UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

ADRIANA HELENA BORSSOI

MODELAGEM MATEMÁTICA, APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E TECNOLOGIAS: ARTICULAÇÕES EM DIFERENTES CONTEXTOS EDUCACIONAIS

Londrina
2013

ADRIANA HELENA BORSSOI

MODELAGEM MATEMÁTICA, APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E TECNOLOGIAS: ARTICULAÇÕES EM DIFERENTES CONTEXTOS EDUCACIONAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial para a obtenção do Título de doutora.

Orientadora: Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

B738m Borssoi, Adriana Helena.
Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias : articulações em diferentes contextos educacionais / Adriana Helena Borssoi. – Londrina, 2013.
255 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Educação matemática – Teses. 3. Modelos matemáticos – Teses. 4. Tecnologia educacional – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

ADRIANA HELENA BORSSOI

MODELAGEM MATEMÁTICA, APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E TECNOLOGIAS: ARTICULAÇÕES EM DIFERENTES CONTEXTOS EDUCACIONAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial para a obtenção do Título de doutora.

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida - Orientadora
Universidade Estadual de Londrina

____
Prof. Dr. Marco Antonio Moreira
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

____
Profa. Dra. Lilian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá

____
Profa. Dra. Angela Marta P. das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina

____
Profa. Dra. Luciana Gastaldi Sardinha Souza
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 29 de novembro de 2013.

Dedico esse trabalho à minha Família TODA!

AGRADECIMENTOS

Lourdes, agradeço pela oportunidade de trabalhar novamente sob sua orientação. Agradeço a confiança em meu trabalho, por concordar com a proposta inicial que, para mim, representa a continuidade do trabalho de pesquisa que iniciamos no mestrado. Suas sugestões e questionamentos foram de fundamental importância para que a proposta inicial fosse lapidada e o trabalho de pesquisa se desenvolvesse de forma criteriosa. Obrigada pela liberdade com a pesquisa, que de fato, indicou atribuição de responsabilidade sobre o trabalho, que eu entendo como uma iniciação para a pesquisa mais autônoma, necessária à profissão. Agradeço também, a atenção que dispensou à fase final da pesquisa e as contribuição para o delineamento da análise. A oportunidade de discutir resultados parciais com aos colegas do Grupo de Pesquisa sobre Modelagem e Educação Matemática - GRUPEMMAT foi extremamente válida e as reflexões resultantes do *pensar junto* com o grupo foram produtivas, principalmente na fase inicial das análises, em que o sentimento de insegurança era maior. Quanto a isso, obrigada por ter aberto espaço no cronograma de atividades do Grupo. Por fim, espero ter a oportunidade de continuar interagindo e aprendendo contigo, com quem já aprendi um pouco sobre a arte de ser pesquisadora.

Professoras Angela Marta Pereira das Dores Savioli, Lilian Akemi Kato, Luciana Gastaldi Sardinha Souza e Professor Marco Antonio Moreira, agradeço-lhe pela disponibilidade de se fazerem presentes, tanto no Exame de Qualificação quanto na Defesa. Agradeço a dedicação com a leitura deste texto final, onde procurei contemplar suas importantes contribuições para o amadurecimento do trabalho. A admiração por cada um de vocês me deixa lisonjeada por comporem essa Banca.

Colegas de GRUPEMMAT nesses quatro anos de doutorado, Ana Paula Zanim, Angela Maria Lourenção Gerolomo, Bárbara Nivalda Palharini Alvim Souza Robim, Camila Fogaça de Oliveira, Elaine Cristina Ferruzzi, Emerson Tortola, Gabriele Granada Veleda, Heloísa Cristina da Silva, Karina Alessandra Pessôa da Silva, Lourdes Maria Werle de Almeida, Michele Regiane Dias Veronez, Reginaldo Fidelis, Renato Francisco Merli, Rodolfo Eduardo Vertuan. Agradeço a todos vocês pela companhia nos encontros do Grupo, pela contribuição para as discussões mais direcionadas a esse trabalho de pesquisa, pela paciência nos seminários mais específicos e na leitura dos resultados parciais dessa pesquisa. Com certeza vocês fizeram diferença.

Colaboradores em artigos ou trabalhos para eventos e também amigos: Karina, Rodolfo, Angela, Elaine, Reginaldo e claro, Lourdes! Foi muito bom trabalhar com cada um de vocês.

Karina, consultora para assuntos de Tese, obrigada pelas inúmeras consultas não presenciais, mas obrigada também pela amizade e pela torcida de sempre.

Michele, irmã de orientação, obrigada por sua solidariedade e amizade. Sua companhia *online* nesses últimos meses, foi sempre um incentivo. Valeu por partilharmos metas e compartilharmos o cronograma. Terminamos!

Agradeço a UTFPR pela concessão, e manutenção, do afastamento integral nesses últimos dois anos e quatro meses do doutorado que, pautada em sua Política de Desenvolvimento de Recursos Humanos, tornou possível essa licença em um período crucial da pesquisa.

Colegas de trabalho da UTFPR que, inicialmente, assumiram o ônus pelo meu afastamento integral, em 2011, Elaine Cristina Ferruzzi, Marcele Tavares Mendes, Regina Sayuri K. Yamada, Reginaldo Fidelis, Wellington Donizeti Previero, agradeço muito pela concordância e apoio de cada um. Estendo o agradecimento pelo apoio a todo o Grupo de Matemática da UTFPR Câmpus Londrina, que atualmente está bem mais numeroso.

Agradeço a todos os participantes dos três Contextos da pesquisa, que concordaram em ceder informações decorrentes do desenvolvimento das atividades. Alunos, turma de 2012, da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática da UEL. Participantes do Minicurso: Atividades de Modelagem Matemática com o uso de Recursos Tecnológicos, realizado em 2012 durante o V EPMEM - Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática. Alunos da disciplina de Cálculo Numérico, segundo semestre letivo de 2012, dos cursos de Engenharia Ambiental e Engenharia de Materiais, da UTFPR Câmpus Londrina. Agradeço à Professora Sandra Malta Barbosa da UEL, ao Professor Rodolfo Eduardo Vertuan da UTFPR Câmpus Toledo e ao Professsor Wellington Donizeti Previero da UTFPR Câmpus Toledo por terem oportunizado parte da pesquisa em suas disciplinas e no minicurso.

Tenho também o desejo de agradecer o apoio e o incentivo de inúmeros amigos e colegas de trabalho, aqui representados por aqueles que acompanharam as tensões mais de perto, na companhia diária com o *status*: Disponível, mesmo a muitos quilômetros de distância, Joelmir A. Borssoi, Ligia F. A. Batista, Sandra M. Tieppo, Rosangela T. Guedes.

Adelino José Borssoi e **Terezinha Scopel Borssoi**, meus pais! Obrigada por tudo, desde sempre: a pequena lousa da infância, alfabetização, incentivo aos números,... e pela presença constante e atemporal.

Meus irmãos (e cunhados): Tatiani (e Denis), Adilson (e Andréia), Joelmir (e Pâmela) e Marinho (e Nelsy). Obrigada por serem responsáveis por quatro motivos de muita alegria nesse período de quatro anos do doutorado: Yasmin (3anos 11meses), Gabriela (2anos), Julia (1ano 8meses) e Guilherme (28 dias)!!!

José Antonio Hoto e Noêmia Vieira Hoto, obrigada pelo cuidado e pela amizade verdadeira, vocês são como meus pais, mesmo. Fabiana Vieira Hoto, obrigada pelo carinho de sempre.

Robinson Samuel Vieira Hoto, meu esposo querido! Amor, obrigada por tudo, desde a primeira impressão, há quase 12 anos... na UEL.

Agradeço a Deus, sobre todas as coisas!

BORSSOI, Adriana Helena. **Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias:** articulações em diferentes Contextos Educacionais. 2013. 256 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Investigar como ambientes de ensino e de aprendizagem que consideram atividades de modelagem matemática, dispõem de recursos tecnológicos e são organizados segundo os princípios de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa-UEPS viabilizam a aprendizagem significativa dos estudantes é o propósito da pesquisa que conduzimos em três Contextos educacionais. Seguindo as orientações da Teoria Fundamentada em Dados, os diferentes Contextos trouxeram dados que foram sistematicamente analisados visando à compreensão de questões mais específicas. A primeira busca identificar indicativos de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora, princípios definidos na Teoria da Aprendizagem Significativa, quando os alunos se envolvem em atividades de modelagem matemática mediadas pela tecnologia. A segunda questão visa entender de que forma as atividades de modelagem matemática, integradas às referidas unidades de ensino, potencializam a aprendizagem significativa dos estudantes. A terceira questão diz respeito à forma como os estudantes se apropriam das tecnologias durante as atividades de modelagem matemática. As análises específicas de cada Contexto da pesquisa apontam para quatro categorias teóricas: pensando juntos; relações com as tecnologias e seu uso; link entre modelagem e atuação profissional, conteúdo em foco. Essas categorias representam a codificação dos dados de acordo com os objetivos da pesquisa e, nesse sentido, indicam relações que permeiam o entendimento da questão de pesquisa. A análise global discute as categorias teóricas fundamentada nos dados e nos referenciais teóricos e viabiliza entendimentos para articulações entre modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias em diferentes Contextos educacionais. Das relações entre as categorias teóricas, a influência da intencionalidade do aluno como um atributo integrador é determinante para a aprendizagem significativa, quando os alunos estão envolvidos em UEPS.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Aprendizagem Significativa. Tecnologias. UEPS. Educação Matemática.

BORSSOI, Adriana Helena. **Mathematical Modeling, Meaningful Learning and Technologies:** articulations in different Learning Environments. 2013. 256 p. Doctorate Thesis (Post-Graduation in Teaching of Science and Mathematics Education) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

The research we conducted in three educational contexts aimed to investigate how teaching-learning environments that consider mathematical modeling, have technological resources, and are organized according to the principles of a Potentially Meaningful Teaching Unit-PMTU enable the students? meaningful learning. Following the guidelines of Grounded Theory, the different contexts brought us data that were systematically analyzed aiming the comprehension of some specific questions. The first one aims to identify progressive differentiation and integrative reconciliation, principles defined in the Meaningful Learning Theory, when students get involved in mathematical modeling activities mediated by technology. The second question aims to understand in what way the mathematical modeling activities, integrated to the aforesaid teaching units, enhance the students? meaningful learning. The third question concerns to the way the students appropriate the technology during the mathematical modeling activities. The analysis of each specific context of the research pointed to four theoretical categories: thinking together, relationships with technology and its uses, link between modeling and activity professional, content focus. These categories represent the encoding of data according to the research objectives therefore maintains relationships that allow the understanding of the research question. The global analysis discusses the theoretical categories based on the data and theoretical framework. Relations between the theoretical categories influence the intentionality of the student as an attribute integrator is crucial for meaningful learning when students are involved in PMTU. Thus, the research has as a result, understandings about the connections between mathematical modeling, meaningful learning and technology in different educational contexts.

Keywords: Mathematical Modeling. Meaningful Learning. Technology. PMTU. Mathematics Education

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias são conceitos amplamente teorizados em pesquisas que consideram ambientes educacionais. Nessa tese, são conceitos centrais, tomados de forma integrada, considerando nosso interesse na articulação entre eles, em condições específicas. Com a pesquisa temos o intuito de avançar em compreensões acerca dos processos de ensino e de aprendizagem em ambientes educacionais, contribuindo para as discussões da comunidade da Educação Matemática, mais especificamente, com a Modelagem Matemática enquanto área de pesquisa.

O Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática - GRUPEMMAT, vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, há dez anos tem contribuído com o desenvolvimento de pesquisas de questões relativas ao ensino e à aprendizagem em Matemática. A temática do grupo está inserida nas pesquisas nacionais e internacionais em Educação Matemática, nas linhas: Modelagem Matemática e suas perspectivas na Educação Matemática; Tecnologias Informáticas na Educação Matemática; Semiótica e diferentes representações em Matemática; e Aprendizagem Significativa em Matemática. É nessa última linha que nosso trabalho se insere, em continuidade aos primeiros estudos do grupo (BORSSOI, 2004; BORSSOI e ALMEIDA, 2004; FONTANINI, 2007; ALMEIDA e FONTANINI 2010).

No trabalho de mestrado (BORSSOI, 2004) desenvolvemos uma investigação a partir da aproximação desses dois pressupostos teóricos em um ambiente de sala de aula. Na ocasião visamos investigar *em que aspectos a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem pode ser uma facilitadora da aprendizagem significativa*. Em decorrência da pesquisa, um conjunto de *aspectos* foi organizado para orientar as análises quanto a aprendizagem dos alunos organizados em dois grupos distintos, um mais relacionado com a aprendizagem do conteúdo (aspectos cognitivos) e outro relacionado com a predisposição positiva para aprender significativamente (aspectos motivacionais).

Embora pesquisas na área tenham, em algum sentido, buscado aproximações entre a modelagem matemática e a aprendizagem significativa (SILVA, KATO e PAULO, 2012; VENÂNCIO e KATO, 2009), a definição dos objetivos para essa pesquisa de doutorado leva em conta o espaço e a necessidade de pesquisas nessa interface, especialmente no que diz respeito à integração da tecnologia às aulas com modelagem matemática.

Assumimos em nossa pesquisa a modelagem matemática como alternativa pedagógica que combina características da perspectiva educacional e a perspectiva cognitivista, no sentido de Kaiser e Sriraman (2006), tendo em vista que a pesquisa aplicada, em parte, se dá em espaços formais de ensino da Matemática e tem interesse em processos cognitivos ativados pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem.

A Aprendizagem Significativa é assumida conforme a construção teórica de

David Ausubel e também a partir da visão e de outros teóricos que contribuem para o entendimento de aspectos relativos ao ensino e à aprendizagem em ambientes escolares, a partir da visão clássica da teoria.

Visando a estruturação de ambientes de ensino com potencial para a promoção de condições para a aprendizagem significativa, no que está ao alcance do professor, optamos por trabalhar a partir de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas - UEPS[1], cuja proposição é recente na literatura e ainda pouco explorada.

Desse modo, partindo do que já sabemos sobre a articulação da modelagem matemática e da aprendizagem significativa, buscamos com essa pesquisa, novos conhecimentos ao acrescentarmos a dimensão tecnológica. A Tecnologia em ambientes de ensino é também um elemento em que temos particular interesse na prática da docência. Mas sua integração à pesquisa se deve à relevância que o tema assume no contexto atual. Inúmeras pesquisas trazem o entendimento de que ambientes de ensino e aprendizagem devem ser pensados de modo a considerar o potencial das tecnologias de informação e comunicação como uma oportunidade de promover experiências de aprendizagem em que os alunos possam aprender pela interação com esses recursos.

Assim, neste trabalho, a articulação entre modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias é objeto de estudo em três diferentes Contextos educacionais, com o objetivo de **investigar como ambientes de ensino e de aprendizagem que consideram atividades de modelagem matemática, dispõem de recursos tecnológicos e são organizados segundo os princípios de uma UEPS viabilizam a aprendizagem significativa dos estudantes**.

Assim, apresentamos a estrutura da tese composta por sete capítulos, em que buscamos a articulação dos elementos mencionados como componentes essenciais dessa investigação.

No primeiro capítulo fazemos uma introdução do trabalho, situando os elementos componentes de nossa investigação.

O detalhamento de nossa questão de pesquisa, objetivos e opções metodológicas, bem como, a apresentação dos Contextos em que a pesquisa aplicada se desenvolveu e os procedimentos adotados, estão descritos no capítulo 2.

A caracterização da Teoria da Aprendizagem Significativa como estruturada por Ausubel, a visão mais humanista introduzida por Novak e uma abordagem desta com o uso de tecnologias, que constituem parte de nosso referencial teórico encontra-se organizada no capítulo 3.

A construção do capítulo 4 se dá como uma decorrência de aspectos relevantes que fecham o capítulo 3, indicando o desenvolvimento da modelagem no processo de ensino

[1] Segundo Moreira (2011), UEPS - Unidade de Ensino Potencialmente Significativa é uma sequência didática fundamentada em teorias de aprendizagem, particularmente a da aprendizagem significativa. Ele parte das premissas de que não há ensino sem aprendizagem e de que o ensino é o meio e a aprendizagem é o fim. A conceitualização e estruturação de uma UEPS, conforme esse autor, serão tratadas mais adiante.

e aprendizagem. Assim, esse capítulo compreende outra parte de nosso referencial teórico e aborda a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática e a elaboração de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas - UEPS.

O capítulo 5 apresenta as diferentes UEPS em que foram integradas atividades de modelagem matemática, constituindo ambientes de ensino mediados pela tecnologia. Nesse espaço, são descritas seis atividades de modelagem desenvolvidas com ou pelos participantes, duas de cada Contexto em que a pesquisa aplicada ocorreu.

O tratamento dos dados e o processo analítico é apresentado no capítulo 6. As análises específicas de cada Contexto compreendem a codificação inicial, axial e focalizada, realizada conforme sugere Charmaz (2009), em que quatro categorias teóricas emergentes dos dados, pensando juntos, relações com as tecnologias e seu uso, *link* entre modelagem e atuação profissional e conteúdo em foco, indicam relações que permeiam o entendimento da questão de pesquisa. A análise global discute as categorias teóricas fundamentada nos dados e nos referenciais teóricos e viabiliza entendimentos para articulações entre modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias em diferentes Contextos educacionais. A influência da intencionalidade do aluno como um atributo integrador, determinante para a aprendizagem significativa quando os alunos estão envolvidos em UEPS, é evidenciada das relações entre as categorias teóricas.

No capítulo 7, fazemos as considerações finais sobre o desenvolvimento da pesquisa e as implicações decorrentes desses resultados, bem como possibilidades para a continuidade dos estudos.

Por fim, trazemos as referências bibliográficas citadas e os apêndices onde se encontram alguns elementos do desenvolvimento das atividades em cada Contexto, bem como da condução das análises.

2 DELINEAMENTO DA PESQUISA E ASPECTOS METODOLÓGICOS

Considerando o exposto na introdução, nossa investigação considera substancialmente a Modelagem Matemática enquanto área de pesquisa da Educação Matemática, a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e o uso de Recursos Tecnológicos no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

A partir da estruturação desses pressupostos teóricos, nosso propósito para essa investigação é de estabelecer uma articulação entre eles, mais do que apresentar um conjunto de resultados, procurar oferecer explicações adicionais acerca do fenômeno de estudo, em Contextos específicos. Assim, estamos interessados em:

> ***Investigar como ambientes de ensino e de aprendizagem que consideram atividades de modelagem matemática, dispõem de recursos tecnológicos e são organizados segundo os princípios de uma UEPS, viabilizam a aprendizagem significativa dos estudantes.***

Por certo, se faz necessário enunciar questão auxiliares a fim de nos permitir a compreensão de um conjunto de elementos que se relacionam, para dar conta das observações no decorrer da pesquisa. Desse modo, elencamos a seguir as questões que foram consideradas relevantes à medida que fazíamos o estudo dos referenciais teóricos e procurávamos relacioná-los à questão principal.

1. *Que indicativos de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora podemos identificar quando os alunos se envolvem em atividades de modelagem matemática mediadas pela tecnologia?*

2. *De que forma as atividades de modelagem matemática integradas a UEPS potencializam a aprendizagem significativa dos estudantes?*

3. *De que forma os estudantes se apropriam das tecnologias durante as atividades de modelagem matemática?*

Com o intuito de delimitar o espaço que compreenderia nossa investigação, desenvolvemos pesquisas bibliográficas, estudo de *software* apropriado para o tratamento de dados da pesquisa e o desenvolvimento de diferentes projetos de ensino em diferentes Contextos envolvendo modelagem matemática. Esses elementos constituintes da investigação passam a ser explicitados nas seções a seguir.

2.1 Os Ambientes de Ensino e de Aprendizagem Contemplados na Pesquisa

Desde o contato inicial com os pressupostos da teoria da aprendizagem significativa é possível constatar que o professor tem um papel fundamental, que é o de pensar e organizar o ensino, visando à ocorrência da aprendizagem significativa. A elaboração ou seleção do material de ensino, bem como o conhecimento sobre o que sabem os alunos implicados pelo processo, é requisito crucial. No mesmo sentido, ao se propor trabalhar com modelagem matemática no âmbito educacional, o professor assume um compromisso que lhe exige planejamento e envolvimento com o ensino e a aprendizagem dos estudantes. Deste modo, um conjunto de elementos se faz necessário para compor o que entendemos por ambiente de modelagem com vistas à aprendizagem significativa, dentre eles destacamos: espaço físico disponível, como a sala de aula e a própria WEB como uma extensão desta; espaço aberto ao diálogo entre alunos e com o professor; alunos estimulados a aprender e professor disposto a orientar e avaliar de acordo com os pressupostos teóricos adotados.

Considerando as especificidades desses aspectos em diferentes ambientes educacionais, propomos o desenvolvimento de UEPS com características distintas, constituindo-se assim três Contextos para o desenvolvimento da pesquisa, denominados: *Disciplina de Modelagem na Licenciatura em Matemática*; *Curso de Curta Duração*; e, *Atividades Práticas Supervisionadas–APS na Disciplina de Cálculo Numérico*. As informações obtidas no desenvolvimento dos trabalhos compõem os dados a partir dos quais serão estabelecidas as análises para inferir sobre a problemática da investigação.

Na disciplina de Modelagem Matemática o foco da UEPS está no ensino de Equações de Diferenças. Investigar como se dá o uso da tecnologia em atividades de modelagem matemática é o foco da UEPS no curso de curta duração. Já nas APS o que se vislumbra com a UEPS associada a uma disciplina de Cálculo Numérico é a resolução de problemas pelos alunos usando modelagem matemática. A seguir, fazemos a caracterização de cada Contexto, que dispusemos conforme a ordem cronológica em que foram desenvolvidos.

2.1.1 Contexto 1: Disciplina de Modelagem na Licenciatura em Matemática

A primeira etapa da coleta de dados se deu durante o desenvolvimento de uma unidade de ensino para o estudo de Equações de Diferenças, desenvolvida na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, situada no quarto ano da matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática, período noturno, da UEL–Universidade Estadual de Londrina. A turma era composta de vinte e dois alunos, dos quais dezenove frequentaram as aulas no segundo bimestre de 2012. As aulas da referida unidade de ensino foram conduzidas pela pesquisadora e acompanhadas pela orientadora deste trabalho, no papel de observadora, e pela professora titular disciplina, que concedeu espaço para esse trabalho.

A abordagem das equações de diferenças realizada compreendia o estudo de tópicos de equações de diferenças de primeira e de segunda ordem mediados por atividades de modelagem matemática. A unidade teve duração de doze horas aula, distribuídas em seis encontros de aulas regulares além de dois encontros em horário extraclasse destinados à orientação dos trabalhos de modelagem, que foram propostos para serem desenvolvidos em grupos de alunos. Informações sobre as atividades foram disponibilizadas em uma página de Internet (ver Figura A.1, Apêndice A) e a comunicação com os estudantes também era possível por e-mail ou pelas redes sociais.

As informações, que compreendem dados da pesquisa, foram captadas por diferentes meios: registros dos alunos (atividades entregues no decorrer da unidade de ensino, sendo arquivos impressos ou eletrônicos); registros da professora da unidade de ensino e pesquisadora (relatórios elaborados após cada aula e ficha de acompanhamento das atividades dos grupos); arquivos de vídeo (tanto das aulas quanto dos encontros com os grupos para orientação dos trabalhos).

2.1.2 Contexto 2: Curso de Curta Duração

O minicurso intitulado *Atividades de Modelagem Matemática com o uso de Recursos Tecnológicos* foi proposto pela pesquisadora como parte das atividades do V EPMEM - Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, realizado em novembro de 2012, na cidade de Toledo-PR. Por se tratar de um curso de curta duração, três horas e trinta minutos, no planejamento da atividade de modelagem levou-se em conta que não seria possível conhecer com antecedência o perfil dos participantes, por isso, o estudo contemplava conhecimentos matemáticos abordados desde o Ensino Fundamental, dado que o público do evento compreendia estudantes de graduação, professores do Ensino Fundamental e professores de Graduação e Pós-Graduação nas áreas de Matemática e Educação Matemática.

Um levantamento inicial foi proposto aos vinte e três participantes inscritos, de modo que permitisse uma visão geral do grupo. Para esse fim, a professora lançou mão de um aplicativo *online*: o editor de formulários do *Google Docs* que permite a exibição em tempo real dos resultados do levantamento.

A proposição do minicurso foi motivada por inúmeras pesquisas que trazem o entendimento de que ambientes de ensino e aprendizagem devem ser pensados de modo a considerar o potencial das tecnologias de informação e comunicação que estão disponíveis atualmente à grande parte da sociedade. A Modelagem Matemática como alternativa pedagógica pode se valer desses recursos tecnológicos como uma oportunidade de promover experiências de aprendizagem em que os alunos possam aprender fazendo, de modo a aprimorar continuamente seus conhecimentos e construir novos conhecimentos. Neste sentido, o minicurso teve o intuito de desenvolver uma atividade de modelagem permeada pelo uso de tecnologias. No decorrer do mesmo, pretendia-se discutir como a tecnologia pode ser usada para que os alunos se sintam convidados a problematizar, experimentar, planejar, comunicar com os outros, construir modelos, visualizar resultados, de forma a promover uma aprendizagem que seja relevante para além do ambiente escolar.

O acesso ao material usado durante o minicurso e informações sobre as atividades desenvolvidas foram disponibilizadas em um *blog* que a pesquisadora mantém para fins educacionais (ver Figura B.1, Apêndice B). Esse canal de comunicação permaneceria aberto para que os participantes pudessem interagir a qualquer hora, mesmo após o encerramento do evento.

Para compor os dados da pesquisa foi realizada filmagem de todo o minicurso. Outros registros como os formulários respondidos pelos participantes e e-mails encaminhados posteriormente também compõe nossos dados.

2.1.3 Contexto 3: APS - Atividades Práticas Supervisionadas na Disciplina de Cálculo Numérico

Outra parte da pesquisa ocorreu durante o segundo semestre letivo de 2012 na UTFPR–Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Londrina. Um projeto de Ensino intitulado *Atividades de Modelagem Matemática no estudo de temas da disciplina de Cálculo Numérico* foi proposto aos alunos das disciplinas de Cálculo Numérico dos cursos de Engenharia Ambiental e de Engenharia de Materiais. Os quarenta e cinco alunos matriculados em Cálculo Numérico estavam distribuídos em três turmas, independente do curso, e sob responsabilidade do mesmo professor.

Nesta etapa, a pesquisa se voltou às práticas dos alunos durante as APS que fazem parte da carga horária da disciplina. Tais atividades são previstas nos projetos dos cursos da UTFPR e regulamentadas segundo a Resolução n^o 78/09 COEPP, de 21 de agosto de 2009. Segundo a resolução, em seu Art. 2^o, as APS são definidas como: "atividades acadêmicas desenvolvidas sob a orientação, supervisão e avaliação de docentes e realizadas pelos discentes em horários diferentes daqueles destinados às atividades presenciais". (UTFPR, 2009)

Devido a natureza das APS, entendemos que este é um espaço pertinente em que as atividades de modelagem podem ser propostas, complementando os estudos das aulas presenciais, pois, o Art. 3^o esclarece que:

> podem ser consideradas Atividades Práticas Supervisionadas (APS): estudos dirigidos, trabalhos individuais, trabalhos em grupo, desenvolvimento de projetos, atividades em laboratório, atividades de campo, oficinas, pesquisas, estudos de casos, seminários, desenvolvimento de trabalhos acadêmicos, práticas de ensino e atividades específicas dos cursos de licenciatura, dentre outras.

Assim, o projeto de ensino foi proposto aos alunos como APS, computando doze horas aula em horário extraclasse para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, que foram orientadas e acompanhadas pela professora pesquisadora, com a anuência do professor da disciplina. O acesso às informações do projeto foram disponibilizadas na página pessoal da professora (ver Figura C.1, Apêndice C).

A coleta de dados se deu de acordo com as normas de ética em pesquisa, sendo que para os registros dos dados foram usados diferentes meios, como: gravação de áudio e/ou vídeo dos encontros de orientação com os grupos e, arquivamento de materiais produzido pelos alunos, sendo eles manuscritos, impressos ou arquivos eletrônicos.

Em cada um dos Contextos da pesquisa os alunos e participantes foram esclarecidos sobre o propósito da pesquisa, bem como da necessidade de fazer uso de registros por eles produzidos, assim como, de áudio e vídeo das aulas ou encontros de orientação. Após esclarecimentos os participantes eram convidados a assinar um termo de autorização (ver Apêndices A.2, B.2 e C.2).

A fim de nos referirmos aos estudantes/participantes envolvidos em cada Contexto, atribuímos um código em que a primeira parte remete ao Contexto (C1, C2 ou C3) e na segunda parte a letra indica uma referência do aluno no grupo e o número indica o grupo a que o aluno pertence, por exemplo, C1(A1) indica que trata-se do o primeiro aluno do Grupo 1, do Contexto 1, enquanto C3(B10) indica o segundo aluno do Grupo 10, no Contexto 3. Como no Contexto 2 os participantes não trabalharam em grupos, serão identificados como C2(n), com n variando de 1 à 23.

2.2 As opções para conduzir as Análises

Buscamos uma abordagem metodológica de análise qualitativa que atendesse nosso objetivo de procurar nos dados de cada Contexto investigado elementos que nos proporcionasse entendimento sobre as questões de pesquisa. Ao mesmo tempo, que possibilitasse a análise dos dados em equilíbrio entre sensibilidade e objetividade, considerando que a pesquisadora seria participante ativa e também implicada com o processo, numa construção colaborativa com os envolvidos nos diferentes Contextos. Levamos em conta também, que a opção metodológica orientasse para o tratamento de uma grande quantidade de informações que seria necessária para bem compreender os Contextos investigados.

Optamos por considerar as questões da pesquisa a partir de uma *análise específica*, para cada um dos três Contextos, para depois olharmos para o conjunto todo em uma *análise global*. Para dar suporte a essas análises optamos por seguir a proposta metodológica da *Teoria Fundamentada em Dados*[1], com o suporte de um *software* de análise qualitativa, o ATLAS.ti®.

2.2.1 Teoria Fundamentada em Dados

A Teoria Fundamentada em Dados (TFD) é uma metodologia de campo que segue os princípios da metodologia qualitativa e visa construir indutivamente uma teoria assentada nos dados a partir da análise qualitativa destes.

Optamos por realizar nossas análises orientadas por essa teoria, por entender

[1] *Teoria Fundamentada em Dados* é a tradução para denominar *Grounded Theory*, uma teoria que teve sua gênese nas ciências sociais, sendo construída pelos sociólogos Barney G. Glaser e Anselm L. Strauss que a divulgaram em 1967 no livro *The discovery of grounded theory*.

que a investigação sobre a articulação entre modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias em UEPS poderiam ser melhor discutidos a partir da análise sistemática dos dados de cada Contexto e do conjunto de dados de todos os Contextos da pesquisa. Embora trate-se de uma abordagem pouco explorada na área de Educação Matemática, encontramos alguns autores que se valeram dos procedimentos analíticos sugeridos pela Teoria Fundamentada em Dados em trabalhos de pesquisa em Modelagem Matemática, como Silva (2013), Oliveira (2010), Maaβ (2006).

Segundo Charmaz (2009), os dados formam a base da teoria, e a análise que o pesquisador faz desses dados origina os conceitos que serão construídos, diferente das estratégias habituais de fazer dedução de hipóteses analisáveis a partir de teorias existentes. Nesse intuito, se faz necessário reunir dados para elaborar análises teóricas desde o início da investigação. Para a autora, os métodos da teoria fundamentada favorecem a percepção dos dados sob uma nova perspectiva e a exploração das ideias sobre os dados por meio de uma redação analítica já na fase inicial. Assim, os métodos da teoria fundamentada, permitem conduzir, controlar e organizar a coleta de dados bem como, permite construir uma análise original desses dados.

De acordo com Santos (2011), Kathy Charmaz tem uma orientação epistemológica caracteristicamente construtivista, cujos elementos principais consideram a atenção ao contexto, o posicionamento dos participantes quanto as situações em estudo e suas ações, a consideração de múltiplas realidades e, a consideração da subjetividade do investigador a qual, devidamente explicitada, é um recurso a mobilizar.

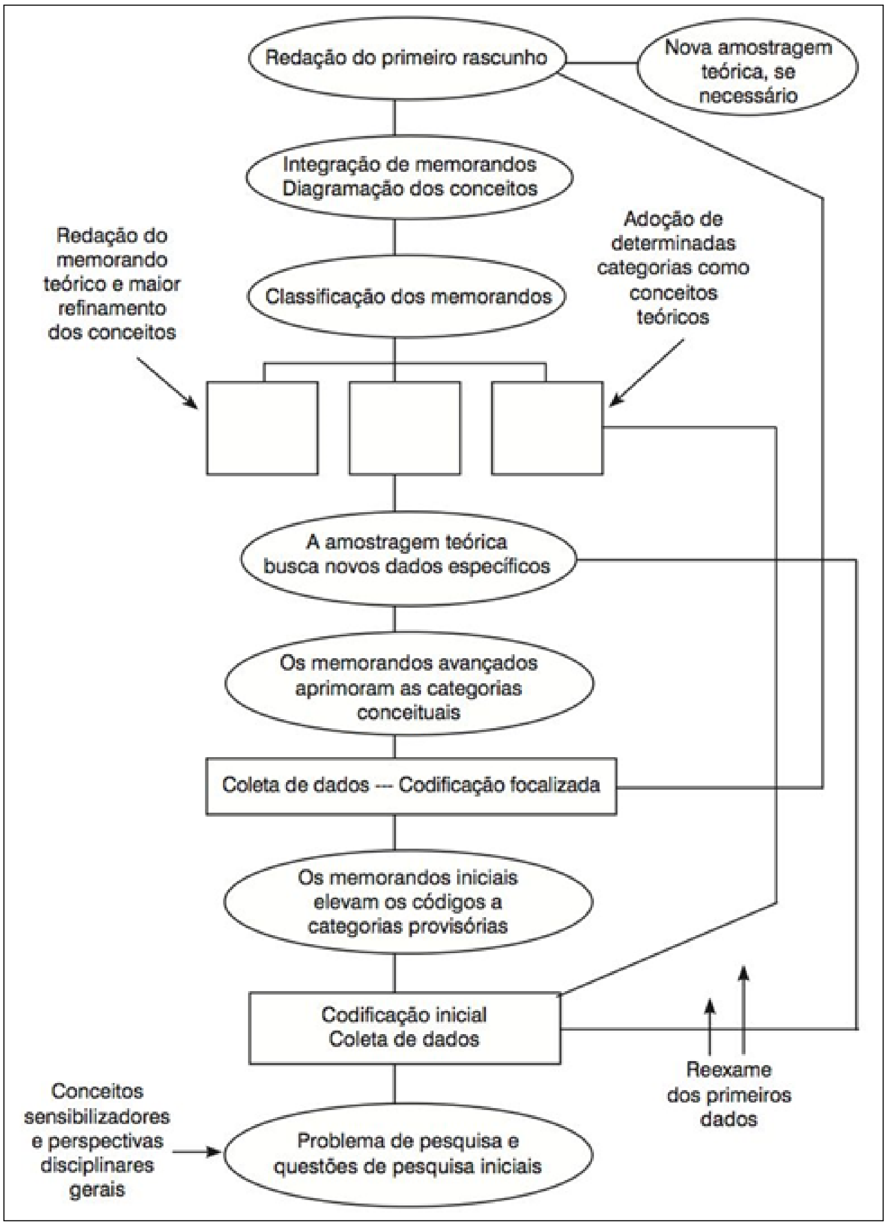
A teoria fundamentada tem como característica oferecer diretrizes explícitas sobre a forma como o pesquisador deve proceder e é sistemática:

> Como pesquisadores adeptos à teoria fundamentada, estudamos os nossos primeiros dados e começamos a separar, classificar e sintetizar esses dados por meio da codificação qualitativa. Codificar significa associar marcadores a segmentos de dados que representam aquilo de que se trata cada um dos segmentos. A codificação refina os dados, classificá-os e nos fornece um instrumento para que assim possamos estabelecer comparações com outros segmentos de dados. [...]
>
> Ao estabelecermos e codificarmos numerosas comparações, a nossa compreensão analítica dos dados começa a tomar forma. Redigimos anotações analíticas preliminares sobre nossos códigos e comparações, bem como qualquer outra ideia que nos ocorra sobre nossos dados – essas anotações são os chamados memorandos. Com o estudo dos dados, a comparação destes e a redação dos memorandos, definimos as ideias que melhor se ajustam e interpretam os dados como categorias analíticas provisórias. Quando surgem questões inevitáveis e aparecem lacunas em nossas categorias, buscamos dados que resolvam essas questões e que possam preencher as lacunas. [...] Conforme prosseguimos, nossas categorias não apenas coalescem à medida que interpretamos os dados coletados, mas também tornam-se mais sistematizadas, uma vez que passamos por níveis sucessivos de análise.
>
> Nossas categorias analíticas e as relações delas extraídas nos fornecem um instrumento conceitual sobre a experiência estudada. Sendo assim, construímos níveis de abstração diretamente dos dados e, posteriormente, reunimos dados adicionais para verificar e refinar as nossas categorias analíticas geradas a partir disso. Nosso trabalho culmina em uma "teoria

> fundamentada" ou em uma compreensão teórica da experiência estudada. (CHARMAZ, 2009, p.15)

O processo da teoria fundamentada, segundo a visão de Charmaz, é representada pela Figura 2.1, e deve ser lida de baixo para cima. Charmaz (2009, p.24) define que: "Um processo é constituído por sequências temporais reveladas que podem apresentar limites identificáveis com inícios e finais claros e marcas de referência entre eles. As sequências temporais estão associadas a um determinado processo e o levam à modificação."

Figura 2.1: O processo da teoria fundamentada em dados



Fonte: Charmaz (2009, p.26).

As etapas de codificação que geralmente são abordadas na teoria fundamentada são: *codificação inicial*, *codificação axial* e *codificação focalizada*.

A *codificação inicial* é a primeira etapa do processo de análise de dados. Nela todo o trabalho é analisado e são selecionadas palavras-chave que geram conceitos. Esses conceitos são abstraídos pelo pesquisador por meio de análises dessas palavras-chave. Na codificação inicial, o pesquisador deve se fixar rigorosamente nos dados, procurando codificar com palavras que reflitam ação. Como indica Charmaz (2009, 74): "Observe atentamente as ações e, na medida do possível, codifique os dados como ações". A autora recomenda que o pesquisador fique próximo aos dados e mantenha os seus códigos simples e precisos. Quanto a prática de codificação, sugere que o pesquisador construa códigos curtos, conserve as ações, compare dados com dados e desloque-se rapidamente pelos dados.

A *codificação axial* é uma etapa intermediária entre a codificação inicial e a codificação focalizada. Ela é necessária devido à existência do grande volume de conceitos originários da codificação inicial. Nessa etapa analisam-se os conceitos selecionados, faz-se uma reorganização de tais conceitos e destes extrai-se uma ideia central e suas subordinações. Com esta etapa, define-se codificação e busca-se validar ou não o processo.

> A codificação axial relaciona categorias a subcategorias, especifica as propriedades e dimensões de uma categoria, e reúne os dados que foram quebrados durante a codificação inicial para dar coerência à análise emergente (CHARMAZ, 2006, p. 91).

A codificação axial é recomendada como um meio para realizar a integração das categorias, em que o objetivo principal é reunir os dados e elaborar conexões entre categorias e subcategorias para "classificar, sintetizar e organizar grandes montantes de dados e reagrupá-los de novas formas" (CHARMAZ, 2009, p. 91).

A etapa final corresponde à *codificação focalizada* na qual é feita uma revisão e avaliação das categorias, o processo é validado e assume-se um compromisso com a categoria central definida na codificação axial. Para Charmaz (2009, p. 87), essa codificação "constata as suas preconcepções sobre o tópico"que está sendo analisado.

Para realizar a codificação focalizada se faz necessária a redução das categorias. Nesse momento, é preciso descobrir uniformidades no grupo original de categorias ou suas propriedades e, com isso, formular a teoria com um pequeno grupo de conceitos abstratos, delimitando a terminologia. Além disso, a lista de categorias é delimitada quando estas se tornam teoricamente saturadas. Essa saturação teórica ocorre, segundo Charmaz (2009), quando nenhum dado relevante ou novo emerge para desenvolver novos conhecimentos teóricos nem revela novas propriedades para a categoria central.

Nessa pesquisa, os dados provenientes do Contexto 1 compõe a *amostragem inicial*, conforme denominação de Charmaz (2009), a qual fornece um ponto de partida para a elaboração de uma teoria fundamentada. Por meio da codificação inicial dessa amostragem algumas categorias são evidenciadas, porém, pode ocorrer que muita coisa permaneça ainda pressuposta, desconhecida ou questionável. Assim, a estratégia sugerida para o estabelecimento de categorias robustas, com bases sólidas, é a realização de nova coleta de dados para compor a *amostragem teórica*. Com esse intuito, visando a codificação focalizada, é que foram desenvolvidos o Contexto 2 e o Contexto 3.

> A amostragem teórica visa a buscar dados pertinentes para desenvolver a sua teoria emergente. O principal objetivo da amostragem teórica é elaborar e refinar as categorias que constituem a sua teoria. Você conduz a amostragem teórica ao utilizar a amostra para desenvolver as propriedades da(s) sua(s) categoria(s) até que não surjam mais propriedades novas. (CHARMAZ, 2009, p.134)

Para apoiar o tratamento dos dados, demasiadamente exaustivo de se fazer manualmente, lançamos mão de um *software* de análise qualitativa, o qual passamos a apresentar.

2.2.2 *Software* de Análise Qualitativa: ATLAS.ti®

Como suporte para o tratamento dos dados optamos por lançar mão de um *software* de análise qualitativa, o ATLAS.ti versão 7.0 (Figura D.1, Apêndice D). O ATLAS.ti é uma marca registrada de ATLAS.ti Scientific Software Development GmbH e a principal contribuição desse aplicativo é auxiliar no manuseio e organização dos dados, facilitando o processo de análise e interpretação que é atribuição do pesquisador.

Esse recurso tem sido utilizado como uma ferramenta facilitadora em pesquisa acadêmicas, como um diferencial para a organização e manipulação de dados, principalmente quando se tem uma grande quantidade de documentos para analisar. A opção pelo ATLAS.ti, como elemento auxiliar no trabalho de pesquisa em Modelagem Matemática na Educação Matemática não é inédito, como mostra o Klüber (2012), cuja pesquisa foi recentemente concluída.

O *software* disponibiliza recursos como: extrair, categorizar e interligar segmentos de informação de uma grande variedade e volume de fontes de documentos. Os dados podem incluir: documentos de texto, arquivos PDF, imagens, áudios, vídeos, e ainda informações georeferrenciadas obtidas do *Google Earth*. O *software* ajuda na descoberta de padrões e tem várias opções de ferramentas colaborativas (FRIESE, 2013).

A atividade básica que se faz com o ATLAS.ti é a codificação, que refere-se ao processo de atribuir categorias, conceitos, ou códigos a segmentos de informação que são de interesse para os objetivos da pesquisa. O ATLAS.ti está baseado no que pode ser chamado de *paradigma do papel e caneta* (FRIESE, 2013). Assim, o pesquisador faz a leitura ao passo que pode ir destacando no texto trechos relevantes e pode relacioná-los à um ou mais códigos. O *software* guarda as relações provenientes da codificação do pesquisador e permite a ele acessá-la a qualquer momento na realização das análises.

Tanto a interface de usuário quanto os seus processos foram desenvolvidos segundo a analogia com o *paradigma do papel e caneta*. Esse recurso tem a grande vantagem de permitir a manipulação de vários documentos simultaneamente, além de facilitar a consulta aos dados e à codificação que se vai desenvolvendo. Os principais elementos do aplicativo são:

Unidade Hermeneutica (UH): é o arquivo de um projeto que mantém os caminhos de localização da fonte de dados e armazena as famílias de códigos, as visualizações das redes, entre outras coisas que se desenvolva no percurso do trabalho. Ao se abrir uma UH, automaticamente se ativam todos seus materiais associados, alinhando a informação e habilitando o trabalho numa única entidade de trabalho.

Documentos Primários (DP): é um arquivo de informações relativos a um projeto, que se carrega no *software*, a partir do qual será feita a codificação. Os caminhos até a localização da informação são mantidos como parte do projeto, sendo possível carregar vários arquivos relativos ao mesmo projeto.

Citações: são trechos relevantes dos documentos, em geral relacionados a algum código, e formam a unidade amostral da análise. Estas citações, ou incidentes, são referenciadas com um número indicando a que documento primário se refere e outro que indica sua ordem dentro do documento.

Memos, ou notas de Análise: Descrevem os resultados da codificação até a elaboração final da teoria, indicando a interpretação do pesquisador. Podem compreender: microanálise (MA), codificação aberta (CO), codificação axial (CA), codificação seletiva (CS) e notas livres.

Esquemas: são representações gráficas das associações entre os códigos e são elementos que auxiliam na integração das categorias e subcategorias para apresentação da teoria.

Comentários: são anotações do pesquisador que funcionam como uma memória auxiliar, indicando o significado dos códigos, por exemplo. Esse elemento pode facilitar a análise por guardar um histórico de como a teoria foi sendo construída.

No Capítulo 6 explicitaremos os procedimentos adotados para a realização das análises, aliando esse recurso de organização dos dados para a análise qualitativa com a metodologia baseada na Teoria Fundamentada em Dados. A fim de ilustrar o uso desse recurso o Apêndice D traz figuras com a interface do *software* e outras produções resultantes dos trabalhos de análise.

3 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM AMBIENTES DE ENSINO MEDIADOS PELA TECNOLOGIA

A Teoria da Aprendizagem Significativa tem sido construída desde a década de 1960 pela dedicação do psicólogo David Paul Ausubel (1918-2008) e de diversos pesquisadores em vários países. A proposta psicoeducativa com perspectiva cognitivista foi divulgada a partir da obra *The Psychology of Meaningful Verbal Learning* (Psicologia da Aprendizagem Verbal Significativa) de 1963. Recentemente, em 2000, Ausubel publicou o que denominou de atualização dessa obra, intitulada agora *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. Neste texto usaremos a versão de 2003 publicada na língua portuguesa com mesmo título: A Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva. Quase quarenta anos após a primeira publicação, Ausubel mostra que sua teoria continua atual ao reiterá-la ao mesmo tempo em que destaca as principais variáveis e processos psicológicos envolvidos na aprendizagem e na retenção significativas, visando a criação de novos significados no aprendiz.

Nesse período, entre a obra de 1963 e a publicação de 2000, as pesquisas relacionadas ao cérebro tiveram um grande avanço impulsionadas pelo desenvolvimento tecnológico. Com isso, destacam-se as pesquisas em neurociência e na ciência cognitiva. Atualmente cresce a cooperação de áreas como a linguística, ciência da computação, química, engenharia, matemática, medicina, psicologia, além de outras como, filosofia e a física com vistas a melhor compreender a mente em pesquisas interdisciplinares. De acordo com Cosenza e Guerra (2011, p. 142):

> As neurociências estudam os neurônios e suas moléculas constituintes, os órgãos do sistema nervoso e suas funções específicas, e também as funções cognitivas e o comportamento que são resultantes da atividade dessas estruturas. O conhecimento neurocientífico cresceu muito nos últimos anos, principalmente a partir da chamada 'Década do Cérebro', proposta pelo Congresso dos Estados Unidos para os anos de 1990 a 1999. O desenvolvimento e o aperfeiçoamento de técnicas de neuroimagem, de eletrofisiologia, da neurobiologia molecular, bem como os achados no campo da genética e da neurociência cognitiva possibilitaram um avanço do conhecimento em ritmo até então nunca observado. Embora os processos cognitivos ainda não sejam integralmente compreendidos devido às limitações técnicas e éticas que o estudo do comportamento humano impõe, grande progresso já foi alcançado.

Hoje se sabe que o cérebro é o órgão da aprendizagem, e boa parte dos conhecimentos sobre seu funcionamento são recentes. A neurociência é caracterizada como um estudo científico de como o cérebro pode aprender melhor e guardar o que aprende. Assim, as pesquisas sobre os processos cognitivos apontam um cenário promissor para a realização de pesquisas visando uma maior compreensão de como o funcionamento do cérebro pode favorecer a educação.

A expressão *aprender modifica o cérebro* é hoje consensual e, segundo Cosenza e Guerra (2011, p.141),

> As estratégias pedagógicas promovidas pelo processo ensino-aprendizagem, aliadas às experiências de vida às quais o indivíduo é exposto, desencadeiam processos como a neuroplasticidade, modificando a estrutura cerebral de quem aprende. Tais modificações possibilitam o aparecimento dos novos comportamentos, adquiridos pelo processo da aprendizagem.

Em decorrência da divulgação das descobertas sobre o cérebro, a aproximação das pesquisas buscando estabelecer as contribuições das neurociências e da ciência cognitiva para a educação e como o conhecimento do cérebro pode interferir no processo de ensino e de aprendizagem têm se intensificado. Inúmeras iniciativas de pesquisadores das neurociências têm se desenvolvido em colaboração com instituições de ensino, no Brasil e internacionalmente (NICOLELIS, 2011).

Tendo em vista as preocupações inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem, é de se supor que os educadores possam se amparar no conhecimento científico para realizar intervenções mais acertadas ao "Conhecer a organização e as funções do cérebro, os períodos receptivos, os mecanismos da linguagem, da atenção e da memória, as relações entre cognição, emoção, motivação e desempenho, as dificuldades de aprendizagem..." (COSENZA e GUERRA, 2011, p.136).

Muito embora um mundo de possibilidades pareça se colocar às pesquisas atuais e futuras no campo da educação, amparadas pelas recentes descobertas sobre o cérebro, por outro lado as pesquisas têm confirmado alguns aspectos teóricos defendidos por pesquisadores da psicologia cognitiva quanto às suposições sobre o funcionamento do cérebro, mas que não dispunham de meios comprobatórios. Dentre eles, consideramos as recomendações de Ausubel e sua Teoria da Aprendizagem Significativa.

Segundo Novak (2011, p.3) "Ausubel estava simplesmente muito à frente de seu tempo" ao mencionar a ênfase atual dos psicólogos educacionais aos aspectos cognitivos, em detrimento ao enfoque comportamentalista, a partir dos avanços nas neurociências. Estudos recentes do cérebro também dão suporte à ideia fundamental na teoria de Ausubel que o conhecimento armazenado durante a aprendizagem significativa é fundamentalmente organizados de forma diferente do que o conhecimento aprendido por memorização, assim como as associações afetivas também são diferentes (NOVAK, 20011).

Apresentar os pressupostos teóricos da teoria da aprendizagem significativa que fundamentam parte de nossa pesquisa é a que nos dedicamos neste capítulo.

3.1 Aprendizagem Significativa: conceitos fundamentais

Ausubel entende a aprendizagem como um processo de modificação do conhecimento e para tanto reconhece a importância dos processos cognitivos dos alunos, que ocorrem em uma interação entre as informações novas e a estrutura cognitiva de cada um. A estrutura cognitiva representa um dos principais fatores que influenciam a aprendizagem significativa. Esta estrutura compreende um complexo organizado de informações presentes na mente de quem aprende.

A Aprendizagem Significativa pode ser definida como um processo por meio do qual o sujeito que aprende relaciona, de maneira *não-arbitrária* e *substantiva* uma nova informação a um aspecto relevante de sua estrutura cognitiva (MOREIRA, 1999b).

A *não-arbitrariedade* e a *substantividade* são conceitos básicos que caracterizam a Aprendizagem Significativa. A *não-arbitrariedade* indica que o relacionamento de uma nova informação deve se dar com um conhecimento especificamente relevante da estrutura cognitiva de quem aprende, não com um aspecto qualquer, arbitrário, da mesma. A *substantividade* significa que o que é essencial na nova informação é que deve ser interiorizada pela estrutura cognitiva, não as palavras ou símbolos específicos usados para expressá-la (MOREIRA, 1997).

Para Ausubel, os conceitos e as proposições potencialmente significativos ficam *subsumidos* (subordinados) sob ideias mais abstratas, com maior poder de generalização e de inclusividade (os *subsunçores*). Essa aprendizagem é denominada *aprendizagem significativa subordinada* e, pode ser *derivativa*, quando o novo material é apenas corroborante ou derivável diretamente de algum conceito ou proposição já existente na estrutura cognitiva; ou *correlativa*, quando o novo material é uma extensão, elaboração, modificação ou quantificação de conceitos ou proposições previamente aprendidos significativamente.

A *aprendizagem significativa superordenada* ocorre quando o sujeito aprende uma nova proposição que abrange ideias já estabelecidas na estrutura cognitiva, subordinando-as. Esta ocorre por meio do raciocínio indutivo que parte de casos específicos para generalizações, na aprendizagem de abstrações de ordem superior.

Há ainda a aprendizagem significativa *combinatória*, que decorre da aprendizagem significativa de novas proposições que não gera nem uma relação subordinada, nem uma superordenada, com ideias particulares na estrutura cognitiva. Como neste caso não existe um relacionamento com ideias relevantes particulares da estrutura cognitiva as proposições combinatórias são menos relacionáveis com conhecimentos adquiridos anteriormente, por essa razão, em geral são mais difíceis. (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980; AUSUBEL, 2003).

3.2 ALGUNS TIPOS DE APRENDIZAGENS

No âmbito escolar a Aprendizagem Significativa e a Aprendizagem Automática (ou mecânica) são dois tipos de aprendizagem amplamente discutidos. Conforme Ausubel, Novak e Hanesian (1980), Moreira (1999b), Moreira e Masini (2006), para diferenciá-las, é adequado que se faça distinção entre dois processos de aprendizagem, denominados *aprendizagem receptiva* e *aprendizagem por descoberta*. Na *aprendizagem receptiva* o conteúdo do qual o aluno deve tomar conhecimento e aprender lhe é disponibilizado na forma final. No processo de *aprendizagem por descoberta*, não se apresenta o conteúdo a ser aprendido de forma sistematizada, mas este deve ser descoberto pelo aluno antes e só depois incorporado significativamente por sua estrutura cognitiva.

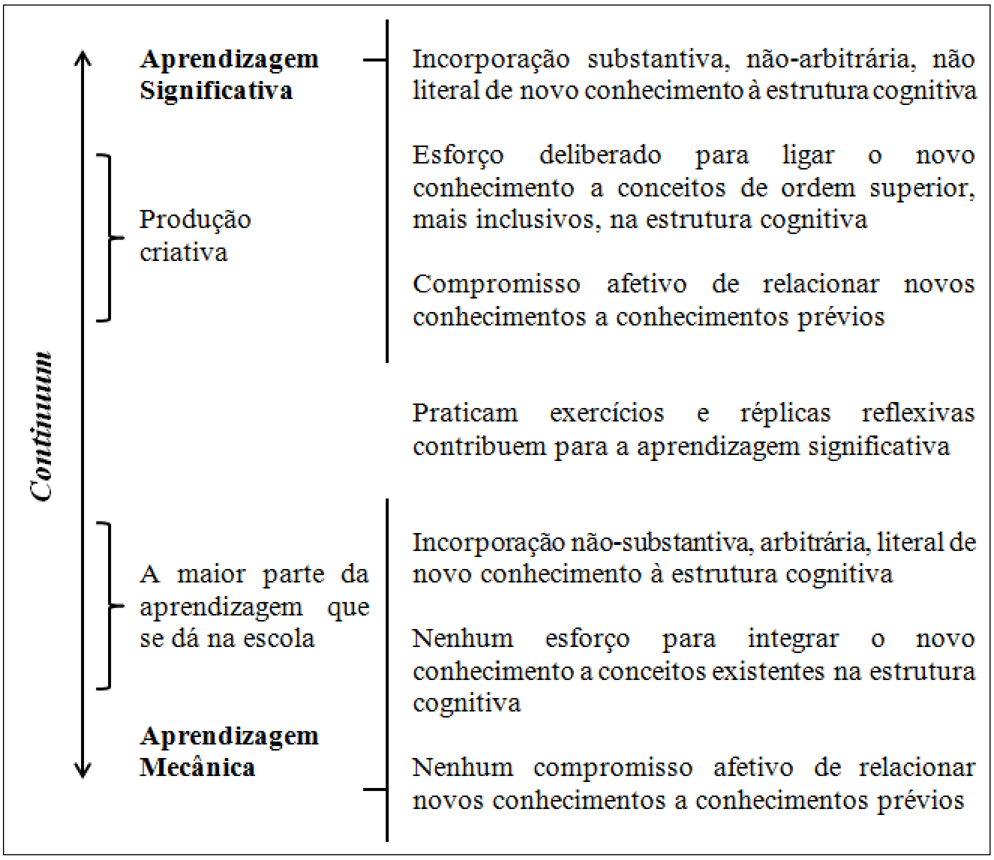
A via de acesso à aprendizagem significativa não é necessariamente o processo de aprendizagem por descoberta, assim como uma aprendizagem mecânica não é necessariamente resultado de um processo de aprendizagem receptiva. A aprendizagem é, em parte, consequência da estratégia de ensino. Assim, tanto a aprendizagem receptiva, como a aprendizagem por descoberta podem ser significativa, ou mecânica, dependendo das condições em que ocorrem.

No sistema educacional os processos de ensino e de aprendizagem continuam, com o passar do tempo, preponderantemente voltados à aprendizagem por recepção. Nesse contexto pode ser ineficiente a aprendizagem por descoberta, pois traz a necessidade de que o aluno redescubra os conteúdos a fim de chegar a uma aprendizagem significativa, o que pode ser inadequado, entre outros fatores, por requerer muito tempo. Nesse sentido, Ausubel assegura que, do ponto de vista da aquisição do conhecimento, o aluno em idade escolar, em nenhum estágio de seu desenvolvimento cognitivo necessita descobrir os conteúdos a fim de tornar-se apto a compreendê-los e usá-los significativamente (MOREIRA, 1999). Na reformulação de sua obra de 1963, Ausubel (2003) mantém essa convicção e menciona já não ser necessário sustentar as críticas a essa corrente, até mesmo por não ser mais um "assunto quente"como na outra época.

As condições para a ocorrência de aprendizagem não se referem apenas às estratégias de ensino adotadas pelo professor, mas envolvem também aspectos específicos de cada sujeito e, dentre esses, os aspectos motivacionais. No entanto, a maneira como os conteúdos são disponibilizados aos alunos em uma situação de ensino pode levar a uma aprendizagem mais significativa ou mais mecânica. A Figura 3.1 representa o *continuum* aprendizagem mecânica - aprendizagem significativa.

Para Moreira (1999b, 1997), essencialmente, o processo da aprendizagem significativa está no relacionamento não-arbitrário e substantivo de ideias simbolicamente expressas por algum conceito ou proposição que já é significativo, presente na estrutura cognitiva e adequado para interagir com a nova informação. Durante a interação, o *conhecimento prévio* se modifica pela aquisição de novos significados, porém, quando essa interação não ocorre adequadamente, as novas informações podem ser armazenadas de maneira arbitrária e literal, caracterizando a aprendizagem mecânica.

Figura 3.1: O *continuum* aprendizagem mecânica - aprendizagem significativa de NOVAK.



Fonte: Moreira (1999b, p.18).

3.2.1 Condições para uma Aprendizagem Significativa

Para que o ensino conduza a uma aprendizagem significativa, Ausubel indica as condições básicas, de grande influência para esse processo:

a) O material organizado para o ensino deve ser potencialmente significativo;

b) A estrutura cognitiva do aluno deve dispor de *subsunçores* (conhecimentos prévios) que permitam o relacionamento do que o aluno já sabe com os conhecimentos novos;

c) O aluno deve apresentar uma predisposição positiva para aprender de maneira significativa, ou seja, para relacionar o conhecimento que já tem com o que deve aprender.

De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980), Moreira (1999b), as duas primeiras condições (a e b) estão associadas a dois fatores: a natureza do material em si e a natureza da estrutura cognitiva do aluno, que dizem respeito, respectivamente, ao *significado lógico* e ao *significado psicológico*. Para que o material seja potencialmente significativo ele deve ser relacionável à estrutura cognitiva do aluno de maneira não-arbitrária e substantiva. Há diferença entre um material ser potencialmente significativo em si, e ser potencialmente significativo para um determinado aluno. O significado lógico, diz respeito à estrutura interna do material, à sua natureza. Um material logicamente significativo requer que a estrutura do material, não seja arbitrária nem confusa, a fim de que se estabeleçam relações substantivas com os conhecimentos prévios, relacionáveis às novas informações. O significado psicológico é uma experiência idiossincrática, diz respeito ao relacionamento substantivo e não-arbitrário do material, que é logicamente significativo, com a estrutura cognitiva de cada aluno.

> [...] o significado real (significado psicológico) emerge quando o significado potencial (significado lógico) do material de aprendizagem converte-se em conteúdo cognitivo e idiossincrático por ter sido relacionado, de maneira substantiva e não-arbitrária, e por ter *interagido* com ideias relevantes existentes na estrutura cognitiva do indivíduo (MOREIRA, 1999, p. 55-56).

A condição referente à disposição do aluno em aprender significativamente requer que ele manifeste uma disposição para relacionar, de forma não-arbitrária e substantiva, o novo material à sua estrutura cognitiva. Para Moreira (1999b) a predisposição para aprender e a aprendizagem significativa têm uma relação cíclica: "[...] a aprendizagem significativa requer predisposição para aprender e, ao mesmo tempo, gera esse tipo de experiência afetiva". Não basta que o material, ou as atividades de ensino sejam potencialmente significativos se o aluno não estiver motivado ou não dispuser de características cognitivas adequadas, ou ainda, se ele se satisfaz adquirindo conhecimentos vagos ou difusos, sem a significância devida ao adotar estratégias que o levam a internalizar o conteúdo de forma literal e arbitrária.

3.3 ORGANIZAÇÃO DO ENSINO

Para que a aprendizagem significativa aconteça, é necessário pensar em estratégias que facilitem nos alunos a organização de uma estrutura cognitiva adequada, já que esta é a variável mais importante para a ocorrência de aprendizagem significativa.

> Se a estrutura cognitiva for clara, estável e bem organizada, surgem significados precisos e inequívocos e estes têm tendência a reter a força de dissociabilidade ou disponibilidade. Se por outro lado, a estrutura cognitiva for instável, ambígua, desorganizada ou organizada do modo caótico, tem tendência a inibir a aprendizagem significativa e a retenção. Assim, é através do fortalecimento de aspectos relevantes da estrutura cognitiva que se pode facilitar a nova aprendizagem e retenção. (AUSUBEL, 2003, p.10).

A estrutura cognitiva pode ser influenciada de duas formas para fins pedagógicos (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980, p. 138): *Substantivamente*, com propósitos organizacionais e integrativos, usando as proposições e conceitos unificadores do conteúdo, que têm maior poder explanatório, inclusividade, generalidade e relacionabilidade; e *Programaticamente*, empregando princípios programáticos para ordenar sequencialmente o conteúdo a ser disponibilizado ao aluno, respeitando sua organização e lógica internas e planejando a realização de atividades adequadas.

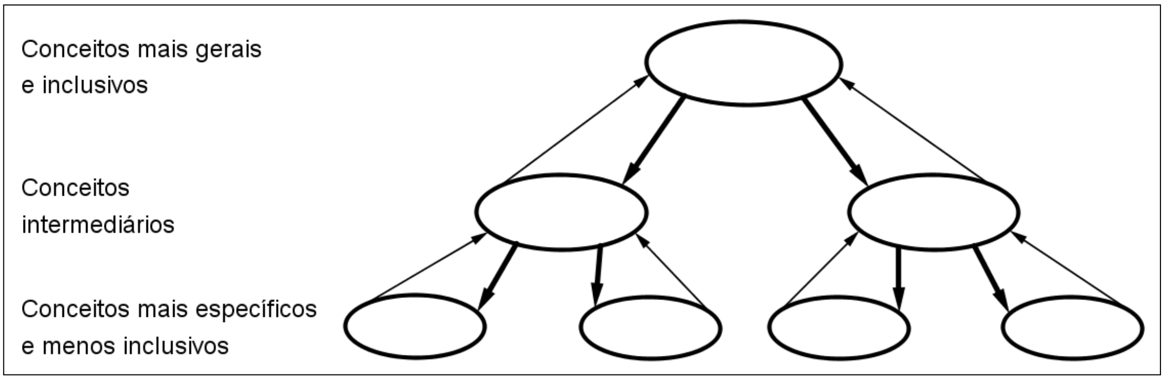
Neste sentido, segundo Moreira (1999b) alguns procedimentos são importantes para proporcionar a facilitação da aprendizagem significativa. A primeira orientação é de que se faça uma análise conceitual do conteúdo a fim de identificar conceitos e procedimentos básicos, para neles concentrar o empenho na organização do material com as atividades de ensino. Outra orientação é de não sobrecarregar o aluno de informações desnecessárias que possam dificultar a organização cognitiva. Por fim, é importante buscar a melhor maneira de relacionar, explicitamente, os aspectos mais importantes do conteúdo a ser desenvolvido, aos aspectos especificamente relevantes da estrutura cognitiva do aluno.

O professor tem um importante papel na aprendizagem, pois cabe a ele organizar o material de ensino. Embasado em seu conhecimento, o professor deve demonstrar habilidade para identificar os conceitos fundamentais do conteúdo e organizá-los hierarquicamente, partindo dos conceitos de maior generalização de forma que esses possam ser relacionáveis e capazes de integrar o maior número de conceitos restantes. Posteriormente, o professor deve ordenar esses conceitos em uma sequência decrescente e cíclica, de forma que, enquanto alguns conceitos sejam apresentados outros possam ser revisados. Essas considerações podem ser sintetizadas em dois princípios, denominados por Ausubel de *diferenciação progressiva* e *reconciliação integradora*. Esses princípios devem ser contemplados na organização do ensino, para a facilitação da aprendizagem significativa.

Segundo Moreira (1997), a *diferenciação progressiva* é o princípio pelo qual os conceitos mais gerais e inclusivos do conteúdo de ensino devem ser apresentados no início da instrução e, progressivamente, diferenciados em termos de detalhes e especificidades. *Reconciliação integradora* é segundo o autor, o princípio programático segundo o qual a instrução deve também explorar relações entre ideias, apontar similaridades e diferenças importantes e reconciliar discrepâncias reais ou aparentes.

Novak e Gowin (1988) consideram que, para se atingir a reconciliação integradora de forma mais eficaz, deve-se organizar o ensino *descendo e subindo* nas estruturas conceituais hierárquicas, à medida que a nova informação é apresentada. A diferenciação progressiva e a reconciliação integradora são promovidas quando se parte do *geral* e progressivamente se chega ao *particular*, mas, também se deve fazer constantes referências ao *geral* para não perder a visão do todo e para elaborá-lo cada vez mais. Na Figura 3.2, as linhas em negrito sugerem a direção recomendada para a diferenciação progressiva e as outras linhas sugerem a reconciliação integradora.

Figura 3.2: Uma representação esquemática do modelo ausubeliano de diferenciação conceitual progressiva e reconciliação integradora



Fonte: Moreira e Masini (2006).

Novamente se mostra a importância de que a estrutura cognitiva do aluno disponha de conhecimentos prévios com os quais as novas informações, ou conhecimentos possam interagir a fim de serem incorporados significativamente por esta estrutura. No caso de os subsunçores necessários não existirem na estrutura cognitiva do aluno ou estarem esquecidos, Ausubel sugere que o problema seja contornado com a utilização dos *organizadores prévios* ou *organizadores avançados* (AUSUBEL, 2003). Um organizador prévio é definido como:

> Material introdutório apresentado antes do material a ser aprendido, porém em nível mais alto de generalidade, inclusividade e abstração do que o material em si e, explicitamente, relacionado às ideias relevantes existentes na estrutura cognitiva e à tarefa de aprendizagem. Destina-se a facilitar a aprendizagem significativa, servindo de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele precisa saber para que possa aprender o novo material de maneira significativa. (MOREIRA e MASINI, 2006, p. 107).

Os organizadores prévios também servem para estabelecer relações entre ideias, proposições e conceitos já existentes na estrutura cognitiva e aqueles contidos no material de aprendizagem, por isso Ausubel sugere que os organizadores prévios sejam usados para *reativar* significados, pois mesmo que a aprendizagem tenha sido significativa, com o passar do tempo os conceitos podem ser esquecidos, e dessa forma serão facilmente reativados. Esses organizadores podem assumir diversas formas, como a de uma unidade que precede outra unidade dentro de um programa ou mesmo a forma de um texto introdutório.

3.4 Encaminhamentos para Avaliação da Aprendizagem Significativa

Em um processo de ensino e aprendizagem em que as preocupações com a organização do ensino e as tarefas de aprendizagem estão em torno da aprendizagem significativa, um fator de grande importância é como perceber evidências desta aprendizagem junto aos alunos. Neste sentido, é necessário investir esforços com relação à avaliação no decorrer do processo.

Para Ausubel a medida e a avaliação são centrais no conceito de aprendizagem na sala de aula. Para ele os dados obtidos com a avaliação devem ajudar o estudante a fim de situá-lo no processo, mostrando-lhe seu nível de desenvolvimento e ainda devem fornecer recursos ao professor para que, além de avaliar o aluno, avalie também o material e os métodos.

> A avaliação é importante no início, durante e na conclusão de qualquer sequência instrucional. Em primeiro lugar, devemos decidir quais os resultados da aprendizagem que se deseja induzir, e depois estruturar o processo instrucional de acordo. Em segundo lugar, é necessário determinar o grau de progresso em relação ao objetivo durante o curso da aprendizagem — tanto como retroalimentação para o estudante quanto como meio de vigiar a eficácia da instrução. Finalmente, é importante avaliar os resultados últimos da aprendizagem em relação aos objetivos, tanto do ponto de vista do rendimento dos alunos como do ponto de vista dos métodos e materiais de ensino. (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980, p. 500).

O produto da Aprendizagem Significativa é a aquisição de significados, o que pode ser constatado pela ocorrência de uma compreensão legítima, que requer a posse de significados claros, precisos diferenciados e transferíveis (MOREIRA, 1999). Não é possível saber se a compreensão ocorreu de fato apenas solicitando que o aluno diga quais os atributos essenciais de um conceito, ou os elementos essenciais de uma proposição, pois em resposta o aluno pode fornecer resultados memorizados mecanicamente. A sugestão proposta por Ausubel, para evitar a *simulação* da aprendizagem significativa é utilizar questões e problemas formulados de maneira diferente e não familiar, exigindo a máxima transformação do conhecimento adquirido pelo aluno. Este é um meio pelo qual é possível perceber se o aluno usa os significados compartilhados no contexto da matéria de ensino.

Neste sentido, algumas recomendações e possibilidades para evidenciar a ocorrência da aprendizagem significativa são encontradas em Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e em Moreira (1999b) e são apresentadas a seguir.

- Aplicar testes de compreensão: esses devem contemplar questões elaboradas de maneira diferente, em relação à escrita, e apresentadas em um contexto distinto daquele encontrado no material instrucional. As questões devem permitir que se perceba a ocorrência da compreensão conceitual ou proposicional;

- Trabalhar com resolução de problemas: a resolução de problemas é um método válido e prático de avaliar, em certas situações, se ocorreu a aprendizagem significativa. Segundo os autores, a resolução de problemas é definida como uma forma de atividade ou pensamento dirigido na qual tanto a representação cognitiva da experiência prévia como os componentes da situação problemática atual são reorganizados, transformados ou recombinados para assegurar um determinado objetivo. Essa atividade envolve a geração de estratégias de solução de problemas que transcendem a simples aplicação dos princípios a exemplos auto-evidentes;

- Solicitar aos alunos que diferenciem ideias relacionadas, mas não idênticas, ou que identifiquem os elementos essenciais de um conceito ou proposição, dispostos em uma lista, contendo também os elementos de outros conceitos e proposições similares;

- Propor aos estudantes uma tarefa de aprendizagem, sequencialmente dependente de outra, que não possa ser executada sem um verdadeiro domínio da precedente;

- Incentivar amostras de trabalhos: amostras de trabalhos incluem experiências de campo, habilidades de laboratório, desempenho clínico, desenhos, exposição de temas, relatórios, pesquisas, uso de ferramentas, entre outros. Para Ausubel, este instrumento de avaliação também possibilita uma avaliação de traços como flexibilidade, engenhosidade, perseverança e criatividade;

- Solicitar questões de dissertação: são questões mais adequadas do que as questões de respostas curtas. Para Ausubel, essas questões podem ser usadas para testar a capacidade do aluno para organizar ideias, para construir argumentos coerentes, para avaliar as ideias criticamente, e para se expressar de modo claro e convincente. Esse recurso também oferece maior escopo para um pensamento original e independente, e permitem perceber nos alunos seus estilos cognitivos, sensibilidades, problemas e estratégias de solução de problemas.

As diretrizes e princípios mencionadas podem facilitar a avaliação da aprendizagem significativa, embora o educador deva pensar os instrumentos de avaliação de forma condizente com o enfoque dado ao ensino.

Isso posto, passamos direcionar nosso olhar ao que inferimos ser um elemento facilitador da aprendizagem significativa, cuja presença nos ambientes educacionais já não pode ser ignorada: a tecnologia. É fato que, mesmo que os professores não a considerem substancialmente ao organizarem seus materiais de ensino, os alunos fazem usos diversos e de forma natural de produtos tecnológicos com grande potencial para integrar o material de ensino, nas mais diversas áreas do conhecimento. Dessa forma, encontramos em pesquisas recentes a vertente *aprendizagem significativa com tecnologias* para a qual direcionamos nosso interesse, porém, considerando os pressupostos deste capítulo até aqui mencionados.

3.5 Aprendizagem Significativa com uso de Tecnologias

As novas tecnologias oferecem oportunidades para a criação de ambientes de aprendizagem que ampliam as possibilidades das tecnologias mais clássicas como: a lousa, o giz e o livro, disponíveis desde muito tempo em espaços formais de ensino. O rápido desenvolvimento tecnológico das últimas décadas nos apresenta diversos recursos provenientes das novas tecnologias, como é o caso das tecnologias digitais, de modo que o desafio tem sido a implementação do ensino visando proporcionar condições mais favoráveis à aprendizagem dos estudantes.

A tecnologia tem permeado todos os setores da educação, levando a necessidade de preparar professores que possam tirar proveito dessas ferramentas para melhorar a aprendizagem dos alunos. Segundo a Sociedade Internacional para Tecnologia na Educação (ISTE), os professores, em sala de aula, devem estar preparados para fornecer oportunidades de aprendizagem com suporte tecnológico para seus alunos, estar preparados para usar a tecnologia e saber que a tecnologia pode apoiar a aprendizagem do aluno compõe as competências profissionais necessárias de cada professor. (http://www.iste.org).

O aspecto interativo de muitas das novas tecnologias permite criar ambientes em que os alunos possam aprender fazendo, ao mesmo tempo em que recebem *feedback* e podem aprimorar continuamente seus conhecimentos construindo novos conhecimentos. Com essas tecnologias, conceitos difíceis de entender podem ser visualizados quando *softwares* de modelagem e simulação adequados são associados ao ensino. Estas tecnologias também permitem o acesso a uma infinidade de informações, como bancos de dados remotos, bibliotecas digitais, contato com profissionais especializados a qualquer distância, e facilitam o estabelecimento de vínculos entre as escolas e as comunidade (BRANSFORD, BROWN e COCKING, 2000).

As tecnologias de informação e comunicação são importantes aliadas na promoção da educação que visa desenvolver nos estudantes habilidades para a construção do conhecimento, colaboração e pensamento crítico (HOWLAND, JONASSEN e MARRA, 2011). Contribuem, tanto para aumentar o acesso às informações, quanto como meio de promover a aprendizagem dos estudantes. Assim, elaborar e implementar tarefas de aprendizagem que permitam experiências significativas, bem como avaliar o progresso dos alunos sobre elas é um importante desafio que se coloca ao professor.

A eficácia de cada tecnologia tem sido determinada pela forma como ela efetivamente comunica ideias para os alunos. No entanto, os educadores quase sempre usam tecnologias para substituir ações que eles realizariam, apresentando informações aos estudantes, seja por meio de um filme, ou de slides, ou ainda por imagens de gráficos gerados por determinado *software*. Assim, o papel dos alunos se limita a aprender as informações apresentadas pela tecnologia, assim como eles aprendiam as informações apresentadas pelo professor. Não é apenas o potencial do recurso tecnológico que regula como este pode contribuir com a aprendizagem dos alunos, mas antes é a forma como eles são explorados nas atividades de ensino.

Conforme Cuban (2001), a integração da tecnologia no ensino depende muito mais de fatores humanos tais como os contextos em que os professores interagem, suas crenças e suas atitudes para com o ensino e a aprendizagem do que depende de *hardware* ou *software*.

Com o aumento do potencial dos computadores e a concepção da Web 2.0, cada vez mais e melhores recursos tecnológicos estão disponíveis às pessoas, seja em suas residências, em seus trabalhos, nas escolas e universidades, nos espaços de lazer e mesmo nas ruas das cidades. Com a Web 2.0 a informação está mais distribuída, colaborativa, de código aberto, e livre, com mais conteúdo compartilhado produzido por vários usuários muitas vezes desenvolvendo um trabalho colaborativo. Mesmo com esse cenário podemos constatar que os alunos muitas vezes não usam a tecnologia para além de reproduzir o que o professor ou o livro lhes disse ou o que eles copiam da *Internet*.

Na perspectiva de muitas pesquisas sobre tecnologias educacionais, as tecnologias devem ser pensadas como ferramentas de aprendizagem. Nesse caso, as tecnologias não devem ser vistas apenas como repositórios e distribuidores de informação, mas sim ferramentas, com as quais os alunos possam representar o que sabem ao invés de reproduzirem o que os professores e livros didáticos trazem. (HOWLAND, JONASSEN e MARRA, 2011; ASHBURN e FLODEN, 2006)

Assim, segundo Howland, Jonassen e Marra (2011), as formas que as tecnologias são utilizadas nas escolas devem mudar de *tecnologia-como-professor* para *tecnologia-como-parceira* no processo de aprendizagem. Sendo considerada como ferramenta de aprendizagem com a qual os alunos possam aprender como organizar e resolver problemas, compreender fenômenos novos, construir modelos desses fenômenos, e, dada uma situação nova, definir metas e regular sua própria aprendizagem. Esse também é um meio rico e flexível disponível para os alunos interagir e comunicar suas ideias trabalhando de modo colaborativo.

Em consonância com as bases da Teoria da Aprendizagem Significativa, Howland, Jonassen e Marra (2011, p. 2) expressam que:

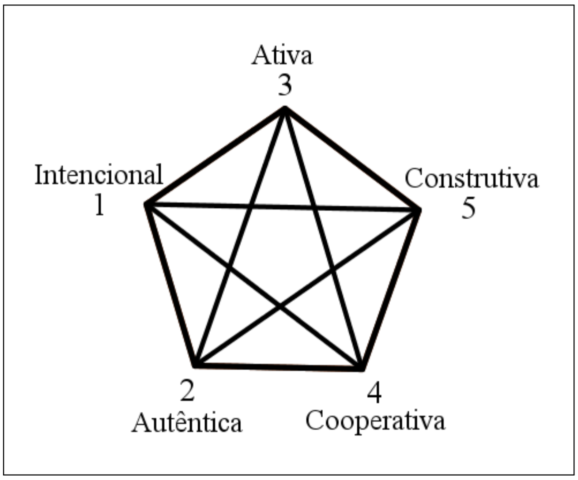
> para que os alunos aprendam de forma significativa, devem se engajar voluntariamente em uma tarefa significativa. Para que a aprendizagem significativa ocorra, a tarefa deve envolver os alunos de forma ativa, construtiva, intencional, autêntica, e de forma colaborativa. Ao invés de testar o conhecimento inerte, as escolas devem ajudar os alunos a aprender como organizar e resolver problemas, compreender fenômenos novos, construir modelos mentais desses fenômenos, e, dada uma situação nova, definir metas e regular sua própria aprendizagem. (tradução nossa)[1]

[1]In order for students to learn meaningfully, they must be willfully engaged in a meaningful task. In order

Esses autores entendem que o ensino deve agir no sentido de que os alunos aprofundem e ampliem os significados que constroem ou adquirem por meio da participação nas atividades de aprendizagem. Assim, a natureza das tarefas melhor determina a natureza da aprendizagem do aluno, sendo que as tecnologias podem e devem se tornar ferramentas de aprendizagem significativa. As tecnologias oferecem aos alunos oportunidades de os envolver em aprendizagem significativa quando eles aprendem *com* a tecnologia, não *a partir* dela.

Os autores sintetizam na Figura 3.3 as caracterísiticas ou atributos da aprendizagem significativa, de modo a expressar o entendimento de que estes são interrelacionados, interativos e interdependentes.

Figura 3.3: Características da Aprendizagem Significativa



Fonte: Adaptado de Howland, Jonassen e Marra (2011, p. 3).

Segue a caracterização, segundo Howland, Jonassen e Marra (2011) e Ashburn e Floden (2006), desse *quadro de atributos* que expressa o que é importante que professores e alunos façam em sala de aula com tecnologia, de modo a promover a aprendizagem significativa.

1. Intencional: na sua essência, esse atributo considera tornar explícitos os resultados de aprendizagem desejados e os processos para alcançá-los. Envolver o pensamento dos estudantes nessa articulação dando-lhes oportunidades de fazer suas próprias perguntas sobre o que eles querem saber e usar essas questões para orientar suas atividades de aprendizagem. De fato, Howland, Jonassen e Marra (2011, p.4) afirmam que: "Quando os alunos estão ativamente e intencionalmente tentando atingir um objetivo cognitivo eles pensam e aprendem mais porque estão cumprindo uma intenção".

for meaningful learning to occur, the task that students pursue should engage active, constructive, intentional, authentic, and cooperative activities. Rather than testing inert knowledge, schools should help students to learn how to organize and solve problems, comprehend new phenomena, construct mental models of those phenomena, and, given a new situation, set goals and regulate their own learning.

Esta alegação está de acordo com Bereiter e Scardamalia (1989), para quem a aprendizagem intencional é o processo persistente e contínuo para adquirir, compreender e utilizar uma variedade de estratégias para melhorar a sua capacidade de atingir e aplicar o conhecimento. Nesse sentido, o aluno intencional é alguém que: está motivado para aprender; assume a responsabilidade pela aprendizagem; e, se envolve ativamente em estratégias que facilitam a aprendizagem.

Quanto a esse ponto, Ausubel (2003, p. 36) alega que o estudante assume uma responsabilidade adequada pela própria aprendizagem quando: aceita a tarefa de aprender ativamente, procurando compreender o material de ensino; tenta, de forma genuína, integrá-lo nos conhecimentos que já possui; não evita o esforço por novas aprendizagens difíceis; decide fazer as perguntas necessárias sobre o que não compreende.

Howland, Jonassen e Marra (2011) alegam que as tecnologias têm sido usadas nos ambientes escolares para dar suporte às atividades do professor, mas ainda são subutilizadas no sentido de integrá-las às atividades dos alunos. Quando os alunos usam tecnologias para representar suas ações e construções, eles entendem melhor e se tornam capazes de usar o conhecimento construído em uma nova situação. Quando os alunos usam os computadores em suas tarefas diárias ou quando o usam a fim de pesquisar soluções de problemas que querem resolver, eles o fazem com uma intenção e com isso estão aprendendo significativamente.

2. Autêntica: os conteúdos das aulas, muitas vezes, são princípios gerais ou teorias que podem ser usados para explicar fenômenos que podemos vivenciar. No entanto, essas ideias são removidas de seus contextos naturais, a fim de permitir sua adequação ao currículo, e com isso, muitas vezes a ausência de peculiaridades contextuais subtraem aspectos que tornam o conteúdos significativos. A maioria das pesquisas contemporâneas sobre a aprendizagem tem mostrado que a aprendizagem de tarefas que estão situadas em alguma situação significativa do mundo real ou simulada em algum ambiente de aprendizagem baseado em casos ou baseada em problemas não são apenas melhor compreendidas e lembradas, mas também são mais consistentemente transferidas para novas situações.

As atividades projetadas visando o trabalho autêntico devem exigir que os alunos formulem perguntas significativas para que eles relacionem as suas experiências pessoais com o conteúdo a ser aprendido. Ao invés de abstrair ideias em regras que são memorizadas e depois aplicada a outros problemas padrões, a aprendizagem deve ser incorporada na vida real, em contextos úteis de modo que os alunos possam compreender e aplicar tais ideias. Assim, é desejável que tais atividades permitam desenvolver habilidades e levem os alunos a avançar em complexidade ao passo que buscam solucionar problemas.

3. Ativa: aprendizagem por meio de um processo de investigação ativa força os estudantes a se envolverem verdadeiramente com os desafios do conteúdo e, com eles, desenvolver colaborativamente suas próprias questões de investigação, adquirir, avaliar, manipular e analisar informações para abordar essas questões, e, usar suas habilidades de pensamento de ordem superior para fazer interpretações e as reivindicações apoiadas por evidencias e raciocínio. Os alunos desenvolvem familiaridade com um processo de investigação ao explorar e desenvolver a questão de investigação, ao coletar e avaliar informações, ao analisar e interpretar as informações e ao comunicar o seu novo entendimento. A aprendizagem significativa requer dos alunos que estejam ativamente envolvidos por uma tarefa significativa em que manipulem objetos e parâmetros dentro do ambiente em que estão trabalhando e observando os resultados de suas manipulações.

4. Colaborativa: projetar tarefas de aprendizagem para que os alunos trabalhem em conjunto agrega importância para a ocorrência da aprendizagem. Pequenos grupos de alunos podem trabalhar em colaboração em tarefas comuns para atingir objetivos de aprendizagem. Com foco no conteúdo, podem conversar com seus pares para compartilhar informações, explicar suas ideias, examinar múltiplas perspectivas, negociar os significados comuns, decidir questões de investigação, resolver problemas e, produzir juntos.

Howland, Jonassen e Marra (2011, p.4) alegam que: "Os seres humanos naturalmente trabalham juntos em comunidades de aprendizagem e construção do conhecimento, explorando habilidades e apropriando-se do conhecimento uns dos outros, a fim de resolver problemas e realizar tarefas"(tradução nossa)[2]. Por isso, basear o ensino exclusivamente em métodos individuais frauda os alunos dos modos mais naturais e produtivos de pensar.

O espaço de trabalho em grupos deve possibilitar aos alunos negociar socialmente um entendimento comum da tarefa e os métodos que utilizarão para realizá-la. Ou seja, dado um problema ou tarefa, as pessoas naturalmente procuram opiniões e ideias dos outros. As tecnologias podem apoiar este processo de conversação, seja conectando os alunos na mesma sala de aula, em uma mesma cidade, ou ao redor do mundo. Quando os alunos se tornam parte da construção do conhecimento das comunidades, tanto em sala de aula e fora da escola, eles aprendem que há mais do que uma maneira de ver o mundo e há várias soluções para a maioria dos problemas da vida.

5. Construtiva: criação de representações de modelos mentais ajudam os alunos a ver e testar seus próprios entendimentos de como o mundo funciona, ajudam na construção de conhecimentos que eles desconhecem que têm, proporcionam ver diversas perspectivas, identificar, analisar e interpretar as diferenças e vantagens relativas entre os modelos mentais, e levam a articular o pensamento sobre os conteúdos (BRANSFORD, BROWN e COCKING, 2000).

Mas, de fato, o que são *modelos mentais*? Subsidiado pela teoria de Johnsoh-Laird, Moreira (2004) define que: "Um modelo mental é uma representação interna de informações que corresponde analogamente com aquilo que está sendo representado"(p. 3). Para Johnson-Laird, "os modelos mentais e as imagens são representações de alto nível, essenciais para o entendimento da cognição humana"(EISENCK e KEANE, 1994, p.210, apud MOREIRA, 2004).

[2]Humans naturally work together in learning and knowledge-building communities, exploiting each others' skills and appropriating each others' knowledge in order to solve problems and perform tasks.

Como relatam alguns autores (MOREIRA, 2004; JONASSEN e STROBEL, 2006, entre outros) esse conceito não é de simples tratamento, pois, além de ser difícil investigar tais modelos, também há pouca concordância sobre o que são modelos mentais. Moreira (2004) afirma que:

> Os modelos mentais das pessoas, ao invés de serem precisos, consistentes e completos, como os modelos científicos, são, simplesmente, funcionais. Na pesquisa, ao invés de buscar modelos mentais claros e elegantes, teremos que procurar entender os modelos confusos, 'poluídos', incompletos, instáveis que os alunos realmente têm. E isso é difícil! (p.44)

De todo modo, com esse entendimento, Howland, Jonassen e Marra (2011) alegam que, na sala de aula voltada para a aprendizagem significativa com tecnologia, deve-se usar a tecnologia para demonstrar e estruturar o desenvolvimento de modelos mentais. Os alunos constroem seus modelos mentais inicialmente simples que explicam o que observam, e com experiência, apoio, e mais a reflexão, seus modelos mentais podem se tornar cada vez mais elaborados.

Diversos recursos da tecnologia podem auxiliar para que os alunos possam exteriorizar representações análogas de seus modelos mentais. Jonassen e Strobel (2006) e Howland, Jonassen e Marra (2011) sugerem: mapas conceituais, planilhas, micromundos, ferramentas de modelagem de sistemas, sistemas especialistas, ferramentas de construção hipermídia, fóruns de discussão entre outras. Cada ferramenta requer que os alunos pensem de maneira diferente sobre o que eles estão estudando e normalmente o uso desses recursos exige que os alunos pensem mais sobre o domínio do assunto a ser aprendido do que teriam de pensar sem eles.

Conforme Ashburn e Floden (2006), ensinar para a aprendizagem significativa usando a tecnologia, requer dos professores: compreender como elaborar experiências de aprendizagem significativa; saber como construir e implementar esses tipos de tarefas de aprendizagem e avaliar o progresso dos alunos sobre elas; e, ter habilidade em utilizar a tecnologia de forma que suportem este tipo de ensino e experiências de aprendizagem.

Em síntese, Howland, Jonassen e Marra (2011) indicam que, a aprendizagem significativa é privilegiada quando as tecnologias envolverem os alunos em:

- construção do conhecimento, não reprodução;
- conversa, não recepção;
- articulação, não repetição;
- colaboração, não competição, e
- reflexão, não prescrição.

Cabe destacar que, embora não haja menção explícita a teoria de Ausubel, podemos identificar nos atributos organizados por Howland, Jonassen e Marra (2011) e Ashburn e Floden (2006) a convergência para aquela proposta, em muitos pontos. Ambos os referencias mencionados defendem que, para a aprendizagem ser significativa toda a atividade em sala de aula deve ser dirigida para alcançar resultados específicos de aprendizagem. Assim, o professor envolvido com os pressupostos da aprendizagem significativa usando tecnologia pode, gradativamente, oferecer em suas aulas um ambiente propício à ocorrência dos atributos mencionados.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA E UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS (UEPS)

Complementarmente às evidências de que a aprendizagem significativa pode ser potencializada com o uso de tecnologias, nesse capítulo passamos a considerar a integração da modelagem matemática para compor atividades de ensino e de aprendizagem em ambientes de ensino.

Alguns argumentos que revelam a importância da modelagem e a construção de modelos para o desenvolvimento de aspectos cognitivos na aprendizagem são expressos por Howland, Jonassen e Marra (2011). Segundo os autores: a construção de modelos é um fenômeno cognitivo natural, pois, ao encontrar fenômenos desconhecidos, os seres humanos naturalmente começam a construir "teorias pessoais"sobre fenômenos que são representados como modelos informais; a modelagem é construtivista, permite construções e representações pessoais de fenômenos experimentados; a modelagem dá suporte a testes de hipóteses, conjectura, inferência, e uma série de outras habilidades cognitivas importantes; a modelagem resulta na construção de artefatos cognitivos que são externalizados como modelos mentais; quando os alunos constroem modelos eles demonstram seu conhecimento.

Para Jonassen e Strobel (2006) a modelagem é uma habilidade essencial em todas as disciplinas, "é uma habilidade cognitiva essencial para a construção de significados em todos os domínios"(p. 7, tradução nossa[1]). Os autores afirmam que além do conhecimentos do domínio da modelagem, que segundo eles é o foco principal do trabalho da Educação em Ciências e Matemática, os alunos podem desenvolver habilidades de modelagem de formas diferentes: pelo conhecimento do domínio da modelagem, pela modelagem de problemas, por modelagem de sistemas, por modelagem de estruturas semânticas, e por processos de pensamento de modelagem (ou seja, simulações cognitivas).

Considerando essas argumentações dos autores é que, nessa pesquisa, buscamos avançar no que se refere ao papel da modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem na área da Educação Matemática.

A modelagem matemática como uma alternativa pedagógica é reconhecida como facilitadora da aprendizagem significativa dos estudantes (BORSSOI e ALMEIDA, 2004; SILVA, KATO e PAULO, 2012; ALMEIDA e FONTANINI, 2010), dentre outras razões, por proporcionar um ambiente com potencial para envolver os alunos em atividades que levam a aprendizagem intencional, ativa, construtiva, cooperativa e autêntica (HOWLAND, JONASSEN e MARRA, 2011).

O uso da modelagem matemática no ensino preserva uma estrutura similar do método de trabalho próprio dos profissionais da Matemática Aplicada, porém, com característi-

[1] is an essential cognitive skill for meaning making in all domains.

cas que a torna adequada para os propósitos educacionais. No contexto do ensino, a modelagem matemática muda de perspectiva, principalmente quanto aos objetivos, como comenta Bassanezi (2002): "[...] o desafio do professor, que toma o caminho da modelagem como método de ensino, é ajudar o aluno a compreender, construindo relações matemáticas significativas, em cada etapa do processo".

A prática científica envolve a construção, validação e aplicação de modelos científicos, muitos dos quais são apresentados aos alunos na sua *versão final*, porém, a construção de modelos no estudo de fenômenos é provavelmente a estratégia mais poderosa no apoio a aprendizagem significativa. O ensino de ciência deve ser projetado para envolver os alunos na elaboração e utilização de modelos (HESTENES, 2006).

4.1 Sobre a Construção de Modelos

Não só na Educação Matemática, mas de um modo geral no Ensino de Ciências, a modelagem tem sido considerada fundamental para a cognição humana e a construção de modelos uma das estratégias com grande potencial para conduzir à aprendizagem. Essa visão é compartilhada por Howland, Jonassen e Marra (2011, p. 192), para os quais,

> os seres humanos são construtores naturais de modelos. Desde muito cedo, construímos modelos mentais de tudo o que encontramos no mundo. [...] Estes modelos incluem teorias pessoais sobre o mundo que nos permitem raciocinar sobre as coisas que encontramos. A modelagem ajuda os alunos a expressar e externar seu pensamento, visualizar e testar os componentes de suas teorias, e produzir materiais mais interessantes. (tradução nossa[2])

Esses autores compartilham da definição de Lesh (2010), para o qual um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. Assim, é possível que o modelo construído para representar uma situação num dado momento sirva, para representar outro sistema em uma nova situação.

O modelo pode ser entendido como um sistema artificial, uma formalização de uma porção da realidade, de um sistema do qual se seleciona aspectos essenciais como argumentos ou parâmetros. Como em Bassanezi (2002, p.20), "Chamaremos simplesmente de Modelo Matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto matemático."

A construção de um modelo, em geral, não é uma ação trivial, envolve diversos aspectos, dentre os quais a compreensão de um problema para o qual busca-se um modelo

[2]Humans are natural model builders. From a very early age, we construct mental models of everything that we encounter in the world.[...] These models comprise their personal theories about the world that enable them to reason about the things that we encounter. Modeling helps learners express and externalize their thinking, visualize and test components of their theories, and make materials more interesting.

que o represente. No caminho inverso, a compreensão apenas por meio de uma dada equação, que não transmite qualquer informação conceitual, não viabiliza que os alunos entendam de imediato a natureza do que eles estão estudando. Assim, é necessário ajudar os alunos a construir, a princípio, uma representação qualitativa do problema para que só então passem à representá-lo quantitativamente. Para Jonassen e Strobel (2006), quando resolvem problemas de fenômenos físicos, representações qualitativas do problema são pré-requisitos necessários para a aprendizagem de representações quantitativas. Esses autores corroboram com a ideia de que "Representações qualitativas são mais físicas do que numéricas. Representações físicas de problemas consistem em entidades que são incorporadas em domínios específicos, e as regras de inferência que os conecta e lhes dão significado são qualitativos."(JONNASEN e STROBEL, 2006, p.12, tradução nossa[3]).

Isso justifica falarmos em modelagem como um processo, tendo em vista que a construção do modelo é parte deste que envolve outras importantes etapas, como buscamos mostrar na próxima seção.

4.2 Modelagem com vistas a Ambientes Educacionais

O desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, segundo Galbraith (2012), ao mesmo tempo em que proporcionam ao aluno o envolvimento com um problema genuíno e que considera alguma experiência, também visa desenvolver no aluno o que o autor chama de *infraestrutura intelectual* de modo que os alunos possam se tornar usuários dos conhecimentos (matemáticos) produzidos e resolver problemas de forma independente em diferentes situações dentro e fora do ambiente escolar.

A sua introdução nos currículos escolares, estaria, portanto, associada tanto à possibilidade de tratar de conteúdos curriculares quanto à necessidade de desenvolver nos alunos a aprendizagem de resolução de problemas de sua vida fora da escola, visando alcançar objetivos educacionais complementares. Neste sentido, em algumas situações abordadas por meio da modelagem, os alunos se deparam diante de um obstáculo para o qual não possuem, provisoriamente, conhecimentos suficientes para superá-lo, emergindo assim a necessidade de construir esse conhecimento por meio dessa atividade. Logo, em modelagem, os alunos tanto ressignificam conceitos já construídos quanto constroem outros diante da necessidade de seu uso.

Para clarificar nosso entendimento sobre o que é uma *atividade de modelagem matemática* no contexto educacional citamos Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12) que definem:

[3] Qualitative representations are more physical than numerical. Physical representations of problems consist of entities that are embedded in particular domains, and the inferencing rules that connect them and give them meaning are qualitative.

> de modo geral, uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Nesse sentido, relações entre a realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados) servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático.

Conforme os autores, uma atividade de modelagem compreende a seguinte estrutura: i) *situação inicial* (problemática); ii) *fase de inteiração* (quais são os dados? como obtê-los?; definição de um problema; que elementos devem ser levados em conta na observação?); iii) *matematização e resolução* (hipóteses, variáveis, modelo matemático); iv) *interpretação e validação* (análise do modelo); v) *situação final* (uso do modelo).

Assim, no sentido de Galbraith (2012), à construção e ressignificação de conceitos são associadas as ações dos alunos durante as atividades, como: a busca de informações; a identificação e seleção de variáveis; a elaboração de hipóteses; a simplificação; a transição de linguagens; a ativação de conhecimentos prévios; o uso de técnicas e/ou procedimentos matemáticos; a comparação e distinção de ideias; a generalização de fatos; a articulação de conhecimentos de diferentes áreas; a argumentação para expor para outros o julgamento do valor de teorias e métodos usados no desenvolvimento da atividade. Estas ações, de modo geral subsidiam a construção de um modelo matemático.

No que se refere à introdução de atividades de modelagem nas aulas de matemática, embora as discussões estejam centradas no planejamento do professor, se faz notório ponderar que atividades desse tipo também podem ser desafiadoras e não usuais para os estudantes.

É neste contexto que Almeida, Dias (2004) tratam da familiarização do estudante com a modelagem matemática por meio de três diferentes *momentos*. Em um *primeiro momento*, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema juntamente com os dados e as informações usadas para sua investigação e as ações a que nos referimos são, em certa medida, orientadas pelo professor. Posteriormente, em um *segundo momento*, uma situação-problema é sugerida pelo professor aos alunos, e estes, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação das hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. Finalmente, no *terceiro momento*, os alunos, distribuídos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema bem como as ações necessárias para a obtenção da solução e sua comunicação para a comunidade escolar.

Entendemos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica com objetivo de relacionar a matemática escolar a aspectos extramatemáticos, de acordo com Almeida e Brito (2005). Para os autores, a modelagem se configura como uma atividade que se desenvolve segundo um esquema, um *ciclo de modelagem* (como na Figura 4.1, por exemplo) no qual a escolha do problema a ser investigado tem a participação direta dos sujeitos envolvidos em que uma abordagem de um problema não essencialmente matemático é feita por meio da Matemática.

No âmbito da Educação Matemática a modelagem é adotada levando em conta diferentes perspectivas, de acordo com a finalidade de uso nos ambientes educacionais. As perspectivas *realística*, *contextual*, *sócio-crítica*, *epistemológica*, *cognitivista* e *educacional* foram identificadas por Kaiser e Sriraman (2006) em um esforço de reconhecer como a comunidade científica tem feito uso da modelagem, para isso, analisaram trabalhos publicados em dois importantes congressos da área: o ICMI - International Commission on Mathematical Instruction e o ICTMA - International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications.

Uma análise destas perspectivas parece sinalizar que é possível que uma mesma atividade de modelagem possa contemplar mais do que uma perspectiva, simultaneamente. Todavia, a opção por uma ou outra perspectiva deve estar vinculada a propósitos e interesses subjacentes à implementação de atividades de modelagem nas aulas e traz implicações para a forma como o professor conduz o desenvolvimento das atividades, visando atender a interesses e/ou necessidades em situações de ensino e aprendizagem particulares.

Para os propósitos desse trabalho cabe destacar as perspectivas *educacional* e *cognitivista*, que são caracterizadas por Kaiser e Sriraman (2006) da seguinte forma:

Perspectiva Educacional: a atividade de Modelagem Matemática tem como foco a integração de modelos matemáticos no ensino de Matemática, visando levar os alunos a investigar o *porquê* e o *como* dos modelos matemáticos, o que implica em ver o modelo com um objetivo em si, tanto quanto às potencialidades do modelo quanto como um meio para a aprendizagem matemática. Nesta perspectiva, é incumbência do professor analisar as dificuldades dos alunos no processo de modelagem, especialmente as relacionadas com a matematização e interpretação dos processos e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos curriculares.

Perspectiva cognitivista: se preocupa em analisar os processos cognitivos ativados pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem.

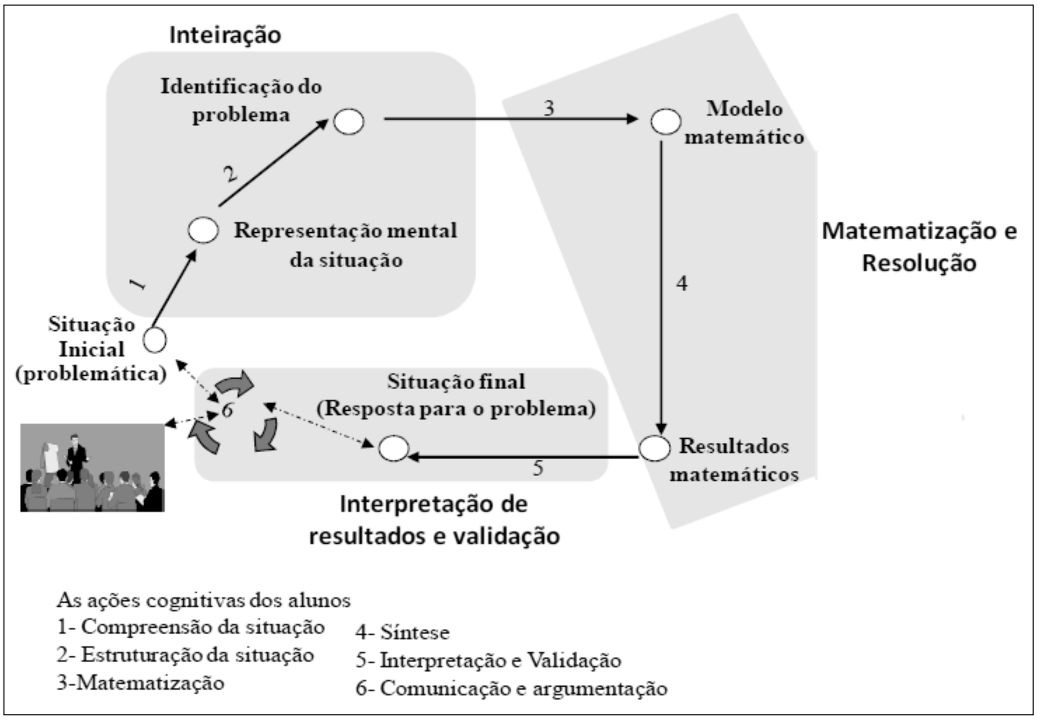
Almeida e Vertuan (2010) consideram que:

> A perspectiva cognitivista está relacionada à perspectiva educacional, especialmente se considerarmos que o interesse, nessa perspectiva, reside na investigação dos processos cognitivos individuais dos alunos envolvidos nas atividades bem como identificar barreiras matemáticas, psicológicas ou cognitivas relacionadas com a aprendizagem quando os alunos desenvolvem atividades de Modelagem Matemática. (p. 31)

Considerando a perspectiva cognitiva, a Figura 4.1 ilustra as fases do processo de modelagem em consonância com as ações cognitivas dos alunos quando estes estão envolvidos na solução de uma situação-problema no sentido de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.

17-19), para as quais os autores apresentam os seguintes argumentos:

Figura 4.1: Fases da Modelagem Matemática e as Ações Cognitivas dos Alunos



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 19).

Quando o aluno se depara com uma situação-problema que pretende investigar, inicialmente precisa compreender o problema fazendo algumas aproximações ou idealizações, chegando ao que denominamos de representação mental da situação. Consideramos que a transição da *situação-problema* para a *representação mental da situação* implica diversas habilidades, como entendimento da situação, apreensão de significado, interpretação de fatos e informações, agrupamento de ideias. O que se sabe sobre a situação na representação mental da situação corresponde já a um segundo estágio do conhecimento. Assim, entendemos que nesta transição a ação cognitiva que se pode identificar é a *compreensão da situação*.

A partir da representação mental da situação, os envolvidos com a atividade de modelagem precisam identificar o problema e definir metas para a sua resolução. A formulação de um problema para uma situação requer a estruturação e/ou simplificações deliberadas das informações acerca da situação. Assim, a ação cognitiva relevante que verificamos na *identificação do problema* é a *estruturação da situação*.

Compreender a situação-problema por meio da Matemática implica procurar respostas para o problema suscitado por esta situação — respostas fundamentadas em uma interpretação matemática para o problema. Essa estruturação é mediada por conhecimentos e habilidades que levam à identificação de regularidades e relações até então desconhecidas. Identifica-se, assim, a ação de *matematização*, que culmina na construção de um modelo matemático e é fundamentada na definição e no julgamento de hipóteses que guiam a construção do modelo. Portanto, à fase de Modelagem Matemática caracterizada como matematização corresponde uma única ação cognitiva também caracterizada como *matematização*, uma

> vez que a transição que busca uma linguagens matemática evidencia um problema matemático a ser resolvido; a elaboração de um modelo matemático é mediada por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características, a organização de partes, a identificação de componentes.
>
> A construção e/ou resolução de um modelo matemático com vistas a apresentar resultados matemáticos para o problema requer o domínio de técnicas e procedimentos matemáticos e uma coordenação adequada das diferentes representações associadas aos objetos matemáticos. Nesta ação cognitiva que denominamos *síntese*, tornam-se necessários o uso de conceitos, técnicas, métodos e representações, a solução de problemas específicos usando-se conhecimentos prévios, a visão de padrões, o uso de ideias conhecidas para se criar novas ideias, e, em muitas situações, é adequado o uso de recursos tecnológicos. como software, por exemplo.
>
> A análise de uma resposta para o problema obtida, inicialmente em termos de resultados matemáticos por meio do modelo matemático, constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade. Nesta etapa, o aluno se depara com a necessidade de comparação e distinção de ideias, generalização de fatos, articulação de conhecimentos de diferentes áreas. A ação cognitiva dos alunos nesta transição é caracterizada como interpretação e validação uma vez que diz respeito à análise da representação matemática associada ao problema, tanto em relação aos procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação.
>
> Finalmente, o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática culmina com a comunicação de uma resposta do problema para outros. Esta comunicação implica essencialmente o desenvolvimento uma argumentação que possa convencer aos próprios modeladores e àqueles aos quais estes resultados são acessíveis de que a solução apresentada é razoável e é consistente, tanto do ponto de vista da representação matemática e dos artefatos matemáticos a ela associados, quanto da adequação desta representação para a situação em estudo. Nesta ação, o aluno necessita expor para outros o julgamento do valor de teorias e métodos, apresentar e justificar suas escolhas baseadas em argumentos racionalmente fundamentados, reconhecer que a situação requer alguma subjetividade.
>
> Assim, a comunicação e argumentação também constituem ações cognitivas dos alunos envolvidos em atividades de modelagem matemática.

Compartilhamos dessa visão quanto ao desenvolvimento de atividades de modelagem em situações de ensino, no entanto, agregamos outros elementos a investigação. Agora cabe indicarmos como a modelagem matemática, a aprendizagem significativa e as tecnologias serão integradas, visando a organização dos ambientes de ensino e aprendizagem dos diferentes Contextos de nossa pesquisa aplicada. Antes porém, passamos a apresentar um panorama das pesquisas relacionadas à modelagem matemática e aprendizagem significativa, para que possamos justificar algumas escolhas.

4.3 Modelagem Matemática e as Pesquisas em Aprendizagem Significativa

Identificamos, por meio das publicações científicas, que várias pesquisas têm sido realizadas com relação à modelagem matemática e muitas outras sobre aprendizagem significativa em diversas áreas do conhecimento. Porém, há registros de um número restrito de pesquisas que investigam ambientes de ensino e aprendizagem focando simultaneamente a modelagem matemática e a aprendizagem significativa. Nessa seção, apresentamos o estado da arte a partir de um levantamento junto a bancos de teses e dissertações dos Programas de Pós-Graduação brasileiros, bem como junto aos principais periódicos de publicações na área de Ensino e Educação e na Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática - CNMEM, que é um evento bianual consagrado nacionalmente, dedicado à Modelagem Matemática.

Dentre os primeiros trabalhos, relacionados a esses temas, disseminados na comunidade brasileira, Borssoi (2004) defende uma dissertação, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL, fundamentada nos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e na Teoria da Aprendizagem Significativa. O trabalho estabelece a aproximação dos dois pressupostos teóricos e traz uma proposta de ensino e de aprendizagem, para equações diferenciais, com características de ser facilitadora da aprendizagem significativa. As discussões apresentadas decorrem das informações obtidas das produções dos alunos de um curso de Química durante as atividades de modelagem.

Neste trabalho, visando investigar *Em que aspectos a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem pode ser uma facilitadora da Aprendizagem Significativa?*, um conjunto de *aspectos* foi organizado para orientar as análises quanto a aprendizagem dos alunos, a partir da identificação de aproximações das pesquisas nessas duas linhas. Assim, dois grupos distintos de aspectos foram identificados, um mais relacionado com a aprendizagem do conteúdo e outro relacionado com a predisposição positiva para aprender. Ao descrevê-los, na sequência, permitimos citar alguns referenciais teóricos que apoiaram a investigação. Os três primeiros aspectos dizem respeito às atitudes e às questões motivacionais que permeiam o processo de ensino e aprendizagem. São eles:

Envolvimento nas atividades: A participação ativa nas atividades de aprendizagem pode indicar se há predisposição do aluno para aprender significativamente (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980; BUCHWEITZ, 2002), pois, o envolvimento contribui para que o aluno desenvolva competência e criatividade com a resolução de problemas, e favorece uma atribuição de significados mais efetiva (CARREIRA, 1993; COLL, 1994, BASSANEZI, 2002, NISS, 1992);

Elaboração de estratégias próprias: A aprendizagem pode ser mais ou menos significativa dependendo das estratégias adotadas pelo aluno (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980). Neste sentido, situações de ensino que proporcionam ao aluno o contato com um contexto real podem motivar o desenvolvimento de estratégias que levam à aquisição do conhecimento de forma significativa (CARREIRA, 1993; D'AMBRÓSIO, 2002). Em um processo de modelagem este aspecto pode ser evidenciado em diferentes momentos e com maior expressão nas etapas que envolvem definição das hipóteses e aproximações simplificadoras e na elaboração e resolução do problema matemático;

Aprendizagem extraconteúdo: Uma atividade de ensino pode fazer emergir um conjunto de aprendizagens que envolvem, além de aspectos do próprio conteúdo, outros tais como, aprendizagem sobre o contexto, aprendizagem de habilidades, aprendizagem de atitudes, aprendizagem de valores. São diversos os autores que defendem a ideia de que estas outras aprendizagens também podem contribuir para a Aprendizagem Significativa do conteúdo matemático envolvido no estudo (BUCHWEITZ, 2002, COLL *et al.* 2000, D'AMBRÓSIO, 2002, NOVAK e GOWIN, 1988).

Os quatro aspectos do segundo grupo leva em conta questões cognitivas para observar se há aprendizagem significativa do conteúdo:

Compreensão conceitual: A aprendizagem de conceitos é central para a aprendizagem significativa (AUSUBEL NOVAK e HANESIAN, 1980; COLL *et al.* 2000). Em um processo de modelagem matemática a resolução de um problema só pode ser efetivada se houver a compreensão conceitual de aspectos matemáticos e extramatemáticos envolvidos. A compreensão conceitual requer a interação entre a nova informação e a estrutura conceitual já existente, que remete à existência de conhecimentos prévios relevantes para que o aluno relacione adequadamente uma nova informação com sua estrutura cognitiva (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980; COLL *et al.* 2000). Este aspecto influencia na capacidade do aluno adotar estratégias e tomar decisões, além de influenciar no sucesso da aprendizagem, pois, enquanto não ocorre tal compreensão provavelmente a definição das variáveis e das hipóteses será pouco adequada e assim o modelo precisará ser melhorado;

Construção e manipulação de representações múltiplas: Habilidades com este aspecto podem evidenciar o relacionamento *não-arbitrário* e *substantivo* do conhecimento com a estrutura cognitiva (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980; MOREIRA, 1999). Para Gravina e Santarosa (1998), um mesmo objeto matemático pode receber diferentes representações que expressam diferentes facetas do mesmo objeto. Assim, uma exploração que transita entre diferentes sistemas se torna significativa no processo de construção do conceito. Segundo Coll *et al.* (2000) e Carreira (1993), a atribuição pessoal de significado por parte do aluno permite elaborar uma compreensão e uma *tradução própria* do que se aprende;

Aplicação do conhecimento a situações novas: A aprendizagem significativa é evidenciada quando o aluno consegue reconhecer a aplicabilidade de determinado conhecimento em uma nova situação (COLL *et al.* 2000; MOREIRA, 1999, BASSANEZI, 2002, D'AMBRÓSIO, 1986);

Retenção do conhecimento por longo tempo: Quando o aprendizado é significativo os conceitos aprendidos permanecem por mais tempo claros e diferenciados na estrutura cognitiva, em relação à aprendizagem memorística. Em caso de esquecimento, são facilmente reativados (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980; MOREIRA, 1999; BUCHWEITZ, 2002).

Essa pesquisa conclui que a utilização da modelagem matemática se apresenta como alternativa viável e como uma eficiente estratégia de ensino e aprendizagem, que atende os anseios da Educação Matemática para a formação do indivíduo.

Nesse sentido, o artigo de Borssoi e Almeida (2004), publicado na revista *Educação Matemática Pesquisa*, do Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, ressalta que o ensino deve se dar ao sujeito, em ambientes nos quais a aprendizagem aconteça de forma significativa, considerando a dimensão do desenvolvimento científico e tecnológico. Nesta pesquisa, as autoras se ocupam em investigar em que aspectos a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem pode ser uma facilitadora da aprendizagem significativa. Fundamentadas nos pressupostos teóricos da modelagem na perspectiva da Educação Matemática e na teoria da aprendizagem significativa, estabelecem algumas relações que podem contribuir com a prática docente no que diz respeito à organização de uma proposta de ensino e aprendizagem viável para ser implementada durante as aulas em cursos regulares.

O trabalho de Burak e Barbieri (2005), apresentado na Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática (CNMEM), se reporta às análises feitas com experiências pela modelagem matemática em distintos contextos sociais e suas implicações para a aprendizagem significativa. Os aspectos observados relacionam-se à prática docente, o ambiente que se forma, o interesse dos alunos e as interações do sujeito com o tema de conhecimento durante o processo.

Uma investigação, que busca nos mapas conceituais construídos pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática indícios de aprendizagem significativa, culminou na dissertação de mestrado de Fontanini (2007), também pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL. A pesquisa ressalta que, familiarizados com mapas conceituais e modelagem matemática, os alunos desenvolveram atividades de modelagem e construíram mapas referentes a elas. Usando o que a autora denominou e definiu como elementos sinalizadores, a análise dos mapas dos alunos e suas explicações permitiu identificar indícios de aprendizagem significativa. Os resultados obtidos revelam avanços dos alunos no *contínuum* aprendizagem memorística - aprendizagem significativa, sobre conceitos matemáticos que emergiram nas atividades de modelagem desenvolvidas. Esta pesquisa pode ser consultada na publicação Almeida e Fontanini (2010).

A dissertação de Iaronka (2008), defendida junto ao Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria-RS, versa sobre a possibilidade de aquisição de conceitos básicos sobre Função por meio da modelagem matemática, sob a óptica da aprendizagem significativa de Ausubel. A pesquisa foi conduzida com o envolvimento de alunos de um curso superior de tecnologia. Segundo a autora, o intuito da pesquisa foi de contribuir com a educação crítica dos alunos por meio da modelagem. Os resultados da investigação apontam que a integração de atividades matemáticas específicas com a realidade do aluno contribui para a aprendizagem significativa de conceitos básicos de Função. Dentre outras constatações, o desenvolvimento da criticidade do aluno relacionando a modelagem à atuação profissional foi outro indicativo da pesquisa.

No trabalho apresentado por Venâncio e Kato (2009), na CNMEM, a modelagem matemática é considerada como ambiente de aprendizagem, sendo um agente facilitador para a aprendizagem significativa e a elaboração de significado pelo aluno. Essa pesquisa trata de uma atividade de modelagem matemática realizada com alunos do primeiro ano do Ensino Médio da Educação Básica envolvendo os conceitos relacionados ao conteúdo de Função do 1º Grau, apresentando propriedades e características que favorecem a aprendizagem significativa.

Posteriormente, a dissertação de Venâncio (2010), defendida pelo Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciências e Matemática da UEM, aborda duas perguntas principais: o ambiente da modelagem matemática favorece a aprendizagem significativa de Função do 1º Grau em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio? Como os mapas conceituais podem ser utilizados, paralelamente à modelagem matemática, para verificação de indícios da ocorrência da aprendizagem significativa de Função do 1º Grau? Por fim, a pesquisa ratifica a influência e contribuição do ambiente da modelagem matemática e dos mapas conceituais durante todo o processo de investigação.

Outro trabalho, o de Postal *et al.* (2011), publicado na revista Alexandria, relata uma experiência com enfoques no uso da modelagem matemática, incluindo o computador como ferramenta de ensino. Este apresenta um breve relato sobre aprendizagem significativa e argumenta que este trabalho privilegiou a colaboração e a cooperação entre os estudantes na realização das atividades. Como resultado, pode-se destacar a utilização da modelagem como uma alternativa viável e eficiente estratégia de ensino e aprendizagem que atende aos anseios da Educação Matemática para a formação do cidadão.

A pesquisa de mestrado de Silva (2011), também defendida pelo Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciências e Matemática da UEM, intencionou determinar as possíveis equivalências entre a perspectiva sociocrítica da modelagem matemática e a aprendizagem significativa crítica, bem como apontar evidências indicadoras de que atividades de modelagem nesta perspectiva podem favorecer a ocorrência de aprendizagem significativa crítica. A investigação valeu-se da metodologia da análise textual discursiva, por meio da qual a pesquisa apontou elementos descritivos que caracterizam, especificamente, uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica. Assim, foi conduzida uma análise quanto ao seu enquadramento nesta perspectiva, dos relatos de experiência apresentados na VI CNMEM - Conferência Nacional sobre Modelagem em Educação Matemática. Conforme os resultados pode-se concluir que ações específicas de atividades de modelagem na perspectiva sociocrítica podem favorecer a aprendizagem significativa crítica. A mesma temática pode ser consultada em Silva, Kato e Paulo (2012), artigo da Revista Investigações em Ensino de Ciências.

Figueiredo e Kato (2012) publicam na revista Acta Scientiae uma investigação que tem como questão central a elaboração de parâmetros para a avaliação da aprendizagem significativa do aluno em atividades de modelagem na sala de aula. Segundo eles, argumentos favoráveis em relação ao uso da modelagem matemática no ensino têm sido amplamente reforçados pelos diversos relatos de professores e pesquisadores, em eventos científicos ou outros meios de divulgação, apontando resultados positivos alcançados quanto à formação da cidadania, o desenvolvimento do raciocínio e o estímulo à investigação crítica. Neste sentido, as discussões também suscitam o debate acerca das dificuldades enfrentadas por professores, na sua prática pedagógica, e particularmente sobre a avaliação da aprendizagem do aluno numa atividade de modelagem matemática.

Mais recentemente, Burak e Aragão (2012) publicam o livro *A modelagem matemática e as relações com a aprendizagem significativa.* A obra discute alguns aspectos do ensino de matemática na educação básica do Brasil, entre os anos de 2000 a 2009, a partir do Sistema de Avaliação em âmbito nacional (Saeb e ENEM) e internacional (PISA). Uma abordagem à teoria de Ausubel é posta, tendo como referência a tese de Aragão de 1976. Os autores se preocupam em apresentar alguns elementos da Metodologia da Matemática na perspectiva de Educação Matemática, sob uma visão desde as ciências humanas e sociais. O texto finaliza apresentando duas experiências de modelagem matemática buscando explicitar relações significativas entre a modelagem matemática, no âmbito da Educação Matemática, e a aprendizagem significativa.

Embora algumas pesquisas possam não ter sido mencionadas, este cenário indica que há espaço para investigação sobre a aprendizagem significativa em ambientes de modelagem matemática, especialmente com atenção à integração das tecnologias. Passamos então a sinalizar como estruturamos o ensino para conduzir as atividades nos diferentes Contextos de nossa pesquisa aplicada.

4.4 Unidades de Ensino Potencialmente Significativas - UEPS

Dedicamos essa seção à apresentação de uma estrutura particular para a organização do ensino em ambientes escolares, levando em conta recomendações da Teoria da Aprendizagem Significativa, no sentido do exposto na seção 3.3, dentre as quais o entendimento de diversos autores sobre que o material deva ser pautado nos princípios da *diferenciação progressiva* e da *reconciliação integradora*. Trata-se da proposta apresentada em Moreira (2011), denominadas *Unidades de Ensino Potencialmente Significativas* (UEPS).

Segundo o autor, as UEPS compreendem atividades cujas características têm potencial para facilitar a aprendizagem significativa dos estudantes de tópicos específicos de conhecimento declarativo e/ou procedimental e cuja estruturação se deu a partir de alguns princípios considerados fundamentais para a ocorrência de aprendizagem significativa bem como a partir de uma filosofia educacional.

> Filosofia: só há ensino quando há aprendizagem e esta deve ser significativa; ensino é o meio, aprendizagem significativa é o fim; materiais de ensino que busquem essa aprendizagem devem ser potencialmente significativos.
>
> Marco teórico: a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel (1968, 2003), em visões clássicas e contemporâneas (Moreira, 2000, 2005, 2006; Moreira e Masini, 1982, 2006; Masini e Moreira, 2008; Valadares e Moreira, 2009), as teorias de educação de Joseph D. Novak (1977) e de D.B. Gowin (1981), a teoria interacionista social de Lev Vygotsky (1987), a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud (1990; Moreira, 2004), a

> teoria dos modelos mentais de Philip Johnson-Laird (1983) e a teoria da aprendizagem significativa crítica de M.A. Moreira (2005). (MOREIRA, 2011, p.44, tradução nossa[4])

Para operacionalizar o desenvolvimento destas unidades de ensino passamos a caracterizar uma sequência de passos que, segundo o autor, devem integrar uma unidade de ensino.

1. definição do tópico (conteúdo) a ser abordado na unidade de ensino, identificando seus aspectos declarativos e procedimentais conforme aceitos no contexto da matéria de ensino;

2. criar e/ou propor situações que viabilizem ao aluno externalizar o seu conhecimento prévio em relação ao tópico, principalmente os subsunçores mais relevantes para a nova aprendizagem;

3. considerando os conhecimentos prévios, propor situações-problema em nível introdutório em relação ao conteúdo a ser ensinado, estes servem para preparar a estrutura cognitiva para a introdução do conhecimento (declarativo ou procedimental). Se necessário, essas situações-problema podem funcionar como organizador prévio;

4. apresentar elementos do conteúdo em estudo considerando a diferenciação progressiva, começando com aspectos mais gerais, inclusivos, dando uma visão inicial do todo, do que é mais importante na unidade de ensino, em seguida faz-se exemplificações com aspectos específicos;

5. retomar os aspectos mais gerais e fundamentais, no ensino do tópico a ser estudado; propor novas situações-problema em níveis crescentes de complexidade ao passo que se promove a reconciliação integradora; são sugeridas para esse momento da unidade de ensino atividades colaborativas que envolvam, necessariamente, negociação de significados e mediação docente.

6. fazer uma associação entre a diferenciação progressiva visando buscar a reconciliação integradora por meio de um conjunto de atividades e/ou ações. O importante não é propriamente a estratégia, mas o modo de trabalhar o conteúdo da unidade; novas situações-problema devem ser propostas e trabalhadas em níveis mais altos de complexidade em relação às situações anteriores; essas situações devem ser resolvidas em atividades colaborativas e depois apresentadas e/ou discutidas em grande grupo, sempre com a mediação do docente;

[4]Filosofía: sólo hay enseñanza cuando hay aprendizaje y éste debe ser significativo; enseñanza es el medio, aprendizaje significativo es el fin; materiales de enseñanza que tengan como objetivo alcanzar ese aprendizaje deben ser potencialmente significativos. Marco teórico: la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel (1968, 2000), en visiones clásicas y contemporáneas (Moreira, 2000, 2005, 2006; Moreira y Masini, 1982, 2006; Masini y Moreira, 2008; Valadares y Moreira, 2009), las teorías de educación de Joseph D. Novak (1977, 1980) y de D.B. Gowin (1981), la teoría interaccionista social de Lev Vygotsky (1987), la teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud (1990; Moreira, 2004), la teoría de los modelos mentales de Philip Johnson-Laird (1983) y la teoría del aprendizaje significativo crítico de M.A. Moreira (2005).

7. a avaliação da aprendizagem na UEPS deve ser feita ao longo de sua implementação. Deve ser composta de uma avaliação somativa individual, após o sexto passo, quando questões/situações que impliquem compreensão e que evidenciem captação de significados e capacidade de transferência possa ser percebida; além da somativa, a avaliação formativa deve ter o mesmo peso. É recomendado que se registre durante o processo tudo que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa do conteúdo trabalhado.

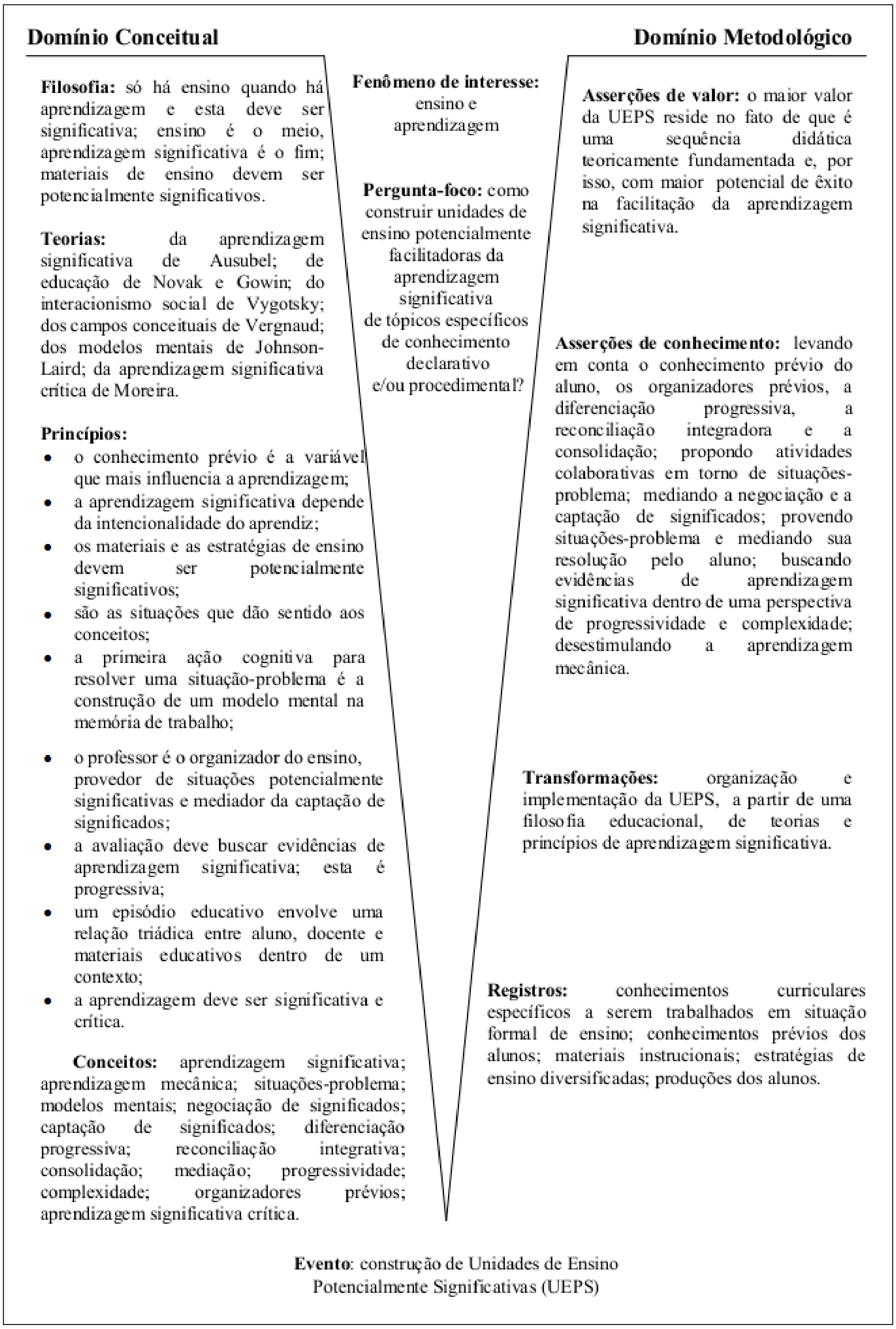
8. a UEPS somente será considerada exitora se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer evidências de aprendizagem significativa, pois, a aprendizagem significativa é progressiva, assim como o é o domínio de um campo conceitual, por isso a ênfase em evidências.

Outras recomendações em relação a sequência de passos que estruturam uma UEPS são colocadas por Moreira, quais sejam: em todos os passos, os materiais e as estratégias de ensino devem ser diversificados, o questionamento deve ser privilegiado em relação às respostas prontas e o diálogo e a crítica devem ser estimulados; como tarefa de aprendizagem, em atividades desenvolvidas ao longo da UEPS, pode-se pedir aos alunos que proponham, eles mesmos, situações-problema relativas ao tópico em questão; embora a UEPS deva privilegiar as atividades colaborativas, a mesma pode também prever momentos de atividades individuais. (MOREIRA, 2011)

A Figura 4.2 indica os princípios mencionados anteriormente, bem como as características do domínio conceitual e do domínio metodológico de uma UEPS. O conjunto de procedimentos que caracterizam uma UEPS, expostos sequencialmente, é apresentado para posteriormente buscamos identificar aproximações entre UEPS e atividades de modelagem matemática.

Considerando o quadro teórico, que caracteriza a modelagem matemática como alternativa pedagógica e enuncia a construção de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas, no próximo capítulo passamos a apresentar os três Contextos da pesquisa. Em cada Contexto, UEPS foram estruturadas a partir da integração de atividades de modelagem matemática e das tecnologias ao estudo de tópicos específicos do conhecimento, com vistas a potencializar a ocorrência de aprendizagem significativa dos estudantes, ao mesmo tempo que buscamos a compreensão de nossa questão de pesquisa.

Figura 4.2: Um Vê Epistemológico de Gowin para caracterização de UEPS



Fonte: Moreira (2011). Tradução nossa.

5 UEPS COM MODELAGEM MATEMÁTICA EM AMBIENTES DE ENSINO MEDIADOS PELA TECNOLOGIA

Apresentamos no Capítulo 2 os diferentes Contextos nos quais a pesquisa foi desenvolvida: a *Disciplina de Modelagem na Licenciatura em Matemática*, o *Curso de Curta Duração* e as *APS na Disciplina de Cálculo Numérico*. Neste capítulo, dedicamo-nos a caracterizar aspectos mais específicos e a descrever a estruturação das unidades de ensino potencialmente significativas de cada Contexto. Para cada um dos Contextos vamos descrever algumas atividades de modelagem conduzidas com e pelos alunos, de modo que essas informações passam a integrar o material que subsidia as nossas análises, que serão organizadas no Capítulo 6.

5.1 Contexto 1: Disciplina de Modelagem na Licenciatura em Matemática

A abordagem de tópicos de equações de diferenças realizada por meio de uma UEPS teve duração de doze horas aula, distribuídas em seis encontros de aulas regulares além de dois encontros em horário extraclasse. As aulas nessa unidade de ensino foram ministradas pela professora pesquisadora, responsável pela condução de todas as atividades integrantes da UEPS e foram acompanhadas pela professora orientadora desse trabalho. A proposta compreendia o estudo de tópicos de equações de diferenças de primeira e de segunda ordem mediados por atividades de modelagem matemática. As atividades de modelagem foram incluídas na UEPS seguindo a configuração de familiarização dos alunos por meio de três momentos, conforme descrito na seção 4.2.

5.1.1 Sobre Equações de Diferenças e a Estruturação da UEPS

Equações de Diferenças podem ser usadas em aplicações de diversos ramos das ciências. Em geral, estas equações descrevem fenômenos ao longo do tempo, que é medido em intervalos regulares de modo a ser interpretado como uma variável discreta. Estas equações são relações de recorrência e podem ser resolvidas usando iterações ou outras técnicas, dependendo de suas características. Segundo Goldberg (1986), a primeira diferença de uma sequência y_n é dada por $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, $n \in N$. A segunda diferença da sequência é: $\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = y_{n+2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$. Generalizando, para qualquer $k \in N$, a diferença de ordem k é dada por:$\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n$, $n = k, k+1, ...$ Chama-se equação de diferenças a uma equação que envolve o termo y_n e suas diferenças.

A estruturação das atividades na UEPS, foi orientada pelos princípios indicados por Moreira (2011), conforme descrito no Capítulo 4, e foram incluídas nas aulas conforme a descrição que segue.

Situações iniciais para levantamento de conhecimentos prévios: no primeiro encontro os alunos responderam individualmente a duas atividades propostas com o objetivo de identificar alguns conhecimentos prévios, relativos ao conhecimento matemático, necessários para o estudo de equações de diferenças, contudo, não foi mencionado que este seria o tópico em estudo. A identificação de conhecimentos prévios relativos ao processo de modelagem matemática se deu de modo informal, quando a professora perguntou se os alunos já haviam desenvolvido alguma atividade de modelagem na disciplina em questão ou em outra situação.

Atividades em nível introdutório: a unidade de ensino se iniciou com a proposição de leituras e de um vídeo sobre a temática *orçamento familiar*, visando desenvolver uma atividade de modelagem matemática do primeiro momento; o intuito nesta etapa era de colocar os alunos em contato com o processo de modelagem, ao mesmo tempo em que a situação-problema conduzia ao estudo de equações de diferenças.

Foco no conteúdo: definições básicas e mais gerais foram necessárias para viabilizar a compreensão de equações de diferenças. Contudo, a resolução do modelo matemático da situação inicial exigiu conceitos específicos sobre equações de diferenças lineares de primeira ordem, por isso a abordagem desse tópico se fez necessária. Além de voltar à modelagem do orçamento familiar e resolver o problema com os conceitos estudados, outras atividades foram propostas a fim de promover o entendimento dos métodos matemáticos, com potencial de serem aplicáveis a diferentes situações-problema.

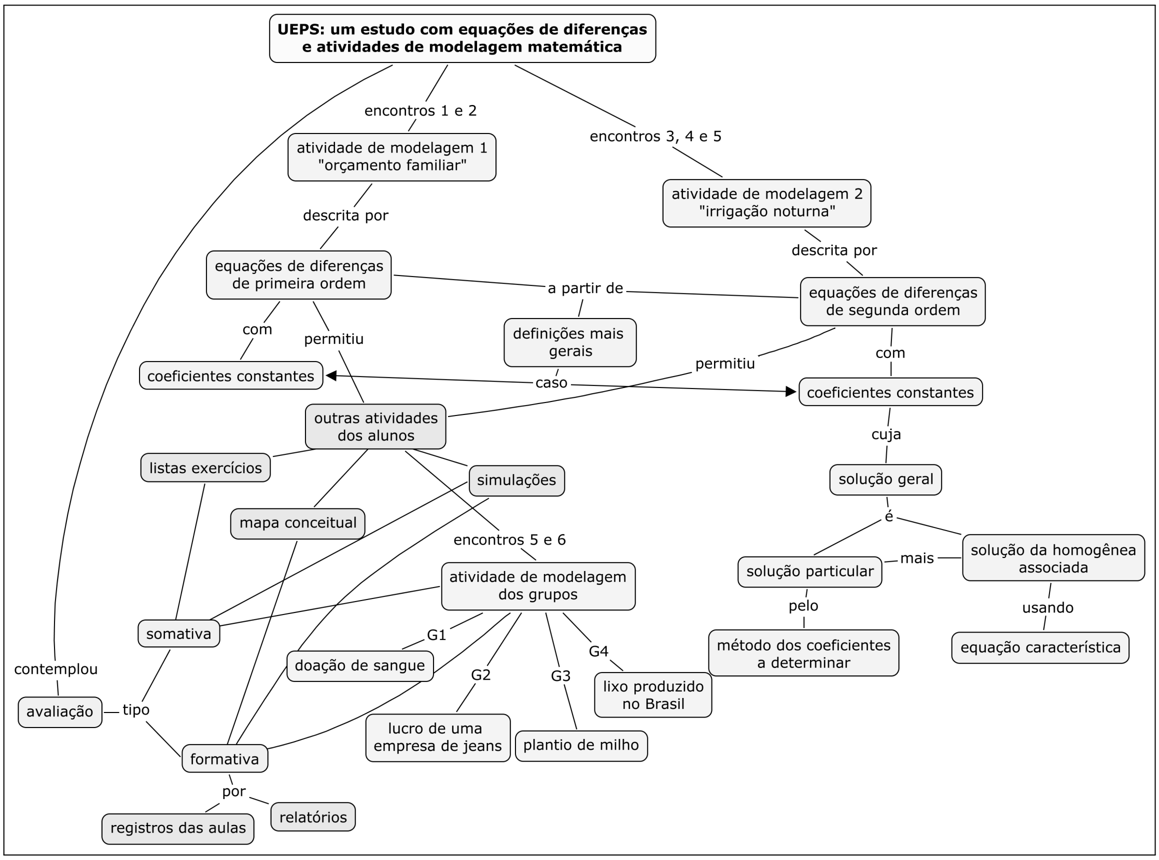
Avanço em complexidade, do conteúdo matemático e do processo de modelagem: nova situação-problema foi proposta (*irrigação noturna*) de modo a exigir maior envolvimento dos alunos no processo de modelagem, bem como a avançar em complexidade do conteúdo. A partir da nova problemática modelada, considerada do segundo momento, se deu a conceitualização de equações de diferenças de segunda ordem de modo geral. O caso particular das equações de diferenças de segunda ordem com coeficientes constantes foi convenientemente abordado para descrever a situação em questão, cuja solução particular foi obtida pelo método dos coeficientes a determinar.

Finalização com atividades colaborativas: em um ambiente de trabalho colaborativo, professora e alunos levaram a cabo a análise de um modelo, revisitando conceitos iniciais e outros mais avançados estudados durante a unidade de ensino; desse modo, discussão, simulação e visualização de resultados permitiram significação e ressignificação de conceitos matemáticos, bem como do processo de modelagem; finalmente, a proposição de uma atividade de modelagem do terceiro momento foi outra oportunidade de trabalho colaborativo. Assim, surgiu a possibilidade de testar a capacidade de transferência de conhecimentos estudados, sejam matemáticos ou não, para uma situação nova que foi definida, explorada e comunicada pelos alunos sob orientação da professora.

Avaliação na UEPS: atividades contemplando a avaliação *formativa* e a avaliação *somativa*[1] foram consideradas durante todo o desenvolvimento da unidade de ensino.

De acordo com a descrição dos passos sequenciais da UEPS, elaboramos o mapa conceitual da Figura 5.1.

Figura 5.1: Um mapa conceitual que retrata a estrutura da UEPS no Contexto 1



Fonte: elaborado pela autora com CmapTools (http://www.cmaptools.com/).

As atividades de modelagem foram inseridas na UEPS segundo os momentos da modelagem a que nos referimos na seção 4.2 e têm propósitos específicos quanto à abordagem do conteúdo e quanto ao próprio processo de modelagem. Em comum há o intento de avançar em complexidade à medida que a unidade de ensino se desenvolve.

5.1.2 As Atividades de Modelagem Matemática

Como indica o mapa conceitual da Figura 5.1, as atividades de modelagem integradas à UEPS foram *orçamento familiar* (ver Apêndice A), *irrigação noturna* (que será

[1]Moreira (2011) define que: *avaliação formativa* é aquela que avalia o progresso do aluno ao longo de uma fase de sua aprendizagem; a que contribui para a regulação da aprendizagem, em andamento, no progressivo domínio de um campo conceitual; é uma avaliação contínua e ocupada com os significados apresentados e em processo de captação pelo aluno; e, *avaliação somativa* é aquela que busca avaliar o alcance de determinados objetivos de aprendizagem ao final de uma fase de aprendizagem; é usualmente baseada em provas de final de unidade, em exames finais.

descrita a seguir) e outras quatro atividades decorrentes dos trabalhos em grupos, conforme Tabela 5.1, das quais descrevemos nessa seção a correspondente ao Grupo 4, *Lixo no Brasil*. Uma breve descrição das demais consta na seção A.4, Apêndice A.

As atividades de modelagem desenvolvidas pelos alunos em grupos foram orientadas pela professora em duas aulas regulares e em outros encontros extraclasse, quando a professora atendia a cada grupo em particular. Na última aula destinada ao estudo do tópico Equações de Diferenças ocorreu a comunicação dos trabalhos para a turma. Dispondo de vinte minutos e usando recursos multimídia cada grupo pode apresentar a problemática, a abordagem matemática e a análise do resultado em termos do problema estudado. Um espaço para que a turma e as professoras fizessem considerações era aberto ao final de cada apresentação. Neste encontro os alunos entregaram também outras atividades que comporiam parte da avaliação, bem como um relatório com o desenvolvimento da atividade de modelagem. A Tabela 5.1 sintetiza características dos trabalhos dos grupos.

Tabela 5.1: Aspectos gerais das atividades desenvolvidas pelos grupos

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Título do Trabalho	Perspectiva futura de doações de sangue no Hemocentro Regional de Londrina	Lucro acumulado por uma indústria de calças Jeans	Plantio de Milho	Lixo no Brasil
Problema Estudado	Criar um modelo que permita estimar o número de coletas internas de sangue no ano n.	Uma fábrica de calças jeans produz uma determinada quantidade de peças, gerando um certo lucro a cada mês. Encontrar qual o lucro acumulado por esta fábrica em determinado mês.	Qual a quantidade de semente produzida, em relação ao tempo, para serem tratadas e replantadas a partir de um hectare plantado inicialmente?	Quanto lixo vamos acumular no Brasil, em relação ao tempo, se não diminuirmos a quantidade produzida e não reciclarmos mais do que reciclamos atualmente?
Equação de Diferença Formulada	$C_{n+1} = C_n(1+i)$	$C_n = C_{n-1} - ax + (c-b)y - gz - h - i$	$Q_n = Q_{n-1}\alpha\beta\delta$	$L_t = L_{t-1} + 6,8 \times 10^{10}(1,0117)^t$
Modelo Obtido	$C_n = 6338(1,025)^n$	$C_n = C_0 + n(-ax + cy - by - gz - h - i)$	$Q_n = Q_0(\alpha\beta\delta)^n$	$L_t = 6,8 \times 10^{10}\left[\frac{1,0117-(1,0117)^t}{1,0117}\right]$

A seguir apresentamos a descrição das atividades de modelagem que serão objeto de análise do Contexto 1 da pesquisa, no Capítulo 6.

5.1.3 Irrigação Noturna

Nesta atividade, que foi desenvolvida durante três encontros, o intuito foi avançar para o estudo de equações de diferenças de segunda ordem e ao mesmo tempo conduzir a atividade de modo que exigisse maior participação dos alunos nas decisões e encaminhamentos do estudo. Embora as informações em que se basearia a modelagem foram providenciadas pela professora, os alunos ainda poderiam contribuir com outras que alimentariam os parâmetros do modelo no momento da análise e validação.

A atividade se iniciou com a leitura de trechos de reportagens sobre a temática *irrigação noturna* em que os alunos reunidos em pequenos grupos, foram estruturando um problema a investigar a partir das informações. Nos diferentes grupos surgiram diferentes problemas, todavia, os próprios alunos iam percebendo inconsistências ou falta de informações para resolvê-los. Houve então um momento de socialização dessas diferentes ideias e a partir de então foi definido em conjunto entre todos os grupos e com a orientação das professoras o problema: *Qual a quantidade de água no solo de uma área cultivada com hortaliças, em determinado tempo, irrigada regularmente durante um período de estiagem, usando o sistema de irrigação por aspersão?*

Para o estudo foram consideradas informações relevantes a que tiveram acesso durante a fase de inteiração, tais como: a existência de incentivos para a irrigação noturna, em que os produtores recebem redução na fatura de energia elétrica de 60% para uso de energia elétrica no horário das 21h às 06h (podendo ser estendido até às 12h); a racionalização do uso da água e a quase inexistência de perda de água devido à evaporação durante o período noturno. A partir dessas informações foram definidas as hipóteses:

H_1: O dia é dividido em dois períodos de 12 horas, sendo que a plantação receberá irrigação apenas no período predominantemente noturno, considerado das 21h às 09h;

H_2: no período predominantemente diurno, das 09h às 21h, parte da água é perdida devido à evapotranspiração (cerca de 50%);

H_3: Serão desconsideradas perdas de água devido à ação dos ventos e outros fatores;

H_4: Inicialmente a plantação possui uma quantidade de água;

H_5: No período entre 21h e 09h não ocorrem perdas por evapotranspiração.

Para a formulação matemática os alunos iniciaram com a definição de variáveis e parâmetros:

t: tempo, em períodos de 12 horas;

Q_n: quantidade de água no solo após n períodos de 12 horas;

Q_0: quantidade inicial de água no solo às 21h do primeiro dia;

$\alpha = \frac{1}{2}$: proporção de água perdida no período diurno;

A: quantidade de água irrigada no período noturno.

Para a dedução do modelo matemático, os alunos voltaram a trabalhar nos pequenos grupos e, a socialização das ideias de cada grupo culminou com a definição da sequência:

$$Q_{n+2} = \begin{cases} \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{2}A, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{2}Q_n + A, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \tag{5.1}$$

ou

$$Q_{n+2} - \frac{1}{2}Q_n = \frac{1}{4}A(3 - (-1)^n) \tag{5.2}$$

Considerando então os valores iniciais, foi possível escrever:

$$PVI : \begin{cases} Q_{n+2} - \frac{1}{2}Q_n & = & \frac{1}{4}A(3 - (-1)^n) \\ Q_0 & = & Q_0 \\ Q_1 & = & Q_0 + A \end{cases} \tag{5.3}$$

Para resolver esse problema de valor inicial seria necessário conhecer métodos adequados para esse tipo de equações de diferenças de segunda ordem com coeficientes constantes. Neste momento então foram tratados os aspectos de equações de diferenças de 2^a ordem necessários para resolver esse problema. Somente depois disso os alunos resolveram o PVI (5.3), chegando à solução

$$Q_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (Q_0 - A) + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^n (Q_0 - A) + \frac{A}{2}(3 - (-1)^n) \tag{5.4}$$

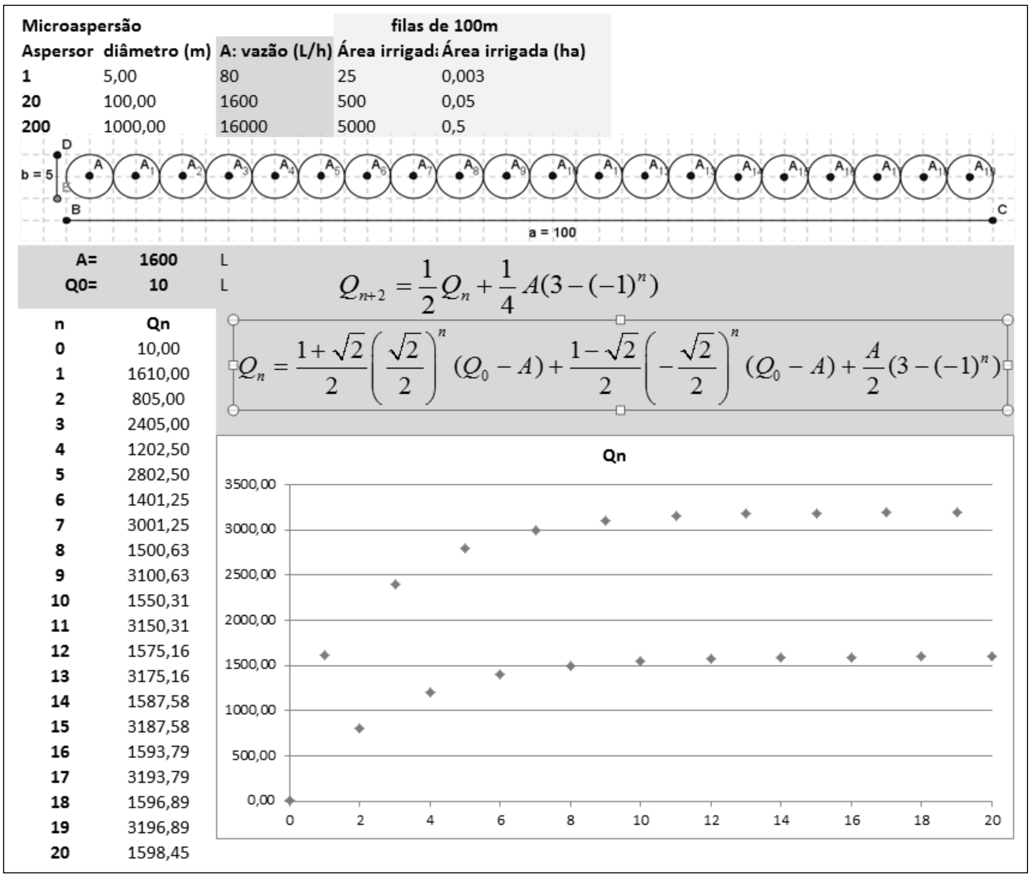
Embora a conclusão seja que o limite de Q_n não existe, pois Q_n oscila entre (1) e (-1) para $n \to \infty$, essa solução permite entender o comportamento da solução. Ou seja, ao longo do tempo a quantidade de água tende a se estabilizar em uma quantidade A nos períodos pares e em $2A$ nos períodos ímpares.

A análise da solução, em um primeiro momento, se deu considerando na expressão (5.4), onde o tempo n representa períodos de 12 horas. Pensando no comportamento da solução ao longo do tempo, calcularam o limite quando $n \to \infty$ e observaram que $\lim_{n\to\infty} Q_n = \begin{cases} A, & \text{se } n \text{ é par} \\ 2A, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$.

Com essa análise se encerrou o segundo encontro dedicado a esta atividade. Além do horário de aula, os alunos deveriam pensar em cenários que viabilizassem uma interpretação do modelo (5.4) em relação à quantidade de água no solo. Essa análise se realizou na aula seguinte em que a interpretação dessa solução se tornou atrativa para os alunos, quando a professora, a fim de visualizar graficamente o resultado buscou um cenário, a partir de dados da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária - EMBRAPA.

Segundo a EMBRAPA (2001), o sistema de microaspersão usa pequenos aspersores ou difusores e a irrigação é feita borrifando-se ou aspergindo-se como se fosse um pequeno *spray*. Os aspersores trabalham com vazões de 70L/h a 120 L/h e a área irrigada atinge de 4m a 6m de diâmetro. Esses dados, conforme mostra a Figura 5.2, permitiram simulações que auxiliaram na interpretação sobre a quantidade de água no solo de uma área cultivada, problema que os alunos em conjunto haviam definido. A Figura 5.2 ilustra também os resultados obtidos para uma simulação que considera 20 aspersores.

Figura 5.2: Resultados fornecidos pelo modelo



Fonte: elaborado pela autora por meio de uma planilha eletrônica.

A análise da solução foi encaminhada pela professora, contando com a participação dos alunos que demonstraram ter refletido sobre a atividade. Alguns trechos da transcrição do vídeo dessa aula ilustram isso.

> Professora: Ficou como atividade para vocês fazerem a análise desse modelo, né?... e, eu gostaria que vocês comentassem o que vocês pensaram a respeito do comportamento desse modelo no decorrer do tempo. Vocês chegaram a fazer essa tarefa?
>
> Alunos: (Silêncio)
>
> Professora: O que podemos falar..., a respeito da quantidade de água no solo? Então, como analisar esse modelo, pensando matematicamente?
>
> C1(D1): pelo limite?

C1(D2): é, por meio de um limite.

C1(E3): Limite.

Professora: É? Vocês pensaram em usar a ideia de limite. Usaram?

C1(E3): Sim.

O conceito de limite é um importante subsunçor que ainda não havia sido requerido na UEPS. Assim, a professora lançou questionamentos que permitissem aos alunos externar seus entendimentos e rever as noções necessárias, como foi o caso, resgatando o uso de limites para sequências numéricas.

Professora: Você (C1(D1)) falou: não é um modelo contínuo... e a questão do limite, o que você pensou?

C1(D1): ah, porque se usasse o limite conforme o n vai pro..., o n muito grande, o limite dela vai ser aquele A sobre 2 lá.

Professora: É possível aplicar limite mesmo que a gente esteja falando de um caso discreto? O que vocês me dizem? ... Vocês lembram de ter estudado alguma coisa neste sentido, no decorrer do curso?

Alunos: (alguns alunos sussurram)

[...]

Professora: ... Bom, mesmo que estejamos trabalhando com variáveis discretas, dá pra calcular limite também, lembra que tem limite de sequência, lembra quando estuda séries e sequências... a gente trabalha com limite até para estudar convergência, divergência da sequência, né.

Alunos: (alunos concordam)

[mais adiante]

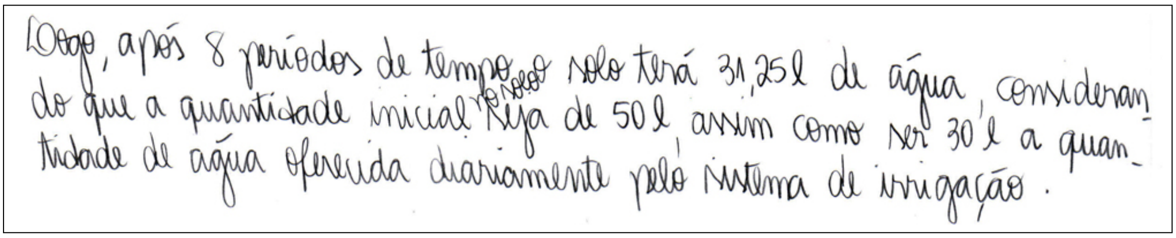
Professora: Ok, resta a gente calcular... (vai falando e escrevendo $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{A}{2}(3-(-1)^n)\right]$. Alguns alunos falam junto) e isso, é o quê? Como vocês olham pra esse limite agora?

Alunos: (Silêncio)

C1(D2) entregou um relatório em que consta o cálculo do limite da sequência Q_n para n par e depois para n ímpar obtendo resultados corretos, seguidos de gráficos que representam cada sequência separadamente. Fez uma simulação com valores que permitiram analisar a quantidade de água no solo num dado período, conforme conclusão da Figura 5.3.

Cabe observar que o aluno C1(D2) procurou a professora virtualmente para tirar dúvidas quanto a um conceito matemático, como indica a Figura 5.4:

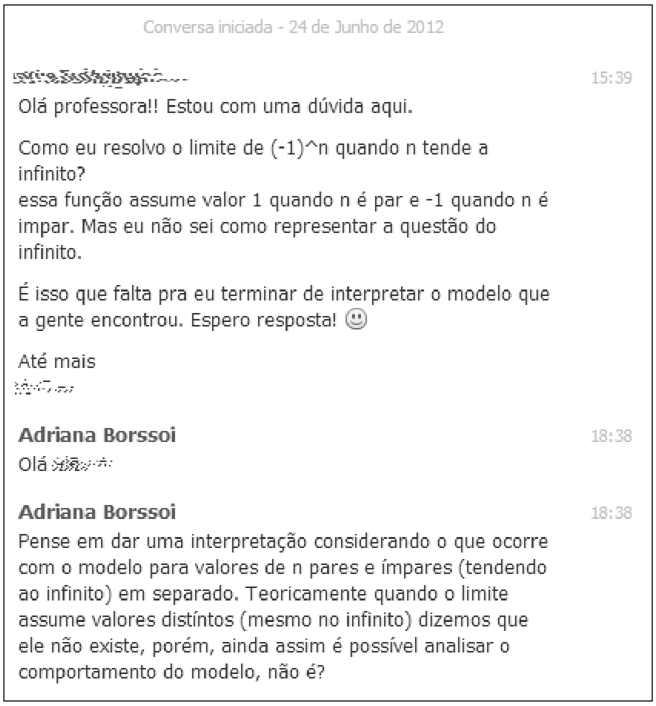
Figura 5.3: Recorte da atividade entregue pelo aluno C1(D2) com parte da interpretação do modelo



Logo, após 8 períodos de tempo o solo terá 31,25 l de água, considerando que a quantidade inicial no solo seja de 50 l, assim como ser 30 l a quantidade de água oferecida diariamente pelo sistema de irrigação.

Fonte: registros do aluno C1(D2).

Figura 5.4: Diálogo postado via chat de uma rede social



Conversa iniciada - 24 de Junho de 2012

15:39

Olá professora!! Estou com uma dúvida aqui.

Como eu resolvo o limite de (-1)^n quando n tende a infinito?
essa função assume valor 1 quando n é par e -1 quando n é impar. Mas eu não sei como representar a questão do infinito.

É isso que falta pra eu terminar de interpretar o modelo que a gente encontrou. Espero resposta! 🙂

Até mais

Adriana Borssoi 18:38

Olá

Adriana Borssoi 18:38

Pense em dar uma interpretação considerando o que ocorre com o modelo para valores de n pares e ímpares (tendendo ao infinito) em separado. Teoricamente quando o limite assume valores distíntos (mesmo no infinito) dizemos que ele não existe, porém, ainda assim é possível analisar o comportamento do modelo, não é?

Fonte: Acervo de dados da pesquisa.

Na aula, oportunamente C1(D2) justificou a necessidade de calcular dois limites separadamente, mostrando ter compreendido a sugestão da Figura 5.4.

C1(D2): Bom, eu analisei pra n par e pra n ímpar, porque eu não consegui achar um..., calcular o limite assim com -1 elevado a n.

Professora: não conseguiu...

C1(D2): Porque pra..., pra valores pares vai dá um positivo, pra valores ímpares dá um negativo, daí eu não consegui, por isso que eu separei em duas funções.

Professora: O que você concluiu? ...não consegue fazer... por quê, qual é o impedimento?

C1(D2): O -1 ali.

Professora: o que ele provoca nessa expressão?

C1(D1): Ele alterna os positivos e negativos (C1(D2) concorda).

Professora: Isso, você tem na verdade um limite que oscila né, os valores oscilam dependendo do valor de n (C1(E3) fala junto, concordando), não é isso? Como a gente já vem observando que esse é um problema que foi necessário tratar pares e ímpares com expressões separadas, lembram que inicialmente a gente tinha uma expressão para termos pares e outra para ímpares (fazendo menção à dedução do modelo matemático), a gente pode facilitar um pouco o trabalho e calcular em separado. Então, a gente tem que o resultado disso é o quê? (escreve $\lim_{n\to\infty} Q_n = \begin{cases} \frac{A}{2}(3-1), & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{A}{2}(3+1), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ enquanto vai falando) Se n é par, isso vai ficar...

Alunos: A

Professora: Se o n for ímpar (alunos vão falando junto) isso vai dar... $2A$. Bom, e aí, conclusão: o que eu posso falar a respeito do limite?

Alunos: (Silêncio)

C1(E3): que o limite vai pra A e $2A$.

Professora: O que a gente fala quando acontece de o limite não ter um valor, único?

C1(A2): Sequência divergente.

Professora: Por quê?

C1(A2): Porque ela tem duas subsequências com limites diferentes.

Professora: Quando a gente costuma estudar, no estudo de limites, a gente costuma dizer que: o limite existe quando?

C1(E3): Os limites laterais são iguais.

Professora: É, isso se a gente estiver olhando pra um ponto né (C1(E3) concorda). Normalmente o limite existe quando? Quando ele é um número, e que é único, né. Então esse limite não é único, ele provoca uma alternância entre A e $2A$, então, teoricamente a gente fala que esse limite não existe, certo? Esse limite não existe... embora ele não exista ele pode tá falando pra gente, ele pode tá dando informação a respeito do nosso problema, por isso não, não...

C1(E3): não descartar

Professora: não convém que eu chegue aqui diga que o limite não existe, pronto e acabou. Quer dizer, todo problema de modelagem morreu? Não serve o que a gente fez, não serve? Não, ele não existe, mas ela dá indicativo sobre o comportamento do problema, né. Ok, então, o que se pode falar, o que significa que o limite é A e o limite é $2A$ pra ímpar, pra par é A, pra ímpar é $2A$? O que isso significa em termos do nosso problema?

Alunos: (Silêncio)

Professora: Qual que era o problema, o que o modelo diz pra nós? O que o Q_n representa?

C1(E3): O que eu entendi é a quantidade de água...

Professora: quantidade de água no solo...

C1(E3): ...após n períodos de 12 horas.

Professora: Nos períodos pares, quanta água vai estar presente no solo?

Alunos: A.

Professora: e nos períodos ímpares?

C1(D1): o dobro

C1(D2) e outros: $2A$.

Professora: ...mas isso quando? Quando n é grande, então, com o passar do tempo o que nós podemos falar a respeito da quantidade de água no solo? Converge, diverge? É estranho falar: Ah, a quantidade de água converge... não é essa interpretação, né. O que a gente pode falar da quantidade no decorrer do t..., num tempo grande? Para os períodos pares: tem uma quantidade... o que é o A mesmo?

Posteriormente quando a professora exibia os resultados de uma simulação (Figura 5.2) C1(D2) fez uma colocação:

C1(D2): Professora, meu gráfico decresceu, não sei porque!?.

Professora (após concluir um comentário): então agora nós temos que ver o que aconteceu no estudo de vocês, porque vocês falaram que ficou decrescente...

C1(D2): eu separei em duas funções ..., como se fossem duas funções: uma pra par e outra pra ímpar e deu as duas decrescentes.

Professora: hum, é, a gente tem que olhar como foi feito o estudo em separado, porque, veja: uma equação de diferença é uma equação recursiva, pra eu construir o passo seguinte depende do passo anterior. Como a sequência alterna par e ímpar,..., então tem que tomar cuidado se dá pra fazer essa análise em separado, porque aqui a gente pensou separado aqui (indicando o cálculo dos limites na lousa) mas faz parte de um modelo e na hora de plotar o gráfico foi levado em conta todo, todo o modelo Q_n. Então, tem que olhar se só o finalzinho não tá,... se tá pensado corretamente essa análise final.

De fato, a relação entre os parâmetros A e Q_0 influencia no aspecto do crescimento/decrescimento das sequências pares e ímpares. Se $A < Q_0$ as sequências são decrescentes e se $A > Q_0$ as sequências são crescentes. Em ambos os casos a sequência par converge para A e a ímpar para $2A$.

5.1.4 Atividade do Grupo 4: Lixo no Brasil

O grupo dos alunos C1(A4), C1(B4) e C1(C4) foi o que mais interagiu com a professora, presencialmente e via e-mail. O tema partiu do grupo, que apresentou inicialmente mais de uma sugestão:

C1(A4): Então professora..., como eu falei pra professora no meu e-mail: eu trouxe duas ideias pra gente tentar ver, pra professora analisar o que a professora acha que seria melhor, mais conveniente a gente fazer... Tem a ideia do lixo, eu peguei alguns dados hoje. Aqui tá falando sobre a quantidade que produz de lixo, por pessoa, no Brasil... aqui (indicando o texto) fala também sobre o lixo reciclado... daí daria pra tentar... prever futuramente. Porque eu não sei se vai ser fácil isso, porque daí tem a quantidade de pessoas que vai aumentar, provavelmente. Não sei se tem como. E uma outra que eu peguei, ele fala sobre uma formatura, que é bem mais simples, que já é direcionado a equações de diferenças.

Sem querer influenciar na escolha, a professora perguntou qual dos temas o grupo achava mais interessante ou motivador, o que gerou alguns comentários:

C1(C4): Esse aí parece mais fácil porque já tem mais coisa feita... É, a motivação minha tá no fácil.

C1(A4): Eu penso assim: mais interessante é esse (indicando o do lixo), mas a gente...

C1(B4): O do lixo!

C1(C4): Porque esse aqui a gente vai ter que pensar, modelar, tem que pensar no problema...

C1(A4): ...é, esse aqui eu tenho os dados.

Professora: E dados sobre esse tema não é difícil de encontrar.

C1(A4): Não, tem bastante coisa.

C1(C4): Só que esse aqui a gente vai ter que restringir muito pra não ficar muito complicado, porque o lixo..., daí tem o orgânico, tem o reciclável, né... outros lá, daí seria...

C1(A4): Vocês sabem quanto uma pessoa produz de lixo diariamente, uma pessoa, em média?

C1(B4): Não sei, sei que é bastante. Dá o que, três quilos?

C1(A4): um quilo.

C1(B4): Um quilo por dia?

C1(A4): Isso é todo tipo de lixo.

C1(B4): Só que o final de semana sempre é mais, né.

...

C1(C4): Porque desse lixo aí, qual seria uma questão propícia pra gente trabalhar, porque a gente vê o lixo e surge muita questão, tipo: em quanto tempo o mundo vai tá só lixo?

(risos)

C1(A4): Ai, que horror!

C1(B4): Só que tem aquela parte, que tem que contar... tá, tem muito lixo, mas tem a reciclagem, tem aquele negócio deco..., que coloca mistura da terra, como é o nome gente?

C1(A4): Ai, como é?

C1(B4): Então, aquilo lá.

C1(A4): Aterros!? Compostagem! (todos concordam)

C1(B4): Tem a compostagem que diminui muito...

C1(C4): Então, mas qual seria uma questão boa pra trabalhar? Porque eu pensei assim... e falei: nossa, não tem muito... tipo, a questão que você pode levantar com todos esses dados eu não achei!

C1(A4): Ah, isso daí... e, a gente vai ter que... pensar!

...

C1(A4): Ah, eu tive uma ideia com o que ela (professora) falou...porque, hoje nós estamos em uma quantidade, daqui um ano a gente vai ser outra quantidade de pessoas. Se nós estamos produzindo um tanto de lixo e daqui a um ano vai aumentar uma..., vamos supor, vai aumentar...

C1(B4): Tantos por cento da população?

C1(A4): é, uma porcentagem da população, o lixo vai aumentar também, consequentemente. Então, a quantidade de lixo vai depender também da quantidade de pessoas, então já existe uma proporção.

C1(C4): Já vai ter duas variáveis.

Professora: Tá ficando interessante essa conversa.

C1(C4): Tempo e população...

C1(A4): Aí olha, já vai dar...

C1(B4): Só que daí tem que levar em consideração também as pessoas que morrem.

(risos)

C1(C4): Vix, já vai ficar... nossa!

C1(B4): Mas é ué... mas tem...

C1(A4): Mas a gente consegue um dado de quanto a população ???, por ano.

C1(B4): Não, eles falam, eles falam assim: a cada, não sei quantos que nasce, não sei quantos morrem...

C1(A4): Se a gente já tiver a..., como mesmo que chama? ... quando tem a...

Professora: Constante?

C1(A4): ... a constante de...

Professora: ... de proporcionalidade, a taxa de crescimento?

C1(A4): ... isso! A gente não vai precisar pensar nisso, porque a constante já é..., porque ela já vai tá explicando a pessoa que tá morrendo e a pessoa...

C1(B4): É, de crescimento, né.

Em outro momento o grupo encaminhou por e-mail uma versão inicial do trabalho e, após algumas considerações da professora e reformulação do grupo, o teor do trabalho está como descrito a seguir.

Problema definido pelo grupo: O problema referente ao tema que escolhemos é: Quanto de lixo vamos acumular no Brasil, em relação ao tempo, se não diminuirmos a quantidade produzida e não reciclarmos mais do que reciclamos atualmente?

Informações relevantes para definição das hipóteses: a quantidade de lixo produzida anualmente por uma pessoa no Brasil é em média 1 kg/dia (Portal São Francisco: Problemas Ambientais), ou seja, em um ano uma pessoa produzirá 365 kg de lixo. Somente 2% (Sua pesquisa.com: Lixo Brasileiro) desse lixo é reciclado anualmente. Sabemos que existe a decomposição, mas nesse trabalho não vamos considerar. Partiremos de hoje, não vamos considerar o lixo passado. A população brasileira é de aproximadamente 190.732.694 (IBGE: Censo Demográfico 2010) e a taxa de crescimento anual da população é de 1,17% ao ano (R7 Notícias).

Definição das variáveis e parâmetros: t: tempo, em anos; L_t: quantidade de lixo no tempo t; $L_0 = 0$: quantidade inicial de lixo (zero); $k = 0,0117$: constante de crescimento anual da população do Brasil; w=0,98: lixo que não é reciclado anualmente, ou seja, são reciclados 0,02 anualmente; $P_0 = 190.732.694$: população no instante inicial.

Encaminhamento do grupo: Sabemos que a população aumenta conforme o tempo, então:

$$\begin{aligned}
P_0 &= P_0 \\
P_1 &= P_0 + P_0 k \\
&= P_0(1+k) \\
P_2 &= P_0(1+k) + P_0(1+k)k \\
&= P_0(1+k)(1+k) \\
&= P_0(1+k)^2 \\
&\vdots \\
P_t &= P_0(1+k)^t \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Agora vamos descrever L_t:

$$\begin{aligned}
L_0 &= 0 \\
L_1 &= L_0 + 365P_1 w \\
&= 365P_0(1+k)^1 w \\
L_2 &= L_1 + 365P_2 w \\
&= L_1 + 365P_0(1+k)^2 w \\
&\vdots \\
L_t &= L_{t-1} + 365P_t w \\
&= L_{t-1} + 365P_0(1+k)^t w \\
&= L_{t-1} + 365 \times 190.732.694(1,0117)^t \times 0,98 \\
&= L_{t-1} + 6,8 \times 10^{10}(1,0117)^t
\end{aligned}$$

Temos então a equação de diferenças:

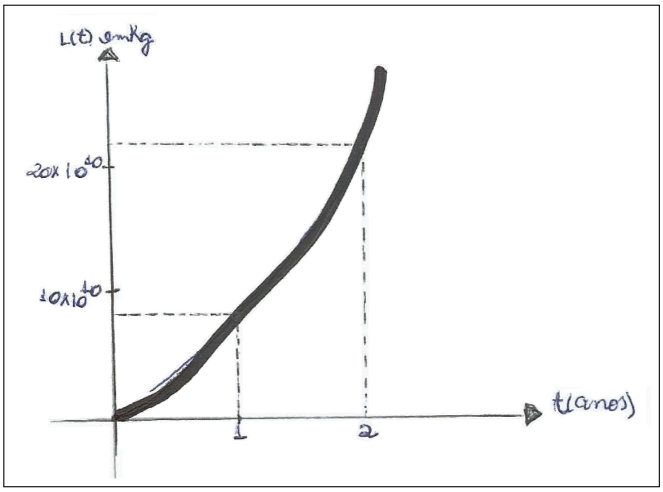
$$L_t = L_{t-1} + 6,8 \times 10^{10}(1,0117)^t \quad (5.6)$$

onde $m = t - 1$ e $n = t$, de modo que, $n - m = t - (t - 1) = 1$. Assim, nossa equação de diferença é de 1^a ordem.

A solução obtida para a equação de diferenças é (5.7) e o gráfico que a representa está na Figura 5.5:

$$L_t = 6,8 \times 10^{10}(1,0117)^t t \quad (5.7)$$

Figura 5.5: Gráfico para o lixo acumulado.



Fonte: relatório do grupo.

Enquanto C1(B4) esboçava o gráfico (como na Figura 5.5) na lousa o grupo fez os seguintes comentários:

> C1(C4): Gente, o gráfico não foi viável fazer por computador, eu tentei no Geogebra..., porque quando for *zero* beleza: é zero, quando for *um* o gráfico vai subir lá pra sessenta o oito bilhões, então, quer dizer, ele se aproxima muito ao eixo y e gráfico pelo próprio computador fica igual ao eixo y. Então, não deu pra usar a tecnologia pra ajudar a gente a resolver esse problema.
>
> C1(A4): A gente tentou fazer uma escala para visualizar, porque a gente vai validar em cima do que a gente consegue ver no gráfico. Então a gente fez um esqueminha pra dar certo.

Com o exposto, observou-se que a solução (5.7) da equação de diferenças estava incorreta. Além do que, percebeu-se que houve dificuldades no uso do recurso computacional, em manipular as ferramentas de ajuste de escalas para visualização do gráfico. Por essa razão, um novo encontro de orientação foi agendado.

Na ocasião do novo encontro, C1(C4) chegou com antecedência e iniciou uma conversa com a professora sobre dificuldades do grupo em fazer o esboço do gráfico, do modelo por eles obtido, usando recurso computacional. Percebendo isso, a professora mostrou a C1(C4) o recurso de ajustar a janela de visualização com intervalos diferentes em cada eixo. Quando C1(B4) e C1(C4) chegaram, perceberam que a dificuldade com a visualização havia sido resolvida:

> C1(A4): Ah, vocês conseguiram fazer o gráfico?
>
> C1(C4): Na verdade ela (professora) me ensinou como é que era pra ver.
>
> Professora: É só manipular a janela de visualização.
>
> C1(C4): Ela conseguiu manipular a escala do gráfico.
>
> C1(A4): Ahhh, entendi.
>
> Professora: É só mexer na escala.
>
> C1(A4): Ah, que pena, a gente colou no nosso trabalho (Figura 5.5) e ainda fizemos um risco que não era pra fazer...

Com o grupo todo reunido, a revisão do modelo passou a ser discutida. O trecho da conversa que segue indica que os alunos procuraram identificar o problema antes de conversar com a professora.

> C1(A4): Vocês conseguiram?!... você sabe o que aconteceu a hora que eu tentei fazer isso? Eu cheguei num somatório...
>
> Professora: Sim, daí você quis fugir do somatório?
>
> C1(A4): Não, aí eu não consegui fazer.
>
> Professora: Na verdade, olha só o que aconteceu, não sei se você fez algum outro encaminhamento antes desse..., disso aqui (desenvolvimento apresentado à turma)? Porque aqui não tem somatório, ...onde você viu somatório (para C1(A4))?
>
> C1(A4): Hoje eu tentei fazer. Eu fiquei tentando...
>
> Professora: Ah tá, o que você fez para...
>
> C1(A4): Ah, eu fui colocando um, igual você falou, fui colocando pra dois...
>
> Professora: Você foi substituindo do passo anterior para o passo seguinte?
>
> C1(A4): É, mas deu um somatório...
>
> Professora: É isso aí... Em que somatório você chegou?
>
> C1(A4): Eu cheguei no seis vírgula oito vezes dez à décima, vezes o somatório disso elevado a t, onde t varia de 1 a infinito, no caso.
>
> Professora: É isso aí, mais ou menos o que eu estava fazendo aqui olha...
>
> C1(C4): É, mais ou menos isso.
>
> Professora: ... mas eu não substituí o k, né, deixei aqui a taxa: um vírgula zero, zero, um, sete e tal, e chega nisso... mais ou menos isso que você..., então tá.

C1(A4): É, isso mesmo.

Professora: Então tá. Então é o que eu estava falando pro C1(C4)... Na verdade o que foi problemático aqui? Até aqui (apontando o material dos alunos) tudo bem. Aqui vocês estavam fazendo a substituição, é..., deixando indicado o lixo e a população: lixo no tempo um, população no tempo dois. Aqui, no próximo termo você não substituiu o lixo, mas substituiu a população...

C1(A4): humm

Professora: ... né? Então, o ideal é: você não quer encontrar um modelo que sirva..., que seja, que fique só em função do tempo? Então substitui o lixo também. Quem que é o lixo no tempo um? É tudo o que está aqui! Então você vai substituir tudo isso nessa expressão, e aí vai perceber que vai dar para por termos comuns em evidência. No caso o termo comum três, meia, cinco, população vezes a taxa de não reciclagem, e aí vai começando a aparecer essa soma...

Assim, após revisão, o grupo encaminhou outro material, com a resolução da equação e o modelo obtido:

$$
\begin{aligned}
L_t &= L_{t-1} + 6,8 \times 10^{10}(1+k)^t && (5.8)\\
L_0 &= 0\\
L_1 &= L_0 + 6,8 \times 10^{10}(1+k)^1\\
&= 6,8 \times 10^{10}(1+k)\\
L_2 &= L_1 + 6,8 \times 10^{10}(1+k)^2\\
&= 6,8 \times 10^{10}(1+k) + 6,8 \times 10^{10}(1+k)^2\\
&= 6,8 \times 10^{10}(1+k)(1+(1+k))\\
L_3 &= L_2 + 6,8 \times 10^{10}(1+k)^3\\
&= 6,8 \times 10^{10}(1+k)(1+(1+k)) + 6,8 \times 10^{10}(1+k)^3\\
&= 6,8 \times 10^{10}(1+k)(1+(1+k)+(1+k)^2)\\
&\vdots\\
L_t &= 6,8 \times 10^{10}(1+k)\sum(1+k)^{t-1} && (5.9)
\end{aligned}
$$

Para resolver o somatório temos:

$$S_t = a_1\frac{1-q^t}{1-q}, \tag{5.10}$$

$$S_t = a_1\frac{1-(1+k)^t}{1-(1+k)} \Leftrightarrow S_t = a_1\frac{1-(1+k)^t}{-k} \tag{5.11}$$

onde q é a razão da sequência $q = (1+k)$

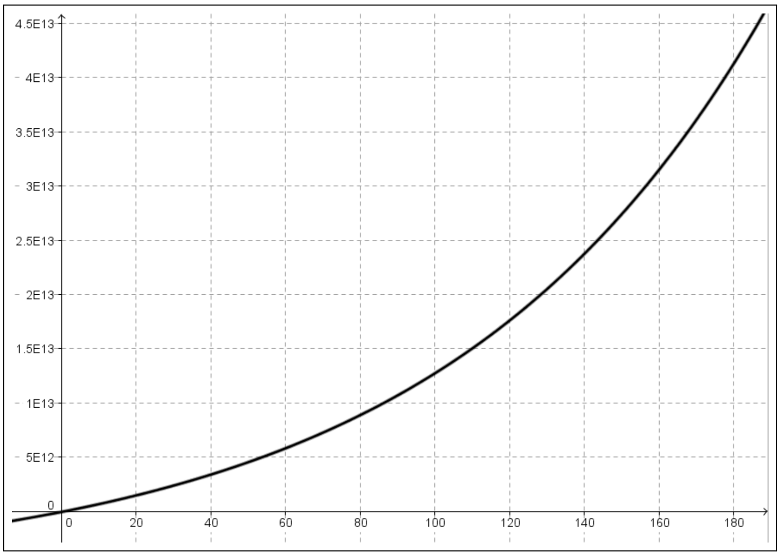
Substituindo em L_t , temos:

$$L_t = 6,8 \times 10^{10} \left[\frac{1,0117 - 1,0117^t}{-0,0117}\right] \tag{5.12}$$

Por fim, o trabalho foi concluído com as seguintes considerações do grupo.

Interpretação e validação: Podemos ver graficamente (Figura 5.6) que conforme se passa o tempo a quantidade de lixo vai aumentando muito, cada vez mais. Realmente, pois se produzimos uma mesma quantidade de lixo por pessoa anualmente, e temos que a quantidade de pessoas só aumenta, ou seja, a quantidade de lixo aumenta também e ainda continuamos reciclando a mesma quantidade. Então, só tende a aumentar e cada vez mais a quantidade de lixo.

Figura 5.6: Representação gráfica do acumulo de lixo com o passar do tempo.



Fonte: relatório final do grupo.

Percebemos que se não começarmos a produzir menos lixo e reciclar mais, o nosso futuro e dos nossos descendentes, vai ter um sério problema para dar fim ao lixo, pois hoje já está bem difícil, nas grandes cidades já não tem lugar para o lixo.

No Capítulo 6 conduziremos análises referentes aos dados desse grupo, obtidos durante o desenvolvimento desta atividade de modelagem.

5.2 Contexto 2: Curso de Curta Duração

A unidade de ensino em questão foi pensada considerando que dispúnhamos de um curto espaço de tempo e que assumimos o compromisso de abordar a temática, título do minicurso, *atividades de modelagem matemática com uso de recursos tecnológicos*. O espaço físico destinado ao minicurso foi um laboratório de informática com uma máquina para cada participante, todas conectadas a *Internet*. Os *softwares* que seriam utilizados, todos livres, foram instalados previamente e estavam disponíveis.

Levamos em conta, ao organizar a UEPS, que até o momento do minicurso os participantes do evento tiveram acesso à palestra intitulada "A pesquisa em Sala de Aula: construindo conceitos matemáticos por meio da Modelagem Matemática", bem como às mesas temáticas denominadas "Modelagem Matemática no Ensino Superior: Licenciaturas e Bacharelados" e "Modelagem Matemática na Educação Básica", que constavam na programação do evento. Procuramos estruturar o material de ensino de modo que atendesse às características de uma UEPS (seção 4.4), de acordo com os seguintes aspectos sequenciais:

Levantamento de conhecimentos prévios: um formulário *online* (seção B.1.1, Apêndice B), que permite a consulta em tempo real das respostas enviadas pelos participantes, foi pensado para obter informações como: formação acadêmica e atuação profissional, o conhecimento sobre a modelagem matemática e a familiaridade com algumas tecnologias. As respostas foram projetadas e comentadas, de modo que permitiu uma visão do perfil da turma quanto aos ítens consultados.

Situação Inicial: uma atividade de modelagem (*orçamento familiar*), que havia sido desenvolvida com alunos de um curso de graduação (ver Apêndice A.3), foi exibida e discutida com os participantes com o propósito de ilustrar a condução de uma atividade de modelagem em que alguns recursos tecnológicos haviam sido utilizados (*internet* como fonte de dados, vídeo, *software* gráfico, simulação via planilha eletrônica). Nessa ocasião, ao passo que a atividade foi apresentada, conceitos apontados durante o evento puderam ser retomados, ou exemplificados a partir da referida atividade.

Modelando uma situação-problema: os participantes foram convidados a pensar sobre o lançamento de um corpo com o objetivo de matematizá-lo. Levados a pensar nessa abordagem em ambientes educacionais, foram discutidas diferentes situações com o mesmo tipo de comportamento que poderiam ser problematizadas. Por fim, um vídeo de curta duração mostrando o lançamento de uma bola, produzido pela professora pesquisadora a partir de uma câmera digital, foi exibido. A fim de iniciar o processo de modelagem de forma que os participantes diferenciassem as etapas e pudessem compreendê-las, foi proposto um momento de conceitualização sobre modelagem matemática segundo a perspectiva da professora pesquisadora. Em seguida, a professora sugeriu usar o recurso da *videoanálise* a partir do qual seria desenvolvida a atividade de modelagem e apresentou o *software* que mediaria o processo. Retomando a problemática, a atividade se desenvolveu em um espaço de interação entre a professora e os participantes.

Nova atividade de modelagem: embora a primeira atividade modelada tenha ocorrido em colaboração com os participantes, uma nova situação (*percurso de um carrinho de fricção*) foi proposta com o intuito de possibilitar maior envolvimento de cada um com o fazer modelagem, oportunizando também que tivessem maior autonomia com o recurso da *videoanálise*. O intuito dessa nova proposta era oferecer oportunidade para que o processo de modelagem, assim como o recurso tecnológico, pudessem ser revisitados e que as dúvidas pudessem ser evidenciadas e discutidas pela mediação da professora ou mesmo de outros colegas.

Finalizando a unidade: de acordo com a temática do minicurso, ao final do mesmo, considerações acerca do processo de modelagem e de características que tornam a modelagem uma abordagem para o processo de ensino e aprendizagem nos ambientes educacionais, bem como sobre aspectos relativos ao uso de tecnologias foram discutidos. Na ocasião, um espaço foi aberto para que fosse dada sequência a essas discussões ou mesmo que outras fossem iniciadas, por meio da *Internet*, via *blog*, e-mail ou rede social.

Avaliação da aprendizagem: considerando a natureza da unidade de ensino, os participantes foram convidados a responder a um segundo formulário eletrônico (seção B.1.2, Apêndice B) ao final do minicurso, para tanto, o *link* do documento foi enviado a todos os participantes por e-mail. Os mesmos também foram convidados a entrar em contato a qualquer tempo para expor dúvidas, solicitar material de apoio, conforme a necessidade de cada um. Sendo assim, não houve avaliação somativa, apenas formativa, na medida em que os participantes se expressavam verbalmente (registrado por meio de gravação audiovisual) ou por meio eletrônico.

Êxito na UEPS: A unidade de ensino poderá ser considerada bem sucedida se for possível evidenciar captação de significados pelos participantes, bem como se os mesmos demonstrarem compreensão do conteúdo proposto.

Vamos descrever as atividades desenvolvidas nesse Contexto na íntegra, pois, por se tratar de um curso de curta duração apenas duas atividades de modelagem foram conduzidas. Usamos recurso multimídia a apresentação de todo o material organizado para o minicurso e as atividades foram conduzidas conforme descrição que segue.

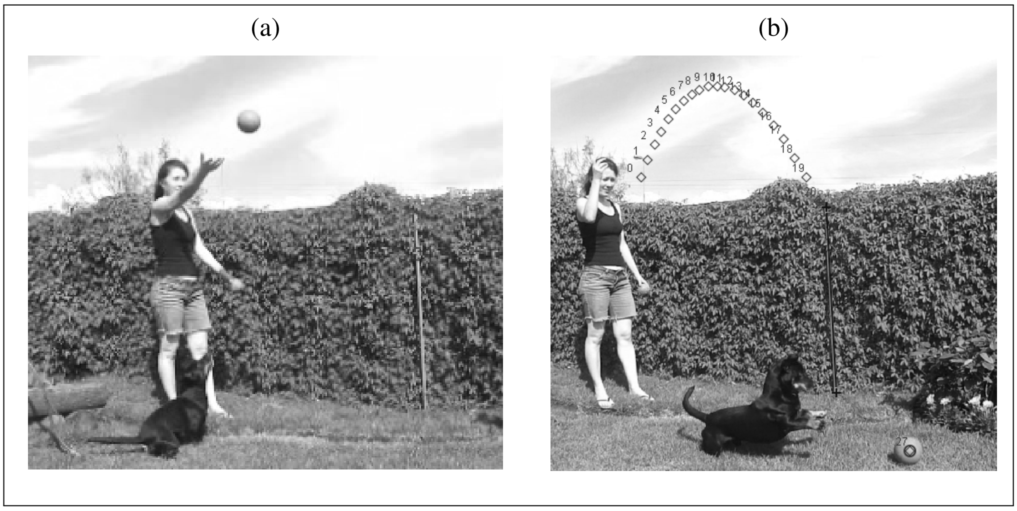
5.2.1 Atividade 1: Lançamento de um Corpo

Introduzimos a situação que nos propusemos a modelar em conjunto com os participantes pedindo que considerassem a simples ação de lançar uma bola para o alto e à frente. Um vídeo que captou o movimento desde o lançamento da bola até seu contato com o chão foi exibido aos participantes com o intuito de fazê-los pensar sobre as relações físicas envolvidas, visando a matematização do movimento desse corpo, como indica a Figura 5.7 (a).

Podemos questionar se essa situação pode ser problematizada, então mencionamos outras ações que remetem ao mesmo tipo de movimento, como o lançamento da uma bola à cesta no jogo de basquete ou o percurso de um projétil atirado por uma arma de fogo.

Estas são situações que podem envolver uma problematização relevante, como o estudo de estratégias de jogo em um campeonato visando o bom desempenho de uma equipe perante outra, ou no trabalho da Polícia Científica.

Figura 5.7: Lançamento de um corpo



Fonte: imagem gerada pela autora por meio da captura de tela durante exibição do vídeo.

Antes de iniciar a modelagem propriamente, dedicamos algum tempo para falar sobre a modelagem matemática como alternativa pedagógica, bem como as fases da modelagem, a estrutura de uma atividade de modelagem, etc. Para que essas informações fossem melhor compreendidas, apresentamos uma atividade de modelagem de um tema previamente desenvolvido com os alunos do Contexto 1, o *orçamento familiar* (ver Apêndice A.3).

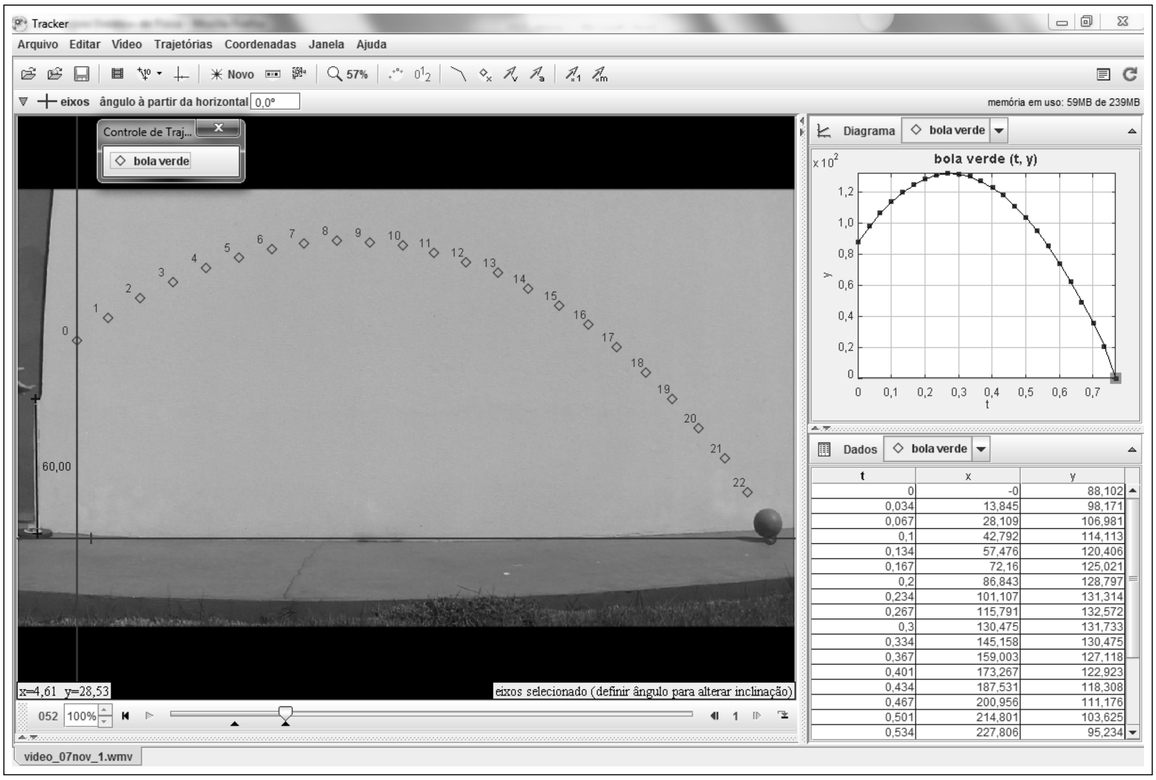
Voltando a situação de interesse, mencionado que a partir de um vídeo seriam tomadas as medidas, ou os dados, que orientariam a modelagem e que faríamos uso de um *software* de videoanálise, o *Tracker: video analysis and modeling tools*, que é gratuito e possibilita a videoanálise e construção de modelos de fenômenos físicos. Por ser disponível no formato *.jnlp* (Java Network Launching Protocol) é considerado multiplataforma (HEIDEMANN, ARAUJO e VEIT, 2012).

Algumas características do programa foram mencionadas, tais como: após carregar um vídeo, que pode ser produzido de forma simples, com qualquer câmera digital, por exemplo, o programa oferece opções de selecionar um conjunto de quadros para ser analisado. Neste caso, o programa apresenta um *frame* por vez e em cada um deles destaca aspectos como, por exemplo, a posição de um corpo em relação a dado referencial. A partir daí exibe um conjunto de dados numéricos referentes às variáveis de interesse para a obtenção do modelo. Dentre os atributos da videoanálise com o *Tracker* estão: conexão entre experiências escolares e experiências cotidianas; múltiplas representações dos fenômenos em uma mesma tela: vídeo, tabela de dados, gráficos, equações; manipulação dos referenciais e compreensão da influência das escalas na interpretação de fenômenos físicos; análise de mais de um objeto no mesmo sistema, simultaneamente; e, realização de experimentos com baixo custo. Estes elementos auxiliam na compreensão de conceitos matemáticos e não-matemáticos.

Desse modo, alguns critérios para a produção do vídeo foram mencionados, visando a captura mais fiel possível do cenário real. Dentre outros pontos discutidos com os participantes a partir da observação do vídeo destacamos os seguintes: definir os objetivos previamente, para que o filme expresse os aspectos relevantes; escolher ambiente com contrastes, sem excesso de iluminação, para que o ponto de interesse se destaque no cenário; estabelecer medida de referência no cenário, a partir da qual as escalas sejam definidas; posicionar a câmera sem movimentá-la, com a perspectiva viável para a análise; não usar *zoom* digital, que pode influenciar na definição das escalas.

A Figura 5.7 nos ajuda a avaliar que o referido vídeo apresenta falhas, como na direção de lançamento da bola, em relação ao muro vertical, onde se encontra um bastão que serviria de parâmetro para a definição das escalas pelo programa. O adequado seria que o lançamento fosse paralelo ao muro verde, o mais próximo possível do mesmo, como será mostrado adiante. A não adequação no planejamento do vídeo pode influenciar na veracidade do modelo. Assim, outro cenário em que se reproduziu a mesma ação em condições mais adequadas para a videoanálise foi produzido visando a obtenção do modelo matemático do movimento da bola (Figura 5.8).

Figura 5.8: Movimento da bola registrado pelo *Tracker*.



Fonte: imagem gerada pela autora por meio da captura de tela do *Tracker*.

Para o entendimento da situação, o vídeo foi exibido repetidas vezes de modo que o movimento da bola fosse visto sempre nas mesmas condições. Agora, seguindo a estrutura para as fases da modelagem matemática sugeridas por Almeida, Silva e Vertuan (2012) (seção 4.2) indicamos como se desenvolveu a atividade.

i) Situação inicial: Lançamento de uma bola para o alto à frente em condições de tempo bom e sem ventos. O lançamento é feito de modo que se possa observar o trajeto da bola desde o início até que a mesma toque a calçada plana, paralela à parede vertical.

ii) Fase de inteiração Os dados obtidos com o *Tracker* são representados na Figura 5.8. Durante o percurso da bola no ar o programa registrou, em intervalos iguais de tempo, a posição da bola que é representada em vermelho. Simultaneamente o *Tracker* ilustrou o gráfico, representando a variação da altura da bola em relação ao tempo e uma tabela com os valores de tempo em segundos e altura em centímetros. Para a obtenção dos dados foi necessário definir um sistema referencial. Para tanto, algumas considerações foram realizadas pela professora e pelos participantes do minicurso:

> Professora: Como a calçada é meu plano aqui, eu não poderia colocar a bola exatamente no chão para fazer o lançamento... ela será lançada um pouco mais acima...
>
> C2(P20): Desculpa, mas quando tu... a bola já não foi lançada lá em cima? Eu já colocaria o eixo lá em cima...
>
> Professora: Aqui? [levando o sistema de eixos para a posição inicial do percurso da bola, por meio do software]
>
> C2(P20): Não, mais pra baixo, de onde tu lançou a bola.
>
> [...]
>
> Professora: C2(P20), vou colocar o referencial aí [realizando o deslocamento do eixo] observe... o que que acontece?
>
> C2(P20): Tá, mas a altura da sua bola é lá de cima... ah, entendi.
>
> Professora: Não, fala o que você percebeu aqui, o que acontece com o passar dos quadros? [indicando a origem do sistema cartesiano] O seu ponto zero é aqui né? Então a bola saiu daqui, ela subiu e...?
>
> C2(P20): ... ela desceu!
>
> Professora: Ok, então vai ter um momento que você vai ter valores negativos para altura dessa bola, concorda?
>
> C2(P20): Aham.
>
> Professora: Podemos trabalhar com esse referencial?
>
> [Silêncio]
>
> Professora: ... nós podemos, desde que a gente saiba interpretar os resultados negativos que a gente vai ter para a altura dela...
>
> [Participantes concordam]

Assim, foi considerado inicialmente o nível da calçada coincidindo com o eixo horizontal e o tempo zero como o primeiro quadro em que a bola não está na mão de quem a lançou. Além disso, foi necessário estabelecer uma medida conhecida no cenário para servir de parâmetro ao sistema, o bastão azul na Figura 5.8 indica a altura correspondente a 60 centímetros, do desnível da parede.

Definição de um problema: Durante a discussão com os participantes definiu-se que uma problematização interessante seria relacionada ao estudo do percurso da bola no ar. Assim, deu-se sequência à atividade a fim de determinar a relação entre altura atingida pela bola no decorrer do tempo, durante o período em que é lançada até atingir o chão.

iii) Matematização e resolução:

a) Hipóteses: pela observação do movimento da bola durante o tempo que permanece no ar podemos estabelecer algumas hipóteses.

H_1: não será considerada a resistência do ar;

H_2: a bola sobe até atingir uma altura máxima, a partir da qual começa a cair, de modo que a bola atinge alturas de mesmo valor, a partir daquela do lançamento, tanto na subida quanto na descida, em tempos equidistantes em relação àquele da altura máxima.

A curva de tendência indicada no gráfico nos leva a supor outra hipótese:

H_3: o modelo que descreve a variação da altura no decorrer do tempo é parabólico.

b) Variáveis

t: tempo, em segundos.

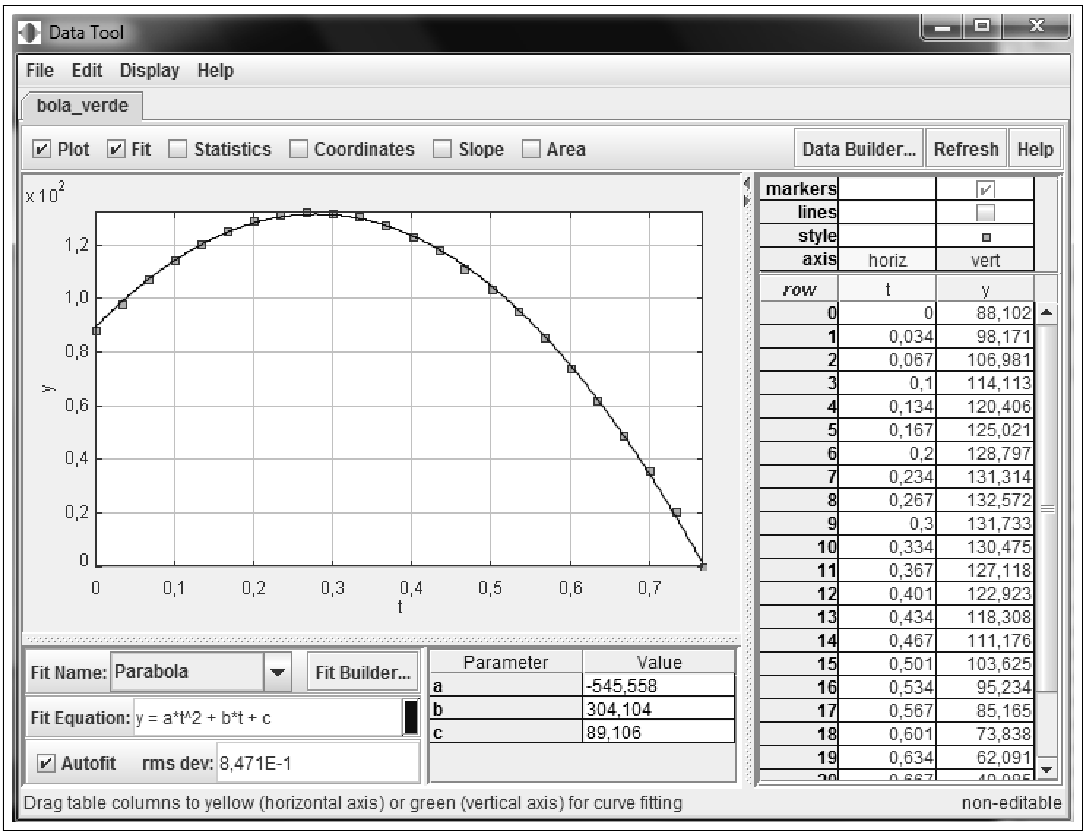
y: altura atingida pela bola, em centímetros, no instante de tempo t.

c) Modelo Matemático

Levando em conta a hipótese de que o modelo é parabólico e as variáveis definidas, podemos escrever a expressão: $y = at^2 + bt + c$, em que a, b e c são parâmetros a definir a partir da situação estudada e do referencial adotado para a videoanálise.

Usando a ferramenta *Data Tool* temos algumas opções de ajuste de curvas. A Figura 5.9 mostra a opção pela parábola, que está representada na cor azul. Os parâmetros a, b e c são determinados pelo *software*, de modo que $y = -545,558t^2 + 304,104t + 89,106$ é o modelo que atende as hipóteses e representa as alturas da bola em centímetros no decorrer do tempo, em segundos.

Figura 5.9: Ferramenta de análise disponível no *Tracker*, para os dados coletados e representados a partir do vídeo.



Fonte: imagem gerada pela autora por meio da captura de tela do *Tracker*.

iv) Interpretação e validação

A validação do modelo implica em comparar os resultados fornecidos pelo modelo com os reais. Se compararmos graficamente os pontos em vermelho com a curva em azul, podemos concluir que a hipótese de que o comportamento é descrito por uma parábola pode ser confirmada. Para melhor visualizar a diferença dos resultados o cálculo do percentual de erro é exibido na Tabela 5.2, com os valores coletados na videoanálise e aqueles obtidos pelo modelo.

Observamos que, o erro percentual é bem pequeno, exceto nos três últimos valores da tabela. A diferença maior nesses pontos pode ter ocorrido devido à marcação manual do *corpo de massa* denominado de *bola verde* ou mesmo devido a uma leve deformação na imagem captada pela câmera. Porém, em termos de ajuste podemos afirmar que a parábola representa bem o fenômeno em estudo.

Para corroborar a hipótese da trajetória parabólica e o modelo obtido, podemos nos valer dos conceitos da Física, como o Princípio da Independência dos Movimentos, de Galileu (a exemplo, pode-se consultar: http://177.71.183.29/acessa_fisica/subsites/359/bin-release/AcessaFisica.html).

Tabela 5.2: Comparativo dos dados obtidos pelo *Tracker* e os obtidos a partir do modelo matemático

t (tempo)	y (dados coletados)	y (valores do modelo)	Erro (%)
0,000	88,102	89,106	-1,140
0,034	98,171	98,815	-0,656
0,067	106,981	107,032	-0,048
0,100	114,113	114,061	0,046
0,134	120,406	120,060	0,287
0,167	125,021	124,676	0,276
0,200	128,797	128,104	0,538
0,234	131,314	130,394	0,701
0,267	132,572	131,409	0,877
0,300	131,733	131,237	0,377
0,334	130,475	129,816	0,505
0,367	127,118	127,232	-0,090
0,401	122,923	123,325	-0,327
0,434	118,308	118,328	-0,017
0,467	111,176	112,142	-0,869
0,501	103,625	104,527	-0,870
0,534	95,234	95,928	-0,729
0,567	85,165	86,142	-1,147
0,601	73,838	74,816	-1,325
0,634	62,091	62,618	-0,849
0,667	49,085	49,231	-0,297
0,701	35,660	34,195	4,108
0,734	20,557	18,396	10,512
0,767	1,510	1,408	6,755

v) Situação Final: Modelo obtido, é hora de voltar à situação inicial e refletir sobre em que medida ele representa a situação-problema. Neste caso, ele descreve a altura atingida pela bola no decorrer do tempo, durante o período em que é lançada até atingir o chão. Podemos explorar o modelo, por exemplo, para determinar o comportamento da bola a qualquer tempo, assim como o tempo total de permanência da bola no ar.

Sendo y a altura da bola e considerando que quando a bola atinge o chão $y = 0$, podemos calcular a que tempo isso ocorreu. Assim, de $-545,558t^2+304,104t+89,106 = 0$ vem $t_1 = -0,212$ e $t_2 = 0,769$ segundos, em que t_1 e t_2 são as raízes da equação. Como a bola não foi lançada do chão, o valor de t_1 pode ser desconsiderado, pois inicialmente ($t = 0$) a bola estava a aproximadamente $89,106$ cm do chão, ou seja, para $t = 0$ e $y = 89,106$.

A Tabela 5.2 permite estimar a altura máxima atingida pela bola por observação dos valores, porém, o modelo auxilia na determinação precisa deste valor. Para isso, uma alternativa consiste em encontrar o vértice $V = (t_v, y_v)$ do gráfico correspondente à função quadrática. Comumente se recorre à memorização para lembrar a fórmula onde $t_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, mas, outra possibilidade é obter o valor da abscissa (t_v) calculando o ponto médio de t_1 e t_2, a partir do qual, por substituição no modelo, chega-se a y_v. Embora o resultado $t_1 = -0,212$ não seja considerado em termos da situação em estudo, matematicamente faz sentido usá-lo para o propósito de obter o tempo em que a bola atinge a altura máxima (t_v) como valor médio dele e de $t_2 = 0,769$. O resultado que se obteve indicou que a bola atingiu altura máxima no tempo $t_v = 0,278$ segundos, sendo esta de $y_v = 131,484$ centímetros.

Outro aspecto interessante que a videoanálise proporciona é a possibilidade de provocar alterações no referencial inicialmente adotado (posicionamento dos eixos coordenados) para discutir as alterações provocadas nos parâmetros do modelo.

Nesta atividade a hipótese de que a trajetória da bola é parabólica poderia vir da influência visual do movimento, dessa forma, foi proposta outra situação para que esse aspecto pudesse ser observado e discutido.

5.2.2 Atividade 2: Percurso de um carrinho de fricção

A atividade proposta à seguir teve o intuito de incentivar os participantes a serem mais autônomos em relação ao desenvolvimento da modelagem, de modo que explorassem efetivamente o recurso da videoanálise.

Observando o movimento do carrinho de fricção, desenvolva uma atividade de modelagem com auxílio da videoanálise. Assista ao vídeo que registrou o movimento de um carrinho de fricção e depois o abra com o Tracker para desenvolver a atividade.

A Atividade 2 foi desenvolvida parcialmente com os participantes do minicurso. Devido ao tempo, nem todas as fases de uma atividade de modelagem matemática foram contempladas durante o curso. No entanto, os encaminhamentos referentes à fase de inteiração e de matematização possibilitaram-nos vislumbrar interpretações referentes ao fenômeno em estudo. Tal atividade consiste no estudo do percurso por um carrinho de fricção de acordo com sua desaceleração. Para o entendimento da situação, o carrinho foi manipulado na presença de todos, embora tenha sido utilizado um vídeo para que o movimento fosse visto repetidas vezes sob as mesmas condições. Destacamos cada uma das fases na qual ocorreu e como ocorreu o desenvolvimento da atividade.

i) Situação inicial: Percurso de um carrinho de fricção. Inicialmente, na sala de aula, o carrinho foi posto em funcionamento de modo que os participantes compreendessem a situação a ser problematizada e posteriormente um vídeo de curta duração ilustrando o mesmo movimento foi exibido de modo a se observar o percurso, desde o início até o repouso do mesmo (Figura 5.10).

i) Fase de inteiração: Pensar sobre o modelo que representaria a nova situação, apenas pela observação do movimento, desencadeou um diálogo entre os participantes e a professora e alguns argumentos surgiram:

Professora: Agora um outro experimento diferente, um carrinho de fricção... fricciono e solto ele. Como vai se comportar o carrinho no decorrer do tempo? Que modelo matemático poderia estar relacionado. Acho que vocês não vão enxergar, mas vou soltar ele aqui [colocou o carrinho em movimento] ele vai, vai embora, mas qual é o comportamento dele no decorrer do tempo?

C2(P9): Ele vai parando.

Professora: Vai diminuindo a velocidade? Óbvio né, vai diminuindo a velocidade. Como que a velocidade vai diminuindo? Como é essa variação? Pensa matematicamente, dá pra você supor algum modelo?

C2(P12): Uma reta.

Professora: É linear?

C2(P19): Pode ser que sim, pode ser que não.

Professora: O que significa ser linear? A cada instante de tempo a redução na velocidade é igual ao instante anterior.

C2(P19): Se houver a aceleração, daí seria quadrática né.

Professora: Será que é quadrática?

C2(P12): Se tivesse aceleração.

Professora: Vamos pensar assim, você tem um carro, ele está a uma determinada velocidade e a partir de um determinado ponto, na plaquinha do quilômetro cem da rodovia, não acelera mais, deixa ele ir por conta, ateeeeeé parar, imagina que seja um plano, bonitinho, pra ficar mais simples o modelo, né. Como vai ser o deslocamento em relação ao tempo desse móvel até ele parar?

C2(P12): linear.

Professora: Linear? Então, essa é uma hipótese.... Nós temos aqui um videozinho, ilustrando isso pra gente, para que o *software* de videoanálise ajude vocês a verificar essa hipótese inicial de que é linear... que é uma reta que representa esse movimento.

[...]

C2(P19): a desaceleração é constante, mas a velocidade acho que...

C2(P12): sim, mas...

Professora: ela também vai sofrer a força da gravidade... vai ser um movimento uniformemente variado...

C2(P12): Ia ser linear se você não usasse atrito.

[...]

Professora: Então, os dois modelos, o mesmo modelo matemático em duas situações diferentes, né, e o mesmo modelo descreve as duas situações. E é interessante que o aluno veja... porque senão ele pode ficar influenciado pelo movimento. O movimento é parabólico, eu tô vendo isso... o carrinho anda em linha reta, então o modelo é linear? Quer dizer: não é uma coisa imediata.

C2(P12): Ah não, mas é que eu pensei no atrito desprezado, ai seria linear.

Professora: Então, uma hipótese que você colocasse ia influenciar sim no modelo.

C2(P12): É.

Professora: tem várias coisas assim..., a se pensar.

Foi proposto então que a obtenção dos dados fosse conduzida por meio do *Tracker*, no percurso do carrinho desde o início do movimento até o seu repouso (Figura 5.10).

Figura 5.10: Carrinho de fricção em movimento

Fonte: Imagem produzida pela autora por meio da captura de tela do *Tracker*, durante a realização da atividade.

Definição de um problema: determinar a relação entre distância percorrida pelo carrinho e o tempo gasto para percorrê-la, durante o período em que inicia o movimento até obter novamente o repouso.

iii) Matematização e resolução:

a) Hipóteses: Pela observação do movimento do carrinho durante o percurso e a análise do gráfico apresentado no *Tracker* (Figura 5.11) podemos estabelecer algumas hipóteses iniciais:

H_1: não será considerada o atrito com a superfície;

H_2: o modelo que descreve a variação da distância no decorrer do tempo é linear.

b) Variáveis: t : tempo, em segundos; y : distância percorrida pelo carrinho, em centímetros.

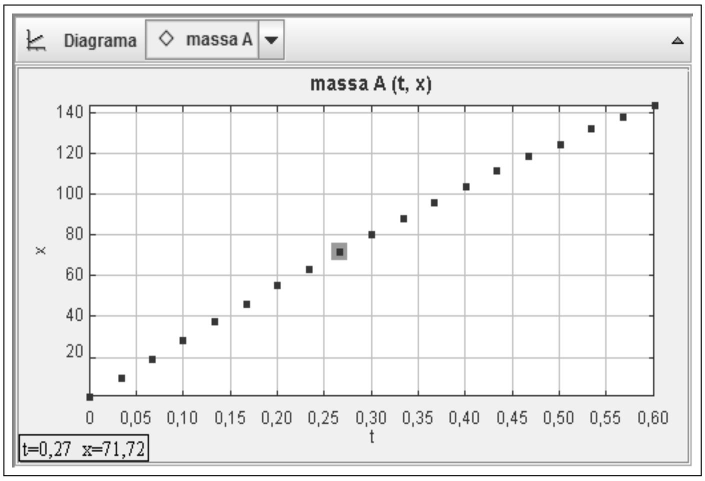
c) Modelo Matemático

Não houve consenso, a princípio, sobre o modelo que poderia descrever o movimento, assim, a videoanálise passou a influenciar na definição pelo modelo. Durante o percurso do carrinho o programa permitiu registrar, em intervalos iguais de tempo sua posição (Figura 5.11).

Simultaneamente o *Tracker* ilustrou o gráfico, representando a variação da distância do carrinho em relação ao tempo e uma tabela com os valores de tempo, em segundos e distância, em centímetros. A medida que os pontos iam sendo marcados no gráfico a hipótese H_2 foi sendo refutada e uma nova hipótese foi considerada - H_3: o modelo que descreve a variação da distância no decorrer do tempo é quadrático.

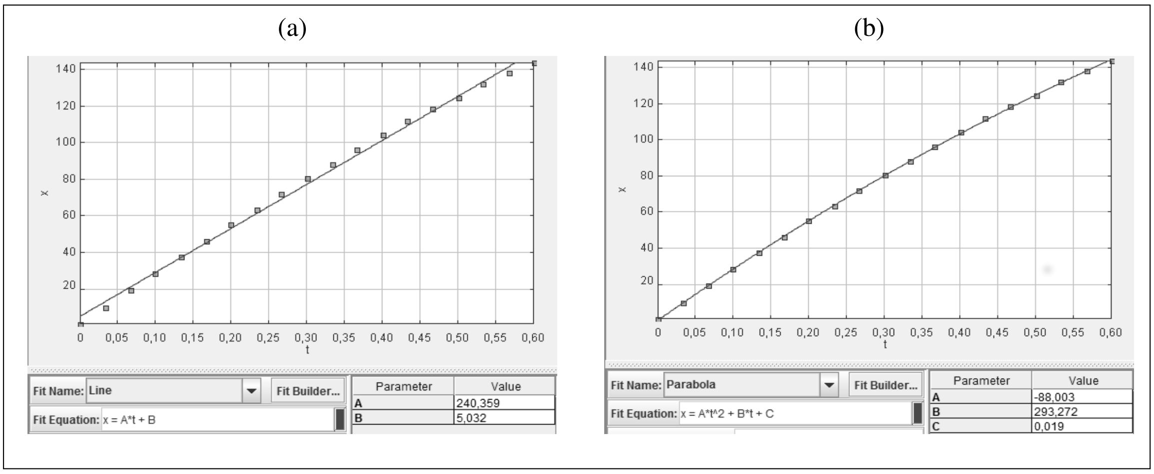
A ferramenta de análise foi usada para testar as Hipótese H_2 e H_3 e a Figura 5.12 ilustra o comparativo dos ajustes linear (a) e quadrático (b).

Figura 5.11: Dados coletados e representados a partir da videoanálise



Fonte: Imagem produzida pela autora por meio da captura de tela do *Tracker*, durante a realização da atividade.

Figura 5.12: Ferramenta de análise disponível no *Tracker*, para os dados coletados e representados a partir do vídeo



Fonte: imagem gerada pela autora por meio da captura de tela da ferramenta *data tools* do *Tracker*.

Desse modo, levando em consideração a hipótese de que o modelo é quadrático e as variáveis definidas, podemos escrever a expressão: $y = at^2 + bt + c$, em que a, b e c são parâmetros obtidos pelo ajuste a partir do referencial adotado para a videoanálise. A Figura 5.12 (b) apresenta os parâmetros que permitem escrever $y = -88,003t^2 + 293,272t + 0,019$.

Embora a atividade não tenha perpassado por todas as fases da modelagem como caracterizadas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), seu encaminhamento permitiu vislumbrar um movimento que empiricamente sugere uma função linear, mas que com uma análise por meio do uso da tecnologia vê-se que na realidade é uma função quadrática.

Além de aspectos relacionados à tecnologia como *parceira intelectual*, houve interesse dos participantes quanto a indicação de recursos para edição e conversão de vídeos bem como sobre publicação de materiais *online*. Dessa forma, foi indicado o acesso a um *blog* (Figura B.1, Apêndice B) que mantemos para questões educacionais onde o material do curso, sugestão de tutoriais e videotutoriais estavam disponíveis ou poderiam ser disponibilizados à medida que fossem solicitados, mesmo em período posterior ao evento. Sugerimos que os participantes mantivessem contato por e-mail ou mesmo pelo *blog*. Mencionamos que estava disponível nesse espaço um breve videotutorial elaborado por nós demonstrando o uso do *software* de videoanálise para uma atividade similar à desenvolvida naquela ocasião.

A possibilidade de comunicação foi estendida para o espaço virtual, de modo que a UEPS não se concluiu ao final do minicurso. Com isso, foi possível ter um retorno dos participantes quanto as atividades desenvolvidas durante o período de encontro presencial, por meio de um levantamento complementar (seção B.1.2, Apêndice B), disponível *online*. Ocorreu também a troca de e-mails para complementação do material e atendimento de dúvidas sobre a segunda atividades de modelagem. Não foi intenção realizar avaliação somativa nessa unidade de ensino, mas, de um modo geral nossa impressão foi positiva sobre os efeitos da organização do material de ensino para a aprendizagem dos participantes.

5.3 CONTEXTO 3: APS DE CÁLCULO NUMÉRICO EM CURSOS DE ENGENHARIA

Nesse Contexto, devemos considerar que diferentes UEPS foram desenvolvidas durante o projeto de ensino *Atividades de Modelagem Matemática no estudo de temas da disciplina de Cálculo Numérico*, proposto como *atividades práticas supervisionadas–APS*. As APS compõe a carga horária da disciplina, embora sejam propostas para que os alunos as desenvolvam em horário extraclasse, conforme seção 2.1.3. Cada aluno participou de apenas uma UEPS, como será explicitado nesta seção.

O professor da disciplina era o responsável pelas aulas presenciais e a pesquisadora, proponente do projeto, atuou como responsável pelo projeto de ensino. O trabalho entre professor e pesquisadora foi colaborativo, de modo que periodicamente ambos trocavam impressões sobre o andamento dos trabalhos, tanto das aulas quanto do projeto.

Como o projeto de ensino, ao qual faremos referência, complementou as atividades da disciplina, entendemos ser adequado mencionar como a disciplina foi estruturada e como as atividades foram desenvolvidas nas aulas regulares. Inicialmente, reconhecemos na proposta do professor responsável pela disciplina, características que correspondem àquelas de um ambiente de ensino potencialmente significativo mediado por recursos tecnológicos (ver plano de ensino da disciplina no Apêndice C).

A disciplina foi conduzida segundo a seguinte organização: as aulas teóricas eram expositivas e permeadas com atividades de resolução de exercícios, algumas vezes envolvendo situações-problema, durante as quais os alunos eram incentivados a participar a fim de esclarecer as dúvidas e contribuir com exemplos e sugestões. Como meios de ensino eram utilizados lousa e equipamento multimídia; as aulas práticas ocorriam no laboratório de informática tornando possível utilizar recursos computacionais para compreensão dos métodos estudados, por meio de *softwares* adequados, sendo que implementações dos métodos estudados eram desenvolvidas pelos alunos usando o *software* Maple; durante as aulas teóricas e práticas o professor oportunizava interpretação e análise do funcionamento de diferentes métodos com animações produzidas por *softwares*; o material das aulas era elaborado com base em diversos referenciais teóricos e disponibilizado aos alunos na página pessoal do professor, onde também poderiam encontrar alguns arquivos para consulta e apoio ao estudo; a avaliação na disciplina se deu ao longo do semestre por meio de questões em que o aluno deveria demonstrar sua compreensão dos conceitos e técnicas estudados em sala de aula e das atividades práticas supervisionadas; os alunos eram orientados a procurar o professor nos horários de permanência a fim de esclarecer dúvidas relacionadas ao conteúdo e buscar orientação para o estudo, além de serem orientados a fazer a vista de prova após a correção, a fim de tomar ciência dos acertos e erros.

Em uma aula regular, no início do semestre letivo, o professor abriu espaço para que o projeto (ver Apêndice C.4) fosse apresentado aos alunos. Esse documento foi disponibilizado a todos na página pessoal da pesquisadora (Figura C.1, Apêndice C) onde também poderiam acessar outras informações referentes ao projeto.

Os estudantes se organizaram em grupos com um, dois ou três componentes, totalizando assim quatorze grupos, que foram acompanhados à medida que procuravam orientação. Periodicamente eram enviados e-mails para os estudantes matriculados na disciplina a fim de lembrá-los das datas de orientação, bem como para enviar sugestões ou responder às dúvidas que eventualmente surgiam. Algumas orientações sobre a avaliação da APS, conforme disponibilizadas aos alunos, constam na sequência.

> A avaliação acontecerá ao longo do segundo semestre letivo de 2012, de acordo com o desenvolvimento das atividades e compreenderá 30% da nota da disciplina. Os trabalhos serão avaliados quanto aos critérios: relevância do tema, abordagem matemática para o problema, resolução do problema matemático, análise dos resultados. Os integrantes do grupo serão avaliados quanto a sua participação no desenvolvimento das atividades.
>
> Conforme exposto no projeto de ensino (disponível em http://pessoal.utfpr.edu.br/adrianaborssoi/aps_cn.html, lembramos que:
>
> - Os temas das atividades de modelagem serão escolhidos por cada grupo, de acordo com seu interesse e, deverão preferencialmente ser relacionadas às áreas de estudo do curso. Porém, a escolha de temas não relacionados com o curso não influencia na avaliação, desde que bem desenvolvidos;
> - As orientações acontecerão ao longo do semestre em encontros presenciais nas dependências da UTPFR Câmpus Londrina e à distância, neste caso por meio da Web. Os horários de orientação serão definidos em comum acordo com cada grupo, de acordo com o cronograma abaixo.
> - Necessariamente as atividades de modelagem devem contemplar métodos numéricos estudados no decorrer do semestre, previstos na ementa da disciplina;
> - Ao final do semestre os grupos deverão entregar uma versão impressa e encaminhar a versão eletrônica ao professor.
> - A avaliação será baseada em informações colhidas durante o desenvolvimento das atividades, não apenas no trabalho final. Desse modo, o grupo como um todo será avaliado, e também cada componente individualmente.

Consideramos que os estudos conduzidos com a finalidade de desenvolver modelagem matemática poderiam compor uma UEPS. Com esse intuito, entendemos que a estruturação da UEPS não poderia ser pensada pela pesquisadora a princípio, sem que os alunos definissem o que iriam estudar. Desse modo, nesse Contexto da pesquisa, cada UEPS foi se desenhando à medida que as atividades dos grupos avançavam. Assim, um cronograma foi organizado para permitir o acompanhamento e orientação dos grupos no decorrer do semestre[2], conforme a Tabela 5.3.

[2]Em decorrência de uma greve que atingiu as universidades Federais, o calendário acadêmico sofreu alteração, assim, o segundo semestre letivo de 2012 ocorreu no período de novembro de 2012 a maio de 2013.

Tabela 5.3: Distribuição das atividades do Projeto de Ensino.

Atividades	**dez**	**jan**	**fev**	**mar**	**abr**	**mai**
Apresentação Projeto	03 e 05	recesso				
1° encontro orientação	de 14 a 21	recesso	de 20 a 28	01		
2° encontro orientação		recesso	de 20 a 28	de 01 a 08		
3° encontro orientação		recesso		de 25 a 28	de 01 a 12	
Orientação via WEB	conforme procura	conforme procura	conforme procura	conforme procura	conforme procura	
Entrega trabalho final		recesso			de 25 a 30	
Divulgação resultados		recesso				06

Duas atividades propostas aos alunos, individualmente, por meio de formulários eletrônicos comporiam todas as UEPS. O primeiro (Apêndice C.1.1), solicitado os alunos que respondessem antes de iniciar o trabalho em grupo, pretendia conhecer o perfil dos alunos participantes com respeito a: familiaridade e interação com a tecnologia, envolvimento acadêmico, conhecimento prévio sobre modelagem matemática, opinião sobre as APS. O segundo formulário (Apêndice C.1.2) foi proposto ao final, com o intuito de avaliar as atividades do projeto de ensino. Neste, os alunos poderiam se expressar em relação a pertinência do projeto, a orientação da professora, seu entendimento sobre modelagem matemática, o uso de recursos tecnológicos, dificuldades com o processo, sua autoavaliação e avaliação dos colegas de grupo.

Nesta seção, faremos a descrição de duas unidades de ensino que serão objeto de análise no próximo capítulo. Optamos por dois grupos que se envolveram com o projeto ao longo do semestre e cumpriram a meta proposta. Um grupo interagiu mais com a professora, foi mais dependente de orientação, enquanto o outro foi mais autônomo. Os dois grupos foram escolhidos dentre outros em condições similares quanto ao desenvolvimento da atividade proposta. As atividades de modelagem dos demais grupos serão caracterizadas e brevemente descritas no Apêndice C. As descrições das atividades são baseadas no relatório final dos referidos grupos e nos registros gerados a partir da interação dos alunos com a professora nos encontros de orientação ou na comunicação por meio eletrônico.

A Tabela 5.4 abaixo mostra a relação dos títulos dos trabalhos dos grupos, a identificação de cada grupo, bem como a identificação de cada componente do grupo.

Tabela 5.4: Os títulos das atividades de modelagem dos grupos.

Grupos	Alunos	Título
G1	C3(A1), C3(B1)	Emissão de poluentes por veículos leves em Londrina.
G2	C3(A2), C3(B2), C3(C2)	Suspensão em cerâmica.
G3	C3(A3), C3(B3)	Temperatura da cidade de Londrina nos últimos anos.
G4	C3(A4), C3(B4)	Modelagem da qualidade da água em uma bacia hipotética
G5	C3(A5), C3(B5)	Tratamento de efluentes: modelagem de lagoa anaeróbia.
G6	C3(A6), C3(B6), C3(C6)	Modelagem matemática do descarregamento de capacitor
G7	C3(A7)	Construção de algoritmo para interpretação da transição de fase de segunda ordem.
G8	C3(A8), C3(B8), C3(C8)	Modelo matemático sobre o consumo de energia elétrica pela variação da temperatura.
G9	C3(A9), C3(B9), C3(C9)	Projeção de emissões de gases empregando métodos matemáticos.
G10	C3(A10), C3(B10), C3(C10)	Análise de circuitos elétricos.
G11	C3(A11), C3(B11), C3(C11)	A degradação do polipropileno
G12	C3(A12), C3(B12), C3(C12)	Comparação entre emissões de poluentes veiculares: gasolina, etanol, flex gasolina e flex etanol no estado de São Paulo.
G13	C3(A13), C3(B13), C3(C13)	Análise do arrasto em tubo de água.
G14	C3(A14), C3(B14), C3(C14)	Estimativa e projeção do consumo de água por alunos de graduação em engenharia no Câmpus Londrina da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

5.3.1 UEPS para o estudo de Ajustes de Curvas associado à Atividade de Modelagem Matemática sobre Suspensão em Cerâmica

Esta unidade de ensino corresponde ao Grupo 02, composto pelas alunas C3(A2), C3(B2) e C3(C2), do curso de Engenharia de Materiais. O método numérico de referência nessa unidade de ensino não havia sido estudado na disciplina, embora pertinente à ementa. Com o desenvolvimento do trabalho houve forte interação entre o grupo e deste com a professora, o que resultou na disponibilidade de dados relevantes para serem analisados.

Essa UEPS pode ser expressa de acordo com os seguintes aspectos sequenciais:

Reconhecimento do tópico de estudo: A definição da problemática e a natureza dos dados conduziram ao estudo de Ajuste de Curvas pelo método dos Mínimos Quadrados.

Proposição inicial: por meio de informações do primeiro formulário eletrônico respondido pelas alunas e declarações do grupo no primeiro encontro de orientação, foi possível avaliar que as alunas desconheciam o conceito de modelagem matemática, por isso, alegaram não saber ainda como deveriam desenvolver o trabalho. As alunas alegaram que estudar uma situação-problema relacionada a área de compósitos, associada à Engenharia de Materiais, seria de interesse de todas. Então, nesse encontro uma explanação sobre modelagem matemática foi feita a fim de que o grupo tivesse uma visão geral do processo. Cada fase da modelagem foi caracterizada visando o desenvolvimento de uma problemática ainda por ser definida. A interação com as alunas permitiu perceber se possuíam conhecimentos prévios, como conceito de função para descrever um conjunto de dados, ajuste de curvas por meio de *softwares*, por exemplo. Por fim, foi sugerido que o grupo definisse um tema e, se possível, uma problemática até o próximo encontro.

Situação inicial proposta pelo Grupo: as alunas apresentaram a intenção de desenvolver um estudo relacionado à área de cerâmica, a partir de dados obtidos em laboratório durante as aulas de Reologia[3]. Observando os dados experimentais que o grupo apresentou sobre suspensão em cerâmica, percebeu-se algumas possibilidades para a modelagem, sinalizando a viabilidade do estudo. A observação do conjunto de dados e algumas curvas de tendência que as alunas já haviam plotado permitiram identificar possíveis abordagens para o problema. A interpolação polinomial surgiu como alternativa para a determinação de uma expressão matemática para o problema, isso porque, métodos relativos a esse conteúdo estavam sendo estudados nas aulas da disciplina. Aproveitando o ensejo, inicialmente a professora fez questionamentos para avaliar o conhecimento das alunas sobre interpolação. Depois foram discutidas algumas ideias sobre ajuste de curvas, diferenciando métodos de interpolação dos métodos de aproximação. Todavia, não foi discutido nenhum método específico nesse momento, apenas as ideias. No que se refere ao processo processo de modelagem ficou esclarecido que isso caracteriza a fase de inteiração.

Visando a matematização, foco na modelagem: estando definida a fração dos dados que seria analisada, bem como as variáveis de estudo, a discussão e compreensão de conceitos relativos à ciência dos materiais permitiu supor que um modelo exponencial ou hiperbólico poderia descrever o comportamento dos dados experimentais. A partir de uma discussão inicial, e informal, foi possível uma visão geral do método dos mínimos quadrados. Depois, conceitos mais específicos foram introduzidos, como a existência da abordagem para o caso discreto e para o caso contínuo, de modo que o grupo identificasse que o caso em estudo era discreto. Ficou como atividade para o grupo o estudo do método e de exemplos para que pudessem conduzir o tratamento dos dados, avançando para a solução do problema que haviam definido. Assim, um livro texto sobre ajuste de curvas foi sugerido para que o grupo estudasse, além de textos eletrônicos que foram encaminhados pela professora via e-mail.

Resolvendo o problema, foco no conteúdo: a opção por construir o modelo baseado no método dos mínimos quadrados proporcionou realizar a dedução do método para então aplicá-lo. Assim, as alunas, em grupo, estudaram o material bibliográfico sugerido, mas, alegaram ter dúvidas conceituais que dificultavam o tratamento dos dados. Desse modo, partindo das dúvidas apresentadas, a professora fez um seminário para o grupo, iniciando por considerar o ajuste de curvas para funções lineares, depois, passou a diferenciar as técnicas para casos de funções não-lineares e as estratégias para a redução ao estudo do caso linear das

[3]A Reologia pode ser definida como a ciência que estuda a maneira como os materiais se deformam quando sofrem ação de uma tensão. (http://www.reologiadobrasil.com.br/reologia.html)

mesmas e a obtenção dos modelos para o caso exponencial e o caso hiperbólico. O grupo optou por comparar os modelos obtidos manualmente por aqueles obtidos por um *software* que possibilita realizar os mesmos ajustes. Em um momento posterior, solicitaram orientação por meio de um *chat*, por terem observado diferenças nos parâmetros obtidos pelas diferentes estratégias (cálculos manuais e *software*).

Finalização do estudo: em um encontro que antecedeu a entrega do relatório final da atividade o grupo fez uma apresentação geral do trabalho. Nessa ocasião, questões relativas à validação dos modelos foram discutidas devido a permanência de dúvidas no desenvolvimento do modelo hiperbólico. Por essa razão, foi conveniente averiguar se, de fato, haviam compreendido o método, quando percebeu-se que a dificuldade residia em escrever a mudança de variáveis para realizar a linearização da expressão, antes da aplicação do método dos mínimos quadrados. Assim, foi pertinente revisar alguns conceitos, aproveitando para promover a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora dos assuntos explorados ao longo do estudo.

Avaliação da aprendizagem: foi realizada durante todo o desenvolvimento da atividade, devido ao estreito contato do grupo com a professora e se deu a partir de: observação das estratégias adotadas pelas alunas na condução do estudo; relatórios parciais encaminhados pelo grupo para dar ciência do andamento das atividades; troca de mensagens ou conversas virtuais para esclarecimento de dúvidas; arguição das alunas em diversos momentos; apreciação de arquivos eletrônicos de programas como, Excel, Origin, Maple com tratamento dos dados; relatório final do grupo; autoavaliação e avaliação do grupo por meio do formulário de levantamento final.

Para explicitar a estruturação da UEPS que apresentamos, passamos a descrever a atividade de modelagem, que iniciamos por um diálogo que contribuiu para a definição do tema do trabalho:

> Professora: Vocês ainda não tinham definido o tema, né? (referindo-se ao primeiro encontro de orientação) Falaram que se fossem pegar algo comum (ao interesse de cada uma) teria que ser ligado a compósitos... é isso que eu anotei aqui.
>
> C3(A2): Algumas coisas mudaram... (risos)
>
> C3(C2): É, então, conforme a gente foi tendo as matérias a gente foi tendo ideias, sabe assim, estudando Reologia, ai foi achando ideias em reologia, sabe, foi isso que a gente foi vendo...
>
> [...]
>
> Professora: O que vocês pensaram que poderia ser estudado?
>
> C3(A2): Então, o que a gente tem mais prático, que a gente fez no laboratório, é a análise de suspensão cerâmica.
>
> Professora: Sei,... vocês já tem dados?
>
> C3(A2): Tem dados.
>
> Professora: Então tenta me explicar, assim: qual foi o procedimento de coleta e o que esses dados dizem. Esse experimento vocês fizeram juntas?

Todas: Sim, é nosso.

C3(A2): É,... argila dissolvida em água, em diferentes composições, tipo, 30% até 55%. A gente analisa a viscosidade.

C3(C2): e é medida com o viscosímetro e o reômetro. Aí, você tem que, de acordo com a concentração, vai alterando essas curvas de viscosidade e, de acordo também, muda no equipamento, do viscosímetro e do reômetro.

O trecho que segue é parte do relatório do grupo, onde é apresentada a problemática do estudo:

Suspensões cerâmicas são sistemas líquido/sólido caracterizados por um conjunto de partículas de material cerâmico distribuídos de forma relativamente uniforme através de um meio líquido, sem que haja, ao longo do tempo, dissolução significativa do material particulado. As propriedades reológicas adequadas, como viscosidade, tensão e taxa de cisalhamento, são imprescindíveis na aplicação, adequação do processamento e otimização das propriedades finais dos produtos.

A quantidade de poros é determinada de acordo com o teor de sólidos, o que influi na viscosidade. Essa se trata de uma propriedade física de resistência ao fluxo induzido pela tensão de cisalhamento. O aumento da viscosidade dificulta a homogeneização da espuma na suspensão promovendo o colapso das bolhas e, consequentemente o decréscimo da porosidade das cerâmicas obtidas a partir dessa suspensão. Sendo assim, é importante o estudo da viscosidade de acordo com o teor de sólidos em suspensões para que seja possível controlar a porosidade durante o processo de fabricação de cerâmicas que possuem diversas aplicabilidades, entre elas o revestimento de fornos industriais.

O mercado de fundição faz uso de uma grande quantidade de energia. Porém seu consumo pode ser reduzido pela utilização de fornos com revestimentos cerâmicos, que possuem como principal característica a capacidade de inibir a troca de calor entre duas regiões submetidas a temperaturas distintas. Entre os materiais adequados para este uso, destacam-se as cerâmicas porosas, que reúnem propriedades intrínsecas das cerâmicas, como inércia química e refratariedade, à baixa condutividade dos materiais porosos. É importante salientar que um aumento da porosidade reduz a perda de calor.

Buscando um direcionamento no estudo, o diálogo estabelecido com o grupo e a observação dos dados experimentais, apresentados no segundo encontro de orientação, contribuiu para a definição do problema, que foi elaborado pelo grupo posteriormente, como indica o diálogo.

Professora: Vocês fizeram esse estudo com que objetivo?

C3(A2): Analisar a viscosidade.

C3(C2): É, a viscosidade. Porque é na matéria de Reologia. Daí, a professora falou que dependendo disso a gente podia partir pra uma ideia mais ampla, de acordo com uma empresa...

Professora: Argila é só um material para você fazer um... digamos, é um tipo de material, acessível... mas a argila em sí tem uma aplicabilidade importante?

C3(C2): Eu acredito que foi só pra gente entender a ideia da suspensão...

C3(A2): É, a gente pode levar isso pra qualquer cerâmica.

Professora: Ah tá, entendi.

C3(A2): É que é mais barato.

Professora: É isso que eu queria entender: foi feito com argila porque é um representante do grupo... Vocês tem os dados aí?

C3(A2): Tem, tem até uns gráficos já.

[...]

Professora: Essa curva em preto... 30%... deixa eu entender, você coloca 30% e você vai medindo e avalia o quê? A 30% você avalia...?

C3(A2): Eu coloco uma taxa de cisalhamento nela...

Professora: Tá, o que é a taxa de cisalhamento?

C3(A2): É uma tensão.

Professora: ...que você aplica com um aparelho? Você varia essa tensão ou não?

C3(A2): Isso, conforme eu vou variando essa tensão, ele vai me dando a viscosidade.

C3(C2): Daí essa viscosidade tem a ver com essa taxa de cisalhamento.

Professora: A taxa de cisalhamento informa o que sobre o material?

C3(C2): É a deformação ao longo do tem... da distância.

Professora: Vocês tiram conclusões a partir disso aqui (indicando a planilha eletrônica com tabelas e gráficos), a partir da visualização dos resultados?

C3(A2): É, a gente analisa, eu quero fazer tal coisa, então é melhor ter tal viscosidade, tipo um vaso...

C3(B2): Depende do comportamento, tipo, se é linear ou não-newtoniana.

Professora: Nessa curva aqui, o que vocês falam sobre o comportamento da...

C3(B2): Que ela tem baixa viscosidade... então, se eu for fazer um vaso, por exemplo, e for rodar naquele negocinho (se referindo ao torno) vai voar tudo, não vai dar pra fazer.

Professora: certo.

[...]

Professora: Vocês não chegam em modelos, equações, quando vocês trabalham com esses levantamentos de dados?

C3(A2): Não exatamente, mas a gente pode aplicar!

Definição do Problema

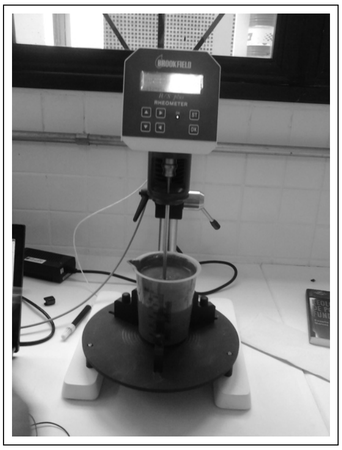
O trabalho tem como objetivo propor um modelo matemático que descreva o comportamento reológico de uma suspensão cerâmica, através de parâmetros como viscosidade e taxa de cisalhamento, para que assim consigamos relacionar essas variáveis com o comportamento poroso. Como a viscosidade está diretamente atrelada com o número de poros, o modelo descreve esse comportamento.

Na aula experimental de Reologia, do segundo semestre letivo do ano de 2012, foi realizada uma prática com o objetivo de estudar o comportamento reológico de suspensões cerâmicas. Para isso, a sala foi dividida em seis grupos, sendo que cada um ficou responsável por uma suspensão que continham teores diferentes: 30%, 35%, 40%, 45%, 48%, 50%.

Para a preparação das amostras alguns cálculos foram realizados a partir de equações bem definidas na literatura, como: massa real de água, massa da suspensão, massa da argila, massa de argila úmida, quantidade de água que a amostra já possui, quantidade de água a ser adicionada.

Na etapa seguinte, foi feita a homogeneização das suspensões usando uma furadeira de base adaptada para trabalhar como agitador mecânico. Feito isto, cada amostra foi levada ao reômetro Brookfield R/S plus, ilustrado na Figura 5.13. Para todas foi utilizado o mesmo Vane spindle (V3 - 40 - 20), com a tensão controlada e o *software* RHIO3000 gerou uma tabela de dados.

Figura 5.13: Reômetro Brookfield R/S plus



Fonte: Relatório final do Grupo

Nesse trabalho serão analisadas apenas as suspensões com teores de sólido de 40% e 50%. A Figura 5.14 mostra os dados obtidos e a tendência dos pontos para as referidas suspensões.

Ao esclarecer dúvidas da professora, que procurava compreender os dados gerados pelo experimento, as alunas demonstravam segurança ao justificar os resultados, mencionando conceitos envolvidos. Segundo elas, em consulta à professora da disciplina de Reologia, esclareceram que alguns resultados deveriam ser desconsiderados devido a erros experimentais, por estarem trabalhando com um modelo de homogeneização com uma furadeira de base adaptada, quando deveria ser um agitador mecânico. Por ser adaptado, a leitura dos dados para alguns teores de sólido pode ocorrer com a mistura não totalmente homogeneizada provocando grande variação nos dados.

No momento em que o grupo estava na fase de matematização, estavam estudando métodos de interpolação polinomial nas aulas de Cálculo Numérico. Desse modo, parece razoável que mencionassem esse método como uma alternativa para equacionar os dados. Porém, a professora provocou-as a pensar nas implicações de um modelo polinomial para

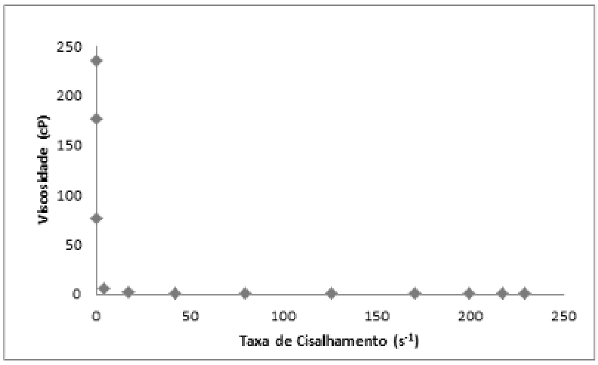
Figura 5.14: Dados analisados pelo Grupo para elaboração de modelos matemáticos

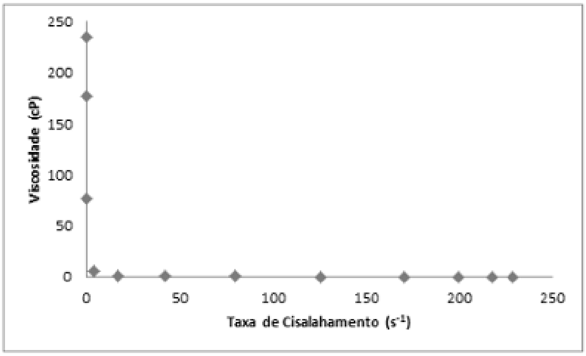
Tabela 1: Suspensão com 40% de Teor de Sólido

Viscosidade (μ)	Taxa de Cisalhamento (γ)
177,367	0,03
235,2827	0,045
76,1954	0,207
5,7838	3,64
1,5371	17,121
0,7455	42,362
0,4632	79,55
0,3346	125,839
0,2783	170,192
0,2638	199,532
0,2662	217,5
0,2759	228,914

Tabela 2: Suspensão com 50% de Teor de Sólido

Viscosidade (μ)	Taxa de Cisalhamento (γ)
354,7339	0,015
341,2498	0,031
201,3572	0,078
19,5881	1,075
2,4764	10,627
0,9673	32,648
0,5548	66,407
0,3804	110,692
0,2975	159,236
0,2631	200,059
0,2574	224,905
0,2633	239,86





Fonte: Relatório final do Grupo

um número razoável de pontos, a relação com o grau do polinômio etc., de modo que as alunas demonstravam ter compreendido conceitos relativos aos métodos. Por fim, sugeriu o ajuste de curvas como uma alternativa a ser estudada, já que esse tópico não seria abordado com os alunos nas aulas, segundo o professor da disciplina.

O seguinte trecho de uma conversa contribuiu para a definição das hipóteses que indicariam os modelos:

> Professora: Então vamos pensar no modelo. Talvez o mais adequado seria o linear (olhando para uma sequência de dados), e daí talvez não faça nenhum sentido em termos da teoria.
>
> C3(C2): Da teoria não, porque se é um comportamento pseudo-plástico ele é não-newtoniano e linear só seria newtoniano.
>
> (Todas concordam)
>
> Professora: Então o mais adequado seria o quê?
>
> C3(B2): Seria assim olha (apontando para o computador).
>
> C3(A2): Assim, (fez um movimento no ar com o dedo indicando uma curva).
>
> Professora: Seria mais exponencial ou hiperbólico?
>
> C3(A2): Uhum
>
> Professora: Então olha só (pegou um livro, procurou e mostrou uma página para elas) tem alguns métodos de ajuste aqui...

C3(C2): É assim ó (apontando um gráfico no livro)!

(risos)

Professora: Esse aqui é do tipo exponencial, mas tem o hiperbólico (procurando em outra página) que tem a característica de ser assintótico nesse... não necessariamente no eixo-y como aqui tá parecendo. Vocês lembram do conceito de ser assintótico?

O que segue foi extraído do relatório entregue pelo grupo, quanto a suposição para os modelos.

Levantamento de Hipóteses

Os gráficos obtidos (Figura 5.14) sinalizam um comportamento pseudoplástico, o qual se trata de uma subdivisão de fluidos não-newtonianos. Nesse comportamento a curva da viscosidade decresce de maneira curvilínea com o aumento da taxa de cisalhamento. Um ajuste linear não se justifica, por ser um comportamento característico apenas de fluidos newtonianos. Desse modo, direciona-se o estudo para uma regressão não-linear. Dentro deste, pode-se considerar o ajuste hiperbólico e o ajuste exponencial.

Definição de Variáveis e Parâmetros τ: tensão de cisalhamento; x: taxa de cisalhamento; y: viscosidade.

Modelo Matemático

Com a orientação da professora quanto ao material bibliográfico, as alunas se dispuseram a estudar os métodos de ajuste e voltaram a buscar orientação à medida que surgiam as dúvidas. Demonstraram capacidade de compreensão, embora algumas dificuldades tenham ocorrido. Assim, um encontro foi destinado a um seminário sobre o método de linearização para a obtenção dos parâmetros e aplicação do método dos mínimos quadrados.

A seguir destacamos o encaminhamento do trabalho em busca da obtenção dos modelos, de acordo com o conteúdo do relatório do grupo.

Inicialmente, descreveram o método dos Mínimos Quadrados para o caso linear ($y = ax + b$), indicando os cálculos e conceitos necessários para a dedução dos parâmetros a e b, que são representados pelo sistema de equações (onde x_i e y_i correspondem aos pares de dados coletados, $i = 1, ..., n$):

$$\begin{cases} na + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_1\right) b = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_1\right) a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_1^2\right) b = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases} \tag{5.13}$$

Para o ajuste exponencial ($y = \alpha e^{bx}$) identificaram a necessidade de realizar a seguinte linearização: $ln(y) = ln(\alpha) + bx$. Fazendo $Y = ln(y)$ e $a = ln(\alpha)$, reduz-se o problema de ajustar os pontos $(x_i; y_i)$ referente a uma exponencial ao problema de ajustar a tabela de pontos (x_i, Y_i) , onde $Y_i = ln(y_i)$, à equação de uma reta $y = a + bx$.

Para o ajuste hiperbólico $\left(y = \frac{1}{a_1+a_2x}\right)$ a seguinte mudança de variáveis foi realizada, a fim de obter um ajuste linear dos parâmetros: $z = \frac{1}{y} = a_1 + a_2x$.

Em relação ao modelo exponencial, justificaram que, após a linearização, a próxima etapa é obter a solução do sistema de equações lineares 5.13, valendo-se dos dados experimentais.

Para efeito de simplificação, todas as contas necessárias foram feitas utilizando o *software* Excel e os resultados organizados na forma de tabelas. Portanto, tem-se para o teor de 40% de sólido:

$$\begin{cases} 12\alpha + 1084,932b = 9776308518 \\ 1084,932\alpha + 192750,8248b = -1262,60079 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se os valores:

$$b = -0,022675508$$

$$\alpha = 2,86480773$$

Daí, considerando que $\alpha = ln(a)$, portanto, $a = e^{-2,86480773} = 17,54567938$. Logo, a equação exponencial que se ajusta aos dados é

$$y = 17,54567938\; e^{-0,022675508x}$$

.

Do mesmo modo, para o teor de 50% de sólido obteve-se o modelo

$$y = 27,03620993\; e^{-0,0243904x}$$

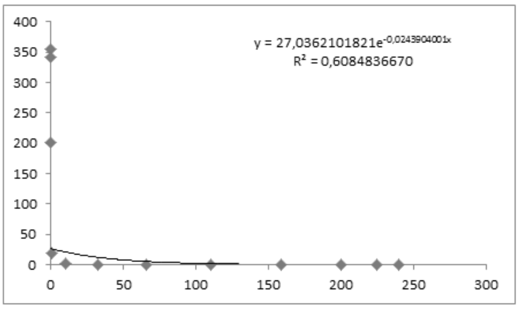
que foi comparado àquele obtido usando Excel. A Figura 5.15 mostra como o grupo procedeu para obtenção do modelo e também traz o gráfico de dispersão dos dados experimentais e o modelo obtido.

Figura 5.15: Obtenção do modelo exponencial e representação gráfica para dados com teor de 50% de sólido

Tabela 4: Tratamento de Dados Para Suspensão com 50% de Teor de Sólido

50%				
X - Taxa de Cisalhamento	Y - Viscosidade	X^2	Ln (y) – Ln (Viscosidade)	X* Ln Y
0,015	354,7339	0,0002	5,871368	0,0881
0,031	341,2498	0,0010	5,832615	0,1808
0,078	201,3572	0,0061	5,30508	0,4138
1,075	19,5881	1,1556	2,974922	3,1980
10,627	2,4764	112,9331	0,906806	9,6366
32,648	0,9673	1065,8919	-0,03325	-1,0854
66,407	0,5548	4409,8896	-0,58915	-39,1235
110,692	0,3804	12252,7189	-0,96653	-106,9874
159,236	0,2975	25356,1037	-1,21234	-193,0483
200,059	0,2631	40023,6035	-1,33522	-267,1230
224,905	0,2574	50582,2590	-1,35712	-305,2240
239,86	0,2633	57532,8196	-1,33446	-320,0839
$\sum x$ = 1045,633	$\sum y$ = 922,3892	$\sum x^2$ = 191337,3822	$\sum \ln y$ = 14,06271779	$\sum x * \ln y$= -1219,15814

Figura 5: Ajuste Exponecial Para 50% de Sólido.



Fonte: Relatório final do Grupo

Para o modelo hiperbólico, procederam a linearização utilizando o sistema de equações 5.13 e os cálculos foram realizados por intermédio de uma planilha eletrônica, de forma similar ao já descrito no modelo exponencial. A Figura 5.16 traz recortes do relatório do grupo indicando como procederam a obtenção dos parâmetros dos modelos hiperbólicos e a representação gráfica de cada qual.

Interpretação e Validação do Modelo

Com a realização desse trabalho fizemos dois tipos de ajustes, sendo que o ajuste exponencial foi realizado de duas maneiras, estatisticamente e através do *software* Excel. Os parâmetros obtidos manualmente coincidiram com os encontrados a partir do Excel. Tentou-se também o ajuste por meio do *software* Origin, como os parâmetros obtidos foram diferentes o modelo não foi considerado.

Notou-se que o Excel faz o ajuste utilizando todos os pontos, entretanto o erro é muito grande, por isso um bom ajuste só é possível para um conjunto de pontos, que no nosso caso é bom para baixas taxas de cisalhamento.

Considerações Finais

Concluiu-se que as equações ajudam na comparação entre duas suspensões para que seja possível avaliar a variação de porosidade conforme a mudança da taxa de cisalhamento, pois a porosidade está diretamente relacionada à viscosidade.

Figura 5.16: Representação do modelo hiperbólico para dados com teor de 40% e 50% de sólido

Tabela 5: Tratamento de Dados Para Suspensão com 40% de Teor de Sólido

40%				
X - Taxa de Cisalhamento	Y - Viscosidade	X²	1/Y	X* 1/ Y
0,03	177,367	0,0009	0,005638	0,000169
0,045	235,283	0,002025	0,00425	0,000191
0,207	76,1954	0,042849	0,013124	0,002717
3,64	5,7838	13,2496	0,172897	0,629344
17,121	1,5371	293,1286	0,650576	11,13851
42,362	0,7455	1794,539	1,341382	56,82361
79,55	0,4632	6328,203	2,158895	171,7401
125,839	0,3346	15835,45	2,988643	376,0879
170,192	0,2783	28965,32	3,593245	611,5415
199,532	0,2638	39813,02	3,790751	756,376
217,5	0,2662	47306,25	3,756574	817,0548
228,914	0,2759	52401,62	3,624502	829,6992
$\sum x$ = 1084,932	$\sum y$ = 498,7935	$\sum x^2$ = 192750,8248	$\sum 1/y$ = 22,10048	$\sum x * 1/y$ = 3631,094

$y3 := x \rightarrow 1/(0.282053068 + 0.017250682 \cdot x);$

$plot(y3(x), x = 0.03 .. 228.914);$

$$x \rightarrow \frac{1}{0.282053068 + 0.017250682\,x}$$

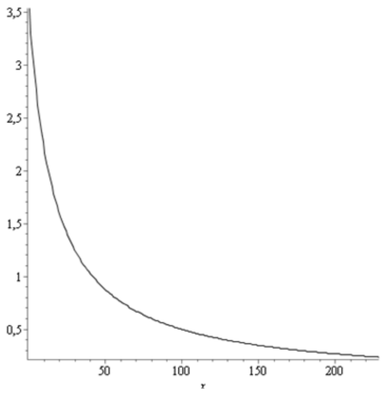


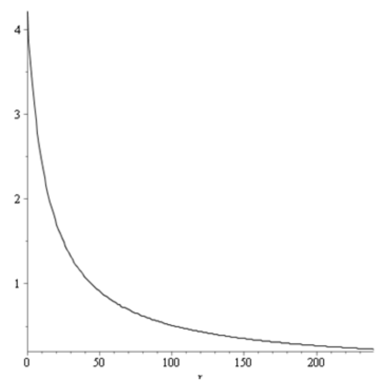
Tabela 6: Tratamento de Dados Para Suspensão com 50% de Teor de Sólido

50%				
X - Taxa de Cisalhamento	Y - Viscosidade	X²	1/Y	X* 1/ Y
0,015	354,7339	0,0002	0,0028	0,0000
0,031	341,2498	0,0010	0,0029	0,0001
0,078	201,3572	0,0061	0,0050	0,0004
1,075	19,5881	1,1556	0,0511	0,0549
10,627	2,4764	112,9331	0,4038	4,2913
32,648	0,9673	1065,8919	1,0338	33,7517
66,407	0,5548	4409,8896	1,8025	119,6954
110,692	0,3804	12252,7189	2,6288	290,9884
159,236	0,2975	25356,1037	3,3613	535,2471
200,059	0,2631	40023,6035	3,8008	760,3915
224,905	0,2574	50582,2590	3,8850	873,7568
239,86	0,2633	57532,8196	3,7979	910,9761
$\sum x$ = 1045,633	$\sum y$ = 922,3892	$\sum x^2$ = 191337,3822	$\sum 1/y$ = 20,7758	$\sum x * 1/y$= 3529,1536

$y4 := x \rightarrow 1/(0.23695657 + 0.017149727 \cdot x);$

$plot(y4(x), x = 0.015 .. 239.86);$

$$x \rightarrow \frac{1}{0.23695657 + 0.017149727\,x}$$



Fonte: Relatório final do Grupo

Após esclarecer as últimas dúvidas, a professora perguntou se fariam comparação entre os modelos e como pensavam em fazê-la, conforme mostra o diálogo.

> Professora: ... são as mesmas continhas, o mesmo sistema 2x2...
>
> C3(B2): Só muda a função.
>
> Professora: só muda a função.
>
> C3(B2): A tá, então a gente vai fazer...
>
> Professora: Então, isso eu tentei explicar para vocês ontem (pelo chat do Skype), mas é que as vezes visualizando é diferente.
>
> C3(B2): É, lá não é tão simples.
>
> C3(C2): É, ainda mais agora que a gente fez um, do exponencial... confunde.
>
> Professora: Aham, então na hora de vocês fazerem o comparativo..., vocês vão comparar como? Como estão pensando em fazer? Fez o exponencial e vai fazer o hiperbólico... a ideia é comparar a diferença?
>
> C3(B2): Então, a gente ainda não pensou direito nisso...
>
> C3(C2): ... falar qual fica melhor. E pelo erro também, porque o Origin dá o erro, mas pra fazer o do hiperbólico a gente não consegue fazer no Origin.
>
> Professora: Teria que criar essa função lá. Ele até permite criar função e tal...
>
> C3(B2): A gente tentou criar, mas não conseguiu.
>
> Professora: Teria que ver lá... Bom, o que vocês poderiam fazer: comparar o que vocês obtiveram com um, com o outro e com os dados reais, com os dados obtidos com o experimento, né. Como dá para fazer isso, põe numa tabela [...] (explicando como fazer), ai vocês podem fazer uma comparação só dos valores mesmos né.
>
> C3(B2): Daí a gente faz só a conta na mão mesmo...
>
> Professora: Faz a diferença, põe numa planilha.

Observamos que o comparativo dos modelos exponencial e hiperbólico não integrou o relatório final. Ainda assim, os resultados obtidos, levando em conta um conjunto de fatores, como o envolvimento do grupo com o estudo demandado, o compromisso das alunas em levar a cabo o estudo de um tópico não tratado durante as aulas, consideramos a UEPS bem sucedida, pois foi possível obter evidências de aprendizagem significativa, como pretendemos mostrar no próximo capítulo.

5.3.2 UEPS para o estudo de Sistemas de Equações Lineares associado à Atividade de Modelagem Matemática sobre Análise de Circuitos Elétricos

Esta unidade de ensino corresponde ao Grupo 10, composto pela aluna C3(A10), pelo aluno C3(B10) e pela aluna C3(C10), do curso de Engenharia de Materiais. O grupo demonstrou bastante autonomia na condução do trabalho, cumpriu todas as recomendações para o desenvolvimento da APS e o contato com a professora pesquisadora ocorreu mais no sentido de posicionar sobre o andamento do trabalho do que solicitar intervenção para o direcionamento da atividade.

Nessa UEPS a participação da professora foi menos intensa em relação ao Grupo 2. Os alunos assumiram a responsabilidade por organizar e desenvolver as atividades com mais independência. À seguir é apresentada como ficou estruturada essa unidade de ensino:

Tópico de estudo: inicialmente, os alunos estavam pensando em estudar comportamento de fluidos. Depois, optaram por estudar análise de circuitos elétricos e o problema que estudaram pode ser abordado por métodos de resolução do Sistemas de Equações Lineares.

Para começar: em um levantamento inicial os alunos demonstraram conhecer o conceito de modelagem matemática, embora tenham declarado não ter feito uso da modelagem. O processo de modelagem matemática foi apresentado pela professora, que procurou diferenciar suas fases e exemplificar com situações que poderiam servir de organizadores prévios para sua compreensão. Com isso, os alunos foram orientandos a, primeiro definir um tema de interesse, para depois avaliar a aplicabilidade de métodos numéricos. O interesse por abordar uma problemática a partir da experimentação foi expresso pelo grupo, que estava considerando dois temas: comportamento de fluidos, para o qual não visualizavam ainda que abordagem matemática seria necessária; e, estudo da resistência de um lâmpada em relação à variação da temperatura, em que imaginavam ser possível aplicar interpolação polinomial. Essa interação inicial permitiu observar, a partir das respostas a alguns questionamentos da professora, conhecimentos prévios referentes aos conteúdos estudados no Cálculo 1, em Equações Diferenciais e também na disciplina de Computação.

Situação-problema proposta pelo Grupo: a proposta apresentada pelos alunos já indicava o cuidado com questões conceituais relativas ao tema, definido como, análise de circuitos elétricos. Os dados com os quais trabalhariam foram obtidos por meio de um experimento de laboratório realizado especialmente para o estudo; a definição do problema e das variáveis e parâmetros envolvidos foram contextualizados pelo grupo ao comunicar o andamento das atividades, em um encontro de orientação. De acordo com o relato dos alunos, os conhecimentos prévios necessários para fundamentar e solucionar a situação-problema estavam sendo estudados paralelamente na disciplina de Física, embora outros conceitos fossem pesquisados na literatura. Quanto ao processo de modelagem, notoriamente estava sendo bem executado.

Abordagem matemática: a formulação do modelo matemático se pautou na literatura, que indica ser adequado o uso de um sistema de equações lineares no estudo da corrente elétrica. A solução do modelo foi obtida por iniciativa do grupo, por meio de um método exato denominado Eliminação de Gauss. Esse método, bem como outros métodos exatos e iterativos já haviam sido estudados na disciplina de Cálculo Numérico, de modo que a resolução manual não ofereceu dificuldades. Porém, a implementação desse método no *software* Maple representou alguma dificuldade, o que demandou dos alunos alguma pesquisa e busca por orientação do professor.

Outra solução proposta: a fim de oferecer a possibilidade de que os alunos avançassem em relação à aplicabilidade do conteúdo, a professora propôs que, comparativamente à solução exata, procurassem resolver o problema aplicando um método iterativo. Em resposta, os alunos procuraram implementar também o método de Gauss-Seidel.

Finalização do estudo: no encontro em que o trabalho foi entregue, o grupo fez uma explanação do trabalho mencionando as estratégias e encaminhamento adotados no desenvolvimento da atividade de modelagem, bem como, quanto ao tratamento numérico dado ao problema.

Avaliação da aprendizagem: foi realizada ao longo do semestre, a medida que os alunos procuravam para posicionar sobre o andamento da atividade de modelagem, por meio dos relatórios parciais e final encaminhados pelo grupo, pela arguição dos alunos nos encontros presenciais e pelo formulário de levantamento final.

O que segue, procura retratar o anunciado na estruturação dessa UEPS e busca descrever a atividade de modelagem do grupo.

> Professora: Vocês não querem contar, assim, qual é a problemática enfim?
>
> C3(B10): Então, o trabalho envolve, hum... através de um circuito, saber qual é a corrente que passa em cada ramo de um circuito... vai ter uma distribuição elétrica, pode ser numa residência ou numa placa de circuito integrado, uma placa mãe de um computador... Ai eu pensei, antes de a fábrica montar, já soldar a placa mãe, ela desenvolve e testa esses componentes numa *protoboard*. Essa *protoboard* é uma matriz de contato...
>
> C3(A10): Você não trouxe?
>
> Professora: Não, acho que eu consigo entender (risos).
>
> C3(B10): é, tem imagem na internet.
>
> C3(A10): Eu tenho uma aqui.
>
> Professora: Na sua introdução você pôs?
>
> C3(C10): Não, ainda não coloquei...
>
> Professora: Pode por, se achar que fica mais claro, para o leitor entender.
>
> C3(A10): É mais ou menos assim (mostra uma figura).
>
> C3(B10): Isso, ela tem vários furinhos que são conectados e isolados um entre o outro. Aí, monta o circuito, coloca resistência, capacitor, é, qualquer tipo, circuito integrado, lâmpada, led, o que você quiser testar. Aí, no funcionamento, numa fábrica que inventou uma placa mãe, funcionou? testou na *protoboard*? Agora sim fabrica e pode soldar os componentes. Aí, o interesse desse trabalho tá em ver qual que é a corrente que passa em cada ramo desse circuito. A gente fez um circuito bem básico, só de resistências. Uma resistência pode ser, por exemplo, entendida como uma lâmpada... aí, se essa corrente ali é suficiente pra alimentar, se romper o que pode acontecer... aí, voltando pra parte de metodologia, que modelo matemático que serve pra representar isso...

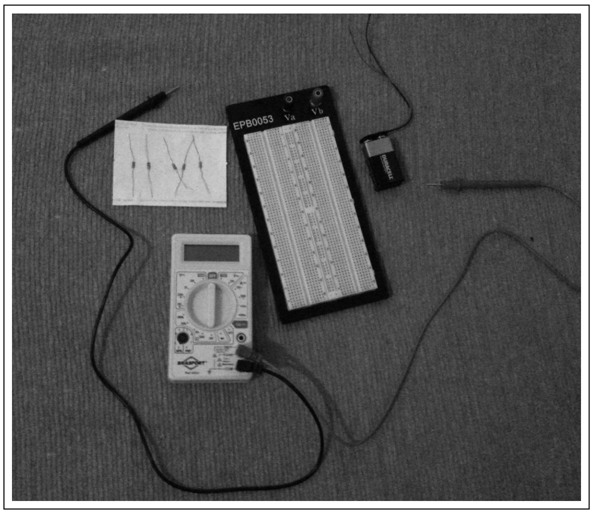
Nessa ocasião, o grupo já tinha uma versão inicial do trabalho redigida. O texto retratava bem os relatos e as ideias discutidas com a professora. Ao expor a situação inicial, na problematização, justificativas que indicam a relevância do trabalho eram explicitadas e os conceitos necessários para a compreensão da situação-problema eram definidos. O teor do trabalho desenvolvido pelo grupo será descrito na sequência, baseado no relatório entregue pelos alunos e nas conversas ocorridas nos encontros de orientação.

Situação Inicial

O uso de circuitos integrados se tornou presente em calculadoras, nas comunicações, nos relógios, na produção, no controle industrial e em todas as fases da indústria de eletrônicos. Um circuito integrado pode ser definido como sendo um conjunto de componentes de elementos de circuito, como resistores, diodos, capacitores e transistores, formados e interligados de forma simultânea dentro de um mesmo corpo, normalmente uma pastilha de silício, constituindo um dispositivo único que realiza a função do circuito. Os circuitos integrados são indicados principalmente em aplicações que têm funções repetitivas e possuem espaços limitados. As pequenas dimensões de um circuito integrado, se comparadas com o espaço necessário para adicionar os componentes equivalentes, constituem uma vantagem enorme. Para eles, a modelagem de sistemas é realizada identificando-se os elementos físicos presentes e suas equações elementares.

O projeto foi desenvolvido com o objetivo de realizar a montagem de um circuito elétrico com a utilização da placa *protoboard*, resistências e fonte (a Figura 5.17 mostra os materiais utilizados para a montagem do circuito). A partir de conceitos pré-estabelecidos, com o uso de modelagem matemática, calcular a corrente que passa nos ramos do circuito

Figura 5.17: Materiais usados na montagem do circuito estudado



Fonte: Relatório final do Grupo

Fazendo referência à literatura, alegam que, a análise de circuitos compostos com resistências em série e/ou em paralelo pode ser realizada com a aplicação de diversos métodos. Basicamente, todos os métodos existentes partem do princípio de que, independente do modelo a ser utilizado, o comportamento do fenômeno não se altera, ou seja, o fenômeno pode ser interpretado de diferentes formas chegando-se a um mesmo resultado.

No método das correntes de malha uma corrente é designada para cada janela do circuito de tal forma que as correntes completam um percurso fechado. Elas são às vezes chamadas de correntes de laço. Cada elemento e ramo então terá uma corrente independente.

Quando um ramo tiver duas das correntes de malha, a corrente real é dada pela sua soma algébrica. As correntes de malha designadas podem ter a direção no sentido horário ou anti-horário. Uma vez que as correntes foram designadas, a lei de Kirchhoff para as tensões é escrita para cada laço de forma a se obter o sistema de equações necessário.

Definição do Problema

O problema consiste em determinar a corrente que passa em cada ramo de um circuito composto por múltiplas malhas com resistências e fontes.

O diálogo que segue expressa como o grupo abordou o problema e como fez a coleta de dados, quando relatavam à professora o andamento do trabalho:

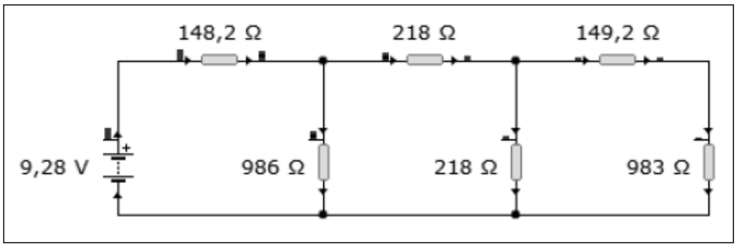
> C3(B10): Isso, a corrente. Pra chegar nisso eu tenho que ter esses valores das resistências, e da tensão que tá alimentando esse circuito.
>
> Professora: Daí você vai ter que saber então, tensão...
>
> C3(C10): É, as resistências já tem os valores específicos.
>
> C3(B10): Pra determinar essa corrente que alimenta cada ramo, eu conheço os valores de resistência e da tensão que alimenta o circuito, aí, eu montei num *software* que ele já me responde esses valores.
>
> Professora: *Software* específico?
>
> C3(B10): ... eu fiz isso na Física mesmo, na prática, as resistências eu medi e fiz o esquema aqui no *software*... eu usei essas resistências: 148,2, tal, tal, deixei nesse esquema, em série, em paralelo, e coloquei aqui esses valores que representa a corrente que eu devo determinar.
>
> Professora: Uhum, 21,4 então... esse negativo indica o quê?
>
> C3(B10): 21,4, isso..., sentido. Aí a representação disso, pode ser...
>
> Professora: Um sisteminha.
>
> C3(B10): ... um sistema.
>
> Professora: Tá, o que você quer determinar são os I_1, I_2, I_3.
>
> C3(B10): Isso, I_1, I_2, I_3. Ai, vê que isso gera um sistema, linear de três equações... eu coloquei as resistências...
>
> Professora: Porque vocês optaram por trabalhar com três resistências, né?
>
> C3(B10): Isso, se quiser trabalhar ...
>
> C3(C10): seis resistências, em série e em paralelo. Se quiser é só colocar mais resistências.
>
> Todos: Olhando para um texto inicial do trabalho apontam para algumas variáveis e discutem...
>
> Professora: Essa é uma abordagem padrão, digamos, de se fazer para obter os valores da corrente?
>
> C3(A10): Uhum, teórico.
>
> Professora: Hum... e vocês já tinham feito esse experimento na disciplina?
>
> Todos: Não.

Levantamento de Dados

Para formular um modelo matemático que possibilita a comprovação das teorias existentes a respeito de análise de circuitos. Um modelo simples, composto por uma bateria (fonte) e seis resistências foram utilizados. A solução do problema requer o conhecimento dos valores das resistências e da fonte que alimenta o circuito.

A leitura da tensão foi realizada com um multímetro digital na função de voltímetro, enquanto que a leitura das resistências foi realizada com o mesmo equipamento na função de ohmímetro. Depois, o *software* Yenka possibilitou o desenvolvimento e análise de circuitos. O esquema utilizado na prática, montado em uma *protoboard*, está representado na Figura 5.18 com os dados coletados embutidos.

Figura 5.18: Circuito para modelagem matemática e análise experimental



Fonte: Relatório final do Grupo

Matematização e Resolução

A fim de elaborar o modelo matemático, alguns conceitos fundamentados nas teorias já existentes, e referenciados no texto, foram considerados e definidos, tais como:

- 1ª Lei de Ohm: a razão entre a tensão entre dois pontos e a corrente elétrica é uma constante ($R = \frac{V}{i}$);

- Regra das Malhas: A soma algébrica das variações de potencial encontradas ao percorrer uma malha fechada é sempre zero;

- Regra dos Nós: A soma das corrente que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem do nó;

- Resistências em série: quando uma diferença de potencial V é aplicada a resistências ligadas em série a corrente i é a mesma em todas as resistências, e a soma das diferenças de potencial das resistências é igual à diferença de potencial aplicada V; resistências ligadas em série podem ser substituídas por uma resistência equivalente R_{eq} percorrida pela mesma corrente i e com a mesma diferença de potencial total V que as resistências originais;

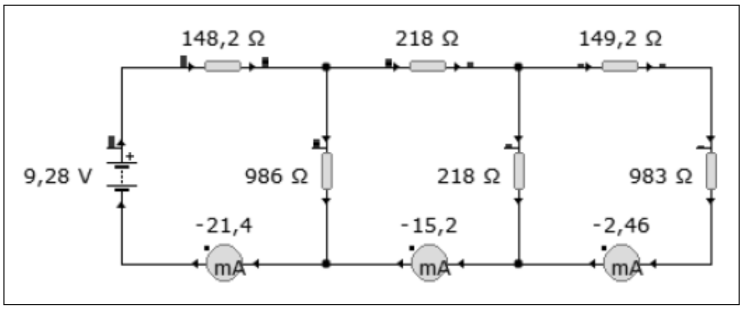
- Resistências em Paralelo: quando uma diferença de potencial V é aplicada a resistências ligadas em paralelo todas as resistências são submetidas à mesma diferença de potencial V; resistências ligadas em paralelo podem ser substituídas por uma resistência equivalente R_{eq} com a mesma diferença de potencial V e a mesma corrente total i que as resistências originais.

Modelo Matemático

São chamadas as leis de Kirchhoff, as duas regras anteriormente apresentadas: regra das malhas e regra dos nós. A aplicação destas leis em um circuito composto por n malhas, resultam em um sistema de n equações. É a partir deste princípio que um modelo matemático pode ser criado.

O modelo que foi criado para análise de circuitos de múltiplas malhas consiste em representar as n equações na forma matricial. As n incógnitas que compõem o sistema são as correntes que circulam o circuito. As resistências e as tensões são valores conhecidos.

Figura 5.19: Análise de circuito composto por três malhas



Fonte: Relatório final do Grupo

Desta forma, os elementos das matrizes podem ser indicados da seguinte forma genérica:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Assim o elemento R_{11} (linha 1, coluna 1) é a soma de todas as resistências através das quais a corrente de malha I_1 (no exemplo, $21,4mA$) passa. Na Figura 5.19, isso representa $148,2\Omega + 986\Omega$. Similarmente, os elementos R_{22} e R_{33} são as somas de todas as resistências através das quais I_2 e I_3 passam, respectivamente.

O elemento R_{12} (linha 1, coluna 2) é a soma de todas as resistências através das quais as corrente de malha I_1 e I_2 passam. O sinal de R_{12} é $+$ se as duas correntes estão na mesma direção através de cada resistência, e $-$ se elas estão em direções opostas. Na Figura 5.19, 986Ω é o único valor de resistência comum a I_1 e I_2; e as correntes estão em direções opostas na resistência de 986Ω então o sinal é negativo. Similarmente, os elementos R_{21}, R_{23}, R_{13} e R_{31} são as somas das resistências comuns às malhas indicadas pelos índices subscritos, com os sinais determinados como descrito anteriormente para R_{12}. Pode-se notar que para todo i e j, $R_{ij} = R_{ji}$. Como resultado, a matriz de resistência é simétrica em relação a diagonal principal.

O vetor de correntes é formado pelas incógnitas do sistema. O *software* Yenka possibilita a leitura destes valores que serão comprovados com o desenvolvimento do modelo matemático. De acordo com a Figura 5.19, os valores para I_1, I_2 e I_3 são respectivamente, $21,4mA$, $15,2mA$ e $2,46mA$. O sinal negativo indicado pelos amperímetros representados na figura apenas indicam o sentido da corrente.

O elemento V_1 no vetor de tensões é a soma de todas as tensões que contribuem para a corrente de malha I_1. Uma tensão é positiva na soma se I_1 passa do terminal $-$ para o terminal $+$ da fonte; caso contrário, é considerado negativa. Em outras palavras, a tensão é positiva se a fonte contribui para uma corrente na mesma direção da corrente de malha. No caso da Figura 5.19, o valor para V_1 é $9,28V$, enquanto os valores para V_2 e V_3 são nulos.

Quanto a resolução do modelo, os alunos também tomaram a iniciativa, que foi validada pela professora. Conforme mostra o trecho a seguir, a professora fez ainda a sugestão de outra abordagem, com a intenção de que o grupo avançasse para um método iterativo na resolução do modelo:

> Professora: ...vocês chegaram a um modelo, o modelo é esse sistema, é isso?
>
> C3(A10): Isso, o sistema.
>
> Professora: E resolveram?
>
> C3(C10): Então, a gente resolveu na mão, no computador tá dando um problema, a gente não tá conseguindo achar o problema...
>
> Professora: Vocês resolveram à mão usando que método?
>
> C3(B10): Eliminação de Gauss.
>
> Professora: Que é um método apropriado para se obter resultados de sistemas dessa ordem e tal, linear. Eliminação é um método numérico?
>
> C3(B10): Não!
>
> C3(A10): Aham.
>
> Professora: É iterativo ou não?
>
> C3(B10): Não, é exato.
>
> Professora: Uhum. Vocês pensaram na possibilidade de fazer a obtenção da solução via um método iterativo? Não é necessário porque você tem a resposta exata.
>
> C3(B10): Uhum.
>
> Professora: Daí acabou, chegou na solução do modelo e já está com os resultados finais, né.
>
> Todos concordam.
>
> Professora: Então, minha sugestão... não li o trabalho, mas estou entendendo assim, o que está feito já cumpriu o objetivo de modelar, usar um método, tal. Minha sugestão é: faz um comparativo da solução exata que vocês já têm por um método iterativo de resolução de sistema porque um método [...] seria um incremento interessante pro trabalho... você fazer essa resolução a partir do uso de um método iterativo. Qual, por exemplo? Vocês lembram?
>
> C3(B10): Hum, Gauss-Seidel? Gauss-Jacobi...
>
> Professora: Uhum. Dá pra obter via um *software* também... Vocês fizeram implementação desses métodos no Maple?
>
> Todos concordam.

C3(B10): É nisso que a gente tá com dificuldade...

Professora: Ah, vocês estão fazendo isso?

C3(C10): Ah, a gente tá aqui... ele tá largando a gente com uma resposta assim, olha (mostra o código).

Professora: Ah, mas isso não é problema.

C3(C10): A gente tá tentando arrumar...

(Olhando para o código passam a discutí-lo.)

Professora: Esse algoritmo vocês que desenvolveram ou já tinham trabalhado?

C3(C10): Eu que montei.

Professora: Ah, mas você já usou o *evalf*, achei que era só o comando que estava faltando...

(Continuam discutindo)

Professora: Bom, isso é um detalhe (formato das respostas). O que é importante é saber se aquelas contas condizem com o valor que vocês encontraram fazendo as contas na mão... vocês chegaram a ver isso, se é o mesmo?

Assim, na versão final, os alunos contemplaram tanto a solução exata quanto aquela obtida pelo método iterativo, indicando que a solução foi obtida pelo implementação de algoritmos na linguagem em que estão habituados na disciplina. O texto traz a descrição dos dois métodos citados de modo bem adequado. Aqui suprimimos a descrição do Método de Eliminação de Gauss, mas, apresentamos a implementação de ambos, conforme desenvolvido pelos alunos.

Resolução do Modelo

A solução do modelo pode ser expressa de forma exata com o uso do método da Eliminação de Gauss para solução de sistemas lineares. Entretanto, para efeito de comparação, o método iterativo de Gauss-Seidel será utilizado para encontrar uma aproximação para a solução exata. Os dois modelos utilizados para encontrar a solução do sistema serão analisados. Cada modelo possui suas vantagens e desvantagens no processo de determinação da solução do sistema.

O Método de Gauss-Seidel, diferente do Método da Eliminação de Gauss, consiste na obtenção de uma solução aproximada para um sistema linear através de um processo iterativo. Dado um sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

A solução de x_n pode ser assim expressa:

$x_n = \frac{1}{a_{nn}}[b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n(n-1)}x_{(n-1)})]$

As n incógnitas podem ser representadas por um vetor x. A cada iteração, o vetor x é atualizado com uma solução mais próxima da exata. O primeiro vetor de incógnitas é um chute que será utilizado para a primeira iteração.

$$x^{k+1} = \begin{bmatrix} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - (a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + \ldots + a_{1n}x_n^k)] \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - (a_{21}x_1^{k+1} + a_{23}x_3^k + \ldots + a_{2n}x_n^k)] \\ x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}[b_n - (a_{n1}x_1^{k+1} + a_{n2}x_2^{k+1} + \ldots + a_{n(n-1)}x_{n-1}^{k+1})] \end{bmatrix}$$

O índice k representa a iteração, assim na iteração $k = 0$, o vetor x_1 é encontrado. Cada linha do vetor representa a solução de x de sua linha. O Método de Gauss-Seidel aproveita os valores de x já encontrados na própria iteração, o que melhora na aproximação da solução e diminui o número de operações.

O número de iterações realizadas está de acordo com o critério de parada adotado, que pode ser o valor absoluto da diferença entre $|x_n^{k+1} - x_n^k|$.

A Figura 5.20 (a) apresenta a implementação do Método de Gauss-Seidel e a Figura 5.20 (b) o código desenvolvido para o Método da Eliminação de Gauss, utilizando o *software* Maple.

A fim de encontrar os valores de correntes que passam em cada malha a Figura 5.21 ilustra a resposta introduzida na tela do computador do usuário ao executar o código da Figura 5.20 (b).

Interpretação e Validação

Segundo o entendimento dos alunos:

Como o sistema encontrou as intensidades de correntes mensuradas com o Multímetro na função de Amperímetro, pode-se dizer que esse código é eficiente no cálculo de correntes em múltiplas malhas.

A vantagem da utilização do Método de Gauss-Seidel em relação ao Método da Eliminação de Gauss está na facilidade e no menor número de operações necessárias para se encontrar uma solução. Porém, a desvantagem é que a solução não é exata. Os métodos se ajustam de acordo com a necessidade: encontrar a solução exata com inúmeras operações ou encontrar uma aproximação para a solução exata com menor número de operações. O Método de Gauss-Seidel é um método iterativo, ou seja, ele não procura a solução exata, porém, ele é mais rápido do que o Método da Eliminação de Gauss, podendo, muitas vezes, ser preferível.

A vantagem do Método da Eliminação de Gauss está na representação do valor exato das incógnitas do sistema após um número finito de operações. O método é muito eficaz para determinação da solução de um sistema com poucas incógnitas. Porém, a desvantagem surge quando o sistema possui um número relativamente grande de equações, desta forma, o número de operações necessárias é absurdamente grande, sendo desejada encontrar a solução aproximada para o sistema através de métodos iterativos.

Figura 5.20: Implementação dos algoritmos para a solução do modelo matemático

(a)

```
> GaussSeidel := proc (A, B, b, x, n, iteracao)
local i, j, k, g, soma, R, C;

R := Matrix (n);
x := Vector(n);

R[1,1] := A[1] + B[1];
R[1,2] := -B[1];
R[n,n-1] := -B[n-1];
R[n,n] := A[n]+B[n]+B[n-1];

for i from 2 to (n-1) do
  R[i,i-1] := -B[i-1];
  R[i,i] := A[i]+B[i]+B[i-1];
  R[i,i+1] := -B[i];
end do;

k := 0;

for i from 1 to n do
  g[i] := (b[i]/R[i,i])
  for j from 1 to n do
    if (i=j) then
      C[i,j] := 0;
    else
      C[i,j] := -(R[i,j]/R[i,i]);
    end if;
  end do;
end do;

while (k < iteracao) do
  for i from 1 to n do
    soma := 0;
    for j from 1 to n do
      soma := soma + (C[i,j]*x[j]);
    end do;
    x[i] := soma + g[i];
  end do;
  k := k+1;
end do;
end;
```

(b)

```
> Gauss := proc (A, B, b, n)
local i, j, k, x, m, soma, R;

R := Matrix (n);
x := Vector(n);

R[1,1] := A[1] + B[1];
R[1,2] := -B[1];
R[n,n-1] := -B[n-1];
R[n,n] := A[n]+B[n]+B[n-1];

for i from 2 to (n-1) do
  R[i,i-1] := -B[i-1];
  R[i,i] := A[i]+B[i]+B[i-1];
  R[i,i+1] := -B[i];
end do;


for k from 1 to n-1 do
  for i from (k+1) to n do
    m := R[i,k]/R[k,k];
    for j from k to n do
      R[i,j] := R[i,j] - m*R[k,j];
    end do;
    b[i] := b[i] - m*b[k];
  end do;
end do;

x[n] := b[n]/R[n,n];
for i from n-1 by -1 to 1 do
  soma := 0;
  for j from i+1 to n do
    soma := (soma + (R[i,j])*(x[j]));
  end do;
  x[i] := (b[i]-soma)/R[i,i];
end do;

print("Solução do Sistema");
for i from 1 to n do
  print(evalf(x[i]));

end do;

end;
```

Fonte: Relatório final do Grupo.

Figura 5.21: Solução do sistema obtido pela Eliminação de Gauss

"Solução do Sistema"
0.02054373354
0.01462529357
0.002348587289

Fonte: Relatório final do Grupo

Situação Final

No fechamento do trabalho os alunos colocam as seguintes considerações:

Com o trabalho, concluiu-se que, quando o número de malhas analisadas é pequeno, é preferível fazer uso do Método da Eliminação de Gauss, uma vez que ele é exato. A velocidade de processamento de ambos os métodos é algo que deve ser levado em consideração, porém, para poucas malhas, a diferença de velocidade entre ambos não é perceptível.

O uso de modelagem matemática, especificamente, os métodos para solução de sistemas lineares, mostrou-se eficaz para determinação das correntes em um circuito de múltiplas malhas, uma vez que a solução do sistema com o uso de ferramentas computacionais retornou os valores reais das correntes medidas com o Multímetro na função de Amperímetro.

Atualmente, a representação matemática de modelos reais vem sendo muito útil. Os processos de representação envolve inúmeros conceitos que eliminam os possíveis erros de representação, dentre eles, a escolha do método. Isto permite a análise e desenvolvimento computacional de fenômenos relativamente complexos, o que seria um trabalho muito árduo, praticamente impossível de ser realizado à mão, o que torna a utilização de ferramentas computacionais interessante.

No próximo capítulo, a análise das relações que os alunos estabeleceram a partir do ambiente de modelagem, e os resultados que nos permitem considerar que a UEPS foi exitora, será desenvolvida.

6 ANÁLISE DOS DIFERENTES CONTEXTOS EDUCACIONAIS

A análise dos dados coletados nos diferentes Contextos da pesquisa é baseada na metodologia da Teoria Fundamentada nos Dados, seguindo orientações de Charmaz (2009). Embora subsidiada pelos referenciais teóricos que fundamentam a pesquisa, expostos nos capítulos anteriores, a análise vem cercada de nossa compreensão e entendimento. O intuito com a abordagem adotada é de buscar nos dados reflexões à nossa questão de pesquisa, bem como das questões auxiliares enunciadas no Capítulo 2:

> ***Investigar como ambientes de ensino e de aprendizagem que consideram atividades de modelagem matemática, dispõem de recursos tecnológicos e são organizados segundo os princípios de uma UEPS, viabilizam a aprendizagem significativa dos estudantes.***

1. *Que indicativos de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora podemos identificar quando os alunos se envolvem em atividades de modelagem matemática mediadas pela tecnologia?*

2. *De que forma as atividades de modelagem matemática integradas a UEPS potencializam a aprendizagem significativa dos estudantes?*

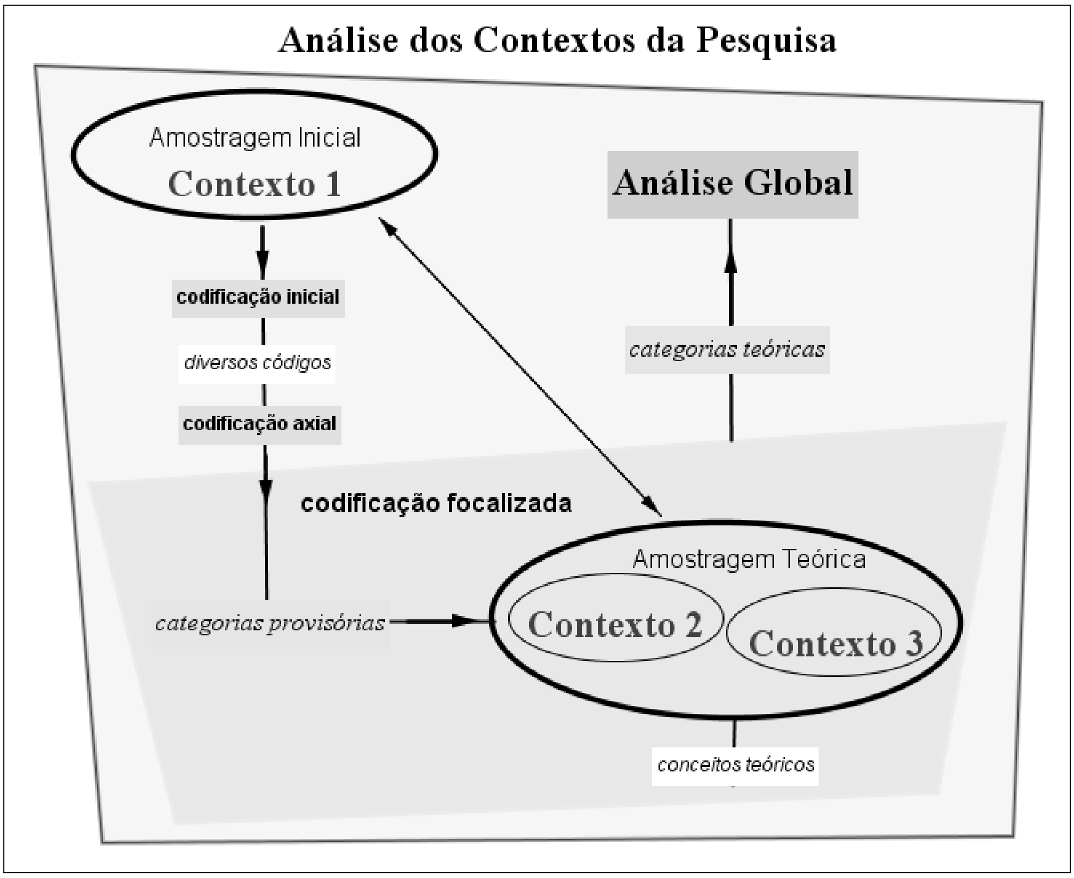
3. *De que forma os estudantes se apropriam das tecnologias durante as atividades de modelagem matemática?*

Embora cientes de que os dados é que conduzirão nossas análises, pois, de acordo com Charmaz (2009, p.72), "A pesquisa real que você realiza por meio da análise dos seus dados provavelmente se diferencia, ao menos até certo ponto, daquilo que você possa ter planejado anteriormente no seu projeto ou proposta de pesquisa.", consideramos a seguinte estrutura para a análise dos diferentes Contextos da pesquisa: inicialmente fazemos uma análise específica de dados provenientes das atividades desenvolvidas em cada Contexto; depois, realizamos uma análise global, considerando os três Contextos.

Os dados referentes a cada Contexto foram organizados no decorrer das coletas e o tratamento de cada conjunto de dados, visando a análise, foi realizado com o suporte do *software* ATLAS.ti. Para cada Contexto da pesquisa associamos *unidades hermenêuticas* e a cada qual vinculamos os documentos correspondentes aos dados, como: relatórios, transcrições de arquivos de áudio e vídeo, recortes de atividades produzidas pelos participantes, vídeos, imagens, etc. No *software* estes documentos são denominados *documentos primários* e cada um desses documentos foi codificado como ilustra a Figura D.2 (Apêndice D), que exibe a interface do aplicativo com a codificação inicial de um documento do Contexto 1. O ATLAS.ti nos permite ficar bem próximo dos dados, como sugere Charmaz (2009), e facilita o movimento de ir e vir pelos dados, já que os documentos primários ficam disponíveis permitindo-nos alternar entre eles, assim como permite que nossa codificação inicial possa ser revisitada, revisada e complementada a qualquer momento.

Uma representação de como procedemos a análise dos dados, seguindo orientações da Teoria Fundamentada em Dados, é ilustrada pela Figura 6.1.

Figura 6.1: Esquema representativo para a Análise dos Dados



Fonte: elaborado pela autora.

Durante a codificação inicial, procuramos avaliar o que os dados sugeriam, do ponto de vista de quem e qual categoria um dado específico indicava. Também procuramos codificar com palavras que indicassem ações, conforme recomendação teórica: "A codificação na teoria fundamentada incentiva o estudo da ação e dos processos" (CHARMAZ, 2009, p.70). Na sequência buscamos refletir para avançar e realizar a codificação axial com vistas a codificação focalizada, que implica em utilizar os códigos anteriores mais significativos para a tomada de decisão sobre quais códigos iniciais permitem uma compreensão analítica melhor para categorizar os dados de forma incisiva e completa.

Com esse intuito, optamos por revisitar os códigos, e muitas vezes os dados, de modo a identificar as categorias emergentes, relacionadas à problemática de nossa investigação. A fim de organizar e apresentar de forma concisa as relações entre os códigos, que indicam ações, ideias, conceitos, lançamos mão de um recurso do programa que permite a construção de redes semânticas (as *networks*), exemplificadas na Figura D.3 e na Figura D.4 do Apêndice D. Para a constituição de cada rede, fizemos o esforço de identificar os códigos e as relações entre eles, considerando os dados e a cronologia do desenvolvimento de cada Contexto investigado.

No decorrer desse capítulo, repetidas vezes nos remetemos aos códigos obtidos durante as codificações inicial, axial e focalizada. Esses códigos, em geral, são palavras ou uma sequência de palavras que indicam ação e, nesse texto, serão inseridas sempre no formato itálico para melhor identificação.

6.1 Codificação Inicial: Análise do Contexto 1

Como a UEPS foi estruturada previamente, respeitando um cronograma no calendário letivo, a codificação, segundo a Teoria Fundamentada em Dados, se deu no decorrer do desenvolvimento da mesma. Esse fato exigiu que estivéssemos intensamente envolvidos e comprometidos com os dados, atentos para a necessidade de organizar a coleta de novos dados de modo que permitisse averiguar fragilidades iniciais aula após aula. Assim, a codificação inicial se deu pelos dados decorrentes das aulas e atividades complementares que os alunos iam entregando no decorrer da unidade de ensino, bem como das atividades de modelagem.

Para tanto, foram considerados como dados os registros dos alunos no desenvolvimento das atividades propostas e os relatórios elaborados pela professora pesquisadora imediatamente após cada aula, as transcrições de arquivos audiovisuais dos encontros de orientação e da apresentação dos trabalhos, bem como da ficha de acompanhamento dos grupos elaborada pela professora pesquisadora, além de textos produzidos pelos alunos, do relatório final da atividade de modelagem dos grupos, de e-mails trocados com a professora, de atividades refeitas pelos alunos após a vista das correspondentes atividades iniciais. Desse modo, à medida que sentíamos necessidade de melhor compreender alguns dados iniciais, organizávamos questões pertinentes para que na próxima aula ou encontro obtivéssemos informações que permitissem avançar em compreensão.

A elaboração de memorandos auxiliou na comparação dos dados, contribuiu para iniciar o processo analítico e a realização da codificação axial e a elevação de determinados códigos iniciais a categorias provisórias. Nesse Contexto, a retomada da pesquisa de campo se dava a cada novo encontro.

Consoante com os objetivos da pesquisa, apresentamos a seguir considerações decorrentes da codificação inicial, buscando um direcionamento nas análises que pretendemos a respeito desse Contexto da pesquisa.

6.1.1 Conhecendo o Contexto

Com o intuito de oferecer condições para que, no decorrer da unidade de ensino se estabelecesse um ambiente de modelagem, a proposta foi exposta aos participantes no primeiro encontro, tendo boa receptividade. No decorrer da UEPS nosso intuito foi conhecer os participantes enquanto alunos, a relação que eles estabeleciam com aquele ambiente de ensino, suas atitudes e em decorrência, sua aprendizagem. Assim, realizamos a codificação inicial buscando uma primeira compreensão do Contexto de pesquisa, sobre o qual passamos a tecer considerações.

Iniciamos pelos dados provenientes de um levantamento inicial (ver seção A.1.1 no Apêndice) em que se pretendia conhecer como os alunos se definiam enquanto usuários de recursos tecnológicos. Os alunos foram convidados a responder ao levantamento, disponível apenas na versão *on line*, em que para acessá-lo receberam um e-mail com o *link* de um formulário eletrônico. De fato, essa estratégia tinha a intenção de perceber se os alunos se mobilizariam a acessá-lo e respondê-lo, pois essa atividade não fazia parte da avaliação somativa, mas poderia nos trazer informações relevantes quanto a familiaridade com a tecnologia, servindo-nos como fonte de levantamento de conhecimentos prévios, o que nos ajudaria no planejamento das atividades seguintes. Os alunos foram lembrados várias vezes sobre o convite a responder o formulário, mas não foram obrigados a fazê-lo. As respostas dos cinco alunos que se propuseram a responder podem ser encontradas na seção A.1.2 do Apêndice A.

Essa amostra da turma indica que a atitude dos alunos em relação ao uso da tecnologia não é consensual. Quanto ao uso que os alunos fazem da tecnologia, identificamos que varia da declaração de não uso até o uso de uma diversidade de recursos (*tirando dúvidas via internet para não ter que procurar um professor*, *tecnologia como parceira nos estudos*, *alegando ter experiência com uso de tecnologias no ensino*, *reconhecendo ser difícil usar tecnologia em ambientes escolares*, *usando apenas o software para apresentações de slide*). Um parecer comum que se apresenta, indica que não havia estímulos para explorar recursos tecnológicos nas disciplinas do curso (*alegando uso limitado de recursos tecnológicos nas disciplinas do curso*, *exemplificando mau uso de recursos tecnológicos nas aulas, enquanto aluno*). Quanto à motivação dos alunos em usar a tecnologia como aliada no exercício da docência, identificamos uma correlação positiva indicando que os alunos que responderam negativamente são os mesmos que alegam não fazer uso da mesma como apoio em suas atividades de estudo, enquanto aqueles que alegam usá-la como apoio ao estudo dizem-se motivados a continuar usando na sua prática profissional (*sem motivação para usar tecnologias na atuação como docente*, *alegando não ter usado tecnologias em suas aulas*, *reconhecendo que a tecnologia oferece benefícios para professor e alunos*, *indicando iniciativa de driblar as dificuldades encontradas na escola para usar tecnologias com os alunos*, *motivado a usar tecnologias na atuação como docente*).

Tendo em vista essas constatações, aliada ao baixo índice de alunos que se propuseram a responder ao formulário, entendemos ser pertinente a observação dos usos que os alunos fazem da tecnologia e como se manifestam frente as formas de uso da tecnologia proporcionadas pelas atividades de modelagem no decorrer da UEPS.

A observação da dinâmica das aulas, da interação dos alunos nas atividades de modelagem, bem como em outras atividades, e as produções dos alunos no decorrer da UEPS nos levam a destacar outras considerações relevantes em nosso entendimento.

No primeiro encontro foi solicitado que todos desenvolvessem individualmente uma atividade para identificar conhecimentos prévios que seriam necessários para o estudo do tópico de equações de diferenças. Essa atividade foi realizada no início da aula e entregue para a professora em seguida; percebemos que a discussão sobre os textos e o vídeo que seriam o embasamento para o desenvolvimento da primeira atividade de modelagem foi tímida (*introduzindo o conceito por meio da situação-problema*, *introduzindo características da modelagem matemática indiretamente*, *participação tímida dos alunos*), embora alguns alunos se evidenciassem por fazer sugestões, colocar suas dúvidas, e revelar conhecimentos prévios; quanto a habilidade dos alunos em fazer modelagem matemática, foi possível constatar que esta não era desenvolvida. Os alunos mencionaram que durante o primeiro bimestre haviam tido contato com alguns exemplos de atividades de modelagem embora não tenham se envolvido no desenvolvimento de uma atividade dessa natureza (*levantando o conhecimento prévio dos alunos*).

No segundo encontro, relembrar os principais encaminhamentos da aula anterior se fez necessário por duas razões: primeira, dos doze alunos presentes no segundo encontro, apenas sete haviam assistido à aula anterior; segunda, a retomada do processo de fazer modelagem que se estava introduzindo aos alunos e também a necessidade de iniciar a diferenciação progressiva dos conceitos (*retomando conceitos e procedimentos com mapa conceitual* (Figura A.3)), com a finalidade de propiciar a aprendizagem significativa de equações de diferenças e também do fazer modelagem. Nesse encontro, a participação dos alunos foi mais espontânea, talvez devido ao tema em discussão "orçamento familiar" que pareceu ser de interesse de todos, aliado ao fato de que alguns alunos estavam cursando a disciplina de Matemática Financeira, permitindo compartilhar alguns conceitos próprios dessa área na formulação dos modelos (ver Equações A.3, no Apêndice A), como expressaram os próprios alunos (*reconhecendo aplicação do conceito em outra situação*).

A princípio, os dados indicavam uma turma cujos alunos se expressavam pouco quando solicitados a expor suas opiniões ou dar sugestões. Nossa codificação inicial dá indicativos de uma turma pouco participativa no que se refere às condições para a ocorrência da aprendizagem significativa dos alunos (*participação tímida dos alunos*, *desconforto para a modelagem*, *solicitando realização de tarefa pendente*, *flexibilizando execução de tarefas*, *avaliando falta de compromisso com entrega de atividades*, *identificando dificuldades com o conteúdo*, *estranhando o procedimento*, *indício de insegurança*). Era preciso entender se este era um cenário provisório, talvez em decorrência da mudança na condução da disciplina. Assim, continuamos a buscar nos dados a compreensão sobre como se caracterizava a turma e cada indivíduo da mesma.

Comparando dados, identificamos tendências contrastantes, dentre as quais estavam várias indicações de condições positivas para a ocorrência da aprendizagem significativa (*demonstrando interesse*, *participação mais ativa*, *trabalhando colaborativamente*, *famili-*

arizando com a modelagem, *realizando simulações*, *avançando em complexidade*, *aprendendo matemática para encontrar o modelo*).

6.1.2 Atividades de Modelagem Discutidas

Seguindo em busca por compreender as relações e implicações do desenvolvimento dessas atividades para a aprendizagem, vamos dirigir o olhar para duas atividades de modelagem matemática: uma desenvolvida em colaboração com os alunos, considerada do segundo momento de familiarização; outra, relativa ao terceiro momento de familiarização, desenvolvida por um grupo de alunos.

6.1.2.1 *Análise da Atividade de Modelagem: Irrigação Noturna*

A codificação nessa atividade se deu a partir da descrição apresentada na seção 5.1.3, na transcrição do arquivo de vídeo com parte do desenvolvimento da atividade, no relatório das aulas destinadas a essa atividade e em registros produzidos pelos alunos, de atividades relativas ao tema.

Inicialmente identificamos que apenas sete alunos estavam presentes em todo desenvolvimento da atividade que se deu ao longo de três encontros (C1(B3), C1(C2), C1(B1), C1(D1), C1(D2), C1(E3) e C1(F1)). Observamos que dentre eles estavam os alunos que mais contribuíram com as discussões e com o encaminhamento da atividade. O aluno C1(B3) foi exemplo de assiduidade durante todos os encontros, embora sua expressão perante a turma durante as aulas tenha sido despercebida. Já a aluna C1(A2), apesar de não ter acompanhado as discussões do primeiro encontro, em que a atividade de modelagem foi estruturada, teve uma *participação ativa* nas fases de matematização, resolução e interpretação de resultados e validação.

Como esta atividade de modelagem foi planejada pela professora com o intuito de atribuir maior responsabilidade aos alunos, observamos que a mediação da professora, de certo modo, garantiu o avanço pelas fases da modelagem, no sentido do exposto na seção 4.2. Assim, procuramos, nos dados, identificar as ações cognitivas dos alunos.

A compreensão da situação se deu com os alunos *trabalhando em grupos*, sendo que foi *comunicando e pensando juntos* que os alunos e professora foram *estabelecendo encaminhamentos para a atividade de modelagem*. A partir das informações disponibilizadas aos alunos, de outras obtidas por meio de computador portátil dos próprios alunos e, de discussões e indagações, a turma passou a mostrar *participação mais ativa* e assim várias problemáticas foram sugeridas inicialmente.

Nessa ocasião a intervenção da professora, sugerindo que algumas condições poderiam aparecer como hipóteses (*orientando para a modelagem*), colaborou com a definição do problema, que passou a ser denominado Irrigação Noturna. Durante a estruturação da situação, os alunos demonstravam certo *desconforto com a modelagem*, que de fato mais parecia uma dificuldade de não saber, a princípio, que conteúdo matemático poderia ser usado nessa situação.

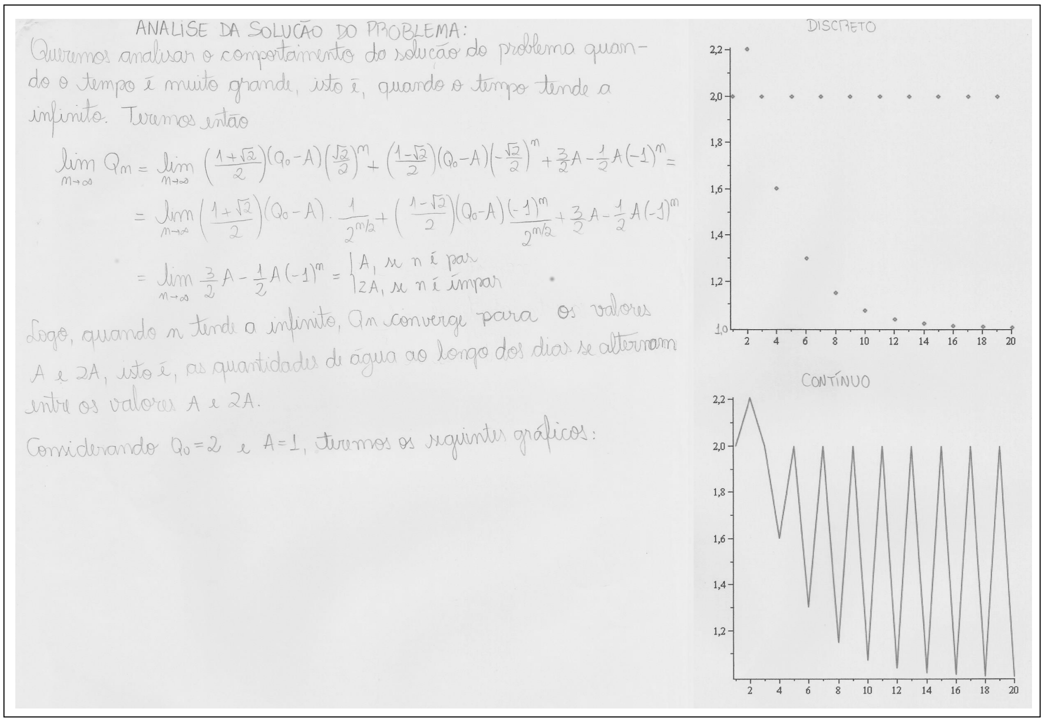
A primeira tentativa de elaborar um modelo descrito por equação de diferenças sugeria uma equação de primeira ordem, pela expressão verbal do aluno C1(B2), que podemos interpretar como um primeiro modelo mental para a situação (*partindo do que o aluno já sabe*). Em seguida, discutindo com os colegas (*pensando juntos*), a questão de que haveria um comportamento diferente na irrigação no período noturno e no período diurno, o primeiro modelo foi refutado pelo próprio aluno. C1(D1) mencionou que lembrava ter estudado algo assim em equações diferenciais e isso foi o que despertou a possibilidade de pensarem em um modelo de equações de diferenças de segunda ordem (*indicando conhecimento prévio*, *avançando em complexidade*, *envolvendo-se com o problema*). Estão explicitadas aqui as ações cognitivas matematização e síntese.

Quanto a resolução, está exigiu a abordagem de novos conceitos (*aprendendo matemática para encontrar o modelo*). Embora os alunos conseguissem estabelecer analogia com um método estudado para a resolução de equações diferenciais de segunda ordem (*diferenciando conceitos à medida do necessário*), não conseguiram fazer a transposição de imediato, havendo a necessidade da intervenção da professora (*revisão de conhecimentos prévios*).

O momento destinado à análise do modelo foi propício para avaliarmos o compromisso dos alunos com a realização da tarefa definida previamente a fim de buscar evidências de ações cognitivas dos alunos, individualmente, na interpretação e validação do modelo. Propositalmente foi solicitado que os alunos entregassem suas considerações sobre a análise antes do início da discussão no grande grupo. Os recortes ilustrados na Figura 6.2 e Figura 6.3 se referem aos registros dos alunos C1(A2) e C1(D2). A Figura 6.2 apresenta o código *analisando o modelo desconsiderando o contexto*, que confirma uma característica da aluna de se ater à matemática, embora também não tenha esboçado uma análise sobre o comportamento gráfico, nem justificado a necessidade de exibir o gráfico para as variáveis discreta e contínua. O aluno C1(D2), em um primeiro momento, apresentou a *análise pontual do modelo, contextualizada* e somente na sequência fez a interpretação do modelo para todos os pontos do domínio, como indica a Figura 6.3.

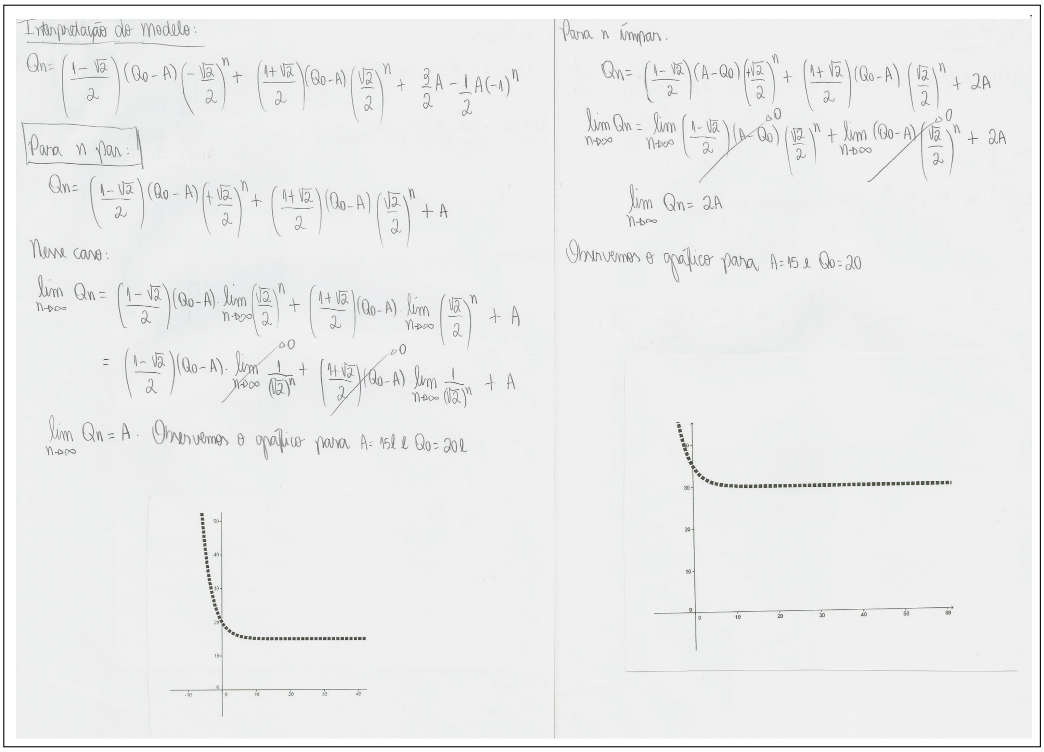
Esses procedimentos dos alunos revelam a importância da simulação com o recurso computacional na análise do modelo, pois, viabiliza a manipulação dos parâmetros e a visualização simultânea dos valores da tabela e do gráfico (*usando recursos tecnológicos para interpretação*), ao mesmo tempo pode dar condições para o aluno atribuir significado à situação-problema inicial a partir dessa análise do modelo, promovendo a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

Figura 6.2: Registros de C1(A2) da análise do modelo de irrigação noturna.



Fonte: acervo da autora.

Figura 6.3: Registros de C1(D2) da análise do modelo de irrigação noturna.



Fonte: acervo da autora.

6.1.2.2 *Análise da Atividade de Modelagem do Grupo 4: Lixo no Brasil*

Optamos por analisar os dados referentes ao Grupo 4, composto pelas alunas C1(A4) e C1(B4) e pelo aluno C1(C4), durante o desenvolvimento da atividade de modelagem que foi descrita na seção 5.1.4, por se tratar do grupo que mais interagiu com a professora presencialmente e virtualmente, gerando assim, um volume considerável de dados; outra razão foi de comparar informações obtidas na codificação do formulário inicial com os fatos no decorrer do trabalho em grupo.

Com a codificação dos dados percebemos que boa parte dos códigos remetiam a ações cognitivas, assim, fizemos a seleção e representamos o que os dados nos permitiram identificar. A Figura D.3 (Apêndice D) mostra como foi possível organizar e relacionar os códigos com uma estrutura que remete àquela das fases de modelagem e ações cognitivas dos alunos de acordo com o exposto na seção 4.2, ilustradas pela Figura 4.1.

Mapear as ações cognitivas do grupo ao desenvolver a atividade de modelagem e mesmo na comunicação deste para a turma, como foi feito ao final da unidade de ensino, pode revelar efeitos da UEPS para a aprendizagem dos alunos, bem como nos permite avaliar a ocorrência da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora.

Devemos mencionar que boa parte da comunicação da professora com o grupo se deu por intermédio da aluna C1(A4), pois, era ela quem mantinha contato por e-mail (sempre com cópia para os colegas), o que ocorreu com frequência. Assim, boa parte dos códigos são decorrentes de dados dessa aluna, embora a participação dos demais tenha sido percebida e codificada.

O diálogo inicial (ver seção 5.1.4) contribuiu para a definição do tema a partir das ideias iniciais. Essa discussão foi propícia para que o grupo definisse conjuntamente o problema que seria estudado. A definição não se deu de modo imediato, embora no primeiro encontro de orientação tenha sido possível reconhecer no grupo a ação cognitiva compreensão da situação e a ação cognitiva estruturação da situação. Para que possamos tornar explícitas as relações entre os códigos e a pertinência de nossas colocações, mostramos na Figura D.4 (Apêndice D) os excertos dos documentos primários dos quais emergiram os códigos.

A elaboração de estratégias pelo grupo foi percebida desde a fase de inteiração que culminou na definição do problema, quando C1(A4) mencionou que o aumento de lixo deveria ser relacionado com o aumento da população. Na mesma oportunidade, a discussão levou o grupo a elencar variáveis e também hipóteses o que indica avanço no sentido da modelagem matemática e sugere a ação cognitiva estruturação da situação.

Atentamos para o fato de o grupo não ter percebido, antes da apresentação do trabalho, que o modelo obtido como solução da equação de diferenças estava incorreto. Isso indicou um equívoco quanto a compreensão conceitual, principalmente em relação a técnica de resolução da equação de diferenças, embora o grupo tivesse demonstrado entendimento sobre o conteúdo na fase de matematização e de resolução e como indicavam as ações cognitivas de matematização e de síntese.

A constatação de um erro na dedução do modelo foi compartilhada com o grupo, os colegas de turma e as professoras na ocasião da comunicação do trabalho para a turma (ação cognitiva comunicação e argumentação). Assim, a ação cognitiva interpretação e validação não fez sentido naquele momento e abriu-se uma discussão para identificar o problema conceitual/técnico. Percebeu-se, na ocasião da apresentação, que o grupo intencionou usar um recurso tecnológico para esboçar o gráfico que expressaria a situação final da modelagem do problema, mas, que houve limitações nesse sentido. Um novo encontro de orientação foi agendado a fim de revisitar aspectos teóricos e o processo de construção do modelo, de acordo com os princípios de diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

A compreensão conceitual do grupo foi evidenciada posteriormente quando um novo relatório contendo a atividade de modelagem foi entregue (ver seção 5.1.4), indicando aprendizagem significativa do conceito da equação de diferenças.

Ao analisar esse grupo, buscamos entender a relação dos alunos com a tecnologia e os usos que os mesmos fazem da tecnologia com vistas à aprendizagem. Na Figura D.5 (Apêndice D), estão representadas estas relações estabelecida após a codificação inicial.

Os dados indicam que, embora os alunos não demonstrem familiaridade com o uso de recursos tecnológicos, como expressam os códigos *conhecimento limitado de recursos tecnológicos*, *acesso limitado a internet*, *pouca frequência de uso de e-mail*, *desmotivação para o uso de TICs*, o grupo demonstrou em diversas ocasiões que a tecnologia estava presente em suas ações, tendo em vista outros códigos como *internet como fonte de pesquisa colaborando pela internet*, *uso de tecnologia para comunicação*, *tecnologia para comunicar o trabalho*. Considerando que não houve imposição da professora em relação ao uso da tecnologia, podemos inferir que os alunos usaram desses recursos, à medida que se sentiram confortáveis.

Nesse sentido, é razoável supor que o fato de terem emergido códigos como *alegando pouco contato com recursos tecnológicos no curso*, *dificuldades com o Excel*, *desmotivação para o uso de TICs*, revela características do ambiente de ensino a que estão submetidos esses alunos, no caso, o curso de graduação. De fato, tradicionalmete em cursos da área de Exatas, como no caso da Matemática, são escassas demonstrações de inserção de tecnologias na sala de aula. Porém, percebemos que a proposta de atividades de modelagem estimulou esses alunos a lançar mão de recursos específicos.

Dentre as aprendizagens que emergiram em decorrência dessa atividade de modelagem, mencionamos o uso de recurso computacional no esboço do gráfico (ver seção 5.1.4). No entanto o grupo abriu mão do uso do *software* por supor que o mesmo era limitado. Essa dificuldade poderia ter sido superada a tempo se o grupo recorresse à professora, se consultasse o manual de ajuda do programa ou mesmo se fizesse uma busca na *Internet*, como ocorreu após a apresentação do trabalho. Isso pode indicar que a falta de hábito ou falta de incentivo ao uso de tais recursos influencia na motivação do aluno a romper barreiras que poderiam contribuir para a aprendizagem significativa.

A representação gráfica gerada pelo *software* mencionado por C1(C4) e encaminhada no relatório final do grupo indica que houve a aprendizagem do uso desse recurso, mobilizada pela oportunidade de discutir as dificuldades iniciais. Os códigos *resgatando problema com uso do software*, *apresentando propriedades do software*, *entendendo o recurso tecnológico*, *usando editor de equações* foram evidenciados a partir do encontro posterior à apresentação do trabalho.

No decorrer da UEPS, tínhamos a intenção de evidenciar se de fato o trabalho do grupo estava sendo colaborativo, pois, alguns momentos lançamos dúvidas a esse respeito, já que boa parte da comunicação no desenvolvimento da atividade de modelagem se deu por intermédio da aluna C1(A4), mesmo quando o grupo estava reunido. Decidimos então buscar nos nossos códigos, indícios que nos permitissem averiguar esse fato. A Figura D.6 (Apêndice D) nos ajuda a perceber as ações e atitudes do grupo no decorrer da atividade de modelagem. O acompanhamento do grupo no decorrer da atividade de modelagem nos permite tecer algumas considerações.

A princípio parecia que os alunos não estavam comprometidos igualmente com o trabalho e que C1(A4) seria a executora do trabalho enquanto os demais teriam uma participação figurativa. Os indícios que nos levaram a levantar essa suspeita eram: inicialmente apenas C1(A4) havia respondido ao formulário inicial; ela também fazia a comunicação por e-mail *falando pelo grupo*; além de que, no primeiro encontro de orientação ficou claro que C1(A4) é que havia pesquisado sobre possíveis temas para desenvolverem o trabalho, pois, falava *usando o singular* conforme mostra a codificação inicial. No entanto, desde o primeiro encontro, essa percepção foi se modificando, a medida que as discussões tinham a participação de todos e as ideias eram apresentadas e discutidas. Pode-se constatar que o grupo estava *pensando junto* enquanto discutia a situação que estava sendo problematizada, como indicam trechos das transcrições na seção 5.1.4.

Os três componentes desenvolviam as atividades desta disciplina em conjunto e nos deram o entendimento de serem um grupo natural dentro da turma. Isso provavelmente se deve ao fato de que esses alunos não faziam o quarto ano do curso regularmente, como alegaram as alunas:

> C1(A4): [...] a gente tá fora da turma em si, a gente tá meio por fora, a gente faz outras matérias.
>
> C1(B4): A gente faz poucas matérias, então quase não vem na UEL.

No que foi possível identificar do perfil dos alunos, no decorrer das atividades, C1(A4) se mostrou mais empenhada e comprometida com a tarefa. C1(B4) era a integrante menos falante, embora se mostrasse sempre atenta as discussões, fazendo pequenas intervenções, em geral respondendo a algum questionamento ou complementando alguma informação. Já C1(C4) também era expressivo, embora nem sempre as intervenções eram pertinentes ao contexto da atividade.

O acompanhamento desse grupo permitiu-nos concluir que todos os alunos se envolveram e contribuíram para a realização da modelagem, mostraram que deram significação ao processo de modelagem assim como ao conteúdo de equações de diferenças com a qual modelaram o problema do Lixo, sendo capazes de comunicar seu entendimento aos colegas de turma e posteriormente resignificar um conceito impróprio obtido com a resolução equivocada do modelo, como exposto da seção 5.1.4. Não restou dúvidas de que C1(A4) teve um envolvimento mais ativo do que os colegas com a modelagem, pois, novamente o código *falando no singular* foi atribuído à sua fala na transcrição do segundo encontro de orientação, quando ela mostrou ter retomado a resolução do modelo antes do encontro, buscando compreender o erro:

> C1(A4): Hoje eu tentei fazer. Eu fiquei tentando...
>
> Professora: Ah tá, o que você fez pra...
>
> C1(A4): Ah, eu fui colocando um, igual você falou, fui colocando pra dois...
>
> Professora: Você foi substituindo do passo anterior para o passo seguinte?
>
> C1(A4): É, mas deu um somatório...
>
> Professora: É isso aí... Em que somatório você chegou?
>
> C1(A4): Eu cheguei no seis vírgula oito vezes dez à décima, vezes o somatório disso elevado a t, onde t varia de 1 a infinito, no caso.

O acompanhamento e observação da dinâmica do trabalho em grupo nos motivou a instigar os alunos a falar, se expressar, pois o silêncio não significa necessariamente falta de envolvimento com a atividade. O grupo estava reunido e participou da revisão dos processos de diferenciação progressiva e reconciliação integradora promovidos como uma oportunidade de que os significados fossem clarificados e assimilados por todos.

6.1.3 Indicações Decorrentes da Codificação Axial

Com a codificação do Contexto 1, muitos conceitos emergentes dos dados nos permitiram refletir sobre as implicações do ambiente de ensino e de aprendizagem que se estabeleceu a partir da proposta de integrar atividades de modelagem matemática à unidade de ensino potencialmente significativa e de olhar para as relações com a tecnologia. Com isso, um grande volume de conceitos originários da codificação inicial contribuíram para a busca pela compreensão analítica desejada. Por meio do que, na teoria fundamentada, se denomina codificação axial, realizamos a análise que até aqui apresentamos, procurando na relação entre esses conceitos (ou códigos) obter uma compreensão analítica inicial.

Entendemos que alguns aspectos observados mereçam ser destacados para uma reflexão mais cuidadosa. Esses aspectos podem ser entendidos como as categorias emergentes, decorrentes da comparação dos dados. Com isso, daremos continuidade ao trabalho analítico, focalizando a atenção às seguintes categorias:

- *Pensando juntos*: um código recorrente nesse Contexto, seja no trabalho dos grupos, ou no decorrer das atividades de modelagem, no grande grupo, com a professora;

- *Relações com a Tecnologia e seus Usos*: desde o que alegam os alunos sobre o uso da tecnologia até o que de fato se pratica, e como se dá essa relação com a tecnologia;
- *Conteúdo em Foco*: atitudes dos alunos em relação a aprendizagem do conteúdo e evidências de que a modelagem e a tecnologia influenciam a facilitação da aprendizagem significativa na UEPS.

O estudo dos dados no decorrer dessa unidade de ensino nos indica que as categorias emergentes necessitam de mais reflexão. Desse modo, para avançar em nossas reflexões vamos investigar outros Contextos, que também fossem pensados como ambientes de ensino e de aprendizagem que consideram atividades de modelagem matemática, dispõem de recursos tecnológicos e são organizados segundo os princípios de uma UEPS. Consideramos então outros dois Contextos em que o conhecimento dos participantes sobre a modelagem matemática também fosse inicial. Assim, passamos a buscar no Contexto 2 e depois no Contexto 3 dados mais seletivos a fim de refinar e completar o conjunto de categorias principais.

6.2 CODIFICAÇÃO FOCALIZADA

A codificação dos dados no Contexto 2 e no Contexto 3 seguiu os mesmos procedimentos descritos no início desse capítulo, buscando em cada qual avançar na compreensão das questões da pesquisa, no sentido de complementar as categorias elencadas a partir dos dados que conduziram a análise inicial. Cabe lembrar, que ao mencionarmos códigos obtidos no decorrer da codificação dos Contextos, esses serão inseridos sempre no formato itálico como uma forma de os identificar.

6.2.1 Análise do Contexto 2

Procuramos compreender as relações estabelecidas ao longo do minicurso ao analisarmos o material organizado com os registros em vídeo de todo o minicurso, de transcrições parciais do vídeo, dos arquivos com as respostas ao levantamento inicial e ao levantamento complementar e de registros de e-mails recebidos dos participantes após a realização do evento.

Constatamos, no início dos trabalhos, que o grupo era composto por 13 alunos que cursavam graduação em Licenciatura em Matemática, 3 professores do Ensino Básico, 6 professores do Ensino Fundamental e 3 professores de Graduação, sendo que desses, um aluno de graduação era também professor do Ensino Fundamental, uma professora do Ensino Fundamental era também aluna de Mestrado e um professor de Graduação era também aluno de Doutorado.

Ao identificar os conhecimentos prévios dos participantes, por meio do levantamento inicial (seção B.1.1, Apêndice B), em relação ao uso de recursos tecnológicos, percebemos que apenas dois alunos declararam não ter hábito de usá-los nas suas atividades.

A maioria respondeu que conhece *softwares* relacionados a Matemática e todos os que responderam de forma afirmativa citaram o Geogebra como um deles. A maioria também alega ter motivação para usar recursos tecnológicos, *reconhecendo a importância de usar tecnologias no ensino*.

Diversos códigos indicam que os participantes são *interessados por recursos tecnológicos*, de modo geral usam tais recursos em alguma medida, mas encontram empecilho no que se refere a estrutura física dos ambientes educacionais. Enquanto alguns apenas justificam o *uso limitado* ou *alegam não estar motivados em decorrência do pouco conhecimento*, outros estão *usando estratégias para driblar estrutura inadequada na escola* ou *já estão usando tecnologias de diversas formas*. De fato, o título do minicurso "Atividades de Modelagem com o uso de Recursos Tecnológicos" já é esse convite, no entanto, eles pouco conheciam sobre modelagem.

O levantamento inicial indicou que os participantes declaram ter pouco conhecimento sobre a modelagem matemática, como indica a Tabela 6.1, com resultados percentuais para o grau de familiaridade em uma escala de 1 à 5, onde 1 indica menor familiaridade e 5 maior familiaridade.

Tabela 6.1: Sobre a familiaridade dos participantes com a modelagem matemática (em %)

Grau de familiaridade	1	2	3	4	5
Conheço a modelagem matemática	8	16	52	16	0
Já fiz trabalhos de modelagem	36	20	16	8	4
Uso modelagem em minhas aulas	44	16	24	0	0
Leio textos sobre modelagem	32	20	24	16	0

De acordo com o que alegam os participantes, apesar de o termo modelagem matemática não ser totalmente desconhecido, a maioria indicou pouca familiaridade. Mas, o interesse em compreender o que é, e como fazer modelagem matemática (*interessado em conhecer a modelagem*, *iniciando o trabalho com modelagem*, *tentando derrubar um preconceito com a modelagem*) aliado ao uso de tecnologias foi a motivação para a procura pelo minicurso.

Os comentários que seguem foram registrados por diferentes participantes ao responderem o levantamento inicial no espaço denominado "Espaço destinado a algum comentário oportuno que você queira fazer"(seção B.1.1, Apêndice B).

> C2(18): faço uma mistura de resolução de Problemas, com Investigação e com Modelagem. Sempre faço algo, mexo com os alunos, faço eles recortarem, medirem, sair do lugar, construir gráficos tabelas, pesquisar e escrever textos. Na verdade, estou tentando derrubar um preconceito que criei em relação a modelagem.

> C2(20): Estou no 1º de Licenciatura em Matemática (citou a universidade e cidade sede de seu câmpus), em nossa grade curricular não é um assunto que esteja muito envolvido, apesar de já ter ouvido falar nunca me aprofundei na área, mas pretendo conhecer pois é muito interessante a ideia de trazer para dentro da sala de aula aspectos do mundo real.

> C2(24): Acho extremamente importante a questão das formas de avaliação internas e externas a escola. Como trabalhar com modelagem matemática com métodos arcaicos de avaliação? A modelagem matemática, em alguns casos não seria uma nova forma de conduzir a conduta dos alunos?

Desde o levantamento inicial, foi possível apontar que o interesse pela modelagem matemática remetia a prática docente (*modelagem se torna necessidade*, *questionando sobre modelagem e avaliação*). Embora o minicurso tenha proposto a interação de dois temas, que são entendidos como tendências da Educação Matemática (Modelagem Matemática e Tecnologias), durante o desenvolvimento das atividades, a interlocução com os participantes se deu mais quanto ao processo de modelagem do que com questões relativas ao funcionamento do *software*, por exemplo. Este fato pode ter sido influenciado pela natureza das perguntas dirigidas aos participantes, mais relacionadas com a situação-problema, sua matematização e resolução, e à forma como o recurso foi apresentado.

Levando em conta que não houve de fato a constituição de grupos para o desenvolvimento das atividades, vamos apreciar como se deu a interação dos partipantes na UEPS. Conforme sugerem os dados, mesmo no curto intervalo de duração da unidade de ensino, o convite a contribuir com a efetivação de uma atividade de modelagem foi bem recebido. Embora possa parecer mais natural que o trabalho colaborativo ocorra em situações em que as pessoas se conheçam e se relacionem, percebemos que códigos como *conhecendo o perfil da turma pelo formulário online*, *apresentação do perfil da turma provocando a interação*, contribuiu para desencadear a interação das pessoas.

Enquanto uma situação-problema era apresentada, a fim de exemplificar as etapas do processo de modelagem, ocorreram intervenções no sentido de compreender o desenvolvimento ou mesmo complementar informações (*mencionado conceitos discutidos em outro momento do evento*, *reconhecendo integração de diversos recursos à modelagem*, *compartilhando informações sobre hipóteses*), o que indica que se estava estabelecendo um ambiente favorável à aprendizagem.

À medida que as problemáticas foram propostas, primeiro sobre o lançamento de uma bola (seção 5.2), identificamos momentos cujos dados indicam a *situação inicial promovendo interação* dos participantes, em seguida, estavam *pensando juntos*, *pensando no modelo*, *sugerindo um modelo para o movimento da bola*, *externalizando um modelo mental* e, mais a diante, novamente, discutindo hipóteses para a nova situação-problema, sobre o carrinho de fricção (*software auxiliando com definição das hipóteses*).

A inserção do recurso da videoanálise, com ferramentas que possibilitam escolha do referencial, a partir do qual os dados seriam registrados, levou ao entendimento ou reconhecimento de que, a translação do sistema cartesiano implicaria que os parâmetros do modelo assumiriam outros valores, embora o modelo (quadrático) continuaria a descrever o comportamento da bola (*discutindo um sistema referencial*, *olhando para a realidade, pensando no modelo*, *discutindo a situação inicial pela visualização dos dados e do modelo*). A videoanálise estimulou o *interesse pela modelagem* ao mesmo tempo que ela própria despertou muito interesse (*interesse por conhecer recursos do Tracker*, *interagindo a partir do interesse pela videoanálise*, *mostrando diversas funcionalidades do software*, *explorando diferentes representações para o objeto matemático*).

Outras evidências que indicam o interesse pela modelagem visando a atividade docente foram obtidas ao final do minicurso, *conversando sobre a abordagem em sala de aula*. A modelagem suscita interesse e também questionamentos sobre sua efetivação em ambientes de ensino, tanto de participantes que já atuam na docência quanto de futuros professores (*mencionando experiências que remetem à modelagem*, *questionando se o que faz é modelagem*, *falando sobre o fazer modelagem em diferentes níveis de ensino*).

Quanto a confrontar o que alegam os participantes sobre o uso que fazem da tecnologia e o que de fato ocorre, pouco se pode afirmar, visto que o intervalo de tempo foi insuficiente para a avaliação desse aspecto. De todo modo, o formulário de levantamento complementar (seção B.1.2) apontou que todos que responderam concordam que foi possível aprender algo novo sobre recursos tecnológicos e também concordam que foi possível melhorar o entendimento sobre modelagem matemática.

Nessa UEPS o conteúdo a ser ensinado não era propriamente o conteúdo matemático por meio do qual as situações-problema foram modeladas. O conceito de modelagem, a modelagem com a videoanálise, compreendeu o conteúdo neste caso. Como é próprio da modelagem, aspectos não essencialmete matemáticos foram mobilizados a partir da realidade, levando a matematização das situações. Nesse sentido, entendemos que a modelagem fortalece a UEPS.

6.2.2 Análise do Contexto 3

A seção 5.3 apresentou informações iniciais referentes à proposição do projeto de ensino que resultou no desenvolvimento de diferentes UEPS. Assim, a codificação, nos moldes do que foi mencionado na introdução desse capítulo, ocorreu com o decorrer do projeto, a partir dos dados decorrentes dos encontros de orientação, dos registros eletrônicos dos contatos não presenciais, dos relatórios parciais e final dos grupos, dos formulários de levantamento inicial e final. O intervalo entre um encontro de orientação e outro permitia-nos avaliar os dados para orientar, no sentido de estruturar a unidade de ensino para que fosse potencialmente significativa. A codificação dos dados realizou-se gradativamente, de modo que, à medida que sentíamos necessidade de melhor compreender algumas informações iniciais, prevíamos intervenções pertinentes para que no próximo encontro as lacunas fossem sendo corrigidas a fim de avançar em compreensão.

Apresentamos nessa seção, considerações decorrentes da codificação inicial, buscando um direcionamento nas análises que pretendemos a respeito desse Contexto da pesquisa, para melhorar o entendimento das categorias que emergiram com a amostragem inicial (Contexto 1), atentos ao surgimento de outras categorias que possam colaborar para fornecer respostas às nossas questões de pesquisa.

É nosso interesse olhar para dados de todo o Contexto a fim de caracterizá-lo. Assim, de algum modo, aspectos sobre os trabalhos desenvolvidos pelos trinta e oito alunos que levaram a cabo o projeto, distrubuídos em quatorze grupos, serão mencionados, embora analisemos mais especificamente dois: aqueles cujas atividades foram descritas na seção 5.3. Os demais trabalhos podem ser consultados na seção C.5 (Apêndice C), em uma versão resumida.

Inicialmente, nos voltamos aos dados relativos ao levantamento inicial que os alunos foram convidados a responder (formulário C.1.1, Apêndice C), dos quais vinte e cinco participaram. Das constatações iniciais percebemos que não havia rejeição para as APS-Atividades Práticas Supervisionadas, pelo contrário, todos consideraram como atividades relevantes (*as APS ampliam um conhecimento*, *aplicar o conhecimento com o auxílio do professor*, *estimula o aluno a fazer pesquisa*, *compõe a avaliação*, *traz aplicações de conceitos teóricos*) e o projeto teve boa receptividade.

No mesmo levantamento, todos alegavam fazer uso de recursos tecnológicos para apoiar as atividades de estudo, dentre os quais foram citadas: mecanismos de busca na *Internet* como *Google* e *WolframAlpha*; *sites* que permitem animações/simulações de conceitos; pacotes do *office*; *softwares* como Maple, Geogebra, AutoCad, Origin; computador e calculadora. Quanto à integração da tecnologia às aulas identificamos códigos como: *tecnologia sempre presente*, *usando tecnologia de forma restrita*, *pouca integração de tecnologia às aulas*. As principais formas ou recursos citados como integrantes das aulas foram: *multimídia*, *slides* e animações, troca de material por meio eletrônico (e-mail, página pessoal), linguagem de programação, projetos assistidos por computador, laboratório de informática. Fato que chamou atenção foi a diferença de visão sobre a integração de tecnologias às aulas, enquanto alguns classificam como "bem integrada" outros consideram os mesmos usos como "baixa" integração, como indicam as seguintes respostas à questão: Durante seu curso de graduação, em que medida a tecnologia foi/está integrada às aulas em geral?

> C3(A1): De forma baixa. Sendo de forma geral para melhor compreensão de gráficos nas disciplinas como matemática, fisica e química. E pesquisas em artigos disponíveis na internet para algumas outras matérias.
>
> C3(B6): A tecnologia está bem integrada às aulas, como por exemplo, o uso de recursos computacionais para dar aulas através de programas/*softwares*, projetor em todas as salas e aulas em laboratório de informática.
>
> C3(C14): Nas salas de aulas, a tecnologia esta presente apenas no uso de *datashow*, e o uso de alguns software gráficos. Em aulas de laboratório, sempre utilizamos computadores logo está bem presente.

Por essa razão, buscaremos observar se a forma como diferentes alunos entendem a integração da tecnologia às suas atividades de ensino pode ser reflexo do uso que fazem da tecnologia e como isso pode influenciar nos resultados da aprendizagem.

Os alunos foram consultados, antes de iniciarem o projeto, sobre seu entendimento a respeito da modelagem matemática: Para você o termo "Modelagem Matemática" é familiar? Qual é o seu entendimento sobre o mesmo? (seção C.1.1, Apêndice C). As respostas revelam que boa parte dos alunos alegaram não saber do que se trata, outros que o termo lhes é familiar, embora não saibam defini-lo, e outros ainda esboçaram seu entendimento (*modelagem como simulação*, *avaliar uma situação ou sistema real*, *modelagem como estudo de fenômenos*):

> C3(A4): Um pouco. Tenho apenas uma breve noção como a "descrição" matemática de um fenômeno.
>
> C3(B10): Eu entendo por Modelagem Matemática, representar um fenômeno natural através de um levantamento de dados e estruturá-lo em uma linguagem matemática para compreensão do fenômeno.
>
> C3(C10): Sim, eu acho que é quando você tem um problema real e, para poder trabalhar com ele e encontrar os possíveis dados, sem precisar fazer infinitos experimentos, você modela o problema em uma função (geralmente), a fim de tentar aproximar ao máximo o modelo do problema real.
>
> C3(B13): Não é familiar, o meu entendimento sobre modelagem matemática é a utilização de programas como o Maple para montar uma programação que resolvera a parte matemática de um problema, que normalmente é muito difícil ou trabalhoso para se fazer "na mão".

Esses dados indicam a necessidade de falar sobre o processo de modelagem, o que constituiu uma atividade inicial da UEPS de cada grupo, e a partir desse ponto, foi-se fazendo diferenciação das etapas do processo, especificando-as de acordo com a necessidade de cada grupo no decorrer dos trabalhos.

Foi característico deste Contexto a ausência de uniformidade no andamento dos trabalhos dos grupos. Os dados nos mostram grupos com diferentes e contrastantes níveis de envolvimento, autonomia, dificuldade com a atividade. Embora a proposta visasse a pesquisadora próxima dos grupos para avaliar e orientar de acordo, com o intuito de se alcançar êxito nas UEPS, o ritmo das atividades foi definido por cada grupo. A Tabela 6.2 representa uma visão parcial dos resultados dos trabalhos que orientaram nossas análises. As colunas da tabela foram nominadas a partir da legenda à seguir, por questões de espaço.

(a) : tópico específico do estudo.

(b) : recursos tecnológicos empregados.

(c) : número de encontros presenciais.

(d) : o que se desenvolveu pode ser considerado uma UEPS?

(e) : avaliação do grupo no projeto. A nota média do grupo, que poderia variar de 0 à 3, é resultado da avaliação do grupo quanto aos seguintes aspectos: envolvimento na atividade (individual e do grupo), estrutura do trabalho (organização e coerência), abordagem do conteúdo (quanto ao método e a resolução) que correspondem à avaliação formativa e também somativa.

Tabela 6.2: Alguns dados sobre os trabalhos no Contexto 3

Grupos	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**
G1	Interpolação polinomial: método de Newton_Gregory	*Internet*, Implementação Maple	3	sim	2,5
G2	Ajuste de curvas: mínimos quadrados	*Internet*, Laboratório, Maple, Origin, Excel	5	sim	2,8
G3	Interpolação polinomial	*Internet*, Excel	1	não	0,8
G4	Não identificado	*Internet*, Excel	2	não	1,1
G5	Interpolação polinomial: método de Newton_Gregory	*Internet*, Implementação Maple	3	sim	2,8
G6	Ajuste de curvas: mínimos quadrados	*Internet*, Laboratório Implementação Excel, Origin	3	sim	2,8
G7	Integração numérica: método dos trapézios	*Internet*, Implementação Maple	3	sim	2,6
G8	Ajuste de curvas: mínimos quadrados	*Internet*, Implementação Maple, Geogebra, Excel	2	sim	1,7
G9	Interpolação polinomial: método não definido	*Internet softwate* CNV	2	sim	1,5
G10	Sistemas Lineares: método de eliminação de Gauss e Gauss-Seidel	*Internet*, Laboratório, Implementação Maple	3	sim	2,9
G11	Interpolação polinomial: método de Newton_Gregory	Não houve menção	2	não	1,2
G12	Ajuste de curvas: mínimos quadrados	*Internet*, Excel	4	sim	2,4
G13	Ajuste de curvas: mínimos quadrados	*Internet*, Câmera digital, Laboratório, Tracker, Maple, Origin	3	sim	2,8
G14	Interpolação polinomial: métodos de Newton, Lagrange e Newton-Gregory	*Internet*, Maple, Excel	3	sim	2,4

Com o encerramento do projeto, os alunos foram convidados a responder a um formulário eletrônico (seção C.1.2, Apêndice C) com o intuito de avaliá-lo. Os resultados parciais dessa avaliação do projeto, realizada por vinte e seis alunos, mostram a visão deles sobre a proposta, contribuindo com a nossa própria avaliação. Consideremos alguns aspectos, que solicitamos que fossem pontuados em uma escala de 0 à 10. O resumo da avaliação é mostrado na Tabela 6.3, que indica a pontuação de cada questão pela média aritmética e pelo coeficiente de variação (CV[1])

[1]Coeficiente de variação, definido como o quociente entre o desvio padrão e a média aritmética, representa o efeito da dispersão dos dados em relação à média, em valores percentuais.

Tabela 6.3: Resultados parciais do levantamento final do Contexto 3

Aspecto avaliado	**Média**	**CV**
A proposta de APS na forma de Atividades de Modelagem Matemática no estudo de temas da disciplina de Cálculo Numérico foi adequada?	9,0	12,8
O cronograma proposto foi adequado?	8,8	18,0
Em que medida as orientações com a professora contribuíram com o desenvolvimento da atividade de modelagem?	9,1	15,2
Qual foi o grau de dificuldade do grupo na definição do tema a ser estudado?	6,4	31,2
Qual foi o grau de dificuldade do grupo na identificação do(s) método(s) numérico(s) adequado(s) ao problema?	5,8	46,5
A atividade de modelagem desenvolvida pelo grupo foi relevante para a aprendizagem de conceitos de Cálculo Numérico?	9,0	14,6
O trabalho desenvolvido permitiu aprendizagem de conceitos de outras áreas?	9,1	14,0
Suas expectativas iniciais com o desenvolvimento do trabalho foram satisfeitas?	8,1	26,4
Classifique sua motivação inicial para o desenvolvimento da APS.	7,7	19,9
O grupo trabalhou colaborativamente?	9,4	9,6
Atribua uma nota para sua participação no desenvolvimento da atividade de modelagem.	9,3	11,0
Comparativamente à sua nota, avalie a participação do Integrante 2 no desenvolvimento da atividade de modelagem.	9,3	10,9
Comparativamente à sua nota, avalie a participação do Integrante 3 no desenvolvimento da atividade de modelagem.	9,0	23,3
Classifique sua motivação ao final do desenvolvimento da APS.	8,8	16,2

Esses resultados demonstram, na percepção dos alunos, um efeito positivo da proposta (*APS promovendo integração positiva para aprendizagem*, *é uma forma diferente de aprendizagem*, *pesquisando para fazer modelagem*, *APS complementando entendimento sobre modelagem*, *entendendo modelagem fazendo*, *o conhecimento saia do decorar para o aprender*, *modelagem facilitando aprendizagem*). Chamamos atenção para o aumento da motivação dos alunos com a realização do trabalho, em relação à inicial, embora, observemos uma dispersão maior quando avaliada a satisfação em relação às expectativas iniciais com o trabalho. Alguns comentários nesse sentido:

> C3(B1): Achei uma boa ideia, porque assim o aluno aplica o cálculo numérico e também faz pesquisas a respeito de onde aplicar. Isso faz com que o conhecimento saia do decorar para o aprender.
>
> C3(B8): Quando o trabalho foi proposto, tanto eu como o outro integrante no meu grupo inicial (C3(C8)), ficamos super animados e interessados em desenvolver esse trabalho. Po-

rém, nosso trabalho final não ficou da maneira que queríamos, uma vez que encontramos dificuldade em iniciar o trabalho com o tema que queríamos estudar. Em vista disso, acabamos abandonando o tema inicial e escolhemos outro tema junto com a nova integrante do grupo (C3(A8)). O final do semestre cheio de provas e outros trabalhos para fazer nos impediu que desenvolvêssemos melhor nosso trabalho e admito que isso foi uma falha nossa.

C3(C12): eu teria mais orgulho se o tema inicial de escolha do meu grupo tivesse dado certo, pois seria um trabalho novo em relação à cidade de Londrina e seu trânsito, com dados mais reais, porém, a falta desses dados impediu esse objetivo.

C3(A10): A integração de atividades de modelagem esteve correlacionado com a APS da forma que ao desenvolver um modelo matemático buscando uma solução entre a representação da realidade e a complexidade do modelo e de certa maneira para que a obtenção dos resultados fossem coerentes, assim como sua interpretação da apresentação das principais características do fenômeno em questão.

Quanto aos usos da tecnologia e seu papel integrado às atividades, percebemos que a *Internet* foi um recurso presente em todos os trabalhos, em geral, como ferramenta de pesquisa, seja para obtenção de dados e consulta à literatura referente aos diversos temas estudados, assim como dos conteúdos específicos de Cálculo Numérico, seja *usando tecnologia para a comunicação* entre pares e com a professora, pelas redes sociais ou ferramentas de compartilhamento de dados como o *Google Drive* e *Dropbox*. Além dos *softwares* para: tratamento de dados, implementação de algoritmos, visualização tabular e gráfica dos resultados; em alguns casos, constatamos grupos *usando tecnologias para produção de dados*, como nos trabalhos experimentais dos grupos G2, G6, G10 e G13.

Podemos inferir, com base na codificação inicial, que a relação com a tecnologia difere muito de aluno para aluno, independente de estarem expostos ao mesmo ambiente educacional. As atitudes em relação aos desafios de se aprender novos recursos repercutiram nos resultados apresentados com a finalização dos trabalhos e mesmo na forma como expressaram-se na avaliação do projeto:

C3(B1): foi um erro técnico, o aparelho travou o auxiliar programador, no caso o Maple e me impediu de finalizar como eu gostaria, mas não prejudicou o objetivo do trabalho em si.

C3(A3): alguns programas mais avançados e provavelmente mais adequados para o nosso trabalho não foram utilizados por falta de conhecimento de como utilizar.

C3(B8): Na utilização do *software* matemático tivemos dificuldades em desenvolver no programa aquilo que estávamos pensando.

C3(A10): Não encontrou-se limitações quanto ao desenvolvimento da atividade, pois com o uso dos recursos empregados na análise dos circuitos conseguimos facilitar sua manipulação, através, também dos aspectos como a possibilidade de confirmar determinadas hipóteses relacionadas ao sistemas em questão.

C3(C12): Não sei o quanto a modelagem matemática do meu trabalho se encaixa nos conteúdos vistos em cálculo numérico, porém me gerou grande aprendizagem no programa Excel, o qual o grupo usou pra a construção dos gráficos e no entendimento das linhas de tendência.

C3(C13): a única limitação encontrada foi o desconhecimento do programa tracker. Essa 'limitação' foi ótima, pois o grupo pode compreender o uso de mais uma ferramenta tecnológica.

A forma como se comprometeram com a atividade determinou os resultados do trabalho, nos casos de maior êxito o envolvimento com a atividade levou à resultados positivos tanto quando o grupo teve mais autonomia na condução da atividade de modelagem, quanto nos casos em que se mostraram mais dependentes de orientações. A esse respeito passamos a olhar para o conjunto de dados referente ao Grupo 2 e ao Grupo 10, cujas atividades foram descritas na seção 5.3.

6.2.2.1 *Análise da UEPS do Grupo 2*

Com a descrição da atividade de modelagem desse grupo adiantamos que houve uma grande interação das alunas com a professora, sendo o grupo que mais dispôs de orientação. Em parte isso se deve ao fato de terem cumprido o cronograma estabelecido inicialmente, garantindo o desenvolvimento do trabalho de forma gradativa.

Desde o início, o grupo se mostrou interessado pela atividade (*dizendo-se esforçadas*, *fazem trabalho sempre juntas*, *procurando professores de outras disciplinas*). O envolvimento de todas era notório e a integração do grupo garantiu o trabalho colaborativo. Mesmo quando solicitavam ajuda *on line* estavam reunidas, *pensando juntas* e discutindo sobre o trabalho. No dia da entrega do trabalho, como ainda restava uma dúvida, ao procurar a professora a aluna C3(A2) não estava presente, ainda assim, as demais pediram se ela poderia participar via *chat*, pelo *Skype*, porque fariam o fechamento do trabalho em conjunto.

Com a aceitação da orientação o grupo estabelecia metas com base nas intervenções da professora, com isso, dentre elas *aprender um método novo*, usar determinados recursos tecnológicos para os quais demonstraram inicialmente pouca familiaridade, ou que conheciam de forma limitada, como recursos do Maple, Excel e Origin.

Outra implicação da proximidade do grupo com a professora foi a possibilidade de acompanhar como se deu o avanço em relação as fases da modelagem e as ações cognitivas associadas a elas (*coletando os próprios dados*, *procurando professora de Reologia para tirar dúvidas*, *descartando a interpolação*, *entendendo o software*, *aprendendo o método numérico*).

Na fase de matematização o grupo precisou dedicar mais tempo, pois, conforme alegaram, esse era um *assunto novo*, um conteúdo que ainda não haviam estudado na disciplina. De todo modo, se propuseram a compreendê-lo. Por sugestão da professora, estudaram para deduzir o método dos Mínimos Quadrados e para isso, foi necessário mobilizar vários conceitos prévios (referentes a álgebra linear, cálculo diferencial 1 e 2, estatística). Alguns desses conceitos as alunas lembravam da ideia, embora não soubessem definir de imediato. Por isso, dedicaram-se ao estudo do método em grupo e posteriormente junto com a professora, em um seminário.

A proximidade com a professora e a atitude positiva em relação à atividade de modelagem permitiram boas oportunidades para colher evidências de aprendizagem significativa. Nesse caso, entendemos que houve êxito na UEPS, considerando que as alunas demonstraram compreensão conceitual do método numérico e indicaram um bom desempenho em relação ao processo de modelagem. Com a avaliação formativa que se pôde realizar a professora teve mais oportunidade de identificar pontos a serem explorados para contribuir para a atribuição de significados claros sobre os conceitos estudados.

A avaliação do grupo se deu de forma segura, do ponto de vista da professora, em parte pelas oportunidades de identificar individualidades de cada aluna ao compartilharem suas dúvidas e seus entendimentos ao longo do semestre.

Quanto aos usos de recursos tecnológicos, inicialmente, nossa codificação indicou *baixo interesse por alguns recursos tecnológicos*. No que se refere a explorar recursos dos programas que manipularam, de fato, foi possível perceber pouco entusiasmo, explorando-os apenas à medida do sugerido. De todo modo, no que foi possível identificar, fizeram uso de redes sociais para interagir com professora, de diferentes *softwares*, de equipamentos de laboratório para obtenção de dados. Esses usos contribuíram com o desenvolvimento do trabalho de modo a garantir parte dos resultados.

Quanto a integração de atividades de modelagem como APS, C3(B2) afirmou no levantamento final:

> É uma forma de aplicar conhecimentos sobre a área de engenharia de materiais ao cálculo de forma bem interessante, e útil para o aprendizado da modelagem.
>
> Esse tipo de atividade nos ajuda a aplicar os conhecimentos desenvolvidos em sala de aula, e nos proporciona uma visão mais prática da teoria aprendida.

6.2.2.2 *Análise da UEPS do Grupo 10*

Embora mais autônomo, o grupo cumpriu o cronograma e as orientações para o bom andamento do trabalho. Os encontros de orientação eram bem objetivos, como a descrição da atividade do grupo, na seção 5.3.2 indica.

De acordo com o primeiro encontro de orientação, os alunos desse grupo não haviam trabalhado os três juntos, embora fossem da mesma turma. De fato, não parecia um grupo integrado ainda. Ao exporem dois possíveis temas pode-se perceber que indicavam interesses distintos de dois alunos. No entanto, após definido que a problemática seria referente aos circuitos elétricos, percebeu-se que o grupo estava inteirado igualmente do tema (*exemplificando aplicabilidade da análise de circuitos*, *aliando a conceitos estudados em outra disciplina*, *definindo elementos e diferenciando conceitos*, *pensando juntos*).

O contato com o grupo nos encontros de orientação permitiu obter informações, quanto ao desenvolvimento do experimento, que não constavam no relatório parcial entregue. As informações permitiram reconhecer que se tratava de um trabalho autêntico, desenvolvido com a finalidade da APS e também, que o grupo pesquisou sobre modelagem matemática para desenvolver o trabalho, indicando iniciativa (*se envolvendo com a atividade*, *assumindo responsabilidades*).

Como o grupo se apresentava aos encontros de orientação mais no sentido de posicionar a professora quanto ao andamento do trabalho (*indicando autonomia*), não solicitavam orientação propriamente, a professora não fez muitas intervenções (*respeitando o encaminhamento do grupo*). Ainda assim, foi por ocasião dos encontros que viu a oportunidade de propor ao grupo ampliar o estudo e abordar outro método de resolução para o sistema de equações que representava a situação-problema. Assim, o grupo aceitou a meta e implementou um método iterativo.

O conteúdo matemático com o qual o grupo buscou a matematização do problema já havia sido estudado na disciplina e, no que foi possível evidenciar, não ofereceu dificuldades para o grupo (*demonstrando aprendizagem de métodos numéricos*, *reconhecendo diferença entre métodos*). No entanto, um esforço que trouxe nova aprendizagem, segundo os próprios alunos, diz respeito a modelagem da situação-problema, e a implementação do método de Gauss-Seidel (*explicitando a matematização*, *implementando algoritmo*), que não havia sido feito antes (*indicando a relevância do estudo*, *evidenciando aprendizagem*.

Ao final do projeto, ao responderem sobre se haviam aprendido algo novo, os alunos mencionaram que:

> C3(A10): Nesse trabalho utilizamos um dos assuntos que foi abordado na disciplina de Física 3 e, podemos aplicá-lo na prática com a construção do circuito elétrico e empregando os parâmetros teóricos e cálculos utilizados no estudo de cálculo numérico.
>
> C3(B10): O estudo da modelagem matemática ao longo do semestre desenvolveu um novo conceito e me fez compreender sua importância e onde é aplicada nos dias atuais.
>
> C3(B10): A compreensão que o uso de ferramentas computacionais pode ser utilizado para representação de fenômenos complexos. Além do uso da protoboard, uma matriz de contatos, que permite uma pré-análise de circuitos, antes de serem soldados os componentes, por exemplo, em uma placa-mãe.
>
> C3(C10): Entender como funciona a busca pelo valor da corrente e conseguir encontrar uma matriz que deve ser composta por 2 vetores distintos cuja lógica parecia impossível. Confesso que fiquei orgulhosa quando consegui achar uma lógica para montar a Matriz R.

Os resultados dessas compreensões, que os alunos informam ser decorrente do envolvimento com a atividade de modelagem, pode ser apreciada quando se expressavam verbalmente e também no relatório final, porém, a percepção de que eram decorrentes do estudo que conduziram não era evidente. Nesse sentido, o levantamento final foi importante para complementar nossas impressões e validar a avaliação final do grupo e de cada integrante.

Um aspecto observado com a codificação dos dados é a relação que fazem da APS com a aplicação prática, e com o pensar na profissão:

> C3(A10): [dados do levantamento final] Com esse trabalho desde da escolha do assunto e até mesmo no seu desenvolvimento houve muitas ideias expostas e muitas discussões quanto a sua elaboração como um todo e escolheu-se um caminho para a formalização dos conteúdos apresentados de forma coerente e aceito por todos do grupo.

> C3(B10): [dados do levantamento inicial] As APS são muito importantes. São atividades, geralmente, que abordam uma situação real do cotidiano de um engenheiro. Ao longo do curso, o aluno se familiariza e compreende a importância do desenvolvimento de conceitos científicos para uso no futuro.
>
> C3(C10): [dados do levantamento inicial] Acho que a APS vai me ajudar a entender como utilizar softwares matemáticos nos problemas reais de engenharia, pois ainda não consigo ter muito essa visão.
>
> C3(C10): [dados do levantamento final] A proposta foi muito boa, e é importante essa integração, pois ela leva o conteúdo às atividades práticas do dia a dia na engenharia.

Consideramos, que o êxito da UEPS se deu principalmente por mérito do grupo, pois, eles aceitaram a proposta de desenvolver um trabalho integrando modelagem matemática e uma situação-problema relevante para si. Demonstraram autonomia e ao mesmo tempo se deixaram orientar quando entenderam que poderiam avançar em relação ao que já haviam demonstrado saber.

Desde a proposição do tema a tecnologia foi integrada à atividade. Durante o trabalho se fez presente de diversas formas (*coletando dados experimentais*, *representando com um software*, *comunicando com a Internet*) e contribuiu para a condução da atividades pelas fases da modelagem, desde a fase de inteiração até a interpretação e de validação dos resultados. Nesse aspecto, os alunos procuraram a professora apenas em relação à implementação do método de Gauss-Seidel.

Podemos constatar, que a proposição da UEPS foi bastante motivadora para o grupo, que demonstrou habilidade em articular conceitos de áreas específicas com os conceitos do cálculo numérico, para abordar uma situação por meio da modelagem matemática, usando diversos recursos tecnológicos.

Devido ao menor contato, em relação ao Grupo 2, por exemplo, houve também menos oportunidade de buscar evidências de aprendizagem significativa. Esse foi um desafio que a professora contornou, em certa medida, ao lançar mão do formulário de levantamento final, que, de fato só teve eficácia porque os alunos aceitaram o convite de responder.

6.2.3 Categorias Teóricas: direcionamento para a Análise Global

Seguindo indicações dos dados, identificamos com a análise do Contexto 1, as categorias *pensando juntos*, *relações com e uso da tecnologia* e *conteúdo em foco*.

A análise do Contexto 2 trouxe evidências que fortalecem nossa compreensão analítica quanto as propriedades e aspectos já revelados com a análise inicial do Contexto 1. Embora, outra categoria tenha sido revelada com a análise dos dados, a *modelagem visando a atuação como docente*. Assim, voltando aos dados do Contexto 1, observamos que códigos que relacionam a modelagem e o uso de recursos tecnológicos também remetem à reflexões de âmbito profissional, nesse caso, de professores em formação inicial.

O Contexto 3 contribui significativamente para o delineamento de nossa teoria fundamentada, acerca das categorias provisórias do Contexto 1 e do Contexto 2. O envolvimento dos alunos com atividades de modelagem provocou reflexões que relacionavam esta prática com a futura atuação profissional, na engenharia. Assim, a quarta categoria, evidenciada no Contexto 2, também se revela importante para nossas considerações na análise global.

6.3 Análise Global: os três Contextos da Pesquisa

Com a análise do Contexto 1 identificamos categorias provisórias, que procuramos melhor compreender a partir de novos dados, provenientes da amostragem teórica, constituída pelo Contexto 2 e pelo Contexto 3. Com a codificação focalizada, que se deu por meio da integração dos dados desses dois Contextos à análise inicial procuramos consolidar as categorias analíticas. Conforme Charmaz (2009, p.15):

> Nossas categorias analíticas e as relações delas extraídas nos fornecem um instrumento conceitual sobre a experiência estudada. Sendo assim, construímos níveis de abstração diretamente dos dados e, posteriormente, reunimos dados adicionais para verificar e refinar as nossas categorias analíticas geradas a partir disso.

Cada Contexto investigado tem características que o distingue e outras que o assemelha, dentre elas, partilham o fato de que os participantes eram iniciantes em modelagem matemática. Nos três casos, oferecemos as condições para o desenvolvimento de atividades de modelagem integradas à UEPS e dispunham de recursos tecnológicos, ambientes estes, em teoria, propícios à ocorrência da aprendizagem significativa, conforme descrito no Capítulo 3.

Nesta fase mais teórica da análise, à medida que revisitamos os dados e reconhecemos particularidades dos Contextos investigados, pretendemos responder as questões específicas:

> 1. Que indicativos de diferenciação progressiva e reconciliação integradora podemos identificar quando os alunos se envolvem em atividades de modelagem matemática mediadas pela tecnologia?
>
> 2. De que forma as atividades de modelagem matemática integradas em UEPS potencializam a aprendizagem significativa dos estudantes?
>
> 3. De que forma os estudantes se apropriam das tecnologias durante as atividades de modelagem matemática?

Passamos então a fundamentar nossa análise de modo que explicite nosso entendimento sobre a pesquisa ao longo das atividades desses três Contextos tomando as categorias teóricas com as seguintes denominações: *pensando juntos*, *relações com a tecnologia e seus usos*, *conteúdo em foco* e *link entre modelagem e atuação profissional.*

Com esse encaminhamento buscamos discutir, à luz da literatura, *como ambientes de ensino e de aprendizagem que consideram atividades de modelagem matemática, dispõem de recursos tecnológicos e são organizados segundo os princípios de uma UEPS, viabilizam a aprendizagem significativa dos estudantes*, questão principal de nossa investigação.

6.3.1 Implicações do ambiente educacional sobre o *Pensando juntos*

Destacamos, dentre outras categorias analíticas que os dados nos indicavam, aquela que denominamos *pensando juntos*, que é uma referência a um código recorrente nos três Contextos e nos fez refletir sobre a ação de pensar com a influência de outros. Em um ambiente de modelagem matemática, essa ação é uma prática incentivada durante todo o processo e não remete apenas a situações de trabalhos em grupos, de forma convencional.

Evidenciamos que, desde o contato inicial com as atividades das diferentes unidades de ensino, essa expressão foi importante e se mostrou em diferentes situações, com consequências distintas.

O grupo e a professora: no Contextos 1 e no Contexto 3 houve a constituição de grupos de trabalhos a fim de desenvolver atividades de modelagem. O acompanhamento por meio dos encontros de orientação, e mesmo pelos contatos virtuais, trouxe a possibilidade de realizar a avaliação formativa, seja do grupo, seja de cada aluno, de forma que não seria possível se não houvesse tal proximidade. Tanto mais eficaz foi a avaliação quanto mais os grupos se deixaram aproximar.

Nos dois Contextos os momentos de orientação permitiram identificar se o trabalho estava sendo colaborativo, em parte pelos indicativos quanto ao envolvimento de cada componente, em parte pela qualidade das discussões ao pensarem sobre as atividades. Os encontros de orientação sempre aproximavam alunos e professora e dava espaço para discutir sobre acertos ou equívocos quanto as estratégias pensadas para a abordagem dos problemas. Esses encontros representaram, muitas vezes, a oportunidade de atender mais pontualmente à necessidade de ir e vir pelos conceitos relativos aos conteúdos estudados, como sugerem os princípios de diferenciação progressiva e reconciliação integradora. Quando o grupo não se aproxima, mesmo que tenha atitudes positivas em relação às atividades de ensino, podem não gerar evidências de aprendizagem, seja ela significativa ou não. Com isso, o professor perde a oportunidade de intervir favoravelmente.

As atitudes dos alunos em relação ao ambiente de ensino e as tarefas de aprendizagem, em geral, determinam a qualidade da aprendizagem. Conforme retrataram os resultados da avaliação dos alunos nas UEPS do Contexto 3, alguns alunos não se mobilizaram a partir do contato com a modelagem, não cumpriram a meta do ensino de modo que, no caso do Grupo 3, do Grupo 4 e do Grupo 11, não se pode considerar constituídas unidades de ensino potencialmente significativa. Ainda assim, pode-se evidenciar alguma aprendizagem, nesses casos, mais sobre a o processo de modelagem e da abordagem de uma situação-problema, sem a conexão desejada com o conteúdo da matéria de ensino. O Grupo 3 não aceitou o convite a pensar junto com a professora, não permitiu orientação a partir do que já sabiam, o que dificultou qualquer tentativa de contribuir para o avanço do grupo, e, de fato, não foi possível evidenciar o estabelecimento de metas e nem mesmo que tenha havido trabalho colaborativo. O Grupo 11 era em parte colaborativo, notoriamente um dos integrantes não estava envolvido com o estudo, além do que, o grupo só iniciou as atividades ao final do período proposto para o trabalho. Embora demonstrassem potencial de desenvolver um trabalho significativo, não demonstraram comprometimento com a atividade de ensino, desse modo, não permitiram a estruturação de uma UEPS a tempo de desenvolvê-la.

O grupo, a turma e a professora: a UEPS do primeiro Contexto garantia espaço para a comunicação do trabalho de cada grupo para a turma toda. Nessa oportunidade ficou evidente que o ambiente de modelagem desperta o espírito de trabalho colaborativo. Como mencionamos na análise do trabalho do Grupo 4 do Contexto 1, a constatação de um erro na resolução da equações de diferenças foi oportunidade para avaliar o envolvimento de colegas externos ao grupo, com sugestões que contribuíram na identificação de uma possível solução. Neste exemplo, a ocasião permitiu ao grupo pensar junto com os colegas e também com a professora. A proposta de compartilhar com a turma o estudo que cada grupo desenvolveu foi uma oportunidade para que cada colega pensasse junto com os demais sobre diferentes problemáticas, que foram incumbidos de também avaliar a partir de alguns quesitos. Para a professora, foi mais uma oportunidade de avaliar se o trabalho foi colaborativo ou não, a partir de evidências anteriores.

No Contexto 3 não foi possível garantir o espaço para a comunicação para as turmas, devido o grande número de grupos, aliado ao estreito calendário pós-greve da universidade. Porém, houve várias manifestações sobre o interesse em conhecer as atividades de modelagem realizadas pelos colegas de outros grupos, como indica a declaração de C3(C11) na ocasião da avaliação do projeto:

> Uma coisa que gostaria que fosse feito, seria a apresentação do projeto, pois como houve uma certa indecisão do tema a ser abordado para realizar o trabalho, gostaria de ver o resultado dos outros grupos, como foi feito, para até comparar como o nosso, no que podia ser melhorado e tudo mais. E é claro que com isso, aumentaria ainda mais o conhecimento.

Essa declaração de C3(C11) faz refletir, pois como mencionamos, o Grupo 11, do qual esse aluno fazia parte, não esteve adequadamente envolvido com a atividade e não gerou evidências de aprendizagem significativa em relação ao conteúdo de Cálculo Numérico, porém, não se pode afirmar que esse aluno não estivesse interessado pela atividade. De acordo com as respostas ao formulário de avaliação do projeto, esse aluno: considerou a proposta da APS adequada (9,0), assim como o cronograma (8,0); entendeu que a orientação da professora contribuiu com o desenvolvimento da atividade (10,0); considerou grau de dificuldade 3,0 tanto na definição do tema quanto do método numérico; considerou a atividade relevante para a aprendizagem de métodos numéricos e para a aprendizagem de conceitos de outras áreas (10,0); indicou que suas expectativas iniciais com a realização da atividade foram atendidas, bem como, que sua motivação inicial e final se mantiveram elevadas (10,0); embora tenha atribuído nota maior para colega de grupo, sua auto-avaliação foi boa (9,0), indicando ainda que o grupo trabalhou colaborativamente (10,0). Sobre o entendimento inicial quanto a modelagem matemática, sobre a integração de atividades de modelagem as APS, e sobre alguma aprendizagem em especial, respectivamente, comentou que:

> Não modificou, e sim aprimorou mais! Por eu estar fazendo iniciação sobre a degradação, foi muito vantajoso fazer esse trabalho, onde poderei usá-lo até como base para concretizar a própria iniciação.
>
> Acho uma boa opção, pois o grupo teve que fazer um estudo prévio para entender qual tipo de modelo usar, para solucionar o problema envolvido, o que gerou um aumento de conhecimento.
>
> Como dito no item acima, o crescimento no conhecimento maior sobre modelos matemáticos e suas aplicações, para mim em especial, como usá-lo dentro da minha iniciação.

Com isso, o que teria faltado para que desenvolvessem com êxito uma UEPS? Com essas respostas, teria o aluno simulado os resultados da aprendizagem? O relatório final entregue pelo grupo não fornece evidências sobre a compreensão conceitual do método de Newton usado para a interpolação, embora tenham apresentado resultados compatíveis. Segundo (MOREIRA, 1999b) o produto da aprendizagem significativa é a aquisição de significados, o que pode ser constatado pela ocorrência de uma compreensão legítima, que requer a posse de significados claros, precisos diferenciados e transferíveis. Assim, a avaliação que o grupo permitiu que a professora realizasse, dentro do propósito, não foi suficiente para compreender o quanto houve de aprendizagem. Para isso, nova verificação seria necessário, com a formulação de questões exigindo a externalização do conhecimento adquirido pelo aluno. Segundo Ausubel (2003), esse seria um meio pelo qual seria possível perceber se o aluno usa os significados compartilhados no contexto da matéria de ensino.

A turma e a professora: as situações iniciais nas UEPS foram propícias para desencadear, ou ao menos sugerir, a prática de pensar juntos. Em geral, contava com a mediação da professora ao lançar questionamentos, provocando os alunos a falar, se expressar, pensar e externalizar seus pensamentos e suas compreensões iniciais. Na medida do necessário, novos questionamentos ou colocações levavam-os a reeditar as primeiras. Em todos os Contextos as situações iniciais oportunizaram uma primeira visão sobre conhecimentos prévios dos participantes. Embora o conhecimento prévio seja particular de cada indivíduo a externalização destes pode ser obtida a partir da interação de cada um com o material de ensino e com os outros.

No Contexto 2 não houve a constituição de pequenos grupos no decorrer da UEPS, ainda assim, as manifestações dos participantes contribuíram para a efetivação da proposta de modelar uma situação à medida que um ou outro se expressava, influenciando novas manifestações ou encaminhamentos do estudo. Nesse Contexto, em que boa parte dos participantes não se conheciam e mesmo não conhecia a professora, as discussões permitiram compartilhar ou contrapor sugestões ou opiniões que influenciaram no desenvolvimento da atividade, além de aproximar as pessoas. Porém, queremos ampliar a visão sobre pensar juntos ao trazer para a discussão a influência de um elemento que foi fundamental na abordagem das situações-problema, a Tecnologia.

O modo como a videoanálise foi inserida na UEPS pela professora foi intencional, os participantes desconheciam o recurso, porém, aqueles que se manifestaram durante as discussões, de algum modo, aceitaram pensar a partir da influência proporcionada pelo *software*, mesmo que as intervenções da professora e de outros colegas possam também ter colaborado para o avanço em compreensão da situação-problema, do processo de modelagem e dos objetos matemáticos componentes do estudo. Neste exemplo, para aqueles em que a tecnologia integrada à abordagem do problema tenha levado a pensar, fazer conjucturas, podemos inferir que a tecnologia atuou como uma parceira intelectual, no sentido definido por Howland, Jonassen e Marra (2011).

A integração da tecnologia às UEPS e em particular as atividades de modelagem é objeto de nossas considerações na próxima seção.

6.3.2 Relações com a Tecnologia e seus Usos

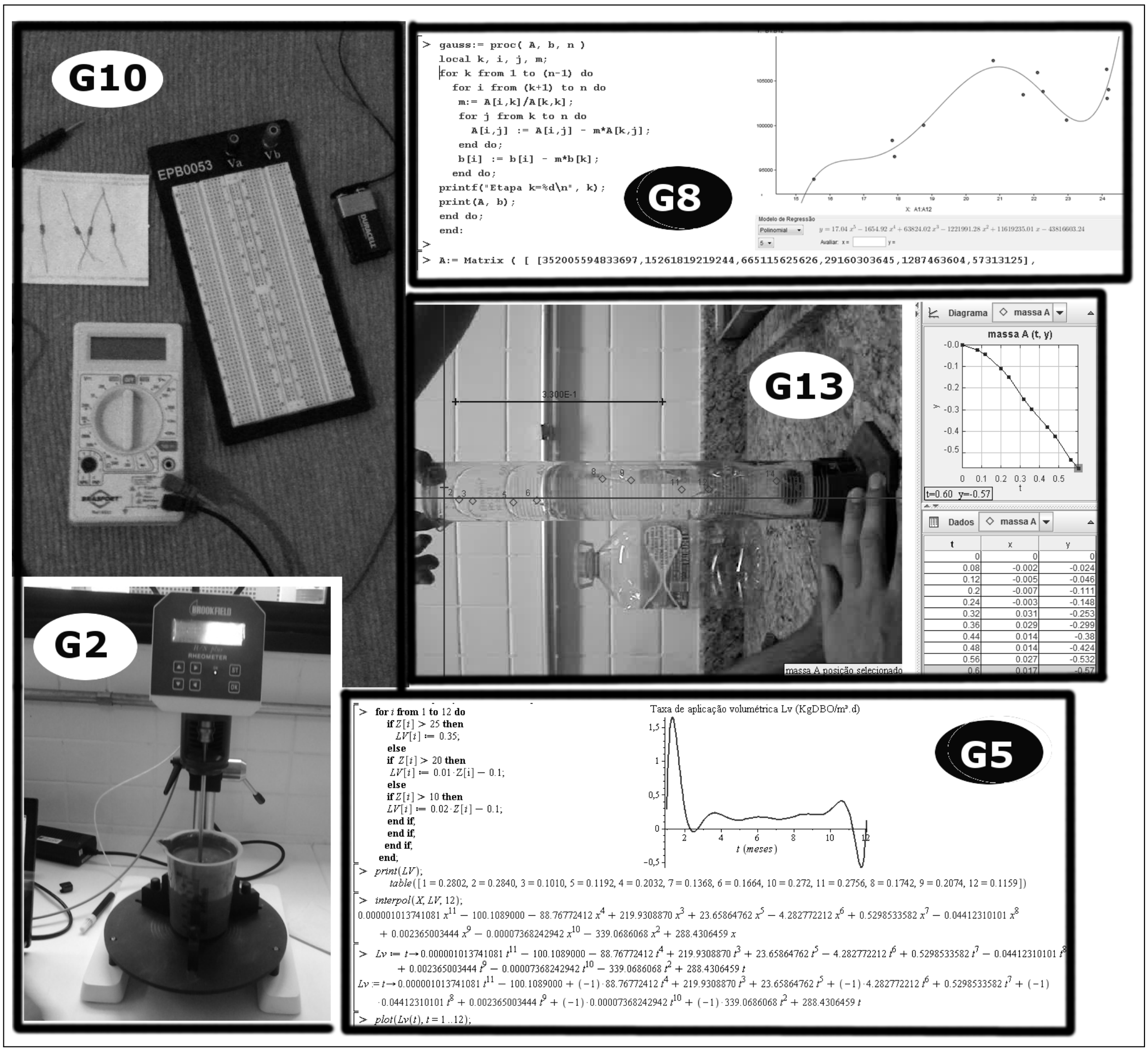
A forma com que os alunos se relacionam com a tecnologia, desde o que falam sobre, até os usos que fazem dela, foi codificada e analisada ao longo dessa pesquisa. No Capítulo 5 e no Capítulo 6 fomos explicitando diversos usos da tecnologia nas atividades das diferentes UEPS. Procuramos então a compreensão analítica de aspectos recorrentes nos diferentes Contextos, e as implicações para a aprendizagem significativa nos ambientes de modelagem.

A análise dos primeiros dados nos apontou uma suposta contradição entre o que alegavam alguns alunos sobre o uso de recursos tecnológicos, a motivação para usar e os usos que fizeram durante o desenvolvimento da UEPS. Esse aspecto foi bem evidenciado no Contexto 1 e no Contexto 3, como exemplificaremos.

Pensando juntos, com a tecnologia: Como mencionamos na seção anterior, no Contexto 2 o recurso da videoanálise foi um importante elemento mediador das discussões e definições que promoveram as atividades de modelagem. Embora não possamos defini-lo como um ser pensante, a atitude de se deixar pensar junto com o recurso o integra e o faz parte de um sistema que gera ideias, pensamentos e expressão de modelos mentais. Esse recurso tecnológico pode ser encarado como um outro que tem o papel de colaborador, que integra um grupo colaborativo.

Evidenciamos, de forma bem clara, esse uso da tecnologia (se assim podemos denominar) em algumas situações no Contexto 3. A Figura 6.4 ilustra imagens que integraram o relatório final de cada grupo, revelando diferentes usos da tecnologia, que ajudou a pensar e contribuiu para o trabalho de cada um.

Figura 6.4: Recortes de imagens ilustrativas sobre atividades de modelagem de alguns grupos



Fonte: Relatórios dos grupos

Os sistemas compostos por equipamentos tecnológicos indicados na Figura 6.4 como G2 (reômetro, agitador mecânico) e G10 (placa *protoboard*, multímetro, resistências,...) integravam a situação inicial das atividades de modelagem desenvolvidas pelo Grupo 2 e pelo Grupo 10 (descritas na seção 5.3). Nesses casos, a função dessas tecnologias foi gerar dados, a partir dos quais as outras fases da modelagem foram pensadas. Os comentários de C3(B10) se referem a influência das tecnologias empregadas na situação inicial e depois, a aprendizagem proporcionada com o desenvolvimento do projeto:

> O trabalho, além de desenvolver um novo conceito e compreendimento a respeito da modelagem matemática, foi influente para compreensão de recursos tecnológicos modernos, como as placas de circuito impressos e circuitos integrados, devido a sua aplicabilidade referente ao tema abordado pelo nosso grupo, análise de circuitos elétricos.
>
> A compreensão que o uso de ferramentas computacionais pode ser utilizado para representação de fenômenos complexos. Além do uso da protoboard, uma matriz de contatos, que permite uma pré-análise de circuitos, antes de serem soldados os componentes, por exemplo, em uma placa-mãe.

A imagem indicada por G13 refere-se à captura de tela do *software* Tracker, que o Grupo 13 utilizou para intermediar o estudo do arrasto em tubo de água. Neste caso, lançaram mão do recurso da videoanálise a partir do experimento realizado com vistas a atividade de modelagem, conforme retrata a seção C.5.11. No entanto, a ação que antecedeu o uso do *software* foi a geração de um vídeo mostrando o comportamento de uma esfera ao longo do tubo de água. Neste caso, vários recursos atuaram para o pensar do grupo, desde a situação inicial até a conclusão da atividade. Os comentários de C3(C13) remetem ao uso dos recursos:

> A única limitação encontrada foi o desconhecimento do programa tracker. Essa 'limitação' foi ótima, pois o grupo pode compreender o uso de mais uma ferramenta tecnológica.
>
> Utilizamos os programas "tracker"e "origin", os quais nos ajudaram na obtenção de dados e modelagem matemática.

As imagens indicadas por G5 e G8 na Figura 6.4 são recortes dos relatórios finais do Grupo 5 e do Grupo 8, referentes as atividades de modelagem Tratamento de Efluentes: modelagem de lagoa anaeróbia (seção C.5.4) e Modelo Matemático sobre o Consumo de Energia Elétrica pela Variação da Temperatura (seção C.5.7), respectivamente. Nesses casos, os recursos tecnológicos foram empregados no tratamento dos dados. Pelo intermédio deles os alunos conseguiram perceber a limitação de seus resultados. No caso de G5, a visualização gráfica, a partir da implementação do método, contribuiu para a análise crítica sobre a validade do modelo. Em G8, a comparação dos resultados apresentados por diferentes *softwares* permitiu avaliar erro na implementação, conforme os trechos obtidos no relatório final de cada grupo:

> G5: o modelo utilizado é baseado nas equações encontradas na literatura e na interpolação das temperaturas mensais obtidas por meio da tabela do IAPAR; houve um problema no resultado da interpolação, pois, o polinômio apresentava valores muito inferiores ou muito superiores aos esperados durante os meses iniciais ou finais do ano. Porém, para o caso em questão, o erro não influenciou o resultado, pois as informações desejadas eram os mínimos de temperatura, que na região ocorrem entre o fim do outono e a primeira metade do inverno (no meio do ano). No caso de um país do hemisfério norte, onde os dados desejados estariam no intervalo do erro, seria necessário refinar a interpolação, aumentando o número de dados por mês.
>
> G8: O resultado obtido pelo algoritmo do programa Maple não se aproximou da equação obtida através do ajuste de curvas do Excel. Para confirmar qual das equações estava correta, foi utilizado outro *software* matemático, o Geogebra, que forneceu um resultado bastante próximo ao do Excel.

A Figura 6.4 ilustra alguns exemplos em que a tecnologia integrou um grupo colaborativo e desempenhou um papel relevante no processo de modelagem. A esse respeito, encontramos na literatura legitimação para nossas inferências, como em Howland, Jonassen e Marra (2011), Almeida, Santos e Silva (2009), Borba e Villarreal (2005), para citar alguns.

Em Howland, Jonassen e Marra (2011) o termo sugerido para expressar essa forma de uso é, tecnologia como parceira intelectual, conforme já discutimos na seção 3.5.

Borba e Chiari (2013) trazem um histórico das pesquisas desenvolvidas ao longo de vinte anos pelo Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática - GPIMEM[2], cujo foco é a compreensão sobre a produção de conhecimento com a presença da tecnologia. Conceito central, em grande parte das pesquisas mencionadas, seres-humanos-com-mídias é entendido como o coletivo composto por humanos e mídias e deve ser considerado uma unidade básica que produz conhecimento (BORBA e VILLARREAL, 2005).

Nesse sentido, nossa pesquisa permite identificar diferentes coletivos de seres-humanos-com-mídias, constituídos nas diferentes UEPS, à medida em que os alunos utilizavam das diferentes mídias. A partir das escolhas, ou dos usos, das mídias feitas pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem, organizaram-se diferentes coletivos de seres-humanos-com-mídias. Em cada coletivo as contribuições para a mobilização de conhecimentos se diferencia e depende da qualidade da interação de seus componentes. Com isso, pode ou não ter a tecnologia como parceira intelectual, podendo favorecer em maior ou em menor medida a facilitação da aprendizagem significativa.

Com isso, entendemos que oferecer um ambiente, desde as aulas, que disponha de tais recursos, bem como propor atividades que provoquem os alunos a lançar mão da tecnologia, pode promover a motivação ao uso. As atividades de modelagem, em especial, parecem provocar os alunos a buscar tais recursos. A esse respeito, Malheiros e Franchi (2013) mencionam que algumas pesquisas do GPIMEM defendem que a modelagem matemática:

> pode ser considerada um enfoque pedagógico em sinergia com as TIC, já que, ao fazer Modelagem, a partir da escolha de um tema de interesse deles, os estudantes, com computadores e outras mídias, procuram soluções para determinados problemas por eles propostos, num processo de investigação no qual o professor se configura como orientador ao longo de todo o processo. (p. 178).

A tecnologia que acomoda: Há situações em que os alunos parecem se esconderem atrás de recursos da *Internet*, *softwares*, por exemplo. Dentre as formas de apropriação da tecnologia que reconhecemos nos dados encontram-se algumas que remetem a uma intenção do aluno de reduzir esforços. Por meio de alguns exemplos procuramos analisar as implicações desse uso.

A Figura 6.5 traz dados de boa parte da orientação realizada com o Grupo 3 do terceiro Contexto, em que não houve encontro presencial de orientação (foram sugeridos ao menos três ao longo do semestre), nem empenho dos alunos com a tarefa de aprendizagem. Os textos de e-mail revelam a procura tardia por informações sobre a atividade e uma tímida intenção de envolvimento com a mesma. No relatório final dos alunos, o gráfico e o texto de considerações finais indicam que a busca pelo modelo se deu apenas por tentativa, pela manipulação de um recuso de ajuste de curvas.

---

[2]O GPIMEM é sediado no Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro

Figura 6.5: Recortes de dados do trabalho do Grupo 3

[redacted] 16 de abr
para mim

Professora, como estou com dificuldades de comparecer nos horários que você fica disponível
teria como você me instruir, o que deve ser realmente feito na aps por email ? Ai assim que estiver
já bem encaminhada mostro para você pode ser ?

att. [redacted]

Adriana Borssoi <ahborssoi@gmail.com> 16 de abr
[redacted]

Boa noite [redacted], tudo bem?
O grupo é você e o [redacted], é isso? Vamos fazer assim, como na próxima semana vocês já devem entregar o trabalho, isso deve ser agilizado. Não sei o que vocês sabem a respeito do trabalho, então, peço que inicialmente vocês leiam os arquivos: **Conheça o Projeto e Sobre a Avaliação** no link http://pessoal.utfpr.edu.br/adrianaborssoi/aps_cn.html ... eu já os enviei por e-mail também, então não sei se vocês tem dúvidas sobre as informações que constam neles. Em anexo eu envio um arquivo com a estrutura sugerida para o texto.

Assim que puderem escrevam para me dar uma ideia do que estão pensando em estudar e quais as dúvidas que vocês tem, assim que possível eu respondo.

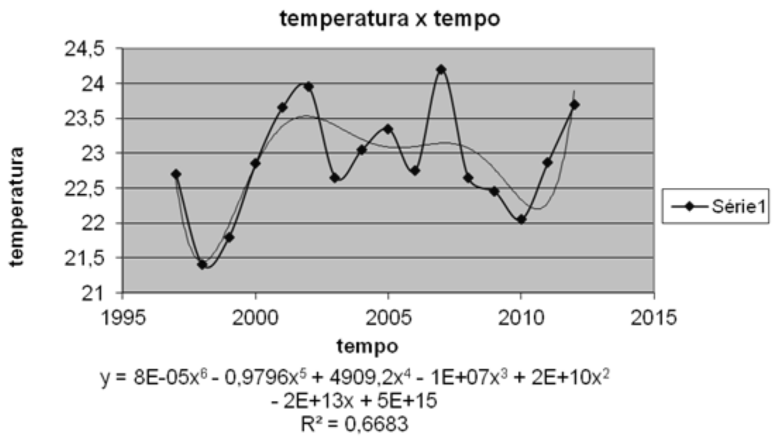
Na sexta-feira (19) estarei o dia todo da universidade, seria bom conversarmos pessoalmente, se tiverem algum horário agendem na planilha https://docs.google.com/spreadsheet/ccc?key=0ArBwZdtQsuVDdHNTamVIbXQ2VmxUMnRuSkJrOG8xR1E#gid=0

Aguardo
Att
Professora Adriana

[redacted] 18 de abr
para [redacted] mim

Professora se foi o que eu entendi do trabalho, nós escolhemos estudar as condições climáticas de londrina
nos ultimo anos, estudando o aquecimento da cidade. Esse tema esta bom ? agora o que eu não estou conseguindo
fazer é colocar isso em modelo matemático, pois já tenho os dados das estações climáticas, se puder me ajudar nisso.

[redacted]



4. Considerações finais

A cidade de londrina por ser um clima subtropical úmido, ocorre muitas variações e não conseguimos fazer a estimativa futura pelo método polinomial, pois este método trabalha apenas com os dados em um intervalo conhecido de tempo, porém foi o que mais se aproximou quando colocamos a linha de tendência, e podemos visualizar também que pode ocorrer a manipulação de dados se esse método for utilizado não sendo assim muito confiável.

Fonte: Relatório do grupo e registros de e-mail

De fato, um modelo foi obtido, mas, onde está o Cálculo Numérico? onde está a modelagem matemática? qual foi a aprendizagem decorrente da atividade? que conceitos subsunçores foram mobilizados e/ou modificados? como teriam procedido os alunos se não usassem a tecnologia? Essas são questões sobre as quais não podemos inferir, de modo que a relação da aprendizagem significativa com a tecnologia não se elucida nesse caso.

Entendemos que o uso do *software* se deu por comodidade, já que nenhuma ação no sentido de identificar o método numérico específico utilizado, mesmo que fosse para elucidar o que fundamenta os resultados fornecidos pelo sistema computacional, foi realiza.

A comunicação por e-mail é outro exemplo de acomodação, pois, nesse caso só ocorreu após um longo período de silêncio, durante o qual o grupo não respondeu a qualquer contato solicitando que posicionassem sobre o andamento do trabalho, ou mesmo ao convite para responder ao levantamento inicial, ou ainda para comparecer aos encontros presenciais. A isso nos referimos ao dizer que os alunos se esconder atrás da tecnologia.

A Tecnologia que desperta: Retomamos dois códigos referentes a dados de um mesmo aluno do Contexto 1. O primeiro, obtido com o levantamento inicial, em resposta à questão: Você tem hábito de usar recursos tecnológicos para apoiar suas atividades de estudo?, o segundo de um contato por meio de um *chat*. A mudança de *tirando dúvidas via Internet para não ter que procurar um professor* para, *tirando dúvidas via Internet com a professora* indica a predisposição positiva do aluno frente as suas necessidades, em relação ao ambiente educacional.

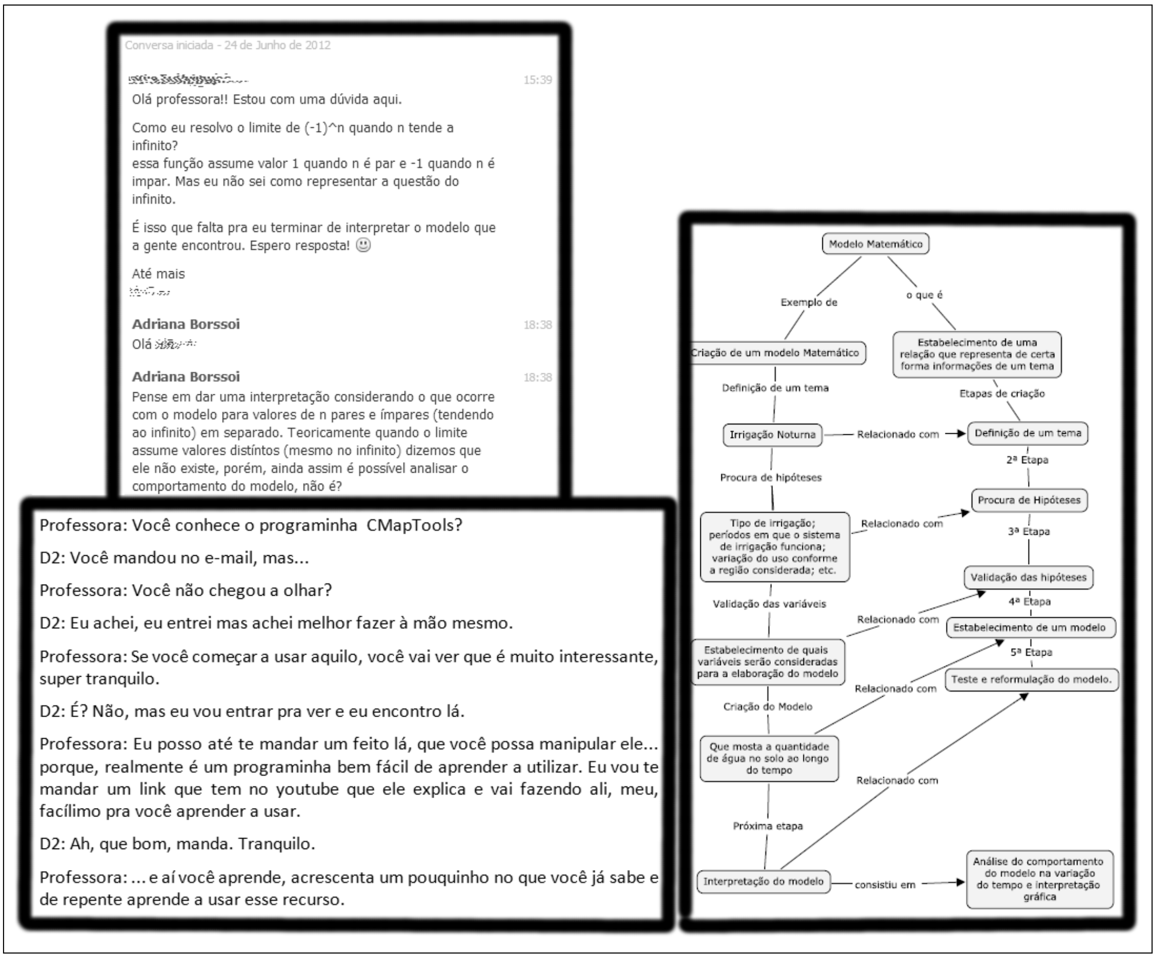
> C1(D2): Sim. Como sou um tipo de aluno do curso de Matemática que necessita estudar bastante, muitas vezes sozinho, as disciplinas chamadas de "matemática pura"utilizo a internet e programas de matemática para apoiar os meus estudos. Sites como o matemática essencial.. wolfram e programas como o winplot e geogebra me ajudaram muito nos 3 anos anteriores de curso!! Muitas vezes não tinha liberdade para tirar dúvidas com o professor responsável por uma disciplina e recorria a esses recursos. Posso dizer hoje, que essa iniciativa que tomei foi de extrema importância, pois consigo estudar "sozinho", prática que considero essencial quando for um professor de Matemática.

O destaque na palavra "sozinho" foi do próprio aluno, e pode não ter o mesmo sentido que atribuímos a ele, mas bem pode indicar que C1(D2) reconhece a presença desses outros como colaboradores. Em nosso entendimento ele desenvolveu uma estratégia própria que envolve uma parceria intelectual com a tecnologia, por meio dos vários recursos (os outros) por ele mencionados.

A Figura 6.6 mostra um recorte do texto postado no *chat* de uma rede social, além de um trecho da transcrição de um encontro em que o aluno C1(D2) procurou a professora para fazer a vista das atividades avaliadas na UEPS. Nessa ocasião, a partir de um mapa conceitual que não refletia bem o entendimento do aluno sobre a atividade de modelagem Irrigação Noturna, foi sugerido a construção de um novo mapa, que também se encontra nessa figura.

Com a menção aos dados desse aluno podemos identificar uso de diferentes recursos, bem como diferentes usos de um mesmo recurso tecnológico, como o contrastante

Figura 6.6: Recortes de dados de C1(D2)



Fonte: Registros de dados do aluno C1(D2)

uso da *Internet* sugerido nos códigos mencionados, relativos à comunicação com o professor/professora.

Em outro exemplo, no sentido de despertar, a aluna C1(A4) alegava inicialmente não ter hábito de usar recursos tecnológicos para apoiar suas atividades de ensino, informou conhecer poucos *softwares* e acessar a *Internet* sem muita frequência, além de declarar não estar motivada a usar recursos tecnológicos em sua atuação profissional. Porém, a interação com o grupo durante a elaboração da atividade de modelagem mostrou um cenário em que essa aluna fazia diversos usos (como troca frequente de e-mail, busca na *Internet*, pacotes do *office*).

Percebemos com os dados, que os usos que a aluna e o grupo fizeram atenderam a um convite implícito na proposição das atividades. Por sugestão do grupo e pela disponibilidade da professora, algumas dúvidas e impressões quanto à atividade de modelagem foram discutidas pela *Internet*, facilitando o contato, que presencialmente não poderiam acontecer, devido os alunos trabalharem durante o dia. De fato, foi possível perceber algumas limitações quanto ao uso de um programa que o grupo alegava conhecer (Geogebra), mas, a orientação da professora fez os alunos perceberem funcionalidades do programa que desconheciam. A limitação no uso de edição de equações por exemplo, recurso que pode ser dito de primeira necessidade para documentos matemáticos, indicava que de fato não faziam com destreza o uso de certos recursos. Embora não se tenha exigido o uso da tecnologia vimos que o estímulo indireto proporcionado pela proposição das atividades foi aceito pelo grupo.

A apropriação da tecnologia no Contexto 2, em certa medida, se deu de forma guiada. Não houve evidências de dificuldades no acesso ao formulário eletrônico, com o levantamento inicial, nem com o material do minicurso, cujos *links* de acesso estavam disponíveis em um *blog*. A apresentação da videonálise, como um recurso para colaborar no desenvolvimento das atividades de modelagem propostas, e de algumas ferramentas do programa Tracker, que os participantes podiam acompanhar tanto pela projeção em multimídia, quanto pelo computador individual, despertou o interesse do ponto de vista pessoal, mas também do ponto de vista profissional. A menção em usar esse recurso com alunos do ensino médio para estudar funções, ou de mostrar o Tracker aos colegas da Física; se apropriar do material disponível no minicurso apenas eletronicamente: e-mail, *pendrive*, *blog*; aluno registrando parte do minicurso com câmera digital; interesse por outros recursos usados no minicurso, mas não diretamente relacionado com o desenvolvimento da modelagem.

6.3.3 *Link* entre Modelagem e Atuação Profissional

Foi recorrente nos três Contextos da pesquisa o estabelecimento de relações entre modelagem e situações da realidade e a ligação da modelagem matemática com a prática profissional. Em várias situações, também estava presente o interesse na integração da tecnologia, como relatamos ao final da seção anterior.

No segundo Contexto o estabelecimento da relação com a atuação profissional era mais esperada considerando que boa parte dos participantes eram docentes. Estes em geral reconheciam a modelagem como uma alternativa para as aula de Matemática, embora participantes em formação inicial para a docência também tenham compartilhado dessa visão. Os comentários seguintes apontam este reconhecimento.

> C2(P15): Estive por 10 anos atuando em outro setor da Educação e ano que vem devo retornar a dar aulas de matemática, assim estou estudando novamente as tendências no ensino da disciplina, metodologias alternativas e pretendo continuar a utilizar as tecnologias com os alunos.
>
> C2(P16): Como trabalho em uma Casa Familiar Rural o uso da modelagem se torna necessidade, pois a relação com o aluno e sua realidade é muito próxima.
>
> C2(P20): Estou no 1º de Licenciatura em Matemática (citou a universidade e cidade sede de seu câmpus), em nossa grade curricular não é um assunto que esteja muito envolvido, apesar de já ter ouvido falar nunca me aprofundei na área, mas pretendo conhecer pois é muito interessante a ideia de trazer para dentro da sala de aula aspectos do mundo real.

Em várias oportunidades, durante as atividades do Contexto 1, essa relação foi caracterizada. Embora os alunos estivessem envolvidos com a modelagem como atividade discente, eles próprios refletiam sobre o seu uso no âmbito profissional.

O diálogo que segue é parte da transcrição do primeiro encontro de orientação do Grupo 3, ao falarem das suas impressões sobre desenvolver atividades de modelagem.

C1(E3): É, a gente ficou meio perdido no começo. Que situação...

Professora: É bem normal, ainda mais que é uma coisa que vocês não estão habituados.

C1(E3): É, foi a primeira... a gente já tinha visto em EDO...

C1(D3): Professora...

Professora: Vocês chegaram a ver,... modelar alguma coisa em EDO?

Alunos: Não.

C1(D3): Tinha os problemas... a gente montava a EDO...

C1(C3): Não, tanto é que a gente ia fazer uma oficina nossa (apontou para C1(E3)) de modelagem no estágio... foi super complicado..., aliás, tá feita e não tem cara de modelagem.

C1(E3): É complicado. Não tem cara professora.

C1(C3): Porque a gente não conseguiu desvincular a...

C1(E3): ... resolução de problemas.

C1(C3): ...resolução de problemas, porque tá muito... tá muito fixado na gente. Porque é o que a gente mais vê, mais trabalha...

Professora: Sei...

C1(C3): ...se fala de uma metodologia diferente é o que a gente vai fazer... faz estágio em cima disso.... Na hora que a gente foi tentar fazer em modelagem a gente se perdeu muito, e agora, depois de feita, ela tá muito cara de resolução de problemas, entendeu?

Professora: Sabe uma coisa que a gente podia fazer... se vocês quiserem conversar a gente podia conversar... porque... é uma oficina que vocês vão trabalhar com alunos de ensino?...

C1(E3) e C1(C3): Ensino Médio.

Professora: Médio, né. E vocês já pensaram numa... em que situação? Vocês já fizeram, na verdade...

C1(E3): Já montamos já... é noções de função.

C1(D3): É..., esses dias eu peguei uma lista de exercícios da UNIFIL e tinha um problema... eu tive que modelar, pra resolver, mas foi bem facinho... e era função, então acaba...

Professora: Então, mas a ideia é o processo, como você vai desenvolver com os alunos é que...

C1(C3): ... que vai diferenciar... exatamente... é o encaminhamento.

[...]

C1(C3): E também pra uma oficina eu acho que fica um pouco mais complicado ainda trabalhar com os alunos, porque são ali quatro horas... você tem que...

Professora: Tem que ter começo, meio e fim.

C1(C3): ... meio e fim, entendeu? Então as vezes... modelagem exige pesquisa. E os alunos não tem esse momento de pesquisa.

Professora: É, e nem o hábito, né.

Alunos: E nem o hábito.

C1(C3): ... por isso que complica um pouco também.

> [...]
>
> C1(E3): Como funciona a modelagem? Levantar as hipóteses, depois definir...
>
> C1(C3): Que as vezes a gente pensa dos dois lados, como aluno tá claro, como professora não.
>
> C1(E3): É, é!
>
> (risos)
>
> C1(E3): Como eu vou ensinar...
>
> C1(C3): Como eu como professora na sala de aula no Ensino Médio..., não com esse conteúdo, mas o conteúdo lá, eu vou dar uma aula de modelagem?
>
> C1(E3): Porque resolver um problema por modelagem vai,... é, vai assim... mas agora eu ensinar é complicado.
>
> Professora: Tá, eu acho que ainda... pode ser que vocês se sintam bem inseguros porque realmente vocês não fizeram isso ainda. Então aí, tentem aproveitar o máximo dessa disciplina para vocês até fazerem certos ensaios nesse sentido. Façam, pensem nesse trabalho de agora como aluno. É claro, sempre a gente tem a visão: ah, e se eu tivesse trabalhando com isso lá, como professora.

Nesse encontro estavam presentes quatro alunos, contudo, apenas C1(C3) e C1(E3) participaram dessa discussão. O envolvimento delas com a modelagem, na ocasião, ia além das inquietações que surgiram enquanto alunas. Uma intenção as diferenciava dos demais e as projetava à atuação docente, que gerou uma motivação diferente por aprender. Não se tratava apenas de cumprir uma meta estabelecida pela professora, elas próprias estabeleceram uma meta a partir de seus interesses.

O Grupo 2 trouxe uma reflexão ao final da atividade de modelagem, presente nas considerações finais do relatório entregue pelo grupo, também no sentido de aproximar a vivência da modelagem enquanto alunos com a atuação docente, conforme o excerto:

> Durante nossa jornada escolar, ouvimos de muitas pessoas, que criar um modelo matemático, por mais simples que ele seja, não é uma tarefa fácil. De fato, pudemos vivenciar isso na prática. Em determinados momentos, não sabíamos como dar continuidade nas situações envolvidas, como priorizar situações, como desenvolver algum tipo de estratégia, etc. Contudo, consideramos essa criação como uma atividade enriquecedora, pois a criação foi realizada por nós. Por mais simples que ela seja, é uma produção nossa e isso deve ser levado em consideração. Transpondo para o ambiente escolar, nosso ambiente de atuação, é exatamente isso que devemos fazer em sala de aula, fazer com que os alunos pensem, discutem, criem suas conjecturas, etc. E isso pode ser obtido, não necessariamente pela criação de um modelo matemático.

Os alunos de engenharia quando faziam considerações sobre a modelagem matemática, em geral a caracterizavam como um elo entre a teoria e a realidade, como sinônimo de aplicação, que tem relevância para atuação profissional. Esse entendimento parece se revelar, por exemplo, nos comentários a seguir:

> C3(A8): É muito importante essa integração, pois nos faz pensar em problemas que não envolvem somente uma matéria, pois na nossa formação e na nossa vida profissional iremos trabalhar com problemas que iremos utilizar vários enfoques, abrangendo várias matérias.
>
> C3(B8): Acredito que a modelagem matemática seja um excelente meio de se estudar algum tipo de assunto na área ambiental.
>
> C3(A9): É uma ótima atividade que permite a nós alunos uma capacitação profissional maior posteriormente no mercado de trabalho, dentro de indústrias, empresas, instituição pública ou centros de pesquisa.
>
> C3(B13): Ela mostra ao aluno como a parte teórica se aplica na prática.

Esses recortes que trazemos dos diferentes Contextos nos mostram que, além dos conteúdos matemáticos e das relações com conceitos de áreas distintas, relativos a problemática das diferentes atividades de modelagem, a própria modelagem foi entendida por muitos como um conceito sobre o qual aprender. A modelagem provocou reflexões e aproximou os participantes de uma realidade futura na qual se projetam.

Valadares (2011, p.42), nesse contexto, está alinhado com esse entendimento:

> De facto, a aprendizagem significativa acerca de um dado objeto a conhecer é, como a própria designação indica, a construção de significados sobre ele. Mas é ao mesmo tempo uma mudança na forma de o encarar e porventura lidar com ele. Resulta num conhecimento pessoal, fruto de uma partilha que envolve simultaneamente ideias e sentimentos. E a aprendizagem só é enriquecedora se conduzir a significados acerca daquilo que se aprende e a uma mudança na experiência de quem aprende.

Como já mencionamos, é característico de ambientes de modelagem despertar reflexões que avancem os limites dos conteúdos curriculares, como indica essa seção. De todo modo, a proposição de uma UEPS, conforme Moreira (2011), tem por objetivo contribuir para a facilitação da aprendizagem significativa de tópicos específicos de conhecimento declarativo e/ou procedimental na sala de aula.

6.3.4 Conteúdo em Foco

Considerações sobre como o conteúdo foi tratado em cada Contexto já aparecem na análise das categorias teóricas anteriores, bem como nas descrições das atividades e respectivas análises específicas. Vamos então complementar nossa análise trazendo outros elementos.

Em cada unidade de ensino o objetivo era a aprendizagem de conteúdos específicos. No Contexto 1 e no Contexto 3 o propósito da proposta estava no âmbito dos conteúdos curriculares. No Contexto 2 estava relacionado com a formação continuada de professores e estudantes em formação inicial. Equações de diferenças, aplicação de tópicos de Cálculo Numérico e a modelagem matemática com a videoanálise, respectivamente, foram os conteúdos das UEPS.

Na proposição de uma UEPS, a aprendizagem do conteúdo é o foco, a sequência estruturada visa a facilitação da aprendizagem significativa deste. Quanto a isso, há convergência com o propósito das atividades de modelagem. Embora durante o processo de modelagem conceitos não-matemáticos sejam necessários, ensinar matemática é o que se deseja.

Faz sentido então considerar uma UEPS bem sucedida (exitora) se evidências de aprendizagem significativa do conteúdo forem encontradas.

> A UEPS somente será considerada exitosa se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer evidências de aprendizagem significativa (captação de significados, compreensão, capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema) (MOREIRA, 2011, p.4).

Como a aprendizagem significativa é um resultado idiossincrático, em um mesmo grupo os efeitos de uma UEPS podem ser bem distintos. A influência da estruturação do ensino vai até certo ponto. Se assumirmos que o material de ensino é potencialmtente significativo, ainda temos que considerar variáveis relativas a cada indivíduo, como a predisposição para aprender significativamente e a disponibilidade de subsunçores na estrutura cognitiva.

Nossa análise a partir dos dados corrobora com Maaβ (2006), que identificou em um grupo de alunos, acompanhados ao longo de um período em que trabalharam com atividades de modelagem, diferentes perfís de modeladores. Segundo a autora, o "modelador distante da realidade" tem atitude positiva a respeito da matemática, mas não têm interesse pelo contexto de situações-problema do mundo real. O "modelador distante da matemática" dá preferência ao contexto em problemas do mundo real, mas mostra atitudes negativas em relação à matemática. O "modelador reflexivo" tem atitudes positivas em relação à matemática em si, bem com no processo de modelagem. O "modelador desinteressado" não é nem interessado no contexto do problema do mundo real nem na própria matemática.

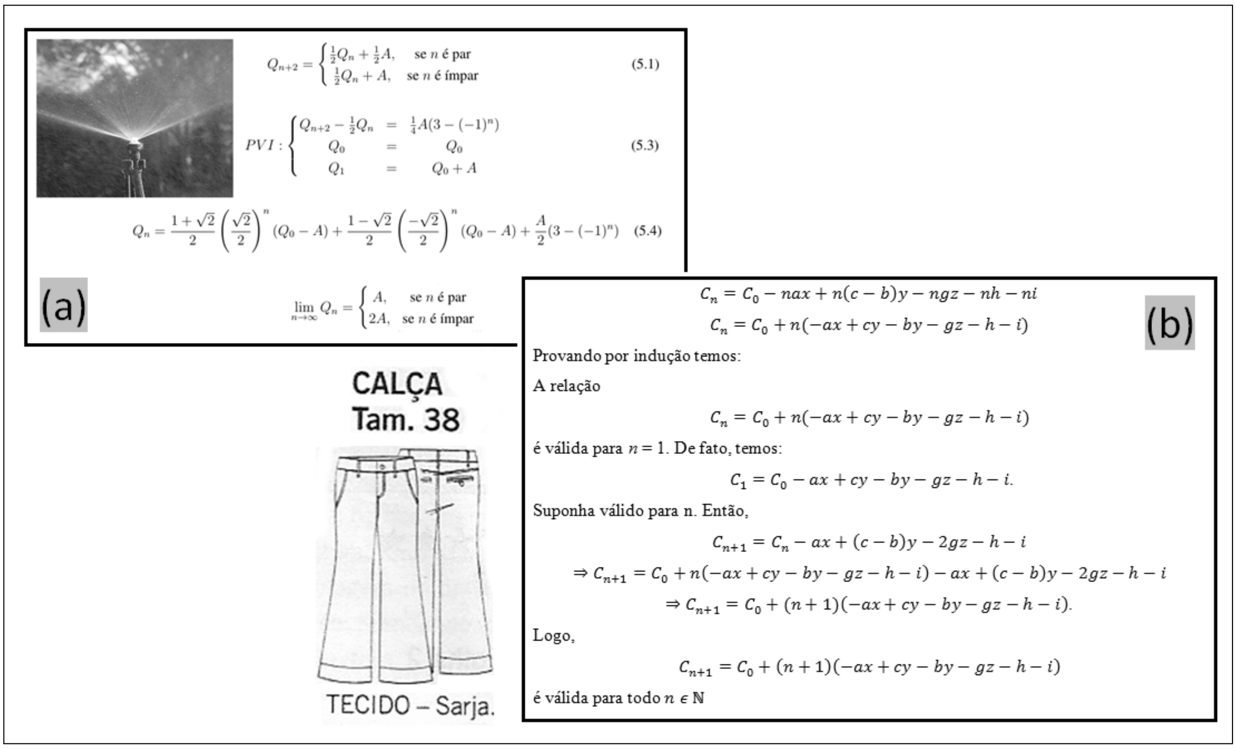
Enquanto Maaβ (2006) relaciona o comportamento dos alunos frente a modelagem com seu sistema de crenças matemáticas, nos aproximamos, nesse trabalho, do construtivismo humano de Novak e acreditamos que os diferentes comportamentos sejam resultados da integração de pensamento, sentimento e ação em cada indivíduo. Segundo Novak (2011) são elementos presentes em qualquer evento de aprendizagem, que envolve em um maior ou menor grau esses componentes e requer uma integração construtiva para melhorar a forma como os alunos aprendem significativamente.

Não pretendemos categorizar os tipos de modeladores de nossa pesquisa, mas cabe mencionar que diferentes características entre os alunos de um mesmo grupo refletiram em trabalhos interessantes, com equilíbrio entre a abordagem da situação-problema, no que se refere ao contexto e à matemática. Trabalhos em grupos colaborativos oferecem oportunidades de engrandecimento humano, pautado na aprendizagem significativa, como sugere Novak e indicam resultados de nossa pesquisa.

Outro fator, apontado por Novak em seu construtivismo humano, importante para a consolidação da aprendizagem significativa, é a troca de significados entre professor e aluno em um evento de aprendizagem. Nesse sentido, voltamos a mencionar o efeito da mediação da professora nas orientações dos grupos e outras atividades dos três Contextos.

A Figura 6.7 traz informações referente à fase de matematização de duas atividades de modelagem do Contexto 1.

Figura 6.7: Fragmentos da fase de matematização em diferentes atividades de modelagem do Contexto 1



Fonte: Arquivos da professora e relatório do Grupo 2.

No fragmento indicado por (a), as expressões (5.1), (5.3) são representações matemáticas para a quantidade de água no solo, na atividade de modelagem da irrigação noturna, cuja solução é o modelo (5.4). Essa atividade permitiu explorar um tipo de equação de diferenças mais elaborada, para a qual, poucas aplicações são ilustradas em livros didáticos que abordam o conteúdo. Essa pode ser considerada uma situação-problema autêntica, que mobilizou diversos conceitos matemáticos. A mediação da professora levou os alunos a revisitar a definição de equações de diferenças, estudadas em aulas anteriores, e, a partir desta, ampliar a noção de equações de diferenças para o caso de segunda ordem. Nessa ocasião, identificamos uma oportunidade de fazer diferenciação de conceitos para as equações de diferenças de ordem distintas, quando os alunos perceberam que características da situação-problema determinariam a hipótese sobre a formulação adequada do modelo e, por consequência, a ordem da equação. A princípio um aluno sugeriu a variação na quantidade de água no solo que resultaria em uma equação de diferenças de primeira ordem (supostamente influenciado pelo modelo que havia aprendido em atividades anteriores), percebendo que esta representação não expressaria os diferentes comportamentos dos períodos noturno e diurno, nova proposição foi realizada para contemplar adequadamente a realidade. Essa relação entre a variação da quantidade de água em diferentes períodos e a ordem da equação de diferenças levou-os a discutir que uma equação de terceira ordem seria adequada para uma situação em que a variação da quantidade de água no solo ocorresse de forma distinta em três períodos e de forma análoga para ordens superiores.

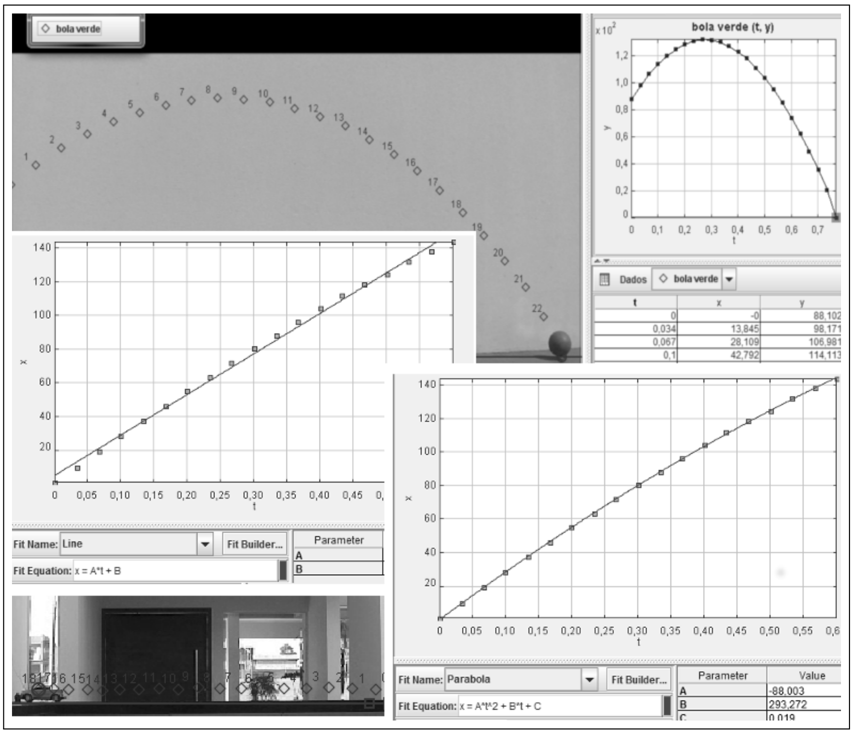
Em referência à atividade do Grupo 2, indicado por (b) na Figura 6.7, ilustramos um caso de harmonia entre a abordagem da situação real e a matematização. O relatório final do grupo apresenta um texto bem elaborado, com indicativos de que as fases da modelagem foram percorridas no estudo da situação-problema. Entre elas, destacamos a fase de matematização, pois, embora o próprio grupo tenha caracterizado o modelo obtido como "simples" (ver seção A.4.2) indicaram rigor matemático na dedução do modelo, com destaque para a prova por indução, garantindo a validade do modelo para um tempo qualquer. Esse cuidado com a matemática é associado à característica de dois alunos (C1(A2) e C1(B2)), que em situações anteriores deram indícios de ter perfil denominado mais distante da modelagem (MAAβ, (2006)). Assim, a atividade de modelagem resultou em uma equação de diferenças de primeira ordem, o que não desafiou os alunos a estudarem conceitos novos em relação ao conteúdo de equações de diferenças, porém, motivou-os a agregar conceitos matemáticos de uma forma que não havia sido abordada em sala de aula.

No Contexto 2, embora o tópico em estudo da UEPS fosse a modelagem matemática em si, o conteúdo matemático constituiu parte da unidade de ensino. A Figura 6.8 traz elementos da fase de matematização de ambas as atividades de modelagem pensadas em conjunto com os participantes, a partir da videoanálise.

As situações-problema foram propostas com a intenção de modelar o comportamento de dois corpos, a bola na primeira situação e o carrinho de fricção na segunda. Na primeira atividade de modelagem, conceitos matemáticos foram necessários desde a definição do sistema de coordenadas cartesianas, quando se discutiu a relevância de se definir o ponto de origem do mesmo, depois, o conceito de função quadrática, a partir dos quais os parâmetros do modelo foram obtidos. Considerando o objetivo de representar o movimento da bola, desde o seu lançamento até o momento que tocava o chão, o conceito de parábola (gráfico da função quadrática), vértice da parábola (para a determinação da altura máxima atingida pela bola e do tempo necessário para atingi-la), raízes da função (para determinar o tempo necessário para que a bola atingisse o chão), bem como, domínio e imagem da função, também foram discutidos. Devido a disponibilidade de recursos do *software* outros conceitos ainda foram mencionados, embora não desenvolvidos: derivada da função (para se obter a velocidade e a aceleração da bola) e de vetores (para representar o sentido do movimento).

Embora ambas as situações fossem representadas pelo mesmo objeto matemático (função quadrática) as hipóteses sugeridas, inicialmente, apontavam a influência visual do movimento o que levou a supor o modelo linear para o movimento do carrinho de fricção.

Figura 6.8: Elementos da fase de matematização do Contexto 2



Fonte: Autora.

Com isso, foi possível refletir sobre o cuidado que se deve ter no ambiente de sala de aula, para que o aluno não signifique equivocadamente um conceito. A esse respeito, as duas atividades de modelagem, associadas à videoanálise, oportunizaram refletir também sobre a importância de se levantar hipóteses fundamentadas na situação real e em conceitos de outras áreas, como na Física, nesses casos.

Nesse sentido, pode-se inferir que houve a diferenciação progressiva de conceitos, no que se refere aos objetos matemáticos função linear e função quadrática, em relação às hipóteses fundamentadas em conceitos matemáticos e físicos. Quanto à reconciliação integradora, entendemos que na primeira situação ocorreu ao se fazer uso, de forma contextualizada, das propriedades de gráfico, vértice, raízes, da função quadrática, que são elementos, em geral, abordados no ensino de função quadrática e que era de conhecimento de todos os participantes, ao menos em tese.

No Contexto 3, diferentes tópicos do conteúdo matemático foram trabalhados, de acordo com a necessidade das diferentes situações-problema definidas por cada grupo. A Tabela 6.4 relaciona os métodos indicados no relatório final de cada grupo e a avaliação resultante apenas para o critério *Cálculo Numérico: método e resolução* (o resultado da avaliação final do grupo é apresentado na Tabela 6.2, deste capítulo).

Tabela 6.4: Conteúdo em foco nas UEPS no Contexto 3 com a nota atribuída ao critério *Cálculo Numérico: método e resolução*.

Grupos	Método Numérico	Nota (0-1)
G1	Interpolação polinomial:método de Newton_Gregory	0,5
G2	Ajuste de curvas: mínimos quadrados	0,8
G3	Interpolação polinomial	0,0
G4	Não identificado	0,0
G5	Interpolação polinomial:método de Newton_Gregory	0,8
G6	Ajuste de curvas: mínimos quadrados	0,8
G7	Integração numérica: método dos trapézios	0,7
G8	Ajuste de curvas: mínimos quadrados	0,4
G9	Interpolação polinomial:método não definido	0,3
G10	Sistemas Lineares: método de eliminação de Gauss e Gauss-Seidel	0,9
G11	Interpolação polinomial:método de Newton_Gregory	0,3
G12	Ajuste de curvas: mínimos quadrados	0,6
G13	Ajuste de curvas: mínimos quadrados	0,8
G14	Interpolação polinomial:métodos de Newton, Lagrange e Newton-Gregory	0,7

Aspectos referentes à abordagem matemática para o problema de alguns grupos já foram discutidos em seções anteriores. Por exemplo, a não constituição de UEPS para os trabalhos do Grupos 3, Grupo 4 e Grupo 11, na seção 6.3.1 e a influência que os recursos tecnológicos exerceram sobre a obtenção dos modelos para o Grupo 2, Grupo5, Grupo 8, Grupo 10 e Grupo 13, na seção 6.3.2.

A Tabela 6.4 indica que o conteúdo que mais emergiu das atividades de modelagem foi Ajuste de Curvas. Esse conteúdo é muito recorrente em atividades de modelagem inerentes ao ensino e a aprendizagem da Matemática. Segundo Bassanezi (2002, p.54),

> Uma regressão ou ajuste de curva é um recurso formal para expressar alguma tendência da variável dependente y quando relacionada com a variável independente x. [...] Uma curva de regressão é bastante útil para uma formulação simplificada dos dados ou verificação de alguma tendência entre eles. Quando analisamos algum fenômeno ou situação através de dados numéricos estamos interessados, além da descrição e tendências locais fornecidas por uma curva de regressão, em saber se a relação funcional correspondente $y = f(x)$ é também adequada para se fazer previsões de y quando x escapa do intervalo pesquisado.

De fato, foi também recorrente o interesse expresso, inicialmente, pelos alunos de estudar históricos de dados a fim de fazer estimativas para situações futuras (emissões de poluentes, elevação da temperatura, consumo de água, degradação).

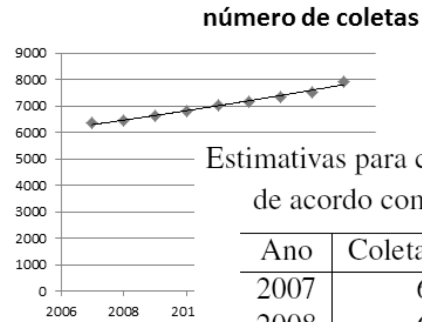
Como já mencionamos, esse conteúdo, embora estivesse na ementa da disciplina, não foi abordado nas aulas devido ao estreito calendário pós-greve da universidade. Nesse sentido, a APS contribuiu para que boa parte dos alunos tivesse oportunidade de conhecer e estudar esse conteúdo. Esse foi um dos pontos mais relevantes da integração de atividades de modelagem matemática às UEPS. Se analisarmos apenas esse critério (Tabela 6.4), que é o mais relacionado à aprendizagem do método numérico e a resolução proposta pelo grupo, podemos afirmar que tivemos evidências de aprendizagem significativa e que esta tenha sido potencializada pela integração.

Observemos que o método de ajuste de curvas foi abordado nos três Contextos da pesquisa. Embora trabalhando com equações de diferenças, o Grupo 1 do Contexto 1 lançou mão do método, por meio de um recurso computacional, para avaliar se a hipótese sobre a variação do número de coleta de sangue em um hemocentro de que levaria a um modelo exponencial seria adequada à tendência dos dados (ver seção A.4.1 (A:contexto1). A Figura 6.9 mostra recortes do relatório entregue pelo grupo, indicando o uso do recurso de ajuste de curva.

Figura 6.9: Recortes da Atividade de Modelagem do Grupo 1 - Contexto1

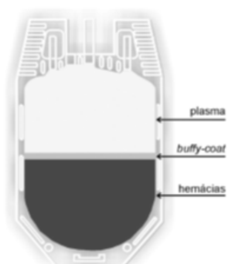
Total de coletas interna e externa durante os últimos cinco anos

Ano	Coletas Internas	Coletas externas
2007	6338	3772
2008	6457	4738
2009	6614	4603
2010	6797	4667
2011	7028	4330



Estimativas para coletas interna de acordo com o modelo.

Ano	Coletas Internas
2007	6338
2008	6457
2009	6614
2010	6797
2011	7028
2012	7170
2013	7350
2014	7533
2015	7915



$$PVI: \begin{cases} C_{n+1} = C_n(1,025) \\ C_0 = 6338 \end{cases}$$

$$C_n = \alpha^n C_0 + \beta \frac{(1-\alpha^n)}{1-\alpha}$$

$$C_n = (1,025)^n \times 6338$$

Fonte: Relatório do grupo.

O trecho a seguir, retirado do relatório dos alunos, expressa com que intenção os alunos usaram o ajuste de curvas.

> Observe que colocando linhas de tendência linear e exponencial para esse conjunto de dados ambas se ajustam bem, também, pelo gráfico podemos perceber que o crescimento no número de coletas de um ano para outro não foi significativa, as taxas se mantiveram bem próximas. Relembrando que C_0 se refere ao numero de coletas do ano de 2007, C_1 ao número de coletas do ano de 2008 e assim por diante, temos que a diferença $C_1 - C_0 = i.C_0$, onde i é a taxa de crescimento no número de coletas internas de um ano para o outro.
>
> [...]
>
> Montando novamente o gráfico com os dados acima, podemos ter uma ideia do comportamento do modelo ao qual chegamos. Analisando o gráfico acima podemos ver, após inserir a linha de tendência, que, para esse conjunto de dados ela se ajusta bem e será crescente.

Como afirma Galbraith (2011), esta abordagem tem se tornado mais usual com a disponibilidade de *softwares* e calculadoras gráficas com opção por métodos de regressão nos menus. No entanto, o autor faz a ressalva de que um modelo obtido por este meio pode tornar-se meramente um produto técnico cujos parâmetros variam com o conjunto de dados em particular, gerado na ignorância completa dos princípios subjacentes a situação real, muitas vezes sem mesmo o conhecimento sobre a procedência dos dados.

O monitoramento para evitar que a tecnologia seja usada de forma inadequada pelo aluno é uma ação que pode decorrer da proximidade do professor na orientação dos alunos durante as atividades de modelagem.

Com isso, finalizamos as considerações sobre as quatro categorias teóricas: *pensando juntos*, *relações* com *e* uso *de tecnologias*, *link entre modelagem e atuação profissional*, *conteúdo em foco*, por meio das quais nosso entendimento sobre as questões específicas da pesquisa foi elucidado.

Orientadas pelos princípios que sustentam as UEPS como forma de organizar o ensino, sugerimos agregar atividades de modelagem matemática e a disponibilidade de recursos tecnológicos de modo que esses ambientes fossem favoráveis a ocorrência da aprendizagem significativa. No entanto, isso garante apenas parte das condições necessárias para que o aluno aprenda significativamente.

Conforme Moreira (1999b, p.111): "O ensino requer reciprocidade de responsabilidades, porém, aprender de maneira significativa é uma responsabilidade do aluno que não pode pode ser compartilhada pelo professor."

Em nossa trajetória analítica, a partir dos dados, bem como, com as reflexões expressas nas seções anteriores, reconhecemos propriedades comum entre as categorias teóricas. Dentre outras, a influência da *intencionalidade* do aluno se evidencia. Nesse sentido, na próxima seção passamos ao fechamento de nossa análise global com algumas reflexões.

6.4 A Intencionalidade como atributo integrador

Durante a pesquisa, inúmeras vezes notamos que as intenções e atitudes dos alunos em relação as atividades de aprendizagem eram fatores determinantes. No mesmo sentido de Vertuan, Borssoi e Almeida (2013), notamos que a intencionalidade é uma condição importante para a aprendizagem, e não é influenciada apenas por aspectos cognitivos, mas também por fatores motivacionais e por características do ambiente de ensino e aprendizagem.

O termo *aprendizagem intencional*, cunhado por Bereiter e Scardamalia (1989), remete a processos cognitivos que têm aprendizagem como uma meta e não como um resultado incidental. Os próprios autores, reconhecem que uma das maiores dificuldades na aprendizagem intencional é relacionada ao estabelecimento de metas. Foi nesse sentido que as UEPS foram propostas, pensando em contribuir para despertar a intencionalidade a partir das atividades de modelagem e da disponibilidade de orientação ao longo dos trabalhos, no sentido de oferecer *feedback*, para que o aluno tomasse consciência de seu processo de aprendizagem.

Esses autores, sugerem a modelagem de situações-problema como uma estratégia para compor ambientes favoráveis ao despertar da intencionalidade, por se tratar de atividades propícias ao trabalho colaborativo em que os alunos pensam em voz alta com oportunidade de se envolver desde a formulação do problema. Desse modo, a modelagem permite aos alunos transcender metas tipicamente escolares e ativar o processo de criação em um nível mais elevado e pessoalmente mais significativo.

Para Arrieta (2003), a modelagem matemática, de certa forma, reflete a intencionalidade humana, considerando que o uso de modelos matemáticos na interpretação e possível interferência na vida do homem, possui uma característica de intencionalidade. É essa intencionalidade que oferece à representação matemática um caráter social. Isto é, o homem utiliza o modelo com uma intenção, e esta pode ser socialmente construída. Neste sentido, Almeida e Ferruzzi (2009) entendem a Modelagem como uma atividade que tem em uma de suas bases o aspecto social, pois a intencionalidade advém de fatores socialmente estabelecidos. Entendemos que o ensino deve agir no sentido de que os alunos aprofundem e ampliem os significados que constroem por meio da participação nas atividades de aprendizagem.

Nesse sentido, ações e interações desencadeadas durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, que envolve desde o acesso às informações acerca da problemática investigada até a resolução, interpretação e validação da solução do problema, têm potencialidade para desencadear a intencionalidade dos alunos, no que tange à sua predisposição e ao seu engajamento na investigação matemática, na busca de uma solução e até no elencar um problema para investigação.

A intencionalidade também está relacionada ao ambiente criado na sala de aula pelos alunos e pelo professor, os quais influenciam as ações e os pensamentos uns dos outros, ao pensarem juntos. Uma vez desencadeada a intencionalidade, os sujeitos discutem e colocam em ação mecanismos e conhecimentos de sua estrutura cognitiva que influenciam a aprendizagem uns dos outros, bem como provocam reflexões pessoais.

O professor atua de maneira intencional para mudar significados da experiência do aluno, utilizando materiais potencialmente significativos. Se o aluno manifesta uma disposição para aprender, ele também atua intencionalmente para captar o significado dos materiais. O objetivo é compartilhar significados (MOREIRA, 1999).

Voltamos a mencionar Ausubel (2003), para quem o estudante assume uma responsabilidade adequada pela própria aprendizagem quando: aceita a tarefa de aprender ativamente, procurando compreender o material organizado para o ensino; tenta, de forma autêntica, integrá-lo aos conhecimentos de sua estrutura cognitiva; não evita o esforço para conseguir aprender conceitos difíceis e não exige que o professor lhe facilite as coisas; decide fazer as perguntas necessárias sobre o que não compreende.

Em consonância com as ponderações de Ausubel, com amparo dos resultados dessa pesquisa, podemos considerar que várias características são necessárias para descrever um aluno responsável pela sua aprendizagem, sendo em nosso entendimento, a intencionalidade o fator que desencadeia os demais.

Howland, Jonassen e Marra (2011), como já mencionamos na seção 3.5, inferem que a aprendizagem significativa com a tecnologia ocorre quando o aluno se envolve com as atividades de ensino e de aprendizagem de forma intencional, ativa, construtiva, autêntica e colaborativa.

De fato, esses atributos foram evidenciadas em maior ou menor grau em nossa codificação e processo analítico, contudo, a intencionalidade se mostrou um fator com forte influência tanto em casos de maior como de menor sucesso em relação a aprendizagem, a partir das atividades. Entendemos que esse atributo é equivalente a uma das condições que Ausubel indica para que a aprendizagem significativa ocorra, a predisposição positiva do aluno para aprender significativamente. A esse respeito, os resultados de nossa pesquisa corroboram com esse aspecto da teoria.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O princípio de que o ensino só pode ser considerado exitor quando há aprendizagem faz entender que o professor que estrutura sua prática no sentido de oferecer ambientes de ensino com condições para que os alunos tenham experiências de aprendizagem significativa encontra desafios que vão para além de organizar o material de ensino potencialmente significativo. A busca por evidências de aprendizagem significativa é um importante desafio.

A contribuição das UEPS vem no sentido de orientar a estruturação de uma sequência de ensino visando facilitar a aprendizagem significativa, com indicativos de como as atividades devem ser propostas a fim de avançar para o objetivo, além de sugerir sobre o processo de avaliação. Com isso, nosso intuito foi investigar *como ambientes de ensino e de aprendizagem que consideram atividades de modelagem matemática, dispõem de recursos tecnológicos e são organizados segundo os princípios de uma UEPS, viabilizam a aprendizagem significativa dos estudantes.*

Ao fazermos opção por uma investigação orientada pela Teoria Fundamentada em Dados, como abordagem metodológica e de análise, entendemos que estar próximo dos dados é um fator fundamental para colher as evidências que levam a compreensão das questões de pesquisa. Fazer a codificação, desde o início da pesquisa, permite observar lacunas nos dados e buscar novos dados para proceder a compreensão analítica sobre o fenômeno estudado, com subsídios para planejar intervenções que levem a obter dados relevantes. Acabamos por perceber que as orientações advindas da Teoria Fundamentada em Dados estão no mesmo sentido daquelas que encontramos na Teoria da Aprendizagem Significativa para buscar evidências de aprendizagem significativa no decorrer do ensino.

Assim, consideramos ao final desse estudo que a integração de atividades de modelagem às UEPS favorece essa aproximação, pois, da forma como entendemos a proposição de atividades de modelagem, o professor necessariamente tem o papel de orientador e, à medida que o aluno, o grupo, colaboram, é possível levar a cabo tanto a avaliação formativa, quanto a somativa, de forma continuada. Do contrário, corre-se o risco de se chegar a um resultado que não reflete a pesquisa, que não reflete se a aprendizagem é mesmo significativa, ou, em que medida o é. A integração de atividades de modelagem matemática à UEPS proporcionou resultados que conferem relevância a essa combinação, em cada Contexto da pesquisa.

Convidar os alunos a participarem das discussões e mesmo atribuir responsabilidade a eles, inicialmente em torno de uma problemática, e depois a fim de avançar pelas fases da modelagem, contribui para que os alunos verbalizem o que se passa em suas mentes ao pensarem sobre a atividade, propicia ao professor fazer inferências sobre os modelos mentais, possibilita a observação de evidências de atribuição de significados pelos alunos.

A análise dos dados trouxe reflexões sobre as relações entre modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias em diferentes ambientes educacionais, com o intuito de investigar como os alunos agem e reagem em ambientes em que esses elementos coexistem. Após o término da primeira etapa da pesquisa (amostragem inicial, Contexto 1) sentimos a necessidade de seguir com a coleta de dados e realizar a amostragem teórica, para a qual outros dois Contextos (Contexto 2 e Contexto 3) foram pensados, visando que algumas condições fossem comuns à primeira, mas que diferissem em outros aspectos.

No Contexto 1 investigamos uma turma de alunos de licenciatura em Matemática, para os quais propusemos uma UEPS para o estudo em um tópico específico, equações de diferenças. Nesse Contexto, as atividades não eram opcionais, pois compunham cinquenta por cento da avaliação dos alunos no segundo bimestre do ano letivo. De antemão foi possível obter informações sobre a turma e pensar atividades direcionadas à ela, a partir de um tópico do programa da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. Assim, a modelagem era, à princípio, o objeto de estudo por meio do qual se desenvolviam conteúdos matemáticos.

O Contexto 2 se diferenciou dos demais, principalmente, devido a sua proposição. Neste caso, os participantes procuraram deliberadamente estar naquele espaço de discussões, em que se sentiram convidados a partir do tema título do minicurso: atividades de modelagem matemática com uso de recursos tecnológicos. Os participantes escolheram fazer o minicurso, indicando predisposição positiva para a aprendizagem, embora suas expectativas fossem desconhecidas pela pesquisadora. A UEPS foi estruturada à princípio, visando um público genérico, de acordo com os padrões para o evento no qual o minicurso estava inserido. Por se tratar de um curso de curta duração, a UEPS contribuiu para a monitoração da professora na condução das atividades, de modo a oferecer aos participantes um corpo de conhecimentos sequencialmente pensado.

A proposta que direcionou a pesquisa no Contexto 3, integrou o planejamento da disciplina de Cálculo Numérico para três turmas de Engenharia (Ambiental e de Materiais) de uma universidade tecnológica federal, e correspondia as atividades práticas supervisionadas correspondentes a vinte por cento da carga horária da disciplina. A participação dos alunos não foi facultativa, pois, a avaliação das APS integralizou trinta por cento da nota no semestre letivo. Como as APS têm carga horária não presencial, permitiu uma proposta mais aberta e deu maior liberdade aos alunos na condução das atividades, de modo que cada grupo teve a oportunidade de desenvolver uma UEPS diferente, que foi se estruturando ao longo do semestre, conforme iam avançando com o processo de modelagem e o estudo dos conteúdos nas aulas presenciais.

A proposição de UEPS com atividades de modelagem se mostrou pertinente em todos os Contextos. Para os propósitos da pesquisa, o Contexto 2 se mostrou mais limitado, embora tenha contribuído com dados relevantes no entendimento das categorias analíticas que emergiram em nossa investigação. O primeiro e o terceiro Contextos permitiram um estudo mais minucioso por ter sido possível permanecer mais tempo em contato com os alunos envolvidos.

As categorias teóricas, consideradas uma síntese da nossa percepção dos dados, obtidas por meio de um processo persistente de comparação dos dados, baseado nas diretrizes da Teoria Fundamentada em Dados, nos levou a compreensão da questão de pesquisa. Ao refletirmos sobre as categorias *pensando juntos*, *relações com a tecnologia e seus usos*, *conteúdo em foco* e *link entre modelagem e atuação profissional* voltamos novamente ao dados, trazendo aspectos dos diferentes Contextos para proporcionar o entendimento global da pesquisa, que nos levou a considerações sobre a influência da *intencionalidade* do aluno como um fator determinante para desencadear sua aprendizagem significativa.

O ATLAS.ti, *software* de análise qualitativa, foi um importante auxiliar que nos permitiu proximidade com os dados, fundamental para a dinâmica da codificação e consequentemente para o processo analítico. Serviu-nos, desse modo, como parceiro intelectual desde as primeiras codificações até a conclusão da análise. Teve a função de organizador de documentos e de ideias, uma memória de trabalho.

Com essa pesquisa, acrescentamos conhecimento à área de Educação Matemática ao trazer para diferentes ambientes educacionais o conceito de UEPS e o olhar sobre as relações dos alunos com a tecnologia nas atividades de modelagem. Em específico, para a área de Modelagem Matemática, avançamos em relação ao cenário que encontramos na revisão de literatura ao fazer a articulação desses três elementos, a modelagem matemática, UEPS e tecnologias, de modo que a análise dos diferentes Contextos indicou que essa articulação favorece a aprendizagem significativa dos alunos ao oferecer condições que, em certa medida, parecem mobilizar a intencionalidade dos alunos. Assim, também vemos contribuições para a área da Aprendizagem Significativa, ao acrescentar resultados de uma pesquisa relacionada ao ensino de Matemática no âmbito das UEPS, que trata-se de uma estrutura proposta recentemente e que se mostrou bastante pertinente como uma forma de pensar e organizar um ensino potencialmente significativo. Todavia, esperamos que nossos resultados provoquem novos *insights* de pesquisas.

A análise que conduzimos permitiu uma compreensão da questão de pesquisa baseado em um conjunto de dados que consideramos adequados para avançar e trazer novos resultados à área de pesquisa em Modelagem Matemática na Educação Matemática. Nesse sentido, como vimos na seção 3.2.1, as condições básicas para a aprendizagem significativa compreendem que: o material organizado para o ensino deve ser potencialmente significativo; a estrutura cognitiva do aluno deve dispor de *subsunçores* que permitam o relacionamento do que o aluno já sabe com os conhecimentos novos; o aluno deve apresentar uma predisposição positiva para aprender de maneira significativa, ou seja, para relacionar o conhecimento que já tem com o que deve aprender.

Partindo do princípio que as UEPS garantiram a disponibilidade de material de ensino potencialmente significativo para os alunos, podemos inferir a partir do nosso olhar para os dados e das reflexões decorrentes, que *ambientes de ensino e de aprendizagem que consideram atividades de modelagem matemática, dispõem de recursos tecnológicos e são organizados segundo os princípios de uma UEPS*, podem viabilizar a aprendizagem significativa, atuando de diversas formas:

- As atividades são pensadas de modo a avançar gradativamente em grau de dificuldade, permitindo ao aluno que os novos conhecimentos sejam integrados à estrutura cognitiva à partir de conhecimentos prévios identificados, à medida do possível, pelo professor;
- Oferecem a possibilidade de que os alunos se envolvam em atividades autênticas, e de modo autêntico, podendo definir temas de interesse para desenvolver modelagem matemática;
- Muitas vezes despertam a intencionalidade do aluno, provocando-o a tomar uma atividade de ensino como atividade de aprendizagem;
- Atribuem maior responsabilidade ao aluno, em relação a ambientes convencionais de ensino;
- Permitem aprendizagem de conceitos não essencialmente matemáticos;
- Promovem o trabalho colaborativo, quando os alunos passam a *pensar juntos* com os pares, com o professor, com a tecnologia;
- Motivam o aluno a mobilizar a tecnologia como parceira intelectual;
- Estabelecem aproximações com a prática profissional, mesmo quando relacionada à expectativas futuras;
- Proporcionam a avaliação formativa do aluno ao longo da unidade de ensino;
- Permitem ao professor mais oportunidade para buscar evidências de aprendizagem significativa.

Assim, o que as análises empreendidas para esses três Contextos distintos de ensino e de aprendizagem indicam é de que a integração entre UEPS e modelagem matemática mediada pela tecnologia tem potencial para promover a aprendizagem significativa dos estudantes.

Embora a saturação teórica a que se refere Charmaz (2009) não possa ser confirmada, considerando que novos *insights* teóricos possam emergir em outros contextos educacionais. Desse modo, vemos perspectivas de pesquisas futuras, no sentido de estudar novos Contextos e avançar para uma compreensão analítica que nos permita de fato chegar a uma teoria fundamentada (a partir dos dados) sobre as articulações entre modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias em diferentes Contextos educacionais.

A curto prazo pensamos em realizar uma análise quantitativa, a partir de parte dos dados que dispomos, para que, combinada à análise qualitativa que realizamos venha acrescentar entendimento aos resultados dessa pesquisa.

A partir do que constatamos sobre a relação dos alunos com a tecnologia nos diferentes Contextos, pretendemos desenvolver pesquisas envolvendo a tecnologia de forma mais direcionada. Nestas situações os alunos podem ser esclarecidos e orientados a partir do conhecimento prévio que têm e dos usos que fazem da tecnologia, a fim de promovê-la à parceira intelectual, e assim investigar os efeitos sobre a aprendizagem significativa dos alunos envolvidos com atividades de modelagem matemática.

8 REFERÊNCIAS

[1] ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. (2012). **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto.

[2] ALMEIDA, L. M. W.; FONTANINI, M. L. C. (2010). Aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática: uma investigação usando mapas conceituais. **Investigações em Ensino de Ciências (Online)**, v. 15, p. 403-425.

[3] ALMEIDA, L. M. W.; SANTOS, F. V.; SILVA, A. (2009). Atividades de modelagem matemática na perspectiva da educação matemática crítica mediadas pelo uso do computador. In: Irinéa de Lourdes Batista; Rosana Figueiredo Salvi. (Org.). **Pós-graduação em ensino de ciências e educação matemática: um perfil de pesquisas**. Londrina: EDUEL, v.1, p.1-12.

[4] ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. (2005). Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. Ciência e Educação, São Paulo, v.11, p.1-16.

[5] ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. (2004). Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, ano 17, n. 22, p. 19-35.

[6] ARRIETA, J.(2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en El aula. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav?IPN.

[7] ASHBURN, E. A.; FLODEN, R. E. (2006) Meaningful Learning Using Technology: What Educators Need to Know and Do. New York: Teachers College, Columbia University. 232 p.

[8] AUSUBEL, D. P. (2003) **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva.** Lisboa: Plátano.

[9] AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D. e HANESIAN, H. (1980). **Psicologia Educacional**. Trad. de Eva Nick. 2 ed. Rio de Janeiro, Interamericana.

[10] BASSANEZI, R. C. (2002). **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto.

[11] BEREITER, C.; SCARDAMALIA, M. (1989). Intentional learning as a goal of instruction. In L. B. Resnick (Ed.), **Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser** (pp. 361-392). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[12] BORBA, M. C.; CHIARI, A. S. S. (Orgs.) (2013). **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. 1ª. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, v.1. 382p .

[13] BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. (2005). **Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation**. New York: Springer Science+Business Media, Inc.

[14] BORSSOI, A. H. (2004). **A aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino**. Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina.

[15] BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. (2004). Modelagem Matemática e Aprendizagem Significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 6, n. 2, pp. 91-121.São Paulo.

[16] BRANSFORD, J. D.; BROWN, A. L.; COCKING, R. R. (2000). E-book. **How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School: Expanded Edition.** Washington: National Academy Press. 385 p.

[17] BUCHWEITZ, B. (2001). Aprendizagem significativa: ideias de estudantes concluintes de curso superior. **Investigação em Ensino de Ciências**, v. 6, n. 2, pp. 1-10. Porto Alegre. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol6/n2/v6_n2_a2.htm>. Acesso: janeiro de 2013.

[18] BURAK, D. ; BARBIERI, D. D. (2005). Modelagem Matemática e sua implicações para a Aprendizagem Significativa. In: **IV Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática**, Feira de Santana - BA.

[19] BURAK, D.; ARAGÃO, R. M. R. (2012). **A Modelagem Matemática e relações com a Aprendizagem Significativa**. Curitiba/PR.: CRV.

[20] CARREIRA, S. (1993). Construção e exploração de modelos matemáticos em situações do mundo real envolvendo Trigonometria. **Quadrante**, v. 2, n. 1, pp. 49-62.

[21] CASSIANI, S. H. B.; CALIRI, M. H. L. e PELÁ, N. T. R.. A teoria fundamentada nos dados como abordagem da pesquisa interpretativa. **Rev. Latino-Am. Enfermagem**, Dez 1996, vol.4, no.3, p.75-88. ISSN 0104-1169

[22] CHARMAZ, K. (2009). **A construção da teoria fundamentada - Guia prático para análise qualitativa** Trad. Joice Elias Costa. Porto Alegre: Artmed. 272p.

[23] COLL, C. (1994). Significado e sentido na aprendizagem escolar. Reflexões em torno do conceito de aprendizagem significativa. In: COLL, C. **Aprendizagem escolar e construção do conhecimento**. Porto Alegre, Artes Médicas.

[24] COLL, C. *et al*. (2000). **Psicologia do Ensino**. Trad. de Cristina Maria de Oliveira. Porto Alegre, Artes Medicas Sul.

[25] CUBAN, L. (2001). **Oversold and underused: Computers in the classroom**. Cambridge, MA: Harvard University Press.

[26] COSENZA, R. M. e GUERRA, L. B. (2011). E-book. **Neurociência e educação: como o cérebro aprende.**. Porto Alegre: Artmed.

[27] D'AMBROSIO, U. (1986). **Da realidade à Ação: Reflexões sobre Educação (e) Matemática**. Campinas . SP: Summus/UNICAMP.

[28] D'AMBROSIO, U. (2002). A Matemática nas escolas. **Educação Matemática em Revista**, ano 9, n. 11, pp. 29-33.

[29] FIGUEIREDO, D. F.; KATO, L. A. (2012) . Uma proposta de avaliação de aprendizagem em atividades de Modelagem Matemática na sala de aula. **Acta Scientiae(ULBRA)**, v. 14, n. 2, p. 260-275.

[30] FONTANINI, M. L. (2007). Modelagem Matemática X Aprendizagem Significativa: uma investigação usando mapas conceituais. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

[31] FRIESE, S. **ATLAS.ti 6: tour rápido**. Trad. Ignacio García. Disponível em:<http://www.atlasti.com/uploads/media/QuickTour_a6_pt.pdf>. Acesso em 13 mar. 2013.

[32] GALBRAITH, P. (2012). Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, 5(1), 3-16.

[33] GALBRAITH, P. (2011). Models of modelling: Is there a first among equals? In: Julie Clark, Barry Kissane, Judith Mousley, Toby Spencer and Steve Thornton, Proceedings of the AAMT-MERGA Conference 2011. **Mathematics: Traditions and [New] Practices AAMT-MERGA Conference 2011**, Alice Springs, Australia, (p. 279-287). Disponível em:<http://www.merga.net.au/documents/RP_GALBRAITH_MERGA34-AAMT.pdf>. Acesso em 27 abr. 2013.

[34] GOLDBERG, S. (1986). *Introduction to Difference Equations: with Illustrative Examples from Economics, Psychology, and Sociology*. New York: Dover Publications.

[35] GRAVINA, M. A. e SANTAROSA, L. M. (1998). A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: **Rede Iberoamericana de Informática Educativa**, 4. Brasília. Anais eletrônicos do IV Congresso RIBIE. Brasília, pp. 1-16.

[36] HOWLAND, J. L.; JONASSEN, D.; MARRA, R. M. (2011). **Meaningful Learning with Technology**. 4. ed. Boston: Pearson. 292 p.

[37] HEIDEMANN, L. A.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A.. Ciclos de Modelagem: uma alternativa para integrar atividades baseadas em simulações computacionais e atividades experimentais no ensino de Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 29, p. 965-1007, 2012.

[38] HESTENES, D. Notes for a Modeling Theory of Science, Cognition and Instruction. In: **GIREP Conference: Modelling in Physics and Physics Education**, Amsterdam, Netherlands, 2006.

[39] IARONKA, C. F.(2008). **Contribuições da teoria da aprendizagem significativa e da Modelagem Matemática para o estudo de funções**. 130 f. Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática, Ciências Naturais e Tecnológicas, Centro Universitário Franciscano. Santa Maria.

[40] International Society for Technology in Education ([ISTE], 2000). National educational technology standards (NETS) for teachers. Retrieved July 20, 2006, from http://cnets.iste.org/teachers/

[41] JONASSEN, D. H.; STROBEL, J. (2006). Modeling for Meaningful Learning. In **Engaged Learning with Emerging Technologies**, Springer Netherlands, p. 1-27.

[42] KAISER, G.; SRIRAMAN, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 38, n. 3. p. 302-310.

[43] KLÜBER, T. E. (2012). **Uma metacompreensão da Modelagem Matemática na Educação Matemática**. 396. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

[44] LESH, R. (2010). Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 2(1), 16-48.

[45] MAAβ, K. (2006). **Barriers and Opportunities for the Integration of Modelling in Mathematic Classes: Results of an Empirical Study**. Disponível em http://www.icmeorganisers. dk/tsg20/Maass.pdf capturado em 9/7/2006.

[46] MALHEIROS, A. P. S., FRANCHI, R. H. O. L. (2013). As Tecnologias da Informação e Comunicação nas produções sobre Modelagem no GPIMEM. In: **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, p. 175-194.

[47] MOREIRA, M. A. (2011). Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas-UEPS. **Aprendizagem Significativa em Revista**, Porto Alegre, v. 2, n. 1, p.43-63, ago. 2011. Quadrimestral. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/?go=artigos&idEdicao=2>. Acesso em: 05 fev. 2012.

[48] MOREIRA, M. A. (2004). **Modelos Mentais**. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/modelosmentaisport.pdf>. Acesso: abril de 2013.

[49] MOREIRA, M. A. (1997). **Aprendizagem Significativa: um conceito subjacente**. Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo. Actas... Burgos, Espanha. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Burgos, pp. 19-44.

[50] MOREIRA, M. A. (1999a). **Teorias de aprendizagem**. São Paulo: Editora Pedagógica Universitária.

[51] MOREIRA, M. A. (1999b). **Aprendizagem Significativa**. Fórum Permanente de professores. Brasília: Ed. Universidade de Brasília.

[52] MOREIRA, M. A. e BUCHWEITZ, B. (1987). **Mapas conceituais: instrumentos didáticos de avaliação e de análise de currículo**. São Paulo, Moraes.

[53] MOREIRA, M. A. e MASINI, E. F. S.(2006). **Aprendizagem Significativa: a Teoria de David Ausubel.** São Paulo, Centauro.

[54] NICOLELIS, M. (2011). **Muito Além do Nosso Eu: a nova Neurociência que une Cérebro e Máquinas - e como ela pode mudar nossas Vidas**. São Paulo, Companhia das Letras.

[55] NOVAK, J. D. (2011). A Theory of Education: meaningful learning underlies the constructive integration of thinking, feeling, and acting leading to empowerment for commitment and responsibility. **Aprendizagem Significativa em Revista**, Porto Alegre, v. 1, n. 2, p.1-14, ago. 2011. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr>. Acesso em: 05 fev. 2012.

[56] NOVAK, J. D. (2000). **Aprender, criar e utilizar o conhecimento. Mapas conceptuais como ferramentas de facilitação nas escolas e empresas.** Lisboa: Plátano Universitária. 252p. Tradução para o português do original Learning, creating, and using knowledge. Concept maps as facilitating tools in schools and corporations.

[57] NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. (1988). **Aprendiendo a Aprender**. Tradução: J.M. Campanario e E. Campanario, Barcelona: Martínez Roca, 1988.

[58] OLIVEIRA, A. M. P. (2010). **Modelagem Matemática e as tensões nos discursos dos professores**. 199. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador.

[59] POSTAL, R.F.; HAETINGER, C.; DULLIUS, M.M.; SCHOSSLER, D.C. (2011): Atividades de Modelagem Matemática visando-se a uma aprendizagem significativa de funções afins, fazendo uso do computador como ferramenta de ensino. **Alexandria**,v. 4, n. 1, pp.153-173.

[60] SANTOS I, L. E. (2011). Grounded Theory segundo Charmaz: experiências de utilização do método. **Infiressources**. Set 2011. Publicação Eletrônica. Disponível em <http://www.infiressources.ca/MyScriptorAdmin/scripto.asp?resultat=462761>.

[61] SILVA, C.(2011). **A perspectiva sociocrítica da modelagem matemática e a aprendizagem significativa crítica: possíveis aproximações**. Dissertação mestrado em Educação para a Ciência e Matemática, Universidade Estadual de Maringá.

[62] SILVA, K. A. P. (2013). **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado**. 285 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

[63] SILVA, C.; KATO, L. A., PAULO, I. J. C.(2012). A perspectiva sociocrítica da modelagem matemática e a aprendizagem significativa crítica: possíveis aproximações. **Investigação em Ensino de Ciências**, v. 17, n. 1, pp. 109-123. Porto Alegre. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID281/v17_n1_a2012.pdf>. Acesso: janeiro de 2013.

[64] UTFPR - UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ. (2009). **Regulamento das Atividades Práticas Supervisionadas da UTFPR**. Disponível em <http://www.utfpr.edu.br/estrutura-universitaria/pro-reitorias/prograd/legislacao/utfpr-1/regulamentoaps.pdf/>. Acesso: novembro de 2012.

[65] VALADARES, J. (2011). A Teoria da Aprendizagem Significativa como Teoria Construtivista. **Aprendizagem Significativa em Revista**, Porto Alegre, v. 1, n. 1, p.36-57, abr 2011. Quadrimestral. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/?go=artigos&idEdicao=1>. Acesso em: 01 mar. 2012.

[66] VENÂNCIO, S.; KATO, L. A. (2009). A Modelagem Matemática como Ambiente Favorecedor da Aprendizagem Significativa. **VI Conferência sobre Modelagem na Educação Matemática**. Londrina - PR.

[67] VENÂNCIO, S. (2010). **Aprendizagem Significativa de Função do 1º Grau: Uma investigação por meio da Modelagem Matemática e dos Mapas Conceituais**. 2010. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá. Maringá.

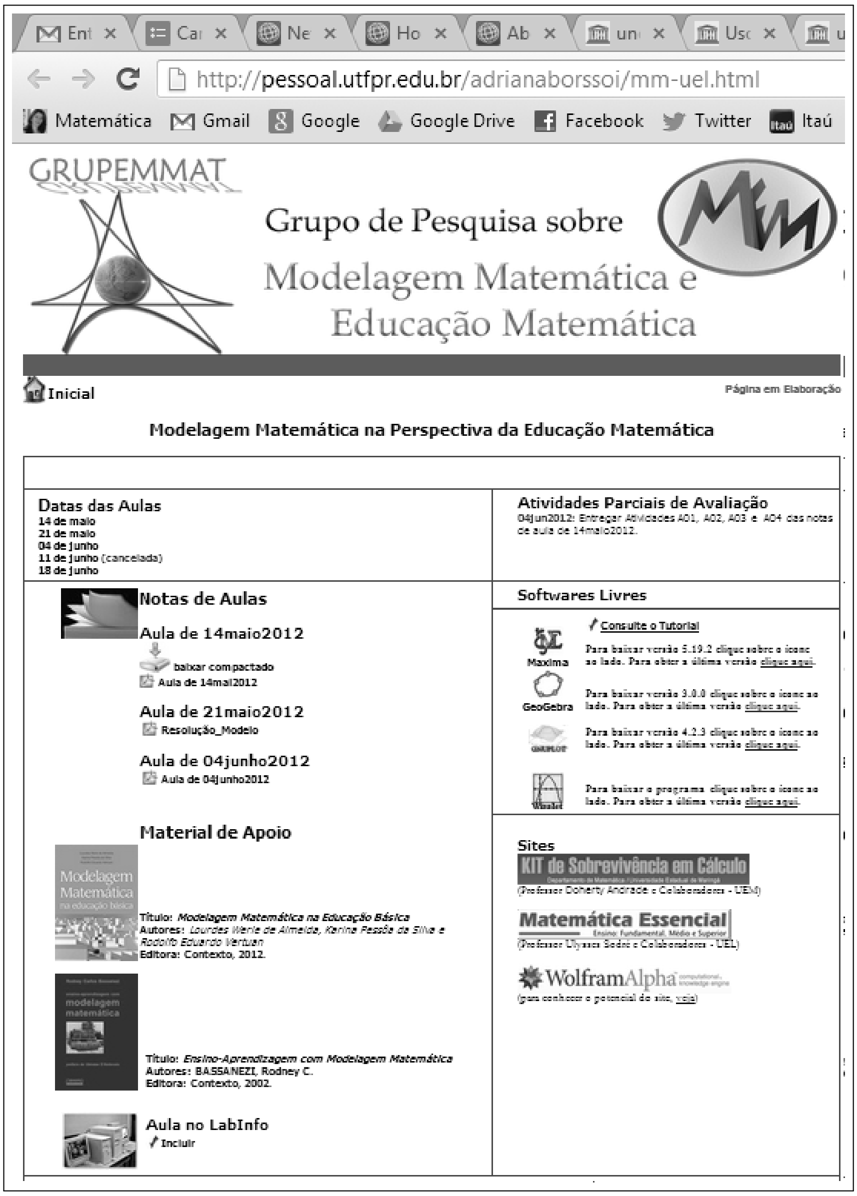
[68] VERTUAN, R. E.; BORSSOI, A. H. e ALMEIDA, L. M. W. (2013). O Papel da Mediação e da Intencionalidade em Atividades de Modelagem Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos. São Carlos-SP. Semestral. ISSN 19827199. Aceito para publicação em 15 de setembro de 2013.

APÊNDICES

A APÊNDICE: CONTEXTO 1

A.1 PUBLICAÇÕES ELETRÔNICAS

Figura A.1: Página de *internet* elaborada para disponibilizar informações da unidade de ensino na *Disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática*, disponível durante o desenvolvimento da unidade de ensino



Fonte: http://pessoal.utfpr.edu.br/adrianaborssoi/mm-uel.html

A.1.1 Levantamento Inicial do Contexto 1

O Formulário publicado, ao qual os alunos tiveram acesso, pode ser acessado em: https://docs.google.com/spreadsheet/viewform?usp=drive_web&formkey=dDg4QlhzdGhKWTdOMlprVk9EZmNZUUE6MQ#gid=0

Levantamento relacionado ao uso de Recursos Tecnológicos - Adriana Helena Borssoi

O objetivo deste levantamento é obter informações dos alunos da Disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da UEL, no que diz respeito ao uso de recursos tecnológicos. Desde já agradeço sua participação, que é muito importante.

Termo de Consentimento Esclarecido

Este levantamento faz parte do trabalho parcial de pesquisa de doutorado, em andamento junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL-Universidade Estadual de Londrina, que eu, Adriana Helena Borssoi, desenvolvo sob orientação da Prof. Drª Lourdes Maria Werle de Almeida. Comprometo-me a manter total anonimato em relação aos seus dados assim como lhe asseguro o direito de, a qualquer momento, retirar seu consentimento para uso das informações coletadas.

Concordo em colaborar com a Pesquisa, nos termos acima.
( ) sim ( ) não

Nome Completo:
Data de nascimento:

Você tem hábito de usar recursos tecnológicos para apoiar suas atividades de estudo? Em caso afirmativo, descreva como:
( ) sim ( ) não

Você conhece/usa softwares relacionados à Matemática? Se sim, quais?
( ) sim ( ) não

Você conhece/usa recursos da Internet relacionados à Matemática? Se sim, quais?
( ) sim ( ) não

Você conhece/usa recursos da Internet relacionados à Matemática? Em caso afirmativo, exemplifique.
( ) sim ( ) não

Durante seu curso de graduação, em que medida a tecnologia é considera? Comente.
( ) sim ( ) não

Durante seu curso de graduação, em que medida a tecnologia foi/está integrada às aulas ou às atividades extra classe?(Comente, mencionando exemplos).

Você tem acesso a internet de:
( ) Casa ( ) Faculdade ( ) Trabalho ( ) Outro:

Costuma checar seus e-mails com que frequência:
( ) diariamente, várias vezes ( ) diariamente ( ) semanalmente ( ) esporadicamente

Você se sente motivado(a) a usar recursos tecnológicos em suas aulas, se vir a atuar como professor(a)? (Mencione de que forma poderia fazê-lo.)

Espaço destinado a algum comentário oportuno que você queira fazer em relação ao tema.

A.1.2 Respostas ao Levantamento Inicial do Contexto 1

O que segue são respostas provenientes de questões do formulário da seção A.1.1 concedidas pelos cinco alunos que participaram.

Questão 1: Você tem hábito de usar recursos tecnológicos para apoiar suas atividades de estudo? Descreva como.

C1(D2): *Sim. Como sou um tipo de aluno do curso de Matemática que necessita estudar bastante, muitas vezes sozinho, as disciplinas chamadas de "matemática pura"utilizo a internet e programas de matemática para apoiar os meus estudos. Sites como o matemática essencial.. wolfram e programas como o winplot e geogebra me ajudaram muito nos 3 anos anteriores de curso!! Muitas vezes não tinha liberdade para tirar dúvidas com o professor responsável por uma disciplina e recorria a esses recursos. Posso dizer hoje, que essa iniciativa que tomei foi de extrema importância, pois consigo estudar "sozinho", prática que considero essencial quando for um professor de Matemática.*

C1(A2): *Sim. Uso a Internet para fazer pesquisas, softwares para análise de gráficos, programas para digitação de textos matemáticos, programas de edição de imagens.*

C1(F1): *Sim. Geralmente uso o power point.*

C1(C2): *Sim. Pesquiso assuntos que não conheço na internet. Uso softwares para plotar e visualizar gráficos.*

C1(A4): *Não.*

Questão 2: Você conhece/usa softwares relacionados à Matemática? Quais?

C1(D2): *Sim. Conheço alguns mais utilizo mais o Winplot e geogebra.*

C1(A2): *Sim. GeoGebra, Winplot, Gnuplot, Maple.*

C1(F1): *Não.*

C1(C2): *Sim. Geogebra e gnuplot.*

C1(A4): *Sim. Geogebra.*

Questão 3: Você conhece/usa recursos da Internet relacionados à Matemática? Exemplifique.

C1(D2): *Sim. Utilizo frequentemente o site matemática essencial (http://www.mat.uel.br/matessencial/) e o http://wolfram.com/.*

C1(A2): *Sim. Utilizo o site Wolfram Alpha para pesquisas relacionadas ao Cálculo e Equações Diferenciais, além de sites de outras universidades para pesquisar materiais de apoio.*

C1(F1): *Não.*

C1(C2): *Sim. Site do Wolfram e alguns sites de educação.*

C1(A4): *Sim. Sites direcionados a matemática e educação matemática.*

Questão 4: Durante seu curso de graduação, em que medida a tecnologia foi/está integrada às aulas ou às atividades extra classe? Comente mencionando exemplos.

C1(D2): *Como já mencionei anteriormente, a tecnologia me ajudou muito quando tive que estudar para poder compreender os conceitos envolvidos nas disciplinas da graduação!! Muitas vezes deixava para procurar minhas dúvidas na internet para não ter que falar com determinados professores! Já até utilizei fóruns em redes sociais como auxílio!*

C1(A2): *Durante as aulas, apenas na disciplina de TIC utilizamos, de fato, recursos tecnológicos. Nas demais, apenas utilizamos para apresentação de trabalhos. No entanto, utilizamos muitos programas na realização de projetos ou para pesquisas relacionadas aos conteúdos estudados nas disciplinas.*

C1(F1): *O que mais foi usado na minha vida acadêmica foi o power point.*

C1(C2): *Quando estudava calculo, usava pesquisava os resultados em sites, para conferir se meus cálculos estavam certos.*

C1(A4): *Tivemos no decorrer do curso duas matérias que se utilizavam de tecnologia, Programação e Tecnologia da matemática, nestas matérias as aulas eram sempre no laboratório. Poucos professores de outras matérias não relacionadas diretamente à tecnologia, nos levavam para o laboratório, que me recordo foram dois, a frequência de um foi até maior, o outro nos levou poucas vezes.*

Questão 5: Você se sente motivado(a) a usar recursos tecnológicos em suas aulas, se vir a atuar como professor(a)? Mencione de que forma poderia fazê-lo.

C1(D2): *De certa forma sim. Já no estágio supervisionado deste ano trabalharei com uso de tecnologias, especificamente, o uso de calculadoras gráficas. Além disso, tenho algumas experiências com essa temática, como em um minicurso em uma das semanas da matemática em que fui um dos autores. Nesse minicurso trabalhamos com alunos do curso de Matemática e professores da Educação Básica, com atividades investigativas. Foi uma experiência enriquecedora para mim e espero aproveitá-la na educação básica também. Espero utilizar recursos tecnológicos em sala de aula. Porém, sei que iniciativas como esta no ambiente escolar são complicadas de serem tomadas. Muitos obstáculos podem surgir, como por exemplo, os computadores das escolas não serem liberados para instalação de programas, ou então não possuírem acesso a internet. No estágio supervisionado do ano passado, eu e minha dupla, queríamos trabalhar com o uso de tecnologias, contudo não tivemos a liberdade de utilizarmos os computadores da escola em questão. O que me deixa receoso e preocupado, é se as escolas utilizam do mesmo critério, utilizando o laboratório de informática apenas como um lugar em que os alunos não frequentam. Este ano só conseguiremos trabalhar com tecnologia, porque conseguimos um jeito de levar a tecnologia até os alunos, sem que dependêssemos de algum recurso tecnológico da escola.*

C1(A2): *Sim. Acredito que o uso de softwares matemáticos, por exemplo, pode auxiliar muito na análise gráfica de funções, além do estudo das principais características de figuras geométricas. Os recursos tecnológicos podem auxiliar o professor no trabalho com diversos conteúdos, porque pode favorecer a aprendizagem dos alunos, e pode ser utilizado* *também como uma forma de atrair alguns alunos, mostrando que estudar Matemática não é apenas decorar fórmulas e fazer cálculos, mas também analisar o mundo à sua volta.*

C1(F1): *Quando dei aula não usei recurso tecnológico.*

C1(C2): *Sinto, principalmente para ajudar o aluno visualizar gráficos de funções.*

C1(A4): *Não.*

Questão 6: Espaço destinado a algum comentário oportuno que você queira fazer em relação ao tema.

C1(F1): *Penso que o recurso tecnológio usado em sala de aula tem que ser feito com muito cuidado, pois já tive aulas que o professor fazia power pointe e apenas ficava lendo em sala. Acredito que tais recursos são bons para os professores e alunos, principalmente em alguns conteúdos de matemática.*

A.2 TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Figura A.2: Termo de Autorização apresentado aos alunos da Disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática

Londrina, 14 de maio de 2012.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Tendo em vista o desenvolvimento de parte da pesquisa de doutorado sobre Modelagem Matemática e Aprendizagem Significativa, sob responsabilidade de Adriana Helena Borssoi, aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades desenvolvidas na Disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática do Curso de Matemática da UEL, durante o 1º semestre de 2012, bem como os registros de minhas respostas durante entrevistas, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não seja citado em hipótese alguma, garantindo o anonimato. Igualmente abdico dos direitos meus e de meus descendentes. Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Nome	RG	Assinatura

De acordo,

Prof. Dra. Sandra Malta Barbosa
Professora Responsável pela Disciplina

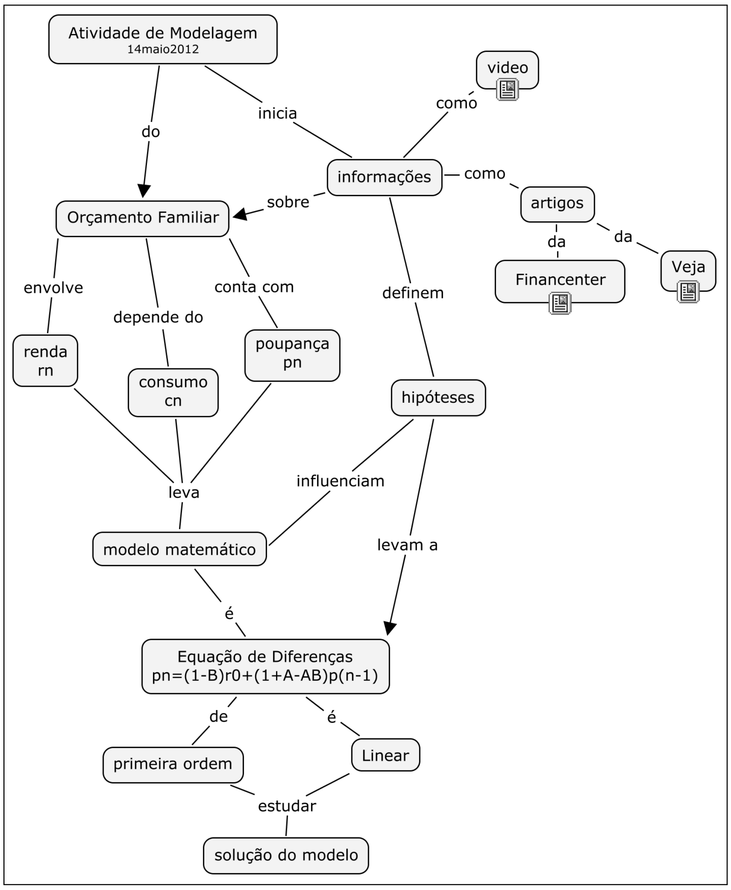
Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Professora Orientadora

A.3 Atividade sobre Orçamento Familiar

Esta atividade foi desenvolvida por todos os alunos presentes na aula. Embora estivessem agrupados, as ações eram definidas em conjunto, entre professora e alunos. Inicialmente os alunos assistiram um vídeo sobre orçamento familiar e na sequência leram dois artigos também tratando da temática. A partir dessa inteiração inicial, solicitados a definir um problema para estudar, um dos alunos sugeriu que se procurasse um modelo matemático para estimar o tempo necessário de economia para que ele conquistasse *um milhão de reais*.

A turma percebeu que a partir da temática apresentada existem várias possibilidades de estudo. Assim, a professora propôs a primeira atividade de modelagem e que se iniciou com a definição de hipóteses e variáveis para a situação. Por ser o primeiro contato dos alunos com a modelagem matemática, estas ações foram orientadas pela professora. Para a estruturação dessas ações, a professora fundamentou-se em Bassanezi (2002) e a configuração do que os alunos fizeram está expresso na Figura A.3.

Figura A.3: Mapa conceitual da atividade de modelagem do *orçamento familiar*.



Fonte: elaborado pela autora com CmapTools (http://www.cmaptools.com/)

Considerou-se uma família cuja renda mensal é proveniente de um salário fixo, mais o rendimento da poupança do mês anterior e também era preciso considerar o consumo familiar mensal. A partir disso as ações associadas ao desenvolvimento da atividade foram se configurando:

Definição de um problema: como relacionar renda, poupança e consumo de modo a obter um modelo matemático que possa permitir estimativas das finanças de uma família?

Definição de hipóteses: a) o consumo mensal desta família é proporcional à sua renda mensal; b) a diferença entre a renda e o consumo mensal é investida na poupança, mês a mês; c) a poupança permanece com taxa de juros estável, dado o histórico do último ano (conforme avaliação prévia desses números, obtidos em buscas na *internet*).

Definição de variáveis e parâmetros:
n: tempo, em meses; r_n: renda do mês n em reais; p_n: rendimento da poupança do mês n em reais; p_{n-1}: rendimento da poupança do mês $n-1$ em reais; c_n: consumo do mês n em reais; r_0: salário fixo, em reais; p_0: valor inicial na poupança, em reias; α: taxa de juro da poupança; β : constante de proporcionalidade.

Dedução do modelo matemático: dadas as considerações anteriores, as seguintes relações foram estabelecidas:
Para Poupança: $p_n = p_{n-1} + (r_n - c_n)$
Para Renda: $r_n = r_0 + \alpha.p_{n-1}$
Para Consumo: $c_n = \beta r_n$, $0 < \beta < 1$

A partir das relações entre essas expressões chegou-se à expressão:

$$PVI : \begin{cases} p_n = (1-\beta)r_0(1+\alpha-\alpha\beta)p_{n-1} \\ \qquad\qquad p_0 dado \end{cases} \tag{A.1}$$

em que α, β e r_0 são parâmetros e p_n e p_{n-1} são as variáveis.

Embora a formulação desse modelo tenha sido orientada pela professora, foi por meio da sua resolução que o estudo de equações de diferenças foi iniciado, sendo necessário para isso o estudo de uma equação de diferenças linear de primeira ordem, $y_n = ay_{n-1} + b$, cuja solução geral foi obtida com a participação dos alunos.

Considerando agora o modelo A.1 e os termos da equação de diferenças foi possível escrever: $a = (1-\beta)\alpha + 1$ $b = (1-\beta)r_0$, e as soluções obtidas para o problema foram:

$$p_n = p_0[(1-\beta)\alpha + 1]^n + (1-\beta)r_0 \frac{1 - [(1-\beta)\alpha + 1]^n}{1 - [(1-\beta)\alpha + 1]} \tag{A.2}$$

ou

$$p_n = p_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a} \tag{A.3}$$

$$r_{n+1} = r_0 + \alpha\left[p_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}\right] \tag{A.4}$$

$$c_{n+1} = \beta\left[r_0 + \alpha(p_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a})\right] \tag{A.5}$$

Visualização dos Resultados: simulações com os parâmetros apoiaram a visualização e discussão dos resultados. A Figura A.4 ilustra um cenário sugerido pelos alunos usando o valor dos parâmetros: $r_0 = 2500,00$, $p_0 = 5000,00$, $\alpha = 0,056$ e $\beta = 0,9$. A partir dessa simulação retornou-se à questão inicial do aluno de saber em quanto tempo poderia obter *um milhão*.

Figura A.4: Os resultados obtidos.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Dados**			n	pn	rn	cn
2	r0	2500,00		0	5000,00		
3	p0	5000,00		1	5252,80	2528,00	2275,20
4	α	0,0056		2	5505,74	2529,42	2276,47
5	β	0,9		3	5758,82	2530,83	2277,75
6	a	1,00056		4	6012,05	2532,25	2279,02
7	b	250		5	6265,42	2533,67	2280,30
8				6	6518,93	2535,09	2281,58
9				7	6772,58	2536,51	2282,86
10				8	7026,37	2537,93	2284,13
11				9	7280,30	2539,35	2285,41
12				10	7534,38	2540,77	2286,69
13				11	7788,60	2542,19	2287,97
14				12	8042,96	2543,62	2289,25
15				13	8297,47	2545,04	2290,54
16				...	...	...	...
17				2080	1000055,53	8095,78	7286,20
18				2081	1000865,56	8100,31	7290,28

Fonte: acervo da autora

Foi realizada então uma simulação usando uma planilha dinâmica que, manipulada a partir do valor dos parâmetros sugeridos, permitiu avaliar o comportamento dos modelos de p_n, r_n e c_n. A resposta para a questão surgiu por meio dessa simulação, indicando que com estes valores para o salário, a poupança e as taxas de juros desta simulação, isto aconteceria no ano de 2080, conforme indica a Figura A.4.

Esse momento permitiu resgatar algumas colocações que haviam sido feitas pelos alunos no processo de formulação dos modelos. Por exemplo, quanto à hipótese de que os juros da poupança seriam considerados estáveis, levando em conta o histórico do ano anterior que teve média de 0,56% ao mês, com desvio padrão pequeno. Neste episódio C1(E3), assim como outros colegas, se mostrou incomodada por não atribuir o valor, mas sim usar um parâmetro (α) para representar a taxa de juros no modelo. Na ocasião, quando perguntados sobre o que justificaria manter parâmetros no modelo, C1(D1) e C1(D2) mostraram a mesma compreensão, a de que isso permitiria substituir por outros valores ao final. C1(A4) complementou que assim, se permite a substituição de diferentes valores sem ter que refazer o modelo para dados específicos. Ou seja, parece que C1(A4) percebeu que a dinamicidade proporcionada pelas simulações realizadas com a planilha, permitem que se usem diferentes valores para os parâmetros.

Observando a simulação, os alunos perceberam que a planilha é um recurso dinâmico que permite rapidamente visualizar outros resultados. Assim, quiseram saber, retomando a questão colocada inicialmente por um colega: afinal, quanto tempo seria necessário para que as economias atingissem um milhão de reais? Com surpresa, perceberam que foi necessário exibir $n = 2080$, onde $p_n = 100055,53$, $r_n = 8095,78$ e $c_n = 7286,20$ reais, o que significa que, mantidos os valores dos parâmetros, seriam necessários mais de 173 anos para atingir um milhão.

Nesta oportunidade a professora chamou atenção para o fato de que a planilha permite chegar aos mesmos resultados, tanto pela equação recursiva, em que no passo n a equação depende do valor no passo $n - 1$, quanto pelo modelo final, em que a única variável independente é n. Os alunos perceberam que, se os cálculos fossem feitos sem um recurso computacional, a recursividade se torna um processo inviável na medida em que o valor de n cresce. Desse modo, a importância de se resolver a equação de diferenças, como a A.1, ficou justificada. Ao invés de exibir uma lista com 2080 linhas na planilha, bastava resolver a equação para $p_n = 1000000$, que permite concluir sem muito esforço que n é a solução.

Resgatar questões como essas durante a simulação e análise do modelo proporcionou a reconciliação integradora, que pôde ser evidenciada nas expressões dos alunos e em comentários sobre como a planilha poderia ajudar na organização das finanças e no planejamento pessoal. Aproveitando o ensejo, ao final da atividade foi sugerida aos alunos a elaboração de uma planilha pessoal como uma forma de os alunos revisitarem elementos do processo de modelagem e assim avançar na diferenciação progressiva, fortalecendo sua compreensão de todo o processo.

A.4 Descrição Abreviada das demais atividades de modelagem dos grupos no Contexto 1.

As atividades de modelagem descritas nessa seção complementam o conjunto de atividades desenvolvidas na UEPS, mencionadas na seção 5.1.

A.4.1 Grupo 1: Perspectiva futura de doações de sangue no Hemocentro Regional de Londrina.

Os alunos envolvidos nesse trabalho são identificados como: C1(A1), C1(B1), C1(C1), C1(D1), C1(E1)e C1(F1).

Informações sobre o processo de produção de hemocomponentes e dados sobre o histórico de doações de sangue nos últimos anos foram obtidos por um dos integrantes do grupo, que trabalha no Hemocentro Regional de Londrina. Interessados em compreender a dinâmica da disponibilidade do banco de sangue dessa entidade deu-se a problematização estudada pelo grupo, conforme segue.

Na Tabela A.1 tem-se o total de coletas externa e interna do Hemocentro Regional de Londrina, nos últimos cinco anos. No entanto, para este estudo serão considerados os valores referentes às coletas internas, dado que as coletas externas podem não apresentar a mesma regularidade e sofrer variações decorrentes da disponibilidade de unidades móveis para coleta, campanhas e outros fatores.

Tabela A.1: Total de coletas interna e externa durante os últimos cinco anos.

Ano	Coletas Internas	Coletas externas
2007	6338	3772
2008	6457	4738
2009	6614	4603
2010	6797	4667
2011	7028	4330

Fonte: Relatório final do grupo.

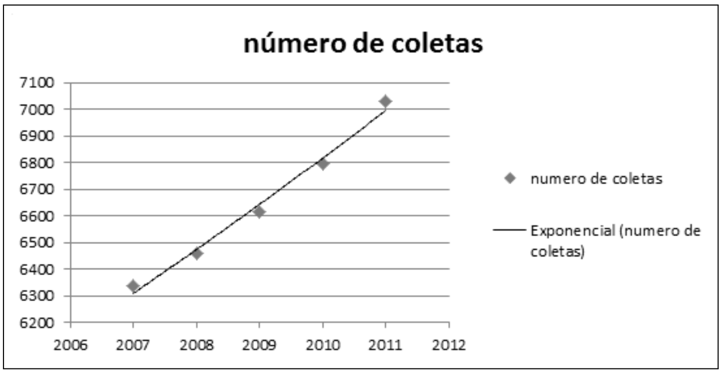
O grupo apresentou o seguinte desenvolvimento:

Processo de Modelagem

O nosso problema visa criar um modelo que permita estimar o número de coletas internas para os anos seguintes. Seja C_n a quantidade de coletas internas no ano n. Partindo dos dados da Tabela A.1, que foram pesquisados no banco de dados do Hospital Universitário de Londrina, iniciamos com C_0, a quantidade inicial que se refere ao ano de 2007, ou seja $C_0 = 6338$. Observe o gráfico da (Figura A.5):

Observe que colocando linhas de tendência linear e exponencial para esse conjunto de dados ambas se ajustam bem, também, pelo gráfico podemos perceber que o crescimento no número de coletas de um ano para outro não foi significativa, as taxas se mantiveram bem próximas. Relembrando que C_0 se refere ao número de coletas do ano de 2007, C_1 ao número de coletas do ano de 2008 e assim por diante, temos que a diferença $C_1 - C_0 = iC_0$, onde i é a taxa de crescimento no número de coletas internas de um ano para o outro.

Figura A.5: Dados de coleta de interna no Hemocentro Regional de Londrina (2007-2011)



Fonte: Relatório final do grupo.

Voltando a diferença acima podemos perceber que:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= C_0 + iC_0 = C_0(1+i) \\
C_2 &= C_1 + iC_1 = C_1(1+i) \\
C_3 &= C_2 + iC_2 = C_2(1+i) \\
&\vdots \\
C_{n+1} &= C_n + iC_n = C_n(1+i)
\end{aligned}
$$

Assim chegamos a uma sequência em que o termo seguinte sempre depende do anterior, ou seja, conseguimos chegar em uma equação de diferença de 1ª ordem. Porém precisamos calcular o valor de i para que possamos partir para a resolução da equação para que possamos de fato deduzir nosso modelo.

Como já foi dito acima as taxas de crescimento de um ano para outro se mantiveram muito próximas, decidimos trabalhar com as médias das taxas que foi de $2,5\%$ ou $0,025$. Dessa forma, com esse valor de i, nossa equação toma a seguinte forma:

$$C_{n+1} = C_n(1,025)$$

Onde C_0 é dado, logo temos o seguinte problema de valor inicial:

$$PVI : \begin{cases} C_{n+1} = C_n(1,025) \\ C_0 = 6338 \end{cases} \tag{A.6}$$

Solução da Equação

Reescrevendo a equação de A.6, temos:

$$
\begin{aligned}
C_{n+1} &= C_n(1,025) \\
C_n &= C_{n-1}(1,025)
\end{aligned}
$$

com $\alpha = 1,025 \neq 1$, assim a solução é do tipo:

$$C_n = \alpha^n C_0 + \beta \frac{(1 - \alpha^n)}{1 - \alpha} \tag{A.7}$$

Se compararmos a equação A.6 com a equação A.7 temos que $\beta = 0$ e assim, a solução terá a seguinte forma:

$$C_n = \alpha^n C_0 \tag{A.8}$$

Substituindo os valores de α e C_0 em A.8, temos a solução que representa o nosso modelo:

$$C_n = (1,025)^n \times 6338 \tag{A.9}$$

Discussão e Validação do Modelo

Colocando os dados na Tabela A.2 podemos perceber que o número de coletas internas continua crescendo, porém o crescimento não é tão significativo. Assim se quisermos saber a quantidade de coletas no ano de 2037, ou seja para $n = 30$, chegaremos a $C_{37} = 13294$ bolsas de sangue.

Tabela A.2: Estimativas para coletas interna de acordo com o modelo.

Ano	Coletas Internas
2007	6338
2008	6457
2009	6614
2010	6797
2011	7028
2012	7170
2013	7350
2014	7533
2015	7915

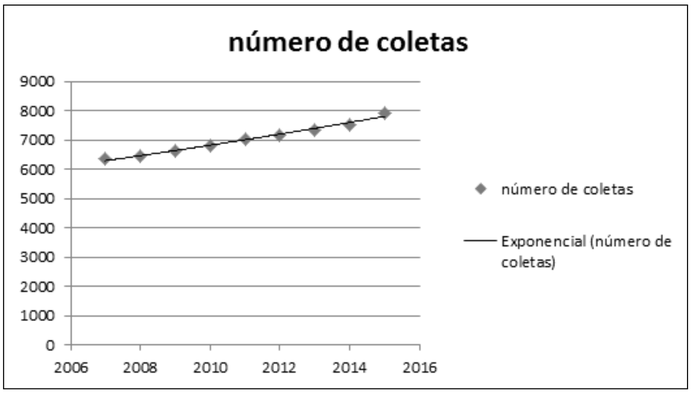
Fonte: Relatório final do grupo.

Montando novamente o gráfico com os dados acima (A.6), podemos ter uma ideia do comportamento do modelo ao qual chegamos.

Analisando o gráfico acima podemos ver, após inserir a linha de tendência, que, ainda, para esse conjunto de dados ela se ajusta bem e será crescente.

Apesar de estarmos trabalhando com equações de diferença, podemos usar a ideia de limite para ver o que o modelo nos diz:

Figura A.6: Projeção de coleta de interna no Hemocentro Regional de Londrina segundo o modelo obtido.



Fonte: Relatório final do grupo.

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} 1,025n \times 6338 = \infty$$

Como o limite de C_n é ∞ temos que o número de coletas interna sempre irá crescer, segundo o nosso modelo, mesmo que esse crescimento não seja expressivo.

A.4.2 Grupo 2: Lucro acumulado por uma indústria de calças *Jeans*

Os alunos envolvidos nesse trabalho são identificados como: C1(A2), C1(B2), C1(C2) e C1(D2).

O problema enunciado pelo grupo: Uma fábrica de calças *jeans* produz uma determinada quantidade de peças, gerando um certo lucro a cada mês. Queremos encontrar qual o lucro acumulado por esta fábrica em determinado mês.

Definição das variáveis: C_0: capital inicial; C_n: lucro acumulado até o n-ésimo mês; n: tempo em meses; x: número de funcionários da fábrica; α: salário de cada funcionário; y: número de peças produzidas em um mês; b: custo total para produzir uma peça; c: preço final de venda de uma calça; z: quantidade de máquinas da fábrica; g: custo da manutenção de uma máquina; h: gasto com energia elétrica (quanto cada máquina consome de energia elétrica, quanto tempo elas ficam ligadas em um mês e qual o custo por essa determinada quantidade de energia elétrica consumida); i: gasto com água, telefone e outros.

Dedução do Modelo: Valendo-se de informações obtidas em uma revista especializada, elaboraram um primeiro modelo matemático para o custo de produção de uma calça jeans, sendo $b = tm + v$, onde: t: preço de um metro de tecido; m: quantidade de tecido utilizada para produzir uma calça; v: demais aviamentos (botões, zíper, forro e linha). Em seguida, escreveram:

Para o primeiro mês:

$C_1 = C_0 - ax + [c - (tm + v)]y - gz - h - i$

ou

$C_1 = C_0 - ax + (c - b)y - gz - h - i$

Para o n-ésimo mês:

$C_n = C_{n-1} - ax + (c-b)y - gz - h - i.$

Sabendo que trata-se de uma equação de diferenças de primeira ordem, chegaram a seguinte solução:

$C_n = C_0 + n(-ax + cy - by - gz - h - i).$

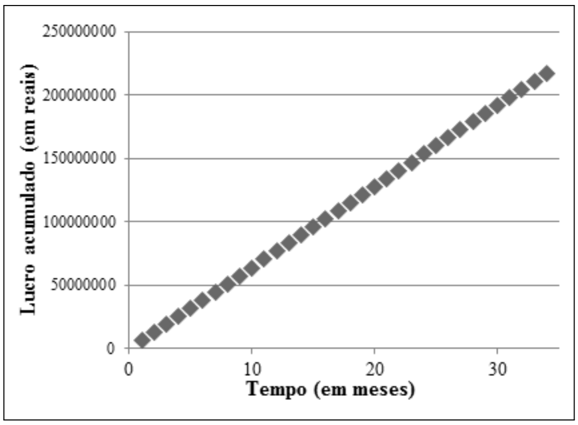
Validação do Modelo: o comportamento do modelo conforme o passar do tempo foi avaliado por meio do gráfico da Figura A.7 e também da seguinte forma:

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} [C_0 + n(-ax + cy - by - gz - h - i)]$$

Nas palavras do grupo:

> Como assumimos que a fábrica gerará lucro em todo mês, pode-se concluir que o lucro acumulado tenderá ao infinito, já que $-ax + cy - by - gz - h - 1$ será sempre maior que zero. Com isso quando n tender a infinito, o lucro acumulado, ou C_n, também tenderá a infinito.

Figura A.7: Gráfico do modelo obtido



Fonte: Relatório final do grupo.

O uso do modelo foi feito a partir de dados da literatura impressa e eletrônica. A Tabela A.3 traz um cenário apresentado pelo grupo.

Assim, a análise do modelo foi conduzida por D2 durante a apresentação, que finalizou dizendo:

> Com relação ao modelo obtido, é interessante que ele seja ainda refinado. Então, daqui pra frente a ideia é procurar um empresário desse ramo a fim de obter dados reais, pra ver se converge pra isso que a gente pesquisou.

No trabalho final, o grupo aponta algumas considerações que mostram o entendimento dos seus integrantes a respeito da atividade de modelagem:

> Durante nossa jornada escolar, ouvimos de muitas pessoas, que criar um modelo matemático, por mais simples que ele seja, não é uma tarefa fácil. De fato, pudemos vivenciar isso

Tabela A.3: Evolução do Lucro acumulado no decorrer do tempo em meses, segundo modelo

Número de meses	Lucro acumulado (C_n)	Número de meses	Lucro acumulado(C_n)
1	6411979,5	18	115075630,6
2	12803958,9	19	121467610,1
3	19195938,4	20	127859589,6
...	...	...	...
15	95899692,2	32	204563343,4
16	102291671,7	33	210955322,8
17	108683651,2	34	217347302,3

Fonte: Relatório final do grupo.

na prática. Em determinados momentos, não sabíamos como dar continuidade nas situações envolvidas, como priorizar situações, como desenvolver algum tipo de estratégia, etc. Contudo, consideramos essa criação como uma atividade enriquecedora, pois a criação foi realizada por nós. Por mais simples que ela seja, é uma produção nossa e isso deve ser levado em consideração. Transpondo para o ambiente escolar, nosso ambiente de atuação, é exatamente isso que devemos fazer em sala de aula, fazer com que os alunos pensem, discutam, criem suas conjecturas, etc. E isso pode ser obtido, não necessariamente pela criação de um modelo matemático.

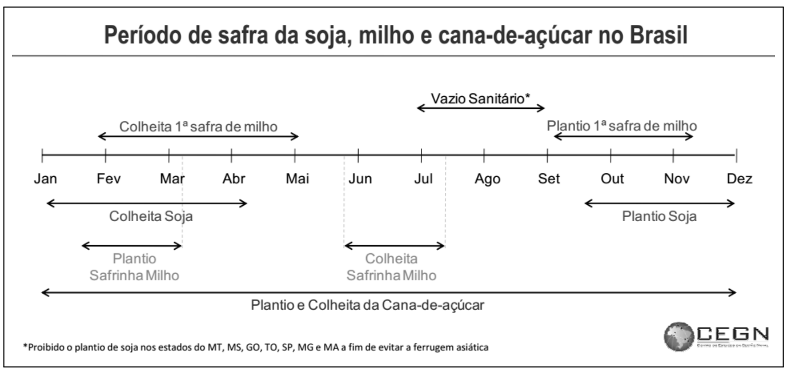
A.4.3 Grupo 3: Plantio de Milho

Os alunos envolvidos nesse trabalho são identificados como: C1(A3), C1(B3), C1(C3), C1(D3) e C1(E3)

O grupo optou por estudar uma problemática relacionada ao plantio de milho. Com base em dados da literatura o intuito do grupo foi considerar que a produção de grãos fosse destinada ao tratamento das sementes para comercialização e plantio de novas safras.

Algumas informações consideradas pelo grupo: uma espiga de milho possui em média 510 grãos; cada pé de milho possui uma ou duas espigas; a taxa de germinação de grãos de boa procedência varia de 80% a 90%; as regiões produtoras de milho costumam cultivar o milho em duas safras, conforme Figura A.8.

Figura A.8: Distribuição da safra de milho ao longo do ano.



Fonte: Relatório final do grupo.

Problema estudado: Qual a quantidade de sementes que poderão ser destinadas ao tratamento e comercialização n plantios após o cultivo do plantio inicial de um hectare?
Hipóteses baseadas nas informações:

- A área inicial plantada será de um hectare.
- Nem todas as sementes que serão plantadas germinam.
- Um pé de milho produz 1,5 espigas.
- A quantidade de sementes disponíveis para um novo plantio é proporcional a quantidade disponível do plantio anterior.

Variáveis e parâmetros: n: Número de plantios produzidos a partir da produção de um hectare inicial; Q_n: Quantidade de sementes que podem ser plantadas no plantio n; $Q_0 = 55.000$ θ: Aproveitamento das sementes para tratamento ($0 < \theta < 1$); β: Quantidade de grãos por pé, sendo que β varia de 510 a 1020. α: Proporção de sementes que germina ($0 < \alpha < 1$);
Dedução do modelo:
Para $n = 0$ temos $Q_0 = 55.000$
Para $n = 1$ temos $Q_1 = Q_0\alpha\beta(1 - \theta)$
Para $n = 2$ temos $Q_2 = Q_1\alpha\beta(1 - \theta)$
Para n =3 temos $Q_3 = Q_2\alpha\beta(1 - \theta)^3$
Generalizando para n, teremos a equação de diferenças de primeira ordem:

$$Q_n = Q_{n-1}\alpha\beta(1 - \theta) \tag{A.10}$$

Chamando $(1 - \theta) = \delta$, podemos reescrever as equações a fim de obter sua solução: Para $n = 0$ temos $Q_0 = 55.000$
Para $n = 1$ temos $Q_1 = Q_0\alpha\beta\delta$
Para $n = 2$ temos $Q_2 = Q_0\alpha^2\beta^2\delta^2$
Para n =3 temos $Q_3 = Q_0\alpha^3\beta^3\delta^3$
Generalizando para n, chegamos a solução da equação A.10

$$Q_n = Q_0\alpha^n\beta^n\delta^n \tag{A.11}$$

Considerações finais do grupo:

Ao encontrar este assunto percebemos o quanto ele é cheio de detalhes, pois para um plantio dependemos de vários fatores, e nestes fatores foi que baseamos nosso breve estudo, pois o estudo deste assunto é muito demorado e grande uma das conseqüências disto é a quantidade de tantos artigos e sites que falam sobre este assunto. Ao estudarmos a função percebemos ao fazer o gráfico, que não foi mostrado neste trabalho, uma função exponencial com variáveis discretas e números naturais, pois, não temos número de plantio negativo.

B APÊNDICE: CONTEXTO 2

B.1 PUBLICAÇÕES ELETRÔNICAS

Figura B.1: Página do *blog* com informações do minicurso *Atividades de Modelagem Matemática com o uso de Recursos Tecnológicos*.

Fonte: http://www.afimdeconhecer.blogspot.com.br/

B.1.1 Levantamento Inicial para o Contexto 2

O Formulário publicado, ao qual os participantes tiveram acesso, pode ser acessado em: https://docs.google.com/spreadsheet/viewform?usp=drive_web&formkey=dElZbVB2c293VVdoaWJpY3FqRTFkcUE6MQ#gid=0

Levantamento inicial: Minicurso 5 do V EPMEM: Atividades de Modelagem Matemática com o uso de Recursos Tecnológicos

O objetivo deste levantamento é conhecer um pouco sobre os participantes do Minicurso 5 do V EPMEM.
Obrigada por participar.

Identificação:
e-mail:
Atualmente você é:
( ) Aluno de Graduação: Licenciatura em Matemática
( ) Aluno de Graduação de outro curso
( ) Professor do Ensino Básico
( ) Professor do Ensino Fundamental
( ) Professor da Graduação
( ) Outro:
Você tem hábito de usar recursos tecnológicos para apoiar suas atividades? Comente:
Você conhece/usa *softwares* relacionados à Matemática? Em caso afirmativo, quais?
Costuma checar seus e-mails com que frequência:
( ) diariamente, várias vezes
( ) diariamente
( ) semanalmente
( ) esporadicamente
( ) Outro:
Você se sente motivado(a) a usar recursos tecnológicos em suas aulas, enquanto professor(a) ou mesmo enquanto aluno(a)? (Mencione de que forma o faz ou poderia fazê-lo.)
Sobre a Modelagem Matemática na Educação Matemática. (Na escala de 1 a 5 pontue cada item de acordo com seu grau de familiaridade.)

	1	2	3	4	5
Conheço a Modelagrem Matemática	( )	( )	( )	( )	( )
Já fiz trabalhos de modelagem	( )	( )	( )	( )	( )
Uso modelagem em minhas aulas	( )	( )	( )	( )	( )
Leio textos sobre modelagem	( )	( )	( )	( )	( )

Espaço destinado a algum comentário oportuno que você queira fazer.

B.1.2 Levantamento Complementar para o Contexto 2

O Formulário publicado, ao qual os participantes tiveram acesso, pode ser acessado em: https://docs.google.com/spreadsheet/viewform?usp=drive_web&formkey=dDh3MVNEVmxUOW1kdlFMcDlrS2M4M1E6MQ#gid=0

Levantamento Complementar - Minicurso 5 do V EPMEM: Atividades de Modelagem Matemática com o uso de Recursos Tecnológicos

Este levantamento tem o intuito de avaliar o desenvolvimento do Minicurso 5: Atividades de Modelagem Matemática com o uso de Recursos Tecnológicos, realizado durante o V EPMEM, bem como de complementar algumas informações dos participantes.
Desde já agradeço sua participação.

Nome completo:
Formação Acadêmica (nome do curso e, caso ainda não tenha concluído, informe o período ou ano que está cursando):
Instituição em que cursa/cursou a graduação:
Pós-graduação:
( ) Especialização ( ) Mestrado ( ) Doutorado ( ) Outro:
Informe a área da pós-graduação (ao menos a de maior titulação):
Instituição em que cursa/cursou a pós-graduação:

Quanto ao desenvolvimento do minicurso (selecione conforme seu grau de concordância):

	concordo plenamente	concordo	indeciso/sem opinião	discordo.	discordo plenamente
O laboratório de Informática utilizado era adequado para as necessidade.	( )	( )	( )	( )	( )
O tempo destinado para o desenvolvimento dos temas foi adequado.	( )	( )	( )	( )	( )
Os temas abordados são relevantes para a prática acadêmica/docente.	( )	( )	( )	( )	( )
Foi possível aprender algo novo sobre recursos tecnológicos.	( )	( )	( )	( )	( )
Foi possível melhorar meu entendimento sobre modelagem matemática.	( )	( )	( )	( )	( )
Minhas expectativas com o minicurso foram alcançadas.	( )	( )	( )	( )	( )

Espaço para comentários que julgar pertinentes quanto aos itens anteriores.

B.2 TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Figura B.2: Termo de Autorização apresentado aos participantes do minicurso

Toledo, 09 de novembro de 2012.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

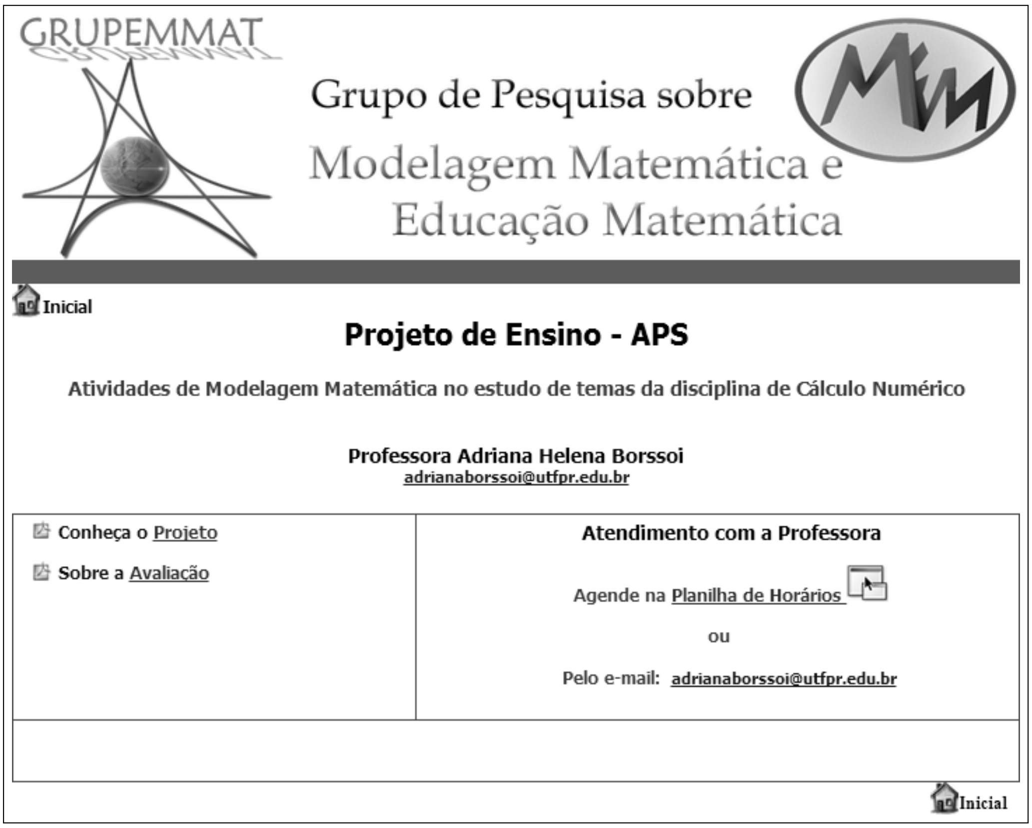
Tendo em vista o desenvolvimento de parte da pesquisa de doutorado, sob responsabilidade de Adriana Helena Borssoi, aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades desenvolvidas no Minicurso 5: Atividades de Modelagem Matemática com o uso de Recursos Tecnológicos, durante o V EPMEM, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não seja citado em hipótese alguma, garantindo o anonimato. Igualmente abdico dos direitos meus e de meus descendentes. Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Nome	CPF	Assinatura

C APÊNDICE: CONTEXTO 3

C.1 PUBLICAÇÕES ELETRÔNICAS

Figura C.1: Página de *internet* elaborada para disponibilizar informações do projeto *Atividades de Modelagem Matemática no estudo de temas da disciplina de Cálculo Numérico*, disponível durante o projeto.



Fonte: http://pessoal.utfpr.edu.br/adrianaborssoi/aps_cn.html

C.1.1 Formulário de Levantamento Inicial do Projeto de Ensino

O Formulário publicado, ao qual os alunos tiveram acesso, pode ser acessado em: https://docs.google.com/spreadsheet/viewform?usp=drive_web&formkey=dHlucVFxcnU5V3dpUEx1NVZDQnhlUnc6MQ#gid=0

O referido Projeto de Ensino foi apresentado à DIRGRAD, em 22 de novembro de 2012, e recebeu parecer favorável para ser desenvolvido como Atividade Prática Supervisionada - APS, nas disciplinas de Cálculo Numérico.

Desse modo, se faz necessário o preenchimento deste levantamento, proposto com o objetivo de conhecer o perfil, sob determindos aspectos, dos alunos matriculados na disciplina de Cálculo Numérico, no segundo semestre letivo de 2012.

Agradeço a participação de todos.
Professora Adriana Borssoi

Nome Completo:
Data de Nascimento:
E-mail preferencial, para contato:

Identifique o seu curso:
( ) Engenharia Ambiental ( ) Engenharia de Materiais

Identifique a disciplina/ turma em que está matriculado:
( ) MA64a/ EA41 ( ) MA64a/ EA42 ( ) MA94a/ EM41

Está cursando esta disciplina pela:
( ) Primeira vez ( ) Segunda vez ( ) Terceira vez ( ) Outro:

Atualmente, além de estudar, você também (se desenvolver outras atividades regulares informe no campo "Outro"):
( ) Faz estágio
( ) Trabalha
( ) Participa de projetos na universidade, como: iniciação científica, projeto de ensino, etc.
( ) Outro:

Espaço para especificar as atividades selecionadas acima:

Você tem acesso à Internet de (uma ou mais opções):
( ) casa ( ) faculdade ( ) trabalho ( ) Outro:

Costuma checar seus e-mails com que frequência?
( ) diariamente, várias vezes ( ) diariamente ( ) semanalmente ( ) esporadicamente

Você participa de redes sociais? (Em caso afirmativo, e se não se importar, informe quais:)
( ) Não ( ) Sim

Você tem hábito de usar recursos tecnológicos para apoiar suas atividades de estudo? Em caso afirmativo, que recursos normalmente utiliza, e, com que finalidade o faz?
( ) Não ( ) Sim

Durante seu curso de graduação, em que medida a tecnologia foi/está integrada às aulas em geral? (Comente, mencionando exemplos)

Você conhece/usa *softwares* relacionados à Matemática ou a outras áreas do conhecimento, que a seu ver dão suporte às atividades acadêmicas? (Mencione quais, em caso afirmativo.)
( ) Não ( ) Sim

Para você o termo "Modelagem Matemática"é familiar? Qual é o seu entendimento sobre o mesmo?

Na sua opinião, qual é a relevância das APS - Atividades Práticas Supervisionadas, que compõem a carga horária das disciplinas curriculares?

Espaço destinado à comentários ou questionamentos oportunos, que você queira fazer.

C.1.2 Formulário para Avaliação do Projeto de Ensino

O Formulário publicado, ao qual os alunos tiveram acesso, pode ser acessado em: https://docs.google.com/forms/d/1dtrZ35317LnLBcRiPbD_VGTlCqab5y-AC3j4ghI4rkU/viewform

Este formulário tem o intuito de avaliar o projeto de ensino proposto como APS. Solicito que responda francamente às questões abaixo e não hesite em fazer os comentários que julgar pertinentes. Lembro que esse projeto faz parte de meu trabalho de pesquisa de doutorado e que, no caso de menção a alguma informação fornecida, seu anonimato será preservado.
Obrigada pela participação.
Professora Adriana Borsssoi

Nome Completo:

Em uma escala de 0 a 10 escolha a pontuação que expressa a sua avaliação de cada questão.
Quanto ao Projeto

A proposta de APS na forma de Atividades de Modelagem Matemática no estudo de temas da disciplina de Cálculo Numérico foi adequada?
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

O cronograma proposto foi adequado?
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

Em que medida as orientações com a professora contribuíram com o desenvolvimento da atividade de modelagem?
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

Quanto a Atividade de Modelagem Matemática

Qual foi o grau de dificuldade do grupo na definição do tema a ser estudado?
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

Qual foi o grau de dificuldade do grupo na identificação do(s) método(s) numérico(s) adequado(s) ao problema?
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

A atividade de modelagem desenvolvida pelo grupo foi relevante para a aprendizagem de conceitos de Cálculo Numérico?
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

O trabalho desenvolvido permitiu aprendizagem de conceitos de outras áreas?
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

Suas expectativas iniciais com o desenvolvimento do trabalho foram satisfeitas?
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

Sobre a atuação do Grupo no Projeto

As próximas questões dizem respeito ao envolvimento individual e do grupo durante a atividade.

Classifique sua motivação inicial para o desenvolvimento da APS.
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

O grupo trabalhou colaborativamente?
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

Atribua uma nota para sua participação no desenvolvimento da atividade de modelagem. (Integrante 1 - Considere o seu envolvimento com o grupo, se você fez sugestões relevantes, se participou de todas as fases - da pesquisa à resolução do problema.)
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

Comparativamente à sua nota, avalie a participação do Integrante 2 no desenvolvimento da atividade de modelagem. (Considere a ordem alfabética se o seu grupo é composto por 3 pessoas.)
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

Comparativamente à sua nota, avalie a participação do Integrante 3 no desenvolvimento da atividade de modelagem. (Considere a ordem alfabética se o seu grupo é composto por 3 pessoas.)
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

Classifique sua motivação ao final do desenvolvimento da APS.
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5 ( )6 ( )7 ( )8 ( )9 ( )10

Expresse sua opinião.

Com o desenvolvimento desse trabalho, você considera ter modificado seu entendimento inicial quanto a Modelagem Matemática? Comente.

O que você pensa sobre a integração de atividades de modelagem como APS?

O grupo fez uso de recursos tecnológicos durante o desenvolvimento do trabalho? Indique os usos que foram feitos.

Quanto ao uso de recursos tecnológicos, você encontrou limitações que possam ter influenciado no desenvolvimento da atividade? Comente.

O trabalho final entregue não revela toda a dinâmica de sua elaboração. Então, esse espaço é uma oportunidade para que você comente ou descreva fatos que considera relevantes e que foram omitidos no trabalho final.

Houve a aprendizagem de algo em especial que você gostaria de mencionar?

Espaço para outros comentários que julgar pertinentes. (Pode ser apontamentos de aspectos positivos e/ou negativos observados no decorrer do Projeto.)

C.2 TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Figura C.2: Termo de Autorização apresentado aos alunos da disciplina de Cálculo Numérico

Londrina, dezembro de 2012.

TERMO DE AUTORIZAÇAO

Tendo em vista o desenvolvimento de parte da pesquisa de doutorado, sob responsabilidade de Adriana Helena Borssoi, aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina e professora da UTFPR Câmpus Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades desenvolvidas durante o projeto de ensino: Atividades de Modelagem Matemática no estudo de temas da disciplina de Cálculo Numérico, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não seja citado em hipótese alguma, garantindo o anonimato. Igualmente abdico dos direitos meus e de meus descendentes. Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

MA64a: Turma EA41		
Nome	**CPF**	**Assinatura**
MA64a: Turma EM41		
Nome	**CPF**	**Assinatura**

C.3 PLANO DE ENSINO DA DISCIPLINA DE CÁLCULO NUMÉRICO

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Londrina

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PLANO DE ENSINO

CURSO	Engenharia Ambiental	**MATRIZ**	1

FUNDAMENTAÇÃO LEGAL	Resolução no 92/2007 – COEP de 19 de outubro de 2007.

DISCIPLINA/UNIDADE CURRICULAR	CÓDIGO	PERÍODO	CARGA HORÁRIA horas		
			AT	AP	Total
Cálculo Numérico	MA64A	4	30	30	60

AT: Atividades Teóricas, AP: Atividades Práticas.

PRÉ-REQUISITO	Computação 1 e Matemática 2
EQUIVALÊNCIA	

OBJETIVOS

Fornecer condições para que os alunos possam conhecer, calcular, utilizar e aplicar métodos numéricos na solução de problemas de engenharia.

Construir e implementar algoritmos computacionais que possibilitam a resolução e aplicações dos métodos numéricos para a resolução de problemas de engenharia.

Analisar em que condições se podem ter a garantia de que os resultados computados dos métodos numéricos estão próximos dos exatos.

EMENTA

Noções básicas sobre erros. Zeros reais de funções reais. Resolução de sistemas de equações lineares. Interpolação. Ajuste de curvas. Integração numérica. Solução numérica de equações diferenciais ordinárias.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

ITEM	EMENTA	CONTEÚDO
1	Noções Básicas sobre Erros.	Representação de Números. Conversão de Números nos Sistemas Decimal e Binário. Aritmética de Ponto Flutuante. Erros de Arredondamento. Erros de Truncamento. Propagação de Erros.
2	Zeros Reais de Funções Reais.	Introdução. Método da Bissecção. Método das Cordas. Método do Ponto Fixo. Método de Newton-Raphson. Interpretação Geométrica dos Métodos. Comparação entre os Métodos. Implementação dos Métodos.
3	Resolução de Sistemas de Equações Lineares.	Métodos Diretos: Método de Eliminação de Gauss, e Fatoração LU. Método Iterativo: Gauss-Jacobi Implementação dos Métodos.
4	Interpolação.	Introdução. Polinômio Interpolador de Lagrange. Polinômio Interpolador de Newton. Fórmula de Newton-Gregory. Comparação entre os Métodos. Implementação dos Métodos.
5	Ajuste de curvas.	Ajuste Linear Simples. Coeficiente de Determinação. Ajuste Linear Múltiplo:
6	Integração numérica.	Regra dos Trapézios. Regra dos Trapézios Repetida. Regra de 1/3 de Simpson. Regra de 1/3 de Simpson Repetida. Implementação dos Métodos.
7	Solução numérica de equações diferenciais	Introdução. Método de Euler. Métodos de Runge-Kutta:

Fonte: <http://pessoal.utfpr.edu.br/previero/Numerico/plano_de_ensino_engenharia_ambiental_ea41.pdf>

	ordinárias.	método de segunda ordem e quarta ordem. Implementação dos Métodos.

PROFESSOR	TURMA
Wellington Donizeti Previero	EA41

ANO/SEMESTRE	CARGA HORÁRIA (aulas)					
	AT	AP	APS	AD	APCC	Total
2012/02	64		04			68
AT: Atividades Teóricas, AP: Atividades Práticas, APS: Atividades Práticas Supervisionadas, AD: Atividades a Distância, APCC: Atividades Práticas como Componente Curricular.						

DIAS DAS AULAS PRESENCIAIS						
Dia da semana	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
Número de aulas no semestre (ou ano)	32	32				

PROGRAMAÇÃO E CONTEÚDOS DAS AULAS (PREVISÃO)		
Dia/Mês ou Semana ou Período	Conteúdo das Aulas	Número de Aulas
26/11	**Aula Teórica:** Apresentação da disciplina: ementa, bibliografia e critérios de avaliação. Conceitos básicos sobre Erros.	2
27/12	**Aula Prática:** Introdução ao software Maple: principais comandos.	
03/12	**Aula Teórica:** Conceitos básicos sobre Erros.	2
04/12	**Aula Prática:** Introdução ao software Maple: principais comandos.	2
10/12	**Aula Teórica:** Zeros Reais de Funções Reais: Introdução. Método da Bissecção. Método das Cordas. Interpretação geométrica dos métodos.	2
11/12	**Aula Prática:** Implementação do Método da Bissecção e do Método das Cordas.	2
17/12	**Aula Teórica:** Zeros Reais de Funções Reais: Método de Newton-Raphson. Interpretação geométrica dos métodos. Comparação entre os métodos.	2
18/12	**Aula Prática:** Implementação do Método de Newton	2
04/02	**Aula Teórica:** Resolução de Sistemas de Equações Lineares: Método de Eliminação de Gauss.	2
05/02	**Aula Prática:** Implementação do Método de Eliminação de Gauss	2
18/02	**Aula Teórica:** Resolução de Sistemas de Equações Lineares: Fatoração LU	2
19/02	**Aula Prática:** Implementação do Método de Eliminação de Gauss com estratégia de pivotamento.	2
25/02	**Aula Teórica:** Resolução de Sistemas de Equações Lineares: Gauss-Jacobi	2
26/02	**Aula Prática:** Implementação do Método de Gauss-Jacobi	2
04/03	**Aula Teórica:** Interpolação: introdução. Polinômio Interpolador de Lagrange	2
05/03	**Aula Prática: Entrega da APS1.** Implementação do Polinômio Interpolador de Lagrange	2
11/03	**1ª Avaliação**	2
12/03	**Aula Prática:** Interpolação: Polinômio Interpolador de Newton. Implementação do Polinômio Interpolador de Newton.	2
18/03	**Aula Teórica:** Interpolação: Fórmula de Newton-Gregory.	
19/03	**Aula Prática:** Implementação do Polinônio de Newton-Gregory. Comparação entre os Métodos.	2
25/03	**Aula Teórica:** Ajuste de curvas. Ajuste Linear Simples. Ajuste Linear Múltiplo	
26/03	**Aula Prática**: Ajuste de curvas no Maple	2
01/04	**Aula Teórica:** Integração numérica: Regra dos Trapézios. Regra dos Trapézios Repetida.	2
02/04	**Aula Prática**: Implementação da Regra dos Trapézios Repetida.	2
08/04	**Aula Teórica:** Regra de 1/3 de Simpson. Regra de 1/3 de Simpson Repetida.	2

Fonte: <http://pessoal.utfpr.edu.br/previero/Numerico/plano_de_ensino_engenharia_ambiental_ea41.pdf>

PROGRAMAÇÃO E CONTEÚDOS DAS AULAS (PREVISÃO)		
Dia/Mês ou Semana ou Período	Conteúdo das Aulas	Número de Aulas
09/04	**Aula Prática:** Implementação da Regra dos Trapézios Repetida. Implementação da Regra de 1/3 de Simpson Repetida	2
15/04	**Aula Teórica:** Solução numérica de equações diferenciais ordinárias: Método de Euler. Métodos de Runge-Kutta de segunda ordem	2
16/04	**Aula Prática:** Implementação do Método de Euler	2
22/04	**2ª Avaliação**	2
23/04	**Aula Prática: Entrega da APS 2.**	2
29/04	**Prova Substitutiva**	2
30/04	**Vista de Prova**	2
	O cronograma das aulas poderá sofrer alterações durante o semestre letivo.	

PROCEDIMENTOS DE ENSINO

AULAS TEÓRICAS

As aulas teóricas serão expositivas e permeadas com atividades de resolução de exercícios. Como meios de ensino serão utilizados: lousa e equipamento multimídia.

As aulas teóricas serão, em sua maioria, expositivas, durante as quais os alunos serão incentivados a participar a fim de esclarecer as dúvidas e contribuir com exemplos e sugestões.

AULAS PRÁTICAS

As aulas práticas serão desenvolvidas no laboratório de informática para implementação dos métodos numéricos através de software apropriado.

As aulas práticas serão desenvolvidas no laboratório de informática para que seja possível utilizar recursos computacionais para compreensão dos métodos, por meio de softwares adequados. Além disso, os alunos implementarão os métodos estudados usando o software Maple.

ATIVIDADES PRÁTICAS SUPERVISIONADAS

Para as Atividades Práticas Supervisionadas será proposta a implementação dos métodos estudados usando o software Maple. Estas atividades devem ser entregues ao professor em data de fixada. O acompanhamento das atividades será feito pelo professor nos horários de atendimento.

ATIVIDADES A DISTÂNCIA

Não há.

ATIVIDADES PRÁTICAS COMO COMPONENTE CURRICULAR

Não há.

PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO

A Avaliação na disciplina se dará ao longo do semestre por duas atividades:

Nota 1 (N1) : Avaliação 1 e APS 1
Nota 2 (N2) : Avaliação 2 e APS 2

Em cada nota (N1 e N2) a avaliação feita em sala de aula terá peso 7 e a APS peso 3.
A Nota final na disciplina será composta pela média aritmética das notas N1 e N2.

A avaliação na disciplina se dará ao longo do semestre por meio de duas provas escritas, composta de questões onde o aluno deverá demonstrar sua compreensão dos conceitos e técnicas estudados em sala de aula e das atividades práticas supervisionadas. Em cada nota (N1 e N2) a avaliação feita em sala de aula terá peso 7 e a APS peso 3. A nota final (NF1) será determinada pela média aritmética das 2 notas (N1 e N2), isto é:

NF1=(N1+N2)/2

O aluno com nota final superior ou igual a 6,0 e com 75% de presença estará aprovado. Será aplicada uma avaliação de recuperação (prova substitutiva) com todo o conteúdo da disciplina no final do semestre para os alunos com nota inferior a 6,0 e com pelo menos 75% de freqüência. A nota de recuperação substituirá a menor das notas N1 e N2. Após a recuperação, a nota final será dada pela média aritmética das notas N1 e N2, sendo a menor dessas notas já substituída pela prova de recuperação. O aluno com nota final superior ou igual a 6,0 estará aprovado.

Fonte: http://pessoal.utfpr.edu.br/previero/Numerico/plano_de_ensino_engenharia_ambiental_ea41.pdf

REFERÊNCIAS

Referencias Básicas:

ARENALES, Selma H. V e DAREZZO, Arthur. Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software. São Paulo : Thomson Learning, 2008, 364 p. + CD-ROM, ISBN 9788522106028.

RUGGIERO, M.A.R., LOPES, V.L.R. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2 Ed. São Paulo: MAKRON Books, 1996, 406 p., ISBN 8534602042.

BURDEN Richard L., FAIRES, J. Douglas. Análise numérica. São Paulo : Cengage Learning, 2008.,721 p., ISBN 8522106010.

Referências Complementares:

SPERANDIO, Décio; MENDES, João T; SILVA, Luiz H. M. Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Prentice Hall, 2003, 354 p. ISBN 85-87918-74-5.

BURIAN, Reinaldo, LIMA, Antonio Carlos; JUNIOR, Annibal Hetem. Cálculo Numérico. Rio de Janeiro: LTC, 2007, 153 p.,ISBN 9788521615620.

CLÁUDIO, Dalcídio M. e MARTINS, Jussara Maria. Cálculo numérico computacional : teoria e prática. 3. ed. São Paulo : Atlas, 2000, 464 p. ISBN 85-224-2485-3

ORIENTAÇÕES GERAIS

Os critérios para a aprovação na disciplina são determinados pelo Regulamento Didático-Pedagógico dos cursos de graduação de UTFPR.
É aconselhado aos alunos, procurar o professor nos horários de permanência a fim de esclarecer dúvidas relacionadas ao conteúdo e buscar orientação para o estudo. Além disso, é muito importante procurar o professor, nos horários de atendimento, para fazer a vista de prova após a correção a fim de tomar ciência dos acertos e erros.

Os resultados das avaliações serão sempre disponibilizados na página: http://pessoal.utfpr.edu.br/previero/ Neste endereço o aluno pode encontrar alguns arquivos para consulta e apoio ao estudo.

Assinatura do Professor	Assinatura do Coordenador do Curso

Fonte: <http://pessoal.utfpr.edu.br/previero/Numerico/plano_de_ensino_engenharia_ambiental_ea41.pdf>

C.4 PROJETO DE ENSINO

Título: Atividades de Modelagem Matemática no estudo de temas da disciplina de Cálculo Numérico.

Descrição

Tendo em vista parte da pesquisa de doutorado, que eu, Adriana Helena Borssoi, desenvolvo no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, sob orientação da Professora Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, este projeto visa desenvolver um trabalho em parceria com o professor da disciplina de Cálculo Numérico, Wellington Donizeti Previero, ao longo do segundo semestre de 2012. Durante o trabalho pretendemos coletar dados para sustentar parte da pesquisa de doutorado.

Justificativa

A pesquisa em andamento no doutorado considera substancialmente: a Modelagem Matemática enquanto área de pesquisa da Educação Matemática, a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e o uso de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Assim, essa investigação considera a demanda de pesquisas em modelagem matemática, no que diz respeito à teorização sobre o processo de aprendizagem de estudantes envolvidos em atividades de modelagem, com especial atenção a aspectos cognitivos dos mesmos.

A modelagem matemática como uma alternativa pedagógica é reconhecida como facilitadora da aprendizagem significativa dos estudantes, dentre outras razões, por proporcionar um ambiente com potencial para envolver os alunos em atividades que levam a aprendizagem intencional, ativa, construtiva, cooperativa e autêntica.

No sentido do mencionado, entendemos que a pesquisa deva se voltar às práticas dos alunos especialmente durante as Atividades Práticas Supervisionadas (APS) planejadas para a disciplina de Cálculo Numérico. Tais atividades são previstas nos projetos dos cursos da UTFPR e regulamentadas segundo a Resolução nº 78/09 - COEPP, de 21 de agosto de 2009. Segundo a resolução, em seu Art. 2o, as APS são definidas como: atividades acadêmicas desenvolvidas sob a orientação, supervisão e avaliação de docentes e realizadas pelos discentes em horários diferentes daqueles destinados às atividades presenciais.

Devido a natureza das APS, entendemos que este é um espaço pertinente em que as atividades de modelagem podem ser propostas, complementando os estudos das aulas presenciais, pois, o Art. 3o esclarece que: podem ser consideradas Atividades Práticas Supervisionadas (APS): estudos dirigidos, trabalhos individuais, trabalhos em grupo, desenvolvimento de projetos, atividades em laboratório, atividades de campo, oficinas, pesquisas, estudos de casos, seminários, desenvolvimento de trabalhos acadêmicos, práticas de ensino e atividades específicas dos cursos de licenciatura, dentre outras.

Inúmeras pesquisas trazem o entendimento de que ambientes de ensino e aprendizagem devem ser pensados de modo a considerar o potencial das tecnologias de informação e comunicação que estão disponíveis atualmente à grande parte da sociedade. Assim, durante as atividades de modelagem vamos nos valer desses recursos tecnológicos como uma oportunidade de promover experiências de aprendizagem em que os alunos possam aprender fazendo, de modo a aprimorar continuamente seus conhecimentos e construir novos conhecimentos. No decorrer dos trabalhos, será possível observar como a tecnologia pode ser usada para que os alunos se sintam convidados a: problematizar, experimentar, planejar, comunicar com os outros, construir modelos, visualizar resultados, de forma a promover uma aprendizagem que seja relevante para além do ambiente escolar.

Sendo assim, as ações pensadas com a pesquisa também se alinham às recomendações sobre o conjunto de habilidades que se espera que tenham os indivíduos do século 21, habilidades estas de pensamento crítico e funcional relacionadas com informação, mídia e tecnologia.

Objetivo

Pesquisar o processo de ensino e aprendizagem dos alunos de Cálculo Numérico matriculados no segundo semestre de 2012, nas disciplinas MA64a do curso de Engenharia Ambiental e MA94a do curso de Engenharia de Materiais, durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática que comporão as atividades práticas supervisionadas (APS) previstas no plano de ensino das referidas disciplinas.

Procedimentos Metodológicos

Como Atividade Prática Supervisionada será proposto aos alunos o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, que serão orientadas e acompanhadas pela professora pesquisadora, com a anuência do professor da disciplina. Os seguintes pontos deverão ser considerados:

- As atividades poderão ser desenvolvidas em grupos de 2 ou 3 integrantes;
- Os temas das atividades de modelagem serão escolhidos por cada grupo, de acordo com seu interesse e, deverão preferencialmente ser relacionadas às áreas de estudo do curso;
- Necessariamente as atividades de modelagem devem contemplar métodos numéricos estudados no decorrer do semestre, previstos na ementa da disciplina;
- As orientações acontecerão ao longo do semestre em encontros presenciais nas dependências da UTPFR Câmpus Londrina e à distância, neste caso por meio da Web. Os horários de orientação serão definidos em comum acordo com cada grupo.
- A avaliação das atividades se dará ao longo do semestre, de acordo com o desenvolvimento das atividades e compreenderá 30% da nota da disciplina;
- Ao final do semestre os grupos deverão entregar uma versão impressa e encaminhar a versão eletrônica ao professor.

A coleta de dados será realizada de acordo com as normas de ética em pesquisa. Para o registros dos dados serão utilizados diferentes meios, como: gravação de audio e/ou vídeo dos encontros de orientação com os grupos e, arquivamento de materiais produzido pelos alunos, sendo eles: manuscritos, impressos ou arquivos eletrônicos.

Descrição dos Elementos

Responsável pelo projeto: Prof. Adriana Helena Borssoi.

Carga Horária: 12 horas

Participantes: Professor Wellington Donizeti Previero, responsável pelas disciplinas MA64a e MA94a e alunos matriculados nas referidas disciplinas, no segundo semestre letivo de 2012.

Recursos Físicos: Sala dos professores do Grupo de Matemática, laboratório de Informática da UTFPR Câmpus Londrina ou outro espaço do Câmpus devidamente e previamente autorizado.

Avaliação de Resultados

A avaliação será realizada ao longo do período de realização do projeto, sendo que ao final do mesmo um relatório será elaborado e apresentado à DIRGRAD - Diretoria de Graduação e Educação Profissional da UTFPR Câmpus Londrina.

Londrina, 22 de novembro de 2012.

Adriana Helena Borssoi
Professora responsável pelo projeto.

De acordo,

Wellington Donizeti Previero
Professor responsável pelas disciplinas

C.5 Descrição abreviada das Atividades de Modelagem Matemática dos Grupos

À seguir, as atividades de modelagem desenvolvidas pelos grupos no decorrer do Contexto 3 serão descritas de forma breve, de modo a permitir identificar a existência dos seguintes elementos: situação inicial; definição do problema; fonte dos dados; modelo obtido; abordagem usada na resolução; interpretação e validação dos resultados; considerações finais do grupo. As informações referentes a cada trabalho serão apenas do relatório final entregue pelos grupos e não serão complementadas com registros dos encontros de orientação ou outra forma de contato.

C.5.1 Grupo 1: Emissão de Poluentes por veículos leves em Londrina

Grupo composto pelas alunas C3(A1) e C3(B1), ambas do curso de Engenharia Ambiental.

Situação Inicial Caracterizaram fontes móveis de emissão de poluentes (veículos automotores) e como estas influenciam na qualidade do ar. Apresentaram dados sobre a frota brasileira e medidas tomadas para a redução dos problemas (legislação, programas, etc.). Trataram também de dados regionais, de Londrina com os quais a modelagem foi desenvolvida.

Justificaram a relevância do trabalho citando que: "Por mais complexo e difícil que possa ser o estudo de emissão de poluentes por veículos automotores, ele deve ser feito, para uma compreensão total dos problemas que esses poluentes podem causar. Portanto, torna-se necessário o conhecimento dos principais poluentes emitidos pelos automóveis para que o estudo de consequências de emissão ao longo do tempo seja feita de forma efetiva".

A análise da frota se dá pela emissão de quatro poluentes (CO, NOx, NMHC, RCHO), oriunda da utilização os dois tipos mais comuns de combustível, a gasolina e o etanol, em automóveis leves. As emissões destes quatro poluentes são de forma geral tóxico e altamente prejudicial à saúde e com exceção do CO, são precursores na formação do ozônio troposférico. Alegaram que simulações com modelos matemáticos em regiões com concentração de poluentes atmosféricos podem mostrar a perspectiva futura e ajudar a tomar medidas para minimizar os problemas.

Definição do Problema

Primeiramente o interesse era obter um modelo matemático que permitisse conhecer o tamanho da frota londrinense no intervalo de 2004 à 2012 (período em que não houve mudanças no perfil dos incentivos governamentais com relação ao consumo de automóveis e em relação ao combustível). Com os resultados do primeiro modelo visavam outro modelo matemático, para representar a evolução da emissão dos poluentes para o período de 2004 à 2016.

Fonte dos Dados

Os dados foram obtidos em buscas pela Internet de sites como: do INEA, em que obtiveram informações sobre os principais compostos poluentes: CO (monóxido de Carbono), NMHC (Hidrocarbonetos não-metano), RCHO (Aldeídos), NOx (Óxido de Nitrogênio) e dados do incremento médio de emissões dos referidos poluentes por acúmulo de rodagem para os combustíveis Gasolina e Etanol; site do DETRAN-PR, para os dados da frota de automóveis leves em Londrina nos anos de 2004 a 2012; e site da CETESP, para dados da média geral da quilometragem anual.

Modelos Obtidos

A partir de dados tabelados trabalharam com a hipótese de que o comportamento do gráfico que descreve a emissão de poluentes por ano, liberado pelos automóveis leves do município de Londrina, fosse descrito por um modelo polinomial.

Implementaram um algoritmo para calcular a emissão total do poluentes para uma frota anual, para os anos de 2004 à 2012, a partir dos dados tabelados. O resultado obtido foi uma matriz de dimensão 9×4 para cada tipo de combustível, conforme Figura C.3.

Com os dados dos cálculos anteriores implementaram uma interpolação, usando o método de Newton-Gregory, que gerou um polinômio que representa o que acontece com a emissão de cada poluente no decorrer dos anos (Figura C.4). A partir de cada polinômio um gráficos foi gerado para ilustrar interpolação.

Figura C.3: Modelo elaborado e resultados gerados pela implementação do modelo

```
> emissaototal := proc(N, A, n)
local i, CO, NOx, NMHC, RCHO;

global TG, TE;
TG:=Matrix(n,4);
TE:=Matrix(n,4);

for i from 1 to n do
  CO := 0.263*12000*N[i]*0.6*10^(-6);
 TG[i,1] := CO;
end do;

for i from 1 to n do
  NOx := 0.03*12000*N[i]*0.6*10^(-6);
 TG[i,2] := NOx;
end do;

for i from 1 to n do
  NMHC := 0.023*12000*N[i]*0.6*10^(-6);
 TG[i,3] := NMHC;
end do;

for i from 1 to n do
  RCHO := 0.0007*12000*N[i]*0.6*10^(-6);
 TG[i,4] := RCHO;
end do;

for i from 1 to n do
  CO := 0.224*18300*N[i]*0.08*10^(-6);
 TE[i,1] := CO;
end do;

for i from 1 to n do
  NOx := 0.02*18300*N[i]*0.08*10^(-6);
 TE[i,2] := NOx;
end do;

for i from 1 to n do
 NMHC := 0.024*18300*N[i]*0.08*10^(-6);
 TE[i,3] := NMHC;
end do;

for i from 1 to n do
 RCHO := 0.0028*18300*N[i]*0.08*10^(-6);
 TE[i,4] := RCHO;
end do;

printf ("Emissão utilizando Gasolina nos anos de 2004 a 2012: (CO, NOx, NMHC e RHCO)");

print (TG);

printf ("Emissão utilizando Etanol nos anos de 2004 a 2012: (CO, NOx, NMHC e RHCO)");
print (TE);

end:

> A:=Vector([2004,2005,2006,2007,2008,2009,2010,2011,2012]):
>N:=Vector([126120,133797,138767,146289,154509,163904,175116,185852,199942]):
> emissaototal (N,A,9):
```

Emissão utilizando Gasolina nos anos de 2004 a 2012:
(CO, NOx, NMHC e RHCO)

CO	NOx	NMHC	RCHO
238.8208320	27.24192000	20.88547200	0.6356448000
253.3579992	28.90015200	22.15678320	0.6743368800
262.7691912	29.97367200	22.97981520	0.6993856800
277.0128504	31.59842400	24.22545840	0.7372965600
292.5782424	33.37394400	25.58669040	0.7787253600
310.3686144	35.40326400	27.14250240	0.8260761600
331.5996576	37.82505600	28.99920960	0.8825846400
351.9293472	40.14403200	30.77709120	0.9366940800
378.6101712	43.18747200	33.11039520	1.007707680

Emissão utilizando Etanol nos anos de 2004 a 2012:
(CO, NOx, NMHC e RHCO)

CO	NOx	NMHC	RCHO
41.35928832	3.692793600	4.431352320	0.5169911040
43.87685299	3.917576160	4.701091392	0.5484606624
45.50669491	4.063097760	4.875717312	0.5688336864
47.97342950	4.283341920	5.140010304	0.5996678688
50.66906342	4.524023520	5.428828224	0.6333632928
53.75002214	4.799109120	5.758930944	0.6718752768
57.42684058	5.127396480	6.152875776	0.7178355072
60.94756147	5.441746560	6.530095872	0.7618445184
65.56817971	5.854301760	7.025162112	0.8196022464

Fonte: Relatório entregue pelo grupo.

Abordagem usada na Resolução

Inicialmente implementaram o código da Figura C.3 e calcularam a emissão total do poluente para uma frota anual, no período de 2004 à 2012, utilizando dados tabelados.

As variáveis e parâmetros para essa etapa foram assim definidos:

Na primeira etapa do modelo foi utilizada a seguinte equação:

$Ep = Fep \times km \times N \times 10^{-6}$, onde,

Ep: emissão do poluente considerado para a frota (ton/ano) pode ser C02, NOx, NMHC ou RCHO.

Fep: fator de emissão da frota para o poluente de interesse (g/km) retirado da tabela e colocado diretamente no modelo matemático.

km: média geral da quilometragem rodada anualmente (km), retirado da tabela e colocado diretamente no modelo matemático.

N: número de veículos da frota.

10^{-6}: mudança de g para ton.

A: ano

n: dimensão da matriz.

i: auxiliar para 'caminhar' sobre as linhas e colunas da matriz.

TG: matriz que irá armazenar as emissões totais dos poluentes para os automóveis leves que se utilizam de gasolina.

TE: matriz que irá armazenar as emissões totais dos poluentes para os automóveis leves que se utilizam de etanol.

Com os dados dos cálculos anteriores, construíram uma interpolação, pelo método de Newton-Gregory, e geraram um gráfico do polinômio para a emissão de cada poluente no decorrer dos anos. Nessa etapa as variáveis e parâmentros usados na implementação foram:

xt: utilizado para o usuário colocar os anos.

yt: utilizado para o usuário armazenar as toneladas de poluentes finais emitidos.

n: dimensão da matriz.

$int\_inicial$: o valor inicial, no caso o ano inicial.

int_final: o valor final, no caso o ano final.

O valor inicial e o valor final serão o intervalo em que o gráfico será gerado.

i e j: auxiliares para 'caminhar' sobre as linhas e colunas da matriz.

B: matriz auxiliar ao programa de interpolação.

h: auxilia para o calculo do polinômio.

p: polinômio gerado pelo modelo matemático Newton Gregory, para auxiliar na construção do gráfico das toneladas de poluentes emitidos pelos anos.

Interpretação e Validação dos Resultados

Consideraram que o modelo se mostrou eficaz devido aos resultados obtidos. De acordo com os dados do DETRAN, do INEA e da CETESB, conforme os anos passam, a quantidade de automóveis leves na cidade de Londrina aumenta e junto com ela a emissão dos poluentes: CO, NOx, NMHC e RCHO.

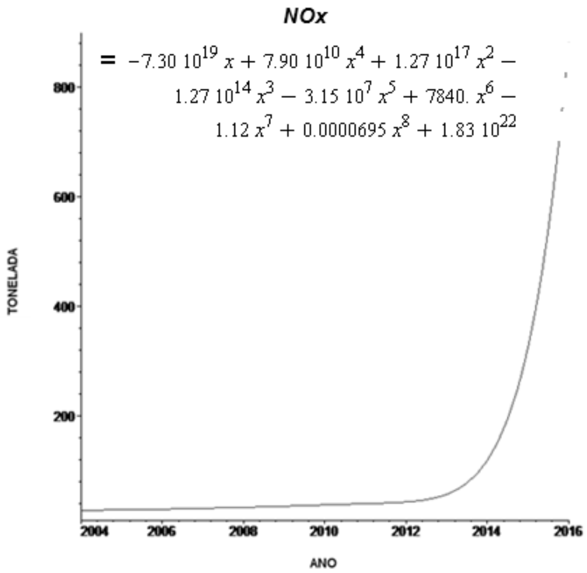
Os gráficos indicam que a função cresce "exponencialmente"como foi observado em torno do ano de 2016 quando espera-se uma grande quantidade desses poluentes sendo liberados na atmosfera.

Ao utilizar a frota exata no intervalo estudado (2004-2012), e conhecendo que desse total a porcentagem de automóveis leves que utilizam gasolina é de 60% e de etanol 8%, utilizou-se destes conhecimentos para a criação de um polinômio por interpolação, com o auxilio de um sistema matemático operacional, o MAPLE, que nos estimasse um gráfico e valores próximos do que seria e

Figura C.4: Implementação do método de Newton-Gregory para a emissão dos poluentes no período de 2004 à 2016 e o gráfico gerado para o poluente NOx

```
> gráfico := proc(xt, yt, n, int_inicial, int_final)
local i, j, B, h, produto:

global p;
B := Matrix(n,n);
h := xt[2]-xt[1];

for i from 1 to n do
 B[i,1] := yt[i];
end do;

for j from 2 to n do
 for i from 1 to (n+1-j) do
  B[i,j] := (B[i+1,j-1] - B[i,j-1]);
 end do;
end do;
p := 0;
produto := 1;
for j from 1 to n do
  p := p + (produto*B[1,j])/((j-1)!*(h^(j-1)));

  produto := produto * (x-xt[j]);
end do;

plot(p, x=int_inicial..int_final);

end:
```

```
> yt:= TG[..,2]:
gráfico (xt, yt, 9, 2004, 2016);
```



Fonte: Relatório entregue pelo grupo.

possibilitou observar o que irá acontecer no decorrer dos próximos anos. Vemos que o crescimento da emissão é evidente.

Considerações Finais do Grupo

Com o que foi estudado no projeto, percebe-se a importância de minimizar a emissão dos compostos poluentes que são liberados pelos automóveis leves, trocando o meio de locomoção por outro mais viável e sustentável quando este não for necessário. Também merece destaque, a importância na criação de projetos que invistam neste setor, possibilitando uma melhor qualidade de vida e a diminuição dos impactos ambientais. Londrina precisa ter a iniciativa da melhoria da qualidade do ar e do uso racional de combustíveis.

C.5.2 Grupo 3: Temperatura da cidade de Londrina nos últimos anos

Grupo composto pela aluna C3(A3) e pelos alunos C3(B3) e C3(C3), do curso de Engenharia Ambiental.

Situação Inicial

Preocupações com questões climáticas indicam a relevância do trabalho, considerando o uso indevido dos recursos naturais como causa de desconfortos climáticos para os seres humanos, percebidos com o aumento da temperatura em determinadas épocas do ano, chegando em alguns países a matar pessoas pelo calor. Além da temperatura o problema da umidade do ar, que em dias muitos quentes ficam abaixo do esperado, causam problemas respiratórios entre outros.

Definição do Problema

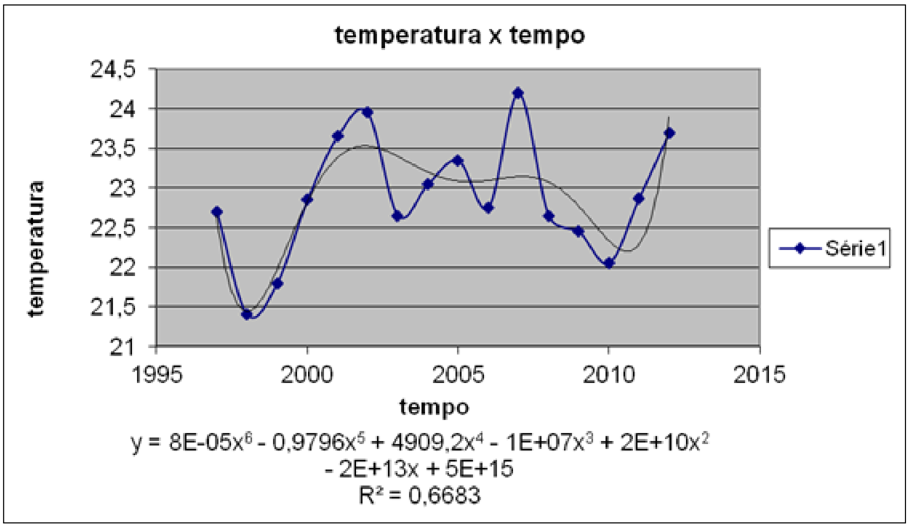
Estudar a temperatura da cidade de Londrina através dos 15 anos de coleta de dados, desde 1997 a 2012, para fazer a verificação se ocorreu o acréscimo ou decréscimo da temperatura media anual e através de modelos matemáticos tentar propor para os próximos anos qual seria o padrão da temperatura.

Fonte dos Dados

Os dados foram obtidos em um levantamento junto ao SIMEPAR, mas não foram apresentados explicitamente pelo grupo.

Modelo Obtido A partir dos dados obtiveram um gráfico com a tendência da temperatura no período, depois obtiveram uma equação polinomial a partir de um ajuste realizado com o *software* Excel, como indica a Figura C.5.

Figura C.5: Gráfico de tendência da temperatura em função do tempo e primeiro modelo obtido



Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Outras suposições levaram a avaliar novos modelos: a) retirando os três primeiros pontos do gráfico obtiveram uma reta com o coeficiente angular negativo cuja equação apresentada juntamente com o gráfico foi $y = -0,0382x + 99,693$. b) retirando os três últimos anos do gráfico o ajuste obtido indicou à equação com o coeficiente angular positivo $y = 0,069x - 115,24$.

Abordagem usada na Resolução

Não fizeram menção a qualquer método numérico para a obtenção dos modelos, apenas ilustraram os resultados que correspondiam àqueles encaminhados em anexo, em uma planilha eletrônica.

Interpretação e Validação dos Resultados

Para a primeira representação, Figura C.5, alegaram que se pode ver de maneira clara os aumentos e decréscimos das temperaturas ao longo do ano e consideraram que pela observação do gráfico pode-se verificar também que as médias anuais variam cerca de 2,8ºC com o ano mais frio sendo o de 1998 chegando a temperatura média anual de 21,4ºC e pode ser atribuído ao fenômeno conhecido como *La Nina* no Oceano Pacífico e o ano mais quente que tivemos em 15 anos foi em 2007 chegando a máxima anual de 24,2ºC, porém, depois desse aumento a temperatura volta a baixar e não segue um padrão linear e sim polinomial.

Considerações Finais do Grupo

A cidade de Londrina por ser de clima subtropical úmido, ocorre muitas variações e não conseguimos fazer a estimativa futura pelo método polinomial, pois este método trabalha apenas com os dados em um intervalo conhecido de tempo, porém, foi o que mais se aproximou quando colocamos a linha de tendência, e podemos visualizar também que pode ocorrer a manipulação de dados se esse método for utilizado não sendo assim muito confiável.

C.5.3 Grupo 4: Modelagem da Qualidade da Água em uma Bacia Hipotética

Grupo composto pela aluna C3(A4) e pelos alunos C3(B4) e C3(C4), do curso de Engenharia Ambiental.

Situação Inicial Descreveram e discutiram aspectos relacionados com alterações da qualidade da água tendo em vista a influência de alterações físico-químicas. Inicialmente, caracterizam com detalhes a qualidade da água, mencionando muitas informações, inclusive de legislação sobre recursos hídricos.

Definição do Problema

Este trabalho refere-se ao estudo de previsão da qualidade da água em função das concentrações de Oxigênio Dissolvido (OD) e Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO) em uma bacia hidrográfica fictícia.

Segundo o grupo, o estudo tinha o objetivo de fazer uma análise, a partir de modelagens matemáticas, das alterações da qualidade da água em lançamentos de efluentes, pois, com base nessas informações é possível prever impactos ambientais de áreas afetadas e se um reestabelecimento deste local se faz necessário.

Fonte dos Dados Valeram-se de dados de outras bacias (a partir dos estudos de campo e laboratório), encontrados na literatura, considerando o eixo longitudinal de um reservatório. Mencionaram fontes como a CETESB - Companhia Ambiental do Estado de São Paulo, livros e artigos científicos, alguns puderam ser consultados na biblioteca eletrônica SciELO.

Apresentaram uma tabela com dados que caracterizavam o reservatório e outra com dados da bacia hidrográfica hipotética onde constavam valores como altitude média, temperatura média, largura do canal, declividade entre outras variáveis e parâmetros a serem utilizados pelo modelo.

Modelo Obtido

Fazendo referência à literatura, lançaram mão de alguns modelos matemáticos característicos dessa área de estudo, como: *equação da mistura* utilizada para DBO e OD e um modelo matemático clássico para modelagem de DBO e OD denominado *Streeter-Phelps*, cuja calibração depende, essencialmente, da escolha de coeficientes que são, muitas vezes, estimados por fórmulas empíricas.

Não descreveram de forma explícita como realizaram a modelagem que resultou nos gráficos apresentados como decorrência. A Figura C.6 é um recorte de uma planilha eletrônica que foi encaminhada com a versão eletrônica do relatório final, onde alegaram ter desenvolvido a simulação a partir da modelagem.

O rio principal a que se refere a modelagem foi dividido em três trechos, considerando dois tributários 1 e 2.

Figura C.6: Recorte da simulação realizada pelo grupo

Modelo de Oxigênio Dissolvido
Streeter- Phelps

Dados de entrada	Simbolo	Valor
variáveis		
vazão do rio (m3/s)	Qr	0,76
vazão do esgoto (m3/s)	Qe	0,114
DBO5 do rio (mg/L)	DBOr	2
DBO5 do esgoto (mg/L)	DBOe	341
OD do rio (mg/L)	Odr	7,1
OD do esgoto (mg/L)	Ode	0,0
coeficientes na temperatura do líquido		
Coef. De Desoxigenação (1/c	K1	0,44
Coef. De Decomposição (1/d	Kd	0,77
Coef. De Rearação (1/d)	K2	5,23
dados adicionais		
Od de Saturação (mg/L)	OD sat	7,9
distandia do trecho (km)	d	50
velocidade (m/s)	v	0,26
Efic. Remoção de DBO na ET	Edbo	0

DADOS DE SAÍDA

dados do esgoto tratado		
DBO5 do esgoto (mg/L)	DBOet	341
dados da mistura		
OD da mistura (mg/L)	OD0	6,17
DBO5 da mistura (mg/L)	DBO0	46,22
Coef. DBOultima	KT	1,12
DBOultima da mistura (mg/L)	L0	52

dados da mistura		
OD da mistura (mg/L)	OD0	6,17
DBO5 da mistura (mg/L)	DBO0	46,22
Coef. DBOultima	KT	1,12
DBOultima da mistura (mg/L)	L0	52

dados do trecho		
tempo de percurso (d)	t	2,23
OD no final do percurso (mg/	ODt	6,28
DBO no final do trecho (mg/L	DBOt	8,3
OD mínimo no trecho (mg/L)	OD mín	8,327

DBO inicio anaerobiose=

$$L_I = L_0 . e^{-Kd \cdot Ti}$$

Ti = 0,1 dia
Li= 102,0 mg/l

tempo de duração do trecho em anaerobiose

$$Tda = \frac{Li}{K_2 C_s} - \frac{1}{Kd}$$

Tda= 1,17 dia

tempo de termino do trecho em anaerobiose

Tfinal= 1,27 dia

BDO final do trecho em anaerobiose

$$L_f = Li - K_2 C_s . Tda$$

Lf= 53,7 mg/L

Fonte: Relatório final do grupo.

A Figura C.7 traz informações obtidas pela modelagem, para o primeiro trecho do reservatório. De modo análogo o relatório apresenta os resultados dos demais trechos.

Abordagem usada na Resolução

Não fizeram menção a qualquer método numérico para elaboração ou mesmo para o tratamento dos modelos.

Interpretação e Validação dos Resultados

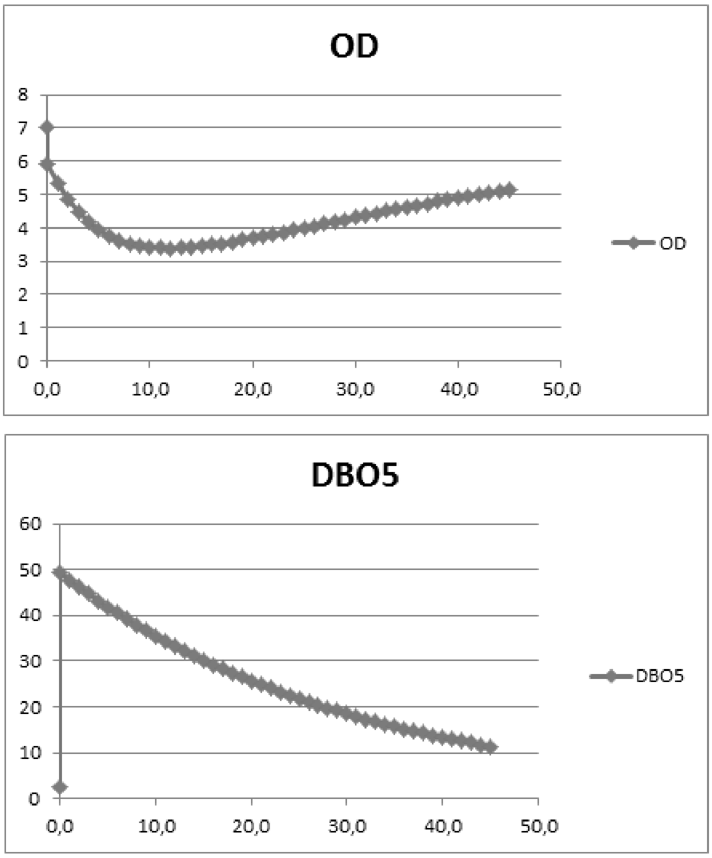
Alegam que, com todos os dados disponíveis é possível fazer a simulação da modelagem ao longo de todo o rio principal, onde é possível observar que o oxigênio dissolvido tem aumento gradual ao longo do percurso, com quedas nos pontos onde há a presença dos efluentes provenientes dos tributários 1 e 2.

Considerações Finais do Grupo

Por meio da modelagem matemática, utilizando o modelo de *Streeter-Phelps* avaliou-se os processos de autodepuração de cursos d’água analisando-se um caso hipotético.

Figura C.7: OD e DBO em função da distância correspondentes ao primeiro trecho do reservatório

distância (Km)	tempo (d)	OD (mg/L)	DBO5 (mg/L)
0,0	0	7	2,5
0,0	0	5,90	49,25
1,0	0,04	5,33	47,67
2,0	0,09	4,86	46,14
3,0	0,13	4,48	44,66
4,0	0,18	4,18	43,23
5,0	0,22	3,95	41,84
6,0	0,27	3,77	40,50
7,0	0,31	3,63	39,20
8,0	0,36	3,53	37,94
9,0	0,40	3,46	36,72
10,0	0,45	3,42	35,54
11,0	0,49	3,40	34,40
12,0	0,53	3,39	33,30
13,0	0,58	3,40	32,23
14,0	0,62	3,42	31,19
15,0	0,67	3,45	30,19
16,0	0,71	3,49	29,22
17,0	0,76	3,53	28,29
18,0	0,80	3,58	27,38
19,0	0,85	3,64	26,50
20,0	0,89	3,69	25,65
21,0	0,93	3,75	24,82
22,0	0,98	3,81	24,03
23,0	1,02	3,87	23,26



Fonte: Relatório final do grupo.

Pode-se concluir que o modelo apresenta parâmetros coerentes com situações reais analisadas em literatura quando a calibração do modelo é efetuada de maneira adequada, e também que é possível a separação da bacia em trechos para a simplificação dos cálculos.

Infere-se então que a utilização do modelo matemático de *Streeter-Phelps* para o gradiente de concentração de oxigênio dissolvido e da demanda bioquímica de oxigênio é justificado devido à sua grande precisão com os dados encontrados na natureza, sendo portanto, uma ferramenta bastante útil para o estudo de bacias hidrográficas.

C.5.4 Grupo 5: Tratamento de Efluentes: modelagem de lagoa anaeróbia.

Grupo composto pelos alunos C3(A5) e C3(B5), ambos do curso de Engenharia Ambiental.

Situação Inicial

A problemática estudada foi bem definida inicialmente evidenciando a relevância de abordar o tratamento biológico no tratamento eficaz de efluentes, de acordo com a legislação ambiental. Diferenciaram os processos de tratamento e apontando que a grande vantagem dos anaeróbios é a menor produção de lodo e o custo relativamente menor quando comparado aos aeróbios, sendo esses adequados para indústrias cujos efluentes não variem muito em suas características.

Definição do Problema

O objetivo é modelar uma lagoa de estabilização anaeróbia para tratamento de efluentes com eficiência entre 40% e 60% de acordo com a variação mensal da temperatura mínima durante um ano na cidade de Londrina.

As seguintes hipóteses simplificadoras foram consideradas para o dimensionamento: serão considerados apenas os efeitos da temperatura, os ventos e a pluviosidade, portanto, serão considerados constantes, de modo que, sua influência seja mínima durante os processos de tratamento; como o tempo de detenção hidráulico - tempo necessário para a degradação da matéria orgânica - possui valores ideais entre 3 e 6 dias, e as variáveis dependem da temperatura média do ar mais frio, será considerada a média das temperaturas mínimas diárias; será assumido que a temperatura possua um comportamento polinomial, para que seja possível aplicar os métodos numéricos; como não é possível mensurar o tempo de detenção e a taxa de aplicação volumétrica para temperaturas menores que 10^{o}C devido à baixa atividade microbiológica, os meses com temperatura abaixo desta, terão sua temperatura aproximada para 10^{o}C. A aproximação é válida porque essas temperaturas não se repetem por muitos dias, e para a eficiência é considerada a média mensal

Fonte dos Dados

Notas de aula obtidas pela Internet: tabelas com a definição de parâmetros para o comportamento do tempo de detenção de acordo com a temperatura da lagoa, bem como para o comportamento da taxa de aplicação volumétrica admissível em função da temperatura e para a eficiência da remoção de DBO_5 em função da temperatura.

Site do IAPAR: tabela de valores da temperaturas durante o ano de 2012.

Modelo Obtido

Supondo um comportamento polinomial, para a obtenção do modelo o método de interpolação de Newton-Gregory foi empregado para as temperaturas médias em relação ao tempo (Figura C.8), e, a partir da função buscou-se o seu valor de mínimo para a determinação da eficiência mínima da lagoa de estabilização. Posteriormente, outra interpolação foi realizada, para a taxa de aplicação volumétrica (Figura C.9), a partir da qual se deu o dimensionamento da lagoa.

Definição de Variáveis

T: temperatura média do ar mais frio (^{o}C). É uma função do tempo;

$Tmed$: temperatura média (^{o}C). É uma função do tempo;

θh: tempo de detenção hidráulico (dias);

V: volume requerido para a lagoa (m^3);

Lv: taxa de aplicação volumétrica. É o volume necessário para estabilização da DBO aplicada pelo afluente, varia de acordo com a temperatura (KgDBO/m3.d);

E: eficiência de remoção de DBO, depende da temperatura (%);

$DBOefl$: concentração de DBO do efluente;

t: tempo (em meses).

Parâmetros

Q: vazão de afluente (m^3/dia);

L: carga de DBO afluente (KgDBO/d);

h: profundidade da lagoa, recomendado entre 3,5 a 5m para minimizar os efeitos do meio externo, como os ventos;

l: comprimento da lagoa. Este deve ser de 1 a 3 vezes maior que a largura (m);

b: largura da lagoa (m);

So: concentração de DBO do afluente (mg/L);

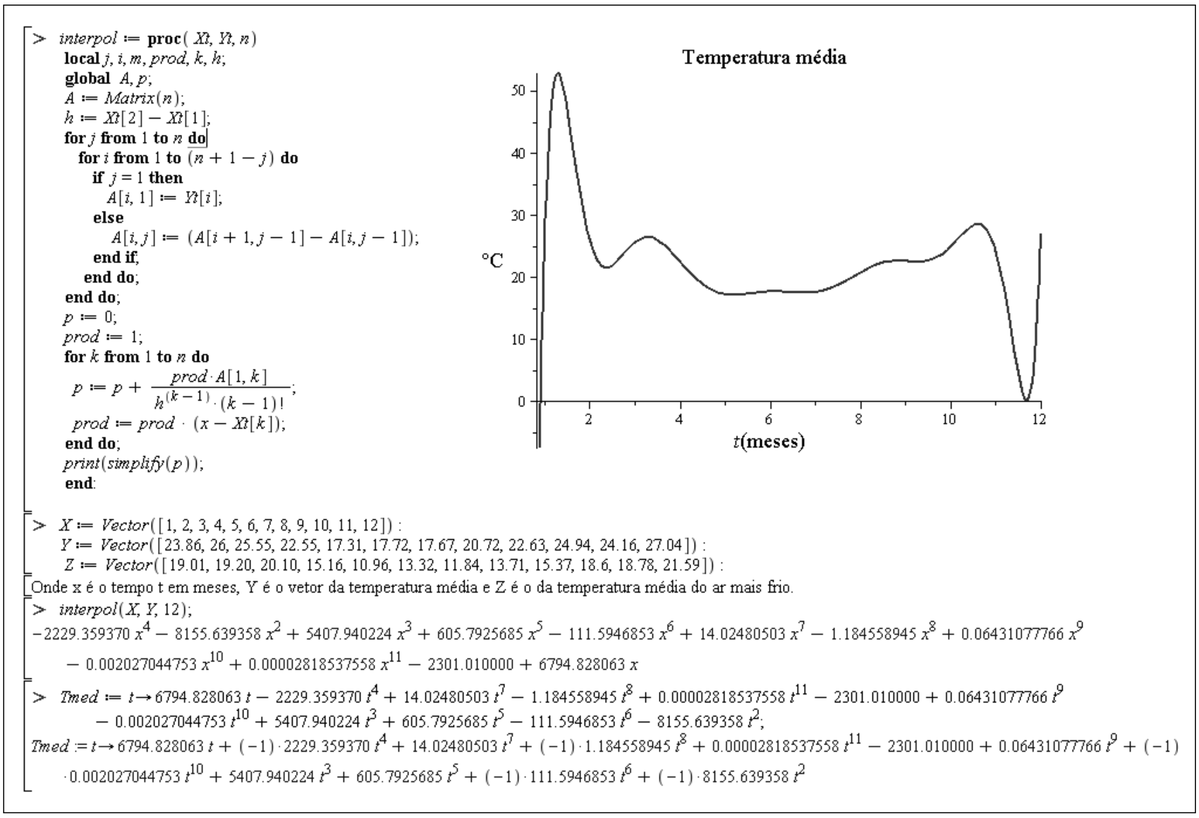
$Area$: Área da lagoa(m^2);

O sistema hipotético a ser modelado deve suportar uma vazão Q de 3000m^3/dia e uma concentração de DBO_5 de 400 mg/L.

Abordagem usada na Resolução

O modelo foi obtido por meio de implementação do método numérico para interpolação polinomial no *software Maple*, conforme a Figura C.8. Outros recursos do programa foram usados para a determinação do valor de mínimo no intervalo desejado, a partir do qual a eficiência mínima (54,46%) da lagoa foi calculada. Posteriormente, a taxa de aplicação volumétrica foi obtida por meio de uma nova interpolação, como mostra a Figura C.9, usando o mesmo princípio. Outros cálculos se fizeram necessários para o dimensionamento, como: volume e área necessários e tempo de detenção.

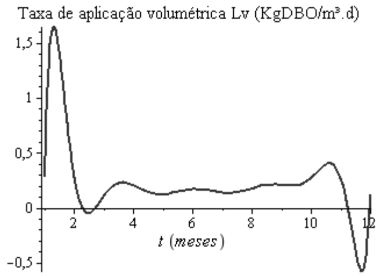
Figura C.8: Implementação do método de Newton-Gregory para a interpolação da temperatura



Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Figura C.9: Polinômio interpolador para taxa de aplicação volumétrica

```
> for i from 1 to 12 do
    if Z[i] > 25 then
      LV[i] := 0.35;
    else
    if  Z[i] > 20 then
     LV[i] := 0.01·Z[i] − 0.1;
    else
    if Z[i] > 10 then
    LV[i] := 0.02·Z[i] − 0.1;
    end if;
    end if;
   end if;
  end;
```




```
> print(LV);
    table([1 = 0.2802, 2 = 0.2840, 3 = 0.1010, 5 = 0.1192, 4 = 0.2032, 7 = 0.1368, 6 = 0.1664, 10 = 0.272, 11 = 0.2756, 8 = 0.1742, 9 = 0.2074, 12 = 0.1159])
> interpol(X, LV, 12);
```

$$0.000001013741081\, x^{11} - 100.1089000 - 88.76772412\, x^{4} + 219.9308870\, x^{3} + 23.65864762\, x^{5} - 4.282772212\, x^{6} + 0.5298533582\, x^{7} - 0.04412310101\, x^{8} + 0.002365003444\, x^{9} - 0.00007368242942\, x^{10} - 339.0686068\, x^{2} + 288.4306459\, x$$

$$> \; Lv := t \rightarrow 0.000001013741081\, t^{11} - 100.1089000 - 88.76772412\, t^{4} + 219.9308870\, t^{3} + 23.65864762\, t^{5} - 4.282772212\, t^{6} + 0.5298533582\, t^{7} - 0.04412310101\, t^{8} + 0.002365003444\, t^{9} - 0.00007368242942\, t^{10} - 339.0686068\, t^{2} + 288.4306459\, t$$

$$Lv := t \rightarrow 0.000001013741081\, t^{11} - 100.1089000 + (-1) \cdot 88.76772412\, t^{4} + 219.9308870\, t^{3} + 23.65864762\, t^{5} + (-1) \cdot 4.282772212\, t^{6} + 0.5298533582\, t^{7} + (-1) \cdot 0.04412310101\, t^{8} + 0.002365003444\, t^{9} + (-1) \cdot 0.00007368242942\, t^{10} + (-1) \cdot 339.0686068\, t^{2} + 288.4306459\, t$$

```
> plot(Lv(t), t = 1 ..12);
```

Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Interpretação e Validação dos Resultados

Durante os procedimentos para o dimensionamento, verificou-se, a partir da Figura C.9, que o pequeno número de pontos limitou a precisão comparativamente aos dados do IAPAR, principalmente no início e final do intervalo de temperatura, pois, sabe-se que temperaturas médias de 0°C ou 50°C não ocorrem nessa região. Isso levou a considerar apenas a região intermediária do intervalo, de modo que o ponto mínimo local da temperatura foi investigado entre $t = 4$ e $t = 7$. Novamente, pode-se notar um comportamento inadequado ao processo de modelagem no polinômio interpolador obtido para Lv, que deveria assumir apenas valores positivos. Assim, optou-se por procurar o mínimo local de interesse para a modelagem entre o tempo 4 e 6.

Por fim, a modelagem permitiu obter os seguintes resultados: a lagoa de estabilização terá uma eficiência mínima de 54,46%; o volume necessário para a lagoa é 10150,91m^3, sendo 5m de profundidade, aproximadamente 31,86m de largura e 63,72m de comprimento; e, o tempo de detenção 3,38 dias.

No relatório, o grupo considera que: o modelo utilizado é baseado nas equações encontradas na literatura e na interpolação das temperaturas mensais obtidas por meio da tabela do IAPAR; houve um problema no resultado da interpolação, pois, o polinômio apresentava valores muito inferiores ou muito superiores aos esperados durante os meses iniciais ou finais do ano. Porém, para o caso em questão, o erro não influenciou o resultado, pois as informações desejadas eram os mínimos de temperatura, que na região ocorrem entre o fim do outono e a primeira metade do inverno (no meio do ano). No caso de um país do hemisfério norte, onde os dados desejados estariam no intervalo do erro, seria necessário refinar a interpolação, aumentando o número de dados por mês.

Considerações Finais do Grupo

Para que que se tenha um rendimento da lagoa de estabilização anaeróbica com um máximo de aproveitamento, considerando a variação das temperaturas da região, referentes ao ano de

2012, viu-se que deve ser considerado algumas medidas e seu tempo de detenção. Os objetivos iniciais do projeto foram atingidos, uma vez que a eficiência mínima esteve dentro do esperado, que era entre 40% e 60%, ficando em 54,46%.

Como o projeto é hipotético, uma vez que não foi recolhido nenhum dado de lagoas, para que se pudesse realizar um estudo real, algumas variáveis não foram analisadas, ou seja, foram consideradas como constantes. Alguns erros ocorridos na interpolação, no que se refere aos meses finais e iniciais do ano não influenciaram nos resultados.

C.5.5 Grupo 6: Modelagem Matemática do Descarregamento de Capacitor

Grupo composto pelos alunos C3(A6), C3(B6) e C3(C6), do curso de Engenharia de Materiais.

Situação Inicial

Inicialmente alegaram que a escolha do estudo de capacitores foi motivada pela ampla aplicação destes e por terem feito experimentos com os mesmos em laboratório em outra disciplina. Caracterizaram diferentes tipos de capacitores e indicaram sua aplicabilidade, como segue: os capacitores são amplamente utilizados em rádios, gravadores, televisores, circuitos elétricos, etc. Em circuitos elétricos são aplicados para eliminar ondulações em aparelhos que conduzem corrente contínua e também para bloquear correntes contínuas. Também são usados no armazenamento de carga de utilização rápida, como ocorre em lasers e nos flashs das câmeras fotográficas, onde a pilha carrega o capacitor durante vários segundos e ele descarrega toda sua carga no bulbo do flash instantaneamente. A diferença entre um capacitor e uma pilha é que o capacitor é capaz de descarregar toda a sua carga em segundos, enquanto que uma pilha demoraria alguns minutos. Por isso eles também são muito perigosos quando possuem grande capacidade de armazenamento.

Definição do Problema

O objetivo do trabalho é encontrar uma equação através dos dados obtidos em laboratório que se ajuste à curva dada pelo gráfico dos dados para o descarregamento de um capacitor.

Fonte dos Dados Os dados foram obtidos pelos alunos durante uma aula experimental e correspondem ao descarregamento de um capacitor.

Modelo Obtido

Analisando-se a dispersão dos pontos no gráfico da Figura C.10, percebe-se um comportamento exponencial decrescente, o mesmo encontrado na literatura.

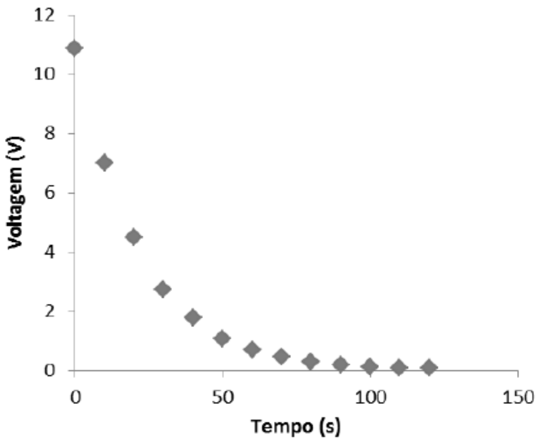
Para estudar a carga e a descarga de um capacitor consideraram um circuito elétrico ideal, ou seja, sem perdas de energia em forma de calor para o ambiente. Definiram as variáveis e parâmetros à medida que iam inserindo as equações usadas a fim de chegar ao modelo desejado, como:

V: diferença de potencial, em Volts, ε: força eletromotriz da fonte, em Volts; R: resistência elétrica, em Ohm; C: capacitância, em Farad, t: tempo, em segundos, entre outras.

Inicialmente o modelo foi pensado com base em um sistema elétrico com um resistor e um capacitor, como indica a Figura C.11 (a). A partir do qual, baseados nas leis físicas que regem o sistema, deduziram a equação que descreve o carregamento de um capacitor. Em termos da diferença de potencial, a equação obtida foi $V = \varepsilon(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$.

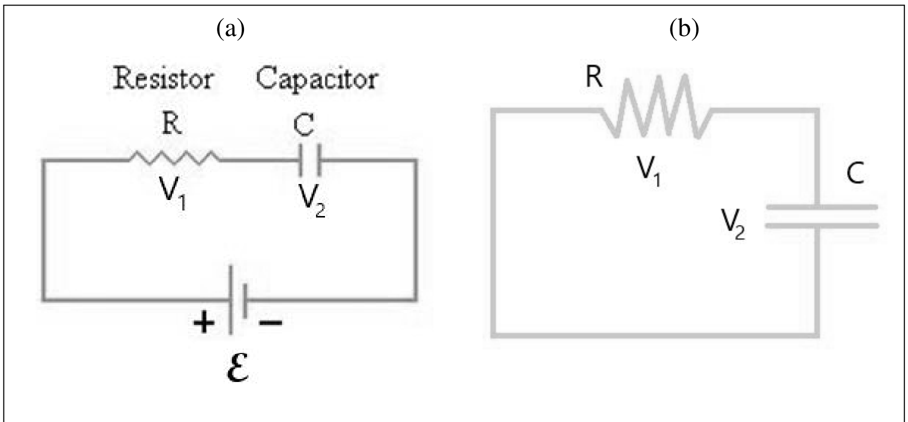
Figura C.10: Dados experimentais para o descarregamento do capacitor e o diagrama de dispersão correspondente à voltagem versus tempo.

Tensão (V)	tempo(s)
10,86	0
7,02	10
4,49	20
2,72	30
1,78	40
1,08	50
0,7	60
0,46	70
0,3	80
0,2	90
0,13	100
0,1	110
0,07	120



Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Figura C.11: Circuito resistor-capacitor em (a) com fonte de energia e em (b) sem fonte de energia



Fonte: Relatório final do grupo

Considerando um sistema sem fonte de energia (Figura C.11 (b)), deduziram a equação do descarregamento, como ilustra a Figura C.12.

Figura C.12: Recorte do texto com a dedução da equação do descarregamento de um capacitor

Partindo do mesmo princípio do carregamento, tem-se:

$$\varepsilon - V_1 - V_2 = 0$$

$$-Ri = \frac{q}{C}$$

$$-R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}$$

Dividindo-se a queação por R e multiplicando por (-1), tem-se:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{-q}{RC}$$

Diferenciando e integrando a equação:

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = \int_0^t \frac{-dt}{RC}$$

$$\ln\frac{q}{Q} = \frac{-t}{RC}$$

$$\frac{q}{Q} = e^{-t/RC}$$

Onde $\frac{q}{Q} = q(t)$.

$$q(t) = C\varepsilon e^{-t/RC}$$

Para o descarregamento também é possível representá-lo em termos da diferença de potencial:

$$V = \frac{q(t)}{C}$$

$$V = \varepsilon e^{-t/RC}$$

Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Abordagem usada na Resolução

Observando que o modelo $V = \varepsilon e^{\frac{-t}{RC}}$ pode ser comparado ao modelo exponencial geral $y = ae^{bx}$, usaram o método numérico dos Mínimos Quadrados, adequado para a dedução dos parâmetros a e b, onde $a = \varepsilon$ e $b = \frac{-1}{RC}$. O desenvolvimento da resolução do modelo é mostrado na Figura C.13.

Interpretação e Validação dos Resultados

Após a obtenção do modelo $V = 10,0006e^{-0,0428t}$ esboçaram a curva correspondente com o *software* Maple. Posteriormente, a fim de validar o modelo obtido, lançaram mão do recurso de ajuste de curvas do *software* Origin onde obtiveram a equação $y = 10,007e^{-0,043x}$ com um coeficiente de determinação $R^2 = 0,9972$.

Por fim, exibiram a representação gráfica do ajuste obtido no mesmo sistema de eixos dos dados experimentais e comentaram que: analisando-se os gráficos, percebe-se que a equação encontrada pelo método dos mínimos quadrados foi muito próxima da equação que descreve o comportamento dos pontos, como mostrado acima, o que era de se esperar, uma vez que é a mesma distribuição de pontos. O método dos mínimos quadrados para ajuste de uma exponencial pode ser utilizado com alto grau de confiabilidade para tais situações, onde se tem os dados obtidos e não se tem a função.

Considerações Finais do Grupo

Foi escolhido o método do descarregamento de capacitor por apresentar uma equação exponencial da forma geral, ou seja, $y = ae^{bx}$, com o objetivo de facilitar os cálculos do método dos mínimos quadrados.

Figura C.13: Recorte do texto mostrando a resolução do modelo exponencial pelo método dos Mínimos Quadrados

Utilizando-se as equações acima montou-se o seguinte sistema para a determinação dos coeficientes:

$$\begin{cases} n.a + \left(\sum x_i\right).b = \sum \ln(y_i) \\ \left(\sum x_i\right).a + \left(\sum x_i^2\right).b = \sum x_i.ln(y_i) \end{cases}$$

Na tabela acima (Tabela 2), os valores de Tensão correspondem aos y_i e os de tempo, aos x_i. Dessa forma, o sistema ficou da seguinte maneira:

$$\begin{cases} 13a + 780b = -3.45877 \\ 780a + 65000b = -986.886 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtém-se os seguintes valores para os coeficientes:

$a = 10.0006$

$b = -0.0428$

Logo, a equação será:

$y = 10.0006.e^{-0.0428x}$

Tabela 2: Valores calculados para as Tensões e tempos encontrados no laboratório para o cálculo dos coeficientes da equação.

n	Tensão (V)	tempo(s)	t^2	lnV	txlnV
1	10,86	0	0	2,385086	0
2	7,02	10	100	1,948763	19,48763
3	4,49	20	400	1,501853	30,03705
4	2,72	30	900	1,000632	30,01896
5	1,78	40	1600	0,576613	23,06453
6	1,08	50	2500	0,076961	3,848052
7	0,7	60	3600	-0,35667	-21,4005
8	0,46	70	4900	-0,77653	-54,357
9	0,3	80	6400	-1,20397	-96,3178
10	0,2	90	8100	-1,60944	-144,849
11	0,13	100	10000	-2,04022	-204,022
12	0,1	110	12100	-2,30259	-253,284
13	0,07	120	14400	-2,65926	-319,111
soma	29,91	780	65000	-3,45877	-986,886
média	2,300769231	60	5000	-0,26606	-75,9143

Fonte: Relatório entregue pelo grupo

C.5.6 Grupo 7: Construção de algoritmo para interpretação da transição de fase de segunda ordem

Grupo composto pelo aluno C3(A7), do curso de Engenharia de Materiais.

Situação Inicial

A importância das transições de fases para a área de materiais foi a motivação inicial do estudo, que segundo C3(A7), podem significar grandes mudanças nas características estruturais no material, como na densidade e na resistência eletro-ópticas.

Inicialmente definiu e diferenciou alguns conceitos, como de mudança de fase de primeira ordem e de segunda ordem. A primeira só é válida para compostos simples, que não apresentam com a mudança de fase, uma mudança de cristalinidade (tipo de organização atômica do composto). Em seguida, passou a caracterizar cristais líquidos (CLs), um tipo de fluido complexo com diversas aplicações que vão desde as áreas biológicas até as áreas altamente tecnológicas. Os CLs são caracterizados como fluidos complexos por exibirem características tanto da fase líquida (fluidez) como da fase sólida (estrutura cristalina). Um CLs pode apresentar diferentes tipos de estrutura cristalina, em alguns casos um mesmo composto pode apresentar duas fases cristalinas diferentes. Quando isso ocorre, na passagem de uma fase cristalina para a outra, temos uma transição de fase de segunda ordem.

Um modelo polinomial de duas variáveis, pressão e temperatura, foi proposto para a transição de fase que ocorre entre duas diferentes fases cristalinas, com o qual se pode calcular o potencial termodinâmico (cujo significado físico é a energia que o composto absorve ou libera na transição de fase).

O polinômio de Landau é composto por termos que tem o papel de ajustar o valor do potencial termodinâmico inicial ao potencial termodinâmico real da transição de fase entre CLs - CLs, sendo valido somente para estes tipos de transição de fase de segunda ordem.

Definição do Problema

A proposta é calcular, através do polinômio apresentado por Landau, o comportamento da transição de fase de segunda ordem entre dois tipos de diferentes de CLs, ou seja, a quantidade de energia envolvida na reação através da integral de sua função. Este comportamento indica se a transição é endo ou exotérmica.

Fonte dos Dados

O trabalho é de natureza teórica. Foram citadas referências bibliográficas referentes ao estudo de cristais líquidos.

Modelo Obtido

Para o estudo, o polinômio no qual o estudo se baseia foi apresentado e as variáveis foram definidas, conforme o texto do relatório:

Polinômio de Landau: $\Phi = \Phi_0 + \alpha\eta + A\eta^2 + B\eta^3 + C\eta^4$..., onde

α, A, B, C são funções de pressão (P) e temperatura (T);

Φ_0 é o potencial termodinâmico da transição de fase;

η é o fator que representa o grau de ordem das fases líquido - cristalinas para o composto estudado.

Como a função do potencial termodinâmico de Landau é uma função de duas variáveis - pressão e temperatura - vamos tomar, para a construção do modelo numérico a pressão como tendo valor constante da pressão atmosférica, com isso temos que: $P = 1,01.10^5 Pa$

Abordagem usada na Resolução

O modelo utilizado no estudo é o método dos trapézios de integração numérica. Este método segue a seguinte formulação:

$\int F(x) = \frac{h}{2}\left[F(x_1) + 2F(x_2) + 2F(x_3) + ... + 2F(x_{n-1}) + F(x_n)\right]$, onde h é o tamanho do subintervalo entre os pontos.

A partir deste método é possível calcular a área da função proposta, que no caso deste estudo, significa a quantidade de energia envolvida com a transição.

O método foi implementado no Maple, conforme indica a Figura C.14.

Interpretação e Validação dos Resultados

Por se tratar de um modelo teórico, a validação com dados experimentais não foi realizada. Já o algoritmo construído no Maple foi feito de maneira a facilitar a sua alteração e inserção de dados diferentes do utilizado no modelo.

O texto não simulou resultados a partir do algoritmo.

Figura C.14: Algoritmo para o método do Trapézio de integração numérica

```
potencialtermodinamico := proc (potencialinicial, numeropontos, Tfinal, Tinicial)
local P, Potencial, i, h, energiatotal, k, T, a, A, B, C, n;
P := 1, 01·10^5;
a := T^3·P;
A := lnP/T;
B := e^T;
C := 5 T^2;
n := 0, 7653;

energiatotal := 0;

Potencial := T → an + An^2 + Bn^3 + Cn^4;

print(Potencial(T));

h := (Tfinal − Tinicial)/numeropontos;

for i from Tinicial to Tfinal by h do
  if i ≠ Tinicial then
    if i ≠ Tfinal then
    k := 2(Potencial (i));
    else
    k := (Potencial(i));
    end if;
  else
  k := (Potencial(i));
  end if;
energiatotal := energiatotal + k;
end do;

energiatotal := (energiatotal·h)/2;
print(energiatotal);
end;
```

Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Considerações Finais do Grupo

O estudo realizado da transição de fase teve êxito, contudo foram enfrentadas certas dificuldades. Uma das principais dificuldades foi a análise de um problema que tivesse uma resolução numérica, como a atividade foi proposta no início do período letivo era difícil identificar os diversos métodos que poderiam ser aplicados. Outra dificuldade encontrada foi a da obtenção de dados para a validação do modelo já que a natureza do problema é teórica.

De maneira geral, o trabalho foi importante do ponto de vista didático já que introduziu a metodologia de trabalho com problemas numéricos, e foi importante para o entendimento de todos os procedimentos a serem seguidos.

C.5.7 Grupo 8: Modelo Matemático sobre o Consumo de Energia Elétrica pela Variacão da Temperatura

Grupo composto pelas alunas C3(A8) e C3(B8) e pelo aluno C3(C8), do curso de Engenharia Ambiental.

Situação Inicial

Apresentado vários dados da cidade de Londrina o grupo apresenta a temática que se propôs a estudar. Dentre as informações iniciais, o texto indica que o clima de Londrina, segundo a classificação de Köppen, é do tipo subtropical úmido, com chuvas em todas as estações, podendo ocorrer secas no período de inverno, e que a temperatura média do mês mais quente é, geralmente, superior a 25,5ºC e a do mês mais frio, inferior a 16,4ºC.

Em 1938, Londrina teve o primeiro contato com a energia elétrica, fornecido pela Companhia Elétrica Força e Luz. Com a vinda da COPEL - Companhia Paranaense de Energia para a região, o crescimento urbano e desenvolvimento da cadeia produtiva da região tornaram-se mais fortes.

A COPEL registrou, no início de fevereiro de 2012, o maior pico de consumo de eletricidade da história do Paraná. Segundo a empresa, o aumento do consumo tem relação direta com o aumento das temperaturas, que levam a população a utilizar mais os sistemas de climatização do ar. Em pelo menos uma semana, o recorde foi quebrado três vezes, o sistema havia registrado uma carga máxima de 4,522 mil MW, no mês de fevereiro do mesmo ano.

Definição do Problema

Este trabalho tem por finalidade determinar o consumo de energia elétrica com as variações de temperatura durante um ano. O estudo busca definir uma função que descreva o consumo de energia elétrica no de janeiro a dezembro de 2011, e a partir disso, verificar se a função encontrada por métodos numéricos tem uma representatividade com os valores reais.

A análise das temperaturas mostra-se importante, pois, quando elas encontram-se elevadas, as pessoas têm a necessidade de utilizar sistemas de ventilação como ar condicionado, ventiladores e climatizadores, para amenizar o calor. Em contrapartida, quando as temperaturas encontram-se baixas, há a necessidade de sistemas de aquecimento. Em ambos os casos há demanda por energia elétrica, porém, no período de temperaturas mais elevadas essa demanda é maior, como pode ser visto nos dados, a seguir.

Fonte dos Dados

Os dados de temperatura da cidade de Londrina, no período de janeiro a dezembro de 2011, foram obtidos no site do IAPAR - Instituto Agronômico do Paraná. Os dados de consumo de energia elétrica no site da COPEL. (Ver Figura C.15).

Modelo Obtido

Para a obtenção do modelo o grupo levou em conta apenas variáveis como: temperaturas máxima e mínima e o consumo de energia elétrica. Embora, considerem que o consumo de energia elétrica é influenciado pela renda familiar, ou seja, quanto maior a renda, maior o consumo; horários de picos de consumo entre outros poderiam influenciar no modelo.

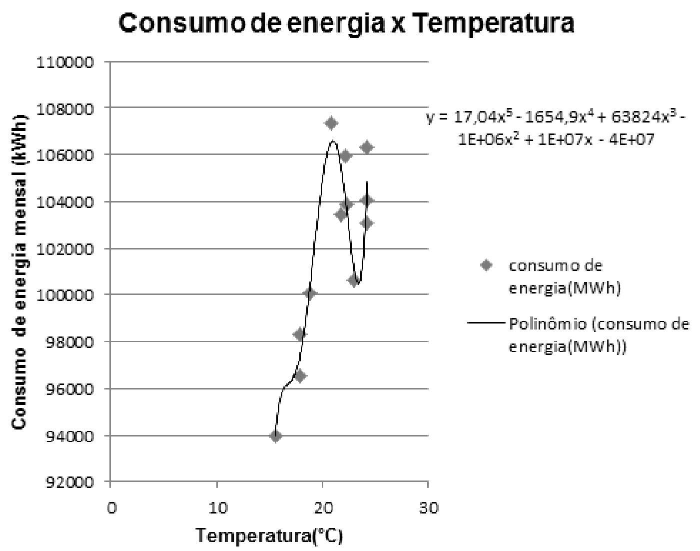
Definiram as variáveis:

x: temperatura média mensal, em $^{\text{o}}$C; y: consumo de energia elétrica, em MWh.

Presumiram que a tendência do gráfico de dispersão poderia ser analisados por uma expressão polinomial de grau 5, como indica a Figura C.15.

Figura C.15: Dados e gráfico do consumo de energia elétrica x temperatura média na cidade de Londrina-PR

temp(ºC)	consumo de energia(MWh)
24,14	103084,0
24,13	106318,0
22,96	100645,0
21,68	103467,0
17,89	96520,0
15,52	93979,0
17,82	98342,0
18,75	100056,0
20,79	107344,0
22,10	105968,0
22,26	103862,0
24,19	104031,0



Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Abordagem usada na Resolução

O primeiro modelo, um polinômio de quinto grau (Figura C.15), foi obtido por meio do recurso de ajuste de curva disponível no *software* Excel. Em seguida, alegaram que: a partir dos dados obtidos de temperatura e de consumo de energia elétrica mensal, o método numérico mais adequado para a solução do nosso problema é o de ajuste de curvas pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Embasados na literatura, apontaram que: uma forma de se trabalhar com uma função definida por uma tabela de valores é a interpolação polinomial. Contudo, a interpolação não é aconselhável quando é preciso obter um valor aproximado da função em algum ponto fora do intervalo de tabelamento, ou seja, quando se quer extrapolar. Surge então a necessidade de se ajustar a estas funções tabeladas uma função que seja uma boa aproximação para os valores tabelados que nos permita extrapolar com certa margem de segurança.

Mencionaram que, a partir do método dos mínimos quadrados, cuja resolução encaminharam em uma planilha, anexo ao relatório, é obtido o sistema de equações lineares (Figura C.16), o qual pode ser resolvido pelo método de eliminação de Gauss.

A resolução do sistema obtido foi buscada a partir da implementação do método de eliminação de Gauss usando o *software* Maple, porém, segundo resultados do relatório, o grupo não obteve bons resultados.

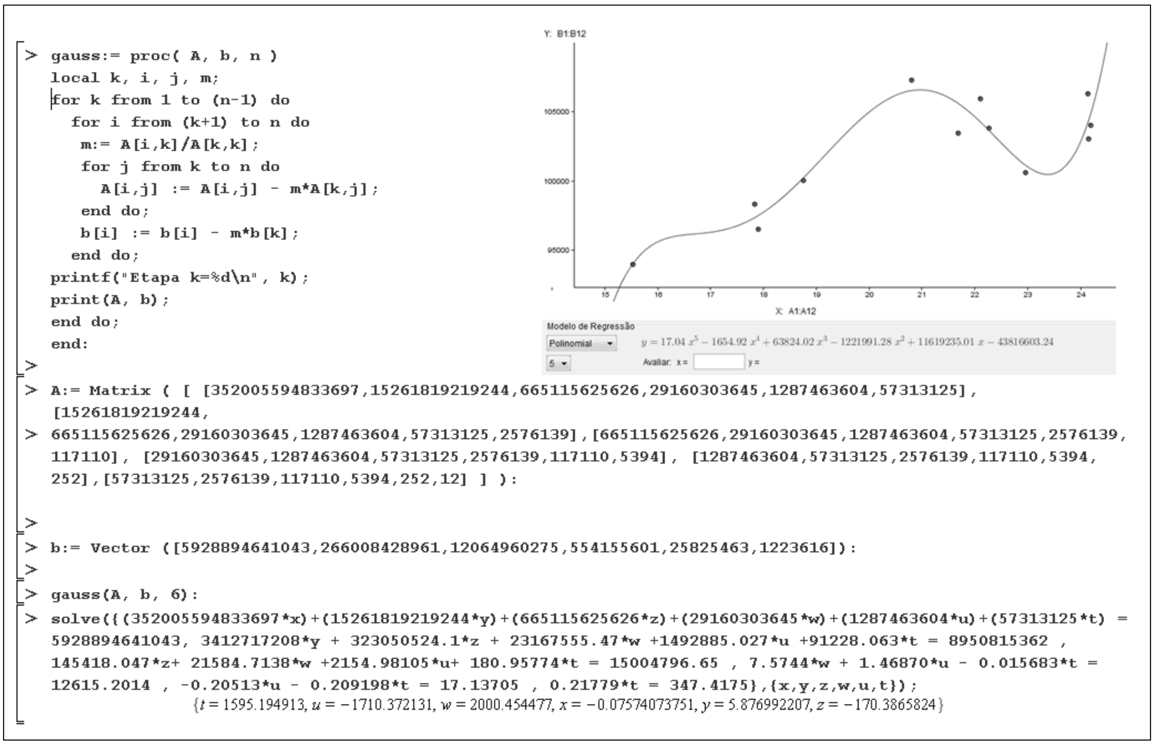
Interpretação e Validação dos Resultados

O resultado obtido pelo algoritmo do programa Maple não se aproximou da equação obtida através do ajuste de curvas do Excel. Para confirmar qual das equações estava correta, foi utilizado outro *software* matemático, o Geogebra, que forneceu um resultado bastante próximo ao do Excel.

A Figura C.16 ilustra o algoritmo desenvolvido pelo grupo, com o resultado dos coeficientes do polinômio, comparativamente com o ajuste obtido pelo Geogebra, exibido no gráfico.

No Maple:
$y = -0,07574x^5 + 5,87699x^4 - 170,38x^3 + 2000,45x^2 - 1710,37x + 1595,19$
No Excel:
$y = 17,04x^5 - 1654,9x^4 + 63824x^3 - 10^6x^2 + 10^7x - 4.10^7$
No Geogebra:
$y = 17,04x^5 - 1654,92x^4 + 63824,02x^3 - 1221991,28x^2 + 11619235,01x - 43816603,24$

Figura C.16: Implementação, no Maple, do método de eliminação de Gauss e ajuste obtido pelo Geogebra para o consumo de energia elétrica x temperatura média na cidade de Londrina-PR



Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Pode-se observar que as duas últimas equações são muito próximas e representam bem a curva polinomial do gráfico de consumo de energia elétrica pela temperatura mensal e que a equação encontrada pelo Maple não é representativa para os pontos.

Considerações Finais do Grupo

O objetivo do trabalho era determinar o consumo de energia elétrica com as variações de temperatura durante um ano. Os resultados obtidos a partir dos métodos numéricos aplicados com o auxilio do *software* Maple não foram satisfatórios, pois o mesmo se apresentava com valor discrepante em relação a outros *softwares* matemáticos, como Excel e Geogebra. Esse resultado não era esperado e deve-se a fatores como o ponto flutuante e arredondamentos do próprio *software*. A falta de dados de mais anos de consumo também é outro fator que impossibilita a comparação do comportamento do consumo de energia elétrica com outros anos para identificar se há um padrão.

C.5.8 Grupo 9: Projeção de emissões de gases empregando métodos matemáticos

Grupo composto pelo aluno C3(A9) do curso de Engenharia de Materiais, pela aluna C3(B9) e pelo aluno C3(C9), ambos do curso de Engenharia Ambiental.

Situação Inicial

O texto inicial do relatório do grupo afirma que: a abordagem deste projeto tem como conceitos básicos os princípios do desenvolvimento sustentável das cidades, considerando uma sustentabilidade socioambiental urbana, ampliando os limites de uma visão restrita e convencional, e cujo foco principal se fundamenta em avaliar e modelar a possível vantagem do uso de bicicleta quando comparado a outros meios de transportes. Assim, o trabalho enfatiza a importância do sistema ciclo viário no contexto da mobilidade urbana na cidade de Londrina, buscando equacionar o fato, algebrizando e trazendo em valores a questão analisada.

Informações sobre o sistema viário (veículos, ciclistas e pedestres) e sobre os distúrbios provocados pelos cerca de 160 mil veículos que circulam pelas ruas de Londrina diariamente, comprometendo a segurança e trazendo prejuízos a fluidez e o aumento de emissão de gases poluentes foram apresentadas na introdução.

Intencionavam um estudo que mostrasse benefícios do uso da bicicleta como uma alternativa ao trânsito. Assim, um levantamento sobre pesquisas que avaliam o uso da bicicleta nas cidades foi apresentado, indicando: economia, benefícios à saúde e bem estar, e , vantagens ao meio ambiente.

Definição do Problema

Tendo em vista a nova concepção de inter-relação homem meio ambiente, onde se almeja a sua preservação assim como redução de fontes poluidoras, o trabalho visa atribuir uma análise onde se especificará, em valores quantitativos, a dimensão das emissões da frota londrinense, onde, para sua redução, a substituição dos carros pelas bicicletas seria uma das melhores alternativas.

Querendo atribuir mais pontos positivos a utilização da bicicleta, já que essa tem emissividade zero de gases, quer-se, por meio de um método matemático especificar a quantidade de gases emitidos pela frota veicular londrinense e atribuir os efeitos nocivos ao ser humano quando expostos à tal concentração de poluentes.

Nesse trabalho, apenas a emissão do gás metano (CH4) por veículos automotores do ciclo Otto, movidos à gasolina, destinados ao transporte de passageiros e com capacidade de até 8 pessoas foi considerado.

Fonte dos Dados

Os dados sobre a frota de veículos, por tipo, em Londrina, foram obtidos com o DENATRAN-PR; Informações sobre fatores de emissão de poluentes e sobre intensidade de uso de veículos foram obtidos de documentos do site do Ministério do Meio Ambiente. As extensas tabelas com esses dados foram inseridas em anexo ao relatório do grupo. Pesquisas bibliográficas complementaram informações auxiliares na formulação do modelo.

Modelo Obtido

Citam que a taxa anual de poluentes é definida à partir do produto entre número de veículos, intensidade de uso e emissividade de poluente. Assim: $E = Fr \times Iu \times Fe$, onde

E: taxa anual da emissão de poluentes, em g/ano;

Fr: frota de automóveis da cidade de Londrina, em número de automóveis;

Iu: intensidade de uso dos veículos, em km/ano;

Fe: fator de emissão do poluente considerado, em g/km.

O modelo desenvolvido se limita, devido a existência de dados pouco atualizados, e até mesmo conflitantes. O que se obteve foram registros confiáveis entre 1983 até o ano de 2009, onde se descrimina o fator de emissão (Fe) de gases de acordo com as categorias veiculares e seus respectivos anos, a intensidade de uso (Iu) de acordo com a idade do veículo tendo como base a cidade de São Paulo. Temos uma carência desse tipo de informação entre 2009 e 2013, portanto, valendo-se das informações já existentes, de um intervalo relativamente longo de coletada de alguns poluentes, pretende-se fazer uma projeção para o ano de 2013. O que dispomos somente é o número atual de veículos circulantes em Londrina, porém é desconhecido a real idade destes. Para se chegar a um valor representativo de Iu e Fe.

Abordagem usada na Resolução

Segundo o relatório, aplicou-se o método de interpolação de Lagrange, utilizando o *software* VCN - Visual Cálculo Numérico, para a obtenção da taxa de emissão média, depois, intensidade de uso foi obtida pelo mesmo método. Como não foi possível definir a quantidade de veículos nem a taxa de emissão em relação à suas idades, optou-se por encontrar uma média a qual passou a representar as emissões atuais.

De fato, não foi possível constatar pelo exposto no texto como foram obtidos os valores mencionados e se de fato o método de Lagrange foi aplicado, pois, um gráfico com aspecto exponencial, juntamente com o ajuste correspondente foi inserido no texto enquanto sugeria ter usado o método para interpolação polinomial.

Interpretação e Validação dos Resultados

Considerações do grupo indicam as estratégias usadas para o tratamento dos dados obtidos: como não era possível definir a quantidade de veículos nem a taxa de emissão em relação à suas idades, optou-se por encontrar uma média a qual padronizaria e representaria as emissões atuais. O crescimento da frota também foi estabelecido, tendo uma média de crescimento mensal de 1015 carros novos. Foi considerado o período entre os meses de janeiro de 2012 e março de 2013, o que contabilizou um aumento de 12180 novos veículos no ano, concluindo assim que o ano de 2013 chegará a marca de

207839 veículos. Podemos então definir a emissão em 2013 em: $E = 207839 \times 11549,49 \times 0,07626 = 183057131,30 g/ano ou 183,057 toneladas/ano$.

Considerações Finais do Grupo

O uso de métodos numéricos, no caso deste trabalho, a interpolação, foi de grande utilidade para se definir as equações com as quais se pode fazer projeções para se determinar a taxa de emissão de automóveis considerados no ano de 2013, como também o aumento da frota londrinense.

A taxa de emissão estimada para o ano de 2013 está no patamar de 183,057 toneladas, sendo o procedimento aplicável aos outros gases emitidos, considerando o tipo de veículo, o combustível usado, o tempo de uso etc, fazendo considerações semelhantes as feitas na análise de emissão do metano. Assim é possível determinar a quantidade de metano emitidos ao longo de um ano na cidade de Londrina.

Assim sendo, uma redução do número de veículos automotores repercutiria diretamente na quantidade de gases produzidos anualmente.

C.5.9 Grupo 11: A degradação do polipropileno

Grupo composto pela aluna C3(A11) e pelos alunos C3(B11) e C3(C11), do curso de Engenharia de Materiais.

Situação Inicial

O estudo envolve a degradação de polipropileno, desse modo, algumas informações baseadas na literatura integraram a introdução do trabalho. Mencionando que o aumento da produção de polipropileno e consequente redução de custos do polímero tem possibilitado novas aplicações. Porém, os polímeros têm uma deficiência quando expostos a certos líquidos, radiação e calor. Essas situações podem promover a quebra de ligações e com isso a deterioração de suas propriedades físicas e mecânicas. O termo degradação é utilizado por causa das alterações no processo físico-químico das ligações poliméricas.

Descrevem mecanismos desenvolvidos para contornar o problema da degradação, mencionam características da estabilidade estrutural, que confere resistência aos diversos tipos de degradação (fotodegradação, quimiodegradação, biodegradação) e outros fatores envolvendo a temática. A motivação do estudo se justifica ao salientarem consequências para o meio ambiente. Como exemplo, colocaram que, se a durabilidade dos plásticos é uma vantagem, por outro lado, representa um sério problema ecológico, pois são muito usados na fabricação de embalagens usualmente descartadas após utilização e que vão se acumulando ao longo do tempo na natureza.

Descreveram diferentes elementos da família dos polímeros, diferenciando características e aplicações para então definir conceitos relativos ao estudo de interesse.

Definição do Problema

Segundo o relatório do grupo, o objetivo do trabalho era obter modelos matemáticos para avaliar a degradação do polipropileno e do ácido polilático em função do tempo, a partir de dados experimentais.

Fonte dos Dados

São provenientes de em experimento conduzido em um projeto de pesquisa do qual participava C3(C11) como aluno de iniciação científica.

A Figura C.17 traz os dados sobre a variação de massa dos diferentes tipos de materiais avaliados no experimento.

Figura C.17: Perdas de massa, resíduos e temperatura das amostras analisadas para polipropileno e para ácido polilático no decorrer do tempo.

Polipropileno			
Dias	Perda de peso(%)	Resíduo(%)	Temperatura (ºC)
30	94	6	270
60	96,6	3,4	252,9
90	95,4	4,6	261,2
150	96	4	266,4
180	88,1	11,9	376
210	87,4	12,6	369,7

Ácido Polilático			
Dias	Perda de massa (%)	Resíduo (%)	Temperatura(ºC)
30	76,1	23,9	389,4
60	77	23	385,7
90	75,8	24,2	387,2
150	76,6	23,4	3871
180	75,4	24,6	385,7
210	73,2	26,8	393,4

Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Os dados tabelados são provenientes do seguinte experimento: um aquário de degradação foi criado, onde copos plásticos foram colocados e retirados em diferentes tempos. Os copos foram pesados um a um, para quando for retirada cada amostra, saber com precisão o quanto de peso ele perdeu ou ganhou, ficando conectada ao fio, uma espécie de guia, e amarrado em uma madeira com a demarcação do número da amostra. Foram utilizadas seis amostras de copos de polipropileno (PP) e seis amostras de copos de ácido polilático (PLA). O aquário foi preenchido com a terra de compostagem, até a parte superior do aquário, preenchendo por inteiro as amostras. O início do teste de biodegradação dos copos foi no dia 01 de setembro de 2011, e para cada amostra, a cada 30 dias, foi retirado um copo de polipropileno e outro de ácido polilático. Retirado o excesso de terra presente no mesmo, foi pesado e enviado para laboratório de ensaio para teste de decomposição térmica.

Modelo Obtido

A partir dos resultados empíricos obtidos no estudo comparativo da biodegradação de copos descartáveis de polipropileno (PP) e de ácido polilático (PLA). O comportamento inicial esperado, com base na literatura, era de uma função exponencial. Entretanto, a observação do gráfico de dispersão dos dados, em que a hipótese exponencial foi testada por meio da linha de tendência do *software* Excel, mostrou que os resultados obtidos se adaptaram mais adequadamente a uma função polinomial de quinto grau.

Para a obtenção do modelo consideraram apenas as variáveis tempo (x, em meses), perda de massa do polipropileno ($F(x)$, em %) e perda de massa do ácido polilático ($f(x)$, em %), ou seja, foi desconsiderado a variação de temperatura, embora tenha-se mantido no intervalo considerada como adequado.

Abordagem usada na Resolução

O relatório indicou que foi aplicando o método de Newton para interpolação polinomial à taxa de perda de massa em função do tempo em meses. Não houve menção ao uso de qualquer auxílio computacional para o desenvolvimento dos cálculos, que foram organizados conforme indica a Figura C.18 que também apresenta o modelo obtido para cada material avaliado.

Figura C.18: Modelos obtidos para perda de massa do polipropileno e para ácido polilático, respectivamente, pelo método de interpolação polinomial de Newton, no decorrer do tempo.

Dias	Meses	% Perda					
30	1	94,000	2,600	-1,900	0,600	-0,282	0,126
60	2	96,600	-1,200	0,500	-0,808	0,478	
90	3	95,400	0,300	-2,730	1,583		
150	5	96,000	-7,900	3,600			
180	6	88,100	-0,700				
210	7	87,400					

$$F(x) = 0{,}126083x^5 - 2{,}04666x^4 - 9{,}794381x^3 - 55{,}748981x^2 + 82{,}0003689x + 52{,}86006$$

Dias	Meses	% Perda					
30	1	76,1	0,900	-1,050	0,317	0,117	-0,019
60	2	77	-1,200	0,534	-0,267	0,002	
90	3	75,8	0,400	-0,534	-0,258		
150	5	76,6	-1,200	-0,500			
180	6	75,4	-2,200				
210	7	73,2					

$$f(x) = -0{,}0191633x^5 + 0{,}3849262x^4 - 0{,}94593526x^3 + 7{,}7157731x^2 + 7{,}0589732x + 77{,}148994$$

Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Interpretação e Validação dos Resultados

O modelo proposto visa analisar a degradação dos materiais em questão em função do tempo desconsiderando a variação de temperatura. Entretanto, o comportamento que por lógica esperávamos que fosse exponencial, não ocorreu, sendo o modelo polinomial mais adequado. Não se analisou outros fatores que poderiam interferir no comportamento.

Considerações Finais do Grupo

Os resultados empíricos abrem margem para outros trabalhos mais específicos. Mas, a partir deste, observamos como o descarte influencia na degradação do material e que este poderia ser aproveitado como energia de biomassa, acelerando o processo, fornecendo energia barata e diminuindo o impacto dos materiais descartáveis consumidos em quantidades abusivas pela sociedade atual.

C.5.10 Grupo 12: Comparação entre emissões de poluentes veiculares: gasolina, etanol, flex gasolina e flex etanol no estado de São Paulo

Grupo composto pelo aluno C3(A12) e pelas alunas C3(B12) e C3(C12), do curso de Engenharia Ambiental.

Situação Inicial

Aumento da frota veicular como um fator relevante no agravamento do problema de poluição atmosférica vem justificar a opção por abordar a temática da emissão de poluentes neste trabalho. De acordo com informações do relatório do grupo, São Paulo enfrenta uma situação particularmente preocupante, pois, detém cerca de 40% da frota automotiva do país.

Tendo em vista a preocupação de proporcionar um ambiente atmosférico saudável à população, em especial dos grandes centros urbanos, a quantidade excessiva de emissão de poluentes liberados pelos combustíveis tende a ser reduzida. Para apoiar a redução da poluição em maio de 2003 foram lançados no mercado veículos flex. Equipados com um motor de combustão interna a quatro tempos (Ciclo Otto), tem a capacidade de serem reabastecidos e funcionar tanto à álcool quanto à gasolina. O veículo de combustível flexível mais comum disponível no mercado mundial utiliza etanol como segundo combustível.

A poluição gerada nas cidades, se deve grande parte à queima de combustíveis fósseis e do etanol. Estes combustíveis lançam uma grande quantidade de monóxido de carbono e dióxido de carbono na atmosfera, além de óxidos de nitrogênio, hidrocarbonetos, óxidos de enxofre e material particulado.

A comparação entre combustíveis fósseis e outros tipos de combustíveis considerados ecologicamente corretos, nos ajuda a ver a importância de investimentos nessa área, e depois de verificado a quantidade de poluentes liberados em cada combustível esperamos poder fazer a melhor escolha para nossos carros pensando primeiramente na saúde e bem estar da população, assim como na preservação ambiental.

Definição do Problema

Analisando dados de emissão de monóxido de carbono pelo uso de gasolina e pelo uso de flex etanol ao longo dos anos de 1988 a 2011, pretendemos fazer uma estimativa da quantidade de emissão para anos posteriores, no caso, para o ano de 2012 até 2020, além de fazer uma avaliação sobre qual destes combustíveis polui mais, em relação ao monóxido de carbono.

Fonte dos Dados

As informações utilizadas para as análises são oriundas do Relatório de Emissões Veiculares no Estado de São Paulo do ano de 2011, onde os dados para esses dois combustíveis são mais completos. O documento foi acessado no site da CETESB - Companhia Ambiental do Estado de São Paulo.

Outras informações, como sobre a frota no estado são provenientes dos sites da PRODESP - Companhia de Processamento de Dados do Estado de São Paulo e do DENATRAN - Departamento Nacional de Trânsito.

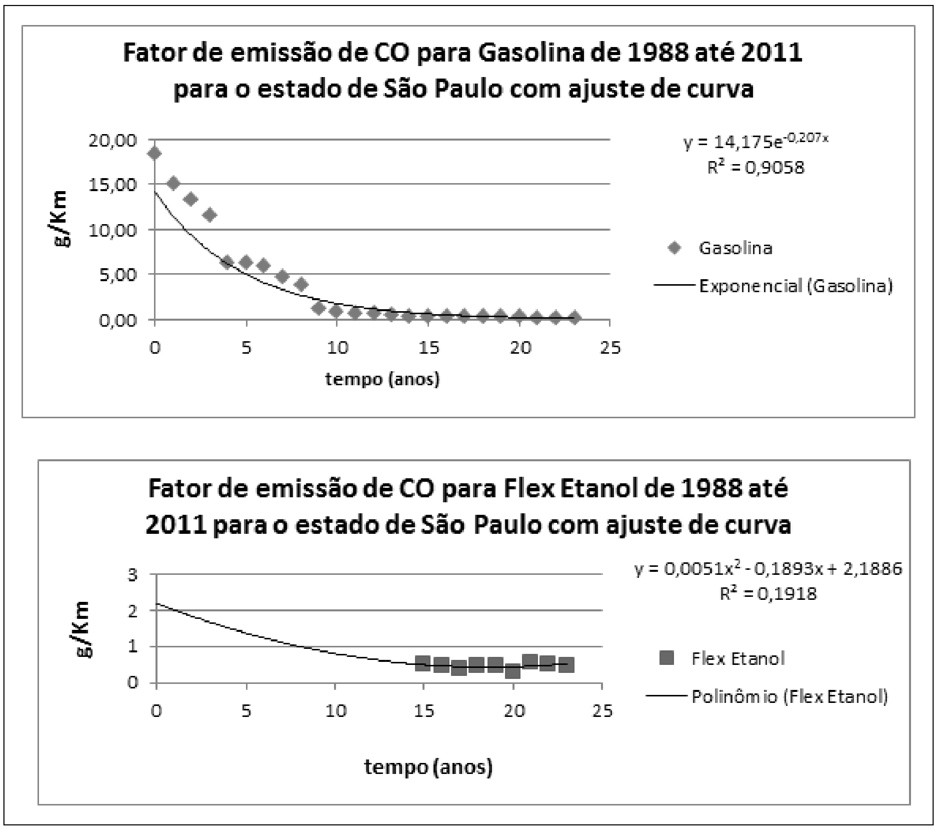
Modelo Obtido

Os dados tabelados, anexados no relatório, foram selecionados e representados por gráficos de dispersão, indicando as curvas de tendência dos compostos: HC (hidrocarboneto), NOX (óxidos de nitrogênio), CO2 (dióxido de carbono), CO (monóxido de carbono), RCHO (aldeídos), comparando as emissões de veículos à gasolina e flex etanol.

A partir dos gráficos foi possível concluir que para todos os combustíveis as emissões diminuíram ao longo dos anos até 2011, o que se deve, segundo o relatório, ao fato de os fabricantes de veículos estarem cada vez mais se adaptando às leis ambientais para diminuição da poluição atmosférica e a pesquisa e uso de novas tecnologias.

Os modelos matemáticos obtidos correspondem ao composto CO, para os dois tipos de combustíveis. Pela observação das curvas de tendência consideraram que para a gasolina a curva exponencial era a mais adequada para demonstrar a distribuição dos pontos, enquanto para o flex etanol a curva polinomial seria a melhor opção. Não houve menção a hipóteses que justificassem de outra forma as escolhas. Assim, a Figura C.19 representa os ajustes obtidos por meio do método dos mínimos quadrados representados por meio de uma planilha eletrônica, justamente com os dados tabelados.

Figura C.19: Ajuste exponencial da emissão de CO para veículos a gasolina e ajuste polinomial da emissão de CO para veículos flex etanol



Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Abordagem usada na Resolução

A obtenção dos modelos se deu a partir do método dos dos mínimos quadrados, cuja necessidade do uso foi justificada no relatório e sua descrição para o caso discreto foi apresentada.

Embora a descrição do método tenha sido inserida no relatório, houve indícios de que apenas utilizaram a ferramenta de ajuste de curva disponível no *software* Excel (de acordo com a planilha encaminhada em anexo ao relatório), pois alegaram que: este estudo foi realizado neste programa, o Excel, com auxílio do método dos mínimos quadrados.

Interpretação e Validação dos Resultados

Os modelos representados na Figura C.19 permitiram uma projeção do fator de emissão do CO a ser liberada por veículos a gasolina e flex etanol para os próximos anos, de 2012 até 2020. A Figura C.20 mostra a tabela elaborada para indicar a referida estimativa de emissão de CO.

Figura C.20: Projeção para emissão de CO no período de 2012-2020,de acordo com os modelos obtidos

anos	t	Gasolina	Flex Etanol	$y= 14,175e^{-0,207x}$	$y = 0,0051x^2 - 0,1893x + 2,1886$
1988	0	18,50		14,18	2,19
1989	1	15,20		11,52	2,00
1990	2	13,30		9,37	1,83
1991	3	11,50		7,62	1,67
1992	4	6,20		6,19	1,51
1993	5	6,30		5,04	1,37
1994	6	6,00		4,09	1,24
1995	7	4,70		3,33	1,11
1996	8	3,80		2,71	1,00
1997	9	1,20		2,20	0,90
1998	10	0,79		1,79	0,81
1999	11	0,74		1,45	0,72
2000	12	0,73		1,18	0,65
2001	13	0,48		0,96	0,59
2002	14	0,43		0,78	0,54
2003	15	0,40	0,51	0,64	0,50
2004	16	0,35	0,46	0,52	0,47
2005	17	0,34	0,39	0,42	0,44
2006	18	0,33	0,47	0,34	0,43
2007	19	0,33	0,47	0,28	0,43
2008	20	0,37	0,3	0,23	0,44
2009	21	0,30	0,56	0,18	0,46
2010	22	0,23	0,51	0,15	0,49
2011	23	0,26	0,49	0,12	0,53
2012	24			0,10	0,58
2013	25			0,08	0,64
2014	26			0,07	0,71
2015	27			0,05	0,80
2016	28			0,04	0,89
2017	29			0,04	0,99
2018	30			0,03	1,10
2019	31			0,02	1,22
2020	32			0,02	1,35

Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Segundo o relatório, a tabela é representativa das quantidades de óxido de carbono (CO), proveniente da queima da gasolina e do flex etanol, estimada para os anos de 2012 a 2020, de onde se infere que haverá um decréscimo da emissão do poluente CO proveniente da gasolina e acréscimo de CO proveniente do flex etanol, conforme os anos.

Considerações Finais do Grupo

Com a análise da FiguraC.20, pode?se estimar que até o ano de 2020 o fator e emissão de CO pelo uso de gasolina terá uma tendência de decrescimento, podendo indicar a diminuição do consumo desse combustível, e o crescimento do uso do combustível flex etanol, que confere com os resultados da tabela, aumentando seu fator, consequentemente elevando o fator de emissão de CO para o mesmo.

C.5.11 Grupo 13: Análise do Arrasto em Tubo de Água

Grupo composto pelos alunos C3(A13), C3(B13) e C3(C13), do curso de Engenharia de Materiais.

Situação Inicial

Alegando que a força de arrasto é de extrema importância na área de engenharia, principalmente para o estudo da mecânica dos fluidos o grupo justifica o interesse pela temática. Segundo o relatório, devido a relevância do conceito na área de engenharia, houve interesse em estudar os conceitos físicos envolvidos nessa força. Com esse estudo, desejavam entender o comportamento de um corpo em um fluido viscoso.

Exemplificaram a força de arrasto no movimento de uma gota de chuva, que durante a queda sua velocidade aumenta até atingir um valor máximo, denominada velocidade terminal. Isso ocorre devido à força de arrasto, que se não fosse considerada, a velocidade de queda da gota iria aumentar indefinidamente, distanciando o modelo observado em relação ao comportamento real.

Definição do Problema

O objetivo do estudo consiste em encontrar um modelo matemático para um corpo em queda livre dentro de um tubo de água, que seja fiel ao comportamento descrido pelo modelo experimental.

Fonte dos Dados

Os dados são provenientes de um experimento realizado para compreender o arrasto. O relatório descreveu o experimento da seguinte forma: utilizando-se uma proveta de 500 mL cheia de água e uma bolinha de vidro de densidade 2504.96, áspera com massa de 18,82 gramas e raio 2,33 mm. A bolinha de vidro foi solta a partir do repouso no topo da proveta e o seu descolamento foi filmado para um estudo posterior no programa Tracker.

Neste trabalho, os dados relevantes são as posições da partícula em cada instante, estes dados foram coletados por meio do *software* Tracker. O software permite que várias posições sejam marcadas em curtos espaços de tempo como mostrado na Figura C.21.

Pesquisas bibliográficas foram auxiliares na condução do estudo, por exemplo, para a determinação do coeficiente de arrasto para a esfera usada no experimento.

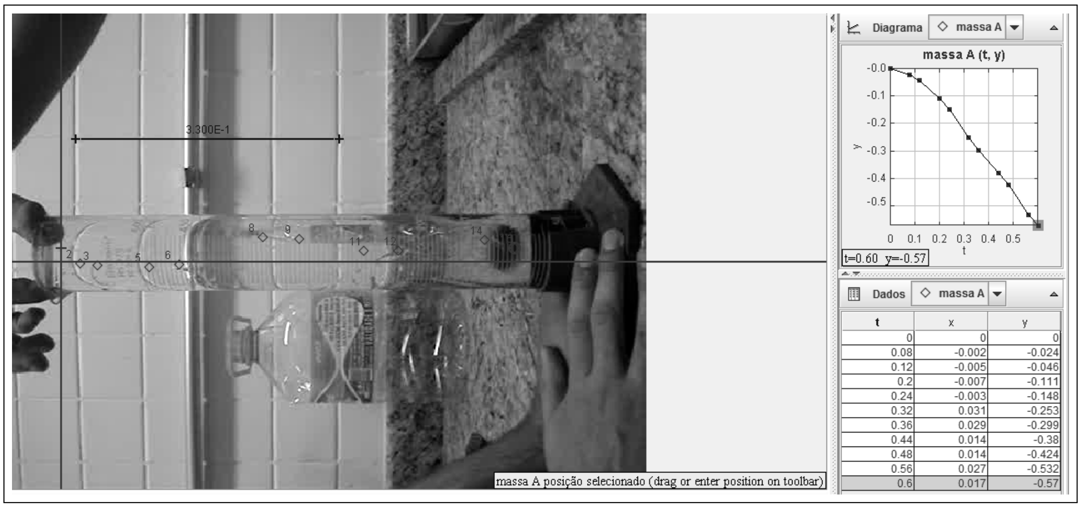
Modelo Obtido

Observando-se a filmagem do experimento, concluiu-se que era necessário desconsiderar o deslocamento horizontal da bolinha de vidro durante sua queda. Além disso, o coeficiente de arrasto utilizado pelo grupo foi escolhido após uma consulta em diversas bibliografias, encontrando, assim, um valor adequado ao experimento.

O comportamento teórico dos dados indica uma função exponencial do espaço em função do tempo. Porém, por motivos de simplificação e explorando conceitos estudados na disciplina de cálculo numérico, foi utilizada uma regressão de terceiro grau para a modelagem dos dados.

A força de arrasto é uma força gerada pela resistência que um fluido fornece ao corpo quando este se encontra em movimento. O arrasto aplicado a um corpo sempre é oposto à velocidade do

Figura C.21: Obtenção de dados por meio do *software* de videoanálise Tracker



Fonte: Relatório entregue pelo grupo

mesmo. A força de arrasto depende do vários fatores, tais como rugosidade da superfície, viscosidade do fluido, velocidade do corpo, entre outros.

As variáveis e parâmetros usados na obtenção dos modelos fora assim definidos: k: constante de proporcionalidade; g: aceleração gravitacional; c: coeficiente de arrasto; ρ_c: densidade do corpo; ρ_m: densidade do meio; v_t: velocidade terminal; $F_a = kv$: força de arrasto; V: volume do meio; A: área do objeto; P: força peso; v: velocidade; a: aceleração; E: empuxo; m: massa; t: tempo; $y_1(t)$: posição em função do tempo, desconsiderando arrasto; $y_2(t)$: posição em função do tempo (experimental).

Assim, os modelos obtidos foram:

Modelo teórico, em que é considerando o arrasto

$$y(t) = v_t \left(t + \frac{me^{-\frac{kt}{m}}}{k} \right) \frac{v_t m}{k}$$

Modelo teórico, em que é desconsiderando o arrasto

$$y_1(t) = \frac{gt^2}{2} \left(\frac{\rho_m V}{m} - 1 \right)$$

Modelo experimental

$$y_2(t) = 0,00101 - 0,10068t - 1,79228t^2 + 1,19972t^3$$

Segundo o relatório, é interessante pensar em um modelo que desconsidere o arrasto, para que quando comparados os modelos, possa-se mensurar quão significativo é o arrasto.

Abordagem usada na Resolução

Para a apresentação do que chamaram de modelo teórico, os outros conceito físico, mencionado como variáveis ou parâmetros, foram definidos e sua equação matemática foi indicada. A Figura C.22 reúne as equações dispostas no relatório, referentes ao modelo teórico.

Para a obtenção do modelo e experimental entenderam que o método dos mínimos

Figura C.22: Equações mencionadas na apresentação do modelo teórico

$$F_a = kv$$

Força de arrasto em queda livre.

$$k = \frac{c.\rho_c.A}{2}$$

Constante de proporcionalidade.

$$F_a + E - P = ma$$

Dinâmica da aceleração da partícula.

$$v_t = \frac{g(m - \rho_m V)}{k}$$

Velocidade terminal.

$$-\frac{k}{m}dt = \frac{dv}{-v + v_t}$$

equação diferencial da velocidade.

$$v_{(t)} = v_t\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

velocidade em função do tempo.

$$y_{(t)} = v_t\left(t + \frac{me^{-\frac{kt}{m}}}{k}\right) + \frac{v_t m}{k}$$

deslocamento em função do tempo.

$$a_{(t)} = \frac{v_t k e^{-\frac{kt}{m}}}{m}$$

aceleração em função do tempo.

$$y_1 = \frac{gt^2}{2}\left(\frac{\rho_m V}{m} - 1\right)$$

Posição em função do tempo, desconsiderando arrasto.

Fonte: Relatório entregue pelo grupo

quadrados seria adequado. Definiram-no como uma otimização matemática que visa encontrar o melhor ajustamento de uma função para certo conjunto de dados. Segundo o relatório do grupo, a técnica consiste em minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados. Assim, o objetivo deste processo é aproximar uma função f por outra função g, escolhida de uma família de funções. Esse processo ocorre em duas situações distintas, por domínio discreto e por domínio contínuo. Nosso experimento se encaixa no primeiro caso, utilização de domínio discreto, já que possuímos uma tabela de pontos.

O método dos mínimos quadrados foi descrito no relatório e em seguida aplicado aos dados, com o auxílio do *software* Origin.

Interpretação e Validação dos Resultados

Para análise dos modelos, as três curvas de posição em função do tempo foram plotadas, como observado na Figura C.23.

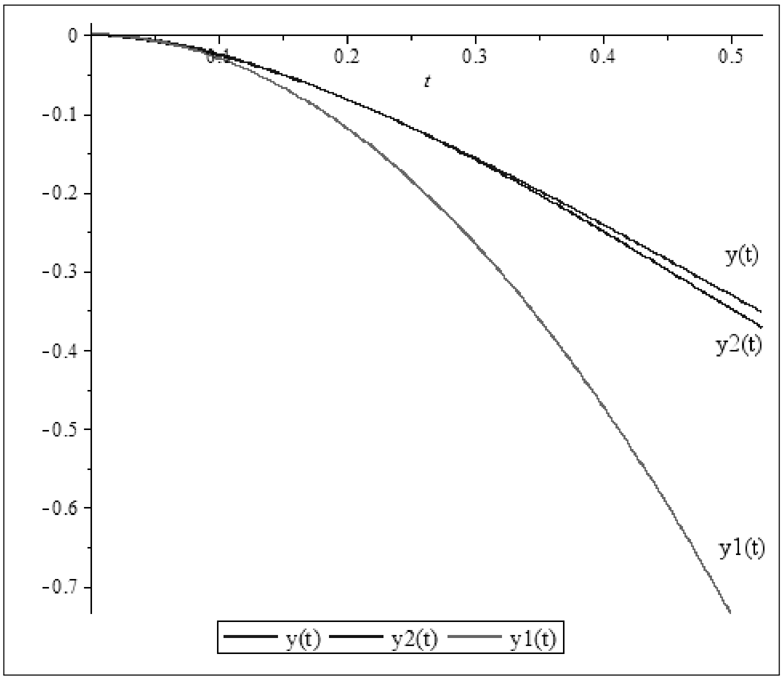
A configuração da curva $y_2(t)$, gerada pelo modelo experimental, apresenta o comportamento esperado em teoria. Primeiramente a curva apresenta certa concavidade devido ao comportamento acelerado, com a constante diminuição desta a concavidade. Com isso, a curva tende a um comportamento linear, ou seja, a velocidade do corpo passa a ser constante, a aceleração do sistema é igual à zero.

Pode-se observar, claramente, que o modelo teórico ($y(t)$) se aproxima consideravelmente do modelo experimental ($y_2(t)$), dessa forma, podemos afirmar que o modelo teórico desenvolvido traduz muito bem o comportamento de queda livre do corpo em meio viscoso.

A diferença entre as curvas $y(t)$ e $y_1(t)$ pode ser associada à simplicidade do modelo criado, ou seja, esses erros podem ser associados às desconsiderações feitas a principio, como exemplo, pode-se citar o fato de apenas um tipo de arrasto estar sendo considerado.

O modelo $y_2(t)$ evidencia o quão significativo é o arrasto de pressão no deslocamento do corpo no seio de um fluido. Nota-se que na ausência do arrasto o corpo apresenta posições bem diferentes das posições reais vistas no modelo experimental, dessa forma, a desconsideração desse

Figura C.23: Gráfico comparativo dos três modelos obtidos visando a avaliação do arrasto em tudo de água



Fonte: Relatório entregue pelo grupo

agente, pode acarretar graves erros em uma possível aplicação. Visto que o modelo teórico da posição do corpo adotado apresenta resultados condizentes com o experimento, pode afirmar que os modelos para a aceleração e velocidade da equação modelada também são válidos.

Considerações Finais do Grupo

O propósito deste trabalho sobre arrasto em tubo de água foi o de apresentar a importância para os alunos de graduação desta variável que quase sempre é desprezada em análises e exercícios na área de Física.

Com a ajuda de ferramentas computacionais como Excel, Origin, Maple e Tracker conseguimos comparar o modelo experimental e o modelo matemático, e também a diferença entre a situação física com e sem a força do arrasto.

Para a realização dos cálculos foi necessário escolhermos um coeficiente de arrasto, já que não possuíamos equipamentos para realizar essa medição, essa escolha foi feita por meio comparativo entre materiais e formas assim como sua superfície.

O trabalho teve um resultado muito satisfatório já que o modelo experimental se assemelhou muito com o modelo matemático, mostrando que os erros experimentais como, erros de medição, imprecisão equipamentos, erros de análise, etc. foram pequenos. Mostrando também que as aproximações de constantes foram precisas.

C.5.12 Grupo 14: Estimativa e projeção do consumo de água por alunos de graduação em Engenharia no Câmpus Londrina da UTFPR

Grupo composto pela aluna C3(A14) e pelos alunos C3(B14) e C3(C14), do curso de Engenharia Ambiental.

Situação Inicial

A motivação para o estudo decorre da problemática relacionada a disponibilidade de recursos hídricos. O estudo desenvolvido se voltou ao consumo de água no Câmpus universitário onde estudam, com o intuito de fazer a projeção parcial do consumo de água considerando o ingresso semestral de novos alunos. Com isso esperavam gerar informações que permitissem a gerencia do uso da água, bem como consciência da demanda futura para a água.

Definição do Problema

Relacionar o consumo de água em relação ao número de alunos dos cursos de engenharia ambiental e engenharia de materiais ao longo do tempo.

Fonte dos Dados

Dados relativos ao consumo mensal dos anos de 2010, 2011 e 2012 foram fornecidos pela Diretoria de Planejamento e Administração e dados do número de alunos ingressantes nos referidos cursos, no mesmo período, foram obtidos com a Diretoria de Graduação e Educação Profissional do Câmpus. Informações relativas ao consumo *per capita* de água foram obtidas da literatura, por meio da *Internet*.

Modelo Obtido

Neste trabalho o grupo considerou, para a estimativa do aumento do consumo de água no campus universitário, apenas o incremento de alunos de graduação nos cursos de engenharia ambiental e engenharia de materiais, desconsiderando a influência de outras variáveis como: picos de consumo de água que podem ocorrer sistematicamente com a limpeza das cisternas, férias coletivas, greves e construção ou reformas no Câmpus, entre outras.

Foram consideradas como variáveis de estudo, o número total de alunos de graduação nos cursos de engenharia mencionados (At_n ou y), o consumo médio semestral de água em metros cúbicos (Cm), número de dias letivos (Dl) e tempo, em semestres (x). A Figura C.24 ilustra os modelos obtidos para o método de Newton.

Abordagem usada na Resolução

Foram usados os métodos de interpolação de Newton, Lagrange e Newton-Gregory, embora as discussões realizadas pelo grupo se basearam no modelo obtido pelo método de Newton, comparativamente ao modelo linear obtido pelo Excel, conforme Figura C.24. Segundo o grupo, os algoritmos foram feitos parte nas aulas de cálculo numérico parte durante a realização do trabalho.

Interpretação e Validação dos Resultados

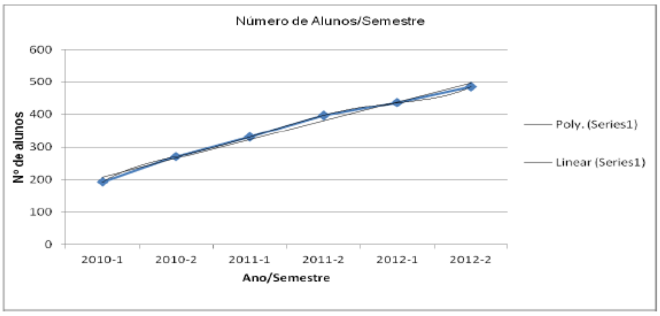
Segundo relatório do grupo, embora a equação de grau 5 seja a que melhor representa o conjunto de pontos ela não é a melhor opção para se fazer projeções a longo prazo, apontando o gráfico em que as duas equações são plotadas no mesmo sistema.

Como base para o cálculo do consumo de água semestral no campus da faculdade, foi usada a equação $Cm = 20.Dl.At_n$, que relaciona o número de alunos, a quantidade de litros consumida e os dias letivos de um semestre. Uma tabela foi elaborada para representar o consumo.

Figura C.24: Representação de modelos obtidos pelo Grupo 14

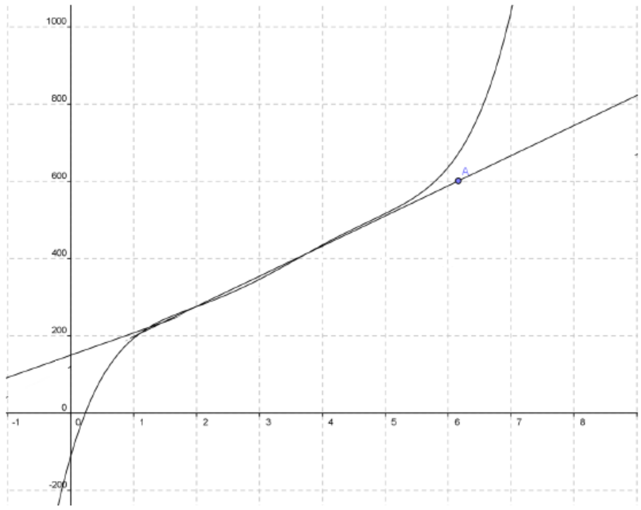
$$Cm = (20DlAt_n)10^{-3}$$

```
> newton:= proc(xt,yt,n)
local A, i, j,  produto;
global p;
A:=Matrix(n,n);
Digits:= 3;
for i from 1 to n do
A[i,1]:=yt[i];
end do;
for j from 2 to n do
for i from 1 to (n+1-j) do
A[i,j]:=(A[i+1,j-1]-A[i,j-1])/(xt[j+i-1]-xt[i]);
 end do;
end do;
p:=0;
produto:= 1;
for j from 1 to n do
p:= p+ (produto * A[1,j]);
produto:= produto * (x-xt[j]);
end do;
print(evalf(simplify(p)));
end:
> xt:=Vector([1,2,3,4,5,6]):
> yt:=Vector([193,271,331,397,436,485]):
> newton(xt,yt,6);
```



$$y = 78x + 115$$

$$y = 1{,}06x^5 - 18{,}2x^4 + 118x^3 - 354x^2 + 558x - 111$$



Fonte: Relatório entregue pelo grupo

Considerações Finais do Grupo

Através dos cálculos e métodos utilizados, entre eles Newton, Lagrange e Newton-Gregory, e também o Excel, pôde-se observar que o polinômio gerado pelo método de Newton é representativo em determinado intervalo, porém para analisar projeções futuras o método é falho, pelo fato da função representar um gráfico não-linear e possíveis ocorrências de pontos de máximo e mínimo. Dessa forma, pode-se concluir que para o nosso caso, a melhor forma de estimar tanto o aumento no número de alunos quanto o aumento no consumo seria uma equação linear, pois é a mais adequada para a representação da tendência ao longo do tempo. Com isso foi possível também observarmos que o consumo de água no Câmpus tende a ser crescente, pois a cada semestre há o ingresso de novos alunos, e tendo em vista também que mesmo com a desistência de alunos, a quantidade de ingressantes é maior que a de desistentes. Então com estes conhecimentos e com base no estudo, sabemos que o consumo de água tende sempre a aumentar a cada novo período letivo. Mas este problema pode ser, se não contornado, amenizado com instalação de maiores cisternas, aparelhos sanitários que possuem um menor consumo de água e conscientização por parte dos alunos.

D APÊNDICE: ALGUNS DOCUMENTOS PRODUZIDOS A PARTIR DO *SOFTWARE* ATLAS.TI®

Figura D.1: Interface do ATLAS.ti 7.0

Fonte: Captura de tela do ATLAS.ti 7.0

Figura D.2: Parte da codificação inicial realizada com o *Software* ATLAS.ti®7.0.

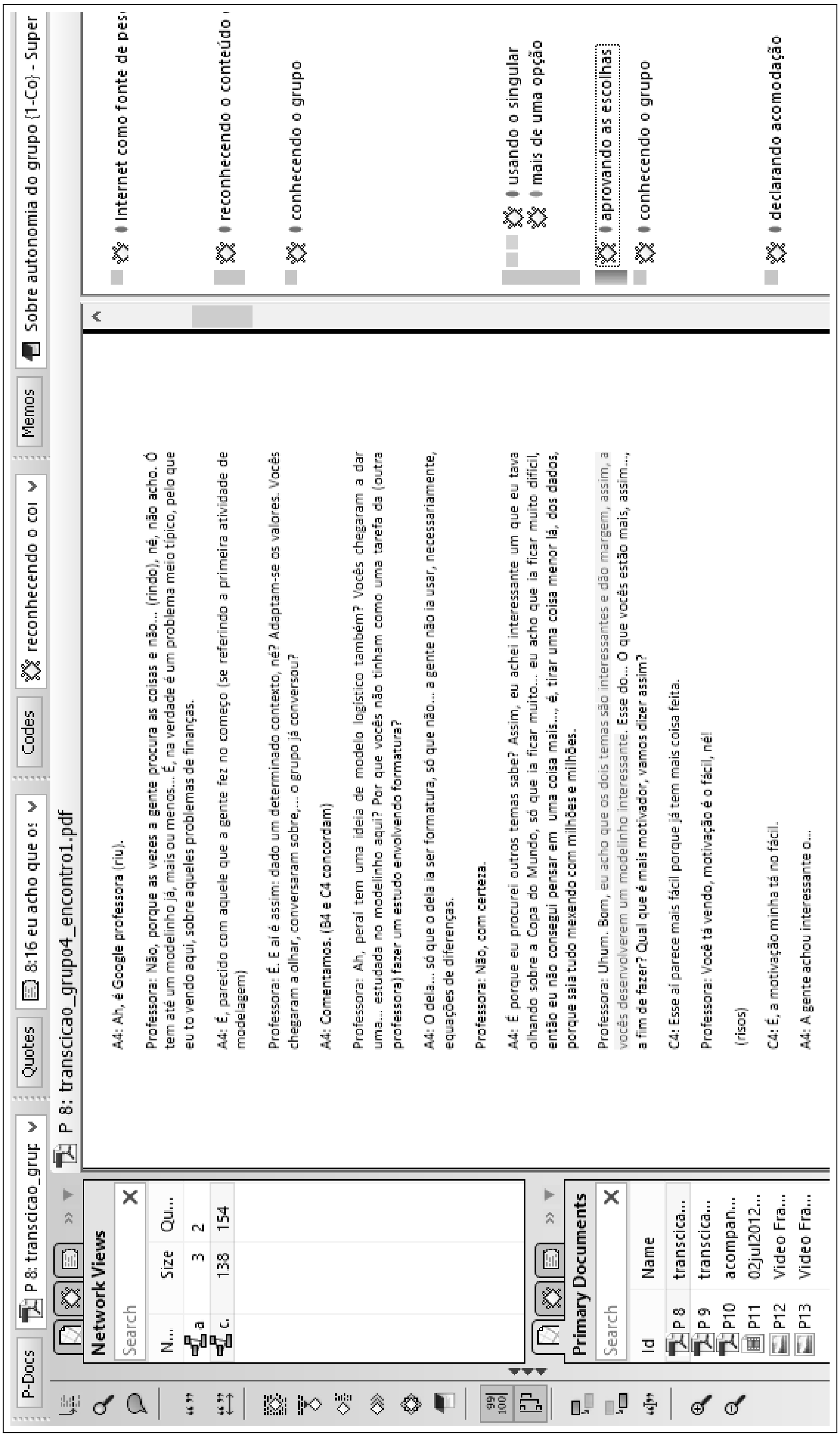
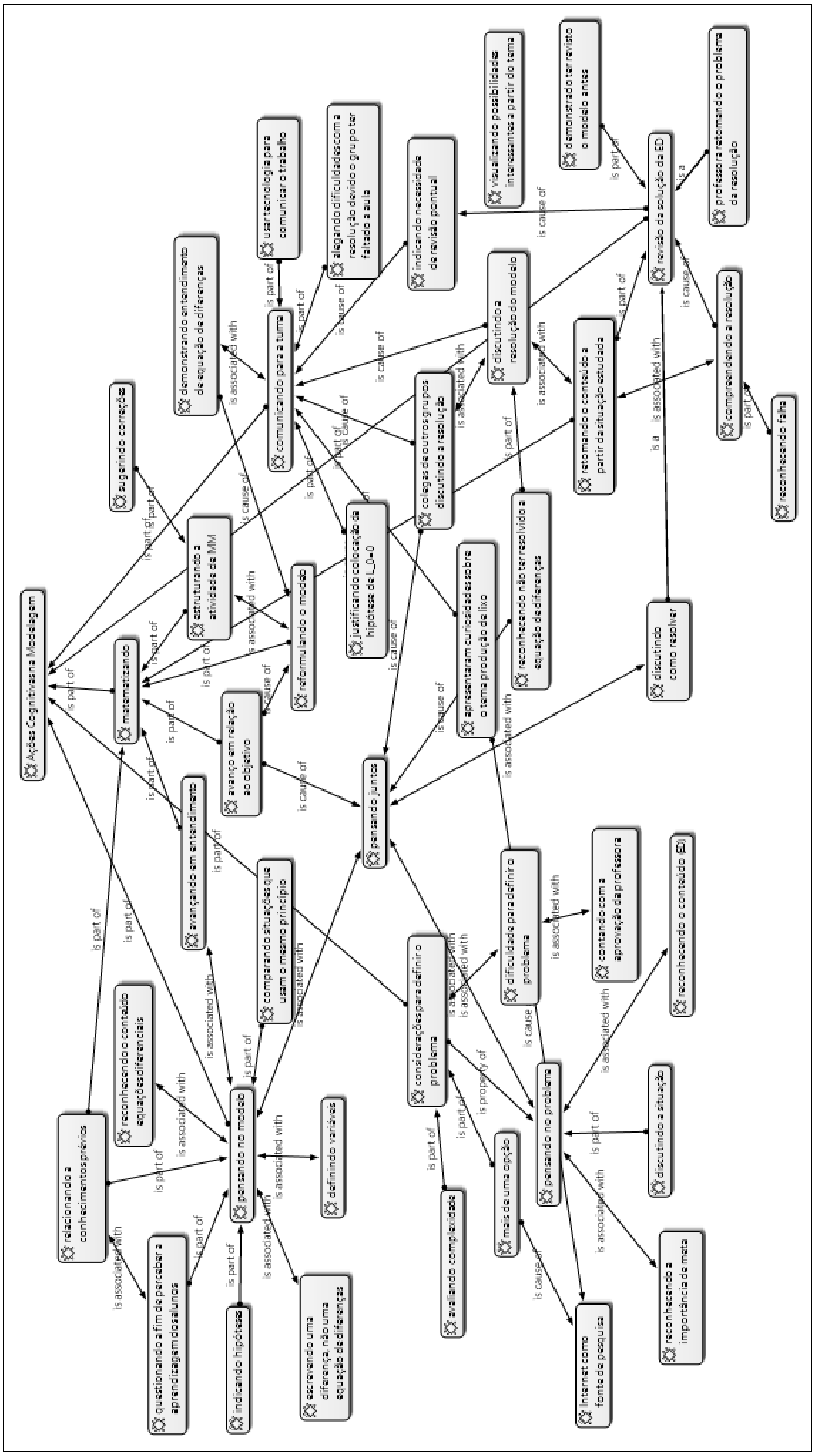


Figura D.3: Categoria emergente dos dados – Ações Cognitivas na Atividade de Modelagem



Fonte: *Software* ATLAS.ti®7.0.

Figura D.4: Ação cognitiva *compreensão da situação* com citações relacionadas, geradas pelo *Software* ATLAS.ti®7.0.

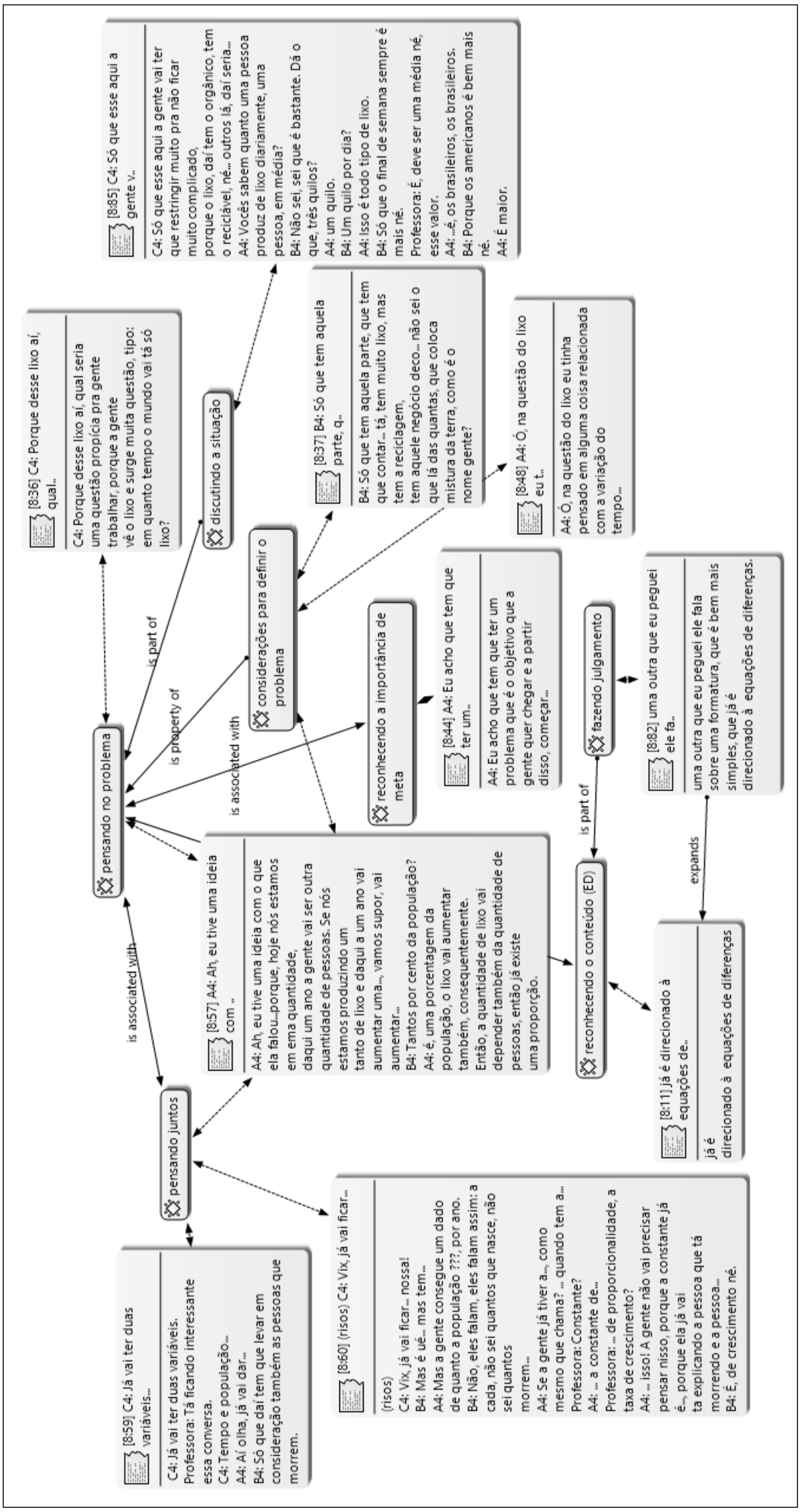


Figura D.5: Categoria emergente dos dados - Relações *com* e *uso* da Tecnologia, gerada pelo *Software* ATLAS.ti®7.0.

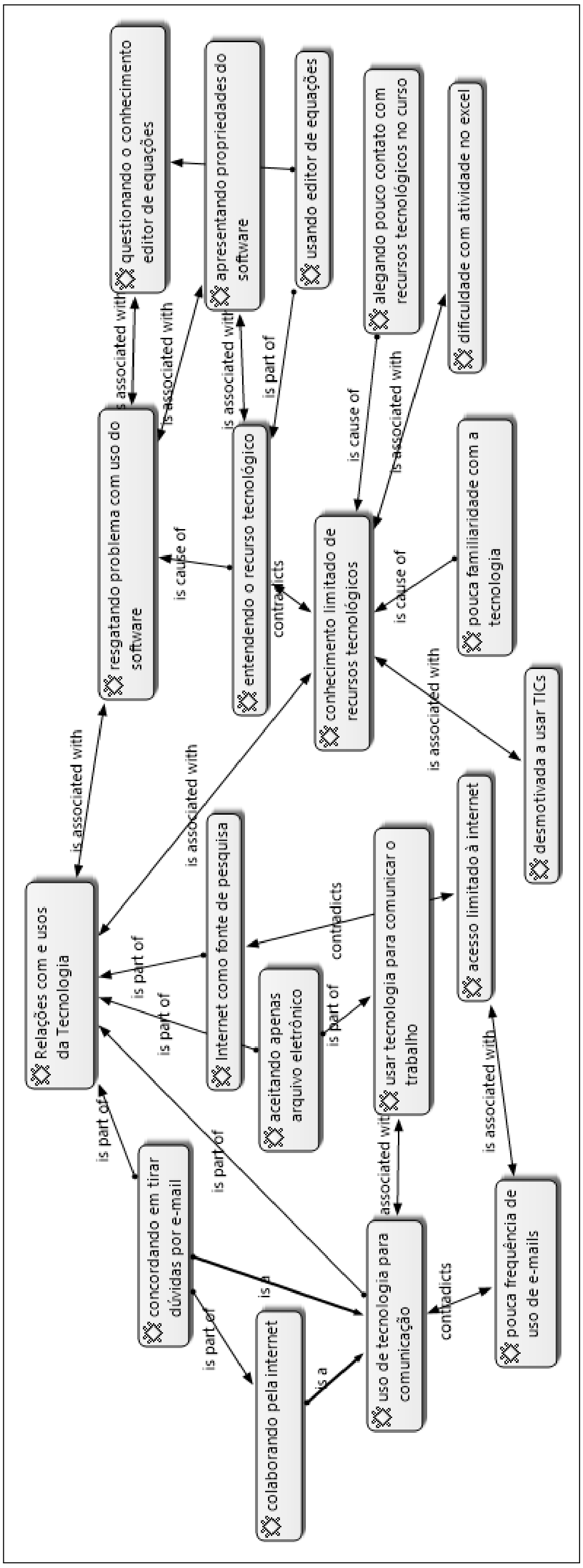


Figura D.6: Representação das relações na codificação e emergência da categoria *Trabalho em Grupo*, gerada pelo *Software* ATLAS.ti®7.0.