o sino e a bomba e considerarem o sinal da igualdade simplesmente como indicador do resultado da operação, a díade D2 manifesta uma característica que justifica a escolha por essa estratégia: percebem que *não é possível determinar de maneira exata os valores de dois símbolos desconhecidos nessa equação, uma vez que qualquer valor poderia ser atribuído para o sino, o que, consequentemente, variaria o valor da bomba e, ainda, manteria o valor da igualdade*.

Na Figura 14 ilustramos as três tentativas da díade D2 para a primeira equação: as atribuições dos valores dez, cinco e doze para o sino (os quais destacamos na cor azul), obtendo, respectivamente, os valores três, dezoito e um valor que não determinaram para a bomba (os quais destacamos na cor vermelha), de maneira a obterem o mesmo resultado, trinta e cinco. Essas tentativas possibilitaram à díade D2 concluírem que poderiam obter diversos valores diferentes para o símbolo do sino (que chamamos de x) e, em consequência, para o símbolo da bomba (que chamamos de y), o que inferimos pela fala de E3: “*Ah, tem um monte de jeito!”*.

Figura 14 – Tratamento da 1ª equação – Díade 2



Fonte: Da autora.

Ainda, destacamos a ideia de “falta” nas subtrações realizadas pelos estudantes da díade D2, que pode ser considerado como pensamento quase-variável (FUJII; STEPHENS, 2008). Tendo obtido o resultado de uma soma parcial, os estudantes buscaram determinar o valor que acrescido a essa soma resultaria em trinta e cinco. Por exemplo: $10 + 10 + 10 + 2 + \square = 35$.

A próxima equação escolhida foi a sexta, na qual E3 e E4 buscaram determinar o valor do símbolo vermelho. Nesse momento percebemos que os estudantes notaram que seria mais fácil operar sobre uma equação na qual desconheciam apenas um dos símbolos. Dessa forma, já não seria necessário recorrer à estratégia de tentativa e erro.

Os dois esquemas esboçados (separados por quadros coloridos de cinza) mostram duas operações no campo aditivo: E4 começa somando os valores da bomba (3), do sino (10) e dos dois símbolos azuis (2), enquanto E3, com a ajuda de E4, começa somando os dois símbolos azuis (2), para em seguida, adicionar os valores do sino (10) e da bomba (3), obtendo o mesmo resultado que na primeira operação, realizada por E4. Com isso, inferimos que os estudantes E3 e E4 reconhecem que alterar a ordem das parcelas na adição de números naturais não altera o resultado final. Assim, identificamos *a associatividade da adição de números naturais*.

Por fim, E3 e E4 calculam quantos “faltam” para obter o resultado 33 e, assim como no tratamento da primeira equação, a díade D2 utiliza a *ideia de “falta” para realizar subtrações*.

A testemunha T2, que acompanhou a díade D2, destacou no diário de campo essa ideia de “falta” utilizada pelos estudantes ao se envolverem com a subtração. Além disso, destacou que com frequência os estudantes realizavam contagens fazendo *bijeção entre números e dedos das mãos*. Com isso, inferimos que esses estudantes, muitas vezes ainda precisavam se apoiar em algo concreto para realizar operações, e foi a frequência dessa necessidade que nos levou a considerar a *bijeção entre número e dedos das mãos* como característica operatória.

Na sequência, no tratamento da terceira equação, os estudantes da díade D2 não consideraram o valor obtido para o símbolo vermelho por meio do tratamento da sexta equação, atribuindo valores para este símbolo, mais uma vez, por meio da estratégia de tentativa e erro. O estudante E4 igualmente desconsiderou esse fato, mas chegou a sugerir que operassem primeiro sobre a quarta equação, na qual apenas o símbolo vermelho era desconhecido. Porém, E3 o convenceu a continuarem operando sobre a terceira equação, onde se depararam com um problema análogo ao tratamento da primeira: uma equação de primeiro grau com duas incógnitas.

O estudante E3 convence E4 de que precisam operar primeiro sobre a terceira equação porque acredita que todos os tratamentos devem ser realizados na ordem em que cada equação aparece, de cima para baixo. Em certo momento da gravação E3 justifica que a maneira como fizeram, operando sobre a sexta equação, estava errado, pois era preciso operar na ordem: primeiro, a primeira equação, depois, a segunda, e assim sucessivamente. Por esse motivo, desconsideraram o valor que obtiveram para o símbolo vermelho.

Deste modo, a única maneira de determinar valores para os símbolos desconhecidos na terceira equação seria por meio da estratégia de tentativa e erro, pois, mais uma vez, manifestaram que *não é possível determinar de maneira exata os valores de dois símbolos desconhecidos em uma equação do 1º grau, uma vez que diversos valores poderiam ser atribuídos para uma das incógnitas, o que,* *consequentemente, variaria o valor da outra incógnita e, ainda, manteria o valor da igualdade*.

No Quadro 6 destacamos três esquemas, nos quais percebemos que os estudantes atribuem valores múltiplos de cinco para os símbolos iguais, no caso, para os três símbolos vermelhos. O estudante E3 começou atribuindo o valor dez para o símbolo vermelho, mas percebeu que, dessa forma, o valor do símbolo verde seria um número muito grande (mesma consideração sem justificativa que fez no tratamento da primeira expressão, com relação à grandeza do valor da bomba).

Nesse momento, o estudante já não utiliza a ideia de “falta” para subtrair o resultado da soma obtida entre os símbolos com valores já determinados com o resultado esperado, mas atribui um valor para o símbolo verde e verifica se o resultado da soma deste com os valores dos símbolos vermelhos e azul satisfaz o resultado esperado. Não tendo satisfeito o resultado esperado, o próximo valor atribuído pelo mesmo estudante para o símbolo vermelho foi o vinte, porém, logo percebeu que esse valor era grande demais. Em seguida, atribuiu o valor 15 para o símbolo vermelho e, com o auxílio de E4, descobriu que o valor do símbolo verde seria cinco pelo procedimento de “falta” na operação de subtração, considerando esses valores como os corretos.

Em nenhum momento os estudantes da díade D2 refletiram sobre a proximidade do valor do símbolo vermelho obtido nesse momento (15) com o obtido ao operarem sobre a sexta equação (16). Da mesma forma, não mencionaram em nenhum momento que, assim como na primeira equação, diversos valores poderiam ser atribuídos para os símbolos verdes e vermelhos.

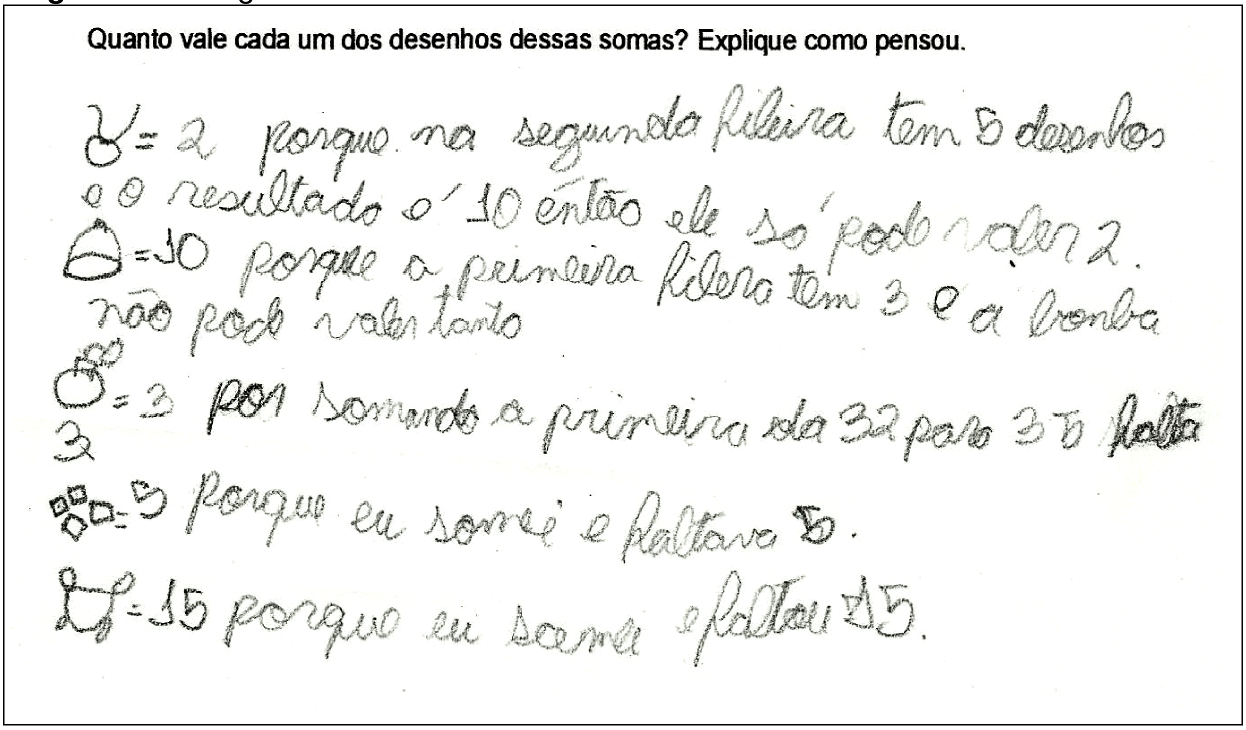
Mesmo já tendo descoberto valores para todos os símbolos da tarefa, a díade D2 decidiu operar sobre a quarta equação, pois, como haviam considerado, era preciso operar sobre as equações na ordem em que apareciam, de cima para baixo.

Dessa forma, no tratamento da quarta equação, os estudantes substituíram os valores obtidos e os somaram, manifestando reconhecerem que *símbolos iguais possuem o mesmo valor,* obtendo como resultado o valor trinta e oito, que no esquema esboçado no Quadro 6 destacamos na cor verde por não representar o valor correto que deveria ser obtido (46).

Logo, os estudantes E3 e E4 perceberam que alguns valores que obtiveram para os símbolos estavam errados e acreditaram que seria necessário iniciar a tarefa novamente. Assim, resolveram desistir.

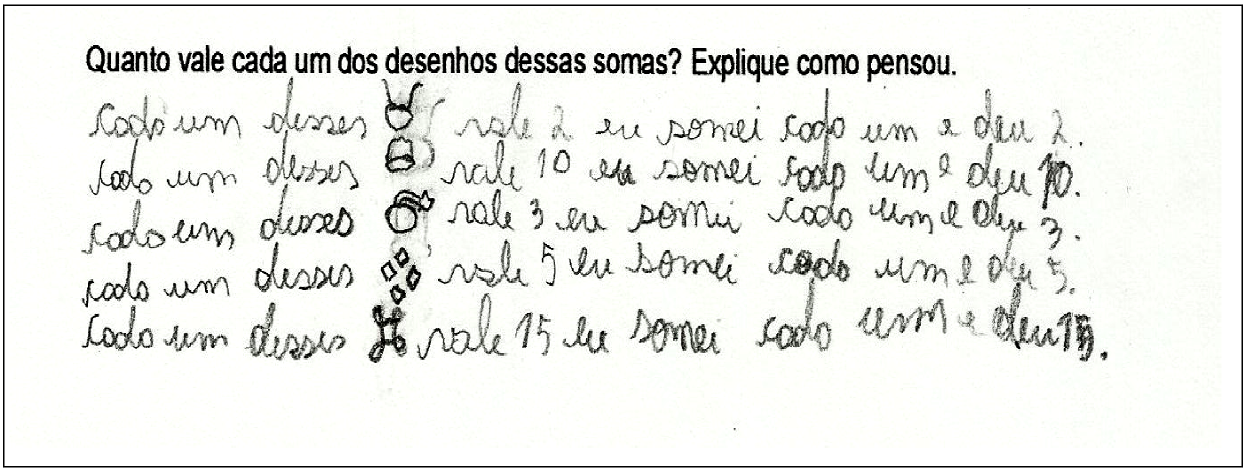
A seguir, apresentamos os registros escritos de E4 e E3, em que fica claro que os estudantes não conseguiram finalizar a tarefa de maneira correta.

Figura 15 – Registro do estudante E4



Fonte: Da autora.

Figura 16 – Registro do estudante E3



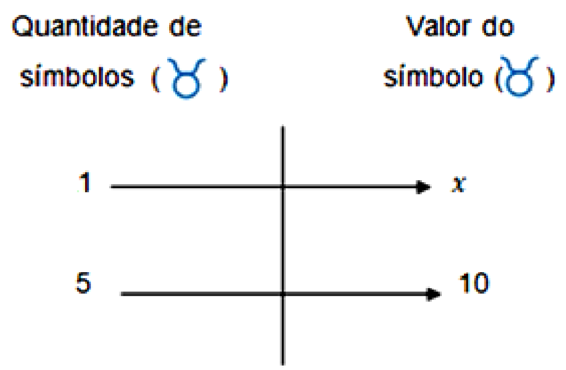
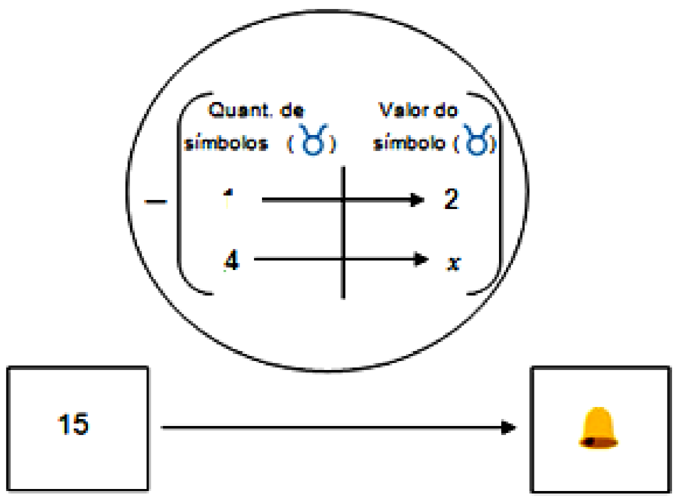
Fonte: Da autora.

No registro escrito de E4, e considerando as transcrições da gravação em áudio, percebemos que ele apresenta uma justificativa coerente para a determinação do símbolo azul. Em contrapartida, para obter o valor do sino fica claro a estratégia de tentativa e erro: eles estipulam valores para o sino, o qual aparece três vezes na primeira equação, e defendem que a bomba possui um valor menor, talvez pela menor frequência com que aparece nessa mesma equação. Em seguida, para os símbolos verde e vermelho, apenas pelo registro escrito, não fica claro como E4 determinou seus valores, ou seja, não especifica sobre quais equações ele operou para evocar esses resultados.

No geral destacamos, ainda, que a díade D2 manifesta a *adição reiterada* em muitos casos em que poderiam realizar uma multiplicação. Porém, em nenhum momento manifestaram essa correspondência entre adição e multiplicação, permanecendo, durante o tempo todo de envolvimento com essa tarefa, apenas no campo aditivo.

Na sequência, apresentamos os esboços dos esquemas que inferimos a partir de nossas interpretações a respeito de manifestações da díade D3 durante envolvimento com a tarefa não-rotineira.

Quadro 7 – Esquemas da díade D3 para a tarefa não-rotineira

ORDEM DAS EQUAÇÕES	**ESQUEMAS**
<u>2ª equação</u> "**E5 –** *Esse daqui tem 5, e dez dividido por 5 dá 2.* **T3 –** *E como você sabe que todos eles valem o mesmo tanto?* **E5 –** *Porque são iguais*."	
<u>5ª equação</u> "**E5** – *Deu 7 esse daqui. Porque aqui tem quatro desses daqui e cada um vale 2, e quatro vezes 2 dá 8, e 15 menos 8 dá 7.* **T3** – *E porque vocês decidiram por essa linha?* **E6** – *Porque é mais fácil.* **E5** – É *mais fácil porque tem mais desses* azuis".	

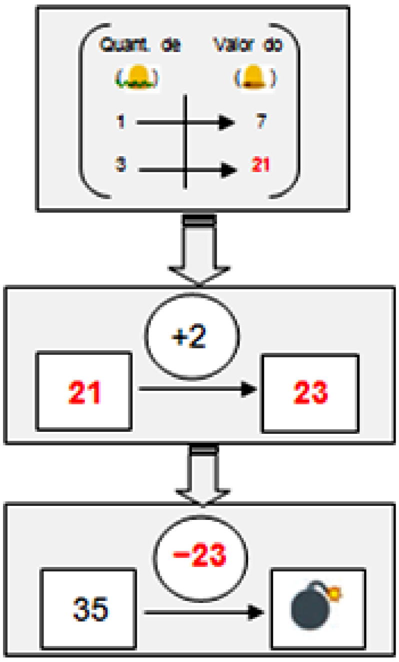
<table>
<tr>
<td>

<u>1ª equação</u>

Eles conversam muito baixo.

“**E6** – *12.*”

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

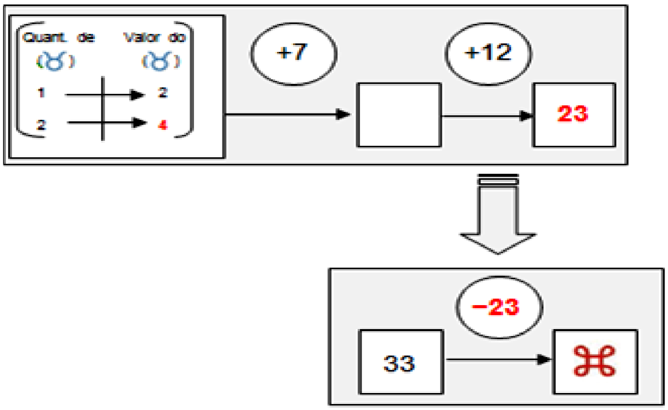
<u>6ª equação</u>

“**E6** – *10.*

T3 – *Porque esse deu 10?*

E5 – *Porque nós fizemos a soma desses que deu 23, e daí fez 33 menos 23, deu 10.*”

</td>
<td>



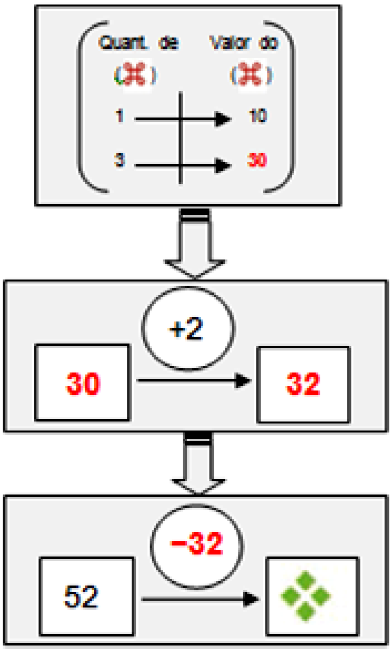
</td>
</tr>
<tr>
<td>

<u>3ª equação</u>

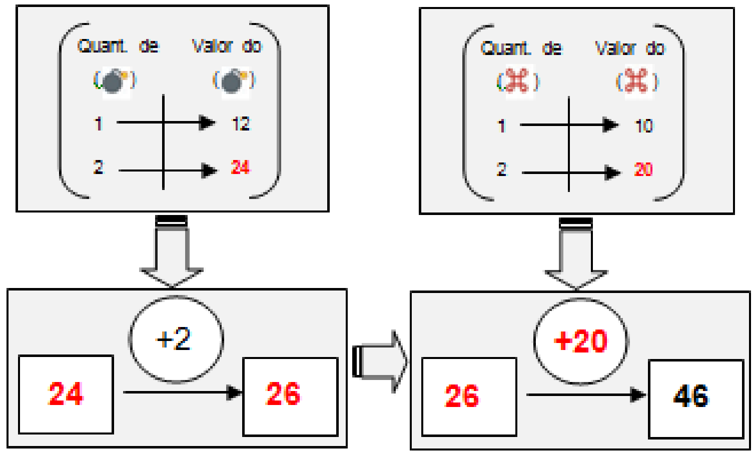
Eles conversam muito baixo.

“**E6** – *20.*”

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

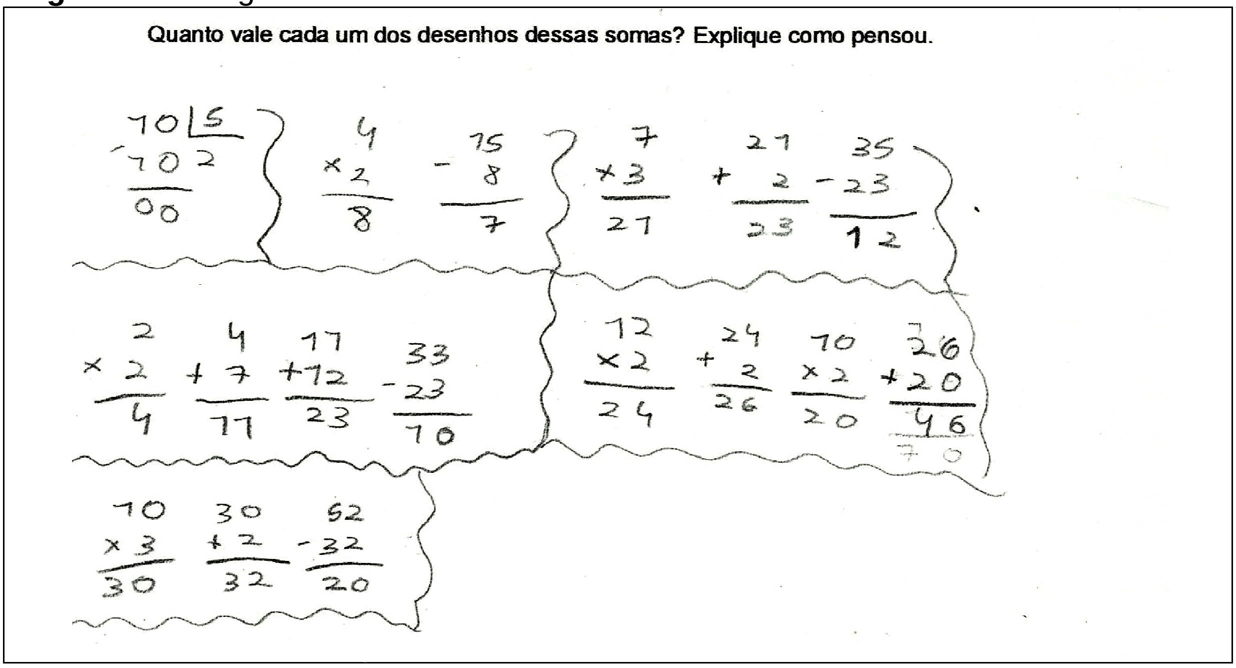
<u>4ª equação</u> Apresentaram apenas registro escrito	

Fonte: Da autora.

No Quadro 7, para esboçarmos os esquemas evocados para tratamento das equações segunda, quinta e sexta consideramos os enunciados orais dos estudantes. Quanto ao esboço dos esquemas evocados no tratamento das equações primeira, terceira e quarta consideramos os registros escritos ou porque os estudantes não manifestaram oralmente como procederam, ou porque não foi possível ouvir suas explicações na gravação em áudio.

Na figura a seguir, apresentamos o registro escrito de E6:

Figura 17 – Registro do estudante E6



Fonte: Da autora.

Como já mencionamos na descrição, a ordem das equações tratadas pela díade D3 é análoga à ordem da díade D1. Porém, não é apenas a ordem das equações a única analogia que identificamos entre as díades D1 e D3. No Quadro 7 apresentamos os esboços dos esquemas evocados pela díade D3, onde percebemos o quanto os tratamentos sobre cada equação realizados por esses estudantes foram equivalentes aos dos estudantes da díade D1.

Tal como mencionamos, há muitas analogias entre os tratamentos realizados pelas díades D1 e D3. No primeiro esquema, tal como a díade D1, a díade D3 realizou, de acordo com Vergnaud (2009), um isomorfismo de medidas, ou seja, o esquema representa a correspondência entre duas espécies de quantidades: as quantidades do símbolo azul em questão e os valores equivalentes a determinadas quantidades desse símbolo. Por meio dessa correspondência entre as duas grandezas de naturezas diferentes, buscou-se descobrir o valor unitário, sendo necessário, para tanto, realizar uma divisão.

O tratamento é, portanto, o mesmo apresentado na Figura 7, onde apresentamos o tratamento da díade D1 para a segunda equação. Dessa forma, inferimos: *o reconhecimento da adição reiterada, ou seja, soma de n parcelas iguais, como uma multiplicação do fator que se repete n vezes*; *a utilização do inverso multiplicativo de 5; e o elemento neutro da multiplicação de números naturais* (1).

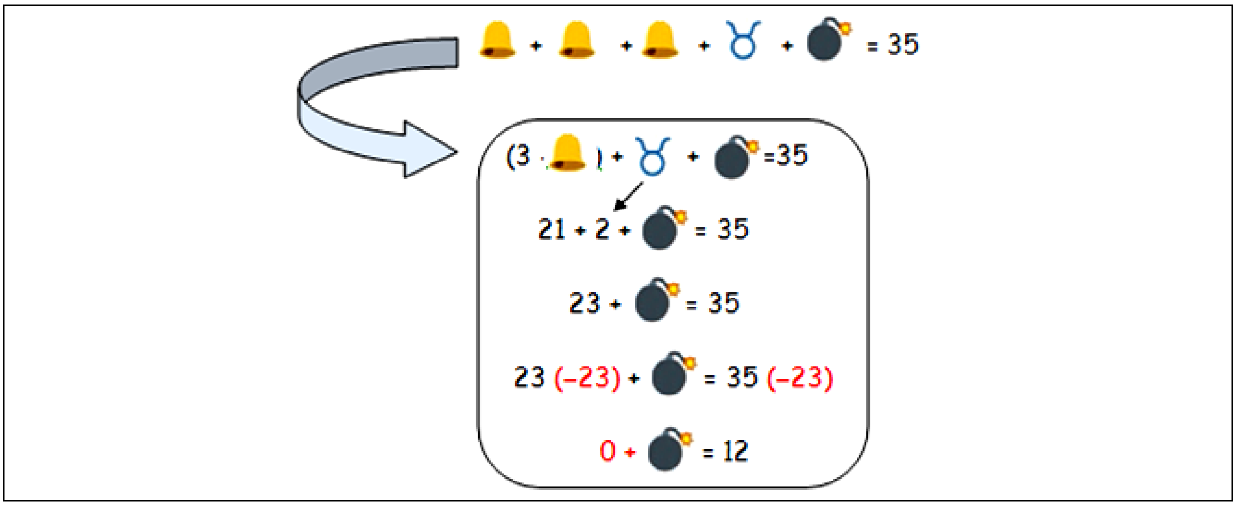
Na quinta equação o tratamento também foi o mesmo da díade D1, conforme mostra a Figura 8. Assim, inferimos: *a adição reiterada como uma multiplicação*; *o elemento oposto de 8 (−8)*; e *o elemento neutro da multiplicação nos inteiros* (1). Além disso, oralmente E5 realizou a multiplicação $4 \cdot 2$, enquanto no registro escrito o mesmo estudante realizou a multiplicação $2 \cdot 4$, obtendo o mesmo resultado. Dessa forma, outra característica pôde ser inferida: *a propriedade comutativa da multiplicação com números naturais*.

Em seguida, a díade D3 operou sobre a primeira equação. Por meio do esboço do esquema, o qual foi construído a partir de registros escritos, uma vez que não foi possível compreender o que os estudantes disseram pela gravação em áudio, identificamos a manifestação sucessiva de três esquemas, os quais são destacados em quadros cinzas.

O primeiro esquema corresponde, de acordo com Vergnaud (2009), a um isomorfismo de medidas, por meio do qual os estudantes da díade D3 buscaram determinar o valor de três sinos, sabendo o valor unitário deste, sendo necessário, para isso, realizar uma multiplicação. O resultado obtido tornou-se, no segundo esquema, uma medida inicial, à qual foram adicionadas duas unidades para obter uma medida final. Por fim, o resultado obtido nesse segundo esquema tornou-se um número relacional, representando a transformação de uma medida inicial em uma medida final (o valor da bomba).

Dessa forma, inferimos que, assim como a díade D1, a díade D3 buscou subtrair os valores dos símbolos sino e azul, que já conheciam, para obter o valor da bomba. Contudo, a díade D1 foi subtraindo do valor total da equação (35) os valores que já conheciam, enquanto que a díade D3 agregou os valores já conhecidos para, por fim, subtrair do valor total da equação, conforme podemos observar na figura 18.

Figura 18 – Tratamento da 1ª equação – Díade 3



Fonte: Da autora.

Por meio do tratamento apresentado na Figura 18, bem como do esboço dos esquemas para essa primeira equação que apresentamos no quadro 9, inferimos que a díade D3 operou tanto no campo aditivo quanto no multiplicativo.

Ainda que a maneira como a díade D3 operou sobre a primeira equação tenha sido diferente da díade D1, podemos inferir que o tratamento realizado por esses alunos corresponde a uma maneira de solucionar uma equação de primeiro grau com uma incógnita ($ax + b = c$).

No primeiro passo do tratamento da primeira equação da tarefa, a díade D3 operou no campo multiplicativo, realizando, o que consideramos como a *adição reiterada como uma multiplicação*.

Operando no campo aditivo, no quarto passo do tratamento sobre a primeira equação a díade D3 manifestou a adição pelo *elemento oposto* (-23). Ainda, no quinto e último passo, manifestou: o *elemento neutro da adição (0) com números inteiros*.

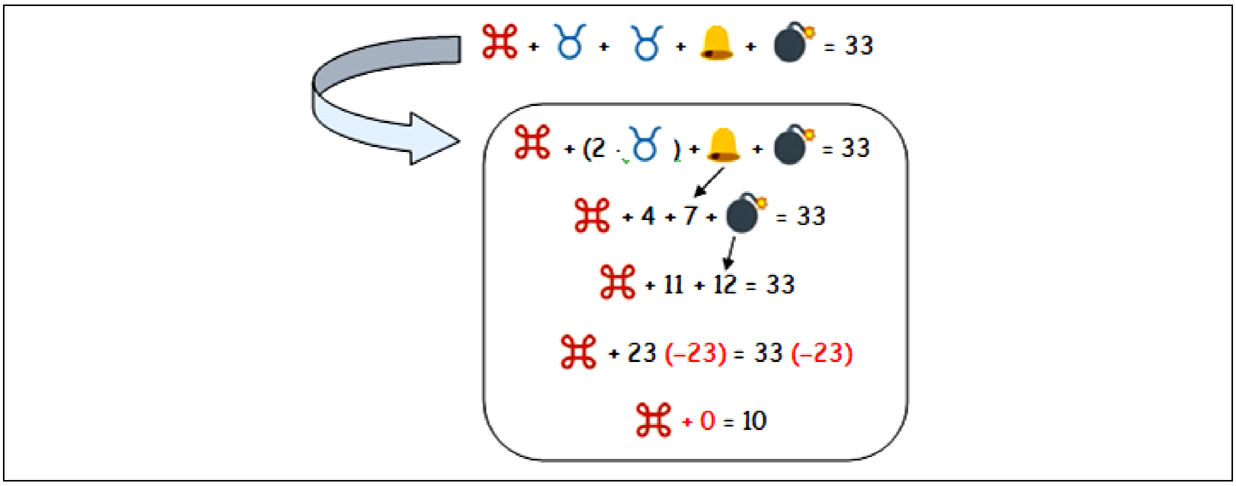
Na continuidade da tarefa, a díade D3 operou sobre a sexta equação. Nesta operação, os estudantes dessa díade utilizaram, sucessivamente, dois esquemas: o primeiro corresponde, segundo Vergnaud (2009), à transformação de uma medida inicial em uma medida final. Porém, como podemos observar no esquema apresentado no Quadro 7, a medida inicial não passou por apenas uma transformação, mas por duas, determinando, dessa forma, uma medida intermediária antes de chegar à medida final. Ainda, a medida inicial foi obtida por meio de um isomorfismo de medidas, no qual se conhecia o valor unitário de um símbolo azul e, a partir dessa informação, determinou-se o valor de dois símbolos azuis, realizando uma multiplicação.

Apesar de na fala de E5 "*Porque nós fizemos a soma desses que deu 23 [...]*" o estudante ter mencionado que realizou uma soma, nos registros escritos de E5 e E6 esses estudantes realizaram primeiro a multiplicação de dois símbolos azuis para, então, realizar as somas a que E5 se refere. Por isso, ao construirmos os esquemas referentes à sexta equação consideramos um isomorfismo de medidas representando a medida inicial no primeiro esquema.

Em seguida, a medida final obtida no primeiro esquema, se torna um número relacional no segundo esquema, transformando uma medida inicial em uma medida final, sendo esta o valor do símbolo vermelho.

Assim, mais uma vez pudemos inferir que a operação realizada sobre a sexta operação é análoga à resolução de uma equação de primeiro grau do tipo $ax + b = c$, tal como apresentamos na Figura 19.

Figura 19 – Tratamento da 6ª equação – Díade 3



Fonte: Da autora.

Considerando os esquemas apresentados no Quadro 7, e com o auxílio do esboço do tratamento apresentado na figura 19, inferimos que ao operarem sobre a sexta equação a díade D3 manifestou: *adição reiterada como multiplicação* no primeiro passo de resolução, *adição pelo elemento oposto* no quarto passo, e *elemento neutro da adição* no quinto passo.

A próxima operação foi realizada sobre a terceira equação, para qual construímos os esboços dos esquemas considerando apenas os registros escritos de E5 e E6, pois não foi possível compreender o que esses estudantes manifestaram oralmente por meio da gravação de áudio.

Como podemos observar no Quadro 7, para essa terceira equação a díade D3 recorreu a três esquemas sucessivos. No primeiro, realizaram um isomorfismo de medidas, no qual foi realizada uma multiplicação para determinar o valor de três símbolos vermelhos, a partir do valor de apenas um desse símbolo. No segundo esquema, o resultado obtido no esquema anterior representa a medida inicial que foi transformada para obter uma medida final. No terceiro e último esquema, o resultado obtido no esquema anterior representa um número relacional, que transforma a medida inicial, em uma medida final, sendo esta o valor do símbolo verde.

Dessa forma, mais uma vez observamos um tratamento análogo aos das equações primeira e sexta e, portanto, inferimos a manifestação de: *adição reiterada como multiplicação*, *adição pelo elemento oposto*, e *elemento neutro da adição*.

Por fim, ainda que não tenham manifestado oralmente, a díade D3 apresenta por escrito o tratamento referente à quarta equação. Como os valores de todos os símbolos já foram determinados, entendemos que esta operação foi realizada apenas para conferência dos resultados obtidos.

Por meio dos esquemas apresentados no Quadro 7, os quais foram construídos a partir dos registros escritos de E5 e E6, inferimos duas operações no campo multiplicativo e duas no campo aditivo.

Primeiro, foi realizado um isomorfismo de medidas que consistiu em uma multiplicação para determinar o valor de duas bombas, a partir do conhecimento do valor de uma. Em seguida, o resultado obtido passou a representar a medida inicial no segundo esquema que, ao passar por uma transformação, resultou em uma medida final. Essa medida final representa em um terceiro esquema uma medida inicial.

No terceiro esquema, o número relacional que transforma a medida inicial é oriundo de um isomorfismo de medidas, por meio do qual se buscou determinar o valor de dois símbolos vermelhos realizando, para isso, uma multiplicação. Por fim, a medida final obtida corresponde ao valor total da quarta equação (46).

Assim, mais uma vez observamos um tratamento análogo ao de uma equação do primeiro grau com uma incógnita e, assim, inferimos a *adição reiterada como multiplicação*.

Além das características operatórias que identificamos ao descrevermos as operações sobre cada equação, de maneira mais geral, evidenciamos a manifestação de que: *reconhecem que símbolos iguais correspondem a valores iguais*; *a operação de uma equação do primeiro grau só é possível de ser realizada quando se tem apenas uma incógnita*, sendo este inferido ao considerarmos a ordem das equações em que a díade D3 escolheu operar; no tratamento de cada operação da tarefa inferimos que a díade D3 *reconhece o sinal de igualdade (=) como uma relação entre quantidades*, o que inferimos a partir da manifestação de utilização de elemento oposto na adição em ambos os lados da igualdade e na operação sobre a quarta linha para simples conferência; e, tanto nas manifestações orais quanto escritas notamos que os estudantes E5 e E6 realizam corretamente as operações de subtração, reconhecendo que nessa operação *subtrai-se o valor menor do valor maior* nas operações com números naturais.

Ainda, pudemos perceber no tratamento das equações a característica correspondente à *propriedade associativa da adição*. Afinal, ainda que de maneira implícita, a díade D3 reconhece que se somarem primeiro um símbolo ou outro em cada equação, obterão o mesmo resultado do que se somassem o valor dos símbolos na ordem em que aparecem.

As características que inferimos nos procedimentos de resolução dos estudantes participantes da pesquisa, características estas baseadas em estudos sobre o pensamento algébrico, sobretudo de Blanton e Kaput (2005), destacamos no quadro a seguir como unidades de análise desta pesquisa.

Quanto a estas unidades de análise, vale destacar que estas correspondem apenas a aquelas que consideramos como pertinentes para atender nossos objetivos com a pesquisa e, portanto, reconhecemos a existência de inesgotáveis características de procedimentos de cálculo que podem ter sido manifestadas, mas que desconsideramos na presente pesquisa.

Quadro 8 – Síntese das unidades de análise

UNIDADES DE ANÁLISE
I) Reconhecem que a adição de *n* parcelas iguais (adição reiterada) corresponde a uma multiplicação do fator que se repete *n* vezes.
II) Utilizam a adição de *n* parcelas iguais (adição reiterada), sem manifestar estabelecimento de correspondência entre esta e uma multiplicação do fator que se repete *n* vezes.
III) Realizam sobrecontagens envolvendo múltiplos de 2 e múltiplos de 5.
IV) Utilizam o inverso multiplicativo de *n* para balancear equações do primeiro grau quando a incógnita é multiplicada por *n*.
V) Utilizam o elemento neutro da multiplicação nos inteiros (1), obtido após aplicação do inverso multiplicativo de *n* em ambos os lados da igualdade.
VI) Utilizam o elemento oposto de *n* na adição para balancear equações do primeiro grau quando a incógnita é somada por *n*.
VII) Utilizam o elemento neutro da adição (0), obtido após aplicação do elemento oposto de *n* em ambos os lados da igualdade.
VIII) Realizam a comutatividade da multiplicação com números naturais, ou seja, $n \cdot m = m \cdot n$.
IX) Realizam a associatividade da adição com números naturais, ou seja, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
X) Reconhecem que na subtração de números naturais, subtrai-se o número menor do maior.
XI) Utilizam a ideia de “falta” com frequência na subtração de números naturais.
XII) Consideram que símbolos iguais correspondem a valores iguais em uma mesma equação.
XIII) Consideram que símbolos iguais correspondem a valores iguais em equações diferentes.
XIV) Não reconhecem que símbolos iguais correspondem a valores iguais em equações diferentes.
XV) Reconhecem que equações do primeiro grau só são possíveis de serem resolvidas quando envolvem apenas uma incógnita.
XVI) Consideram o sinal de “=” como representante de uma relação entre quantidades.
XVII) Consideram o sinal de “=” como indicação do resultado entre operações.

Fonte: Da autora.

4.3 A CATEGORIZAÇÃO

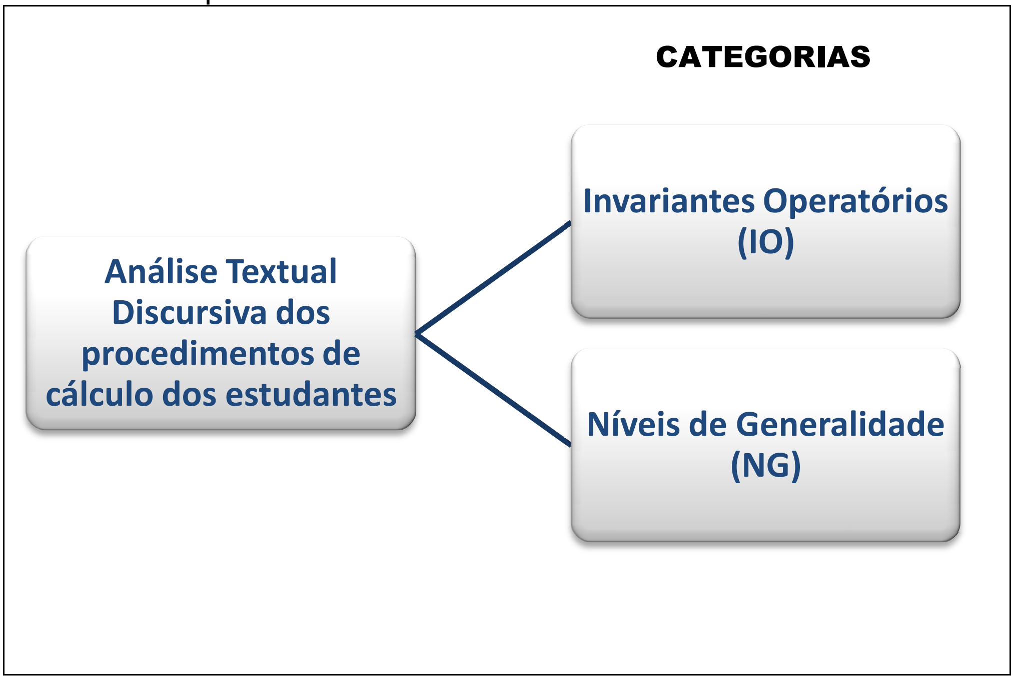
4.3.1 As Categorias e Subcategorias

As unidades de análise (Quadro 8) que elencamos a partir da exploração e primeiras interpretações do *corpus* serão organizadas em duas categorias *à priori*: Invariantes Operatórios (**IO**) e Níveis de Generalidade (**NG**).

Estas categorias foram definidas *à priori*, sendo elas originárias dos principais referenciais teóricos em que se ampara a presente pesquisa: Vergnaud (Teoria dos Campos Conceituais) e Radford (Níveis de Generalidade), respectivamente.

Estas categorias correspondem à análise textual discursiva que realizamos nos procedimentos de cálculo manifestados pelos estudantes participantes da pesquisa, conforme ilustra o esquema a seguir.

Figura 20 – Categorias *à priori* da análise textual discursiva dos procedimentos de cálculo dos estudantes



Fonte: Da autora.

I) Categoria **IO**: **<u>Invariantes Operatórios</u>**

Esta categoria compreende as características relacionadas aos números, operações e procedimentos de cálculo em geral que são manifestados constantemente pelos estudantes e que, por isso, podem ser considerados como invariantes operatórios.

Por usarem constantemente, ou seja, em diversas equações da tarefa não-rotineira com a qual se envolveram, algumas características comuns podem se constituir como invariantes operatórios do tipo *teoremas-em-ação*, os quais podem ser verdadeiros ou não.

De acordo com o exposto, podemos considerar que esta categoria compreende *todas as unidades de análise* que foram elencadas. Dessa forma, podemos considerar que as unidades de análise de nossa pesquisa são *invariantes operatórios*.

II) Categoria **NG**: **<u>Níveis de Generalidade</u>**

Nesta categoria são compreendidas as características relacionadas aos números, operações e procedimentos de cálculo em geral que são manifestados pelos estudantes, por diferentes meios semióticos, que permitem inferir o nível de generalidade em que cada estudante se encontra diante da tarefa em que se envolve.

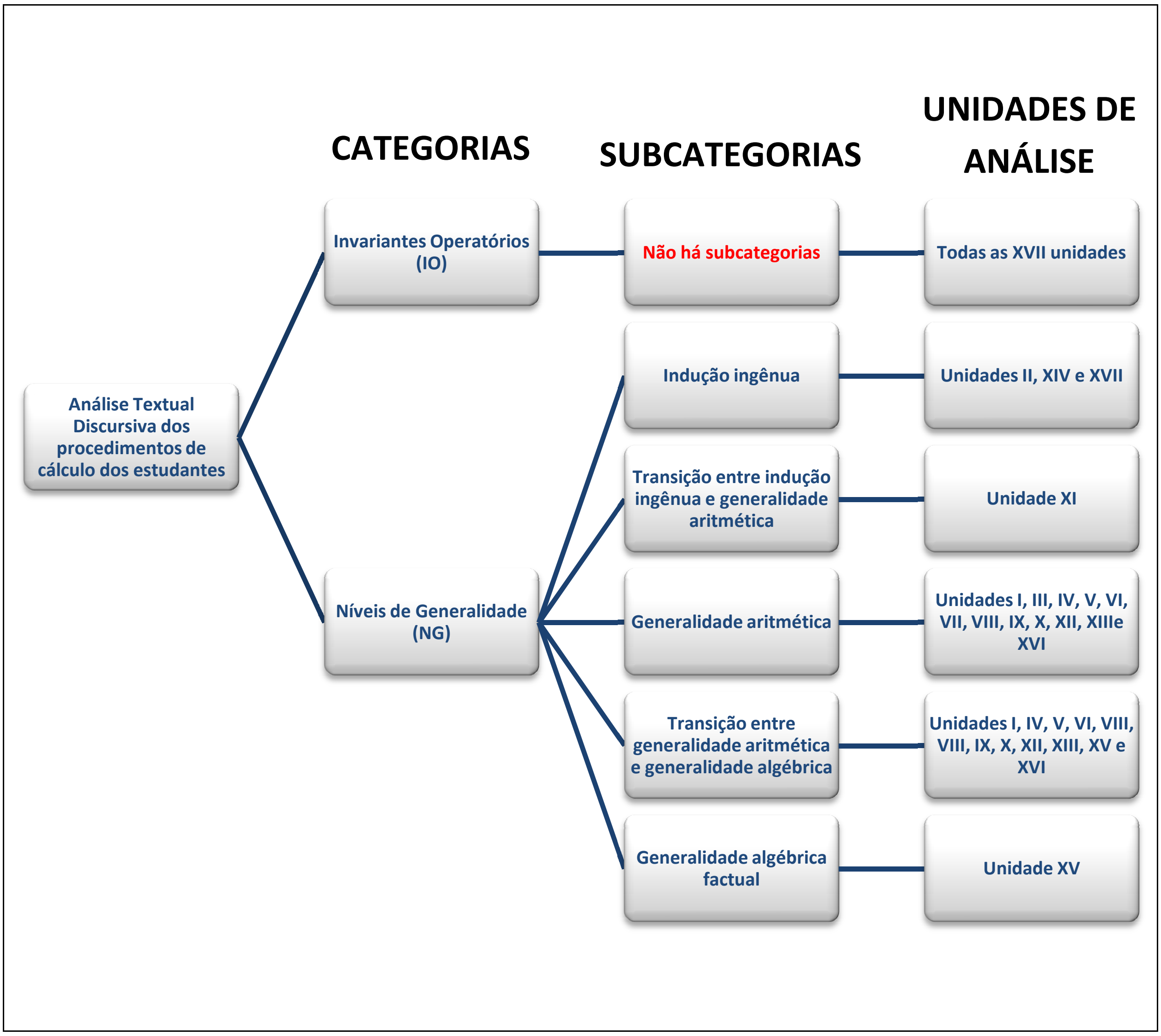
Esta categoria compreende cinco subcategorias: indução ingênua; transição entre indução ingênua e generalidade aritmética; generalidade aritmética; transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica; e, generalidade algébrica factual.

Dentre estas subcategorias, três são consideradas como *à priori*: indução ingênua; generalidade aritmética; e, generalidade algébrica factual. Assim são consideradas por terem sido baseadas em níveis de generalidade defendidos e elencados na teoria de Radford (2006).

As outras duas subcategorias, transição entre indução ingênua e generalidade aritmética e transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica, são consideradas como emergentes porque, ainda que baseadas na teoria de Radford (2006), não são deste modo apresentados por este autor, mas são constituídas a partir de uma mescla de características entre pares de níveis de generalidade elencadas pelo autor. Assim, essa categoria é considerada mista.

Todas as categorias, subcategorias e unidades de análise que foram definidas para a presente pesquisa são apresentadas na figura a seguir.

Figura 21 – Categorias, subcategorias e unidades de análise



Fonte: Da autora.

Na sequência, descrevemos cada uma das subcategorias definidas, as unidades de análise contempladas em cada uma delas e, ainda, apresentamos um exemplo tendo em vista justificar e auxiliar o entendimento de cada uma dessas subcategorias.

a) Subcategoria **S_1**: **Indução ingênua**

Nesta subcategoria contemplamos unidades de análise que nos permitem inferir como sendo inferiores a generalidade aritmética, ou seja, consideramos as unidades de análise cuja conclusão não se baseia na percepção de características comuns e na generalização a outras situações familiares que se seguem.

Na subcategoria S_1 contemplamos as unidades de análise:

- **II)** Utilizam a adição de n parcelas iguais (adição reiterada), sem manifestar estabelecimento de correspondência entre esta e uma multiplicação do fator que se repete n vezes;
- **XIV)** Não reconhecem que símbolos iguais correspondem a valores iguais em equações diferentes;
- **XVII)** Consideram o sinal de "=" como indicação do resultado entre operações.

Quadro 9 – Exemplo de unidade de análise da subcategoria S_1: Indução Ingênua

Unidade de análise	Excerto	Justificativa
<u>**XIV**</u> Não reconhecem que símbolos iguais correspondem a valores iguais em equações diferentes.	<u>**3ª equação**</u> **- (Díade 2)** "**E3** – *Vamos lá! Dois com mais esse verdinho... esse daqui é difícil! Dez mais 10 mais 10, 30. Mais 15, 45... não dá... 20, 40, 60... não dá também... 15, 30, 45...* **E4** – *Dá para descobrir esse vermelho no de baixo, né?* [E4 estava utilizando a adição dos símbolos que eles já sabiam o valor, mas E3 o convenceu a analisar a expressão três da qual não conheciam todos os símbolos – **Diário de Campo de T2**]. **E4** – *Quinze... 45, 47... 48, 49, 50, 51, 52! Vale 5 esse daqui!*"	Mesmo conhecendo o valor de um dos símbolos, o estudante E3 se deixa convencer por E4 que ele deveria operar sobre as equações de maneira a desconsiderar os valores de símbolos já obtidos em equações tratadas anteriormente.

Fonte: Da autora.

b) Subcategoria S_2: **Transição entre indução ingênua e generalidade aritmética**

Nesta subcategoria incluímos unidade de análise que nos permitiu inferir a apropriação de algumas ideias referentes a números ou operações, porém, que não representam relações e propriedades formais, tais como, comutatividade ou associatividade. Desta forma, são invariantes que manifestam determinada ideia referente a números ou operações, ideia esta que é aplicada em diversas situações semelhantes, mas que não caracteriza (ainda) uma propriedade que nos permitisse considerar como generalização aritmética.

Na subcategoria S_2 contemplamos a unidade de análise:

- **XI)** Utilizam a ideia de “falta” com frequência na subtração de números naturais.

Quadro 10 – Exemplo de unidade de análise da subcategoria S_2: Transição entre indução ingênua e generalidade aritmética

Unidade de análise	Excerto	Justificativa
XI Utilizam a ideia de “falta” com frequência na subtração de números naturais	**6ª equação – Díade 2** “**E4** – *Dez, se esse daqui valer 3, 13, 15, 17...* **E3** – *Peraí, vamos somar os que nós já sabemos. Dois com mais 10, 12, com mais...* **E4** – *2 com 2, 4, mais 10, 14, mais 3, 17.* **T2** – *Deu 17 no resultado?* **E3** – *Dezessete. Agora falta esse vermelho. Vai dar 16”*. [É possível verificar que os alunos utilizam a ideia de “falta” para realizar subtrações e, além disso, utilizam com frequência contagens com os dedos – **Diário de Campo de T2**].	Os estudantes utilizam a ideia de “falta” nas operações de subtração, como é no caso do excerto exemplificado: a partir de 17, eles determinam quantos “faltam” para 33. A ideia de “falta” é uma ideia referente a operação de subtração, mas que ainda não se constitui, de acordo com nossas inferências, como uma propriedade aritmética.

Fonte: Da autora.

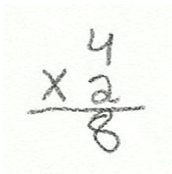
c) Subcategoria $\mathbf{S_3}$: **Generalidade aritmética**

Nesta subcategoria estão envolvidos os invariantes operatórios que correspondem a propriedades e relações de números ou operações, considerações do sinal de igualdade como uma relação entre quantidades, bem como o reconhecimento de incógnitas e variáveis e tratamento de equações, conforme características de aritmética generalizada que são apresentas por Blanton e Kaput (2005).

Na subcategoria S_3 contemplamos as unidades de análise:

- **I)** Reconhecem que a adição de n parcelas iguais (adição reiterada) corresponde a uma multiplicação do fator que se repete n vezes;
- **III)** Realizam sobrecontagens envolvendo múltiplos de 2 e múltiplos de 5;
- **IV)** Utilizam o inverso multiplicativo de n para balancear equações do primeiro grau quando a incógnita é multiplicada por n;
- **V)** Utilizam o elemento neutro da multiplicação nos inteiros (1), obtido após aplicação do inverso multiplicativo de n em ambos os lados da igualdade;
- **VI)** Utilizam o elemento oposto de n na adição para balancear equações do primeiro grau quando a incógnita é somada por n;
- **VII)** Utilizam o elemento neutro da adição (0), obtido após aplicação do elemento oposto de n em ambos os lados da igualdade;
- **VIII)** Realizam a comutatividade da multiplicação com números naturais, ou seja, $n \cdot m = m \cdot n$;
- **IX)** Realizam a associatividade da adição com números naturais, ou seja, $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- **X)** Reconhecem que na subtração de números naturais, subtrai-se o número menor do maior;
- **XII)** Consideram que símbolos iguais correspondem a valores iguais em uma mesma equação;
- **XIII)** Consideram que símbolos iguais correspondem a valores iguais em equações diferentes;
- **XVI)** Consideram o sinal de “=” como representante de uma relação entre quantidades.

Quadro 11 – Exemplo de unidade de análise da subcategoria S_3: Generalidade aritmética

Unidade de análise	Excerto	Justificativa
<u>**VIII**</u> Realizam a comutatividade da multiplicação com números naturais, ou seja, $n \cdot m = m \cdot n$	<u>**5ª equação**</u> **– Díade 1** "**E1** – *E agora a gente vai fazer... o 5º, porque ele tem quase todos os mesmos, só tem um que é diferente*. **T1** – *E o que vocês vão fazer agora?* **E1** – *A gente vai somar dois mais ... é dois vezes o 4.* **E2** – *Esse sininho aqui vale 8, porque 4 vezes 2 é 8.* **E1** – *Mas só que a gente teve que descobrir qual que é esse* [apontando para o sino], *e daí a gente fez 15 menos 8 para descobrir o valor do sino*. *E o valor do sino é 7.*" **Registro de E2:** 	Os estudantes manifestam a propriedade comutativa da multiplicação com números naturais ($n \cdot m = m \cdot n$), o que fica explícito na fala e no registro escrito de E2.

Fonte: Da autora.

d) Subcategoria **S_4**: **Transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica**

Na presente subcategoria as unidades de análise consideradas são aquelas apresentadas na categoria de generalidade aritmética, com o diferencial de que, aqui consideramos aquelas que foram generalizadas para todas (ou quase todas) as equações da tarefa proposta.

Na subcategoria S_4 contemplamos as unidades de análise:

- **I)** Reconhecem que a adição de n parcelas iguais (adição reiterada) corresponde a uma multiplicação do fator que se repete n vezes;
- **IV)** Utilizam o inverso multiplicativo de n para balancear equações do primeiro grau quando a incógnita é multiplicada por n;

- **V)** Utilizam o elemento neutro da multiplicação nos inteiros (1), obtido após aplicação do inverso multiplicativo de n em ambos os lados da igualdade;
- **VI)** Utilizam o elemento oposto de n na adição para balancear equações do primeiro grau quando a incógnita é somada por n.;
- **VII)** Utilizam o elemento neutro da adição (0), obtido após aplicação do elemento oposto de n em ambos os lados da igualdade;
- **VIII)** Realizam a comutatividade da multiplicação com números naturais, ou seja, $n \cdot m = m \cdot n$;
- **IX)** Realizam a associatividade da adição com números naturais, ou seja, $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- **X)** Reconhecem que na subtração de números naturais, subtrai-se o número menor do maior;
- **XII)** Consideram que símbolos iguais correspondem a valores iguais em uma mesma equação;
- **XIII)** Consideram que símbolos iguais correspondem a valores iguais em equações diferentes;
- **XV)** Reconhecem que equações do primeiro grau só são possíveis de serem resolvidas quando envolvem apenas uma incógnita;
- **XVI)** Consideram o sinal de "=" como representante de uma relação entre quantidades.

Quadro 12 – Exemplo de unidade de análise da subcategoria S_4: Transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica

Unidade de análise	Excerto	Justificativa
<u>VI</u> Utilizam o elemento oposto de *n* na adição para balancear equações do primeiro grau quando a incógnita é somada por *n*	**<u>1ª equação</u> – Díade 1** "**E1** – *E agora dá para fazer o 1º, porque a gente vai fazer 35... primeiro sete vezes o três menos 35... é 35 menos o resultado, daí o resultado menos 2.*	Por este excerto, pudemos inferir que os estudantes manifestaram, entre outras propriedades e relações, a propriedade de elemento oposto de *n* na adição para balancear equações do primeiro grau quando a incógnita é somada por *n*. Essa propriedade é generalizada pelos mesmos estudantes em outras equações.

Fonte: Da autora.

e) Subcategoria **S$_5$**: **Generalidade algébrica factual**

Nesta subcategoria envolvemos unidades de análise que representam a percepção de relações mais complexas, para as quais os estudantes precisaram analisar e envolver o caráter indeterminado da álgebra.

Na subcategoria S$_5$ contemplamos a unidade de análise:

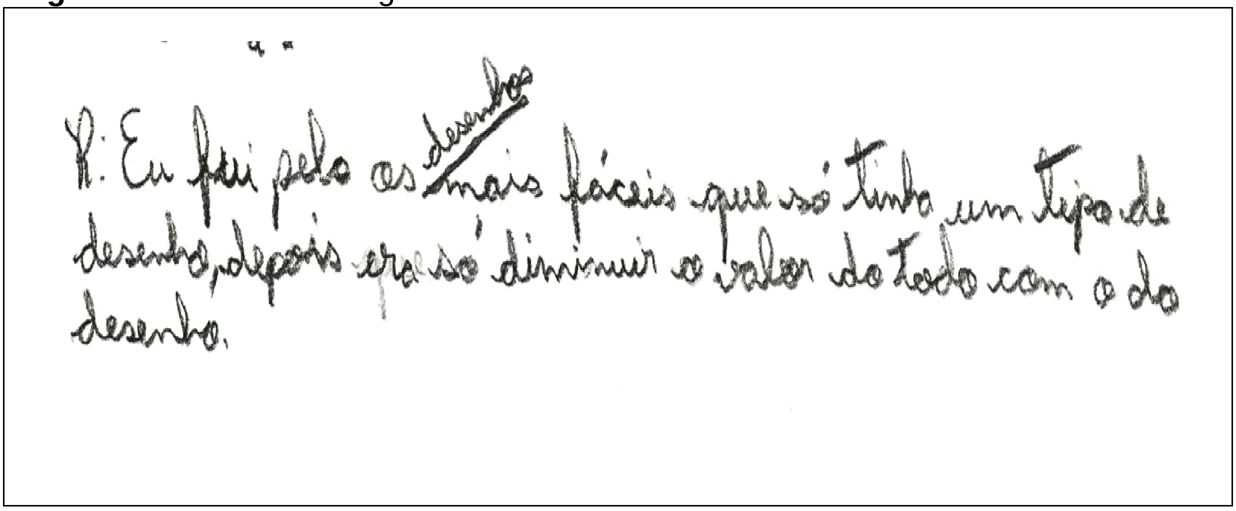
- **XV)** Reconhecem que equações do primeiro grau só são possíveis de serem resolvidas quando envolvem apenas uma incógnita.

Quadro 13 – Exemplo de unidade de análise da subcategoria S$_5$: Generalidade algébrica factual

Unidade de análise	Excerto	Justificativa
<u>**XV**</u> Reconhecem que equações do primeiro grau só são possíveis de serem resolvidas quando envolvem apenas uma incógnita	<u>**5ª equação**</u> **– Díade 2** "**E1** – *E agora a gente vai fazer... o 5º, porque ele tem quase todos os mesmos, só tem um que é diferente*". ***Ver Figura 22**	Os estudantes perceberam que só seria possível resolver as equações quando estas possuem apenas um tipo de símbolo desconhecido (equação de primeiro grau com uma incógnita) e generalizou essa percepção para as demais equações da tarefa proposta.

Fonte: Da autora.

Figura 22 – Trecho do registro de E1


R: Eu fiz pelo os desenhos mais fáceis que só tinha um tipo de desenho, depois era só diminuir o valor do todo com o do desenho.

Fonte: Da autora.

4.3.2 Síntese da Análise das Informações

De acordo com o exposto até então, apresentamos, na sequência, um quadro síntese da análise das informações obtidas na pesquisa, envolvendo nas subcategorias da categoria **Níveis de Generalidade (NG)** as unidades de análise, sobre as quais já explicitamos como foram elaboradas: a partir da análise e interpretação das informações obtidas por meio do esboço de esquemas inferidos a partir de indícios manifestados em linguagem natural (transcrição de gravações em áudio), em registros escritos e em observações da pesquisadora e das testemunhas registrados em diário de campo.

Além disso, ressaltamos que todas as unidades de análise estão contidas na categoria **Invariantes Operatórios (IO)**[44].

Quadro 14 – Síntese da análise das informações

ANÁLISE TEXTUAL DISCURSIVA DOS PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO					
Invariantes Operatórios (IO)	**Níveis de Generalidade (NG)**				
	S_1	**S_2**	**S_3**	**S_4**	**S_5**
Todas as unidades de análise	II, XIV e XVII	XI	I, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XII, XIII e XVI	I, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XII, XIII, XV e XVI	XV

Fonte: Da autora.

No Quadro 14 podemos perceber que existem unidades de análise que estão contidas em mais de uma subcategoria e, isto é possível, porque uma das propriedades das categorias na análise textual discursiva é que nela não se aplica a exclusão mútua, ou seja, uma mesma unidade de análise pode ser categorizada em mais de uma categoria.

[44] Por considerarmos que todas as unidades de análise estão contidas na categoria **IO** (Invariantes Operatórios), a partir de agora nos referiremos às unidades de análise apenas como *invariantes operatórios*.

Nossas percepções e inferências sobre o motivo dessas unidades de análise estarem contidas em mais de uma subcategoria, bem como outras compreensões possibilitadas por meio das análises realizadas, abordaremos na próxima seção.

4.4 O CAPTAR DO NOVO EMERGENTE: EXPRESSÃO DAS COMPREENSÕES ATINGIDAS

Por meio da interpretação, inferência e análise sobre as informações coletadas (*corpus* da pesquisa), verificamos que características relacionadas aos números, operações e, consequentemente, a procedimentos de cálculo apresentam propriedades e aspectos invariantes que estudantes, ainda que não as conheçam formalmente (por definições e teoremas), podem perceber e manifestar durante envolvimento com tarefas matemáticas.

Quando essas características, ainda que não sejam propriedades verdadeiras de números e operações, são utilizadas constantemente pelo estudante ao se envolver com tarefas matemáticas, podemos considerar que estas características se constituem como invariantes operatórios do tipo *teoremas-em-ação*.

Na presente pesquisa, investigamos características que foram baseadas em alguns autores cujos trabalhos têm como foco o estudo do pensamento algébrico, sobretudo, nos baseamos em características de aritmética generalizada de Blanton e Kaput (2005), uma vez que buscamos, em primeira instância, analisar procedimentos de cálculo dos estudantes participantes da pesquisa durante envolvimento com uma tarefa não-rotineira.

No processo de análise constatamos que as características elencadas, as quais foram constituídas como unidades de análise, representavam *teoremas-em-ação*, ou seja, podiam ser todas elas consideradas como invariantes operatórios.

Além disso, por meio da análise destes invariantes operatórios e da maneira e frequência com que estes foram utilizados, pudemos inferir sobre o nível de generalidade em que se encontravam cada díade de estudantes.

Analisando os níveis de generalidade atingidos por cada díade, começando pelas díades D1 e D3, uma vez que ambas as díades apresentaram manifestações de procedimentos de cálculo muito próximas, se considerarmos que, de acordo com Radford (2006), na generalização aritmética o estudante consegue perceber um traço comum em termos (no caso, em equações) e reconhece que esse traço comum aplica-se aos termos (equações) subsequentes, ainda que não expresse simbolicamente ou de maneira contextual esse traço comum, é possível considerarmos que este traço comum pode ser a ordem de equações escolhida pelas díades D1 e D3 para operarem, visando determinar o valor de cada símbolo.

Evidenciamos, ainda, que estes estudantes perceberam que só seria possível determinar o valor de um símbolo em equações em que apenas o valor deste símbolo era desconhecido, o que auxiliou os estudantes das díades D1 e D3 determinarem a ordem de equações que seriam tratadas.

Contudo, ao analisarmos as resoluções das díades D1 e D3, e considerando as ideias de Radford (2006), inferimos que estes estudantes manifestaram transitar do nível de generalização aritmética para um nível de generalização um pouco mais elevado, o que consideramos como um nível elementar de generalização algébrica.

Essa inferência é fundamentada ao considerarmos que Radford (2006) defende que a generalização algébrica envolve a percepção de regularidades, bem como o caráter indeterminado e analítico atribuído à álgebra.

A primeira característica (percepção de regularidades) é percebida quando consideramos a ordem que as díades D1 e D3 escolheram operar, manifestando que perceberam regularidades nas equações (que só seria possível operar em equações em que apenas o valor de um símbolo era desconhecido) que, como já mencionamos, lhes permitiram determinar a ordem em que estas deveriam ser resolvidas.

Ainda, por meio do tratamento desses estudantes para cada equação, inferimos que envolveram o caráter indeterminado e analítico da álgebra, pois, para que fosse possível estabelecer a ordem em que operariam, foi necessário, em princípio, analisar cada equação, o que permitiu aos estudantes das díades D1 e D3 obterem corretamente os valores de cada símbolo.

Ainda, durante o envolvimento com a tarefa proposta, as díades D1 e D3 manifestaram invariantes operatórios apenas em ações concretas (RADFORD, 2006), ou seja, a generalidade ocorreu apenas sobre cada equação, não sendo explicitada contextual ou simbolicamente, de maneira generalizada.

Dessa forma, consideramos que para a tarefa proposta os estudantes das díades D1 e D3 manifestaram transitarem da generalização aritmética para a generalização algébrica em nível elementar, operando, no máximo, em nível *factual*.

Quanto à díade D2, ao considerarmos que estes estudantes recorreram diversas vezes à atribuição de valores para símbolos por meio da estratégia de tentativa e erro, poderíamos considerar que esses estudantes manifestaram o nível de indução ingênua (RARDFORD, 2006).

Contudo, inferimos que a díade D2 manifestou, durante envolvimento com a tarefa proposta, um nível de generalidade superior: a generalidade aritmética.

Para justificarmos essa inferência consideramos as ideias defendidas por Blanton e Kaput (2005) sobre aritmética generalizada:

a) manifestaram explorar algumas propriedades e relações de números naturais (realização de sobrecontagens por meio de múltiplos);
b) manifestaram explorar algumas propriedades e relações de operações com números naturais (associatividade);
c) manifestaram o tratamento algébrico dos símbolos envolvidos nas equações da tarefa proposta, uma vez que, diante de equações envolvendo dois símbolos com valores desconhecidos (duas incógnitas), valores eram atribuídos para cada símbolo, porém, considerando que valores muito grandes estipulados para um símbolo poderia não satisfazer a igualdade. Além disso, os estudantes da díade D2 reconheceram que diversos valores diferentes poderiam ser atribuídos para ambos os símbolos nesses casos, manifestando assim, a ideia de variável.

Como justificativa podemos considerar, ainda, a Teoria dos Campos Conceituais em conjunto com a Teoria de Radford sobre os níveis de generalidade: ainda que um dos estudantes da díade D2 tenha percebido que os esquemas que estavam utilizando estavam sendo ineficazes, deixou-se convencer pelo outro estudante a manterem o mesmo esquema de tentativa e erro para determinarem os valores de cada símbolo.

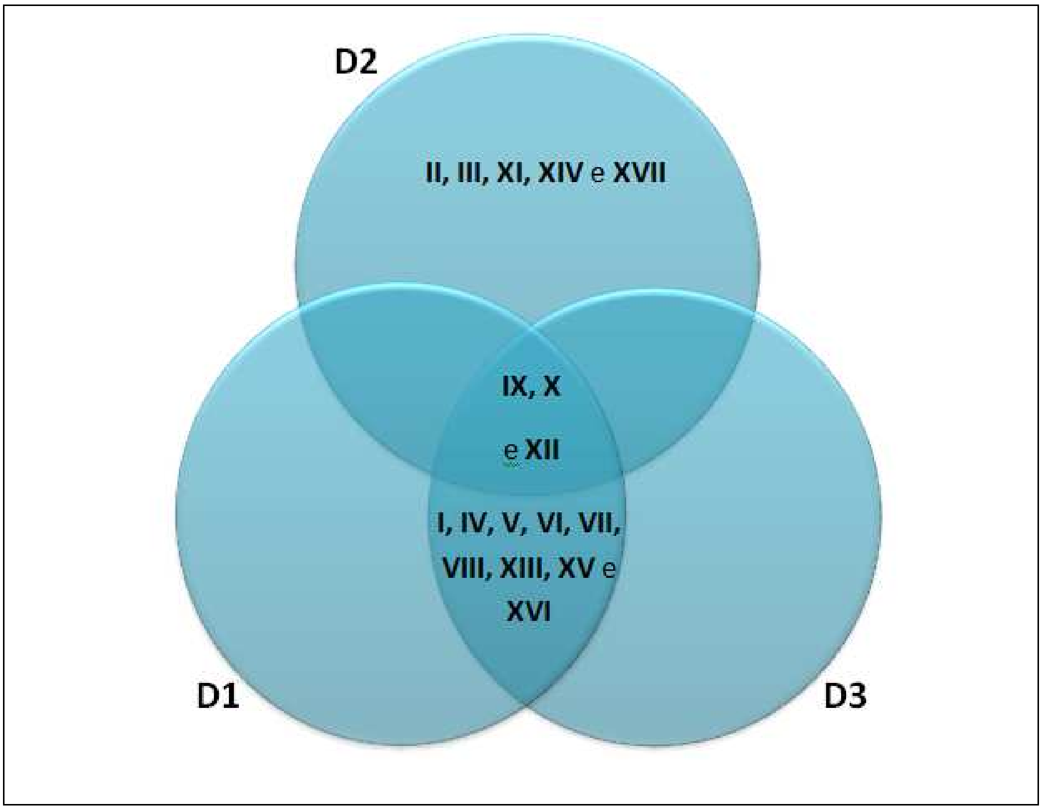
Assim, evidenciamos que os estudantes, diante da tarefa proposta, não manifestaram substituição ou modificação de esquemas de maneira a obterem esquemas eficazes para determinar os valores de cada símbolo. Logo, de acordo com Radford (2006), os estudantes não cumpriram com o terceiro componente da generalização algébrica: “[...] a de que o gênero ou objeto generalizado cristaliza-se em um esquema, ou seja, uma regra que prevê aquele como uma expressão de qualquer termo da sequência [...].” (RADFORD, 2006, p. 15).

Ainda, os estudantes da díade D2 manifestaram invariantes operatórios que representam nível de generalidade inferior ao aritmético, como ao considerarem o sinal de igualdade como mero indicador do resultado de cada equação.

Todavia, foi possível inferir que houve momento em que a díade D2 manifestou certa transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica factual: ao perceberem que em cada equação símbolos iguais correspondem a valores iguais (unidade de análise XII). Porém, permaneceram nesse nível de transição, pois não manifestaram considerar que os símbolos iguais em equações diferentes do mesmo modo possuem mesmos valores.

Em suma, pudemos constatar que, ainda que haja diferenças entre níveis de generalidade, as díades D1, D2 e D3 manifestaram um aspecto em comum: todas elas apresentaram três invariantes operatórios que permitiram manifestar o nível de generalidade aritmética e a transição entre este nível e o algébrico, conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 23 – Intersecção de invariantes operatórios entre as díades D1, D2 e D3



Fonte: do autor.

Antes de comentarmos sobre a Figura 23, retornaremos ao Quadro 14, pois esta figura que foi apresentada nos auxiliou a compreender as informações que obtivemos por meio do Quadro 14, o qual apresenta uma síntese das análises realizadas na presente pesquisa.

Por meio do Quadro 14 pudemos perceber que existem unidades de análise (as quais foram todas consideradas como invariantes operatórios) que estão contidas, simultaneamente, em duas subcategorias:

- na subcategoria $\mathbf{S_3}$ (generalidade aritmética) e na subcategoria $\mathbf{S_4}$ (transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica);
- na subcategoria $\mathbf{S_4}$ (transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica) e na subcategoria $\mathbf{S_5}$ (generalidade algébrica factual).

Isso se deve ao fato de não podermos afirmar com certeza se o estudante manifestou generalizações apenas para as equações da tarefa aplicada ou se, para outra tarefa semelhante, haveriam as mesmas manifestações. Nesse sentido, consideramos que os estudantes podem se encontrar em um nível de transição entre generalizações ou já se encontrar em determinado nível de generalização.

Dentre estes casos em que duas subcategorias contêm mesmos invariantes operatórios simultaneamente, destacamos as subcategorias $\mathbf{S_3}$ (generalidade aritmética) e $\mathbf{S_4}$ (transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica) por dois motivos: primeiro, porque foram nessas subcategorias que obtivemos o maior número de invariantes operatórios contidos e, segundo, porque são nessas duas subcategorias que se concentram os três invariantes operatórios comuns entre as díades D1, D2 e D3, que são eles os invariantes **IX** (*realizam a associatividade da adição com números naturais, ou seja, (a + b) + c = a + (b + c)*), **X** (*reconhecem que na subtração de números naturais, subtrai-se o número menor do maior*) e **XII** (*consideram que símbolos iguais correspondem a valores iguais em uma mesma equação*).

Estes invariantes operatórios em comum podem ser categorizados em ambas as subcategorias porque representam generalizações aritméticas, de acordo com a definição apresentada por Radford (2006), e porque foram generalizadas para todas (ou quase todas) as equações contidas na tarefa não-rotineira com a qual os estudantes se envolveram.

Por meio da Figura 23, pudemos ilustrar os invariantes operatórios em comum entre as três díades de estudantes, porém, a figura não nos permite retirar informações sobre os níveis de generalidade em que as díades manifestaram se encontrar durante envolvimento com a tarefa não-rotineira.

Em contrapartida, por meio do Quadro 14, pudemos obter informações a respeito dos níveis de generalidade em que se concentraram os invariantes operatórios manifestados, mas não nos permitiu analisar sobre as particularidades e os aspectos comuns entre as díades.

Comparando a Figura 23 e o Quadro 14 conseguimos inferir que, apesar das particularidades de cada díade, é possível perceber a manifestação de invariantes operatórios que indicam que as díades se encontram em um momento de transição entre generalidade aritmética e algébrica, o que ajuda a explicar a grande concentração de invariantes operatórios nas subcategorias $\mathbf{S_3}$ e $\mathbf{S_4}$. E, apesar de haver um invariante operatório contido na subcategoria $\mathbf{S_4}$ e $\mathbf{S_5}$, compreendemos que nenhum dos estudantes manifestou, durante envolvimento com a tarefa proposta, já estar inserido integralmente no nível de generalidade algébrica, mas apenas em um nível de transição cada vez mais próximo da generalidade algébrica factual, cuja aproximação destacamos ao incluir tal invariante operatório (**XV**) na subcategoria $\mathbf{S_5}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS
REFLEXÕES E CONCLUSÕES PAUTADAS NA PESQUISA

Após percorrermos toda a trajetória da presente pesquisa, retomamos a questão que nos orientou durante todo o processo: *estudantes do Ensino Fundamental, quando submetidos a tarefas matemáticas não-rotineiras, manifestam em seus procedimentos de cálculo invariantes operatórios e níveis de generalidade?*

No capítulo anterior, quando apresentamos as compreensões que emergiram a partir das análises realizadas sobre o *corpus* da pesquisa, divulgamos o que evidenciamos durante todo o processo de análise. Agora, neste momento, divulgaremos nossas reflexões e conclusões a respeito da problemática da pesquisa em concordância com as compreensões que emergiram a partir das análises.

Vale ressaltar que, de maneira alguma, pretendemos finalizar esta discussão, sobretudo porque o que apresentaremos se constitui apenas como uma "[...] parte visível do *iceberg* [...]." (VERGNAUD, 2009, p. 19) desta pesquisa que pode ser considerada como uma iniciativa para novos estudos relacionados às inerências entre pensamento aritmético e pensamento algébrico.

Sendo assim, considerando as análises e as compreensões que emergiram a partir da investigação realizada, tendendo responder à questão que norteou toda a presente pesquisa, evidenciamos que estudantes do Ensino Fundamental, mais especificamente do 5º ano, ainda que não tenham tido antes contato com tarefas potencialmente algébricas, o que nos permitiu considerar a tarefa aplicada como não-rotineira, são capazes de se envolver com este tipo de tarefa e, inclusive, são capazes de obter soluções corretas para a mesma.

Para tanto, os estudantes utilizaram procedimentos de cálculo que nos permitiram evidenciar a colocação de esquemas em ação, por meio dos quais elencamos características (Blanton e Kaput, 2005) operatórias que consideramos como invariantes operatórios (*teoremas-em*-ação) devido à frequência e a maneira com que estes foram utilizados em situações semelhantes, ou seja, em outras equações da tarefa não-rotineira proposta.

Ainda, pudemos constatar a possibilidade de inferir, a partir das características elencadas, o nível de generalidade em que se encontravam os estudantes durante envolvimento com a tarefa não-rotineira. E, neste aspecto, concluímos que, durante envolvimento com a tarefa proposta, os estudantes tenderam a estarem contidos em um nível de transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica.

Portanto, respondendo à questão da pesquisa, corroboramos que tarefas não-rotineiras podem propiciar sim, manifestações de invariantes operatórios e níveis de generalidade a partir dos procedimentos de cálculo apresentados pelos estudantes durante envolvimento com tal tarefa.

Essa afirmação pode ser justificada pelo fato de corroborarmos que, durante envolvimento com a tarefa não-rotineira, estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental que participaram da pesquisa manifestaram em seus procedimentos de cálculo a evidenciação de características invariantes relacionadas aos números e às operações envolvidas na tarefa proposta, características estas que foram utilizadas repetidas vezes no decorrer desta tarefa, consistindo como invariantes operatórios do tipo *teorema-em-ação*, que podem ser verdadeiros ou falsos, mas que são considerados como verdadeiros pelo sujeito que os utiliza.

Estes invariantes operatórios foram manifestados pelos estudantes por meio de diversas representações, sobretudo, por meio da linguagem natural oral, que nos permitiram inferir e esboçar possíveis esquemas evocados pelos estudantes durante suas ações enquanto se envolviam com a tarefa não-rotineira.

É este processo de evidenciação do que há de invariante em objetos (no caso, equações) individuais e aparentemente distintos que consideramos como generalização, a qual pode ser caracterizada em diferentes níveis, desde o mais elementar (indução ingênua) até o mais abstrato (generalidade algébrica).

Assim, consideramos que respondemos ao questionamento que propomos para a presente investigação, contudo, ao chegarmos ao final desta jornada de pesquisa, outros questionamentos emergiram: tendo em vista que por meio de tarefas não-rotineiras potencialmente algébricas é possível que estudantes que ainda não se iniciaram em álgebra manifestem invariantes operatórios, bem como níveis de generalidade em que se encontram por meio de seus procedimentos de cálculo, que tipos de tarefas não-rotineiras podem ser considerados como profícuos para evidenciar essas manifestações? E, ainda, será que a evidenciação e interpretação destas manifestações podem contribuir de maneira significativa para aprendizagem de estudantes ao se iniciarem no estudo de álgebra envolvendo símbolos?

Estas, e outras questões, permanecem em aberto devido ao tempo que não tínhamos disponível para respondê-las, uma vez que, para isso, seria necessário dar continuidade à pesquisa, aplicando e analisando outras tarefas e acompanhando de maneira contínua os estudantes participantes da pesquisa, sendo necessário realizar um estudo longitudinal.

Entretanto, ao refletirmos sobre o que foi evidenciado nas análises e sobre a questão que propomos no início da investigação, pudemos concluir, de antemão, que propor situações análogas à que realizamos na presente pesquisa pode contribuir para que o professor de Matemática repense sua prática, considerando a possibilidade e relevância de desenvolver o pensamento algébrico mais cedo a partir da valorização de procedimentos de cálculo manifestados pelos estudantes, tendo em vista que, a aritmética possui um caráter potencialmente algébrico que precisa ser explorado.

E, esse caráter potencialmente algébrico da aritmética está pautado, sobretudo, na possibilidade de generalização a partir da constatação de aspectos invariantes dos números e das operações.

Daí a relevância da triangulação teórica que realizamos: foi a partir de nossas inferências sobre características de números e operações manifestados por meio de procedimentos de cálculo, em que para tais inferências nos baseamos em estudos sobre procedimentos de cálculo, pensamento aritmético e pensamento algébrico, que evidenciamos invariantes operatórios, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud 1990, 1996, 2009), e que, por fim, inferimos níveis de generalidade (Radford 2006) em que se encontravam os estudantes participantes da pesquisa. Portanto, foi a partir de nossos estudos sobre os referenciais teóricos em que nos embasamos para realizar a presente pesquisa, que pudemos conjecturar abordagens relacionadas à aprendizagem em Matemática, sobretudo à aprendizagem inicial em álgebra, a qual envolve conceitos que, em geral, estudantes apresentam dificuldades e aversão.

REFERÊNCIAS

ANANIAS, Eliane Farias. *Sobre as operações matemáticas e o cálculo mental*. 2010. 198 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB. 2010.

BENITES, Mikelli Cristina Pacito. *Cálculo mental nos anos iniciais do ensino fundamental:* dúvidas e expectativas. 2011. 94 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Oeste Paulista, Presidente Prudente, SP. 2011.

BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdo*. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2004.

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal of Research in Mathematics Education*, v. 36, n.5, p. 412-446. 2005.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari K. *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e aos métodos. Trad.: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto, 1994.

BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BRUN, Jean. *Didática das matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BURIASCO, R. L. C. de. *Avaliação em matemática*: um estudo das respostas de alunos e professores. 232 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1995.

COLOMBO, Janecler Aaparecida Amorin; FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Méricles Thadeu. Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 9, n. 2, p. 181-203, 2007.

COMÉRIO, Marta Santana. *Interação social e solução de problemas aritméticos nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2007. 257 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2007.

CYRINO, Márcia C. de Costa Trindade. *Projeto:* Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática. Londrina: Universidade Estadual de Londrina – UEL, 2010.

DAMM, Regina Flemming. Registros de representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). *Educação matemática:* uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008.

D'AMORE, Bruno. *Epistemologia e didática da matemática*. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DUARTE, Teresa. A possibilidade da investigação a 3: reflexões sobre triangulação (metodológica). *CIES e-Working Papers*, Lisboa, n. 60, 2009. Disponível em: <http://cies.iscte.pt/destaques/documents/CIES-WP60_Duarte_002.pdf>. Acesso em: 18 maio 2014.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano*: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Moretti, M. T. *Revemat*, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em educação matemática:* percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

GÓMEZ, Bernardo Alfonso. Tipología de los errores en el cálculo mental: un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias*, Madrid, v. 13, n. 3, p. 313-325, 1995.

GONÇALVES, Heitor Antônio. *Educação matemática e cálculo mental*: uma análise de invariantes operatórios a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. 2008. 241 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal Fluminense, Niterói. 2008.

GUIMARÃES, Sheila Denise. *A prática regular de cálculo mental para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo por alunos do 4º e 5º ano do ensino fundamental*. 2009. 261 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS. 2009.

KAMII, Constance. *Crianças pequenas reinventam a aritmética*: implicações da teoria de Piaget. Tradução de Cristina Monteiro. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2002.

KIERAN, Carolyn. Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

KOCH, Nancy; SOARES, Maria Tereza C. O professor, seus alunos e a resolução de problemas de estrutura aditiva. In: MORO, Maria Lúcia F.; SOARES, Maria Teresa C. (Org.), *Desenhos, palavras e números*: as marcas da matemática na escola. Curitiba: Ed. UFPR, 2005.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* 4. ed. Campinas: Papirus, 2001.

MENK, Leonor Farcic Fic. *Contribuições de um software de geometria dinâmica na exploração de problemas de máximos e mínimos.* 2005. 247 f. Dissertação

(Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2005.

MESTRE, Célia; OLIVEIRA, Hélia. A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4º ano. *Revista Interacções*, Lisboa, n. 20, p. 9-36, 2012.

MORAES, Roque. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. *Ciência & Educação*, Bauru, v.9, n.2, p.191-211, 2003.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. *Análise textual discursiva*. Ijuí: Ed. Unijuí, 2007.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002.

MOREIRA, Marco Antonio. *Teorias de aprendizagem*. 2. ed. São Paulo: EPU, 2011.

NUNES, Terezinha et al. As estruturas aditivas: avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de adição e subtração em sala de aula. In: ______. *Educação matemática*: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

OLLAIK, Leila Giandoni; ZILLER, Henrique Moraes. Concepções de validade em pesquisas qualitativas. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 38, n. 1, p. 229-241, 2012.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da matemática*: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PARRA, Cecília. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). *Didática da matemática:* reflexões psicopedagógicas.Porto Alegre: Artmed, 1996.

PASSONI, João Carlos; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. Revisitando os problemas aditivos de Vergnaud de 1976. In: MACHADO, Silvia Dias Alacântara (Org.). *Aprendizagem em matemática*: registros de representação semiótica. 6. ed. Campinas: Papirus, 2009.

PIERCE, Charles Sanders. *Semiótica*. São Paulo: Perspectiva, 2000.

PIMENTEL, Teresa; VALE, Isabel. A descoberta de padrões no desenvolvimento do cálculo mental: uma experiência com professores do 1º ciclo. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 19., 2009, Vila Real. *Anais*... Vila Real, 2009.

RADFORD, Luis. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In: ALATORRE, S.; CORTINA, J.; SÁIZ, M.; MÉNDEZ, A. (Ed.). ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28TH, 2006, Mexico. *Proceedings…* México, 2006. v. 1, p. 2-21.

RADFORD, Luis. The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, v. 30, n. 2, p. 2-7, 2010.

RADFORD, Luis. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thiking. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Ed.). *Early algebraization*. Berlin: Springer-Verlag, 2011.

RADFORD, Luis. Early algebraic thinking: epistemological, semiotic, and developmental issues. *ICME-12 Regular Lecture*, Korea, p. 675-694, 2012.

RIVERA, Ferdinand D. Changing the face of arithmetic: teaching children algebra. *Teaching Children Mathematics*, v. 12, n. 6, p. 306-311, 2006.

SCHLIEMANN, Analúcia D.; CARRAHER, David. W.; BRIZUELA, Bárbara. *Bringing out the algebraic character of arithmetic*: from children's ideas to classroom practice. united states: Lawrence Erlbaum Associates, 2007.

STEFFE, Leslie P.; THOMPSON, Patrick W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH; A.; KELLY, E. (Ed.). *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000. p. 267-307.

TEIXEIRA, Leny Rodrigues Martins. As representações da escrita numérica: questões para pensar o ensino e a aprendizagem. In: MORO, Maria Lúcia F.; SOARES, Maria Teresa C. (Org.). *Desenhos, palavras e números*: as marcas da matemática na escola. Curitiba: Ed. UFPR, 2005.

VELOSO, Débora Silva. *O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental*: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano. 2012. 245 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais. 2012.

VERGNAUD, Gérard. La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, v. 10, n. 2, p. 133-170, 1990. Disponível em: <http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf>. Acesso em: 2 dez. 2013.

VERGNAUD, Gérard. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, Jean. *Didática das matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

VERGNAUD, Gérard. A psicologia da educação. In: PLAISANCE, Eric; VERGNAUD, Gérard. *As ciências da educação.* São Paulo: Loyola, 2003.

VERGNAUD, Gérard. Esquemas operatórios de pensamento: uma conversa com Gérard Vergnaud. In: GROSSI, Esther P. (Org.). *Ensinando que todos aprendem:* fórum social pelas aprendizagens. Porto Alegre: GEEMPA, 2005.

VERGNAUD, Gérard. *A criança, a matemática e a realidade*: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Ed. UFPR, 2009.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. *Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica*. 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Paraná. 2007.

VILLARREAL, Monica Ester. *O pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas.* 1999. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 1999.

YIN, Robert K. *Estudo de caso*: planejamento e métodos. Tradução de Daniel Grassi. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

ANEXOS

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nome:..

Identidade:...

CPF:...

Endereço:...

Telefone:..

Email:...

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento da dissertação sobre *invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental em tarefas não-rotineiras*, sob responsabilidade da Profª Keila Tatiana Boni, com a orientação da Profª Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, declaro que consinto que o(a) mesmo(a) utilize parcial ou integralmente os registros escritos e as gravações de voz de seis estudantes do 5º ano de 2013 da Escola Municipal José Brazil Camargo, a qual é participante do Projeto Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática - Programa Observatório da Educação, podendo divulgá-los em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que os estudantes sejam citados apenas como participantes da pesquisa, garantido o anonimato no relato da pesquisa.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Londrina, / / .

NOME:____

ASS.:____