



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

GISLEINE CORREA BEZERRA

**REGISTROS ESCRITOS DE ALUNOS EM QUESTÕES NÃO-  
ROTINEIRAS DA ÁREA DE CONTEÚDO QUANTIDADE:  
UM ESTUDO**

GISLEINE CORREA BEZERRA

**REGISTROS ESCRITOS DE ALUNOS EM QUESTÕES NÃO-  
ROTINEIRAS DA ÁREA DE CONTEÚDO QUANTIDADE:  
UM ESTUDO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof. Dr. Regina Luzia Corio de Buriasco.

Londrina  
2010

Catálogo Elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina.

### **Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

B574r Bezerra, Gisleine Correa.

Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade: um estudo / Gisleine Correa Bezerra. - Londrina, 2010. 185 f.: il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 3. Aritmética - Estudo e ensino - Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

GISLEINE CORREA BEZERRA

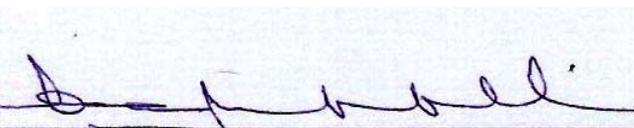
**REGISTROS ESCRITOS DE ALUNOS EM QUESTÕES NÃO  
ROTINEIRAS DA ÁREA DE CONTEÚDO QUANTIDADE:  
UM ESTUDO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

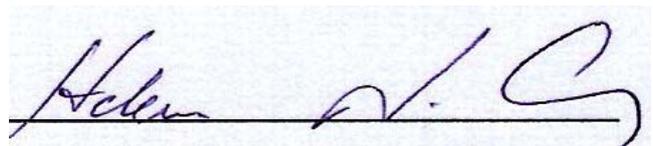
**BANCA EXAMINADORA**



Profa. Dra. Regina Luiza Corio de Buriasco  
UEL – Londrina – PR



Profa. Dra. Elsa Maria Pessoa Mendes Pullin  
UEL – Londrina – PR



Profa. Dra. Helena Noronha Cury  
UNIFRA – Santa Maria – RS

Londrina, 22 de fevereiro de 2010.

Com enorme carinho, dedico este trabalho aos meus pais, Delcio e Rosana, os quais, com muita luta, esforço e dedicação, fizeram o possível para tornar meu sonho real.

## AGRADECIMENTOS

Sinto-me muito feliz por ter conseguido alcançar mais esta etapa, porém nada seria e nada conseguiria sem o apoio e o carinho das pessoas que me ajudaram nessa caminhada.

Gostaria, então, de agradecer:

Aos meus pais, os quais me ensinaram a viver com dignidade e que, com afeto e dedicação, iluminaram o meu caminhar. Eles doaram-se inteiros e deixaram de realizar seus sonhos, para que, muitas vezes, eu pudesse realizar os meus;

À minha orientadora, professora Regina Luzia Corio de Buriasco, por ter acreditado em mim, pelo que aprendi nas discussões e orientações, pela paciência, compreensão e por suas palavras de estímulo essenciais para a realização deste trabalho. A você, meu carinho, admiração e agradecimento;

Às professoras Helena Noronha Cury e Elsa Maria Pessoa Mendes Pullin pelas valiosas contribuições dadas a este trabalho;

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, pela sua contribuição;

Ao Vagner, por sua compreensão, seu carinho e por suas palavras de estímulo;

Ao Cal, pela amizade e pelos conselhos sempre oportunos nos momentos em que deles necessitei;

Aos participantes do GEPEMA, pelas discussões, sugestões e críticas que foram essenciais para a realização deste trabalho;

À CAPES, pelo apoio financeiro;

A todos que, de alguma, forma contribuíram para a realização deste trabalho.

*Um meio ou uma desculpa ...*

Não conheço ninguém que conseguiu realizar seu sonho, sem sacrificar feriados e domingos pelo menos uma centena de vezes.

Da mesma forma, se você quiser construir uma relação amigável com seus filhos, terá que se dedicar a isso, superar o cansaço, arrumar tempo para ficar com eles, deixar de lado o orgulho e o comodismo.

Se quiser um casamento gratificante, terá que investir tempo, energia e sentimentos nesse objetivo.

O sucesso é construído à noite!

Durante o dia você faz o que todos fazem.

Mas, para obter um resultado diferente da maioria, você tem que ser especial.

Se fizer igual a todo mundo, obterá os mesmos resultados.

Não se compare à maioria, pois infelizmente ela não é modelo de sucesso.

Se você quiser atingir uma meta especial, terá que estudar no horário em que os outros estão tomando chope com batatas fritas.

Terá de planejar, enquanto os outros permanecem à frente da televisão.

Terá de trabalhar enquanto os outros tomam sol à beira da piscina.

A realização de um sonho depende de dedicação.

Há muita gente que espera que o sonho se realize por magia.

Mas toda magia é ilusão e a ilusão não tira ninguém de onde está.

Em verdade, a ilusão é combustível dos perdedores, pois...

*“Quem quer fazer alguma coisa, encontra um meio.”*

*“Quem não quer fazer nada, encontra uma desculpa.”*

*Roberto Shinyashiki*

BEZERRA, Gisleine Correa. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade**: um estudo. 2010. 185 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar os registros escritos contidos nas provas de uma amostra de alunos paranaenses em seis (6) questões discursivas de matemática, consideradas não-rotineiras, classificadas como as que envolvem aspectos da área de conteúdo Quantidade, a fim de compreender o modo como os alunos lidam com essas questões em situação de avaliação. Este estudo é, para tanto, predominantemente qualitativo, realizado sob a luz da avaliação como prática de investigação e das orientações da Análise de Conteúdo. Mediante a análise das estratégias, dos procedimentos utilizados e da forma como os estudantes lidaram com as técnicas operatórias das operações aritméticas, buscou-se identificar indícios do pensamento aritmético e aspectos da matematização horizontal presentes nos seus registros escritos. De modo geral, foi possível identificar que os alunos, exceto em alguns casos, embora tenham interpretado incorretamente o enunciado e elaborado uma estratégia que não resolvia a questão, desenvolveram corretamente os procedimentos aritméticos necessários para resolvê-la, o que nos permitiu inferir que os alunos mostram dominar as técnicas operatórias de cada operação. Também foi possível identificar algumas características do pensamento aritmético e indícios do processo de matematização horizontal realizado pelos alunos.

**Palavras-Chave:** Educação matemática. Avaliação como prática de investigação. Análise da produção escrita. Pensamento aritmético. Matematização.

BEZERRA, Gisleine Correa. **Written registers of students in non-routine questions of the content area quantity**: a study. 2010. 185 f. Dissertation (Master's Degree in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2010.

### **ABSTRACT**

This study analyzes the written registers contained in the assessments of a sample of students from Parana in six (6) essay questions in mathematics, considered non-routine, classified as those involving aspects of the content area Quantity in order to understand how students deal with these issues in assessment situation. This study is predominantly qualitative, realized in the light of the assessment as investigation practice and the guidelines for Content Analysis. By examining the strategies, procedures used and how they dealt with the operator techniques of arithmetic operations, we tried to identify evidences of arithmetical thought and aspects of horizontal mathematization present in the written registers of students. In general, it was possible to identify that the students, except in some cases, although they have incorrectly interpreted the statement and elaborated a strategy that did not solve the question, they have correctly developed arithmetic procedures needed to solve it. This allowed us to infer that the students are skilled at operating techniques of each operation. It was also possible to identify some characteristics of arithmetical thought and evidences of the process of horizontal mathematization achieved by students.

**Key words:** Mathematics education. Assessment as investigation practice. Analysis of written productions. Arithmetical thought. Mathematization.

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> – Distribuição dos itens de Matemática da avaliação do PISA 2006, de acordo com as dimensões da estrutura do PISA.....	52
<b>Tabela 2</b> – Distribuição da quantidade de alunos paranaenses por item .....	60
<b>Tabela 3</b> – Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no <i>Item 1</i> .....	67
<b>Tabela 4</b> – Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no <i>Item 2</i> .....	70
<b>Tabela 5</b> – Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no <i>Item 3</i> .....	75
<b>Tabela 6</b> – Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no <i>Item 4</i> .....	78
<b>Tabela 7</b> – Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no <i>Item 5</i> .....	83
<b>Tabela 8</b> – Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no <i>Item 6</i> .....	89
<b>Tabela 9</b> – Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no <i>Item 7</i> .....	85
<b>Tabela 10</b> –Leitura dos dados obtidos a partir das leituras realizadas .....	171

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> – Classificação dos tipos de problemas. ....	35
<b>Quadro 2</b> – Classificação dos tipos de problema segundo Thomas Butts. ....	35
<b>Quadro 3</b> – Significados atribuídos à Aritmética. ....	41
<b>Quadro 4</b> – Indicadores das tarefas matemáticas em cada agrupamento de competências. ....	51
<b>Quadro 5</b> – Pontos obtidos pelo Brasil na aferição do PISA dos anos 2000, 2003 e 2006 nas três áreas avaliadas. ....	53
<b>Quadro 6</b> – Distribuição das médias das regiões brasileiras obtidas na avaliação do PISA/2006. ....	54
<b>Quadro 7</b> – Distribuição das médias da Região Sul obtidas na avaliação do PISA/2006. ....	55
<b>Quadro 8</b> – Quantidade de alunos das regiões brasileiras que participaram da aferição do PISA 2006, de acordo com a série em que estavam matriculados ....	55
<b>Quadro 9</b> – Distribuição quantitativa de alunos do Estado do Paraná presentes na aferição do PISA 2006. ....	56
<b>Quadro 10</b> – Distribuição dos itens discursivos nas questões de Matemática com conteúdo Quantidade ....	60
<b>Quadro 11</b> – Modelo utilizado para a validação das descrições das questões. ....	63
<b>Quadro 12</b> – Caracterização geral do <i>Item 1</i> ....	66
<b>Quadro 13</b> – Grupos construídos de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no <i>Item 1</i> ....	68
<b>Quadro 14</b> – Caracterização geral do <i>Item 2</i> ....	69
<b>Quadro 15</b> – Grupos por estratégia elaborada e por procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no <i>Item 2</i> . ....	72
<b>Quadro 16</b> – Caracterização geral do <i>Item 3</i> ....	73
<b>Quadro 17</b> – Grupos construídos de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos para resolver o <i>Item 3</i> . ....	76
<b>Quadro 18</b> – Caracterização geral do <i>Item 4</i> ....	77

<b>Quadro 19</b> – Grupos por estratégia elaborada e por procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no <i>Item 4</i> .....	80
<b>Quadro 20</b> – Caracterização geral do <i>Item 5</i> .....	81
<b>Quadro 21</b> – Grupos por estratégia elaborada e por procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no <i>Item 5</i> .....	84
<b>Quadro 22</b> – Caracterização geral do <i>Item 6</i> .....	87
<b>Quadro 23</b> – Grupos por estratégia elaborada e por procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no <i>Item 6</i> .....	91
<b>Quadro 24</b> – Caracterização geral do <i>Item 7</i> .....	93
<b>Quadro 25</b> – Grupos por estratégia elaborada e por procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no <i>Item 7</i> .....	96
<b>Quadro 26</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	97
<b>Quadro 27</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	99
<b>Quadro 28</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	99
<b>Quadro 29</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	102
<b>Quadro 30</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	104
<b>Quadro 31</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	107
<b>Quadro 32</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	114
<b>Quadro 33</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	115
<b>Quadro 34</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	117
<b>Quadro 35</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	119
<b>Quadro 36</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	120

<b>Quadro 37</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	126
<b>Quadro 38</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	127
<b>Quadro 39</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	129
<b>Quadro 40</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	132
<b>Quadro 41</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	134
<b>Quadro 42</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	135
<b>Quadro 43</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	135
<b>Quadro 44</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	137
<b>Quadro 45</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	138
<b>Quadro 46</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	140
<b>Quadro 47</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	150
<b>Quadro 48</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	152
<b>Quadro 49</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	161
<b>Quadro 50</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	162
<b>Quadro 51</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	163
<b>Quadro 52</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	164
<b>Quadro 53</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	165

<b>Quadro 54</b> – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.....	165
<b>Quadro 55</b> – Conteúdos requeridos e conteúdos utilizados pelos alunos para resolução dos problemas propostos em cada item.....	169

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	16
<b>2 À GUISA DE FUNDAMENTAÇÃO BÁSICA: UM MOSAICO</b> .....	19
2.1 SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA.....	19
2.2 O CONTEXTO NOS PROBLEMAS .....	22
2.3 AVALIAÇÃO E PRÁTICA DE INVESTIGAÇÃO.....	25
2.4 A "PIRÂMIDE DA AVALIAÇÃO" DE DE LANGE .....	30
2.5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E PROBLEMAS ARITMÉTICOS.....	33
2.6 SOBRE A ARITMÉTICA E SEU ENSINO .....	40
2.6.1 O PENSAMENTO ARITMÉTICO.....	43
2.7 A RESPEITO DO PISA.....	47
2.7.1 Resultados Brasileiros da Aferição do Pisa 2006.....	53
<b>3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b> .....	58
3.1 A OBTENÇÃO DA AMOSTRA .....	59
3.2 CAMINHOS PERCORRIDOS.....	61
3.2.1 A Primeira Fase .....	61
3.2.2 A Segunda Fase .....	61
3.2.3 A Terceira Fase .....	63
<b>4 DAS CARACTERÍSTICAS DOS ITENS</b> .....	65
4.1 ITEM 1 .....	65
4.2 ITEM 2 .....	68
4.3 ITEM 3 .....	73
4.4 ITEM 4 .....	76
4.5 ITEM 5 .....	81
4.6 ITEM 6 .....	87
4.7 ITEM 7 .....	92
<b>5 LEITURAS</b> .....	97
5.1 A LEITURA DAS ESTRATÉGIAS E DOS PROCEDIMENTOS DOS REGISTROS ESCRITOS .....	97
5.1.1 Grupo de Estratégias G1 .....	97

5.1.2 Grupo de Estratégias G2.....	99
5.1.3 Grupo de Estratégias G3.....	99
5.1.4 Grupo de Estratégias G4.....	102
5.1.5 Grupo de Estratégias G5.....	104
5.1.6 Grupo de Estratégias G6.....	106
5.1.7 Grupo de Estratégias G7.....	114
5.1.8 Grupo de Estratégias G8 .....	115
5.1.9 Grupo de Estratégias G9.....	117
5.1.10 Grupo de Estratégias G10.....	118
5.1.11 Grupo de Estratégias G11.....	119
5.1.12 Grupo de Estratégias G12.....	126
5.1.13 Grupo de Estratégias G13.....	126
5.1.14 Grupo de Estratégias G14.....	128
5.1.15 Grupo de Estratégias G15 .....	132
5.1.16 Grupo de Estratégias G16 .....	134
5.1.17 Grupo de Estratégias G17.....	134
5.1.18 Grupo de Estratégias G18.....	135
5.1.19 Grupo de Estratégias G19.....	137
5.1.20 Grupo de Estratégias G20.....	138
5.1.21 Grupo de Estratégias G21.....	139
5.1.22 Grupo de Estratégias G22.....	150
5.1.23 Grupo de Estratégias G23.....	151
5.1.24 Grupo de Estratégias G24.....	160
5.1.25 Grupo de Estratégias G25.....	162
5.1.26 Grupo de Estratégias G26.....	163
5.1.27 Grupo de Estratégias G27.....	164
5.1.28 Grupo de Estratégias G28.....	164
5.1.29 Grupo de Estratégias G29.....	165
<b>6 DISCUSSÃO .....</b>	<b>167</b>
6.1 AS COMPREENSÕES QUE OS ALUNOS FIZERAM DO ENUNCIADO .....	167
6.2 OS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS PARA RESOLVER OS PROBLEMAS .....	169
6.3 O CONTEXTO E A MATEMATIZAÇÃO.....	174
6.4 O PENSAMENTO ARITMÉTICO.....	176

**7 CONSIDERAÇÕES FINAIS..... 178**

**REFERÊNCIAS ..... 180**

## 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho faz parte dos estudos desenvolvidos pelos participantes do GEPEMA<sup>1</sup> - Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação - da Universidade Estadual de Londrina. Os estudos desenvolvidos no interior do GEPEMA tiveram suas raízes no trabalho de Buriasco (1999), envolvendo a análise da produção escrita de alunos e professores em questões da prova de matemática da 8<sup>o</sup> série do AVA - Avaliação do Rendimento Escolar do Estado do Paraná - de 1997. A partir desse estudo, surgiu o interesse em analisar a produção escrita de alunos e professores em situação de avaliação, buscando identificar como eles lidam com as questões rotineiras e não-rotineiras de matemática. Os trabalhos já desenvolvidos no interior do GEPEMA mostram que, a partir da análise da produção escrita dos alunos, podemos buscar compreender como lidam com tarefas de Matemática ao investigar, por exemplo:

- quais "ferramentas" matemáticas utilizam e como o fazem;
- a forma como interpretam o enunciado;
- quais informações estão presentes no enunciado e como as retiram;
- quais as estratégias e os procedimentos que utilizam com mais frequência e como o fazem;
- quais os erros e os acertos mais frequentes;
- como utilizam a linguagem matemática.

Desse modo, em 2003, foi iniciado um estudo coletivo sobre a análise da produção escrita de alunos e professores em questões da Prova de Questões Abertas de Matemática da aferição da AVA-2002, questões discursivas consideradas rotineiras. Nesse estudo, foram desenvolvidas, até o momento, oito (8) dissertações<sup>2</sup>.

Ao finalizar esse ciclo de estudos da produção escrita de alunos e professores em questões discursivas rotineiras de matemática, surgiu o interesse em investigar a produção escrita em questões não-rotineiras de matemática. Por isso, passou-se a estudar a produção escrita de alunos e professores em questões consideradas não-rotineiras.

Celeste (2008) e Santos (2008) selecionaram quatorze (14) questões<sup>3</sup> discursivas consideradas não-rotineiras dentre as contidas na prova de matemática da aferição do PISA/ 2003, compuseram com elas uma prova escrita e aplicaram-na aos alunos, na faixa

---

<sup>1</sup> Disponíveis em: <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/>.

<sup>2</sup> Disponíveis em: <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/>.

etária definida pelo PISA - 15 anos e 3 meses a 16 anos e 2 meses - de uma escola pública da cidade de Londrina, localizada no Norte do Paraná. Analisaram a produção escrita de estudantes para conhecer como eles lidam com as informações contidas no enunciado das questões, quais as estratégias e os procedimentos utilizaram para resolvê-las e o que demonstraram saber por meio das resoluções. A primeira autora estudou a produção escrita dos alunos do Ensino Fundamental e a segunda, a dos alunos do Ensino Médio

Com a mesma prova utilizada por Celeste (2008) e Santos (2008), Almeida (2009) analisou a produção escrita de dezoito (18) estudantes do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná, e Ferreira (2009) analisou a produção escrita de trinta e sete (37) professores da Educação Básica.

Este trabalho, desenvolvido no interior do GEPEMA, busca analisar e discutir os registros escritos contidos nas provas da amostra de alunos paranaenses nas cinco (5) questões da área de conteúdo Quantidade da prova de matemática da aferição do PISA/2006, divididas em sete (7) Itens a fim de conhecer a interpretação que os alunos deram ao enunciado das questões, os conteúdos matemáticos, as estratégias e os procedimentos<sup>4</sup> utilizados ao resolvê-las e a forma como lidaram com as técnicas operatórias das operações aritméticas.

De um lado, a pesquisa realizada buscou investigar se as estratégias elaboradas foram desenvolvidas corretamente, considerando que a estratégia correta é um forte indício de que o aluno compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado. Para realizar essa análise, agrupamos os registros escritos dos alunos de acordo com o tipo de estratégia utilizada e o procedimento desenvolvido, independentemente do crédito atribuído à resolução.

De outro lado, procurou identificar se os alunos utilizaram ou não os algoritmos das operações aritméticas para resolver os problemas e como o fizeram. Com isso, foi possível identificar a quantidade de estudantes que efetuou correta ou incorretamentedeterminada operação aritmética e quais utilizaram ou não o algoritmo considerado como o "tipo escolar"<sup>5</sup>.

---

<sup>3</sup> As questões utilizadas por Celeste (2008) e Santos (2008) foram disponibilizadas pelo PISA/2003 para o domínio público.

<sup>4</sup> Neste trabalho, entendemos que a estratégia é a forma como o aluno aborda a questão, e o procedimento é a maneira pela qual o aluno desenvolve a estratégia que elaborou para resolver o problema proposto na questão (SANTOS, 2008). Por exemplo: quando um aluno está diante de uma questão e resolve o problema proposto utilizando uma multiplicação, consideramos que a multiplicação é a estratégia escolhida para resolver o problema e o procedimento é o modo como ele vai efetuar essa multiplicação.

<sup>5</sup> Neste trabalho, utilizamos a expressão "tipo escolar" para nos referirmos aos algoritmos convencionais das quatro operações aritméticas como são usualmente ensinados na escola brasileira.

Com este trabalho, queremos evidenciar a importância da avaliação escolar quando tomada como prática de investigação. Esperamos poder contribuir com a prática do professor na sala de aula e incentivá-lo a realizar um trabalho, com o qual, assumindo uma postura investigativa, busque, por meio da análise da produção escrita, obter informações a respeito do processo de aprendizagem dos seus alunos que lhe ajudarão na tomada de decisões educacionais.

Nosso principal objetivo consiste em analisar e discutir os registros escritos de alunos paranaenses em questões discursivas de matemática consideradas não-rotineiras da aferição do PISA/ 2006, com a finalidade de compreender a forma como os alunos lidam com esse tipo de questão em situação de avaliação. Nossos objetivos específicos são:

- Investigar a forma como os alunos interpretam o enunciado das questões não-rotineiras de matemática;
- Inventariar os conteúdos matemáticos utilizados para resolver os problemas propostos em cada questão;
- Identificar o modo como os alunos lidam com as técnicas operatórias dos algoritmos;
- Identificar as estratégias e os procedimentos que os alunos empregam em suas resoluções; e
- Identificar indícios do processo de matematização e do pensamento aritmético presentes nos registros escritos dos alunos.

Para tanto, este trabalho está estruturado em seis (6) capítulos: i) a Introdução; ii) o capítulo 2, um mosaico constituído por sete (7) partes "coladas" uma na outra, à guisa de fundamentação; iii) o capítulo 3, no qual são apresentados os Procedimentos Metodológicos; iv) as Leituras realizadas dos registros escritos dos alunos estão no capítulo 4; v) uma Discussão à luz do referencial teórico adotado é apresentada no capítulo 5; vi) no capítulo 6, estão as Considerações Finais a respeito do trabalho realizado.

## 2 À GUIZA DE FUNDAMENTAÇÃO BÁSICA: UM MOSAICO

### 2.1 SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

O Instituto Freudenthal, antigo Instituto para o Desenvolvimento do Ensino da Matemática - IOWO<sup>6</sup> -, foi fundado em Utrecht por Hans Freudenthal em 1971. O instituto, parte da Universidade de Utrecht, tinha como meta definir novos rumos para o ensino da matemática nas escolas da Holanda.

Para evitar que a educação holandesa recebesse influência do chamado Movimento da Matemática Moderna, o qual se espalhou pelo mundo nas décadas de 1960 e 1970, Hans Freudenthal desenvolveu uma abordagem teórica para o ensino e a aprendizagem da matemática, conhecida como Educação Matemática Realística<sup>7</sup>, que incorpora pontos de vista acerca do que é matemática, de como os alunos a aprendem e de como ela deve ser ensinada para promover a aprendizagem dos alunos (DE LANGE, 1987; STREEFLAND, 1991; TREFFERS, 1987; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Essa abordagem está fundamentada na resolução de situações-problema do mundo real que sejam imagináveis e/ ou realizáveis na mente dos estudantes em lugar de apenas focalizar "regras" matemáticas abstratas, desconectadas da realidade e, com elas, "treiná-los" para desenvolver procedimentos de resolução de problemas. Na perspectiva da RME, os alunos são considerados como participantes ativos do processo de ensino e aprendizagem, no qual eles próprios desenvolvem habilidades de resolução de problemas, reflexão e ferramentas matemáticas (FREUDENTHAL, 1991; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005).

As características da RME encontram sustentação na fenomenologia didática de Freudenthal e na matematização progressiva de Treffers, dizem respeito, basicamente, à utilização de: a) contextos da vida real como ponto de partida para a aprendizagem; b) modelos como uma ligação entre a matemática e a realidade (matematização); c) produção ou estratégia do próprio aluno como resultado da matemática por ele desenvolvida; d) problemas significativos provenientes da realidade. Além disso, considera essencial para a aprendizagem a interação entre alunos, entre professores e alunos e entre a matemática e outras disciplinas (TREFFERS, 1987; ZULKARDI, 1999).

---

<sup>6</sup> Tradução do holandês Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs.

<sup>7</sup> Quando nos referirmos à *Educação Matemática Realística* utilizaremos apenas a sigla *RME* (*Realistic Mathematics Education*).

Os princípios subjacentes a essa abordagem são determinados pelos pontos de vista de Freudenthal (1977) acerca da matemática. De acordo com ele, "a Matemática deve estar conectada com a realidade, estar próxima das crianças e ser relevante para a sociedade, a fim de ser de valor humano" (FREUDENTHAL, 1977 apud VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p.10). Trata-se, portanto, de não tomá-la como um conjunto de regras a ser reproduzido e "transmitido" aos alunos, mas enxergá-la como uma atividade humana.

Freudenthal (1991) defendeu a ideia de matemática como "atividade humana", pois acreditava que os alunos não deveriam ser considerados como receptores de uma matemática pronta e acabada. Ao contrário, deveriam ser vistos como participantes ativos no processo educacional, tendo a oportunidade "guiada" para "re-inventar" a matemática, fazendo-a (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1998). De acordo com Freudenthal (apud GREVEMEIJER; TERWEL, 2000, p.781), os estudantes aprendem "melhor" a matemática construindo-a, reinventando-a, recriando-a. Para esse autor, a matemática como uma atividade humana é:

Uma atividade de resolução de problemas, de procura por problemas, mas é também uma atividade de organizar um determinado tema. Este pode ser um tema da realidade que precisa ser organizado de acordo com modelos matemáticos se problemas dessa realidade tiverem de ser resolvidos (FREUDENTHAL, 1971, p. 413-414, tradução nossa).

Nesse sentido, os alunos não deveriam aprender a matemática num sistema fechado, desconectado da realidade, mas por meio de atividades ligadas às situações do mundo real, em um processo de matematização da realidade (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1998).

Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p.12) afirma que "assim como a Matemática surgiu a partir da matematização da realidade, então se deve aprender a matemática originada na matematização da realidade", porque, quando se tenta ensinar matemática desconectada da realidade, os alunos, na maioria das vezes, não conseguem desenvolver uma compreensão dos conceitos matemáticos e, desse modo, não são capazes de aplicar a matemática em outras situações.

Freudenthal (apud GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000) chamou de matematização a organização de um assunto da realidade utilizando ideias e conceitos matemáticos. A característica principal do processo de matematização é a tradução de um problema da realidade em um problema matemático. A ideia de matematização introduzida

por Freudenthal foi, posteriormente, desenvolvida no contexto educacional por Treffers (1987), o qual fez uma distinção entre a matematização horizontal e a matematização vertical.

Na matematização horizontal, os alunos utilizam os conhecimentos e as competências matemáticas que desenvolveram no processo de aprendizagem para identificarem regularidades, relações e estruturas. Para que isso aconteça, é necessário que eles discriminem qual estratégia específica pode ser utilizada em um contexto geral (TREFFERS, 1987). As atividades que caracterizam o uso da matematização horizontal são, consoante Treffers (1987): identificar a matemática relevante num contexto geral; esquematizar; formular e visualizar uma situação-problema de diferentes formas; descobrir regularidades e relações; traduzir um problema do mundo real em um problema matemático; utilizar ferramentas matemáticas adequadas.

A matematização vertical é o processo caracterizado pela reorganização dos conhecimentos matemáticos dentro do próprio sistema matemático (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996; ZULKARDI, 1999). Nesse processo, os alunos precisam, de acordo com De Lange (1995) e Treffers (1987): a) utilizar a linguagem simbólica formal e as técnicas das operações matemáticas; b) provar regularidades; c) refinar e ajustar modelos; d) combinar e integrar modelos; e) formular um novo conceito matemático; f) generalizar. Feito isso, com vistas à solução do problema, os alunos devem, além de analisarem e refletirem a respeito dos argumentos matemáticos, interpretar criticamente os resultados obtidos, verificando sua validade, comunicar o processo e a solução obtida à luz da situação real.

De modo geral, Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p.11) afirma que, na matematização horizontal, "os alunos entram com as ferramentas matemáticas que podem ajudar a organizar e resolver um problema localizado numa situação da vida real". A matematização vertical, por seu turno, acontece como "um processo de reorganização e operação dentro do próprio sistema matemático".

Freudenthal (1991) salienta que existe uma zona nebulosa na "fronteira" que diferencia esses dois tipos de matematização, pois não é possível identificar em que ponto termina a horizontal e começa a vertical pelo fato de elas estarem fortemente interligadas. A distinção entre esses dois tipos de matematização, segundo ele, também depende de uma situação específica, da pessoa envolvida e do ambiente em que essa situação ocorre.

## 2.2 O CONTEXTO NOS PROBLEMAS

Na perspectiva da RME, a utilização de problemas formulados dentro de um contexto relacionado com a realidade é muito significativa para o desenvolvimento do processo de aprendizagem dos alunos. Essa conexão com o mundo real "é concebida na realidade como uma fonte de aprendizagem matemática" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p.2). Nessa abordagem, o contexto dos problemas não precisa, necessariamente, fazer parte da vida real do aluno, o importante é que as tarefas sejam formuladas dentro de contextos que possam ser imagináveis e/ ou realizáveis na sua mente.

Meyer *et al* (2001) sugerem que o contexto pode ser utilizado para motivar e interessar os estudantes a compreender conceitos matemáticos e para ajudá-los a desenvolver sua criatividade e habilidade de resolução de problemas e, nessa direção, apontam cinco papéis, nos quais o contexto pode:

- motivar os alunos a explorar uma matemática nova;
- oferecer aos alunos uma chance de aplicar a matemática;
- servir como uma fonte de uma nova matemática;
- sugerir uma fonte de estratégia de resolução; e
- fornecer uma âncora para a compreensão matemática (MEYER et al, 2001, p.522).

Conforme Van Den Heuvel-Panhuizen (1998), a utilização de contextos é uma das principais características da RME, pela possibilidade de ele tornar a matemática mais atraente e interessante. Dentro dessa abordagem, o contexto de uma tarefa, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (1996), refere-se à situação na qual o problema está inserido e, para Borasi (1986), ele pode ser definido como:

Uma situação na qual o problema está "embalado". O principal papel do contexto parece ser o de fornecer a quem o resolve<sup>8</sup> as informações que podem permitir a solução do problema (BORASI, 1986, p.129-130, tradução nossa).

As situações dos enunciados apontam que os contextos, nos quais estão inseridas, referem-se, geralmente, a aspectos do mundo real, social, individual ou científico, bem como do fictício ou imaginário. Uma das razões pelas quais Shannon (2007) recomenda a sua utilização deve-se ao fato de:

---

<sup>8</sup> Tradução livre do original *solver*. Neste trabalho, entendemos que o resolvidor é o sujeito que se dispõe a resolver determinada tarefa.

Um contexto realístico pode facilitar o desempenho dos alunos ajudando-os a fazer uma representação correta do problema, a formular e implementar uma estratégia viável de solução ativando o uso de conhecimento específico prévio para aquele contexto, o que é útil para a compreensão e a resolução do problema (SHANNON, 2007, p.178, tradução nossa).

Nessa direção, de acordo com Dekker e Querelle (2002), o emprego de contextos nos problemas também pode ser útil: a) introduzir um novo tema ou um novo conceito matemático; b) praticar um novo conceito ou procedimento; c) demonstrar que o aluno domina o conteúdo matemático, usando um contexto não familiar em uma prova que está baseada no mesmo conteúdo matemático utilizado em aulas anteriores; d) envolver os alunos no problema, empregando problemas da vida real.

Desse modo, os contextos que circunscrevem a situação enunciada no problema desempenham um papel importante para sua solução e podem funcionar como um veículo para avaliar a compreensão matemática dos alunos. Dependendo do papel que eles desempenham em um problema e das oportunidades que eles oferecem, vários tipos de contextos podem ser distinguidos. De Lange (1987), remetendo-se à oportunidade que esses contextos viabilizam para a matematização, diferencia três tipos de contexto: de primeira ordem, de segunda ordem e de terceira ordem.

Segundo o pesquisador, o contexto de primeira ordem é utilizado apenas para "camuflar" as operações matemáticas. Os problemas com esse tipo de contexto são considerados como problemas de palavras<sup>9</sup>, porque ele pode ser substituído por outro e ser resolvido da mesma maneira (DE LANGE, 1987; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005). O de segunda ordem aparece quando uma situação do mundo real é apresentada ao aluno, o qual necessita identificar a matemática relevante para resolver o problema, criar suas próprias estratégias, escolher ferramentas matemáticas para resolvê-lo e refletir se a resposta encontrada é adequada (DE LANGE, 1987; DEKKER; QUERELLE, 2002). A distinção entre esses dois tipos de contexto é caracterizada pelo processo de matematização, pois o de segunda ordem requer um processo de matematização horizontal, o que exige, consoante De Lange (1999), aspectos enfáticos. O contexto de terceira ordem é caracterizado pela formação de um novoconceito, pois possibilita o processo de matematização conceitual<sup>10</sup> (DE LANGE,

---

<sup>9</sup> Nesta investigação, tomamos word problems como problemas de palavras, aqueles que geralmente possuem todas as informações necessárias para sua resolução, em que o contexto está explícito no texto do enunciado, que envolvem a combinação de algoritmos padrões e a solução é única e exata (Borasi, 1986). O problema de palavra a seguir é um exemplo retirado de Borasi (1986, p.127): Maria comprou um hambúrguer por \$90 e uma coca-cola por \$30. Se o imposto local é de 5%, qual o troco que Maria deve receber se ela pagar o vendedor com \$200?

<sup>10</sup> Tradução livre do original solver. Neste trabalho, entendemos que o resolvidor é o sujeito que se dispõe a resolver determinada tarefa. "este processo leva os estudantes a explorar a situação, procurar e identificar a matemática relevante, esquematizar e visualizar para descobrir regularidades e desenvolver um modelo resultando em um conceito matemático".

1987, 1995). Além disso, os problemas que o envolvem são utilizados para "introduzir e desenvolver modelos ou conceitos matemáticos" (DE LANGE, 1987, p.76). De Lange (1995) apresenta, ainda, três classes de funcionalidade dos contextos. Quais sejam:

- sem contexto: encontramos problemas nos quais nenhum contexto real está presente no enunciado;
- contexto utilizados para "camuflar" os problemas matemáticos: esse tipo de contexto vai ao encontro do contexto de primeira ordem. Nesse caso, o contexto do problema não é considerado relevante, pois ele é utilizado apenas para "camuflar" as operações matemáticas (DE LANGE, 1995; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996);
- contexto como uma parte relevante e essencial do problema, o qual contribui, de maneira importante, para o problema, pelo fato de motivar e estimular os alunos a resolvê-lo. Nesse sentido, De Lange (1995, p.16) afirma que, "mesmo em problemas simples, tais como o formato de múltipla escolha, o contexto pode ser essencial".

De Lange (1999) e Dekker e Querelle (2002), diferenciam os contextos em virtual, artificial e matemático. Um contexto virtual, segundo Dekker e Querelle (2002, p.27), "pode conter elementos que não são reais em si mesmos, mas que surgem da realidade". Os problemas que envolvem um contexto artificial lidam, por exemplo, com o mundo da fantasia, com objetos inexistentes. Para De Lange (1999), deve-se tomar cuidado ao propor aos alunos problemas que envolvam esse tipo de contexto, pois, na maioria das vezes, eles não são capazes de imaginar ou de fantasiar algumas situações. No contexto matemático, "ainda que o conteúdo do problema seja tomado da própria matemática, ele não é um problema despido de contexto" (DEKKER; QUERELLE, 2002).

Estudos realizados a respeito do papel desempenhado pelo contexto (BOALER, 1993; CARRAHER et al 1985; DE LANGE, 1999; NESHER; HERSHKOVITZ, 1997; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), demonstram que ele é essencial e contribui favoravelmente para a resolução do problema. Em sua investigação, Clements (apud VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p.7), comparou dois problemas que faziam parte da mesma prova escrita e envolviam subtração de frações aritméticas. Um dos problemas não apresentava nenhum contexto "real", o qual era considerado como um problema aritmético simples e, o outro era um problema de contexto, o qual era considerado como o problema do bolo. Por meio dessa investigação, a autora pôde verificar que, dos 126 alunos que fizeram a prova, 78% encontraram a resposta correta para o problema de contexto, enquanto o problema

aritmético simples foi resolvido corretamente por 45% dos alunos. Carraher et al (1985) também advertem que as crianças, quando estão na sala de aula, apresentam grande dificuldade para realizar as operações aritméticas, porém, quando estão vendendo "bugigangas" na rua, efetuam os mesmos cálculos com muita facilidade.

Os estudos realizados por Neshier e Hershkovitz (1997) mostram resultados positivos quando o contexto está conectado com a realidade dos alunos. Esses autores verificaram que os alunos sentem-se mais motivados em resolver os problemas quando a formulação do enunciado remete para situações retiradas do "mundo real".

Todavia, em alguns casos, a utilização de contextos familiares aos estudantes pode dificultar a resolução de um problema. Os estudos de Gravemeijer (apud VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p.8) demonstraram isso. Esse autor relatou que um aluno recusou-se a resolver um problema cujo contexto envolvia certa marca de refrigerante, argumentando que nem todos os alunos gostavam desse tipo de refrigerante e que nem todos bebiam a mesma quantidade.

Pode-se concluir que o contexto dos problemas apresentados não precisa, necessariamente, apresentar uma situação-problema a qual esteja relacionada com o "mundo real". A fim de resolvê-lo, basta que ele traga consigo um aspecto motivador, de modo a despertar o interesse dos alunos, fazendo com que, por um lado, eles sintam-se desafiados a envolver-se na situação para encontrar uma solução para o problema e, por outro, para que compreendam o importante papel desempenhado pela matemática.

### 2.3 AVALIAÇÃO E PRÁTICA DE INVESTIGAÇÃO

Na educação escolar, a avaliação é um processo que contribui, de forma significativa, para o processo de ensino e de aprendizagem, pois pode fornecer informações úteis tanto para os professores quanto para os alunos. De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (1996), essa concepção acerca da avaliação foi expressa desde o início da proposição e desenvolvimento da Educação Matemática Realística, por nela compreender-se que o objetivo da avaliação é "produzir informações que contribuam para o processo de ensino e aprendizagem e auxiliem na tomada de decisões educacionais" (DE LANGE, 1999, p.2).

Nessa abordagem, a avaliação não tem por finalidade olhar somente para trás, para os resultados obtidos, para aquilo que já foi realizado, mas também e especialmente olhar para frente, para o que ainda está por vir, tentando superar os problemas e fazer emergir

novas práticas educativas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Para essa autora, a avaliação deve fornecer informações sobre como os alunos realizaram as tarefas em vez de se dar importância apenas aos resultados; assim, o processo deve enfatizar os procedimentos que foram desenvolvidos para resolvê-las.

A análise do cumprimento das tarefas desenvolvidas pelos alunos permite que se recolham evidências e, a partir delas, estabeleçam-se inferências, as quais podem propiciar aos professores uma reflexão a respeito do processo de aprendizagem dos seus alunos e, dessa forma, ao tentar identificar os progressos e as dificuldades deles, os professores têm a possibilidade de repensar sua prática pedagógica, verificar qual o próximo passo que deve ser dado, de modo a contribuir com a aprendizagem de ambos.

Obter informações a respeito da aprendizagem dos alunos nos remete à ideia de avaliação formativa, a qual tem a função de guiar e reorientar o processo de ensino e aprendizagem. Ademais, para cumprir sua função, ela preocupa-se em coletar informações a respeito da aprendizagem dos alunos, a fim de reorientar o processo de ensino, informando ao professor os objetivos que foram atingidos e aos alunos informações acerca do desenvolvimento de suas capacidades e competências, bem como de suas estratégias de estudo.

Um componente fundamental desse processo é o feedback, o qual é tomado, nesta pesquisa, como o retorno dado pelo professor ao aluno a respeito de sua tarefa (BARLOW, 2006). Realizados por meio de comentários deixados na tarefa do aluno, os feedbacks ajudam os professores a reorientar seu trabalho tanto no sentido de apontar as dificuldades ou as aprendizagens ainda não alcançadas quanto em assinalar os progressos obtidos pelos alunos. Nessa direção, Van den Heuvel-Panhuizen (1996) afirma que a avaliação precisa servir como auxílio, ou seja, deve contribuir com a melhoria da aprendizagem, fornecendo aos alunos uma resposta acerca de seu processo de aprendizagem.

Essa mesma autora apresenta algumas sugestões para melhorar a avaliação na sala de aula, sugerindo que o primeiro passo a ser dado, quando se pretende aprimorar a aprendizagem, é ajudar o professor a "aprender" a observar o seu próprio processo de aprendizagem, para melhor perceber como está a aprendizagem dos seus alunos. Na sala de aula, o professor também deve: a) analisar a si próprio, a fim de conhecer quais critérios necessita utilizar para considerar o processo de aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996); b) conduzir discussões com os alunos com a intenção de verificar o que eles sabem e compreendem a respeito daquilo que lhes é ensinado; c) enfatizar a avaliação formativa, pois ela oferece informações a respeito do processo de ensino e aprendizagem.

Os estudos realizados por Black e Wiliam (1998) mostram que a melhoria da avaliação, na sala de aula, contribui consideravelmente com o sucesso da aprendizagem dos alunos. Portanto, para que esse avanço aconteça, torna-se necessário que os envolvidos nesse processo utilizem, como ponto de partida, alguns princípios ligados à ideia de avaliação. Nessa direção, podemos considerar os cinco princípios elaborados por De Lange (1987), os quais formam um conjunto de critérios a serem utilizados na sala de aula quando se busca a melhoria da aprendizagem.

O *primeiro princípio* elaborado por De Lange (1987) afirma que, na sala de aula, o principal objetivo da avaliação é melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática. A avaliação não deve ser vista como uma atividade no final de um curso, cuja finalidade seria atribuir uma nota a determinada tarefa, mas as avaliações devem, além de fornecer aos estudantes um feedback relativo ao seu processo de aprendizagem, motivá-los e incentivá-los a demonstrarem aquilo que sabem e que são capazes de fazer.

O *segundo princípio* indica que os métodos de avaliação utilizados precisam permitir que os alunos, ao resolverem determinada tarefa matemática, tenham a oportunidade de demonstrar aquilo que sabem fazer.

O *terceiro princípio*, segundo De Lange (1995), diz que as tarefas de avaliação devem "operacionalizar" todas as metas da Educação Matemática, devendo, além de ser úteis, conter situações-problema que pertençam aos diferentes níveis do pensamentomatemático, e não apenas avaliem as competências do nível de pensamento mais elementar. "Matematização, reflexão, discussão de modelos, comunicação, criatividade, generalização e transferência são qualidades essenciais dos alunos para se avaliar" (DE LANGE, 1995, p.4).

O quarto princípio é caracterizado pela qualidade das tarefas de avaliação, a qual é definida pela sua autenticidade<sup>11</sup> e equidade (DE LANGE, 1999, p.9).

Em relação ao quinto princípio, De Lange (1987, p.183) afirma que os instrumentos de avaliação devem ser úteis e práticos, no sentido da continuidade da aprendizagem.

Outros princípios e normas podem ser considerados, por exemplo, os contidos nos documentos do NCTM - National Council of Teacher of Mathematics - (1999), os quais apresentam seis (6) normas para a avaliação. Essas normas referem-se à matemática,

---

<sup>11</sup> Neste trabalho, entendemos que uma tarefa de avaliação é definida pela sua autenticidade, no sentido de que as tarefas de avaliação não são utilizadas para "medir" o desempenho dos alunos atribuindo-lhes uma nota, mas elas são empregadas para obter informações a respeito do que os alunos sabem fazer. E por equidade entendemos que a tarefa deve apreciar o poder matemático de cada aluno.

à aprendizagem da matemática, à equidade, à transparência, às inferências e à coerência, como segue:

- a atividade de avaliação em matemática deve refletir a matemática que os alunos devem saber e são capazes de fazer. As tarefas de avaliação devem lhes proporcionar oportunidades para que desenvolvam sua capacidade de analisar, explicar seu raciocínio e comunicar suas ideias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem e interpretam problemas em diversas situações;
- a avaliação deve contribuir significativamente para aprendizagem dos alunos, tornando-se uma rotina nas atividades escolares, em lugar de constituir uma interrupção da mesma;
- as práticas avaliativas devem promover a equidade, valorizar as qualidades e experiências individuais de cada aluno, possibilitando que todos eles demonstrem seu poder matemático;
- a avaliação deve ser um processo transparente, no qual todas as suas informações devem estar disponíveis aos envolvidos. Os alunos devem ser informados acerca do que os professores esperam deles, da maneira pela qual se espera que demonstrem os conhecimentos, das consequências da avaliação e de quais critérios os professores utilizarão para avaliar seus trabalhos;
- a avaliação deve promover inferências válidas a respeito da aprendizagem em matemática, baseando-se em evidência adequada e relevante;
- a avaliação deve ser um processo coerente, garantido pelo desenvolvimento de atividades e critérios de desempenho ajustados aos propósitos de cada avaliação

Nesse sentido, uma possibilidade de colocar, em sala de aula, a avaliação como auxiliar nos modos de aprender e de ensinar é tomá-la como prática de investigação, como um:

[...] processo de buscar conhecer ou, pelo menos, obter esclarecimentos, informes sobre o desconhecido por meio de um conjunto de ações previamente projetadas e/ ou planejadas que procura seguir os rastros, os vestígios, esquadrihar, seguir a pista do que é observável, conhecido (FERREIRA, 2009, p.21).

Uma avaliação assim adotada vai ao encontro dos objetivos propostos pela avaliação na perspectiva da Educação Matemática Realística, e, para executá-la, a análise da produção escrita torna-se uma valiosa ferramenta, pois, de acordo com Treffers (1987, p.261, tradução nossa) "a produção do aluno é tanto uma ferramenta de aprendizagem quanto de ensino". Ademais, "a produção de um aluno, como resultado de ensino, funciona como uma imagem refletida no espelho da atividade didática do professor" (idem).

Para analisar a produção escrita dos alunos, estudar-se-á, nesta investigação, as provas de uma amostra<sup>12</sup> de estudantes paranaenses em questões discursivas<sup>13</sup> de matemática, consideradas não-rotineiras, classificadas como envolvidas em aspectos da área de conteúdo *Quantidade*<sup>14</sup>. A forma como os alunos interpretam o enunciado das questões, quais as estratégias e os procedimentos que utilizam ao resolvê-las, os conteúdos matemáticos empregados, a maneira forma como lidam com as operações aritméticas e a atividade de matematização revelada em seus registros escritos serão o foco deste trabalho.

Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (1996), por meio da análise dos registros escritos deixados pelos alunos ao resolverem uma questão discursiva, na maioria das vezes, é possível identificar qual o próximo passo que deverá ser dado, no processo de ensino, para contribuir com o desenvolvimento da aprendizagem. Segundo Nagy-Silva (2005, p.106):

[...] com informações sobre a produção escrita dos alunos, que apresentam tanto as suas dificuldades quanto suas possibilidades, é possível realizar uma intervenção que de fato contribua para o desenvolvimento dos alunos.

A análise da produção escrita dos alunos pode constituir-se em uma fonte de comunicação entre professor e aluno, com a qual o professor tem a possibilidade de conhecer detalhadamente os modos de compreensão dos alunos, os caminhos percorridos, as dificuldades apresentadas, as estratégias e os procedimentos utilizados, e o aluno tem possibilidade de acompanhar o desenvolvimento da sua aprendizagem. Com isso, de acordo com Buriasco e Soares (2008, p.111):

[...] ao incentivar o professor a registrar, comparar e analisar a produção de seus alunos, no dia-a-dia da sala de aula, tem-se como perspectiva valorizar

---

<sup>12</sup> Amostra dos alunos paranaenses que participaram da aferição do PISA de 2006.

<sup>13</sup> De acordo com Buriasco *et al* (2003, p.5), esse "tipo de questão não requer apenas que o aluno assinale uma resposta, mas que a encontre a resposta e mostre os caminhos que foram seguidos para chegar a ela".

<sup>14</sup> Quantidade: área do conteúdo que tem relação com a Aritmética e envolve: a utilização de números para representar quantidades; atributos quantificáveis dos objetos; relações e operações de aritmética e de estimativas; padrões quantitativos; o sentido e a representação de números; a compreensão do significado das operações (OCDE, 2005).

o diálogo sobre as investigações que tanto ele quanto seus alunos fazem a respeito do conhecimento matemático, durante o processo de aprender e ensinar matemática na escola.

Na seção a seguir, apresentamos a "pirâmide da avaliação" elaborada por De Lange (1999), por meio da qual é possível construir uma prova que permita ao aluno demonstrar seus conhecimentos matemáticos e o que eles são capazes de fazer (DEKKER, QUERELLE, 2002). De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (1996), a utilização da "pirâmide" pode ser considerada uma alternativa para a avaliação na sala de aula.

#### 2.4 A "PIRÂMIDE DA AVALIAÇÃO" DE DE LANGE

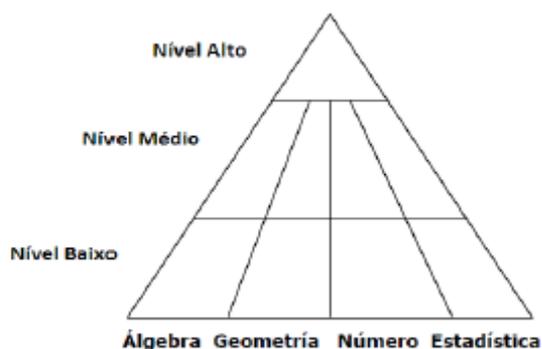
A avaliação, na perspectiva da RME, tem por finalidade munir o professor de informações a respeito dos conhecimentos matemáticos de seus alunos. Para que ele possa desenhar um quadro consistente das habilidades e das competências matemáticas de seus alunos, os problemas apresentados devem envolver todos os níveis de pensamento matemático, bem como permitirem que os estudantes demonstrem o que sabem e o que são capazes de fazer com o conhecimento matemático que lhes foi ensinado. Dessa forma, além de os problemas abrangerem todos os níveis de pensamento matemático, os conteúdos matemáticos também devem variar entre os graus de dificuldade, desde o mais simples ao mais complexo.

Para que os problemas apresentados atendam todos esses requisitos e forneçam informações necessárias sobre os conhecimentos matemáticos dos alunos, De Lange (1999, p.16) elaborou a pirâmide conhecida como a "pirâmide da avaliação", a fim de auxiliar a formulação de uma imagem visual dos tipos de problemas que são necessários para representar a compreensão matemática do aluno. As categorias nela apresentadas podem ser utilizadas, de um modo geral, tanto para atender aos objetivos da Educação Matemática quanto para orientar a avaliação em Matemática.

O modelo original dessa pirâmide foi elaborado na forma de um triângulo, no qual encontramos horizontalmente, isto é, na base do triângulo, os quatro domínios matemáticos (álgebra, geometria, números e estatística) e verticalmente os três níveis de pensamento matemático (nível de ordem inferior, médio e superior). Para muitos professores, os problemas mais simples estariam localizados na base do triângulo e os mais complexos na parte superior. Como os problemas mais difíceis não necessariamente deveriam ser classificados como pertencentes ao nível de ordem superior, o triângulo foi convertido em

uma pirâmide, pois, dessa forma, torna-se possível uma distinção entre os problemas classificados como simples daqueles considerados complexos dentro de um mesmo nível de pensamento matemático (DEKKER; QUERELLE, 2002).

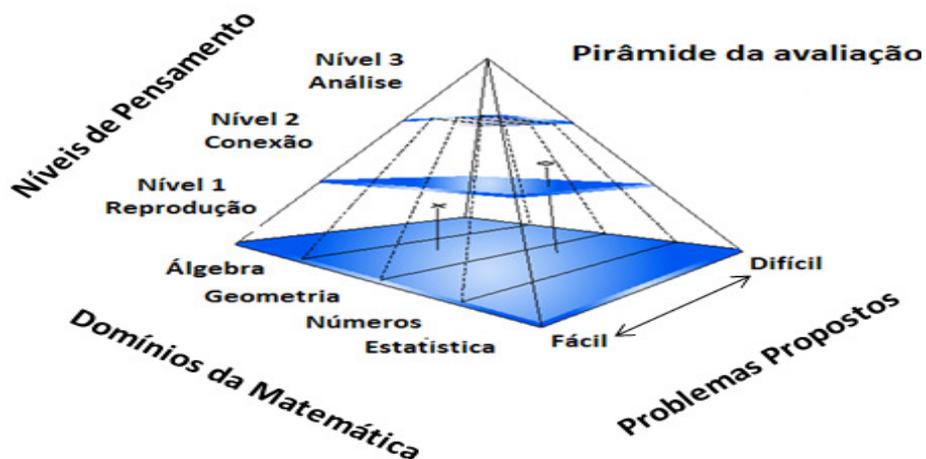
**Figura 1** - Pirâmide da Avaliação de De Lange



Fonte: De Lange (1999).

A "pirâmide da avaliação" formulada por De Lange é composta por três dimensões: os três diferentes níveis de pensamento matemático dos alunos; o domínio da matemática ou conteúdo matemático necessário para resolver os problemas; e o nível de complexidade dos problemas, os quais devem variar do mais simples ao mais complexo. As três dimensões estão representadas na pirâmide formulada por De Lange (1999), como demonstra a figura a seguir:

**Figura 2** – Pirâmide da Avaliação de De Lange.



Fonte: De Lange (1999).

Esses três níveis de pensamento matemático são caracterizados, como segue:

- **nível 1** (ou nível de ordem inferior): reconhecimento de fatos e definições, cálculos rotineiros;
- **nível 2** (ou nível de ordem médio): conexão e integração para a resolver os problemas;
- **nível 3** (ou nível de ordem superior): matematização, raciocínio matemático avançado, generalização e insights.

Os problemas situados no **Nível 1** referem-se às competências básicas que os alunos devem desenvolver ao resolver os problemas, tais como: o (re)conhecimento de definições e conceitos, a reprodução de procedimentos rotineiros e a aplicação de regras algorítmicas. Nesse nível de pensamento matemático, os conteúdos são facilmente discriminados pelos alunos ao resolverem os problemas, pois tanto o conteúdo matemático quanto a estratégia para resolver o problema estão explícitos no enunciado da questão. O problema apresentado a seguir pode ser classificado, segundo Dekker e Querelle (2002), como um problema situado no nível 1:

Estou na página 46 de meu livro que tem 237 páginas no total. Quantas páginas ainda tenho que ler?

O **Nível 2** é caracterizado pela conexão entre as diferentes partes do conhecimento matemático e a integração de informações para resolver os problemas. Nesse nível de pensamento, os alunos selecionam as próprias estratégias e procedimentos e demonstram saber quais ferramentas matemáticas são adequadas para resolver os problemas. Para atingir esse nível de raciocínio, os estudantes devem fazer conexões com os conhecimentos construídos em outros momentos, traduzir a informação presente em um problema formulado sobre aspectos da vida real para a linguagem matemática e resolvê-lo utilizando argumentos matemáticos. Além disso, espera-se que eles construam modelos matemáticos, comparem-nos e os discutam-nos com os de seus colegas. Os problemas formulados nesse nível vão desde os mais simples até os mais complexos e requerem que os alunos envolvam-se em um processo de matematização para resolvê-los. Tais problemas, geralmente, são formulados dentro de uma situação-problema da "vida real" e podem ser resolvidos corretamente com o uso de diferentes estratégias e procedimentos. Por essa razão,

os estudantes têm a oportunidade de demonstrar aquilo que são capazes de fazer e quais caminhos percorrem para atingir a solução do problema.

O exemplo seguinte, de acordo com Dekker e Querelle (2002), pode ser classificado como um problema situado no nível 2:

Com uma fotocopadora, pode se aumentar ou reduzir o tamanho de um desenho. Nathan usou a máquina para fazer uma cópia de um desenho, reduzindo seu tamanho em 60%. Não satisfeito com o resultado, pegou a cópia e fez uma nova redução de 140%. Ele pensou que agora teria as medidas originais de novo. Nathan está certo? Explique sua resposta.

Os problemas formulados no **Nível 3** exigem que os alunos pensem e raciocinem matematicamente e demonstrem ser capazes de matematizar as situações, analisar, interpretar, reconhecer a matemática envolvida na situação, desenvolver estratégias e modelos próprios, comunicar, generalizar, refletir sobre o processo de resolução, elaborar argumentos matemáticos, comparar os seus modelos com o de seus colegas e ser capazes de criticá-los. Os alunos precisam ser competentes não apenas para resolver, como também para propor problemas e formular perguntas que sejam pertinentes à solução. Os problemas situados nesse nível de pensamento matemático, geralmente, podem ser resolvidos de formas distintas, possibilitando o envolvimento em um processo de matematização. Nesse nível, frequentemente, podem ser avaliadas a atitude crítica dos alunos diante da resposta obtida para o problema e sua capacidade de refletir acerca do processo de resolução. A seguir, apresentamos um problema que, de acordo com Dekker e Querelle (2002), está situado no nível 3:

Um grupo de 90 crianças quer andar em um bote a pedal. Cada bote pode levar 4 crianças. Quantos botes será necessário para levar o grupo? Explique sua resposta.

Como demonstrado na "pirâmide da avaliação" de De Lange, os domínios da matemática ou conteúdos específicos desaparecem no nível de pensamento mais alto, pois os problemas formulados nesse nível podem ser resolvidos de formas distintas e utilizando diversos conteúdos matemáticos.

## 2.5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Segundo o dicionário Houaiss (2001, CD-ROM), *problema* é: assunto controverso, ainda não satisfatoriamente respondido em qualquer campo do conhecimento e

que pode ser objeto de pesquisas científicas ou discussões acadêmicas; obstáculo, contratempo, dificuldade que desafia a capacidade de solucionar de alguém; tarefa de calcular uma ou várias quantidades desconhecidas, denominadas *incógnitas*, relacionadas a outras conhecidas, os dados.

Para Charles e Lester (1982, p.5), *problema* é uma pergunta para a qual se deseja ou necessita achar uma solução, mas que não se tem disponível, de imediato, o procedimento para encontrar a solução, a qual é necessária.

Segundo Beckenbach et al (1970, p.11), um verdadeiro problema em matemática pode ser definido como uma situação que é nova para o indivíduo a quem se pede que resolva.

Kantowski (1997) considera que um problema difere de um exercício na medida em que, no primeiro, quem se dispõe a resolvê-lo não tem um procedimento ou algoritmo que certamente conduzirá para uma solução. Parece que, nessa direção, a distinção entre um problema e um exercício está relacionada ao contexto da tarefa e ao indivíduo que a enfrenta.

Para Pozo (1998, p.16-17), "um problema é uma situação nova ou diferente do que já foi aprendido [...] que exige o uso de estratégias, a tomada de decisões sobre o processo de resolução" (grifo nosso). Por outro lado, um exercício é uma atividade de reprodução de uma regra ou conhecimento matemático aprendido previamente, tal como a aplicação de um algoritmo ou fórmula. Ele serve apenas para consolidar e automatizar certas regras, habilidades e procedimentos necessários para a posterior solução de problemas. Assim, dificilmente podem servir para a aprendizagem ou compreensão de conceitos.

Borasi (1986) apresenta uma distinção entre exercício, problema de palavra e problema da vida real. Essa diferenciação pode ser melhor visualizada no quadro a seguir.

**Quadro 1** - Classificação dos tipos de problemas.

<b>Categoria</b>	<b>Contexto</b>	<b>Formulação</b>	<b>Solução</b>	<b>Método de abordagem</b>
<b>Exercício</b>	Inexistente	Única e explícita	Única e exata	Combinação de algoritmos conhecidos
<b>Problema de Palavra</b>	Explícito no texto	Única e explícita	Única e exata	Combinação de algoritmos conhecidos
<b>Problema da vida real</b>	Apenas parcialmente no texto do problema	Parcialmente dada - muitas alternativas possíveis	Muitas possíveis - apenas soluções aproximadas	Exploração do contexto - reformulação - elaboração de um modelo

Fonte: Borasi (1986).

Butts (1997), por sua vez, classifica os problemas matemáticos como mostra o quadro 2 apresentado a seguir:

**Quadro 2** - Classificação dos tipos de problema segundo Thomas Butts

<b>Tipo de problema</b>	<b>Definição</b>	<b>Exemplos</b>
<b>Exercício de reconhecimento</b>	exercícios que exigem o reconhecimento de um fato, de uma definição.	Qual é o triângulo que possui os três lados com medidas iguais?
<b>Exercícios algorítmicos</b>	exercícios que podem ser resolvidos utilizando um algoritmo numérico.	Calcule: $2 + 3 \times 5 - 16$
<b>Problemas de aplicação</b>	problemas que necessitam serem traduzidos para uma linguagem matemática utilizando algoritmos apropriados.	Uma escola com 216 crianças recebeu 3 caixas com 24 maçãs cada uma e 12 caixas com uma dúzia de maçãs cada. Quantas maçãs cada criança receberá?
<b>Problemas em aberto</b>	problemas cujo enunciado não apresenta uma estratégia de resolução.	Encontre todos os números primos a uma potência quarta subtraída de 1.
<b>Situação-Problema</b>	situações nas quais uma das etapas decisivas é identificar o problema inerente à situação, cuja solução irá melhorá-la.	A poluição da água.

Fonte: Butts (1997).

Com base nas definições e nas classificações apresentadas, consideramos *problema* como uma situação com a qual um indivíduo se depara, quer ou precisa resolver,

porém não dispõe de um caminho imediato e direto que o leve à solução. Assim, o indivíduo é instigado a pensar e a raciocinar matematicamente para encontrar um caminho que o encaminhe a uma solução plausível.

A resolução de problemas constitui o ponto de partida da aprendizagem matemática (BRASIL, 1998; NCTM, 1991) e tem um papel extremamente importante no seu ensino, pois, por meio dela, os alunos podem compreender os conceitos matemáticos, desenvolver suas habilidades matemáticas, elaborar estratégias de resolução, compreender o papel da matemática no mundo e aprender a se comunicar e a raciocinar matematicamente. Além disso, a resolução de problemas serve como uma base para aprendizagens futuras, para uma participação efetiva na sociedade e também para a "orientação" das atividades individuais.

Nessa direção, Polya (1962 apud DOORMAN et al, 2007, p.405) descreve a resolução de problemas como uma característica da atividade humana, porque:

Resolver um problema significa encontrar uma forma de sair de uma dificuldade, uma forma de contornar um obstáculo, alcançando um objetivo que não foi imediatamente atingido. A resolução de problemas é uma conquista específica da inteligência, e a inteligência é um dom específico da humanidade: a resolução de problemas pode ser considerada como uma característica importante da atividade humana (tradução nossa).

Na perspectiva da Educação Matemática Realística, a resolução de problemas funciona como um elo entre as situações do *mundo real*<sup>15</sup> e a matemática que se deseja ensinar (DOORMAN et al, 2007) e é vista como uma "arte" de lidar com problemas significativos e desafiadores, que ofereçam oportunidades para os estudantes desenvolverem sua capacidade de analisar, elaborar novas estratégias de resolução, explicar seu raciocínio matemático e comunicar as soluções obtidas.

Nesse sentido, de acordo com o estudo do PISA (PORTUGAL, 2004, p.10), a resolução de problemas:

É a capacidade de um indivíduo usar processos cognitivos para confrontar e resolver situações reais e interdisciplinares, nas quais o caminho para a solução não é imediatamente óbvio e em que os domínios de letramento ou áreas curriculares passíveis de aplicação não se inserem num único domínio, seja o da matemática, das ciências ou da leitura.

---

<sup>15</sup> De acordo com Freudenthal (1991), o mundo real é considerado como um ponto de partida para o desenvolvimento dos conceitos e ideias matemáticas.

A expressão *resolução de problemas* apresenta vários significados e, segundo Mendonça (1999), pode ser interpretada de três formas distintas: como um *objetivo*, como um processo e como um *ponto de partida*. Consoante a autora, tomar a resolução de problemas como um objetivo significa estudar matemática para resolvê-los. Quando tomada como um processo, ela está centrada na proposição de estratégias de solução elaboradas pelos alunos ao resolvê-los. Como *ponto de partida*, os problemas são utilizados como recurso pedagógico para que seja desenvolvido o processo de construção de conhecimentos matemáticos previamente determinados pelo professor.

Qualquer que seja o motivo de seu uso, a resolução de problemas é um importante veículo por meio do qual os alunos aprendem matemática. Durante o processo de resolução de problemas, os estudantes devem ter muitas oportunidades para formular, discutir e resolver problemas que exijam um esforço significativo e, além disso, eles deverão ser motivados a refletir sobre os resultados obtidos.

Tradicionalmente, o processo de resolução de problemas é caracterizado, de acordo com Polya (1978), por quatro fases distintas: compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, desenvolvimento da estratégia e revisão da solução obtida. Nessa mesma direção, Rico (2004) apresenta cinco fases do processo de resolução de um problema, que vai ao encontro do processo da atividade de matematização:

1<sup>a</sup>) partir de um problema situado na realidade; 2<sup>a</sup>) organizá-lo de acordo com os conceitos matemáticos; 3<sup>a</sup>) delimitar a realidade por meio de processos tais como fazer suposições sobre os dados do problema, generalizar e formalizar; 4<sup>a</sup>) resolver o problema matemático; 5<sup>a</sup>) atribuir sentido à solução matemática obtida à luz da situação real (RICO, 2004, p.4).

Brito (1999), por seu turno, distingue as seguintes fases na resolução de um problema:

1<sup>a</sup>) *leitura e compreensão do problema*; 2<sup>a</sup>) *formulação de um plano de solução*, que inclui a tradução do enunciado para a linguagem matemática, a escolha de uma estratégia, a resolução propriamente dita e a obtenção de um resultado concreto e, 3<sup>a</sup>) *comprovação do resultado* (BRITO, 1999, p.97).

Para essa autora, quando a resolução de problemas gera um processo de resolução para atingir determinada solução, constitui-se em uma estratégia de ensino (BRITO, 1999) e, dessa forma, sugere-se que o trabalho com a resolução de problemas não deve servir apenas como um veículo para desenvolver novos conceitos matemáticos, mas precisa dar

oportunidades para que os alunos desenvolvam suas habilidades para resolver problemas, utilizem seus conhecimentos previamente construídos, elaborem suas próprias estratégias de resolução e desenvolvam a compreensão dos conceitos matemáticos.

A resolução de problemas aritméticos tem sido tema de pesquisa de investigadores (CARRAHER et al, 1985; NUNES et al, 1993; KAMII, 1992; SCHLIEMANN, 1998; BRITO, 1999), os quais apresentam grande preocupação com o ensino de problemas aritméticos no contexto escolar.

Os trabalhos desenvolvidos por Kamii (1992) demonstram que o ensino da resolução dos problemas aritméticos tem sido desenvolvido de forma mecanicista. A pesquisadora mostrou que somar, subtrair, multiplicar e dividir dependem do raciocínio lógico-matemático que não se desenvolve pela prática enfatizada pela escola tradicional, a qual está voltada para a aprendizagem superficial de regras e operações aritméticas.

Para Vasconcelos (1998), o atual ensino da resolução de problemas é caracterizado pelos seguintes aspectos: ênfase excessiva no cálculo numérico necessário para a resolução; utilização de "palavras-chave" em lugar de se trabalhar com a compreensão do enunciado do problema; não são identificadas nem analisadas as diferenças entre os diversos tipos de problema; utilização indiscriminada de material manipulável como recurso auxiliar sem a necessária análise de sua contribuição.

Os estudos de Carraher et al (1988) e Nunes et al (1993) demonstram que as crianças pertencentes a famílias de baixa renda e vendedoras de doces na rua utilizam conhecimentos matemáticos básicos para resolver os problemas com sucesso, mas essas crianças apresentam dificuldades em resolver esses mesmos problemas quando eles surgem no contexto escolar, de modo a, frequentemente, apresentarem respostas erradas. Tais obstáculos não se devem "à incapacidade de raciocinar matematicamente, mas, sim, a não compreensão dos sistemas simbólicos e das convenções ensinadas na escola" (SCHLIEMANN 1998, p.14), pois, na maioria das vezes, as estratégias elaboradas pelas crianças são mais eficientes do que os algoritmos escolares (SCHLIEMANN, 1998). Isso sugere que, mais do que o domínio de um algoritmo matemático<sup>16</sup>, a resolução de problemas requer que os alunos desenvolvam habilidades que permitam a aplicação desse algoritmo.

---

<sup>16</sup> Segundo Cai et al. (1998, p.218), "os algoritmos matemáticos são ferramentas poderosas para uma solução eficiente dos problemas. São regras que garantem a solução quando corretamente aplicadas. Entretanto, existe uma grande quantidade de evidência empírica mostrando que embora alguns estudantes pareçam conhecer um algoritmo, eles não conseguem aplicar corretamente o algoritmo para resolver um problema. Entender conceitualmente um algoritmo implica em conhecer os procedimentos especificados pelo algoritmo e como esses procedimentos podem ser aplicados".

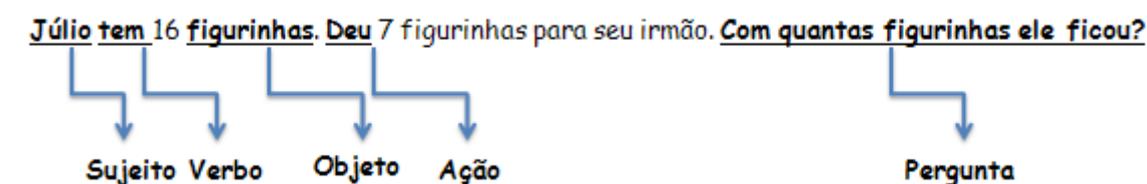
Para Sá (2003, p.78), "um problema aritmético é aquele que, em sua resolução operacional, não são usadas de maneira implícita ou explícita as propriedades da igualdade" e podem ser divididos em problemas aritméticos simples e combinados. Segundo esse autor, "os problemas aritméticos simples são aqueles problemas que envolvem uma operação em sua resolução" e "os problemas aritméticos combinados são aqueles problemas aritméticos que envolvem duas ou mais operações ou a repetição de uma mesma operação na sua resolução" (SÁ, 2003, p.78).

Os problemas aritméticos são os primeiros trabalhados na sala de aula e, na maioria das vezes, estão conectados a situações que os alunos vivenciam no seu dia-a-dia ou, até mesmo, a situações imagináveis pelos alunos, pois, desse modo, os problemas tornam-se significativos e desafiadores para eles.

Ponderando que a Aritmética é a parte da Matemática que trata do estudo dos números, das relações entre eles e dos cálculos das operações básicas, consideramos como problemas aritméticos aqueles que, para a sua resolução, requerem a manipulação de dados numéricos e a escolha ou a elaboração de um algoritmo apropriado. São problemas cujas informações estão relacionadas, geralmente, a alguma ideia de quantidade e, dessa forma, a estratégia de resolução está fundamentada no cálculo aritmético, na compreensão dos dados ou na utilização de algoritmos (POZO, 1998).

Um problema aritmético é constituído, segundo Brito (1999), por duas partes:

a) a estrutura, que representa aquilo que é essencial em um problema, tal como as operações aritméticas que devem ser realizadas e os tipos de transformações necessárias; b) o texto, que reveste a estrutura do problema, tal como a linguagem utilizada no enunciado e as ilustrações. Para Brito (1999), além dessas duas partes, o enunciado de um problema aritmético apresenta um sujeito (indivíduo que vai executar determinada ação); um verbo (indica uma ação); um objeto (indica uma coleção de objetos); uma ação (a qual muda a situação atual do sujeito para outra) e uma pergunta. O exemplo apresentado a seguir ilustra as partes do problema:



Quando o aluno está diante de um problema como esse, além de identificar os dados presentes no enunciado, segundo Parra (1994), ele precisa construir uma representação da relação entre os dados apresentados no enunciado, bem como uma representação de como, trabalhando com eles, pode obter novas informações e aplicar uma operação aritmética adequada para encontrar uma resposta à pergunta formulada.

Nesse sentido, os estudantes necessitam compreender as diferentes ideias envolvidas nas operações aritméticas, pois tal entendimento é essencial ao desenvolvimento do raciocínio matemático e à utilização dos algoritmos.

## 2.6 SOBRE A ARITMÉTICA E SEU ENSINO

A Aritmética tem suas raízes nas civilizações egípcias e babilônicas. De acordo com Eves (1995), na Antiguidade, essas civilizações possuíam uma Aritmética com a qual resolviam os mesmos problemas comerciais do período da Idade Média, tendo como diferença as técnicas de computação e representação utilizadas. Os gregos antigos faziam uma distinção clara entre Logística e Aritmética. Para eles, a parte da Matemática que se destinava aos cálculos práticos era chamada de Logística, enquanto a parte da Matemática que tratava da essência dos números e suas propriedades era denominada Aritmética. Segundo esse mesmo autor, no século XVI com a expansão do comércio europeu e a respectiva necessidade de formar pessoas hábeis nas tarefas do comércio, a Aritmética começou a ter seu atual significado de "Teoria dos Números".

A Aritmética, hoje, é conhecida como a "ciência dos números" ou a "arte de calcular", porque ela nos ajuda a encontrar as respostas para: "Quanto(s)?", "Qual o tamanho?", "Qual a distância?", entre outras. Ela é considerada, portanto, uma das ferramentas matemáticas mais importantes da vida diária, pois a empregamos no dia-a-dia para, por exemplo: fazer compras, saber as horas, preparar receitas, pagar as contas, marcar pontos num jogo de futebol, contar dinheiro, construir prédios, casas, pontes, ruas, em experiências, pesquisas, determinar doses apropriadas de remédios, para contar o gado, calcular a quantidade de arame necessário para construir uma cerca e determinar a quantidade de adubo ou de agrotóxico que deve ser colocada nas plantações.

A palavra Aritmética provém do grego *arithmetiké*, isto é, *tékhné arithmetiké*. O prefixo "aritm(o)" provém do grego "arithmós" que se refere aos números, à quantidade enquanto o sufixo "-ica" atua como formador de substantivos designativos de artes, ciências, técnicas, segundo uma tradição grega calcada no uso do adjetivo feminino em

concordância com o grego *tékhné* "arte, ciência, prática, competência, saber" (HOUAISS, 2001, CD-ROM). Apresentamos, a seguir, um quadro contendo alguns dos significados dados à Aritmética.

**Quadro 3** - Significados atribuídos à Aritmética.

<b>Definição de Aritmética</b>	<b>Fonte</b>
E uma parte da matemática formada pela aritmética comum (cálculo com números definidos) e pela aritmética literal (cálculo com números representados por letras do alfabeto).	Newman (1964)
A arte dos números, parte da matemática em que se investigam as propriedades elementares dos números inteiros e racionais.	Dicionário da Língua Portuguesa Novo Aurélio (1999)
Ciência que estuda as propriedades dos números e as operações realizáveis com eles.	Dicionário Michaelis (1998)
Pode ser entendida como parte da matemática que estuda as operações numéricas tais como adição, subtração, multiplicação, divisão; compêndio que expõe os princípios da aritmética, tudo que pressupõe um cálculo qualquer.	Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa Houaiss (2001, CD-ROM)
Ciência dos números.	Enciclopédia Brasileira Mérito (1967)
Conjunto de afirmações a respeito de como efetuar certos cálculos.	Lins e Gimenez (1997)
Trata de números, operações e suas propriedades visando à resolução de problemas ou de situações que exigem uma resposta numérica.	Souza e Diniz (1996)
Está habitualmente associada a números e cálculos numéricos.	Sfard e Linchevski (1994)

Neste trabalho, a Aritmética é tomada como a parte da Matemática que trata do estudo elementar dos números, das relações entre eles e dos cálculos das operações básicas, como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.

Alguns estudos (KAMII, 1992; LINS; GIMENEZ, 1997; DELLA NINA et al., 2005) têm apontado a existência de problemas no ensino e na aprendizagem da Aritmética. Com relação à proposta curricular, apesar de o seu ensino ser enfatizado nas séries iniciais do Ensino Fundamental, os alunos chegam ao final da escolaridade obrigatória com um conhecimento escasso acerca dos diversos tipos de números e, principalmente, sem ter desenvolvido uma compreensão do modo como as operações aritméticas relacionam-se.

Provavelmente, isso ocorre devido a uma abordagem inadequada do tratamento dos números e das operações. Nessa direção, Kamii (1992) já afirmava, há vinte anos, que, no ensino tradicional da Aritmética, os estudantes são apenas ensinados e treinados a escrever respostas corretas e, desse modo, não são capazes de construir seu próprio conhecimento.

Em geral, quando os conceitos aritméticos são abordados em sala de aula, eles são tratados de forma automática e mecanizada, com base em exercícios repetitivos e seguindo um modelo apresentado pelo professor juntamente com regras e macetes. Na maioria das vezes, esse tratamento tem sido reduzido ao ensino de algoritmos, pois é pouco enfatizada a relação entre os algoritmos e o sistema de numeração decimal. Desse modo, os alunos não têm tido a oportunidade de compreender essa relação, embora ela seja primordial para o domínio dos algoritmos das operações aritméticas e podem ser úteis para o desenvolvimento de suas habilidades de cálculo. Nessa direção, Lins e Gimenez (1997, p.33) salientam essa constatação ao afirmarem que os conceitos aritméticos:

[...] usados na Educação Matemática têm correspondido a relações quantitativas sobre coleções de objetos. [...] Tem-se esquecido freqüentemente que a aritmética inclui também: a) representações e significações diversas (pontos de referência e núcleos, que ampliam a idéia simples do manipulativo); b) análise do porquê dos algoritmos e divisibilidade (elementos conceituais); c) uso adequado e racional de regras (técnicas, destrezas e habilidades); e d) descobertas ou "teoremas" (descobertas, elaboração de conjecturas e processos de raciocínio).

Por conseguinte, é desejável a introdução de uma abordagem que priorize a formação de conceitos aritméticos, de modo que os alunos possam, desde as primeiras séries do Ensino Fundamental, perceber a relevância e o porquê de sua aprendizagem, ao invés de só memorizarem e reproduzirem regras específicas a respeito dos algoritmos das operações. Se a construção dos conceitos aritméticos não for priorizada, é possível que os estudantes encontrem dificuldades em aprender os conceitos relacionados à Álgebra, porquanto a Aritmética tem sido tomada como um alicerce que dá suporte para a aprendizagem da Álgebra. Por isso, o trabalho com:

[...] os conteúdos relacionados aos números e às operações devem privilegiar atividades que possibilitem ampliar o sentido numérico e a compreensão do significado das operações, ou seja, atividades que permitam estabelecer e reconhecer relações entre os diferentes tipos de números e entre as diferentes operações (BRASIL, 1998, p.95-96).

Nesse sentido, a proposta de conectar a Aritmética ao mundo real, de modo que as situações-problema pertencentes a ele proporcionem as bases para o desenvolvimento de um "bom" sentido numérico, encontra sustentação nas pesquisas, entre outras, de Kamii (1992), Lins e Gimenez (1997) e de Della Nina et al (2005), para quem o trabalho com a Aritmética não é desvinculado das situações pertencentes à realidade. Esses autores apontam alguns elementos importantes para o trabalho com aritmética na escola, dentre os quais podemos destacar a capacidade de interpretar informações, ampliando a visão dos números e seus significados, a competência de realizar cálculos mentais vinculados à situações da vida real, o reconhecimento de generalizações, a elaboração de significado para frações e decimais e o envolvimento do cálculo aritmético com situações reais à medida que se *aritmétiza* na vida real.

É desejável que os alunos aprendam a desenvolver seus próprios procedimentos, "reinventem sua própria aritmética em vez de serem ensinados a produzirem respostas corretas" (KAMII, 1992, p.19) para que, dessa maneira, possam atingir uma *nova Aritmética* (LINS; GIMENEZ, 1997). Defendemos a ideia de que os estudantes que desenvolvem seus próprios procedimentos e reinventam a Aritmética são capazes de construir um alicerce para a sua aprendizagem futura e, além disso, eles tornam-se mais confiantes e capazes de "inventar diversas maneiras de resolver problemas e julgar quais são os procedimentos e respostas que fazem sentido" (KAMII, 1992, p.199). Nessa direção, parece que alguns objetivos gerais de um trabalho curricular aritmético são:

- buscar a compreensão da quantidade e a observação e a manipulação de processos operativos;
- fomentar a criatividade e a sensibilidade na busca de propriedades e relações;
- conhecer, assumir e usar uma metodologia heurística, motivando a intuição para ajudar a formulação de hipóteses, generalizações e, em alguns casos, estratégias indutivas;
- reconhecer processos dedutivos e iterativos usados na história, tentando reconhecer e identificar seus fundamentos, e reviver suas reflexões (LINS; GIMENEZ, 1997, p.44).

### 2.6.1 O Pensamento Aritmético

De acordo com Lins e Gimenez (1997, p.49), a construção do conhecimento aritmético "possui muitas facetas e se relaciona com tipos de raciocínios muitos diversos" e, para os alunos construírem esse conhecimento, espera-se que eles desenvolvam suas

habilidades de pensar e apliquem-nas em raciocínios numéricos, algébricos, geométricos e outros. A sua capacidade de raciocinar desenvolve-se ao longo de um período de tempo e está diretamente ligada à vivência de experiências ricas e variadas, relacionadas ao crescimento dos diferentes tipos de pensamento que estão inter-relacionados, tais como o pensamento aritmético, algébrico, geométrico, estatísticos e outros (PORTANOVA, 2006).

Para Vygotsky (1995), podemos distinguir três fases do *pensamento aritmético*: a primeira, a da *aritmética natural*, na qual a criança não cria um princípio de ordenação para distinguir quantidades, isto é, os critérios adotados são "rudimentares"; na segunda fase, da *aritmética mediada*, a criança cria estratégias visuais e manipulativas para criar princípios de ordenação, ou seja, os raciocínios são feitos pela análise de elementos visuais e na terceira fase, a da *aritmética cultural*, são adotados os princípios historicamente sistematizados, no qual o cálculo está apoiado em operações aritméticas e mentais. Desse modo, o pensamento aritmético amplia-se com a compreensão dos números e suas relações, com a compreensão das operações aritméticas e suas relações e a com resolução dos problemas aritméticos. Em outras palavras, podemos dizer que o pensamento aritmético, considerado como envolvido em um tipo específico de fazer matemático ou em certo modo de pensar e interpretar os problemas matemáticos, amplia-se com o desenvolvimento do sentido de número<sup>17</sup>. De acordo Spinillo (2006, p.85) o sentido de número:

Pode ser entendido como uma habilidade cognitiva que permite que o indivíduo interaja de forma bem-sucedida com os vários recursos que o ambiente fornece, de maneira que se torne capaz de gerar soluções apropriadas para realizar as atividades do cotidiano que envolvem a matemática.

Contudo, para Howden (1989, p.11) o sentido de número:

Pode ser descrito como uma boa intuição sobre números e suas relações [...] e se desenvolve gradualmente como consequência da investigação das propriedades dos números, de sua visualização em contextos variados, e da construção de relações que não fiquem limitadas aos algoritmos tradicionais.

Segundo Cebola (2002, p.226), o sentido de número pode ser definido:

[...] como sendo a compreensão genérica que cada um tem dos números e das operações. Esta compreensão inclui não só a capacidade mas também a tendência que se possui para desenvolver estratégias úteis que envolvem

---

<sup>17</sup> Da expressão inglesa number sense.

números e operações como um meio de comunicação, processamento e interpretação da informação, na resolução de problemas.

De acordo com Lins e Gimenez (1997, p.60), o sentido de número possui algumas características, tais como:

[identificar] significados para os números e para as operações, reconhecer o valor relativo dos números, descobrir relações e padrões, imaginar e descrever uma quantidade em função de outras, de formas diversas, e intuir e estabelecer raciocínios na resolução de problemas. Também há fatores de atitude e valor como o saber situar-se no "mundo dos números", e reconhecer o valor e os limites do uso do cálculo mental, escrito e com calculadora.

Consoante Spinillo (2006), podemos apontar alguns indicadores do sentido de número, tais como: a habilidade de compor e decompor números, de comparar quantidades em termos absolutos e relativos, de compreender o efeito das operações sobre os números, de reconhecer o significado e as funções dos números nas situações do dia-a-dia; a capacidade de julgar e fazer inferências sobre quantidades, de reconhecer se um resultado obtido é adequado ou não; utilizar âncoras durante o processo de resolução das operações aritméticas; usar e reconhecer que um instrumento ou um suporte de representação pode ser mais útil ou apropriado do que outro. Para Spinillo (2006, p.93), "o uso de âncoras revela formas flexíveis de raciocínio durante o processo de resolução de uma situação-problema". O exemplo abaixo ilustra a resolução de duas operações aritméticas em que o resultado da primeira foi utilizado como âncora.

$$\begin{array}{r}
 \overset{1}{4}8 \\
 + 16 \\
 \hline
 \overset{1}{6}4 \\
 \times 3 \\
 \hline
 192
 \end{array}$$

A seguir, apresentamos outro exemplo retirado do trabalho de Spinillo (2006), a fim de ilustrar o uso de âncoras durante o processo de resolução de determinado problema, no qual a criança utiliza o resultado obtido em uma operação aritmética como âncora para resolver outra operação, sem adicionar tudo novamente:

Examinador: Eu sei que  $16 + 30$  é igual a 46. Quanto vai ser  $16 + 30 + 2$ ?  
 Criança: Vai ser 48.

Examinadora: Como pensou para descobrir isso?

Criança: Fiz 46, depois 47 e 48 (indicando dois dedos). Era mais 2, não era?

Examinadora: Vou dizer outra agora. Eu sei que  $18 + 22$  é igual a 40. Quanto vai ser  $18 + 22 - 5$ ?

Criança: Quarenta menos 5 fica 35 (SPINILLO, 2006, p.95-96).

O sentido de número é uma das principais particularidades do pensamento aritmético, sendo algo pessoal e desenvolvido de diferentes formas por cada indivíduo. Também podemos destacar outras características do pensamento aritmético, tal como encontrado no trabalho de Sá (2003, p.153), que define a unidade do *pensamento aritmético* como o "conjunto de conceitos, operações, propriedades e técnicas que permitem resolver os problemas padrões aritméticos envolvendo os números naturais". Nesse sentido, o autor aponta os componentes do pensamento aritmético, sendo eles:

As operações fundamentais no seu aspecto semântico; a igualdade como transformação; os algoritmos e técnicas de cálculo das operações e expressões; as propriedades das operações (SÁ, 2003, p.154).

O primeiro componente do pensamento aritmético, ainda de acordo com o pesquisador, é o aspecto semântico das operações fundamentais, constituindo:

[...] o significado de cada uma das operações aritméticas, que permitem a habilidade de decodificar uma situação problema sem depender de uma palavra isolada, mas, sim, da interpretação do contexto em função da maior ou menor familiaridade com este (SÁ, 2003, p.155).

Em relação ao segundo componente, a igualdade como transformação, Sá (2003) deixa claro que o sinal da igualdade na aritmética funciona como um operador que transforma o membro esquerdo da igualdade num resultado numérico que surge no membro direito, ou seja, o sinal de igualdade é utilizado para representar transformações ou resultados. O terceiro componente do pensamento aritmético, constitui:

O conjunto de regras e técnicas que o sujeito tem conhecimento para realizar o cálculo das operações isoladamente ou em expressões, sendo que essas técnicas podem ser algorítmicas, mentais, estimativas, tecnológicas isoladamente ou uma combinação dessas possibilidades (SÁ, 2003, p.155).

O último componente do pensamento aritmético, as propriedades das operações, "constituem os resultados relativos às particularidades de cada uma operação que servem de subsídio/auxílio para o desenvolvimento do cálculo simbólico que é realizado

durante a resolução de problemas" (SÁ, 2003, p. 155). Assim, segundo o autor, quando o aluno demonstrar habilidade<sup>18</sup> ao resolver problemas aritméticos, ele terá construído seu pensamento aritmético. Desse modo, ao pensar aritmeticamente, o estudante desenvolverá suas habilidades em realizar os cálculos das operações e, então, resolverá os problemas aritméticos.

Nessa direção, Lins (1994) afirma que *pensar aritmeticamente* significa que os objetos com os quais se está lidando são exclusivamente os números, as operações aritméticas e uma relação de igualdade. Assim, *pensar aritmeticamente* remete-nos "à idéia de modelar com os números" (LINS, 1992, p.12).

Considerando por base as considerações apresentadas, tomamos, no presente estudo, como pensamento aritmético a capacidade do aluno de compreender os números e suas relações, utilizá-los para representar quantidades, usar os algoritmos, as regras e as técnicas de cálculo das operações aritméticas e compreender o significado das operações aritméticas e o modo como elas relacionam-se.

## 2.7 A RESPEITO DO PISA<sup>19</sup>

Em 1997, devido a um compromisso assumido pelos governos dos países membros<sup>20</sup> da OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico) para monitorar os resultados dos sistemas educacionais em termos do desempenho dos alunos em uma estrutura internacional comum, foi criado o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes<sup>21</sup>, o PISA.

O seu objetivo é avaliar em que medida os estudantes, com idade entre 15 anos e 3 meses e 16 anos e 2 meses<sup>22</sup>, matriculados a partir da 7ª série do Ensino Fundamental, estão preparados para enfrentar os desafios da vida futura, ou seja, como eles, próximos do término da escolaridade obrigatória, lidam com os conhecimentos e as competências construídos ao longo de 9 ou 10 anos de estudo, a fim de resolver situações em

---

<sup>18</sup> Neste trabalho, utilizamos o termo habilidade como a qualidade ou a característica de quem é hábil ao realizar determinada tarefa.

<sup>19</sup> Texto elaborado com base nos documentos oficiais do PISA. Disponíveis em [www.inep.gov.br/www.oecd.org](http://www.inep.gov.br/www.oecd.org).

<sup>20</sup> Os países membros da OCDE são: Alemanha, Austrália, Áustria, Bélgica, Canadá, Coréia, Dinamarca, Eslováquia, Espanha, Estados Unidos, Finlândia, França, Grécia, Holanda, Hungria, Irlanda, Islândia, Itália, Japão, Luxemburgo, México, Noruega, Nova Zelândia, Polônia, Portugal, Reino Unido, República Tcheca, Suécia, Suíça e Turquia.

<sup>21</sup> Do original Programme for International Student Assessment (PISA).

<sup>22</sup> Os estudantes com idade entre 15 anos e 3 meses e 16 anos e 2 meses, nascidos entre 1 maio de 1990 e 30 de abril de 1992 que participaram da avaliação do PISA são chamados *alunos elegíveis* (INEP, 2008).

ambientes não escolares, avaliando suas opções e tomando decisões. Além disso, o PISA tem o objetivo de obter informações a respeito do desempenho dos alunos de todos os países participantes e compará-los para orientar políticas e práticas educacionais, de modo a contribuir para a melhoria da qualidade da educação (OECD<sup>23</sup>, 2003).

O PISA é um programa de avaliação realizado trienalmente nos países membros e convidados<sup>24</sup> da OCDE, como é o caso do Brasil, o qual participa da avaliação desde sua primeira aplicação, ocorrida em 2000, cujo foco principal foi o Letramento em Leitura. No Brasil, o INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - tem sido, desde então, o responsável por essa avaliação, da qual participam de cinco mil a dez mil alunos de pelo menos cento e cinquenta escolas de cada país participante.

O programa avalia o desempenho dos alunos nas áreas de Leitura, Matemática e Ciências e, para isso, propõe-lhes problemas da "vida real", indo além daqueles tipos que são, freqüentemente, encontrados nas salas de aula e nos livros didáticos. Os problemas são fundamentados no conceito de *letramento*<sup>25</sup>, o qual, em Matemática, segundo os documentos do PISA, "tem relação com a capacidade dos alunos de analisar, raciocinar e comunicar-se eficazmente ao propor, resolver e interpretar problemas matemáticos em uma variedade de situações que envolvem conceitos matemáticos quantitativos, espaciais, probabilísticos e outros" (OECD, 2007, p.304). Esse termo pode, por conseguinte, ser definido como:

A capacidade de o indivíduo identificar e entender o papel que a matemática desempenha no mundo, para fazer julgamentos bem fundamentados, e utilizar a matemática e envolver-se com ela de forma que atenda as necessidades de sua vida como cidadão construtivo, consciente e reflexivo (OECD, 2007, p.304).

A cada aplicação do PISA, uma "área principal" é focalizada e, com isso, são dedicados a ela dois terços do tempo total da aplicação do exame. Em 2000, o foco foi o

---

<sup>23</sup> Do original OECD - Organisation for Economic Co-operation and Development.

<sup>24</sup> Os países convidados que participaram da avaliação do PISA/2006 são: Argentina, Azerbaijão, Brasil, Bulgária, Catar, Chile, China/Hong Kong, China/Macau, China/ Taipei, Colômbia, Croácia, Eslovênia, Estônia, Indonésia, Israel, Jordânia, Letônia, Liechtenstein, Lituânia, Montenegro, Quirguistão, Romênia, Rússia, Sérvia, Tailândia, Tunísia, Uruguai.

<sup>25</sup> Tem-se utilizado o termo "letramento" para traduzir o inglês "literacy" (literacia em Portugal), que indica a capacidade do indivíduo de ir além da simples aquisição de conhecimentos, demonstrando competência para aplicar esses conhecimentos em situações do dia-a-dia. De acordo com Soares (1998), o termo "letramento" surgiu pela primeira vez no Brasil em 1986 como uma forma de distinguir um fenômeno diferente da alfabetização. Já na década de 90, tornou-se comum usar "letramento" para indicar "O resultado da ação de ensinar e aprender as práticas sociais de leitura e escrita" (INEP, 2008).

letramento em Leitura; em 2003, foi a área de Matemática; em 2006, foi Ciências; e, neste ano de 2009, foi novamente Leitura.

Baseando-se no desempenho dos alunos, a avaliação do PISA fornece três tipos de resultados: os *indicadores básicos*, os quais dão um perfil geral dos conhecimentos e das competências dos alunos; os indicadores contextuais, que mostram como os conhecimentos e competências dos estudantes relacionam-se a variáveis demográficas, sociais, econômicas e educacionais; e os *indicadores de tendência*, os quais emergirão a partir dos dados a serem coletados ao longo da aplicação do exame (INEP, 2008).

No letramento em Matemática, os conhecimentos e as competências dos alunos são avaliados de acordo com três dimensões relacionadas aos seguintes aspectos: o *conteúdo matemático* ao qual se relacionam diferentes problemas e questões; as *situações ou contextos* utilizados como fonte de materiais de estímulo, nos quais os problemas são apresentados; e as *competências* que os alunos devem recorrer de forma a conectar a matemática com o mundo real e a resolver os problemas.

Os conteúdos matemáticos da avaliação do PISA foram extraídos de áreas de conteúdos amplas e, para atender aos requisitos de desenvolvimento histórico, a abrangência da área e o reflexo das linhas principais do currículo escolar foram estabelecidos em torno de quatro ideias abrangentes: *Quantidade, Espaço e Forma, Mudança e Relações e Incerteza*. Segundo os documentos do PISA, "com essas quatro idéias, o conteúdo matemático é organizado em um número de áreas suficientes para assegurar uma amostragem de itens no currículo" (OECD, 2003, p.35).

A ideia abrangente *Quantidade* foca a necessidade de quantificação para organizar o mundo. De acordo com os documentos do PISA (OECD, 2004), os itens classificados como sendo pertencentes a essa área estão diretamente relacionados à Aritmética e envolvem padrões quantitativos, fenômenos numéricos e relações. Ademais, ela está relacionada à utilização de números para representar quantidades, relações e operações de aritmética e de estimativas, padrão numérico, compreensão de tamanho relativo e o reconhecimento de padrões numéricos. Essa área de conteúdo lida com o processamento e a compreensão dos números que são representados de diversas maneiras. Um dos aspectos dessa área de conteúdo é o raciocínio quantitativo, o qual "envolve o sentido de número, a representação de números, a compreensão do significado das operações mentais de aritmética e de estimativas" (OECD, 2004, p.39). A área de conteúdo Espaço e Forma está estreitamente ligada à geometria e envolve fenômenos e relações espaciais e geométricas. Os itens acerca de Mudança e Relações têm uma relação estreita com a Álgebra e envolvem manifestações

matemáticas de mudança, relações funcionais e dependência entre variáveis. A área de Incerteza inclui fenômenos e relações probabilísticas e estatísticas, podendo associar seu conteúdo ao campo da Estatística e da Probabilidade.

Na avaliação do PISA, são definidas e utilizadas quatro situações-tipo para a resolução dos problemas: *Pessoais, Educacionais ou Ocupacionais, Públicas e Científicas*. As Situações Pessoais estão mais próximas à vida do aluno, ou seja, tratam da maneira como um problema matemático afeta diretamente a existência do aluno e como ele percebe o contexto do problema. As *Situações Educacionais ou Ocupacionais* emergem na vida do estudante em ambientes que ele frequenta, tais como o ambiente escolar ou o profissional. Trata da maneira como esses ambientes podem exigir que ele resolva os problemas, os quais requerem uma solução matemática. As *Situações Públicas* dizem respeito à maneira como o aluno compreende as relações entre os indivíduos da sua comunidade e exigem que ele avalie os aspectos da situação externa, a qual pode ter conseqüências relevantes para a vida coletiva. As *Situações Científicas* são as mais abstratas e envolvem a compreensão de um problema explicitamente matemático, ou seja, aquele problema que o estudante apenas encontra no contexto escolar (OECD, 2004).

A avaliação requer que os alunos resolvam os problemas matemáticos fundamentados em algum contexto da "vida real" e utilizem os conhecimentos e as competências matemáticas que sejam relevantes para resolvê-los e, para isso, eles devem envolver-se em um processo de matematização.

Segundo os documentos do PISA (OECD, 2003), esse processo tem início quando o aluno defronta-se com um problema situado na "realidade". Para resolvê-lo, é preciso traduzi-lo para o contexto matemático, identificar um tema relevante da matemática, representar o problema de forma diferente, organizando-o de acordo com os conceitos matemáticos envolvidos. Depois de resolvido, deve ser traduzido para o contexto no qual se originou e, finalmente, é preciso comunicar essa resolução em termos da situação real. Para que esse processo de matematização seja aplicado com sucesso, o estudante deve possuir certo número de competências matemáticas, as quais foram organizadas segundo três agrupamentos, balizados nos tipos de demandas cognitivas necessárias para resolver os problemas matemáticos. São eles: o agrupamento Reprodução - as competências desse agrupamento envolvem a reprodução dos conhecimentos, aptidões já construídas e praticadas em outros momentos e a resolução de problemas de simples rotina, tais como a aplicação de algoritmos, a manipulação de expressões e a realização de cálculos; o agrupamento Conexão - as suas competências apóiam-se no agrupamento reprodução ao resolver os problemas nas

situações que não são de simples rotina, mas ainda pertencem a contextos familiares ou quase familiares; o agrupamento Reflexão - as competências desse agrupamento envolvem o pensamento matemático mais amplo, exige que os estudantes façam reflexões ao resolver um problema, o generalizem e apresentem uma explicação dos resultados obtidos.

As tarefas que devem ser desenvolvidas dentro de cada agrupamento de competências são descritas no quadro a seguir.

**Quadro 4** - Indicadores das tarefas matemáticas em cada agrupamento de competências

<b>Agrupamento</b>	<b>Tarefas desenvolvidas</b>
Reprodução	- resolução de problemas envolvendo contextos familiares; - reprodução de conhecimentos e habilidades aprendidos previamente; - reprodução de procedimentos rotineiros e regras algorítmicas.
Conexão	- resolução de problemas não rotineiros; - conexão entre as diferentes partes do conhecimento matemático e integração de informações; - desenvolvimento de estratégias e procedimentos próprios e escolha de ferramentas matemáticas adequadas.
Reflexão	- resolução de tarefas que requerem compreensão e reflexão para sua resolução; pensar e raciocinar matematicamente; - matematização; - generalização.

Fonte: Rico (2004).

Para avaliar os alunos nos três domínios-chave citados anteriormente, o PISA elaborou diferentes tipos de itens, dos quais podemos destacar:

- **Itens de Múltipla Escolha:** a resolução desse item exige que os alunos escolham apenas uma alternativa entre as opções apresentadas.
- **Itens de Múltipla Escolha Complexa:** para resolvê-los, os alunos devem escolher uma resposta para cada opção apresentada.
- **Itens de Resposta de Construção Fechada:** para sua resolução, os estudantes devem apenas construir uma resposta para o problema apresentado e não precisam justificar quais procedimentos foram utilizados para encontrar determinada resposta.
- **Itens de Resposta Curta:** exigem que os alunos apenas apresentem uma resposta breve, não sendo necessário que justifiquem a resposta obtida.
- **Itens de Resposta de Construção Aberta:** exigem que os alunos construam uma resposta para o problema apresentado, justifiquem quais

foram os procedimentos utilizados para obter a resposta e apresentem os cálculos realizados.

A avaliação do PISA 2006, que focalizou o letramento em ciências, foi composta por 31 questões de matemática, totalizando 48 itens, abrangendo as três dimensões da estrutura utilizada pelo PISA e os diferentes tipos de itens anteriormente citados. A tabela a seguir mostra a distribuição desses itens.

**Tabela 1** – Distribuição dos itens de Matemática da avaliação do PISA 2006, de acordo com as dimensões da estrutura do PISA.

		Tipos de Itens					
		Múltipla Escolha	Múltipla Escolha Complexa	Construção Fechada	Resposta Curta	Construção Aberta	Total
Ideias Estruturadoras	Quantidade	3	2	2	6	0	13
	Espaço e Forma	4	1	2	1	4	12
	Mudança e Relações	3	0	2	1	7	13
	Incerteza	6	1	0	2	1	10
	Total	16	4	6	10	12	48
Situações ou Contextos	Pessoais	3	1	1	2	1	8
	Educacionais ou Ocupacionais	3	1	2	1	1	8
	Públicas	8	1	3	3	4	19
	Científicas	2	1	0	4	6	13
	Total	16	4	6	10	12	48
Agrupamento Competências	Reprodução	5	0	2	2	2	11
	Conexão	4	1	2	0	6	13
	Reflexão	7	3	2	8	4	24
	Total	16	4	6	10	12	48

Salientamos que os quarenta e oito (48) itens de matemática presentes nessa avaliação não foram disponibilizados<sup>26</sup> para o domínio público.

### 2.7.1 RESULTADOS BRASILEIROS DA AFERIÇÃO DO PISA 2006

Em 2006, o Brasil participou pela terceira vez da aferição do PISA, apresentando um aumento significativo no rendimento relativo ao letramento em Matemática, o que mereceu destaque por parte da OCDE.

**Quadro 5** – Pontos obtidos pelo Brasil na aferição do PISA dos anos 2000, 2003 e 2006 nas três áreas avaliadas. Fonte: Adaptado de INEP (2007).

	<b>Pontos obtidos</b>		
	PISA 2000	PISA 2003	PISA 2006
<b>Letramento em Ciências</b>	375	390	390
<b>Letramento em Leitura</b>	396	403	393
<b>Letramento em Matemática</b>	334	356	370

Os dados, apresentados no Quadro 5, mostram que, na aferição do PISA de 2006, o Brasil obteve 14 pontos a mais no Letramento em Matemática em relação à aferição de 2003, conquistando média 370. A aplicação do PISA 2006 ocorreu, no Brasil, entre os dias 7 e 11 de agosto, em 625 escolas de 390 municípios de todas as unidades da federação.

Na aferição do PISA 2006, o desempenho no letramento em ciências, matemática e leitura, nas diferentes regiões do país, é apresentado no próximo quadro:

<sup>26</sup> Para ter acesso às questões de matemática da aferição do PISA 2006, os participantes envolvidos nesta pesquisa assinaram um termo de sigilo exigido pelo INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

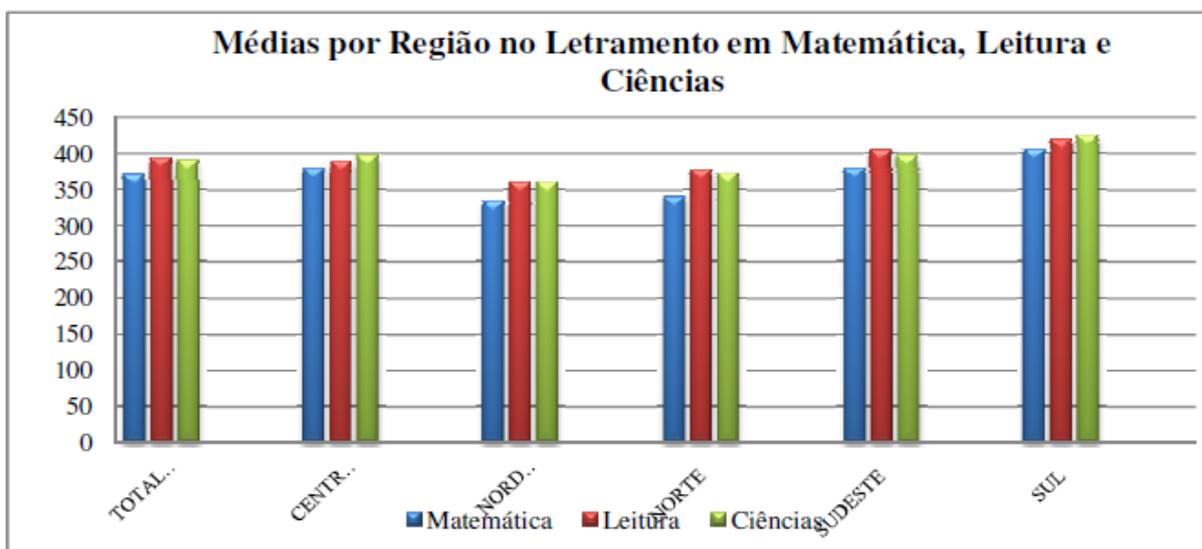
**Quadro 6** – Distribuição das médias das regiões brasileiras obtidas na avaliação do PISA 2006.

PISA 2006 - Média Brasil por Região						
Região	Matemática		Leitura		Ciências	
	Média	Erro Padrão	Média	Erro Padrão	Média	Erro Padrão
TOTAL (BRASIL)	370	2,933	393	3,743	390	2,786
CENTRO OESTE	378	9,461	388	10,163	396	8,868
NORDESTE	333	6,353	359	9,336	359	4,859
NORTE	339	10,162	377	8,758	372	6,984
SUDESTE	378	4,358	404	4,931	396	4,33
SUL	405	6,854	419	8,14	424	6,529

Fonte: Adaptado de INEP (2007).

O gráfico apresenta as médias das regiões brasileiras.

**Gráfico 1** - Médias regionais no Letramento em Ciências, Matemática e Leitura



Fonte: Adaptado de INEP (2007).

O Quadro 7 apresenta a média dos estados da Região Sul.

**Quadro 7** - Distribuição das médias da Região Sul obtidas na avaliação do PISA 2006.

PISA 2006 - Desempenho da Região Sul Letramento em Matemática	
UF	Média
Paraná	400
Santa Catarina	413
Rio Grande do Sul	405

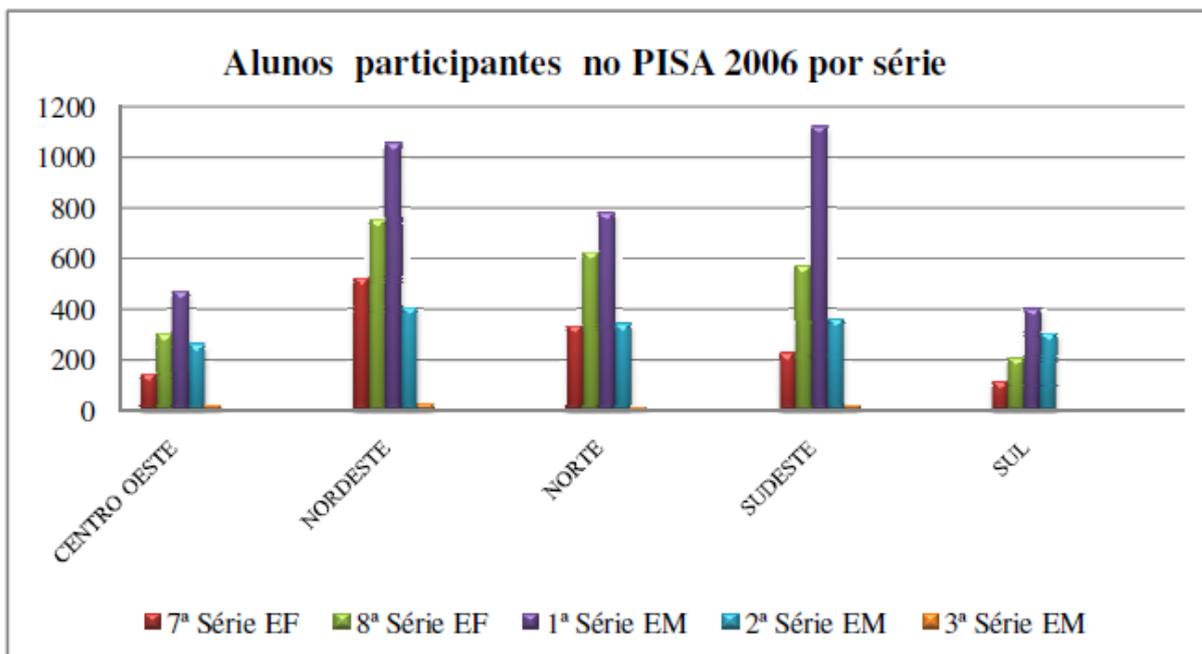
**Fonte:** Adaptado de INEP (2007).

A seguir, apresentamos a quantidade de alunos das regiões brasileiras que participaram da aferição do PISA 2006.

**Quadro 8** – Quantidade de alunos das regiões brasileiras que participaram da aferição do PISA 2006, de acordo com a série em que estavam matriculados.

Região	7ª Série EF	8ª Série EF	1ª Série EM	2ª Série EM	3ª Série EM
<b>CENTRO OESTE</b>	143	301	468	260	17
<b>NORDESTE</b>	522	752	1054	405	23
<b>NORTE</b>	332	623	778	340	12
<b>SUDESTE</b>	225	569	1119	357	19
<b>SUL</b>	113	206	401	303	3

O próximo gráfico apresenta o total de alunos participantes da aferição do PISA 2006 no Brasil, distribuídos por região e segundo a série em que estão matriculados.

**Gráfico 2** – Distribuição dos alunos participantes do PISA/2006 por regiões e série

Fonte: Adaptado de INEP (2007).

Analisando os dados apresentados no Gráfico 2, observamos que: o total de alunos que participou da aferição do PISA 2006 nas regiões Centro Oeste, Nordeste, Norte, Sudeste e Sul foram, respectivamente, 1189, 2756, 2085, 2289 e 1026; em cada região, menos da metade do total de alunos que participou dessa avaliação estava matriculados na série esperada para sua idade (1ª Série do Ensino Médio) e uma parcela considerável encontrava-se em série anterior. O quadro seguinte mostra o quantitativo de alunos do Paraná presentes na aferição do PISA 2006 segundo a série em que estavam matriculados.

**Quadro 9** – Distribuição quantitativa de alunos do Estado do Paraná presentes na aferição do PISA 2006.

Região Sul - UF Paraná				
Número de Alunos Matriculados por Série				
7ª Série EF	8ª Série EF	1ª Série EM	2ª Série EM	3ª Série EM
37	62	135	111	0

Fonte: Adaptado de INEP (2007).

No Estado do Paraná, foram selecionados 400 alunos para participar da aferição do PISA 2006, porém verificou-se uma perda de cerca de 20% de alunos da amostra que pode ser explicada pelos seguintes fatores: transferência de alunos no período de apuração dos dados, abandono escolar e outros. Dessa forma, como se observa no Quadro 7, somente 345 alunos participaram da aferição, o que representa 86,3% dos estudantes selecionados. Dos 345 que participaram da aferição do PISA 2006, 261 resolveram a prova de matemática; a produção escrita deles constitui-se, portanto, no objeto dessa investigação.

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A fim de conhecer como os alunos paranaenses lidam com as questões discursivas de matemática (área de conteúdo *Quantidade*) consideradas não-rotineiras<sup>27</sup>, este trabalho tem por objetivo geral analisar os registros escritos dos alunos paranaenses que participaram da aferição do PISA 2006. Assim, buscou-se identificar e inventariar quais informações estão presentes no enunciado das questões e como as retiram, os conteúdos matemáticos utilizados, as técnicas operatórias apresentadas, além de identificar, inventariar e analisar quais as estratégias e procedimentos são desenvolvidos para obter a solução do problema.

Por se tratar de um estudo cuja intenção é a de analisar e discutir registros escritos de alunos, optou-se pela realização de uma pesquisa predominantemente *qualitativa*, pautada em uma *abordagem interpretativa* sob as orientações presentes na *Análise de Conteúdo* (BARDIN, 2004). De acordo com Bogdan e Bicklen (1994, p.49), a pesquisa qualitativa exige, por um lado:

Que o mundo seja examinado com a idéia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo.

Por outro lado, a *Análise de Conteúdo*, segundo Bardin (2004, p.26), pode ser considerada como:

Um conjunto de técnicas que permitem a exploração e análise das informações de uma pesquisa. É por meio da análise de conteúdo que é possível retirar informações contidas num texto, interpretá-las podendo assim relacioná-las ao contexto em que se deu determinada produção [...] a intenção da *Análise de Conteúdo* é a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção (ou, eventualmente de recepção), inferência esta que recorre a indicadores (quantitativos ou não).

As diferentes fases da *Análise de Conteúdo*, segundo Bardin (2004), são organizadas em torno de três fases cronológicas: i) a pré-análise; ii) a exploração do material; iii) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. A primeira fase, caracterizada pela pré-análise, é a fase da organização do material, que corresponde a:

---

<sup>27</sup> Consideramos questões não-rotineiras as questões que "muito pouco ou quase nunca aparecem na sala de aula ou no livro didático" (BURIASCO, 1999, p.95).

Um período de intuições, mas, tem por objetivo tornar operacionais e sistematizar as idéias iniciais, de maneira a conduzir a um esquema preciso do desenvolvimento das operações sucessivas, num plano de análise (BARDIN, 1977, p.95).

A segunda fase da análise de conteúdo, caracterizada pela exploração do material, segundo Bardin (1977, p. 101), "consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras previamente formuladas". Na terceira fase, os resultados são tratados com o intuito de torná-los significativos e válidos. Nessa etapa, o investigador pode "propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos, ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas" (BARDIN, 2004, p.34).

### 3.1 A OBTENÇÃO DA AMOSTRA

Tendo em vista o objetivo deste trabalho, utilizamos como objeto de estudo a produção escrita em questões<sup>28</sup> discursivas de matemática, consideradas não-rotineiras<sup>29</sup> contidas nas provas da amostra de alunos paranaenses que participaram da aferição do PISA de 2006. Cabe ressaltar que as seis (6) questões analisadas não foram disponibilizadas para o domínio público, não sendo possível apresentar, portanto, o seu enunciado.

Nessa aferição, a prova de matemática continha treze (13) itens distribuídos em dez (10) questões que envolvem aspectos da área de conteúdo *Quantidade*. Para esta investigação, selecionamos os sete (7) itens discursivos que, segundo os documentos do PISA (FRANÇA, 2007), são da área de conteúdo *Quantidade*, conforme o Quadro 10, apresentado a seguir:

---

<sup>28</sup> Este trabalho não tem a intenção de avaliar o PISA nem mesmo criticar o trabalho feito por esse programa. Utilizamos questões da prova de matemática desse programa apenas por serem consideradas não-rotineiras já validadas, uma vez que fazem parte da prova de um reconhecido estudo internacional

<sup>29</sup> Consideramos que as questões das provas de matemática das aferições do PISA são não-rotineiras por focalizarem "problemas da vida real, indo além dos tipos de situações e problemas que tipicamente se encontram nas salas de aula escolares" (OCDE, 2004, p.24).

**Quadro 10** – Distribuição dos itens discursivos nas questões de Matemática com conteúdo Quantidade.

Questão	Itens	Identificação
Q3	Q3-1	Item 1
	Q3-2	Item 2
Q4	Q4-1	Item 3
Q5	Q5-3	Item 4
Q6	Q6-1	Item 5
Q13	Q13-2	Item 6
Q15	Q15-2	Item 7

Os diferentes cadernos que compuseram a prova de matemática do PISA/2006 não continham as mesmas questões. Por conta disso, apesar de nem todos os alunos terem resolvido todas as questões que compunham o caderno que receberam, a tabela a seguir mostra a quantidade de alunos paranaenses que recebeu um caderno contendo cada um dos sete (7) itens, totalizando setecentos e trinta e um (731) alunos.

**Tabela 2** - Distribuição da quantidade de alunos paranaenses por item.

Questão	Identificação	Quantidade de alunos
Q3	Item 1	108
	Item 2	108
Q4	Item 3	95
Q5	Item 4	111
Q6	Item 5	95
Q13	Item 6	107
Q15	Item 7	107
Total		731

O estudo desses registros escritos dos alunos paranaenses, nos itens da área de conteúdo *Quantidade* na prova de Matemática do PISA/2006, foi realizado em três fases, as quais serão descritas a seguir.

## 3.2 CAMINHOS PERCORRIDOS

### 3.2.1 A Primeira Fase

Na primeira fase, isto é, da *pré-análise*, organizamos as provas da amostra obtida. Cada uma das duzentas e sessenta e uma (261)<sup>30</sup> provas pertencentes à amostra foi nomeada de modo a possibilitar a sua identificação, para a qual utilizamos cinco dígitos e quatro letras. Por exemplo, a prova PRC02E024 indica que ela pertence à amostra de alunos paranaenses (PR), do caderno 02 (C02) e que foi a vigésima quarta prova corrigida (E024).

A partir disso, realizamos uma leitura das resoluções, observando os procedimentos desenvolvidos pelos alunos ao resolver cada item, com o intuito de nos familiarizarmos com os registros escritos apresentados nas provas. Duas leituras foram realizadas: uma leitura vertical das resoluções, que consistiu em estudar as resoluções de todas as questões de um mesmo aluno; uma leitura horizontal, na qual averiguamos os procedimentos utilizados para a resolução da primeira questão e os respectivos itens de todas as provas, em seguida da segunda questão de todas as provas e assim por diante.

### 3.2.2 A Segunda Fase

Na segunda fase, a da exploração do material, resolvemos todas as questões presentes na prova, identificamos os conteúdos matemáticos requeridos para a resolução, fizemos um levantamento dos conteúdos utilizados pelos alunos na resolução das questões, identificamos as estratégias e os procedimentos por eles desenvolvidos e compusemos um gabarito para nos auxiliar durante o processo de correção. Elaboramos, também, os critérios de correção e de descrição para cada item da prova.

Fizemos uma correção baseada no *Manual para correção das provas com questões abertas de matemática* AVA/2002 (BURIASCO; CYRINO; e SOARES, 2003). Para a correção, utilizamos os códigos 2, 1, 0 e 9 para classificar as resoluções de cada item. As resoluções foram consideradas totalmente corretas quando o aluno elaborava uma estratégia que resolvia o problema e desenvolvia corretamente o procedimento. Essas receberam *crédito completo* representado pelo Código 2. Também receberam crédito completo a apresentação apenas da resposta correta, pois consideramos que os estudantes podem ter realizado os

---

<sup>30</sup> A amostra continha 345 cadernos da prova, porém apenas 261 cadernos continham questões de Matemática.

cálculos mentalmente ou com o auxílio da calculadora, cujo emprego era permitido na aferição do PISA/2006.

O *crédito parcial*, representado pelo Código 1, foi utilizado para representar as resoluções consideradas parcialmente corretas, ou seja, aquelas nas quais a estratégia utilizada pelo aluno para resolver o problema estava correta, porém apresentava algum procedimento desenvolvido incorretamente.

As resoluções incorretas, nas quais os alunos optaram por empregar uma estratégia que não resolvia o problema, mesmo que os procedimentos fossem desenvolvidos corretamente, ou as resoluções nas quais os alunos apresentaram outras estratégias que não resolviam o problema receberam *nenhum crédito* representado pelo Código 0 (zero). Também receberam código 0 os alunos que apenas apresentaram uma resposta diferente da considerada correta.

Receberam Código 9 os itens das questões em que não havia registro escrito, ou seja, a resposta ao item foi deixada "em branco", não apresentando indícios da tentativa de resolução, ou que continha expressões do tipo "não sei" ou "não deu tempo de resolver".

Por meio da correção realizada, foi possível ter um conhecimento geral das resoluções apresentadas pelos alunos em cada item da prova. Após as correções, o próximo passo foi realizar as descrições das resoluções encontradas em cada item. Feitas as descrições de cada uma das resoluções, passamos a um processo de validação mediante a estratégia da validação pelos pares e, para isso, dois outros participantes do GEPEMA<sup>31</sup> examinaram, individualmente, cada descrição, aprovando-a ou propondo ajustes. O modelo utilizado para a validação foi:

---

<sup>31</sup> GEPEMA - Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação - Universidade Estadual de Londrina.

**Quadro 11** - Modelo utilizado para a validação das descrições das questões

Questão	Nome da questão		(Item - de -)	Cadernos 04 - 07- 08 - 09
<b>1º Descrição:</b>	Nome do descritor			
<b>1º Revisão:</b>	Nome do revisor			
<b>2º Revisão:</b>	Nome do revisor			
Estudante	Créd	1º Descrição	1º Revisão	2º Revisão
E001	2	Não apresenta uma resolução. Apresenta uma resposta correta.	OK.	OK.
E005	2	Apresenta uma resolução. Arma e efetua corretamente uma divisão que resolve a questão. Apresenta uma resposta correta.	OK.	OK.
E011	9	Não apresenta resolução nem resposta.	Não há indícios de produção escrita. Não responde.	Não apresenta resolução. Não apresenta resposta.

A partir do processo de descrição dos registros escritos dos alunos, passamos para uma fase de classificação desses registros escritos, os quais foram agrupados de acordo com o tipo de estratégia utilizada e o procedimento desenvolvido. Esses agrupamentos foram construídos independentemente do crédito atribuído a questão. Desse modo, criamos grupos de provas, mediante a identificação das estratégias semelhantes utilizadas pelos alunos para resolver o item e os subgrupos, segundo os procedimentos semelhantes que foram desenvolvidos.

### 3.2.3 A Terceira Fase

Após a fase de classificação dos registros escritos em agrupamentos, partimos para a última etapa, caracterizada, segundo Bardin (2004), por inferência e interpretação. A partir dos agrupamentos realizados, passamos a analisar os registros escritos dos alunos pertencentes a cada subgrupo, buscando fazer inferências sobre: a) como eles interpretaram o enunciado das questões; b) quais conteúdos matemáticos utilizaram para resolvê-las; c) como lidaram com as técnicas operatórias dos algoritmos; d) as dificuldades apresentadas; e) a utilização de âncoras durante a resolução; f) como empregaram as estratégias requeridas na resolução; g) os procedimentos desenvolvidos.

Além da análise descritiva e interpretativa dos registros escritos, buscamos apresentar uma discussão à luz do referencial teórico adotado. O relato dessas análises e dos aportes com a literatura pertinente constitui a seção 5, intitulada de *Leituras*.

## 4 DAS CARACTERÍSTICAS DOS ITENS

Nesta parte do trabalho, apresentamos algumas considerações a respeito do enunciado de cada item, suas características segundo os documentos do PISA, o conteúdo matemático necessário para resolver o problema proposto, o desempenho dos alunos, as estratégias utilizadas pelos alunos ao resolver o problema proposto em cada item e os agrupamentos realizados. O relato que segue foi organizado conforme itens dessa aferição.

### 4.1 ITEM 1

Esse item apresenta um problema considerado não rotineiro em sala de aula e envolve o algoritmo da subtração com reserva. No seu enunciado, está envolvida a ideia aditiva da subtração, também chamada de "comparativa", pois ele apresenta a expressão "a mais que", fato que, com frequência, provoca uma interpretação equivocada da situação por parte dos alunos, fazendo com que resolvam uma adição em lugar da subtração.

Os problemas que apresentam as expressões tais como "a mais que" ou "maior que" solicitam, na maioria das vezes, uma relação ou uma comparação entre a parte e o todo. Schliemann (1989) aponta as dificuldades dos estudantes diante da resolução de problemas de subtração que envolvam em seu enunciado qualquer comparação. Segundo essa autora, em uma questão que envolve a expressão "a mais que", os alunos não recorrem à subtração por apresentarem dificuldades de entender a relação parte-todo.

De acordo com Nunes e Bryant (1997) e Vasconcelos (1998), os problemas que envolvem esse tipo de situação são conhecidos como problemas de comparação, porque "envolvem a comparação entre duas quantidades e a diferença entre duas quantidades é que deve ser encontrada" (VASCONCELOS, 1998, p.58).

A seguir, apresentamos um quadro contendo as características do Item 1, no qual incluímos os conteúdos envolvidos, o agrupamento de competências, a situação (ou contexto), o tipo de item e os níveis de competência, segundo os documentos do PISA (FRANÇA, 2007), e a classificação do tipo de problema de acordo com Butts (1997).

**Quadro 12** – Caracterização geral do *Item 1*.

<i>Características do Item 1</i>	
<i>Conteúdo envolvido</i>	<i>Subtração de números naturais</i>
<i>Agrupamento de competências</i>	<i>Conexão</i>
<i>Situação ou Contexto</i>	<i>Pessoal</i>
<i>Tipo de Item</i>	<i>Resposta de Construção Curta</i>
<i>Nível de competência</i>	<i>Nível 2</i>
<i>Tipo de Problema</i>	<i>Problema de Aplicação</i>

Segundo os documentos do PISA (FRANÇA, 2007), o Item 1 é considerado como um *Item de Resposta de Construção Curta*, seu enunciado envolve uma situação pessoal, do contexto cotidiano, o qual faz parte das atividades comuns a um grande número de alunos. O conteúdo matemático necessário para resolver o problema proposto nesse item pertence à área de conteúdo *Quantidade*, visto que envolve a utilização de números para representar quantidades. Sua resolução abarca uma das quatro operações aritméticas: a subtração de números naturais. O contexto foi considerado conhecido e familiar para os alunos, a competência necessária para resolver o problema pertence ao agrupamento conexão, e, para resolvê-lo, pode ser utilizado um algoritmo padrão que é considerado um procedimento rotineiro em sala de aula. Em relação aos níveis de competências apresentados pelos documentos do PISA (OCDE, 2004), o *Item 1* situa-se no segundo nível de competências pelo fato de exigir que os alunos interpretem a tabela presente no enunciado para extrair dados relevantes e efetuar cálculos aritméticos básicos. Segundo Butts (1997), esse item pode ser classificado como um *problema de aplicação*, por necessitar primeiro de uma formulação simbólica do problema (tradução da linguagem escrita com palavras para uma linguagem matemática), a fim de, em seguida, serem utilizados os algoritmos apropriados.

O *Item 1* foi resolvido por cento e oito (108) alunos. Em relação ao seu desempenho ao resolvê-lo, observamos que:

- 30 elaboraram uma estratégia que *resolve o problema* e desenvolveram corretamente o procedimento, ou apresentaram apenas uma resposta considerada correta, recebendo *crédito completo* (código 2);
- 2 apresentaram uma estratégia correta, porém apresentaram alguma incorreção ao desenvolver o procedimento e, por isso, receberam *crédito parcial* (código 1);
- 56 elaboraram uma estratégia que não resolve o problema e receberam *nenhum crédito* (código 0);

- 20 não apresentaram resolução ou resposta, isto é, deixaram esse Item em branco (código 9).

As informações a respeito dos índices de desempenho dos alunos por crédito obtido no *Item 1* estão sintetizados na tabela a seguir.

**Tabela 3** - Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no Item 1.

Créditos atribuídos									
Crédito completo		Crédito parcial		Nenhum crédito				Total	
Código 2		Código 1		Código 0		Código 9			
F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
30	27,78	2	1,85	56	51,85	20	18,52	108	100

Pelos critérios de correção realizados, constata-se que o índice de acerto (total ou parcial) dos alunos foi de 29,63%, indicativo de que mais da metade deles apresentou uma estratégia que não resolve o problema proposto nesse item.

A estratégia necessária para resolver o *Item 1* envolve o uso do algoritmo de uma subtração com reserva. Dos trinta (30) alunos que receberam crédito completo por apresentarem uma resposta correta, dezenove (19) apresentaram uma resolução do problema proposto nesse item, e dezesseis (16) deles utilizaram o algoritmo da subtração com reserva como estratégia e os procedimentos foram desenvolvidos corretamente. Um aluno apresentou os algoritmos de uma subtração e uma adição como estratégia de resolução e efetuou corretamente essas operações e outro aluno apresentou os algoritmos de uma subtração e uma multiplicação e procedeu corretamente ao efetuar essas operações. Também em uma produção, observamos que o estudante adotou, como estratégia para resolver o problema, os algoritmos de duas adições e uma subtração, embora os procedimentos para efetuar a adição terem sido desenvolvidos corretamente, a estratégia adotada não resolveu o problema.

Dentre os sessenta e nove (69) alunos que não apresentaram uma resolução para o problema proposto nesse item, quinze (15) apresentaram uma resposta considerada correta e cinquenta e quatro (54) apresentaram uma resposta incorreta.

A seguir, apresentamos os agrupamentos feitos de acordo com o tipo de estratégia elaborada e o procedimento desenvolvido, independentemente do crédito atribuído à resolução:

**Quadro 13** – Grupos construídos de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no *Item 1*.

<b>Grupo</b>	<b>Estratégia</b>	<b>Procedimento</b>	<b>Quantidade de alunos</b>
<b>G1</b>	Apenas apresenta uma resposta.	Apresenta uma resposta correta.	15
		Apresenta uma resposta incorreta.	54
<b>G2</b>	Não apresenta resposta.	Não apresenta uma resolução. Não apresenta uma resposta.	20
<b>G3</b>	Efetua uma subtração.	Arma e efetua corretamente a subtração que resolve o problema e apresenta a resposta correta.	09
		Arma corretamente, mas efetua incorretamente a subtração que resolve o problema e apresenta uma resposta incorreta.	01
		Arma e efetua corretamente uma subtração que não resolve o problema e apresenta uma resposta incorreta.	01
		Arma e efetua corretamente uma subtração que não resolve o problema e apresenta uma resposta incorreta.	01
		Não arma, mas efetua corretamente a subtração que resolve o problema e apresenta a resposta correta.	01
		Escreve duas afirmações relacionadas aos dados contidos na tabela. Apresenta a resposta correta.	01
		Arma e efetua corretamente a subtração que resolve o problema. Ao lado, arma e efetua corretamente duas multiplicações. Apresenta a resposta correta.	02
<b>G4</b>	Efetua uma subtração e uma adição.	Arma e efetua corretamente a subtração que resolve o problema. Ao seu lado, arma e efetua corretamente uma adição. Apresenta a resposta correta.	01
<b>G5</b>	Arma uma subtração e uma multiplicação.	Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente a subtração que resolve o problema e apresenta a resposta correta.	01
<b>G6</b>	Efetua duas adições e uma subtração.	Arma e efetua corretamente duas adições que não resolvem o problema. Arma e efetua incorretamente uma subtração que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01

#### 4.2 ITEM 2

O *Item 2* apresenta um problema considerado não rotineiro na sala de aula e sua resolução envolve o algoritmo da divisão. A ideia de medida está presente nessa divisão, pois o enunciado remete à noção de "quantas vezes cabe" ou "determinar quanto cabe". Segundo Nunes e Bryant (1997, p.198), os problemas que a envolvem, são frequentemente, denominados como "problema de divisão medida por quotas (ou de medida)" e estão associados com os problemas nos quais se deseja encontrar quantas vezes uma determinada quantidade está contida em outra.

Correa (apud NUNES; BRYANT, 1997, p.198) investigou as estratégias utilizadas pelas crianças ao resolverem problemas de divisão medida por quotas e problemas partitivos e pôde observar que as crianças apresentavam dificuldade para resolver os problemas de divisão por quotas, mas facilidade ao resolver os problemas partitivos.

O problema proposto, nesse item, também pode ser resolvido de diferentes maneiras, efetuando a operação da adição com reserva, ou com o uso do algoritmo da multiplicação, ou com o algoritmo da subtração, dependendo do modo como o aluno interpreta o enunciado.

Apresentamos, em seguida, um quadro contendo as características desse item: os conteúdos envolvidos, o agrupamento de competências, a situação (ou contexto), o tipo de item e o nível de competência, segundo os documentos do PISA (FRANÇA, 2007), e a classificação do tipo de problema de acordo com Butts (1997).

**Quadro 14** - Caracterização geral do *Item 2*.

<b>Características do Item 2</b>	
<b>Conteúdo envolvido</b>	Adição de números naturais. Subtração de números naturais. Multiplicação de números naturais. Divisão de números naturais. Regra de Três Simples.
<b>Agrupamento de competências</b>	Conexão.
<b>Situação ou Contexto</b>	Pessoal.
<b>Tipo de Item</b>	Resposta de Construção Curta.
<b>Nível de competência</b>	Nível 2.
<b>Tipo de Problema</b>	Problema de Aplicação.

De acordo com os documentos do PISA (FRANÇA, 2007), o *Item 2* é um *Item de Resposta de Construção Curta* e seu enunciado envolve uma situação pessoal, do contexto cotidiano, pois as informações contidas no enunciado estão relacionadas com atividades que os estudantes realizam no dia-a-dia. O conteúdo matemático necessário para resolver esse item envolve cálculos básicos rotineiros, tais como a divisão de números naturais, a adição de números naturais, a multiplicação de números naturais, a subtração de números ou a regra de três simples. O item pertence à área de conteúdo *Quantidade*, pois a estratégia que deve ser elaborada para sua resolução envolve o cálculo das operações aritméticas (o problema proposto nesse item pode ser resolvido por diversas formas, porém a estratégia comumente elaborada pelos alunos para resolvê-lo é efetuar o cálculo do algoritmo da divisão). A competência necessária para resolver o problema pode ser descrita como um

procedimento rotineiro de aplicação de algoritmo padrão. O item pertence ao agrupamento *conexão*.

Consoante o nível de competência apresentada nos documentos do PISA (OCDE, 2004), o *Item 2*, supostamente, estaria situado no Nível 2, pois para resolver esse item os alunos devem elaborar estratégias simples de resolução de problemas, interpretar os dados apresentados na tabela, localizar informações relevantes para sua resolução e efetuar cálculos aritméticos básicos.

Em relação ao tipo de problema, esse item pode ser classificado, de acordo com Butts (1997), como um problema de aplicação por necessitar primeiro de uma formulação simbólica do problema (tradução da linguagem escrita com palavras para uma linguagem matemática) para, em seguida, serem utilizados os algoritmos apropriados. O Item 2 foi resolvido por cento e oito (108) alunos, dentre os quais:

- 44 elaboraram uma estratégia que resolve o problema e procederam corretamente ao desenvolvê-la ou apresentaram apenas uma resposta considerada correta, com isso receberam *crédito completo* (código 2);
- 1 aluno apresentou uma estratégia correta, porém desenvolveu incorretamente o procedimento e recebeu *crédito parcial* (código 1);
- 47 elaboraram uma estratégia que não resolve o problema e receberam *nenhum crédito* (código 0);
- 16 não apresentaram uma resolução e não apresentaram resposta, isto é, deixaram esse item em branco e receberam código 9.

Apresentamos, na tabela a seguir, informações a respeito do desempenho dos estudantes no *Item 2*.

**Tabela 4** - Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no *Item 2*

Créditos atribuídos									
Crédito completo		Crédito parcial		Nenhum crédito				Total	
Código 2		Código 1		Código 0		Código 9			
f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
44	40,74	1	0,93	47	43,52	16	14,81	108	100

Por meio da análise desses dados, verifica-se que o índice de acerto (total ou parcial) dos alunos foi de 41,67%, o que pode mostrar que a maioria deles compreendeu o que estava proposto no enunciado e elaborou uma estratégia que resolve o problema proposto no item.

A estratégia desenvolvida com mais frequência pelos alunos, para resolver esse item, envolvia o uso do algoritmo da adição, na qual eles efetuaram até três adições para encontrar uma resposta para o problema. Uma produção escrita apresenta uma estratégia que envolve o cálculo de duas adições e uma subtração; outra produção apresenta uma subtração e três adições; também em uma produção escrita, um aluno utilizou como estratégia o algoritmo de uma multiplicação, e outro uma subtração.

Nesse item, quatro (4) alunos empregaram a divisão como estratégia e desenvolveram os procedimentos corretamente; cinco (5) alunos adotaram, como estratégia de resolução, o cálculo de uma regra de três, a qual foi desenvolvida corretamente; e vinte e seis (26) estudantes não apresentaram uma resolução para o item, mas podem ter elaborado uma estratégia correta pelo fato de terem encontrado a resposta considerada correta. Para os quarenta e cinco (45) alunos que não apresentaram uma resolução e que apresentaram uma resposta diferente da considerada correta, não foi possível fazer inferências a respeito das estratégias por eles elaboradas.

A partir da análise das cento e oito (108) produções escritas dos alunos nesse item, construímos, independentemente dos créditos atribuídos, um quadro de estratégias e procedimentos desenvolvidos por eles ao resolver o *Item 2*, conforme quadro a seguir.

**Quadro 15** – Grupos por estratégia elaborada e por procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no *Item 2*.

<b>Grupo</b>	<b>Estratégia</b>	<b>Procedimento</b>	<b>Quantidade de alunos</b>
<b>G1</b>	Apenas apresenta um resposta.	Apresenta a resposta correta.	26
		Apresenta uma resposta incorreta.	45
<b>G2</b>	Não apresenta resposta.	Não apresenta uma resolução. Não apresenta uma resposta.	16
<b>G3</b>	Uma divisão.	Arma e efetua corretamente a divisão que resolve o problema e apresenta a resposta correta.	04
<b>G4</b>	Uma multiplicação.	Efetua uma multiplicação que resolve o problema e apresenta a resposta correta.	01
<b>G5</b>	Uma subtração.	Arma e efetua corretamente uma subtração que não resolve o problema e apresenta uma resposta incorreta.	01
<b>G6</b>	Duas adições.	Arma e efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Arma e efetua corretamente outra adição que não resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	01
		Arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente uma adição que resolve o problema e apresenta a resposta correta.	02
		Arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente a adição que resolve o problema. Apresenta uma resposta correta.	01
<b>G7</b>	Três adições.	Apresenta uma resolução. Arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido nessa adição como âncora, efetua corretamente a segunda adição. Utilizando o resultado obtido nessa adição como âncora, efetua a terceira adição, a qual resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	02
		Efetua corretamente três adições que resolvem o problema e apresenta a resposta correta.	01
<b>G8</b>	Duas adições e uma subtração.	Apresenta uma resolução. Arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido nessa adição como âncora, efetua corretamente outra adição. Utilizando o resultado obtido nessa adição como âncora, efetua incorretamente uma subtração que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
<b>G9</b>	Uma subtração e três adições.	Arma e efetua corretamente uma subtração que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente três adições, as quais resolvem o problema. Apresenta a resposta correta.	01
<b>G10</b>	Uma regra de três.	Monta e resolve corretamente uma regra de três que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	05
<b>G11</b>		Monta três colunas. Na primeira, escreve uma relação que estabeleceu entre os dados contidos na tabela. Na segunda, assim como na primeira, escreve outra relação que estabeleceu entre os dados contidos na tabela. Na terceira coluna, também escreve uma relação que estabeleceu entre os dados contidos na tabela. Apresenta a resposta correta.	01

### 4.3 ITEM 3

O problema proposto no *Item 3* é considerado um problema não rotineiro na sala de aula. Para resolvê-lo os alunos devem ser capazes de representar determinada fração em uma forma de representação definida no enunciado, diferente da usual, utilizando as células em branco que são fornecidas, e precisam seguir algumas etapas, apresentadas no enunciado.

Apresentamos, a seguir, um quadro com a caracterização geral desse item, tais como os conteúdos envolvidos, o agrupamento de competências, a situação (ou contexto), o tipo de item e os níveis de competência, segundo os documentos do PISA (OCDE, 2007), e a classificação do tipo de problema de acordo com Butts (1997):

**Quadro 16** - Caracterização geral do Item 3.

<b>Características do Item 3</b>	
<b>Conteúdos envolvidos</b>	Números inteiros Frações
<b>Agrupamento de competências</b>	Reflexão
<b>Situação ou Contexto</b>	Pública
<b>Tipo de Item</b>	Resposta de Construção Fechada
<b>Nível de competências</b>	Nível 4
<b>Tipo de Problema</b>	Problema de Aplicação

De acordo com os documentos do PISA (FRANÇA, 2007), o *Item 3* pode ser considerado como um *Item de Resposta de Construção Fechada*, o qual exige que o aluno apenas construa uma resposta para o problema sem justificar os procedimentos utilizados. O enunciado do problema apresenta uma situação que envolve aspectos da comunidade local, considerada pelos documentos do PISA (FRANÇA, 2007) como uma situação pública, a qual se localiza a certa distância da vida pessoal do aluno. O contexto inserido nessa situação está relacionado com o cotidiano dos alunos, o qual se torna conhecido para eles, pois eles deparam-se com esse tipo de contexto em suas atividades diárias, tais como quando entram nos elevadores, usam os telefones públicos, acessam os caixas eletrônicos, entre outros.

O conteúdo matemático necessário para resolver o problema proposto nesse item envolve números inteiros e frações. A estratégia utilizada para sua resolução exige que os estudantes representem determinada fração, seguindo um conjunto de procedimentos, os

quais, se resolvidos corretamente, conduzem à resposta considerada correta e, por envolver números para representar as quantidades, esse item situa-se na área de conteúdo *Quantidade*.

A competência necessária para resolver o problema proposto nesse item pode ser descrita como "a utilização de raciocínio e reflexão flexíveis" (OCDE, 2005, p.75), porquanto sua resolução exige que o aluno raciocine e reflita sobre o processo necessário para resolver o problema e, por esse motivo, esse item pertence ao agrupamento de competências reflexão. Segundo os níveis de competência apresentados pelos documentos do PISA, o Item 3, supostamente, situa-se no Nível 4, pois, durante o processo de resolução do problema, os alunos precisam:

Trabalhar de maneira eficaz com modelos simples de situações complexas; utilizar habilidades de raciocínio em uma variedade de contextos, interpretar diferentes representações da mesma situação; analisar e aplicar relações quantitativas; utilizar uma variedade de habilidades de cálculo para solucionar problemas (OCDE, 2005, p.78).

Nesse item, o problema proposto necessita ser traduzido para uma linguagem matemática utilizando algoritmos apropriados, o que, segundo Butts (1997), indica que ele pode ser classificado como um *problema de aplicação*. O *Item 3* foi resolvido por noventa e cinco (95) alunos, dentre os quais:

- 23 elaboraram uma estratégia que resolve o problema e procederam corretamente ao desenvolvê-la ou apenas apresentaram uma resposta considerada correta. Eles receberam *crédito completo*, indicado pelo código 2;
- 14 resolveram incorretamente esse item, sendo que a estratégia elaborada para resolver o problema estava correta, porém o procedimento foi desenvolvido incorretamente. Por isso, esses alunos receberam *crédito parcial* (código 1);
- 26 elaboraram uma estratégia que não resolve o problema e receberam *nenhum crédito* (código 0);
- 32 não apresentaram uma resolução ou resposta, isto é, deixaram esse item em branco (código 9).

A seguir, apresentamos uma tabela contendo a distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos noventa e cinco (95) alunos que resolveram esse item:

**Tabela 5** - Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no *Item 3*

Créditos atribuídos									
Crédito completo		Crédito parcial		Nenhum crédito				Total	
Código 2		Código 1		Código 0		Código 9			
f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
23	24,21	14	14,74	26	27,37	32	33,68	95	100

A partir da análise desses dados, podemos considerar que 38,95% dos estudantes, independentemente de terem apresentado uma resposta considerada correta, selecionaram uma estratégia adequada para resolver o problema proposto nesse item, o que nos leva a pensar que eles compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado. Em relação aos demais alunos, é possível inferir que a interpretação feita do enunciado, supostamente, não gerou uma estratégia que resolvia o problema.

Dentre os sessenta e três (63) alunos que apresentaram uma resolução para o problema proposto nesse item, apenas vinte e três (23) utilizaram uma estratégia correta para resolvê-lo, os quais representaram corretamente a fração proposta no enunciado. Os demais, embora tenham apresentado uma resolução para o problema, não selecionaram uma estratégia que o resolvia, pois eles representaram, nas células fornecidas, um número diferente daquele proposto no enunciado, fato que os levou a apresentar uma resposta incorreta.

A partir da análise das noventa e cinco (95) produções escritas dos alunos que resolveram esse item, conseguimos construir cinco (5) agrupamentos, considerando o tipo de estratégia empregada pelo aluno para resolver o problema, independentemente dos créditos atribuídos à resolução. Desse modo, voltamos nosso olhar para os procedimentos desenvolvidos ao resolvê-lo e agrupamos os procedimentos semelhantes, os quais foram divididos em subgrupos, como mostrados a seguir:

**Quadro 17** – Grupos construídos de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos para resolver o *Item 3*.

<b>Grupo</b>	<b>Estratégia</b>	<b>Procedimento</b>	<b>Quantidade de alunos</b>
<b>G1</b>	Segue corretamente todas as quatro etapas indicadas no enunciado e representa corretamente, nas células em branco, a fração pedida.	Efetua corretamente os quatro procedimentos propostos no enunciado. Apresenta uma resposta correta.	23
<b>G2</b>	Não apresenta resposta.	Não apresenta uma resolução. Não apresenta uma resposta.	32
<b>G3</b>	Segue corretamente algumas das etapas indicadas no enunciado e representa incorretamente, nas células em branco, a fração pedida.	Efetua corretamente três dos quatro procedimentos propostos no enunciado. Apresenta uma resposta incorreta.	14
		Efetua corretamente um dos quatro procedimentos propostos no enunciado. Apresenta uma resposta incorreta	05
<b>G4</b>	Segue incorretamente as etapas indicadas no enunciado e representa incorretamente, nas células em branco, a fração pedida.	Efetua incorretamente os quatro procedimentos propostos no enunciado. Apresenta uma resposta incorreta.	04
<b>G5</b>	Marca várias posições nas células, mas não representa número algum.	Nas células, marca várias posições que não representam número algum.	17

#### 4.4 ITEM 4

O problema proposto no *Item 4* é considerado um problema não rotineiro e, para resolvê-lo, é necessário interpretar e retirar os dados apresentados no gráfico, a fim de que se possa, assim, efetuar as operações adequadas para encontrar a solução do problema. Está envolvida, no enunciado desse item, a *ideia de medida*<sup>32</sup> da divisão.

A seguir, apresentamos um quadro contendo as características desse item: os conteúdos envolvidos, o agrupamento de competências, a situação (ou contexto), o tipo de item e os níveis de competência, segundo os documentos do PISA (FRANÇA, 2007), e a classificação do tipo de problema de acordo com Butts (1997).

<sup>32</sup> Os problemas que envolvem a ideia de medida são, freqüentemente, chamados de “problema de *divisão medida por quotas* (ou de *medida*)” (NUNES; BRYANT, 1997, p.198).

**Quadro 18** – Caracterização geral do *Item 4*.

<b>Características do Item 4</b>	
<b>Conteúdo envolvido</b>	<i>Multiplicação de números naturais. Divisão de números naturais. Regra de Três Simples.</i>
<b>Agrupamento de competências</b>	<i>Conexão.</i>
<b>Situação ou Contexto</b>	<i>Científico.</i>
<b>Tipo de Item</b>	<i>Resposta de Construção Curta.</i>
<b>Nível de competência</b>	<i>Nível 2.</i>
<b>Tipo de Problema</b>	<i>Problema de Aplicação.</i>

O item é considerado um *Item de Resposta de Construção Curta* e está situado em um contexto científico<sup>33</sup>, pois envolve a compreensão de um problema explicitamente matemático, ou seja, o aluno apenas o encontra no contexto escolar (OCDE, 2004). Os conteúdos envolvidos na resolução desse item são a multiplicação, a divisão de números naturais ou a regra de três simples. Por esse motivo, o item pertence à área de conteúdo *Quantidade*.

Segundo os documentos do PISA (FRANÇA, 2007), o contexto, envolvido no problema proposto nesse item, pode ser considerado algo familiar, pois os alunos veem esse tipo de informação nos meios de comunicação. Em relação às competências exigidas para a resolução do problema, é necessário que os alunos interpretem e compreendam os dados apresentados no gráfico, as informações contidas na tabela do enunciado e associem-nas na estratégia elaborada. O item pertence ao grupo de competências conexões.

De acordo com os documentos do PISA (OCDE, 2004), o *Item 4*, supostamente, estaria situado no segundo nível de competências, porque, para resolvê-los, os alunos devem elaborar estratégias simples de resolução de problema, interpretar e retirar os dados relevantes apresentados no gráfico para sua resolução e efetuar cálculos aritméticos básicos. Quanto ao tipo de problema, o *Item 4* pode ser classificado, de acordo com Butts (1997), como um *problema de aplicação*, pois para a sua resolução, é necessário que se realize uma tradução da linguagem escrita para uma linguagem matemática, a fim de que sejam utilizados algoritmos apropriados. Esse item foi resolvido por cento e onze (111) estudantes; em relação ao seu desempenho, notamos que:

<sup>33</sup> São contextos mais abstratos e envolvem a compreensão de um problema explicitamente matemático, ou seja, aquele problema em que o estudante apenas o encontra no contexto escolar (OCDE, 2005).

- 15 elaboraram uma estratégia que resolve o problema, desenvolvendo corretamente o procedimento, ou apenas apresentaram uma resposta considerada correta. Eles receberam, por isso, *crédito completo*, representado pelo código 2;
- 7 resolveram esse item incorretamente, sendo que a estratégia elaborada por eles para resolver o problema estava correta, porém o procedimento desenvolvido não. Por esse motivo, receberam *crédito parcial* (código 1);
- 35 elaboraram uma estratégia que não resolve o problema, recebendo nenhum crédito (código 0);
- 54 alunos não apresentaram indícios de resolução ou resposta, isto é, deixaram esse item em branco (código 9).

As informações acerca do desempenho desses estudantes podem ser observadas na próxima tabela.

**Tabela 6** - Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no *Item 4*.

Créditos atribuídos									
Crédito completo		Crédito parcial		Nenhum crédito				Total	
Código 2		Código 1		Código 0		Código 9			
f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
15	13,51	7	6,31	35	31,53	54	48,65	111	100

Com base na análise dos registros e da correção realizada, verificamos que apenas 13,51% dos alunos elaboraram uma estratégia que resolve o problema. Consideramos que, pelo fato do enunciado desse item situar-se em um contexto pouco familiar para eles, mais da metade dos estudantes que o resolveram não conseguiram relacionar as informações contidas no gráfico para elaborar uma estratégia que resolvesse o problema proposto no enunciado.

Dentre os vinte e seis (26) alunos que apresentaram uma resolução ao resolver esse item, vinte e um (21) adotaram, como estratégia de resolução, o algoritmo de uma divisão. A estratégia que envolvia o algoritmo de uma adição foi elaborada por apenas um aluno, o qual procedeu incorretamente ao desenvolver a estratégia elaborada.

Quanto à estratégia que envolvia o algoritmo de uma subtração, ela foi elaborada por apenas dois (2) alunos, os quais efetuaram incorretamente os procedimentos ao desenvolvê-la. A estratégia que envolvia o cálculo de uma razão foi desenvolvida corretamente por dois (2) estudantes.

Dentre os trinta e um (31) alunos que não apresentaram uma resolução para o item, vinte e seis (26) apresentaram uma resposta considerada incorreta, pois, possivelmente, não compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado e, desse modo, elaboraram uma estratégia incorreta<sup>34</sup> ao resolver o item. Apenas cinco (5) alunos não apresentaram indícios de resolução, mas deram uma resposta correta para o item.

Com base na análise dos registros escritos desses estudantes, agrupamos as resoluções de acordo com o tipo de estratégia elaborada por eles para resolver o problema e, com isso, agrupamos os procedimentos similares. Assim, conseguimos construir seis (6) agrupamentos, independentemente dos créditos atribuídos ao item, conforme mostra o Quadro 19:

---

<sup>34</sup> Neste trabalho, consideramos como estratégia incorreta aquela que não resolve o problema.

**Quadro 19** – Grupos por estratégia elaborada e por procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no *Item 4*.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Quantidade de alunos
G1	Apresenta apenas um resposta.	Apresenta uma resposta correta.	05
		Apresenta uma resposta incorreta.	26
G2	Não apresenta resposta.	Não apresenta uma resolução. Não apresenta uma resposta.	54
G3	Uma divisão.	Arma e efetua corretamente uma divisão que resolve o problema e apresenta uma resposta correta.	06
		Arma corretamente, mas efetua incorretamente uma divisão que resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	04
		Arma corretamente, mas não efetua uma divisão que resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Arma e efetua corretamente uma divisão que resolve o problema. Apresenta uma resposta correta.	03
		Arma corretamente, mas efetua incorretamente uma divisão que resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Arma corretamente, mas não efetua uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Arma incorretamente e efetua corretamente uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Arma e não efetua uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	02
		Arma e efetua incorretamente uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Arma e efetua incorretamente uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
G4	Uma razão.	Escreve a expressão de uma razão que resolve o problema. Apresenta uma resposta correta.	02
G5	Uma subtração.	Arma corretamente, mas efetua incorretamente uma subtração que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	02
G6	Uma adição.	Arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01

## 4.5 ITEM 5

O problema, proposto no *Item 5*, é considerado como não rotineiro na sala de aula e, para resolvê-lo, é necessário que se utilize o conceito de média aritmética e a operação da multiplicação. A média aritmética é a medida de posição mais utilizada e pode ser considerada como a mais intuitiva de todas. O cálculo da média aritmética está tão presente em nosso dia-a-dia que a maioria das pessoas entende seu significado e a utiliza com frequência para resolver problemas do cotidiano.<sup>35</sup>

Para resolver o problema proposto nesse item, os estudantes devem seguir algumas etapas, tal como estão apresentadas no enunciado. Eles precisam calcular qual a média final de uma pessoa que recebeu várias notas entre 0 a 10,0. Desse modo, a média final é calculada seguindo algumas etapas, nas quais os alunos precisam excluir, dentre as notas obtidas, a maior e a menor nota e, após tê-las excluído, eles devem calcular a média aritmética das notas restantes. Feito isso, eles precisam efetuar uma multiplicação utilizando o resultado obtido no cálculo da média aritmética por um número apresentado no enunciado e, após isso, devem efetuar a multiplicação desse último resultado por outro número, o qual também está apresentado no enunciado.

Um quadro com a caracterização geral desse item, informando os conteúdos envolvidos, o agrupamento de competências, a situação (ou contexto), o tipo de item e os níveis de competência, segundo os documentos do PISA (OCDE, 2007), e a classificação do tipo de problema, de acordo com Butts (1997), é apresentado a seguir:

**Quadro 20** - Caracterização geral do *Item 5*.

<b>Características do <i>Item 5</i></b>	
<b>Conteúdos envolvidos</b>	Adição de números naturais e decimais. Multiplicação de números naturais e decimais. Divisão números naturais e decimais. Média Aritmética.
<b>Agrupamento de competências</b>	Reprodução.
<b>Situação ou Contexto</b>	Pública.
<b>Tipo de Item</b>	Resposta de Construção Curta.
<b>Nível de competências</b>	Nível 2.
<b>Tipo de Problema</b>	Problema de Aplicação.

<sup>35</sup> O conceito de média aritmética ( $\bar{X}$ ) dos valores  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  é determinada pelo quociente entre a soma desses valores e a quantidade dos mesmos: 
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

O *Item 5* pode ser considerado, de acordo com os documentos do PISA (FRANÇA, 2007), como um *Item de Resposta de Construção Curta* e o problema, proposto no enunciado, está localizado a certa distância da vida pessoal do aluno. Esse problema apresenta uma situação que envolve alguns aspectos da comunidade local, a qual, por esse motivo, é considerada pelos documentos do PISA (FRANÇA, 2007) como uma situação pública. O contexto inserido nessa situação é um contexto do cotidiano, o qual está relacionado com as atividades diárias dos alunos e, desse modo, torna-se conhecido e familiar para eles.

Para resolver o problema proposto nesse item, os estudantes precisam, primeiramente, compreender o que está sendo pedido no problema, para, desse modo, retirar as informações que estão explicitamente presentes no enunciado. O conteúdo matemático necessário para resolver o problema proposto envolve cálculos básicos, tais como a adição, a multiplicação e a divisão de números naturais e decimais e o cálculo da média aritmética. A estratégia utilizada para sua resolução envolve um conjunto de procedimentos passo a passo, os quais, quando resolvidos corretamente, conduzem à resposta considerada correta. De acordo com a estratégia utilizada e devido à utilização de números para representar as quantidades e as operações aritméticas, esse item situa-se na área de conteúdo *Quantidade*.

A competência necessária para resolver o problema apresentado pode ser descrita como a aplicação de cálculos básicos rotineiros e, destarte, o item pertence ao agrupamento de competências *reprodução*.

Segundo os níveis de competência apresentados pelos documentos do PISA (OCDE, 2004), o *Item 5*, supostamente, estaria situado no *Nível 2*, conforme definição apresentada na análise do *Item 2*. O problema, proposto no *Item 5*, exige que, para sua resolução, os alunos realizem uma tradução da linguagem escrita para uma linguagem matemática, a fim de serem utilizados algoritmos apropriados. Além disso, segundo Butts (1997), ele pode ser classificado como um *problema de aplicação*. O *Item 5* foi resolvido por noventa e cinco (95) alunos, dentre os quais:

- 15 elaboraram uma estratégia que resolve o problema e desenvolveram-na corretamente ou apenas apresentaram uma resposta considerada correta. Por isso, receberam *crédito completo*, indicado pelo código 2;
- 15 apresentaram uma estratégia correta, porém apresentaram alguma incorreção ao desenvolver o procedimento e, por isso, receberam *crédito parcial* (código 1);

- 45 elaboraram uma estratégia que não resolve o problema e receberam *nenhum crédito* (código 0);
- 20 não apresentaram uma resolução ou resposta, isto é, deixaram esse item em branco (código 9).

A tabela a seguir mostra a distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos noventa e cinco (95) alunos que resolveram esse item:

**Tabela 7** - Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no *Item 5*.

Créditos atribuídos									
Crédito completo		Crédito parcial		Nenhum crédito				Total	
Código 2		Código 1		Código 0		Código 9			
F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
15	15,79	15	15,79	45	47,37	20	21,05	95	100

A partir da análise desses dados, podemos observar que 31,58% dos alunos selecionaram a estratégia que resolvia o problema e, desse modo, podemos inferir que eles compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado. Em relação aos demais estudantes, é possível inferir que a interpretação feita do enunciado não foi adequada, porque eles não elaboraram uma estratégia que resolvesse o problema.

Dentre aqueles que apresentaram uma resolução para o problema proposto nesse item, dezessete (17) resolveram-no, independentemente de encontrar a resposta correta ou incorreta, seguindo corretamente os procedimentos passo a passo apresentados no enunciado. Para resolver o problema, esses alunos descartaram, dentre as notas atribuídas, a nota mínima e a nota máxima e, em seguida, utilizando as notas restantes, efetuaram o cálculo da média aritmética e efetuaram duas multiplicações.

Apenas um aluno, ao resolver o problema, descartou, dentre as notas atribuídas, a maior e a menor nota e, em seguida, utilizando as notas restantes, efetuou o cálculo de uma multiplicação além do cálculo da média aritmética.

A estratégia que envolvia o cálculo de uma adição e uma multiplicação foi adotada por quatro (4) alunos. O cálculo de apenas uma multiplicação foi a estratégia de resolução utilizada por três (3). Quanto à estratégia que envolvia o cálculo de duas multiplicações, ela foi adotada por apenas um aluno, o qual procedeu corretamente ao desenvolvê-la.

Encontramos uma produção escrita, na qual o aluno adotou, como estratégia de resolução, o cálculo de uma divisão e duas multiplicações, e a estratégia que envolvia o cálculo de uma adição foi utilizada por apenas um aluno.

O cálculo de duas adições foi a estratégia adotada por um aluno, enquanto outro, ao resolver esse problema, efetuou corretamente três adições. Dentre os quarenta e cinco estudantes que não apresentaram indícios de resolução, sete (7) apresentaram uma resposta considerada correta e trinta e oito (38) alunos apresentaram uma resposta incorreta.

A partir da análise das noventa e cinco (95) produções escritas dos alunos que resolveram esse item, conseguimos construir onze (11) agrupamentos, independentemente dos créditos atribuídos ao item, considerando o tipo de estratégia empregada para resolver o problema. Desse modo, voltamos nosso olhar para os procedimentos desenvolvidos pelos alunos e agrupamos os procedimentos semelhantes, os quais foram divididos em subgrupos, como mostrados a seguir:

**Quadro 21** – Grupos por estratégia elaborada e por procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no *Item 5*.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Quantidade de alunos
G1	Apenas apresenta uma resposta.	Apresenta uma resposta correta.	07
		Apresenta uma resposta incorreta.	38
G2	Não apresenta resposta.	Não apresenta uma resolução. Não apresenta uma resposta.	20
G3	Uma média aritmética. Duas multiplicações.	Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um X sobre elas. Arma e efetua corretamente uma adição utilizando as notas restantes contidas no enunciado. Utilizando o resultado obtido na adição como âncora, efetua corretamente uma divisão. Utilizando o resultado obtido na divisão, arma e efetua corretamente uma multiplicação. Utilizando o resultado obtido na multiplicação, arma e efetua corretamente uma multiplicação. Apresenta uma resposta correta.	07
		Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um X sobre elas. Arma e efetua corretamente a adição utilizando as notas restantes contidas no enunciado. Arma e efetua corretamente uma multiplicação. Arma e efetua corretamente outra multiplicação. Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01

		Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um X sobre elas. Efetua corretamente a média aritmética das notas restantes e, utilizando o resultado obtido no cálculo da média aritmética como âncora, efetua incorretamente uma multiplicação. Utilizando o resultado obtido na multiplicação, como âncora, efetua incorretamente outra multiplicação. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Indica incorretamente qual é a nota máxima e corretamente qual é a nota mínima. Escreve "max" em cima da nota que, supostamente, para ele seria a maior e "minimo" em cima da nota menor. Arma e efetua corretamente uma subtração que não resolve o problema. Ao lado dessa subtração, arma e efetua corretamente uma adição utilizando todas as notas contidas no enunciado. Utilizando o resultado dessa adição como âncora, efetua corretamente uma divisão. Ao lado desta, utilizando as notas restantes contidas no enunciado, arma e efetua corretamente uma adição. Utilizando o resultado obtido na adição como âncora, efetua corretamente uma multiplicação. Utilizando o resultado obtido na multiplicação, como âncora, efetua incorretamente uma multiplicação. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um risco sobre elas. Arma e não efetua uma multiplicação. Arma e efetua corretamente outra multiplicação. Utilizando o resultado obtido na multiplicação como âncora, efetua corretamente outra multiplicação. Apresenta a resposta correta.	01
		Escreve o valor da nota mínima e o valor da nota máxima. Arma e efetua incorretamente uma multiplicação. Arma e efetua incorretamente outra multiplicação. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um X sobre elas. Arma e efetua corretamente uma multiplicação. Arma e efetua incorretamente outra multiplicação. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, riscando-as. Efetua incorretamente uma multiplicação. Utilizando o resultado obtido na multiplicação como âncora, efetua corretamente outra multiplicação. Arma e efetua incorretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um X sobre elas. Arma e efetua corretamente uma multiplicação. Utilizando o resultado obtido nessa multiplicação, arma e efetua corretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
<b>G4</b>	Uma média aritmética. Uma multiplicação.	Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um X sobre elas. Escreve o valor da nota mínima e o valor da nota máxima, respectivamente. Arma e efetua incorretamente a adição utilizando as notas restantes contidas no enunciado. Utilizando o resultado obtido na adição, arma e efetua corretamente uma divisão. Utilizando o resultado obtido na divisão, arma e efetua corretamente	01

		uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	
		Arma corretamente, mas efetua incorretamente uma subtração que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
G5	Uma adição e uma multiplicação.	Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um traço embaixo das notas máxima e mínima. Escreve “mínima □ (valor da nota)” “máxima □ (valor da nota)”. Escreve e efetua corretamente a expressão numérica utilizando as notas restantes contidas no enunciado. Utilizando o resultado obtido na adição, efetua corretamente uma multiplicação. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Arma e efetua incorretamente uma adição utilizando todas as notas contidas no enunciado. Arma e efetua corretamente uma multiplicação. Apresenta uma resposta incorreta.	01
G6	Uma adição e duas multiplicações.	Descarta incorretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um “+” e “-” embaixo da nota maior e da nota menor, respectivamente. Marca um traço contínuo embaixo das notas restantes. Apresenta uma resposta incorreta.	01
G6	Uma adição e duas multiplicações.	Arma e efetua corretamente a adição das notas restantes contidas no enunciado. Utilizando o resultado obtido na adição, arma e efetua corretamente uma multiplicação. Utilizando o resultado obtido na multiplicação, arma e efetua incorretamente outra multiplicação. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um risco sobre elas. Arma e efetua corretamente uma adição utilizando algumas notas contidas no enunciado. Utilizando o resultado obtido na adição como âncora, efetua uma multiplicação. Utilizando o resultado obtido na multiplicação como âncora, efetua corretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
G7	Uma multiplicação.	Efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	01
		Escreve “min (o valor da nota)” e “(o valor da nota) máx”. Escreve mas não efetua uma multiplicação. Arma e efetua incorretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Arma e efetua incorretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Faz um círculo no item 3 do enunciado. Apresenta uma resposta incorreta.	01
G8	Duas multiplicações.	Arma e efetua corretamente uma multiplicação. Arma e efetua corretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01

<b>G9</b>	Efetua duas multiplicações e uma divisão.	Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um risco sobre elas. Arma e efetua incorretamente uma divisão que não resolve o problema. Arma e efetua incorretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	01
<b>G10</b>	Efetua uma adição.	Arma e efetua corretamente uma adição. Apresenta uma resposta incorreta.	03

#### 4.6 ITEM 6

O *Item 6* apresenta um problema considerado não rotineiro na sala de aula e para resolvê-lo os estudantes podem utilizar diversas estratégias, dentre as quais estão o cálculo da adição, da multiplicação, de uma equação do 1º grau e a decomposição de números naturais em fatores primos. Também consideramos a justificativa apresentada por alguns alunos para resolver o problema proposto como uma estratégia de resolução, pelo fato de que, por meio da justificativa apresentada, podemos fazer inferências sobre como eles interpretaram o problema.

A seguir, apresentamos um quadro com a caracterização geral desse item, os conteúdos envolvidos, o agrupamento de competências, a situação (ou contexto), o tipo de item e os níveis de competência, segundo os documentos do PISA (OCDE, 2007), e a classificação do tipo de problema de acordo com Butts (1997).

#### **Quadro 22** - Caracterização geral do *Item*

<b>Características do Item 6</b>	
<b>Conteúdos envolvidos</b>	<i>Adição de números naturais. Multiplicação de números naturais. Decomposição de um número natural em fatores primos. Múltiplos de um número natural. Divisores de um número natural. Equação de 1º grau.</i>
<b>Agrupamento de competências</b>	<i>Conexão.</i>
<b>Situação ou Contexto</b>	<i>Pública.</i>
<b>Tipo de Item</b>	<i>Resposta de Construção Curta.</i>
<b>Nível de competências</b>	<i>Nível 2.</i>
<b>Tipo de Problema</b>	<i>Problema de Aplicação.</i>

O *Item 6* é um *Item de Resposta de Construção Curta* e seu enunciado, segundo os documentos do PISA (FRANÇA, 2007), apresenta uma situação que envolve aspectos da comunidade local, considerada uma situação pública, a qual se localiza a certa distância da vida pessoal dos alunos e apresenta um contexto considerado familiar, pois as informações, contidas no enunciado, estão relacionadas com atividades que eles realizam no seu dia-a-dia. O contexto desse item diz respeito ao dinheiro como uma unidade monetária fictícia. Segundo o documento do PISA (GAVE, 2004, p.14), "esse elemento fictício é introduzido para assegurar que aos estudantes de alguns países não sejam dadas condições vantajosas".

Em relação ao conteúdo matemático, os estudantes devem aplicar procedimentos matemáticos rotineiros que envolvam operações com números naturais, tais como a adição, a multiplicação e a divisão, decomposição de números e os múltiplos e os divisores de um número natural. Por esse motivo, esse item está situado na área de conteúdo Quantidade. Para resolver o problema nele proposto, os alunos devem encontrar quantas notas de unidades monetárias são necessárias sacar de um caixa eletrônico para obter um determinado valor.

Quanto às competências exigidas, é necessário que o estudante compreenda um texto simples, no qual todas as informações estão apresentadas de maneira explícita no enunciado. Assim, a competência necessária para resolver o problema pode ser descrita como a utilização de um raciocínio simples e a aplicação de um algoritmo padrão. Portanto, esse item pertence ao agrupamento de competências *conexão*.

De acordo com os níveis de competência do PISA (OCDE, 2004), o *Item 6*, supostamente, estaria situado no Nível 2, conforme a definição apresentada na análise do *Item 2*. Em relação ao tipo de problema, o *Item 6* pode ser classificado, segundo Butts (1997), como um *problema de aplicação*, o qual exige que, para a sua resolução, os alunos realizem uma tradução da linguagem escrita para uma linguagem matemática a fim de serem utilizados os algoritmos apropriados. No *Item 6*, quanto ao desempenho apresentado pelos cento e oito (108) alunos que o resolveram, observamos que:

- 40 elaboraram uma estratégia que resolve o problema e procederam corretamente ao desenvolvê-la ou apenas apresentaram uma resposta considerada correta. Por isso, eles receberam *crédito completo* (código 2);

- 4 apresentaram uma estratégia correta, porém apresentaram alguma incorreção ao desenvolver o procedimento e, por isso, receberam *crédito parcial* (código 1);
- 49 elaboraram uma estratégia que não resolve o problema e receberam *nenhum crédito* (código 0);
- 14 não apresentaram uma resolução ou resposta, isto é, deixaram esse item em branco (código 9).

Apresentamos, na tabela a seguir, as informações acerca do desempenho dos alunos no item em análise.

**Tabela 8** - Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no *Item 6*.

Créditos atribuídos									
Crédito completo		Crédito parcial		Nenhum crédito				Total	
Código 2		Código 1		Código 0		Código 9			
f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
40	37,38	4	3,74	49	45,79	14	13,09	107	100

Por meio da análise desses dados, verifica-se que o índice de acerto (total ou parcial) dos alunos foi de 41,12%, indicando que menos da metade do seu total interpretou corretamente o problema proposto no enunciado, ou seja, elaborou uma estratégia que resolve o problema.

Dentre os vinte e quatro (24) estudantes que apresentaram uma resolução para resolver o problema proposto nesse item, oito (8) adotaram, como estratégia de resolução, o algoritmo de pelo menos uma adição. Em apenas três (3) produções escritas, encontramos alunos que, para resolvê-lo, empregaram o algoritmo da subtração como estratégia de resolução.

Quanto à estratégia que envolvia o algoritmo da multiplicação, ela foi utilizada por apenas dois (2) alunos, os quais efetuaram corretamente os procedimentos necessários para desenvolvê-la. A estratégia adotada por três (3) alunos envolvia o cálculo de duas multiplicações e uma adição, as quais foram efetuadas corretamente.

A estratégia que envolvia o algoritmo da divisão foi utilizada por apenas dois (2) alunos, os quais procederam corretamente ao efetuá-la. Em apenas uma (1) produção escrita, o estudante elaborou como estratégia de resolução o cálculo de uma expressão

numérica, e três (3) utilizaram, como estratégia de resolução, o agrupamento das notas que representavam o dinheiro fictício.

Dentre os sessenta e nove (69) alunos que não apresentaram alguma resolução para resolver o problema proposto nesse item, vinte e sete (27) apresentaram uma resposta considerada correta, enquanto quarenta e dois (42) deram uma resposta incorreta. Desses quarenta e dois (42), apenas cinco (5) escreveram uma justificativa ao responder o problema proposto nesse item.

A partir da análise das cento e sete (107) produções escritas dos alunos que resolveram esse item, agrupamos as resoluções "olhando" para o tipo de estratégia elaborada para resolver o problema e, assim, agrupamos os procedimentos similares. Com isso, conseguimos construir seis (6) agrupamentos, independentemente dos créditos atribuídos ao item, conforme mostrado a seguir:

**Quadro 23** – Grupos por estratégia elaborada e por procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no *Item 6*.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Quantidade de alunos
G1	Apenas apresenta um resposta.	Apresenta uma resposta correta.	27
		Apresenta uma resposta incorreta.	37
		Apresenta uma resposta incorreta e uma justificativa	05
G2	Não apresenta resposta.	Não apresenta uma resolução. Não apresenta uma resposta.	14
G3	Uma adição	Arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Passa um traço embaixo do resultado obtido nessa adição e escreve um número. Passa um traço abaixo desse número. Não apresenta resposta.	01
		Arma e efetua corretamente a adição que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	01
		Arma e efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	02
		Arma e efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
G4	Duas adições	Escreve uma relação que estabeleceu entre os dados retirados no enunciado. Escreve uma relação que estabeleceu entre os dados retirados no enunciado. Utilizando o número pertencente a essa relação, arma e efetua corretamente uma adição. Utilizando o resultado obtido nessa adição como âncora, efetua outra adição. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Efetua corretamente uma adição. Abaixo dessa, efetua corretamente outra adição. Apresenta a resposta correta.	01
G5	Três adições	Arma e efetua corretamente uma adição. Ao lado dessa, arma e efetua corretamente outra adição. Utilizando os resultados obtidos nessas duas adições, arma e efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	01
G6	Uma subtração	Arma e efetua corretamente uma subtração que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Escreve uma relação que estabeleceu entre os dados retirados no enunciado. Arma e efetua corretamente uma subtração. Que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
G7	Duas subtrações	Arma e efetua corretamente uma subtração que não resolve o problema. Ao lado desta subtração, arma e efetua corretamente outra subtração que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
G8	Duas multiplicações	Efetua corretamente uma multiplicação. Abaixo dessa multiplicação, efetua corretamente outra multiplicação. Apresenta a resposta correta.	01
G9	Duas multiplicações e uma adição	Efetua corretamente uma multiplicação. Abaixo dessa, efetua corretamente outra multiplicação. Efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	03
G10	Uma expressão numérica	Escreve e resolve corretamente uma expressão numérica que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	01

G11	Uma divisão	Arma e efetua corretamente a divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Arma e efetua corretamente uma divisão que não resolve o problema. Efetua corretamente uma multiplicação. Abaixo dessa multiplicação, efetua corretamente outra multiplicação. Utilizando os resultados obtidos nessas multiplicações, arma e efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	01
G12	Agrupa as notas que representam dinheiro fictício.	Escreve uma coluna contendo cinco vezes determinado número e três vezes outro número. Ao lado da coluna, indica a soma desses números. Apresenta a resposta correta.	03
		Arma e efetua corretamente duas adições que resolvem o problema. Não apresenta resposta.	01
		Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido nessa multiplicação como âncora, efetua corretamente outra adição. Arma e efetua corretamente a multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente outra multiplicação que também não resolve o problema. Entre os registros descritos acima escreve alguns números. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Escreve, em uma coluna, um determinado número cinco vezes e, ao lado dessa coluna, escreve outro número quatro vezes. Apresenta uma resposta incorreta.	01

#### 4.7 ITEM 7

O *Item 7* apresenta um problema considerado não-rotineiro na sala de aula e nos livros didáticos. Para encontrar uma solução para ele, é necessário resolver uma expressão numérica e, obedecendo a algumas condições, determinar um número divisível por 11 e apresentar a diferença entre esse número e o resultado obtido como resposta para o problema.

As expressões numéricas podem ser definidas como um conjunto de operações aritméticas, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Como uma expressão numérica é formada por mais de uma operação, para encontrarmos seu valor numérico, devemos, durante o processo de resolução, obedecer a algumas regras, dentre as quais devemos resolver as operações na ordem em que aparecem, resolvendo primeiramente as potências e as raízes, em seguida a multiplicação ou a divisão e por último, a adição ou a subtração.

Para resolver o problema proposto nesse item, os alunos devem seguir algumas etapas, tal como estão apresentadas no enunciado. Utilizando um código de controle oferecido no enunciado, eles precisam montar uma expressão numérica envolvendo as

operações de multiplicação e adição e, a partir do resultado obtido, eles têm de determinar qual é o número mais próximo desse resultado que seja divisível por 11.

A seguir, apresentamos um quadro com a caracterização geral desse item: os conteúdos envolvidos, o agrupamento de competências, a situação (ou contexto), o tipo de item e os níveis de competências, segundo os documentos do PISA (OCDE, 2007), e a classificação do tipo de problema de acordo com Butts (1997):

**Quadro 24** - Caracterização geral do *Item 7*.

<b>Características do <i>Item 7</i></b>	
<b>Conteúdos envolvidos</b>	Adição de números naturais. Subtração de números naturais. Multiplicação de números naturais. Divisibilidade. Expressão numérica.
<b>Agrupamento de competências</b>	Conexão.
<b>Situação ou Contexto</b>	Científica.
<b>Tipo de Item</b>	Resposta de Construção Curta.
<b>Nível de competências</b>	Nível 2.
<b>Tipo de Problema</b>	Problema de Aplicação.

Segundo os documentos do PISA (FRANÇA, 2007), esse item pode ser considerado como um *Item de Resposta de Construção Curta* e o problema, proposto no enunciado, apresenta uma situação que é distante da vida pessoal do aluno, pelo fato de ele apenas encontrá-la no contexto escolar e, por esse motivo, é considerada pelos documentos do PISA (FRANÇA, 2007) como uma situação científica.

Para resolver o problema proposto, o conteúdo matemático requerido envolve cálculos rotineiros de adição, subtração e multiplicação de números naturais e divisibilidade. A estratégia utilizada para resolvê-lo envolve um conjunto de procedimentos, os quais são apresentados no enunciado do problema. De acordo com a estratégia e os procedimentos empregados e devido à utilização de números para representar as quantidades e as operações aritméticas, esse item situa-se na área de conteúdo *Quantidade*.

O item está situado no agrupamento de competências *conexão*, pois a resolução do problema exige que o estudante recorra aos conhecimentos e às competências

matemáticas construídos previamente que sejam relevantes para essa resolução. Segundo os documentos do PISA (OCDE, 2004, p. 44), podemos considerar que "os itens associados a este agrupamento em geral requerem alguma evidência de integração e conexão de material das várias ideias estruturadoras, ou de diferentes linhas curriculares de matemática, ou a combinação de diferentes representações de um problema".

De acordo com os níveis de competência apresentado pelos documentos do PISA (OCDE, 2004), o *Item 7*, supostamente, estaria situado no Nível 2, porque, para resolver o problema, os alunos precisam interpretar as informações que são apresentadas de maneira explícita no enunciado e efetuar cálculos envolvendo expressão numérica e operações aritméticas .

Pelo fato de a resolução do problema proposto nesse item requerer que os estudantes realizem uma tradução da linguagem escrita para uma linguagem matemática utilizando algoritmos apropriados, ele pode ser classificado, segundo Butts (1997) como um problema de aplicação. O *Item 7* foi resolvido por cento e sete (107) alunos, dentre os quais:

- 21 elaboraram uma estratégia que resolve o problema e procederam corretamente ao desenvolvê-la ou apenas apresentaram uma resposta considerada correta. Por isso, eles receberam *crédito completo* (código 2);
- 8 apresentaram uma estratégia correta, porém apresentaram alguma incorreção ao desenvolver o procedimento e, por isso, receberam *crédito parcial* (código 1);
- 38 elaboraram uma estratégia que não resolve o problema e receberam *nenhum crédito* (código 0);
- 40 não apresentaram uma resolução ou resposta, isto é, deixaram esse item em branco (código 9).

A tabela a seguir apresenta a distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos cento e sete (107) alunos que resolveram esse item:

**Tabela 9** - Distribuição dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos no *Item 7*

Créditos atribuídos									
Crédito completo		Crédito parcial		Nenhum crédito				Total	
Código 2		Código 1		Código 0		Código 9			
f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
21	19,63	8	7,48	38	35,51	40	37,38	107	100

A partir da análise desses dados, podemos observar que, dentre os estudantes que apresentaram uma resolução para o problema, constata-se que 27,11% desses alunos, independentemente dos procedimentos desenvolvidos, utilizaram uma estratégia que resolvia o problema e, de acordo com ela, podemos considerar que eles interpretaram corretamente o enunciado.

Dentre os quarenta e quatro (44) alunos que apresentaram uma resolução para o problema, independentemente de terem encontrado uma resposta considerada correta ou incorreta, vinte e sete (27) desenvolveram passo a passo os procedimentos necessários para resolvê-lo, assim como estavam apresentados no enunciado. Esses estudantes montaram e resolveram uma expressão numérica e, utilizando o resultado obtido, determinaram qual o número mais próximo daquele resultado que era divisível por 11 e apresentaram a diferença desse número pelo resultado obtido como resposta para o problema.

O cálculo de três multiplicações foi a estratégia de resolução utilizada por apenas um aluno, o qual procedeu corretamente para desenvolver a estratégia selecionada. Para resolver o problema proposto nesse item, sete (7) alunos resolveram apenas uma expressão numérica, desenvolvendo os procedimentos corretos para resolvê-la.

Dentre os vinte e dois (22) alunos que não apresentaram indícios de resolução, apenas três (3) apresentaram uma resposta considerada correta e dezenove (19) alunos apresentaram uma resposta incorreta.

A partir da leitura realizada nos registros escritos dos cento e sete (107) alunos que resolveram o problema proposto nesse item, construímos, de acordo com a estratégia utilizada, cinco (5) de grupos de estratégias semelhantes. Esses agrupamentos foram construídos, independentemente dos créditos atribuídos às resoluções dos alunos nesse item. Desse modo, voltamos nosso olhar para os procedimentos por eles desenvolvidos e dividimos os procedimentos semelhantes em subgrupos, como mostramos a seguir:

**Quadro 25** - Grupos por estratégia elaborada e por procedimentos desenvolvidos para resolver o problema proposto no *Item7*.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Quantidade de alunos
G1	Apresenta apenas uma resposta.	Apresenta uma resposta correta.	03
		Apresenta uma resposta incorreta.	19
G2	Não apresenta resposta	Não apresenta uma resolução. Não apresenta uma resposta.	41
G3	Resolve uma expressão numérica. Determina qual número mais próximo do resultado obtido na expressão é divisível por 11 e apresenta a diferença desse número pelo resultado obtido como resposta para o problema.	Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	08
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Apresenta a resposta incorreta.	08
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	08
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta a resposta incorreta.	04
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Arma e efetua incorretamente uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Escreve os números 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 acima dos números do código do enunciado. Arma e efetua incorretamente uma adição que não resolve o problema. Abaixo do resultado obtido nessa adição, escreve um número "acrescido" 6 unidades de resultado da adição. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Escreve a expressão numérica que não resolve o problema. Escreve os múltiplos do número nove até o número noventa e, abaixo desse, escreve os múltiplos do número oito até o número setenta e dois. Arma e efetua incorretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Abaixo dessa, efetua corretamente uma subtração que resolve o problema. Efetua corretamente a adição. Apresenta a resposta correta.	03
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Arma e efetua corretamente uma adição. Arma e efetua incorretamente uma divisão que não resolve o problema. Anula essa divisão. Não apresenta resposta.	01
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Efetua corretamente uma adição. Efetua uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	01
G4	Efetua três multiplicações.	Arma e efetua corretamente uma multiplicação. Efetua outra multiplicação. Abaixo dessa, efetua outra multiplicação. Arma, mas não efetua uma divisão que não resolve o problema. Não apresenta resposta.	01
G5	Resolve uma expressão numérica.	Efetua corretamente expressão numérica. Apresenta uma resposta incorreta.	07

## 5 LEITURAS

### 5.1 A LEITURA DAS ESTRATÉGIAS E DOS PROCEDIMENTOS DOS REGISTROS ESCRITOS

Nesta parte do trabalho, apresentamos os efeitos da *leitura* produzida a partir dos registros escritos contidos nas provas, isto é, das análises que realizamos dos registros escritos nos sete (7) Itens pertencentes à Área de Conteúdo Quantidade da prova de Matemática da aferição do PISA/2006.

#### 5.1.1 Grupo de Estratégias G1

O primeiro grupo de estratégias de **G1** é constituído por trezentas e nove (309) produções escritas e está dividido em três (3) subgrupos.

**Quadro 26** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

<b>Grupo</b>	<b>Estratégia</b>	<b>Procedimento</b>	<b>Total de alunos</b>
G1	Apenas apresenta uma resposta.	Apenas apresenta uma resposta correta.	83
		Apenas apresenta uma resposta incorreta.	219
		Apresenta uma resposta incorreta e uma justificativa	05

Os alunos pertencentes ao **G1** não apresentaram uma resolução para o problema proposto em cada um dos sete (7) itens, apenas deram uma resposta considerada correta.

Nas oitenta e três (83) produções escritas que formam o primeiro subgrupo do **G1**, estão os alunos os quais, mesmo não apresentando indícios de uma resolução em seus registros escritos, apresentaram uma resposta considerada correta. Esse fato leva-nos a pensar que esses estudantes compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado dos problemas propostos em cada um dos itens e, a partir da compreensão realizada, elaboraram uma estratégia que resolvia os problemas e efetuaram os cálculos mentalmente ou com o auxílio de uma calculadora.

O segundo subgrupo do **G1** é formado por duzentas e dezenove (219) produções escritas, nas quais os alunos também não apresentaram indícios de resolução, apenas apresentaram uma resposta incorreta para o problema.

O terceiro subgrupo de **G1** é constituído por cinco (5) produções escritas, nas quais os alunos, embora não tenham apresentado alguma resolução que envolvesse o cálculo de alguma operação aritmética, apresentaram uma resposta considerada incorreta seguida de uma justificativa. Mesmo que as repostas apresentadas nessas produções escritas sejam consideradas incorretas, optamos por realizar uma leitura das justificativas apresentadas por consideramos que elas podem representar uma estratégia para resolver o problema.

Os alunos E089, E096, E138, E159 e E161 apresentaram justificativas ao responder o problema proposto no Item 6. Nelas a maioria dos alunos afirma não ser possível sacar a quantidade de notas do dinheiro fictício requerida pelo enunciado. A seguir, apresentamos as justificativas registradas:

<b>Justificativa apresentada</b>	<b>Aluno</b>	<b>Total de alunos</b>
[...] no caixa não existem notas de 10. Assim ele teria que sacar 610	E089	01
Como nesse caixa eletrônico não existe nota de 10 reais so poderá sacar "620" ou menos ou mais mas "610" não.	E096	01
[...] se ele deseja sacar "610" não tem como por que não há notas de 10.	E138	01
[...] notas de 50 e 20 não resultam no número "610" exatamente	E159	01
[...] a maquina não fornece "910".	E161	01

A partir de uma leitura das justificativas apresentadas pelos alunos, consideramos que eles podem ter pensado que seria necessário sacar uma nota específica que não era oferecida, sem perceber que poderiam sacar uma combinação de outras notas de modo a obter a quantidade requerida. Em seus registros escritos, não há indícios de que tenham tentado realizar alguns cálculos para tentar resolver o problema, pois talvez o tenham resolvido mentalmente ou com uma calculadora.

### 5.1.2 Grupo de Estratégias G2

O segundo grupo **G2** é formado por cento e noventa e sete (197) alunos, os quais não apresentaram uma resolução e não apresentaram uma resposta para o problema proposto em cada um dos sete (7) itens.

**Quadro 27** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Total de alunos
G2	Não apresenta resposta.	Não apresenta uma resolução. Não apresenta uma resposta.	197

Como não há indícios de que esses estudantes tenham elaborado alguma estratégia de resolução, podemos considerar que eles não conseguiram interpretar o enunciado ou optaram por não resolvê-lo.

### 5.1.3 Grupo de Estratégias G3

O grupo de estratégias **G3** é constituído por nove (9) produções escritas e, a partir da sua análise, foi possível formar quatro (4) subgrupos de procedimentos semelhantes.

**Quadro 28** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
<b>G3</b>	Uma adição	Arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Apresenta uma resposta considerada incorreta para o problema proposto.	E011, E193, E237, E248	04
		Arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Não apresenta resposta.	E140	01
		Arma e efetua corretamente a adição que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	E144, E210, E211	03
		Arma e efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	E261	01

A estratégia que E011, E140, E144, E193, E210, E211, E237, E248 e E261 utilizaram para solucionar o problema proposto nos Itens 4, 5 e 6 envolve o algoritmo de uma adição. Os alunos E011, E193, E237, E248 formam o primeiro subgrupo do G3, os quais elaboraram, como estratégia de resolução, o cálculo de uma adição. Analisando a estratégia empregada e os procedimentos desenvolvidos por eles, podemos considerar que esses alunos não compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado, já que não conseguiram elaborar uma estratégia adequada para resolver o problema.

Para resolver o problema proposto no *Item 5*, E011, E193 e E248, utilizando todas as notas apresentados no enunciado, apenas armaram e efetuaram corretamente uma adição e apresentaram o seu resultado como resposta para o problema. O aluno E248 apresentou, em seus registros escritos, indícios de que efetuou a adição utilizando cálculos auxiliares. Para efetuá-los, ele armou e efetuou corretamente uma adição. Quanto ao aluno E011, como não há, em seus registros escritos, vestígios de que ele tenha tentado resolver essa operação, inferimos que ele tenha realizado os cálculos com o auxílio de uma calculadora. O aluno E193 também efetuou uma adição, mas, para resolvê-la, procedeu de modo diferente dos demais, pois, usando todas as notas apresentadas no enunciado, ele montou corretamente três algoritmos envolvendo números decimais. *A priori*, ele armou e efetuou corretamente uma adição utilizando duas parcelas e, empregando o resultado obtido como âncora, efetuou corretamente outra adição. Ao seu lado, ele armou e efetuou corretamente outra adição e, finalmente, utilizando o seu resultado, armou e efetuou corretamente a última adição e apresentou o seu resultado como resposta para o problema. A partir da análise dos registros escritos de E237, foi possível inferir que, ao resolver o problema proposto no *Item 4*, ele tenha se equivocado ao interpretar o enunciado, pelo fato de não ter retirado os dados necessários no gráfico para resolver o problema proposto. Ele apenas montou e efetuou corretamente uma adição com reserva e apresentou o resultado obtido como resposta. É possível que esse aluno tenha aproveitado apenas os números que estavam presentes no enunciado para resolver o problema, o que deixa claro a ideia de que, para muitos estudantes, resolver problema significa operar utilizando os números que estão presentes no enunciado, independente da situação nele envolvida. Em relação ao procedimento desenvolvido por esse aluno, entendemos que ele organiza as operações antes de efetuá-las e domina a técnica operatória da adição com reserva.

No *segundo subgrupo* do **G3**, há apenas a produção escrita de E140, o qual, ao resolver o problema proposto no *Item 6*, não compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado pelo fato de ter selecionado uma estratégia inadequada para resolver o problema.

Os seus registros escritos dão indícios de que ele interpretou corretamente o enunciado, mesmo elaborando uma estratégia que não resolvia o problema proposto. Por meio de uma análise dos seus registros escritos, observamos que ele tentou encontrar uma resposta para o problema, primeiramente, utilizando o algoritmo da adição e, depois, realizando estimativas, porém não obteve uma resposta correta. Para desenvolver a estratégia selecionada, esse aluno armou e efetuou corretamente o algoritmo de uma adição. Abaixo do resultado nela obtido, ele passou um traço e escreveu um número que, supostamente, selecionou do enunciado do problema, o que nos leva a pensar que ele ou não teve tempo suficiente para concluir a resolução do problema, ou optou por não resolvê-lo, já que não apresentou uma resposta.

As produções escritas de E144, E210 e E211 formam o *terceiro subgrupo* do **G3**. De acordo com a estratégia utilizada por eles para resolver o problema proposto no Item 6, podemos considerar que eles compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado desse problema. Por meio da análise dos registros escritos de E144, notamos que, para resolver o problema, em primeiro lugar, ele escreveu duas "afirmações", as quais, supostamente, ajudaram-lhe a elaborar a estratégia adequada. Em seguida a essas afirmações, o aluno escreveu o sinal de igualdade, colocou o resultado correspondente a cada uma delas e, utilizando tais resultados, efetuou corretamente uma adição. Para desenvolver a estratégia adotada, os alunos E210 e E211 armaram e efetuaram corretamente a operação da adição e, com resultado nela obtido, eles apresentaram uma resposta que satisfazia às exigências do problema.

O *quarto subgrupo* do **G3** é formado apenas pela produção escrita de E261, o qual compreendeu, de modo adequado, o enunciado do problema proposto no Item 6 pelo fato de ter elaborado uma estratégia que resolvia o esse problema. Esse estudante, diferentemente dos outros do seu grupo, escreveu a adição na forma de uma expressão numérica, efetuando-a corretamente. Embora ele tenha elaborado uma estratégia apropriada para resolver o problema e tenha efetuado corretamente a operação da adição, ele equivocou-se e, conseqüentemente, elaborou uma resposta que não atendia às exigências desse problema.

Os alunos E011, E140, E193, E210, E211, E237 e E248 utilizaram, ao efetuar a adição, o algoritmo considerado como o "tipo escolar", com o qual puseram as unidades abaixo das unidades e as dezenas abaixo das dezenas. Já E144 e E261 não utilizaram o algoritmo da adição considerado como o "tipo escolar", pois a escreveram na forma de uma expressão numérica.

De modo geral, os alunos pertencentes ao **G3**, exceto E248, mostraram dominar o algoritmo da adição, pois armaram e efetuaram corretamente a operação da adição e utilizaram corretamente, quando necessário, a técnica do "vai um".

#### 5.1.4 Grupo de Estratégias G4

No quarto grupo de estratégias, o **G4**, estão as produções escritas de E019, E027, E108, E117, E155 e E187, os quais utilizaram como estratégia de resolução o cálculo de duas adições. De acordo com os procedimentos desenvolvidos por eles, foi possível construir quatro (4) subgrupos de procedimentos semelhantes.

**Quadro 29** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
<b>G4</b>	Duas adições	Escreve uma relação que estabeleceu entre os dados retirados no enunciado. Escreve uma relação que estabeleceu entre os dados retirados no enunciado. Utilizando o número pertencente a essa relação, arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido nessa adição como âncora, efetua outra adição que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E027	01
		Arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente uma adição que resolve o problema e apresenta a resposta correta.	E019, E108, E117, E187	04
		Efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Abaixo dessa, efetua corretamente outra adição. Apresenta a resposta correta.	E155	01

O *primeiro subgrupo* do **G4** é formado apenas pela produção escrita de E027, o qual elaborou uma estratégia adequada para resolver o problema proposto no Item 6. De acordo com a estratégia usada, podemos considerar que ele compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado do problema, pois selecionou os dados necessários para elaborar a estratégia. Por meio de seus registros escritos, podemos observar que, utilizando os dados retirados do enunciado, ele pôde estabelecer uma relação entre esses dados, com os quais

montou o algoritmo de uma adição. O estudante a efetuou corretamente e, utilizando o seu resultado como âncora, efetuou corretamente outra adição, obtendo um resultado que satisfazia às exigências do problema, porém, ao recorrer à relação usada, o aluno equivocou-se e apresentou uma resposta considerada incorreta. Analisando seus registros escritos, foi possível inferir que ele não tenha validado a resposta encontrada, o que lhe daria a possibilidade de perceber se a resposta obtida atendia às exigências do problema. Podemos considerar que isso acontece porque os alunos não estão acostumados a realizar reflexões a respeito da estratégia que empregam, dos procedimentos desenvolvidos e da resposta obtida.

No *segundo subgrupo* do **G4**, encontramos as produções escritas de E019, E108, E117 e E187, os quais elaboraram uma estratégia que resolvia o problema proposto no Item 2. A partir da análise de seus registros escritos, foi possível inferir que esses estudantes compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado do problema, pois foram capazes de elaborar uma estratégia adequada para resolvê-lo. O aluno E019 estabeleceu uma correspondência entre os dados contidos na tabela e, utilizando-os, armou e efetuou duas adições e apresentou a resposta considerada correta. Por meio da análise de seus registros, podemos notar que ele usou como *âncora* o resultado obtido em uma adição durante o processo de resolução, a fim resolver a outra adição. Os alunos E108, E117 e E187 estabeleceram uma relação entre os dados localizados na tabela do enunciado e, utilizando-os, armaram e efetuaram duas adições e apresentaram a resposta considerada correta. Por meio da análise dos registros escritos de E117, podemos inferir que ele, assim como E019, também empregou como âncora o resultado obtido durante o processo de resolução, para resolver a outra adição.

O *terceiro subgrupo* do **G4** é formado apenas pela produção escrita de E155. Para desenvolver a estratégia adotada, ele escreveu as adições na forma de uma expressão numérica e efetuou-as corretamente. A partir das respostas obtidas no cálculo dessas adições, ele elaborou uma resposta que satisfazia às exigências do problema.

Os alunos E019, E027, E108, E117, E155 e E187 armaram e efetuaram corretamente a operação da adição, utilizando o algoritmo "tipo escolar", no qual escreveram as unidades abaixo das unidades, as dezenas abaixo das dezenas e as centenas abaixo das centenas.

Cabe ressaltar que E019 e E027 armaram e efetuaram corretamente uma adição, na qual utilizaram como *âncora*, durante o processo de resolução, o resultado obtido na primeira adição, a fim de efetuar a segunda. O aluno E155 procedeu diferentes dos demais

ao efetuar as adições, pois ele escreveu-as corretamente na forma de uma expressão aritmética.

Analisando os registros desses estudantes, podemos inferir que eles sabem efetuar a adição e que dominam as técnicas operatórias dessa operação, pois utilizaram, quando necessário, a técnica do "vai um" corretamente.

### 5.1.5 Grupo de Estratégias G5

O grupo de estratégias **G5** é formado pelas produções de E024, E106, E138 e E157, os quais utilizaram, como estratégia de resolução, o cálculo de três adições.

**Quadro 30** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G5	Três adições	Arma e efetua corretamente uma adição que resolve parte do problema. Utilizando o resultado obtido nessa adição como âncora, efetua corretamente a segunda adição que resolve parte do problema. Utilizando o resultado obtido nessa adição como âncora efetua a terceira adição, a qual resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	E024, E138	02
		Arma e efetua corretamente uma adição que resolve parte do problema. Ao lado dessa, arma e efetua corretamente outra adição que resolve parte do problema. Utilizando os resultados obtidos nessas duas adições, arma e efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	E106	01
		Efetua corretamente três adições que resolvem o problema e apresenta a resposta correta.	E157	01

A análise dos registros escritos dos alunos pertencentes a esse grupo permitiu-nos separá-las em três subgrupos de procedimentos, pois as adições foram efetuadas de forma distinta em cada caso. Inferimos que a compreensão que os alunos fizeram do enunciado foi adequada pelo fato de eles terem selecionado uma estratégia apropriada para resolver o problema proposto nos *Itens 2 e 6*.

No *primeiro subgrupo* de **G5**, estão as produções de E024 e E138, os quais interpretaram corretamente o enunciado do problema proposto no *Item 2* e estabeleceram correspondências entre os dados localizados na tabela ao armar e efetuar as adições. O aluno E024 iniciou a resolução de outra adição, porém não a concluiu. Isso nos leva a pensar que ela seria utilizada como cálculo auxiliar durante o desenvolvimento da estratégia elaborada. Por meio de seus registros escritos, podemos observar que esses estudantes usaram os resultados obtidos nas adições como âncora para efetuar a próxima adição e consideraram a posição espacial dos algoritmos, o que torna possível inferir que eles dominam a resolução das operações aritméticas.

No *segundo subgrupo* de procedimentos do **G5** constatamos apenas a produção de E106. Cabe salientar que sua compreensão do enunciado foi adequada, já que selecionou os dados corretos e escolheu uma operação apropriada para resolver o problema proposto no *Item 6*. Para desenvolver a estratégia adotada, o aluno armou e efetuou corretamente duas adições e, utilizando os resultados obtidos nessas operações, armou e efetuou corretamente outra adição e, a partir do seu resultado, elaborou uma resposta que atendia às exigências do problema proposto. Por meio de seus registros escritos, observamos que esse aluno considera a importância da organização espacial dos algoritmos e parece dominar as técnicas operatórias do algoritmo da adição com ou sem reserva.

Em relação a E157, do *terceiro subgrupo* do **G5**, notamos que ele relacionou os dados localizados na tabela com a estratégia desenvolvida e apresentou a resposta considerada correta para o problema proposto no *Item 2*, porém ele não armou o algoritmo da adição ao resolver o problema, mas a escreveu na forma de uma expressão aritmética sem colocar o sinal de igualdade entre o resultado obtido e o número seguinte, já que utilizou o resultado obtido como âncora para efetuar a outra operação. Esse fato leva-nos a inferir que ele não tem consciência da importância de pôr o sinal de igualdade para indicar um resultado. Por meio de uma leitura vertical da prova de E157, observamos que ele sabe armar e efetuar os algoritmos das operações, como procedeu ao resolver o *Item 1*, o qual envolvia o cálculo de uma subtração com reserva. Além disso, podemos considerar que esse aluno domina as técnicas operatórias das operações.

O aluno E106 armou e efetuou corretamente três adições utilizando o algoritmo "tipo escolar". Os estudantes E024 e E138, por sua vez, armaram corretamente os três algoritmos da adição utilizando o algoritmo "tipo escolar", consideraram a organização espacial dos algoritmos e indicaram o sinal da operação que estava sendo realizada em cada algoritmo. Por meio de seus registros escritos, podemos verificar que eles usaram o resultado

obtido na primeira adição como *âncora*, para armar e efetuar a segunda adição, e também utilizaram o resultado obtido na segunda adição como *âncora*, a fim de armar e efetuar a terceira. Já o aluno E157 não armou um algoritmo da adição empregando o tipo "padrão escolar"; contudo, escreveu a adição na forma de uma expressão aritmética, sem ao menos escrever o sinal de igualdade entre a operação efetuada e o resultado obtido. Ele usou como *âncora* o resultado alcançado na primeira adição para efetuar a segunda e procedeu da mesma maneira para efetuar a terceira.

De acordo com as análises realizadas, inferimos que os alunos mostraram saber efetuar a operação da adição.

#### 5.1.6 Grupo de Estratégias G6

O *sexto grupo* de estratégias **G6** é formado por vinte e uma (21) produções escritas e, a partir da sua análise, foi possível formar sete (7) subgrupos de procedimentos semelhantes. A estratégia que os estudantes utilizaram para solucionar o problema envolve o uso do algoritmo de uma subtração.

**Quadro 31** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

<b>Grupo</b>	<b>Estratégia</b>	<b>Procedimento</b>	<b>Alunos</b>	<b>Total de alunos</b>
<b>G6</b>	Uma subtração	Arma e efetua corretamente a subtração que resolve o problema e apresenta a resposta correta.	E017, E035, E040, E088, E097, E108, E138, E157, E187	09
		Não arma, mas efetua corretamente a subtração que resolve o problema e apresenta a resposta correta.	E030	01
		Arma e efetua corretamente a subtração que resolve o problema. Ao lado, arma e efetua corretamente duas multiplicações. Apresenta a resposta correta.	E020, E031	02
		Escreve duas afirmações relacionadas aos dados contidos na tabela e, utilizando esses dados, efetua corretamente uma subtração que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	E162	01
		Arma corretamente, mas efetua incorretamente a subtração que resolve o problema e apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E043	01
		Arma e efetua corretamente uma subtração que não resolve o problema e apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E010, E017, E112, E117, E135	05
		Arma corretamente, mas efetua incorretamente uma subtração que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E010, E093	02

De acordo com a estratégia elaborada, podemos considerar que os nove (9) alunos do *primeiro subgrupo* de **G6** compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado, pelo fato de terem retirado todos os dados necessários para elaborar uma estratégia considerada correta e resolver o problema proposto no *Item 1*.

Os alunos E017, E035, E040, E088, E097, E108, E138, E157 e E187 desse subgrupo montaram corretamente o algoritmo da subtração considerando a sua organização espacial, isto é, escreveram o subtraendo abaixo do minuendo e realizaram os cálculos corretamente, subtraindo da direita para a esquerda, iniciando na casa da unidade, em seguida da dezena e, finalmente, da centena e apresentaram o resultado obtido como resposta. Para resolver essa subtração, os alunos recorreram ao processo da decomposição, mais conhecido como a técnica do "troca um", que consiste, por exemplo, em decompor uma centena do minuendo em dez (10) dezenas, uma dezena em dez (10) unidades até que seja possível operar com os números. Nessa subtração com reserva, podemos considerar que eles tenham efetuado as seguintes operações:

$0 - 8 = ?$
$10 - 8 = 2$
$60 - 80 = ?$
$160 - 80 = 80$
$400 - 200 = 200$

→

<sup>4</sup> <sup>6</sup> <del>5</del> 70
- 288
----- 282

Ao efetuar a operação ' $0 - 8 = ?$ ', os alunos trocaram uma dezena por dez (10) unidades, adicionando-as ao zero (0) unidade. Assim, eles efetuaram a operação ' $10 - 8$ ', obtendo 2 unidades. Em seguida, ao efetuar a operação ' $60 - 80 = ?$ ', eles trocaram uma centena por dez (10) dezenas, adicionando-as às seis (6) dezenas, obtendo 16 dezenas. Dessa forma, eles efetuam a operação ' $160 - 80$ ', obtendo 8 dezenas. Finalmente, subtraíram quatro (4) centenas de duas (2) centenas e encontraram o resultado da subtração. Por meio da produção escrita desses estudantes, podemos considerar que eles dominam as técnicas operatórias da subtração com reserva.

No *segundo subgrupo* do **G6**, há a produção de E030, o qual desenvolveu uma estratégia envolvendo o uso do algoritmo de uma subtração com reserva. O aluno compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado e localizou corretamente os dados necessários para solucionar a operação. Além disso, ele efetuou corretamente a subtração que resolvia o problema e apresentou o resultado dessa subtração como resposta. Nessa produção, o que nos chamou atenção foi o fato de o aluno não montar o algoritmo da subtração do

mesmo modo que os outros alunos fizeram, ele apenas representou essa subtração na forma de uma expressão numérica. Ademais, consideramos que E030 tenha efetuado os cálculos mentalmente ou por meio de uma calculadora, pois não há indícios de que ele tenha resolvido alguma operação. Nessa expressão numérica, o sinal de igualdade utilizado pelo aluno indica uma transformação, ou seja, ele atua como indicador do resultado de uma operação realizada entre os elementos que o antecedem (SÁ, 2003).

O *terceiro subgrupo* de **G6** é constituído pela produção de E020 e E031, os quais desenvolveram, como estratégia para resolver o problema proposto no enunciado, uma subtração e, por esse motivo, inferimos que eles tenham interpretado corretamente o enunciado e localizado os dados necessários para resolver o problema proposto no Item 1. O fato de os alunos, além de terem efetuado duas multiplicações para validar as informações contidas na tabela, terem empregado os resultados obtidos nessas multiplicações como âncora para efetuar a subtração e encontrar uma solução para o problema chamou-nos a atenção. Segundo Spinillo (2006), utilizar âncoras como ponto de referência para realizar as operações constitui-se em uma ferramenta para o raciocínio matemático durante o processo de resolução. Ao efetuar a operação da subtração com reserva, os alunos montaram corretamente o algoritmo e levaram em consideração a importância da organização espacial do algoritmo, ou seja, escrevem as unidades embaixo das unidades, as dezenas na coluna das dezenas e as centenas na coluna das centenas. Como não há indício de que esses alunos tenham efetuado a operação da subtração com reserva utilizando a técnica do "troca um", consideramos que eles efetuaram os cálculos mentalmente ou com o auxílio de uma calculadora.

O *quarto subgrupo* do **G6** é formado apenas pela produção escrita de E162, o qual desenvolveu uma estratégia que resolvia o problema proposto no Item 1. Isso faz-nos entender que ele interpretou corretamente o enunciado. Embora o estudante não tenha efetuado nenhuma operação, a partir da análise de seus registros escritos, observamos que ele relacionou corretamente alguns dados contidos no enunciado da tabela com a estratégia desenvolvida e registrou essas relações. Como não há, em seus registros escritos, nenhum indício de que ele tenha efetuado alguma operação, inferimos que, a partir das relações estabelecidas entre os dados do enunciado, ele tenha efetuado alguma operação com o auxílio de uma calculadora, já que apresentou a resposta correta.

O *quinto subgrupo* do **G6** é formado apenas pela produção de E043, o qual interpretou, de maneira apropriada, o enunciado e localizou corretamente os dados necessários para resolver o problema proposto no *Item 1*. É importante salientar que a sua compreensão do enunciado permitiu que ele elaborasse uma estratégia considerada correta, mas, devido a

uma possível distração, procedeu incorretamente ao desenvolvê-la. O aluno utilizou o algoritmo da subtração corretamente, usou as técnicas operatórias necessárias para efetuar a subtração com reserva e apresentou o resultado obtido como resposta, o que possibilita inferir que ele domina o algoritmo da subtração com reserva. Por meio de seus registros escritos, podemos considerar que, ao efetuar a subtração que resolve o problema, E043 realizou as seguintes operações:

$0 - 8 = 8$
$70 - 80 = ?$
$170 - 80 = 90$
$400 - 200 = 200$

→

$\overset{*}{5}70$
$- 288$
<hr style="width: 50px; margin-left: auto; margin-right: 0;"/>
$298$

Ao efetuar a operação ' $0 - 8 = 8$ ', podemos considerar que ele efetuou a operação ' $8 - 0 = 8$ ' em lugar de ' $0 - 8 = 8$ ', utilizando a técnica do "troca um", pois, ao efetuar a operação ' $70 - 80 = ?$ ', ele percebe que não era possível retirar oito (8) dezenas de sete (7) dezenas e, por isso, trocou uma centena por dez (10) dezenas e adicionou-a às dezenas, obtendo, assim, 17 dezenas. Desse modo, ele pôde efetuar a operação ' $170 - 80$ ', obtendo 9 dezenas. Finalmente, ele subtraiu quatro (4) centenas de duas (2) centenas, obtendo 2 centenas como resultado da subtração.

As produções escritas de E010, E017, E112, E117 e E135 formam o *sexto subgrupo* do **G6**. Os alunos E010 e E017, para resolverem o problema apresentado no Item 6, utilizaram como estratégia o cálculo de uma subtração. De acordo com a estratégia adotada, é possível inferir que E010 não tenha compreendido o que estava sendo pedido no enunciado do problema, já que não escolheu a operação adequada para resolvê-lo. O aluno armou e efetuou corretamente uma subtração com reserva, considerando a organização espacial desse algoritmo e mostrou dominar as técnicas operatórias da subtração com reserva. Ao efetuar essa operação, ele utilizou corretamente a técnica do "troca um" e apresentou o resultado obtido nessa operação para responder o problema. Por meio de seus registros escritos, podemos considerar que, ao efetuar a subtração com reserva, esse aluno tenha realizado as seguintes operações:

$0 - 0 = 0$
$10 - 50 = ?$
$110 - 50 = 60$
$200 - 0 = 200$

→

$\overset{2}{3}10$
$- 50$
<hr style="width: 100%;"/>
$260$

Ao efetuar a operação ' $10 - 50 = ?$ ', o estudante trocou uma centena por dez (10) dezenas, adicionando-as a uma (1) dezena. Desse modo, pôde efetuar a operação ' $110 - 50$ ', obtendo 6 dezenas e, em seguida, efetuou a operação ' $200 - 0 = 200$ '.

A partir de sua interpretação do enunciado, E017 estabeleceu corretamente uma relação entre os dados selecionados. Recorrendo aos dados obtidos a partir dessa relação, ele armou e efetuou corretamente uma subtração, considerando a importância da organização espacial desse algoritmo. Utilizando, como *âncora*, o resultado obtido nessa subtração, esse aluno escreveu outro número acrescido de 20 unidades e repetiu esse procedimento mais duas vezes até obter o resultado procurado. Usando esse resultado, ele equivocou-se e elaborou uma resposta considerada incorreta. O aluno, ao efetuar a subtração, realizou as seguintes operações:

$0 - 0 = 0$
$0 - 50 = ?$
$100 - 50 = 50$
$200 - 0 = 200$

→

$\overset{2}{3}00$
$- 50$
<hr style="width: 100%;"/>
$250$

Por meio de seus registros escritos, podemos considerar que, ao efetuar a operação ' $0 - 50 = ?$ ', o aluno trocou uma centena por dez (10) dezenas e adicionou-as ao zero (0) dezenas. Dessa forma, pôde efetuar a operação ' $100 - 50$ ', obtendo 5 dezenas e, em seguida, efetuou a operação ' $200 - 0 = 200$ '.

O aluno E112 elaborou uma estratégia que não resolvia o problema proposto no *Item 2*, o que mostra que ele não compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado ou compreendeu-o equivocadamente. Ele armou e efetuou corretamente o algoritmo da subtração com reserva e apresentou o resultado como resposta. Por meio de seus registros, podemos inferir que, mesmo interpretando equivocadamente o enunciado, ele compreendeu a importância da organização espacial do algoritmo e mostrou dominar as técnicas operatórias da subtração com reserva. Isso fica evidente quando ele utiliza a técnica do "troca um" para resolver a subtração. Ao resolver essa subtração, o estudante efetuou as operações, como mostradas a seguir:

$0 - 0 = 0$
$80 - 0 = 80$
$200 - 800 = ?$
$1200 - 800 = 400$

→

<sup>0</sup>	1280
-	800
	480

Os alunos E117 e E135 utilizaram, como estratégia de resolução, uma estratégia que envolve o uso do algoritmo de uma subtração, porém não era a subtração que resolvia o problema proposto no *Item 1*. Por meio da produção escrita de E117, podemos considerar que ele compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado, pois localizou os dados corretos para efetuar a subtração, porém, ao escrever um dos algarismos do subtraendo, distraiu-se e acabou escrevendo outro algarismo. Ele efetuou corretamente a subtração que não resolvia o problema proposto e apresentou o resultado obtido como resposta. Apesar de não ter solucionado o problema, o aluno procedeu corretamente ao efetuar a subtração escolhida. O estudante E135 interpretou corretamente o enunciado, no entanto, devido possivelmente a uma distração, ele retirou um dos dados contidos na tabela do enunciado equivocadamente. Podemos considerar que ao retirar os dados da tabela, o aluno tenha se confundido e retirou um dado que estava localizado na linha acima da qual ele realmente deveria ter retirado. Dessa forma, E135 procedeu corretamente ao efetuar uma subtração que não resolvia o problema e apresentou o resultado obtido como resposta. Os registros escritos desse aluno dão-nos alguns indícios de que ele domina as técnicas operatórias da subtração com reserva. Podemos considerar que, ao efetuar a subtração que não resolve o problema, E135 realizou as seguintes operações:

$0 - 8 = ?$
$10 - 8 = 2$
$70 - 80 = ?$
$170 - 80 = 90$
$300 - 200 = 100$

→

<sup>317</sup>	<del>80</del>
-	288
	192

Por meio de seus registros escritos, podemos considerar que, ao efetuar a operação ' $0 - 8 = ?$ ', o estudante trocou uma dezena por dez (10) unidades e adicionou-as ao zero (0) unidade. Dessa forma, pôde efetuar a operação ' $10 - 8$ ', obtendo 2 unidades. Em seguida, ao efetuar a operação ' $70 - 80 = ?$ ', ele trocou uma centena por dez (10) dezenas e adicionou-as às sete (7) dezenas, obtendo, assim, 17 dezenas. Dessa forma, ele efetuou a

operação '170 - 80', obtendo 9 dezenas. Finalmente, subtraiu duas (2) centenas de três (3) centenas, obtendo uma centena como resultado da subtração.

Os alunos E010 e E093 elaboraram uma estratégia que envolve uma subtração, a qual não resolvia o problema proposto no *Item 4*. De acordo com a estratégia elaborada, podemos considerar que eles não compreenderam o problema proposto pelo enunciado. E010 montou corretamente e efetuou incorretamente uma subtração com reserva e apresentou o resultado obtido na subtração como resposta. Por meio da análise dos seus registros, entendemos que, devido a uma distração, ele equivocou-se ao desenvolver o procedimento e, por conseguinte, podemos considerar que ele domina as técnicas operatórias da subtração com reserva. E093, assim como E010, também montou corretamente e efetuou incorretamente uma subtração com reserva e apresentou o resultado como resposta. Analisando seus registros escritos, podemos inferir que ele apresenta dificuldades em efetuar esse tipo de operação, o que nos leva a pensar que ele não domina as técnicas operatórias da subtração.

Para efetuar a operação da subtração, os alunos E010, E017, E020, E035, E040, E043, E088, E093, E097, E108, E112, E117, E135, E138, E157 e E187 utilizaram o algoritmo considerado como o "tipo escolar", no qual armaram corretamente o algoritmo, considerando a importância da sua organização espacial.

Apenas os estudantes E030 e E162 não utilizaram o algoritmo da subtração considerado como o "tipo escolar, pois, para efetuar essa operação, eles escreveram-na corretamente na forma de uma expressão numérica, tal como é mostrado a seguir:

$$570 - 288 = 282$$

A partir de uma leitura dos registros escritos dos alunos do primeiro subgrupo, podemos considerar que, embora alguns deles tenham se equivocado ao efetuar a operação da subtração devido a uma distração, eles dominam o algoritmo da subtração com reserva e parecem dominar as técnicas operatórias desse algoritmo, pois a utilizaram corretamente ao efetuar essa operação.

## 5.1.7 Grupo de Estratégias G7

No *sétimo grupo* de estratégias, o **G7**, há somente a produção escrita de E225, o qual utilizou, como estratégia de resolução, o cálculo de duas subtrações, as quais envolviam o recurso à ordem superior.

**Quadro 32** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G7	Duas subtrações	Arma e efetua corretamente uma subtração que não resolve o problema. Ao lado dessa subtração, arma e efetua corretamente outra subtração que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E225	01

Por meio da análise de seus registros escritos, é possível inferir que o aluno não interpretou corretamente o problema proposto no *Item 6*, já que não elaborou uma estratégia adequada para resolvê-lo. Ele montou corretamente o algoritmo de duas subtrações com reserva, utilizando o algoritmo "tipo escolar" e considerando a importância da sua organização espacial. empregando os resultados obtidos nessas operações, esse aluno elaborou uma resposta que não satisfazia as exigências do problema. Analisando seus registros, foi possível considerar que ele tenha efetuado as seguintes operações para cada subtração efetuada:

$\begin{array}{l} 0 - 0 = 0 \\ 10 - 50 = ? \\ 110 - 50 = 60 \\ 200 - 0 = 200 \end{array}$	→	$\begin{array}{r} \overset{2}{3}10 \\ - \quad 50 \\ \hline 260 \end{array}$
---	---	---

$\begin{array}{l} 0 - 0 = 0 \\ 10 - 20 = ? \\ 110 - 20 = 90 \\ 200 - 0 = 200 \end{array}$	→	$\begin{array}{r} \overset{2}{3}10 \\ - \quad 20 \\ \hline 290 \end{array}$
---	---	---

Para resolver a primeira subtração, o aluno, ao efetuar a operação ' $10 - 50 = ?$ ', trocou uma centena por dez (10) dezenas, adicionando-as a uma (1) dezena. Assim, pôde efetuar a operação ' $110 - 50$ ', conseguindo 6 dezenas e, em seguida, efetuou a operação ' $200 - 0 = 200$ '. Para resolver a segunda subtração, o aluno, ao efetuar a operação ' $10 - 20 = ?$ ', trocou uma centena por dez (10) dezenas, adicionando-as a uma (1) dezena, obtendo 11 dezenas. Desse modo, pôde efetuar a operação ' $110 - 50$ ', alcançando 6 dezenas e, finalmente, efetuou a operação ' $200 - 0 = 200$ '.

Com isso, podemos inferir que o aluno domina as técnicas operatórias da subtração com reserva, o que fica evidente quando observamos que ele utilizou corretamente a técnica do "troca um" ao efetuar a subtração com reserva.

#### 5.1.8 Grupo de Estratégias G8

O grupo de estratégias **G8**, formado por quatro (4) produções escritas, está dividido em três (3) subgrupos de procedimentos. Os alunos E162, E113, E119 e E215 adotaram, como estratégia de resolução, o cálculo de uma multiplicação.

**Quadro 33** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G8	Uma multiplicação	Efetua corretamente uma multiplicação que resolve o problema e apresenta a resposta correta.	E162	01
		Efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E113	01
		Arma e efetua incorretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E119, E215	02

O aluno E162 elaborou uma estratégia que resolvia o problema proposto no Item 2 e, de acordo com essa estratégia, podemos considerar que ele realizou uma compreensão adequada do enunciado. Ele escreveu uma afirmação relacionando corretamente os dados localizados na tabela e, baseando-se nessa afirmação, ele efetuou corretamente o algoritmo de uma multiplicação que resolve o problema. Isso mostra que esse aluno

interpretou corretamente o enunciado e que é capaz de estabelecer relações entre os dados. Isso fica evidente quando observamos que, por meio de uma leitura vertical da sua prova, ele também relacionou os dados localizados no enunciado ao resolver o *Item 1*. Como não há indícios de que ele tenha tentado resolver as operações aritméticas tanto no *Item 1* quanto no *Item 2*, podemos inferir que esse aluno tenha realizado os cálculos necessários utilizando uma calculadora.

A produção escrita de E113 forma o *segundo subgrupo* de procedimentos do **G8**, o qual adotou uma estratégia que envolvia o cálculo de uma multiplicação para resolver o problema proposto no *Item 5*. Podemos considerar, de acordo com a estratégia utilizada, que ele não compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado do problema, pelo fato de não ter adotado uma estratégia adequada para resolvê-lo e também pelo fato de não ter seguido, passo a passo, as etapas postas no enunciado. Esse aluno apenas efetuou uma multiplicação que não resolvia o problema. Para efetuar essa multiplicação, ele somente escreveu a multiplicação na forma de uma expressão numérica. Analisando os seus registros escritos, podemos considerar que esse aluno parece dominar as operações aritméticas envolvendo os números decimais e encontramos indícios de que ele efetuou essa multiplicação sem utilizar uma calculadora. Para efetuar essa multiplicação, ele empregou os dados que estavam no enunciado do problema, o que nos leva a inferir que ele, supostamente, tenha buscado as palavras-chave no enunciado e que não tenha lido, de maneira atenta, o enunciado, tentando interpretar o problema e elaborar uma estratégia adequada para resolvê-lo.

O *terceiro subgrupo* de procedimentos é constituído pelas produções escritas de E119 e E215, os quais selecionaram uma estratégia que não resolvia o problema proposto no *Item 5*. De acordo com a estratégia utilizada por eles para resolver o problema, inferimos que eles não realizaram uma compreensão adequada do enunciado. Para resolver esse problema, E119 indicou corretamente, dentre as notas obtidas pelo jogador, a maior e a menor nota. Ele escreveu uma multiplicação na forma de uma expressão numérica, mas não a efetuou. Utilizando os mesmos valores da multiplicação anterior, ele montou e efetuou incorretamente uma multiplicação que não resolvia o problema e apresentou o seu resultado como resposta. Inferimos que esse estudante não reconhece a importância de colocar a vírgula nos números para indicar as suas casas decimais, e isso fica evidente quando olhamos para seus registros escritos e observamos que, mesmo ao utilizar as notas apresentadas no enunciado, ele não considerou as casas decimais. Os registros escritos de E215 dão indícios de que ele não realizou uma interpretação correta do enunciado, já que não elaborou uma estratégia que resolvesse o problema. Ele armou uma operação, para a qual não indicou a

operação realizada. Todavia, quando voltamos nosso olhar para os procedimentos por ele desenvolvidos, percebemos que se tratava de uma multiplicação. Por meio da análise de seus registros, inferimos que o aluno não domina o algoritmo das operações aritméticas e que, assim como E119, retirou os valores utilizados para efetuar a multiplicação do enunciado do problema, pois é muito comum os alunos buscarem, no enunciado do problema, as palavras-chave para descobrir qual operação deve ser efetuada.

De modo geral, os estudantes E119 e E215, ambos pertencentes ao oitavo grupo de estratégias, utilizaram, ao efetuar a multiplicação, o algoritmo considerado como o "tipo escolar", no qual armaram corretamente o algoritmo, considerando a sua organização espacial. Já os alunos E113 e E162 não utilizaram o algoritmo da multiplicação considerado como o "tipo escolar". Para efetuar a multiplicação, eles, diferentemente dos demais alunos desse grupo, montaram corretamente uma multiplicação na forma de uma expressão numérica.

Por meio da análise seus registros escritos, foi possível inferir que eles parecem saber efetuar a operação da multiplicação, inclusive uma multiplicação envolvendo números decimais.

#### 5.1.9 Grupo de Estratégias G9

O grupo de estratégias - **G9** - é formado pelas produções escritas de E066 e de E224, os quais utilizaram, como estratégia de resolução, o cálculo de duas multiplicações. Analisando os seus registros escritos, conseguimos agrupar as produções em dois (2) subgrupos de procedimentos.

**Quadro 34** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
<b>G9</b>	Duas multiplicações	Efetua corretamente uma multiplicação que resolve o problema. Abaixo dessa multiplicação, efetua corretamente outra multiplicação que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	E066	01
		Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E224	01

De acordo com a estratégia elaborada por E066 ao resolver o problema proposto no Item 6, podemos considerar que ele tenha compreendido o que estava sendo pedido no enunciado. Para desenvolver a estratégia adotada, ele não montou o algoritmo da multiplicação considerado como o "tipo escolar", apenas indicou-a e efetuou-a corretamente na forma de uma expressão numérica. Como não há indícios de que ele tenha tentado resolver tais operações, podemos considerar que o aluno utilizou o auxílio de uma calculadora ou realizou-as mentalmente. Para responder o problema proposto nesse item, esse aluno elaborou uma resposta correta utilizando os resultados obtidos nessas operações.

A partir da análise dos registros escritos de E224, podemos considerar que ele não realizou uma compreensão adequada do enunciado, pelo fato de não ter elaborado uma estratégia que o ajudasse a resolver o problema proposto no *Item 5*. Para resolver o problema, o aluno armou e efetuou corretamente uma multiplicação com números decimais; utilizando o algoritmo "tipo escolar" e considerando a importância da sua organização espacial, indicou o sinal das operações realizadas. Usando o resultado obtido nessa multiplicação, o aluno armou e efetuou corretamente outra multiplicação empregando o algoritmo "tipo escolar" e apresentou o seu resultado como resposta para o problema.

De modo geral, podemos inferir que esses alunos mostraram saber dominar o algoritmo da multiplicação e reconhecem a importância de utilizar a vírgula para indicar as casas decimais de um número. É possível que, se E224 tivesse calculado a média aritmética das notas e desenvolvido os mesmos procedimentos que apresentou em seus registros, supostamente encontraria uma resposta considerada correta.

#### 5.1.10 Grupo de Estratégias G10

O décimo grupo de estratégias - **G10** - é constituído por apenas uma produção escrita, na qual E048 utilizou, como estratégia de resolução, o cálculo de três multiplicações.

**Quadro 35** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G10	Três multiplicações	Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Efetua outra multiplicação que não resolve o problema. Abaixo dessa, efetua outra multiplicação que não resolve o problema. Arma uma divisão que não resolve o problema, mas não a efetua. Não apresenta resposta.	E048	01

De acordo com a estratégia utilizada por esse aluno para resolver o problema proposto no *Item 7*, podemos considerar que ele não fez uma interpretação adequada do que estava sendo pedido no enunciado. Analisando seus registros escritos, foi possível notar indícios de que ele tenha tentado elaborar uma estratégia de resolução para o problema, pois as multiplicações por ele apresentadas são indicativos de que ele começou a elaborar uma estratégia, mas não concluiu sua elaboração. É possível inferir que o tempo não foi suficiente para esse estudante concluir o processo de elaboração da estratégia ou que ele optou por não terminá-lo. O aluno E048 utilizou o algoritmo considerado como o "tipo escolar" apenas para efetuar uma multiplicação, pois, para efetuar as outras duas, ele escreveu-as na forma de uma expressão numérica. De acordo com os procedimentos desenvolvidos por ele para efetuar essas multiplicações, podemos inferir que ele mostra saber efetuar essa operação.

#### 5.1.11 Grupo de Estratégias G11

O grupo **G11** é constituído por vinte e sete (27) produções escritas e está dividido em nove (9) subgrupos de procedimentos. A estratégia elaborada pelos alunos para resolver o problema proposto envolve o uso do algoritmo de uma divisão. Por meio da análise dos registros escritos dos estudantes pertencentes ao **G11**, observamos que, embora eles tenham elaborado a mesma estratégia para resolver o problema, os procedimentos desenvolvidos eram distintos. Com isso, conseguimos agrupar os registros escritos em onze subgrupos de procedimentos.

**Quadro 36** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G11	Uma divisão	Arma e efetua corretamente a divisão que resolve o problema. Apresenta uma resposta correta.	E016, E020, E022, E029, E030, E031, E040, E088, E088, E137, E160, E172, E261	13
		Arma corretamente, mas efetua incorretamente uma divisão que resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E026, E147, E188, E215, E251	05
		Arma corretamente, mas não efetua uma divisão que resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E019	01
		Arma corretamente, mas não efetua uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E154	01
		Arma incorretamente e efetua corretamente uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E037	01
		Arma e não efetua uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	E158, E167	02
		Arma e efetua incorretamente uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E065, E105	02
		Arma e efetua corretamente uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	E022	01
		Arma e efetua corretamente uma divisão que não resolve o problema. Efetua corretamente uma multiplicação. Abaixo dela, efetua corretamente outra multiplicação. Utilizando os resultados obtidos nessas multiplicações, arma e efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	E032	01

Os alunos E016, E020, E022, E029, E030, E031, E040, E088, E088, E137, E160, E172 e E261 formam o primeiro *subgrupo* do **G11**, os quais interpretaram corretamente o enunciado e retiraram as informações necessárias para resolver o problema, montaram e efetuaram corretamente a divisão que resolve o problema e apresentaram o seu resultado como resposta correta para o problema.

Para resolver o problema proposto no *Item 4*, E016 montou corretamente o algoritmo da divisão e utilizou cálculos auxiliares para resolvê-la. Por meio da análise de seus

registros, observamos que ele montou vários algoritmos da multiplicação, fazendo estimativas para tentar encontrar o produto de um número que se aproximasse do valor do dividendo. Ao realizar o cálculo de um dos algoritmos dessas multiplicações, esse aluno procedeu equivocadamente obtendo um produto incorreto, porém consideramos que ele equivocou-se devido a uma distração. Desse modo, mesmo enganando-se ao desenvolver os procedimentos, inferimos que ele domina a resolução das operações aritméticas.

Os estudantes E040, E088, E160 e E172 também efetuaram alguns cálculos auxiliares ao resolver o algoritmo da divisão, porém podemos observar, por meio da análise de seus registros, que eles não cometeram nenhum equívoco ao efetuar esses cálculos. Cabe ressaltar que E172, ao efetuar os cálculos auxiliares, utilizou o resultado obtido como âncora.

O aluno E029 também armou corretamente a divisão escolhida para resolver o problema e apresentou um quociente considerado correto, porém observamos, por meio da análise de seus registros escritos, que ele, embora apresentando uma resposta correta ao problema, não desenvolveu nenhum procedimento para efetuar esse algoritmo e também não efetuou cálculos auxiliares. Isso nos leva a pensar que ele tenha efetuado a operação da divisão utilizando uma calculadora e que tenha empregado o seu resultado escrevendo-o no quociente da divisão como se ele próprio tivesse desenvolvido um procedimento para obter a resposta.

Os alunos E022, E137 e E261 elaboraram uma estratégia que resolvia o problema proposto no *Item 4*, mesmo essa sendo diferente daquela desenvolvida pelos alunos do primeiro subgrupo, pois, por meio da análise do gráfico, é possível que se retirem os dados dentro de um "intervalo permitido". O estudante E022 interpretou corretamente o enunciado, retirou os dados necessários para desenvolver a estratégia elaborada, montou e efetuou corretamente a operação da divisão utilizando alguns cálculos auxiliares para resolvê-la, o que nos leva a entender que ele não utilizou uma calculadora durante o processo de resolução dessa divisão. É importante destacar que esse aluno reconheceu a possibilidade de realizar simplificações no algoritmo antes de iniciar seu processo de resolução. Por meio da análise de seus registros escritos, podemos considerar que ele realizou um processo de verificação da divisão realizada, tirando a "prova real", o que lhe permitiu constatar se a resposta obtida nessa divisão estava correta. Para essa validação, o aluno armou e efetuou a operação de uma multiplicação, a qual é considerada como a operação inversa da divisão.

E137 procedeu corretamente ao desenvolver a estratégia elaborada e encontrou uma resposta considerada correta, porém, ao escrever a resposta para o problema proposto no *Item 4*, ele esqueceu-se de colocar uma vírgula para indicar que aquele era um

número decimal, o que nos faz acreditar que isso tenha acontecido por uma distração, já que ele mostra compreender as técnicas operatórias do algoritmo da divisão.

O aluno E261, assim como demais desse subgrupo, elaborou uma estratégia que resolvia o problema proposto no *Item 4*. Analisando seus registros escritos, verificamos que ele armou, de maneira adequada, uma divisão e apresentou uma resposta considerada correta, mas não efetuou essa divisão. Desse modo, podemos inferir que ele utilizou o auxílio de uma calculadora para encontrar uma resposta para o problema.

Os estudantes E020, E030, E031 e E088 elaboraram uma estratégia que envolve o cálculo do algoritmo da divisão, sendo essa a operação que resolvia o problema proposto no *Item 2*. Por meio de seus registros escritos, podemos considerar que eles interpretaram corretamente o problema proposto no enunciado e localizaram os dados necessários para resolvê-lo. E020 e E031 montaram corretamente o algoritmo da divisão, o que nos leva a pensar que eles compreendem a importância da organização espacial do algoritmo. E020 armou e efetuou o algoritmo da divisão "sem subtração" e apresentou o resultado obtido como resposta, enquanto E031 montou o algoritmo da divisão, realizou uma simplificação entre o dividendo e divisor e, sem efetuar essa divisão, apresentou o quociente obtido como resposta correta. Por meio de uma leitura vertical das provas dos alunos E020 e E031, verificamos que eles dominam a resolução das operações aritméticas, pois, tanto na resolução do *Item 1* quanto na do *Item 2*, esses alunos resolveram corretamente os algoritmos das operações apropriadas para resolver o problema proposto. Além disso, também podemos inferir que eles efetuaram os cálculos utilizando o auxílio de uma calculadora, já que não havia nenhum indício de que eles tenham efetuado, sem nenhum recurso, essa operação.

Quanto ao estudante E030, ele apenas indicou, por meio de uma fração, a divisão a ser realizada, mas não apresentou nenhum indício de resolução. Assim como os outros alunos desse grupo, ele parece ter resolvido a "fração indicada" com a ajuda de uma calculadora, porque não há, em seus registros escritos, nenhum indício de que ele tentou resolvê-la.

O aluno E088 elaborou uma estratégia que envolve o cálculo de uma divisão, a qual resolvia o problema proposto no *Item 2*. O aluno armou o algoritmo da divisão, realizou uma simplificação entre o dividendo e o divisor, efetuou um algoritmo da divisão pelo processo curto e apresentou o resultado obtido como resposta. Ele ainda armou e efetuou o algoritmo de uma multiplicação como cálculo auxiliar para resolver essa divisão, o que nos faz entender que ele não utilizou o auxílio de uma calculadora ao efetuá-la.

No segundo subgrupo do **G11**, há as produções de E026, E147, E188, E215 e E251, os quais interpretaram o enunciado de modo adequado, localizaram os dados corretos para resolver a estratégia escolhida, montaram apropriadamente o algoritmo da divisão, mas equivocaram-se ao desenvolver o procedimento. O estudante E026 armou corretamente o algoritmo da divisão, realizou as simplificações possíveis, mas desenvolveu incorretamente o procedimento e, por esse motivo, apresentou uma resposta considerada incorreta. Analisando o processo de resolução de E215, consideramos que ele não domina as técnicas operatórias da divisão e, além disso, podemos inferir que ele não realizou uma reflexão acerca da resposta obtida, pois, se tivesse refletido, teria se certificado de que a resposta obtida não resolvia o problema proposto. Já E251 mostrou saber efetuar a operação da divisão, pois seus registros escritos mostram que ele realizou a divisão por meio do processo curto e apresentou o resultado obtido como resposta incorreta para o problema, o que nos leva a inferir que ele apresentou uma resposta incorreta porque não efetuou completamente a divisão. O aluno E147 utilizou, ao efetuar a divisão que resolvia o problema, alguns cálculos auxiliares e realizou as simplificações possíveis (no dividendo e no divisor), porém não concluiu a resolução dessa divisão e apresentou uma resposta considerada incorreta. Mesmo apresentando uma resposta incorreta, podemos considerar, por meio da análise dos seus registros escritos, que esse aluno domina a resolução das operações aritméticas e mais, que ele fez estimativas ao resolver as operações, pois, ao escrever a resposta, indicou por meio do símbolo  $\sim$  (aproximadamente) que aquele valor adquirido era um número aproximado. O aluno E188, assim como E147, também não concluiu a resolução da divisão e apresentou uma resposta incorreta. Verificando os seus registros, podemos considerar que ele não domina as técnicas operatórias da divisão. Ademais, o estudante não apresenta nenhum indício de que tenha feito uma reflexão da resposta encontrada, o que lhe daria a possibilidade de perceber seus equívocos e, assim, poder escolher outro procedimento que talvez o levasse à resposta correta.

O aluno E019, pertencente ao *terceiro subgrupo* do **G11**, elaborou uma estratégia que resolvia o problema proposto no *Item 4*, compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado, interpretou corretamente o gráfico, retirou os dados necessários para desenvolver a estratégia elaborada e montou corretamente o algoritmo da divisão. Entretanto, ele não efetuou o cálculo dessa divisão, apenas deixou indicada a relação que estabeleceu com um dos dados do enunciado e apresentou uma resposta considerada incorreta. Como não há indícios de que ele tenha tentado efetuar essa divisão, é possível que tenha utilizado o auxílio de uma calculadora ou que, utilizando a relação apresentada em seus registros, tenha feito

uma estimativa para obter a resposta, pois o valor apresentado como resposta aproxima-se daquele considerado correto.

Em relação à única prova pertencente ao *quarto subgrupo* do **G11**, temos somente a produção de E154, o qual elaborou uma estratégia que resolvia o problema proposto no *Item 4*, interpretou corretamente o enunciado e retirou os dados corretos para resolvê-lo. O aluno montou o algoritmo corretamente, mas não efetuou a divisão que resolvia o problema e, desse modo, apresentou uma resposta incorreta. Como ele não apresentou nenhum indício de tentativa de resolução e apresentou uma resposta ao problema, podemos considerar que ele tenha resolvido essa divisão utilizando uma calculadora.

No *quinto subgrupo* do **G11**, há apenas a produção de E037, o qual elaborou uma estratégia que não resolvia o problema proposto no *Item 4*. De acordo com a estratégia adotada, podemos considerar que ele não compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado, porque ele montou o algoritmo de uma divisão que não resolvia o problema e apresentou uma resposta considerada incorreta. Ademais, esse aluno não apresentou indícios de que tenha tentado resolver a divisão, pois ele apenas escreveu um determinado valor no seu quociente, o que torna possível inferir que ele utilizou uma calculadora ao efetuá-la.

As produções escritas de E158 e E167 formam o *sexto subgrupo* do **G11**, os quais elaboraram uma estratégia que não resolvia o problema apresentado no *Item 4*, o que nos leva a pensar que eles não interpretaram corretamente o problema proposto no enunciado. Os estudantes montaram, porém não efetuaram uma divisão a qual não resolvia o problema. Com isso, é possível inferir que eles tenham realizado os cálculos usando uma calculadora.

Os alunos E065 e E105 formam o *sétimo subgrupo* do **G11**. Esses alunos elaboraram uma estratégia que não resolvia o problema proposto no *Item 4*. De acordo com a estratégia elaborada, podemos considerar que eles não compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado e, por esse motivo, apresentaram uma resposta diferente da considerada correta. E105 armou o algoritmo de uma divisão que não resolvia o problema e realizou as simplificações possíveis, mas não terminou o seu processo de resolução. A resposta que ele apresentou ao problema é diferente do quociente obtido, o que nos faz pensar que, assim como alguns alunos, ele também tenha efetuado os cálculos utilizando uma calculadora. E065, por sua vez, parece não dominar o processo de resolução dessa divisão.

No *oitavo subgrupo* do **G11**, há a produção escrita de E022, o qual adotou, como estratégia de resolução, o cálculo de uma divisão. Para resolver o problema proposto no *Item 6*, ele armou e efetuou corretamente uma divisão que não resolvia o problema e, como consequência, encontrou uma resposta considerada incorreta. Por meio da análise de seus

registros podemos inferir que, embora não tenha elaborado uma estratégia que resolvesse o problema, compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado.

O *nono subgrupo* de procedimentos do **G11** é formado apenas pela produção de E032, o qual elaborou como estratégia de resolução, o cálculo de uma divisão que não resolvia o problema. O aluno armou e efetuou corretamente a operação da divisão e, supostamente, após tê-la resolvido, percebeu que, por meio do resultado obtido, não conseguiria elaborar uma resposta que resolvesse o problema. Desse modo, ele utilizou outra estratégia de resolução, a qual envolvia o cálculo de duas multiplicações. Para desenvolver essa estratégia, ele escreveu as multiplicações na forma de uma expressão numérica e, assim, efetuou-as corretamente. Utilizando os resultados obtidos nessas multiplicações, esse aluno armou e efetuou corretamente uma adição, o que possibilitou considerar que, a partir do resultado obtido nessa adição, ele tenha elaborado a resposta correta para o problema. A partir da análise de seus registros escritos, foi possível inferir que ele efetuou as operações da divisão e da adição com reserva mentalmente ou utilizou uma calculadora. Isso fica evidente quando olhamos para essas operações e não encontramos indícios de que ele tenha tentado resolvê-las.

Para efetuar a divisão, os alunos E016, E019, E020, E022, E022, E026, E029, E031, E032, E037, E040, E065, E088, E088, E105, E137, E147, E154, E158, E160, 167, E172, E188, E215, E251 e E261 utilizaram o algoritmo da divisão considerado como o "tipo escolar", no qual armaram corretamente o algoritmo e indicaram corretamente o dividendo, o divisor, o quociente e o resto. Apenas E030 não usou o algoritmo "tipo escolar", pois observamos que ele indicou a divisão na forma de uma fração, como mostrado a seguir:

$$\frac{1280}{160} =$$

De acordo com os procedimentos desenvolvidos por E016, E019, E020, E022, E022, E026, E029, E030, E031, E032, E037, E040, E065, E088, E088, E137, E147, E160, E172, E188, E215, E216 e E251, embora alguns tenham procedido incorretamente para efetuar as operações escolhidas, podemos inferir que eles parecem dominar o algoritmo da divisão e sabem desenvolver os procedimentos necessários para efetuá-la. Em relação aos registros escritos de E105, E154, E158 e E167, não foi possível fazer inferências acerca do que eles sabem ou não a respeito da operação da divisão pelo fato de que eles apenas armaram

o algoritmo da divisão e não apresentaram indícios de que tenham tentado resolver essa operação.

#### 5.1.12 Grupo de Estratégias G12

O grupo **G12** é formado somente pela produção de E024, o qual desenvolveu uma estratégia diferente dos demais alunos.

**Quadro 37** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G12	Uma adição e uma subtração	Arma e efetua corretamente a subtração que resolve o problema. Ao seu lado, arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	E024	01

O estudante efetuou uma subtração e uma adição para resolver o problema proposto no *Item 1*. Inferimos que ele compreendeu o enunciado, já que localizou os dados necessários para resolver o problema proposto nesse item, montou corretamente o algoritmo da subtração utilizando o algoritmo "tipo escolar", indicou o sinal da operação realizada e utilizou corretamente as técnicas operatórias da subtração com reserva. Assim como os alunos do primeiro subgrupo do **G2**, E024 resolveu as mesmas operações ao efetuar a subtração. Por meio de seus registros escritos, consideramos que ele apenas efetuou uma adição para "validar" as informações contidas na tabela do enunciado, pois não utiliza, como *âncora*, o resultado dessa adição para resolver a subtração.

#### 5.1.13 Grupo de Estratégias G13

O décimo terceiro grupo de estratégias (G13) é constituído pelas produções de E149 e E179 e está dividido em dois (2) subgrupos.

**Quadro 38** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G13	Uma adição e uma multiplicação	Descarta corretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um traço embaixo delas. Escreve "mínima --- (valor da nota)" "máxima (valor da nota)". Escreve e efetua corretamente a adição que resolve parte do problema utilizando as notas restantes contidas no enunciado. Utilizando o resultado obtido na adição, efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E149	01
		Utilizando todas as notas contidas no enunciado, arma e efetua incorretamente uma adição que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E179	01

Para resolver o problema, a estratégia utilizada por esses alunos envolve o cálculo de uma adição e de uma multiplicação. De acordo com a estratégia empregada por eles, podemos considerar que eles não compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado, já que não conseguiram selecionar uma estratégia que resolvesse o problema do *Item 5*. Para resolvê-lo, podemos observar, por meio dos procedimentos desenvolvidos, que E149, pertencente ao *primeiro subgrupo* do **G13**, não seguiu as etapas necessárias para resolvê-lo. Esse aluno excluiu, dentre as notas obtidas pelo jogador na competição, a maior e a menor nota e, utilizando as notas restantes, efetuou uma adição envolvendo números decimais. Para efetuar essa adição, ele não montou o algoritmo considerado como o "tipo escolar", apenas escreveu a operação na forma de uma expressão numérica e não apresentou indícios de que tenha tentado resolvê-la. Isso nos leva a pensar que ele tenha realizado os cálculos mentalmente ou que tenha usado uma calculadora. Aproveitando o resultado obtido nessa adição, o aluno efetuou uma multiplicação, na qual também não montou o algoritmo, apenas escreveu-a na forma de uma expressão numérica, e apresentou o seu resultado como resposta para problema. Pelo fato de o aluno não ter compreendido o enunciado, não podemos inferir se ele conhece ou não o conceito de média aritmética e se domina as operações

aritméticas envolvendo números decimais, pelo fato de que não há, em seus registros escritos, indícios de que ele tenha tentado efetuá-las. Apenas podemos deduzir, a partir de uma análise de seus registros, que ele não validou a resposta encontrada, tentando verificar se ela satisfazia às exigências do problema.

O *segundo subgrupo* do **G13** é formado pela produção escrita de E179, o qual, assim como E149, utilizou uma estratégia que não resolvia o problema proposto no *Item 5*. Como esse aluno não conseguiu elaborar uma estratégia adequada para resolvê-lo, entendemos que ele não compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado desse problema. Utilizando todas as notas obtidas pelo jogador, o aluno armou e efetuou incorretamente uma adição envolvendo números decimais e, para montar esse algoritmo, utilizou o algoritmo avaliado como o "tipo escolar", no qual considerou a importância da sua organização espacial. Além disso, utilizando o resultado obtido nessa adição, ele armou e efetuou corretamente uma multiplicação e apresentou o seu resultado como resposta para o problema. Como ele mostrou não ter interpretado corretamente o enunciado, não podemos fazer inferências acerca de sua compreensão a respeito do conceito de média aritmética. Analisando seus registros escritos, podemos inferir que esse aluno domina as operações aritméticas envolvendo números decimais, pelo fato de que, em seus registros escritos, ele procedeu corretamente ao efetuar essas operações, e reconhece a importância de se utilizar vírgulas para indicar as casas decimais, tanto nos números a serem efetuados quanto no resultado obtido. Também percebemos que ele não está acostumado ou não reconhece a importância de se validar a resposta encontrada para verificar se ela atende ou não às exigências do enunciado. No momento em que o estudante valida a resposta encontrada, ele tem a chance de analisar se a estratégia escolhida resolve o problema; não solucionando a questão, ele pode recorrer à outra estratégia que o ajude a resolvê-la.

#### 5.1.14 Grupo de Estratégias G14

O décimo quarto grupo de estratégias, o qual é denominado **G14**, é formado por seis (6) produções escritas. A estratégia utilizada por E086, E102, E112, E124, E173 e E242 envolve o cálculo de uma adição e de duas multiplicações. A partir da análise dos registros escritos desses alunos, pudemos observar que, embora a estratégia empregada seja a mesma, os procedimentos desenvolvidos foram diferentes. Por conseguinte, agrupamos os procedimentos semelhantes em quatro (4) subgrupos.

**Quadro 39** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G14	Uma adição e duas multiplicações	Efetua corretamente uma multiplicação que resolve parte do problema. Abaixo dessa, efetua corretamente outra multiplicação que resolve parte do problema. Efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	E086, E124, E173	03
		Descarta incorretamente a nota máxima e a nota mínima, fazendo um "+" e "-" embaixo da nota maior e da nota menor, respectivamente. Marca um traço contínuo embaixo das notas restantes e efetua uma adição que não resolve o problema. Utilizando, como âncora, o resultado obtido nessa adição, efetua uma multiplicação que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido nessa multiplicação como âncora, efetua outra multiplicação. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E102	01
		Arma e efetua corretamente a adição de algumas notas contidas no enunciado. Utilizando o resultado obtido na adição, arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido na multiplicação, arma e efetua incorretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E112	01
		Descarta corretamente a nota máxima e a mínima, fazendo um risco sobre elas. Arma e efetua corretamente uma adição utilizando algumas notas contidas no enunciado. Utilizando, como âncora, o resultado obtido na adição, efetua uma multiplicação que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido na multiplicação como âncora, efetua corretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E242	01

As produções escritas de E086, E124 e E173 formam o *primeiro subgrupo* do **G14**. Analisando seus registros escritos, observamos que a compreensão que eles fizeram do enunciado foi adequada, já que retiraram os dados corretamente, escolheram uma operação adequada para resolvê-lo e apresentaram a resposta considerada correta. Para resolver o problema proposto no *Item 5*, E086 e E0124 utilizaram, como estratégia de resolução, a operação de duas multiplicações e de uma adição. Ao efetuá-las, esses alunos escreveram-nas na forma de uma expressão numérica. Utilizando os resultados obtidos nessas operações,

E086 armou e efetuou corretamente uma adição com reserva e elaborou uma resposta que satisfizesse às exigências requeridas pelo problema. Por meio da análise de seus registros escritos, foi possível observar que ele mostrou dominar as técnicas operatórias da adição com reserva e compreendeu a importância de se escrever o algoritmo dessa operação, obedecendo à sua organização espacial. O aluno E124, assim como E086, efetuou corretamente a operação de uma adição, mas não usou o algoritmo considerado como o "tipo escolar", apenas escreveu-a na forma de uma expressão numérica. O aluno E173 também efetuou as mesmas operações que E086 e E124, mas ele montou os algoritmos dessas operações. Analisando seus registros escritos, podemos considerar que ele utiliza os algoritmos do "tipo escolar", domina as técnicas operatórias da adição com reserva e reconhece a importância de se organizar os algoritmos ao escrevê-los.

Em relação às produções escritas desses estudantes, foi possível inferir que eles, supostamente, efetuaram a operação da adição para verificar se a resposta apresentada satisfazia às exigências do enunciado.

O *segundo subgrupo* de procedimentos do **G14** é formado apenas pela produção de E102, o qual, de acordo com a estratégia elaborada, mostrou não ter compreendido o que estava sendo pedido no enunciado do problema constante no *Item 5*. Para resolvê-lo, esse aluno seguiu algumas etapas, as quais estavam apresentadas no enunciado. Dentre as notas informadas no enunciado, ele excluiu incorretamente a maior e a menor nota e, usando as notas restantes, efetuou corretamente uma adição, na qual não montou o seu algoritmo, apenas indicou a soma usando as notas apresentadas no enunciado. Utilizando o resultado obtido nessa adição, mas sem considerar as casas decimais desse número, o aluno efetuou corretamente uma multiplicação, porém não indicou as casas decimais no resultado obtido. Empregando esse resultado, ele efetuou incorretamente outra adição, indicou as casas decimais nesse número e apresentou o seu resultado como resposta para o problema. Pelo fato de ele ter mostrado não compreender o que estava sendo pedido no enunciado, não pudemos fazer inferências acerca de sua compreensão a respeito do conceito de média aritmética. Por meio da análise de seus registros escritos, podemos considerar que esse estudante não reconhece a importância de se indicar, quando necessário, as casas decimais nos números. Também percebemos que não há, em seus registros, indícios de que ele tenha tentado efetuar as operações. Esse fato leva-nos a inferir que ele utilizou uma calculadora para efetuar operações aritméticas necessárias.

No *terceiro subgrupo* do **G14** encontramos a produção escrita de E112, o qual, supostamente, não compreendeu, de maneira adequada, o enunciado do problema

proposto no *Item 5*, pois ele não seguiu, do modo como estavam apresentadas no enunciado, as etapas necessárias para resolvê-lo. Analisando seus registros escritos, foi possível observar que ele não indicou quais notas excluiu, mas acreditamos que ele tenha excluído a maior e a menor nota. Isso fica evidente quando olhamos para a operação de adição envolvendo números decimais que ele efetuou utilizando as notas restantes. Ele montou corretamente o algoritmo da adição, considerando a importância da sua organização espacial, organizou as parcelas colocando vírgula embaixo de vírgula e indicou, no resultado obtido, as casas decimais. Usando o resultado alcançado nessa operação, esse aluno armou e efetuou corretamente uma multiplicação envolvendo números decimais, efetuou os cálculos como se não houvesse a vírgula nos fatores e, após ter encontrado o resultado, indicou corretamente a quantidade de casas decimais. Por conta de seus registros, acreditamos que ele contou quantas casas decimais havia ao todo nos fatores. Para proceder à resolução do problema e utilizando o resultado obtido nessa multiplicação, o aluno armou e efetuou outra multiplicação envolvendo números decimais. Salientamos que ele procedeu corretamente ao efetuar os cálculos necessários e apresentou esse resultado como resposta para o problema. Também verificamos que ele parece dominar as operações aritméticas envolvendo os números decimais, pelo fato de que agiu corretamente ao desenvolver as estratégias adotadas, e que reconhece a importância de se organizar o algoritmo antes de efetuar as operações.

O *quarto subgrupo* do **G14** é formado apenas pela produção de E242. Por meio da análise de seus registros escritos, foi possível inferir que ele não compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado, já que adotou uma estratégia que não resolvia o problema. Pelo fato de o aluno não ter compreendido o que estava sendo pedido no enunciado, ele não seguiu passo a passo as etapas tais como foram apresentadas. Para resolver o problema, ele excluiu corretamente a maior e a menor nota e, utilizando as notas restantes, armou e efetuou corretamente uma adição com reserva envolvendo números decimais. É interessante observar que o aluno, ao efetuar essa adição, não apontou as casas decimais dos números, apenas indicou-as no resultado obtido. Empregando esse resultado como âncora, esse aluno efetuou incorretamente uma multiplicação e, utilizando, como âncora, o seu resultado, efetuou corretamente outra multiplicação e apresentou seu resultado como resposta para o problema. A partir da leitura de seus registros, podemos considerar que ele não sabe aplicar o conceito de média aritmética ou que sua compreensão do enunciado não lhe permitiu fazer isso. Também podemos ponderar que ele, embora não tenha indicado as casas decimais nos números quando efetuou a adição, parece dominar as operações com números decimais. Isso fica evidente quando olhamos para seus registros e observamos que ele indicou corretamente

as casas decimais nos resultados obtidos, mostrando que ele reconhece a importância de colocar vírgula embaixo de vírgula e de contar as casas decimais na multiplicação para colocá-las no resultado.

De modo geral, notamos que, para efetuar essas operações E112, E173 e E242 utilizaram o algoritmo considerado como o "tipo escolar", no qual eles montaram corretamente o algoritmo, considerando a importância da sua organização espacial e indicaram o sinal da operação realizada. Já E102 e E124 não utilizaram o algoritmo considerado como o "tipo escolar", pois escreveram as operações na forma de uma expressão numérica. Dentre as três operações efetuadas por E086, ele montou apenas o algoritmo da adição considerado como o "tipo escolar" e as operações de multiplicação ele escreveu na forma de uma expressão numérica.

#### 5.1.15 Grupo de Estratégias G15

O décimo quinto grupo de estratégias (**G15**) é formado por duas (2) produções escritas e está dividido em dois (2) subgrupos de procedimentos.

**Quadro 40** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G15	Duas adições e uma subtração	Arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido nessa adição como âncora, efetua corretamente outra adição que não resolve o problema. Utilizando, como âncora, o resultado obtido nessa adição, efetua incorretamente uma subtração que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E051	01
		Arma e efetua corretamente duas adições que não resolvem o problema. Arma e efetua incorretamente uma subtração que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E091	01

No *primeiro subgrupo* do procedimentos de **G15**, temos a produção escrita de E051, o qual desenvolveu uma estratégia que não resolvia o problema proposto no *Item 2* e apresentou uma resposta diferente daquela considerada correta. Podemos inferir que ele não

interpretou corretamente o enunciado, pois os dados por ele retirados da tabela não estavam de acordo com o que estava sendo pedido. O aluno E051 armou e efetuou corretamente uma adição empregando o algoritmo "tipo escolar" e, usando o resultado obtido como âncora, armou e efetuou corretamente outra adição e incorretamente uma subtração.

No *segundo subgrupo* do **G15**, situa-se a produção de E091. De acordo com a estratégia adotada, podemos considerar que ele não compreendeu o enunciado, pois elaborou uma estratégia que resolvia um problema diferente do proposto no *Item 1*. Esse estudante efetuou duas adições e utilizou os seus resultados como âncora para resolver a subtração. Ao resolvê-la, ele montou corretamente o algoritmo obedecendo à sua organização espacial, indicou o sinal da operação efetuada e utilizou corretamente as técnicas operatórias da subtração com reserva. Embora ele mostre dominar o algoritmo da subtração com reserva, ao efetuá-la realizou as trocas necessárias para poder operar com os números, porém tomou o 1 da dezena e depois, ao ficar 0 dezenas, tomou-o como 9, como se faz ao "emprestar 1 do 10". Assim, consideramos que, ao resolver a operação da subtração, o aluno tenha efetuado as seguintes operações:

$0 - 4 = ?$
$10 - 4 = 6$
$0 - 60 = ?$
$100 - 60 = 40$
$600 - 800 = ?$
$1600 - 800 = 800$

→

$0^{\text{de}} 0$
<del>17</del> 10
- 864
<hr style="width: 50px; margin: 0 auto;"/> 836

Ao efetuar a operação ' $0 - 4 = ?$ ', o aluno trocou uma dezena por dez (10) unidades e adicionou-as ao zero (0) unidade, obtendo, assim, dez (10) unidades. Dessa forma, ele efetuou a operação ' $10 - 4$ ', alcançando seis (6) unidades. Em seguida, ao efetuar a operação ' $0 - 60 = ?$ ', ele trocou uma centena por dez (10) dezenas e adicionou-as ao zero (0) dezena, conseguindo, destarte, 10 dezenas, mas assumiu-as como se fossem 90, pois ele já havia "passado 10" para as unidades. Dessa forma, ele pôde efetuar a operação ' $90 - 60$ ', obtendo três (3) dezenas. Depois, ao efetuar a operação ' $600 - 800$ ', o aluno trocou uma unidade de milhar por dez (10) centenas e adicionou-as às seis (6) centenas, obtendo 16 centenas. Finalmente, subtraiu oito (8) centenas de dezesseis (16) centenas, obtendo o resultado da subtração.

### 5.1.16 Grupo de Estratégias G16

O grupo **G16** é formado apenas pela produção de **E091**, o qual desenvolveu uma estratégia que envolve o cálculo de uma subtração e de três adições, as quais resolviam o problema proposto no *Item 2*.

**Quadro 41** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G16	Uma subtração e três adições	Arma e efetua corretamente uma subtração que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente três adições, as quais resolvem o problema. Apresenta a resposta correta.	E091	01

Por meio da análise de seus registros escritos, podemos inferir que ele compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado, pois relacionou os dados localizados na tabela com a estratégia desenvolvida. Observamos que ele armou e efetuou uma subtração como cálculo auxiliar para validar uma das informações retiradas da tabela, de modo que pudesse efetuar as adições corretamente. Notamos, ainda, que, ao desenvolver a estratégia elaborada, esse aluno utilizou os resultados obtidos como *âncoras* para resolver a próxima operação. Para efetuar essas operações, ele as armou e efetuou corretamente e usou o algoritmo considerado como o "tipo escolar", no qual escreveu as unidades abaixo das unidades, as dezenas abaixo das dezenas e centenas abaixo das centenas. A partir desses procedimentos desenvolvidos ao resolver o problema, podemos inferir que ele domina as técnicas operatórias dessas operações com ou sem recurso à ordem superior.

### 5.1.17 Grupo de estratégias G17

A produção escrita de E019 forma o décimo sétimo grupo de estratégias (**G17**).

**Quadro 42** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G17	Uma subtração e uma multiplicação	Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente a subtração que resolve o problema e apresenta a resposta correta.	E019	01

Para resolver o problema proposto no *Item 1*, E019 efetuou uma multiplicação e uma subtração. De acordo com a estratégia elaborada, podemos considerar que ele compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado, pois soube localizar os dados necessários para solucioná-la. Ele armou e efetuou corretamente a operação da multiplicação, mas não utilizou o resultado obtido nesse algoritmo como âncora para resolver a subtração. Ele efetuou corretamente a subtração escolhida e apresentou o resultado alcançado como resposta. Ao efetuar a subtração e a multiplicação, ele montou o algoritmo considerado como o "tipo escolar" obedecendo à sua organização espacial, indicou o sinal da operação efetuada e utilizou corretamente as técnicas operatórias da subtração com reserva, o que nos leva a crer que ele domina o algoritmo da subtração.

#### 5.1.18 Grupo de Estratégias G18

Em relação à única produção escrita pertencente ao décimo oitavo grupo de estratégias (G18), verificamos que E241 adotou o cálculo de duas multiplicações e de uma divisão como estratégia para resolver o problema proposto no *Item 5*.

**Quadro 43** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G18	Duas multiplicações e uma divisão.	Descarta corretamente a nota máxima e a mínima, fazendo um risco sobre elas. Arma e efetua incorretamente uma divisão que não resolve o problema. Arma e efetua incorretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E241	01

De acordo com a estratégia utilizada, podemos considerar que sua compreensão do enunciado não foi adequada, já que não elaborou uma estratégia que resolvia o problema. Para resolvê-lo, E241 seguiu algumas das etapas apresentadas no enunciado e excluiu corretamente a maior e a menor nota dentre aquelas que foram atribuídas ao jogador. O estudante armou e efetuou incorretamente uma divisão, a qual, supostamente, indica que ele estava tentando calcular a média aritmética, porém não conclui a sua resolução. Ele armou e efetuou uma multiplicação envolvendo números decimais e considerou as casas decimais desses números, mas procedeu incorretamente ao efetuá-la. Utilizando o resultado obtido nessa multiplicação, o aluno armou e efetuou corretamente outra multiplicação envolvendo números decimais. Além disso, ele montou corretamente o algoritmo dessas operações, utilizando o algoritmo considerado como o "tipo escolar" e escrevendo as unidades abaixo das unidades, as dezenas abaixo das dezenas. Por meio da análise de seus registros escritos, podemos considerar que ele mostra dominar o cálculo das operações aritméticas envolvendo números decimais, pois, ao efetuar as multiplicações, multiplicou os dois números decimais como se eles fossem números naturais e colocou a vírgula no resultado, de modo que o número de casas decimais do resultado obtido fosse igual à soma dos números de casas decimais dos fatores, como mostrado a seguir:

$$\begin{array}{r}
 40 \\
 \times 2,8 \\
 \hline
 320 \\
 80+ \\
 \hline
 102,0
 \end{array}$$

Em relação à divisão, foi possível observar que esse aluno procedeu incorretamente ao multiplicar o quociente pelo divisor, obtendo um resultado diferente daquele considerado correto. Para resolver a outra multiplicação, ele armou e efetuou corretamente essa operação e utilizou o algoritmo considerado como o "tipo escolar", no qual considerou a importância da sua organização espacial. Cabe ressaltar ser possível que esse estudante compreenda o conceito de média aritmética, pois, em seus registros escritos, há indícios de que ele tentou calculá-la.

### 5.1.19 Grupo de Estratégias G19

No grupo **G19**, há duas produções escritas, as quais pertencem aos alunos E030 e E033, que, embora tenham desenvolvido uma estratégia diferente dos demais estudantes, elaboraram uma estratégia que resolvia o problema proposto no *Item 4* e apresentaram uma resposta considerada correta.

**Quadro 44** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G19	Uma razão	Escreve a expressão de uma razão que resolve o problema. Apresenta uma resposta considerada correta.	E030, E033	02

De acordo com a estratégia elaborada, consideramos que esses alunos interpretaram corretamente o enunciado, localizaram, no gráfico, os dados necessários para resolver o problema e, em lugar de montarem o algoritmo da divisão, escreveram a expressão de uma razão utilizando os dados retirados do gráfico. Em seus registros, eles não apresentaram nenhum indício de que tenham tentado resolver a razão e, por esse motivo, podemos inferir que eles utilizaram uma calculadora para efetuar os cálculos. É relevante destacar que esses alunos escreveram o resultado obtido na frente do sinal de igualdade, o qual, na Aritmética, é utilizado para indicar um resultado (SÁ, 2003). Cabe também salientarmos que, ao efetuar o cálculo da razão, E033 realizou as simplificações necessárias de modo a tornar os cálculos mais simples.

## 5.1.20 Grupo de estratégias G20

O grupo **G20** é constituído por cinco (5) produções escritas, nas quais E017, E035, E040, E103 e E135 adotaram, como estratégia de resolução, o cálculo de uma regra de três.

**Quadro 45** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G20	Uma regra de três	Monta e resolve incorretamente uma regra de três que resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	E017	01
		Monta e resolve corretamente uma regra de três que resolve o problema. Apresenta uma resposta correta.	E035, E040, E103, E135.	04

A partir da análise dos registros escritos de E017, podemos inferir que ele compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado e, desse modo, montou uma regra de três utilizando os dados retirados da tabela. Por meio de seus registros, observamos que, para resolver a regra de três, ele efetuou alguns cálculos auxiliares, tais como uma subtração, uma multiplicação e uma divisão, porém, devido a uma distração, o aluno efetuou incorretamente a divisão por meio da qual encontraria o resultado do problema e, assim, apresentou uma resposta incorreta ao problema. Apesar de o aluno não ter resolvido corretamente o problema, consideramos, por meio de sua produção escrita e por meio de uma leitura vertical da sua prova, que ele domina as técnicas operatórias das operações aritméticas, pois, ao resolver o *Item 1* da prova, ele efetuou corretamente uma subtração com reserva. Os alunos E035, E040, E103 e E135 montaram e efetuaram corretamente o cálculo de uma regra de três simples a partir da interpretação que fizeram do enunciado e apresentaram uma resposta considerada correta. O estudante E040 efetuou corretamente alguns cálculos auxiliares ao resolver a regra de três, tais como uma multiplicação e uma divisão. Foi possível observar que todos os dois alunos utilizaram o algoritmo da regra de três considerada como o "tipo escolar", assim como mostrado a seguir:

1	—	180
X	—	1620

Por meio da análise dos registros escritos apresentados por esses estudantes para resolver uma regra de três e pelo fato de terem desenvolvido corretamente os procedimentos necessários para solucionar uma regra de três simples, foi possível inferir que eles, inclusive E017, parecem saber resolvê-la.

#### 5.1.21 Grupo de Estratégias G21

O vigésimo primeiro grupo de estratégias (**G21**) é formado por quarenta e quatro (44) produções escritas e está dividido em doze (12) subgrupos de procedimentos semelhantes, conforme o quadro a seguir:

**Quadro 46** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G21	Uma expressão numérica.	Escreve e resolve corretamente uma expressão numérica que resolve o problema. Apresenta uma resposta correta.	E033	01
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Apresenta uma resposta correta.	E015, E021, E027, E036, E089, E105, E130, E143	08
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta uma resposta correta.	E028, E032, E033, E039, E078, E173, E233, E252	08
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Abaixo dessa, efetua corretamente uma subtração que resolve o problema. Efetua corretamente a adição. Apresenta uma resposta correta.	E066, E106, E261	03
		Efetua corretamente uma expressão numérica que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	E062, E114, E115, E138, E154, E093, E222	07
		Escreve e efetua corretamente uma expressão numérica que resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	E017, E042, E065, E086, E124, E155, E189, E232	08
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Efetua corretamente uma adição que resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	E085, E159, E172, E238	04
		Escreve e efetua corretamente a expressão numérica que resolve o problema. Arma e efetua incorretamente uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	E022	01
		Escreve os números 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 e 2 acima dos números do código do enunciado. Arma e efetua incorretamente uma adição que não resolve o problema. Abaixo do resultado obtido nessa adição, escreve um número "acrescido" 6 unidades de resultado da adição. Apresenta uma resposta incorreta.	E025	01
		Escreve uma expressão numérica que não resolve o problema. Escreve os múltiplos do número nove até o número noventa e, abaixo desse, escreve os múltiplos do número oito até o número setenta e dois. Arma e efetua incorretamente uma divisão que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	E096	01
Escreve e efetua corretamente uma expressão numérica que resolve o problema. Arma e efetua corretamente uma adição. Arma e efetua incorretamente uma divisão que não resolve o problema. Anula essa divisão. Não apresenta resposta.	E195	01		

No *primeiro subgrupo* do **G21**, há apenas a produção escrita de E033, o qual montou uma expressão numérica para resolver o problema proposto no *Item 6*. De acordo com a estratégia utilizada, podemos considerar que ele compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado do problema e retirou os dados necessários para resolvê-lo. Além disso, ele resolveu adequadamente essa expressão, seguindo os procedimentos corretos ao desenvolvê-la, tal como efetuar primeiro a multiplicação e/ ou divisão e, em seguida, a adição e/ ou subtração. Utilizando o resultado alcançado nessa expressão, esse aluno elaborou uma resposta que atendia às exigências do problema proposto.

As produções escritas de E015, E021, E027, E036, E089, E105, E130 e E143 formam o *segundo subgrupo* do **G21**. Esses alunos elaboraram uma estratégia adequada para resolver o problema proposto no *Item 7*. De acordo com a estratégia empregada por eles, podemos considerar que compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado. Os estudantes desse subgrupo seguiram passo a passo os procedimentos necessários para resolver o problema, tais como foram apresentados no enunciado. Eles montaram e efetuaram corretamente uma expressão numérica que resolvia o problema, mas não deixaram indícios do modo como determinaram o número mais próximo do resultado que fosse divisível por 11 e apresentaram a diferença desse número pelo resultado obtido como resposta correta para o problema.

E015, E036 e E105 montaram corretamente a expressão numérica que resolvia o problema e, para resolvê-la, desenvolveram os procedimentos passo a passo, nos quais obedeceram às regras necessárias para resolver uma expressão. Na primeira linha, eles montaram a expressão numérica e, na segunda, efetuaram todas as multiplicações na ordem em que apareciam. Na terceira linha, efetuaram as adições também na ordem em que elas apareciam e, enfim, na quarta linha, apresentaram corretamente o resultado alcançado. Como não há indícios do modo como eles determinaram qual número mais próximo desse resultado era divisível por 11 e também o modo como procederam para encontrar a resposta, podemos considerar que eles realizaram esses cálculos mentalmente ou, até mesmo, utilizando uma calculadora. A partir da análise de seus registros escritos, podemos inferir que esses alunos parecem compreender os procedimentos necessários para resolver uma expressão e dominar as operações aritméticas. É interessante ressaltar que E015 e E105, ao resolver essa expressão numérica, fizeram agrupamentos com os números para indicar a soma dos mesmos e procederam desse modo até obter o resultado da expressão. Observamos que todos os alunos desse subgrupo utilizaram os procedimentos do "tipo escolar", assim como são ensinados na sala de aula para resolver as expressões.

Os alunos E021, E027, E089, E130 e E143, assim como os demais desse subgrupo, também montaram corretamente a expressão numérica que resolvia o problema e desenvolveram os procedimentos passo a passo obedecendo às regras necessárias para resolver uma expressão. Analisando os seus registros escritos, percebemos que eles, primeiramente, montaram a expressão numérica e, em seguida, efetuaram todas as multiplicações na ordem em que apareciam e já apresentaram o resultado obtido da adição desses "produtos". Analisando os procedimentos desenvolvidos por E130, observamos que, para efetuar a soma dos produtos dessa expressão, ele armou e efetuou corretamente uma adição, na qual montou corretamente o algoritmo, considerando a importância da sua organização espacial. Também observamos que, para encontrar alguns divisores do número 11, esse aluno utilizou alguns cálculos auxiliares, nos quais armou e efetuou várias multiplicações até obter o resultado esperado. Contudo, ele não apresentou, em seus registros escritos, indícios, do modo como encontrou a resposta apresentada. Com isso, podemos inferir que ele tenha efetuado os cálculos mentalmente ou com o auxílio de uma calculadora.

O *terceiro subgrupo* do **G21** é constituído pela produção escrita de E028, E032, E033, E039, E078, E173, E233 e E252, os quais elaboraram uma estratégia que resolvia o problema proposto no *Item 7* e, de acordo com a estratégia elaborada, foi possível inferir que eles realizaram uma compreensão adequada do enunciado. E028, E032, E033, E078, E233 e E252 montaram e resolveram corretamente uma expressão numérica que envolvia multiplicação e adição. Eles efetuaram corretamente as multiplicações na ordem em que aparecia e, em seguida, somaram esses produtos, obtendo um resultado correto para a expressão numérica. Já E039 e E173 não montaram uma expressão numérica para resolver o problema, apenas indicaram a multiplicação dos números apresentados no enunciado e, a posteriori, empregando esses resultados, efetuaram corretamente uma adição. Para proceder à resolução do problema, os estudantes desse subgrupo seguiram passo a passo as etapas apresentadas no enunciado. Usando o resultado alcançado na expressão numérica, eles efetuaram corretamente uma adição para localizar qual número mais próximo daquele resultado era divisível por 11 e, para verificar a validade do resultado encontrado, eles efetuaram corretamente uma divisão e apresentaram uma resposta correta para o problema.

Por meio da análise de seus registros escritos, foi possível inferir que esses alunos parecem: a) compreender o que estava sendo pedido no enunciado do problema, já que seguiram passo a passo as etapas necessárias para resolvê-lo; b) dominar as operações aritméticas e a divisibilidade de um número; c) compreender os procedimentos que devem ser

desenvolvidos ao resolver uma expressão numérica. Um dos procedimentos realizados, do ponto de vista da linguagem matemática, é considerado incorreto, tal como mostrado a seguir:

$$\boxed{202 + 7 = 209 \div 11 = 19}$$

As produções escritas de E066, E106 e E261 formam o quarto subgrupo de procedimentos do **G21**. Para resolver o problema proposto no Item 7, esses estudantes utilizaram uma estratégia adequada e seguiram passo a passo as etapas necessárias para resolvê-lo, assim como foram apresentadas no enunciado. De acordo com a estratégia empregada, podemos considerar que eles compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado, pois montaram corretamente a expressão que resolvia o problema e procederam corretamente ao resolvê-la. Primeiro, eles efetuaram as multiplicações dessa expressão, na ordem em que elas apareciam. Depois, usando os resultados obtidos nessas multiplicações, efetuaram as adições, também na ordem em que apareciam. Do mesmo modo agiram até obter o resultado para a expressão. Foi possível observar que, para resolver essa expressão, E106 armou e efetuou corretamente uma adição.

Para proceder à resolução do problema, seguindo as etapas apresentadas no enunciado, os alunos determinaram qual número mais próximo do resultado obtido na expressão numérica era divisível por 11. Analisando seus registros escritos, observamos que eles, para encontrar a resposta para o problema, armaram e efetuaram corretamente uma subtração e apresentaram o seu resultado como resposta para o problema. É interessante destacar que E261, após ter efetuado a subtração, tirou a "prova real" para verificar se a resposta encontrada estava correta ou não. Para isso, ele efetuou uma adição, a qual é considerada como a operação inversa da subtração. Tirar a "prova real" é um indício de que o estudante compreende o modo como as operações se relacionam entre si. Essa é uma das características do pensamento aritmético, o qual mostra que os alunos estão desenvolvendo o seu raciocínio matemático ao resolver problemas.

As produções escritas de E062, E114, E115, E138, E154, E093 e E222 formam o *quinto subgrupo* do **G21**. Esses alunos não seguiram passo a passo as etapas necessárias para resolver o problema da maneira elas como estavam apresentadas no enunciado e, ademais, utilizaram o cálculo de uma expressão numérica como estratégia de resolução. De acordo com a estratégia elaborada, é possível inferir que eles não compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado do problema. Os alunos E115, E138

e E154 procederam corretamente ao resolver a expressão numérica e apresentaram o resultado obtido como resposta para o problema. Ao resolvê-la, E154 armou e efetuou corretamente uma adição, na qual, ao montar o seu algoritmo, considerou a importância de sua organização espacial, escreveu as unidades abaixo das unidades e as dezenas abaixo das dezenas, o que nos leva a inferir que ele parece dominar o cálculo envolvendo as operações aritméticas. Os estudantes E062, E093, E114 e E222 montaram corretamente a expressão numérica, porém desenvolveram procedimentos incorretos ao resolvê-la e apresentaram o resultado obtido como resposta para o problema. Ainda assim, inferimos que esses alunos parecem compreender as regras necessárias para efetuar uma expressão numérica e dominar as operações aritméticas. Analisando seus registros escritos, foi possível observar que E222 utilizou alguns cálculos auxiliares ao resolver essa expressão e procedeu corretamente ao efetuá-los. Ele armou e efetuou corretamente uma adição, na qual montou corretamente o seu algoritmo, escreveu as unidades abaixo das unidades e as dezenas abaixo das dezenas. Também foi possível observar que, ao escrever a expressão numérica, E093 cometeu um equívoco do ponto de vista da linguagem matemática. O exemplo mostrado a seguir ilustra o engano do aluno ao resolver a expressão numérica:

$$\boxed{5 \times 4 = 20 + 7 \times 9 = 63 + 8 \times 3 = 24 = 107}$$

No *sexto subgrupo* do **G21**, encontramos as produções escritas de E017, E042, E065, E086, E124, E155, E189 e E232, os quais empregaram uma estratégia que resolvia o problema proposto no Item 7 e seguiram passo a passo os procedimentos necessários para resolvê-lo, tais como foram apresentados no enunciado, porém apresentaram uma resposta incorreta. De acordo com a estratégia utilizada, independente de terem apresentado a resposta correta ou incorreta, podemos considerar que esses estudantes compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado do problema. E042 e E189 desse subgrupo montaram e efetuaram corretamente a expressão numérica que resolvia o problema. A partir da análise de seus registros escritos, observamos que esses alunos obedeceram às regras necessárias para ao resolver a expressão. Eles montaram a expressão numérica na primeira linha e, abaixo dela, efetuaram todas as multiplicações na ordem em que apareciam. Em seguida, na outra linha, eles efetuaram as adições, também na ordem em que apareciam e assim fizeram até obter o resultado dessa expressão. Esses alunos também não apresentaram, em seus registros, indícios do modo como determinaram o número mais próximo desse

resultado que fosse divisível por 11 e também o modo como procederam para encontrar a resposta, o que nos leva a pensar que eles utilizaram uma calculadora para efetuar tais cálculos. Para resolver essas adições, E189 fez agrupamentos com os números para indicar a sua soma. A partir de uma análise de seus registros, foi possível observar que o aluno, para encontrar o resultado final dessa soma, armou e efetuou corretamente uma adição. Além disso, ele procedeu corretamente ao resolver essa expressão, porém, ao armar o algoritmo da adição a fim de encontrar o seu resultado, equivocou-se e escreveu incorretamente uma das parcelas, como mostrado a seguir:

$$167 + 46 = 216 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 167 \\ + 49 \\ \hline 216 \end{array}$$

Devido a esse engano, o aluno encontrou um resultado incorreto para a expressão, o que o levou a desenvolver equivocadamente os outros procedimentos e a encontrar uma resposta incorreta. Mesmo apresentando uma resposta errada, inferimos que ele domina as operações aritméticas e parece compreender os procedimentos necessários para resolver uma expressão numérica.

Os estudantes E017, E065, E086, E124, E155 e E232 montaram corretamente a expressão numérica, mas não procederam como os outros alunos desse subgrupo para resolvê-la. Eles desenvolveram os procedimentos passo a passo obedecendo às regras necessárias para resolver uma expressão, porém não resolveram passo a passo assim como fizeram E042 e E189, pois apenas efetuaram as multiplicações na ordem em que apareciam e, utilizando os resultados obtidos em cada uma das multiplicações, efetuaram a sua adição e apresentaram um resultado para a expressão. Apenas E017, E065 e E086 resolveram corretamente a expressão numérica, porém apresentaram uma resposta incorreta. É possível que esses alunos tenham se equivocado ao determinar qual o divisor de 11 que se aproximava do resultado obtido na expressão e, desse modo, apresentaram uma resposta considerada incorreta. Os demais alunos desse subgrupo procederam incorretamente ao desenvolver a expressão numérica e, assim, encontraram uma resposta que não satisfazia às exigências do enunciado. A partir da análise de seus registros escritos, inferimos que eles, embora tenham apresentado uma resposta incorreta, parecem dominar as operações aritméticas e compreender os procedimentos necessários para resolver uma expressão

numérica. Como eles não apresentaram, em seus registros escritos, indícios do modo como encontraram a resposta para o problema, inferimos que tenham utilizado uma calculadora ou que tenham efetuado os cálculos mentalmente.

As produções escritas de E085, E159, E172 e E238 formam o sétimo subgrupo de procedimentos do **G21**, os quais utilizaram uma estratégia que resolvia o problema proposto no *Item 7*. Para resolver o problema, esses estudantes seguiram passo a passo as etapas apresentadas no enunciado, mas encontraram uma resposta considerada incorreta. Foi possível observar que eles selecionaram os dados corretos para resolver a expressão numérica, porém procederam incorretamente ao efetuá-la. E085, E159 e E172, ao resolver a expressão numérica, efetuaram corretamente a multiplicação dos números, mas, ao efetuar a adição desses produtos, equivocaram-se e efetuaram incorretamente essa adição. Para resolver o problema, eles usaram alguns cálculos auxiliares para encontrar o número mais próximo daquele resultado que fosse divisível por 11. Pelo fato de terem se equivocado ao resolver a expressão numérica, eles não encontraram uma resposta que satisfizesse às exigências do problema. Inferimos que esses alunos, embora desenvolvendo incorretamente os procedimentos necessários para resolver o problema, parecem dominar as operações aritméticas e reconhecer a importância de seguir algumas regras ao resolver uma expressão numérica, pois o equívoco cometido, possivelmente, foi devido a uma distração, o que os levou a desenvolver as outras etapas do processo de resolução erroneamente.

E238 também não encontrou uma resposta considerada correta. Ele montou corretamente a expressão numérica que resolvia o problema, mas, ao efetuar as multiplicações presentes nessa expressão, equivocou-se, o que o levou a obter um resultado incorreto. Para determinar o número mais próximo do resultado obtido que fosse divisível por 11, esse aluno efetuou corretamente uma adição e apresentou uma resposta para o problema. De acordo com os procedimentos desenvolvidos, podemos considerar que ele sabe resolver as expressões numéricas obedecendo a algumas regras de resolução e parece dominar a operação de adição, porém desconhece a tabuada, o que o levou a se enganar e a encontrar uma resposta incorreta.

No *oitavo subgrupo* do **G21**, há apenas a produção escrita de E022, o qual utilizou uma estratégia correta para resolver o problema do *Item 7*. De acordo com essa estratégia, podemos considerar que sua compreensão do enunciado foi adequada. Utilizando os dados apresentados no enunciado e seguindo as etapas passo a passo, esse aluno montou e efetuou incorretamente uma expressão numérica. Analisando seus registros escritos, observamos que ele procedeu corretamente ao resolvê-la, na qual, *a priori*, efetuou corretamente as multiplicações na ordem em que apareciam e, em seguida, efetuou

incorretamente a adição desses produtos. Foi possível inferir que esse aluno equivocou-se ao efetuar a última parcela dessa expressão numérica, o que o levou a obter um resultado incorreto. Utilizando o resultado alcançado nessa expressão, ele efetuou incorretamente uma divisão para determinar o número divisível por 11 que mais se aproximava daquele resultado e apresentou uma resposta incorreta. De acordo com os procedimentos desenvolvidos, podemos considerar que ele, embora tenha encontrado uma resposta incorreta para o problema, parece dominar as operações aritméticas e reconhecer a importância de respeitar algumas regras ao resolver uma expressão numérica, porém não indicou o sinal das operações realizadas.

No *nono subgrupo* do **G21**, encontramos a produção escrita de E025, o qual elaborou uma estratégia adequada para resolver o problema proposto no *Item 7*, o que nos leva a pensar que ele compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado do problema. Para resolver o problema, o aluno seguiu passo a passo as etapas apresentadas no enunciado e selecionou os dados corretos para resolvê-lo. Ele efetuou incorretamente uma expressão numérica, no qual procedeu, de maneira equivocada, ao realizar as multiplicações. É possível que esse aluno tenha se enganado ao efetuar essas multiplicações pelo fato de ele desconhecer a tabuada. Utilizando os resultados obtidos nessas multiplicações, ele armou e efetuou incorretamente uma adição e, para determinar um número divisível por 11 que fosse mais próximo desse resultado, inferimos que ele efetuou mentalmente outra adição, já que apresenta o resultado obtido na adição acrescido de seis (6) unidades. Deduzimos que esse estudante parece não dominar as operações aritméticas, já que se equivocou ao efetuar as multiplicações e a adição apresentadas nessa expressão numérica. Também foi possível concluir que ele não validou a resposta encontrada, o que lhe daria a oportunidade de verificar que ela não satisfazia às exigências do enunciado.

O *décimo subgrupo* do **G21** é constituído apenas pela produção de E096. A estratégia elaborada por esse aluno envolvia uma expressão numérica, a qual não resolvia o problema proposto no *Item 7*. A partir de uma análise de seus registros escritos, observamos que ele seguiu passo a passo as etapas assim como elas foram apresentadas no enunciado, porém, devido a uma distração, ele montou uma expressão diferente daquela que resolvia o problema. Também observamos que, ao resolver essa expressão, esse aluno equivocou-se ao efetuar as adições e apresentou o resultado obtido como resposta para o problema. De acordo com os procedimentos desenvolvidos, podemos inferir que ele domina as operações aritméticas, mas não compreende o conceito de divisibilidade, já que, ao apresentar a resposta

considerada incorreta para o problema, apresentou uma justificativa afirmando que aquele número era divisível por 11.

A produção escrita de E195 forma o *décimo primeiro subgrupo* do **G21**. O estudante selecionou uma estratégia adequada para resolver o problema proposto nesse item, porém não apresentou uma resposta para o problema. De acordo com a estratégia utilizada, podemos considerar que ele compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado do problema, pois ele montou e efetuou corretamente uma expressão numérica, a qual resolvia o problema e obedeceu às regras necessárias para resolvê-la, na qual, primeiramente, efetuou as multiplicações na ordem em que apareciam e, em seguida, utilizando os resultados obtidos nessas multiplicações, efetuou as adições, também na ordem em que apareciam. Analisando os procedimentos desenvolvidos, observamos que, ao resolver essa expressão, o aluno efetuou cálculos auxiliares, nos quais armou e efetuou corretamente uma adição com reserva. Ele montou corretamente o algoritmo da adição considerando a sua organização espacial. O aluno não apresentou, em seus registros escritos, indícios de que tenha tentado encontrar um número mais próximo do resultado obtido que fosse divisível por 11. Ele apenas apresentou vestígios de que tentou efetuar uma divisão utilizando o resultado obtido na expressão, porém não concluiu sua resolução e fez alguns riscos sobre essa operação. A partir da análise de seus registros, inferimos que esse aluno compreende o conceito de divisibilidade e as regras necessárias para efetuar uma expressão numérica e domina as operações aritméticas. É possível que esse ele não tenha apresentado uma resposta para o problema por não haver tempo suficiente para concluir sua resolução ou por ter optado por não apresentá-la.

O *décimo segundo subgrupo* do **G21** é formado apenas pela produção de E197, o qual selecionou os dados adequados para elaborar uma estratégia de resolução. Ele armou e efetuou corretamente uma expressão numérica e seguiu passo a passo as etapas necessárias para resolver o problema proposto no *Item 7* conforme estavam apresentadas no enunciado. De acordo com a estratégia utilizada por esse aluno, podemos considerar que ele compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado do problema. Para resolver essa expressão, observamos que ele fez agrupamentos com os números para, supostamente, facilitar seus cálculos e procedeu dessa maneira até encontrar um resultado correto para a expressão.

Ademais, usando esse resultado como âncora, ele efetuou incorretamente uma divisão e apresentou uma resposta incorreta para o problema. Inferimos que ele tenha efetuado essa divisão para encontrar um número divisível por 11 e, desse modo, encontrar uma resposta para o problema. A partir da análise de seus registros escritos, foi possível

inferir que esse aluno compreende o conceito de divisibilidade, conhece as regras necessárias para efetuar uma expressão numérica e, embora tenha procedido incorretamente ao efetuar a divisão, domina as operações aritméticas.

Os alunos E015, E017, E021, E022, E025, E027, E028, E032, E033, E033, E036, E042, E062, E065, E066, E085, E086, E089, E093, E096, E105, E114, E115, E124, E130, E138, E143, E155, E159, E172, E189, E195, E197, E222, E232, E233, E238, E252 e E261 utilizaram, para resolver a expressão numérica, a expressão considerada como o "tipo escolar", no qual a armaram corretamente, obedecendo às regras ao resolvê-la. Além disso, eles efetuaram, na primeira linha, as multiplicações contidas na expressão e, na linha abaixo, as adições. Assim procederam até obter o resultado. Por fim, indicaram os sinais das operações empregadas e marcaram com um sinal de igualdade o resultado.

Para resolver a expressão numérica, E039, E078, E106, E154 e E173 não utilizaram a expressão considerada como o "tipo escolar", mas escreveram-na na posição vertical. Analisando seus registros, observamos que eles escreveram, em uma coluna, as operações de multiplicação (como se fossem escrever uma tabuada) e, em seguida do sinal de igualdade, apresentaram seu resultado. Usando os resultados obtidos em cada uma dessas multiplicações, eles efetuaram a adição. Mesmo não empregando a expressão numérica do "tipo escolar", esses alunos obedeceram às regras ao resolvê-la e reconheceram a importância de indicar os sinais das operações realizadas, inclusive o sinal de igualdade para indicar o resultado das multiplicações. De modo geral, a partir da análise dos registros escritos apresentados por eles, podemos considerar que, embora alguns tenham efetuado incorretamente algumas operações contidas na expressão, por falta de domínio da tabuada ou até mesmo devido a uma distração ao efetuá-las, eles mostraram saber resolver uma expressão numérica, pois desenvolveram corretamente os procedimentos necessários para solucioná-la.

## 5.1.22 Grupo de Estratégias G22

O vigésimo segundo grupo de estratégia (**G22**) é constituído pelas produções escritas de E092 e E140 e está dividido em dois (2) subgrupos de procedimentos.

**Quadro 47** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G22	Uma média aritmética e uma multiplicação.	Descarta corretamente a nota máxima e a mínima, fazendo um X sobre elas. Escreve o valor da nota mínima e o valor da nota máxima, respectivamente. Arma e efetua incorretamente a adição utilizando as notas restantes contidas no enunciado. Utilizando o resultado obtido na adição, arma e efetua corretamente uma divisão. Utilizando o resultado obtido na divisão, arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta.	E092	01
		Escreve uma expressão numérica utilizando todas as notas contidas no enunciado. Arma e efetua incorretamente uma divisão. Resolve incorretamente a divisão. Arma e efetua incorretamente uma multiplicação. Apresenta uma resposta incorreta.	E140	01

A estratégia utilizada por aluno E092 para resolver o problema, proposto no *Item 5*, envolve o conceito da média aritmética e o cálculo de uma multiplicação e, para calcular a média aritmética, ele utilizou operações aritméticas. Por meio de seus registros escritos, foi possível observar que, para desenvolver a estratégia adotada, ele não seguiu as etapas apresentadas no enunciado do item a fim de resolver o problema. Para solucioná-lo, ele, primeiramente, descartou corretamente a nota máxima e a mínima informadas e efetuou incorretamente a média aritmética das notas restantes. Para calcular a média aritmética, esse aluno montou corretamente o algoritmo de uma adição com reserva, envolvendo números decimais, escrevendo parcela abaixo de parcela e vírgula abaixo de vírgula, mas efetuou os cálculos incorretamente. Analisando seus registros escritos, é possível inferir que, ao efetuar essa adição, ele esqueceu-se de somar uma das parcelas, o que o levou a obter um resultado equivocado. Ainda para efetuar o cálculo da média aritmética, ele utilizou o resultado obtido nessa adição, montou e efetuou corretamente uma divisão envolvendo números decimais.

Cabe ressaltar esse aluno, ao realizar os cálculos, desenvolveu corretamente os procedimentos necessários para lidar com números decimais. Utilizando o resultado obtido no cálculo da média aritmética, ele montou e efetuou corretamente uma multiplicação e apresentou o resultado nela alcançado como resposta para o problema. De acordo com os procedimentos por ele desenvolvidos, podemos considerar que, embora tenha se enganado ao efetuar a adição, E092 mostrou dominar as técnicas operatórias da adição com reserva, saber operar corretamente com números decimais e parece compreender o conceito de média aritmética, já que procedeu corretamente ao efetuá-la.

De acordo com os procedimentos desenvolvidos por E140, podemos observar que esse aluno, assim como E092, não seguiu as etapas apresentadas no enunciado, pois ele não excluiu a maior e a menor nota e, desse modo, usou todas as notas para calcular a média aritmética, indicando a adição dessas notas na forma de uma expressão numérica. Como não há indícios de que ele tenha tentado resolver essa adição, mas apresentou apenas um resultado para tal, podemos considerar que ele realizou os cálculos mentalmente ou utilizou uma calculadora para isso. Empregando o resultado obtido nessa adição, o estudante efetuou incorretamente uma divisão. Utilizando o resultado alcançado nessa divisão, ele armou e efetuou incorretamente uma multiplicação envolvendo números decimais e apresentou o seu resultado como resposta para o problema. Analisando seus registros escritos, podemos observar que esse aluno não compreende o conceito de média aritmética, pelo fato de não ter dividido a adição que havia indicado pelo número total de notas dessa soma. Também podemos considerar que ele não mostrou domínio ao realizar as operações com números decimais, pois desconsiderou a existência das casas decimais desses números ao efetuar as operações, indicando-as apenas no resultado. Os estudantes E092 e E140 não utilizaram, para efetuar a média aritmética, o algoritmo "tipo escolar". Contudo, para efetuar a multiplicação, eles empregaram esse algoritmo, o qual foi armado corretamente, considerando a importância da sua organização espacial.

### 5.1.23 Grupo de Estratégias G23

O grupo de estratégias de **G23** é formado por quinze (15) produções escritas e, de acordo com o procedimento desenvolvido pelos alunos para resolver o problema, está dividido em nove (9) subgrupos de procedimentos.

**Quadro 48** - Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G23	Uma média aritmética e duas multiplicações	Descarta corretamente a nota máxima e a mínima, fazendo um X sobre elas. Arma e efetua corretamente uma adição utilizando as notas restantes contidas no enunciado. Utilizando, como âncora, o resultado obtido na adição, efetua corretamente uma divisão que resolve parte do problema. Utilizando o resultado obtido na divisão, arma e efetua corretamente uma multiplicação que resolve parte do problema. Utilizando o resultado obtido na multiplicação, arma e efetua corretamente uma multiplicação que resolve o problema. Apresenta uma resposta correta.	E001, E015, E016, E034, E036, E061, E142	07
		Descarta corretamente a nota máxima e a mínima, fazendo um risco sobre elas. Arma, mas não efetua uma multiplicação. Arma e efetua corretamente outra multiplicação que resolve parte do problema. Utilizando o resultado obtido na multiplicação como âncora, efetua corretamente outra multiplicação que resolve o problema. Apresenta a resposta correta.	E025	01
		Descarta corretamente a nota máxima e a mínima, fazendo um X sobre elas. Efetua corretamente a média aritmética das notas restantes e, utilizando o resultado obtido no cálculo da média aritmética como âncora, efetua incorretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Utilizando, como âncora, o resultado obtido na multiplicação, efetua incorretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E013	01
		Indica incorretamente qual é a nota máxima e corretamente qual é a mínima. Escreve “max” em cima da nota que, supostamente, para ele seria a maior e “mínimo” em cima da nota menor. Arma e efetua corretamente uma subtração que não resolve o problema. Ao lado dessa subtração, arma e efetua corretamente uma adição utilizando todas as notas contidas no enunciado. Utilizando o resultado dessa adição como âncora, efetua corretamente uma divisão que não resolve o problema. Ao lado dessa divisão, utilizando as notas restantes contidas no enunciado, arma e efetua corretamente uma adição que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido na adição como âncora, efetua corretamente uma multiplicação. Utilizando, como âncora, o resultado obtido na multiplicação, efetua incorretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E024	01

		Escreve o valor da nota mínima e da nota máxima. Arma e efetua incorretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua incorretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E062	01
		Descarta corretamente a nota máxima e a mínima, fazendo um X sobre elas. Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua incorretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E083	01
		Descarta corretamente a nota máxima e a mínima, fazendo um X sobre elas. Arma e efetua corretamente a adição utilizando as notas restantes contidas no enunciado. Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente outra multiplicação. Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E091	01
		Descarta corretamente a nota máxima e a mínima, riscando-as. Efetua incorretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido na multiplicação como âncora, efetua corretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua incorretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E160	01
		Descarta corretamente a nota máxima e a mínima, fazendo um X elas. Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido nessa multiplicação, arma e efetua corretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Apresenta uma resposta incorreta para o problema proposto.	E190	01

No *primeiro subgrupo* do **G23**, estão as produções escritas de E001, E015, E016, E034, E036, E061 e E142, os quais utilizaram, como estratégia de resolução, o cálculo de uma média aritmética e, pelo menos, duas multiplicações. De acordo com a estratégia empregada para resolver o problema proposto no *Item 5*, podemos considerar que esses alunos fizeram uma compreensão adequada do enunciado, uma vez que, para resolver o problema, seguiram passo a passo as etapas apresentadas no enunciado, pois eles excluíram a maior e a menor nota e efetuaram corretamente a média aritmética das notas restantes. Supostamente,

esses alunos estão habituados a ver o professor utilizar a média aritmética quando lhes atribui uma nota no final de um bimestre. Para calcular a média aritmética E001, E015, E016, E036, E061 e E142, *a priori*, montaram corretamente o algoritmo de uma adição com reserva, ou seja, escreveram parcela abaixo de parcela e efetuaram os cálculos corretamente, somando os algarismos da direita para a esquerda, iniciando na casa da unidade, em seguida da dezena e, por fim, na casa da centena. Em seguida, utilizando o resultado obtido nessa adição, eles armaram e efetuaram uma divisão. Desse modo, os alunos encontraram o resultado da média aritmética das notas obtidas. Para proceder à resolução do problema, eles utilizaram o resultado alcançado no cálculo da média aritmética e, seguindo passo a passo as etapas apresentadas no enunciado, efetuaram uma multiplicação. Os estudantes montaram e efetuaram corretamente essa multiplicação envolvendo números decimais. A fim de encontrar a solução do problema proposto nesse item, eles passaram para a última etapa do processo de resolução, o qual consistia em efetuar outra multiplicação. Para isso, eles armaram e efetuaram corretamente a multiplicação envolvendo números decimais e apresentaram o resultado nela atingido como resposta para o problema. Ao efetuar as multiplicações com números decimais, pudemos observar que esses alunos efetuaram os cálculos como se não houvesse vírgula nos fatores. Ademais, é possível que, *a posteriori*, eles tenham contado quantas casas decimais havia ao todo nos fatores e, então, colocaram a vírgula no resultado com essa mesma quantidade de casas decimais.

O aluno E034 do *primeiro subgrupo* do **G23**, assim como os demais estudantes desse subgrupo, também procedeu corretamente para resolver o problema. Entretanto, apresentou uma diferença no processo de resolução, a qual se caracteriza pelo fato de E034 ter utilizado uma expressão para exprimir a média aritmética. Analisando sua produção escrita, observamos que esse aluno não montou o algoritmo da adição para calcular a média aritmética, mas escreveu-a na forma de uma expressão numérica. Utilizando o resultado obtido nessa adição, ele efetuou corretamente uma divisão e, para proceder à resolução, escreveu as multiplicações na forma de uma expressão numérica e apresentou o seu resultado como resposta para o problema. A partir de uma análise de seus registros escritos, podemos inferir que E034 recorreu ao auxílio de uma calculadora para efetuar tais operações, o que fica evidente quando olhamos para a maneira que ele resolveu as operações. De modo geral, podemos inferir que esse aluno, independentemente de ter ou não montado o algoritmo das operações, parece compreender o conceito de média aritmética e mostra dominar as operações aritméticas envolvendo números decimais.

A produção escrita de E025 forma o *segundo subgrupo* de procedimentos do **G23**. De acordo com a estratégia utilizada por ele para resolver o problema proposto no Item 5, podemos considerar que sua compreensão do enunciado foi adequada, já que empregou uma estratégia que resolvia o problema. Para solucioná-lo, esse aluno seguiu passo a passo as etapas apresentadas no enunciado do problema, pois excluiu corretamente a maior e a menor nota, mas não apresentou, em seus registros escritos, a resolução da média aritmética das notas restantes, o que nos leva a pensar que ele tenha feito os cálculos com a ajuda de uma calculadora, pois ele apenas apresentou o resultado correto obtido no cálculo da média aritmética. Utilizando esse resultado, o aluno arma, mas não efetua uma multiplicação. A partir da análise de seus registros escritos, podemos considerar que ele não a efetuou pelo fato de ter escrito um número decimal, por exemplo, 5,0 no "multiplicando", o que, para ele, seria mais difícil de efetuar. Inferimos, portanto, que o aluno preferiu, por esse motivo, escrever esse número no multiplicador, pois seria mais fácil efetuar a multiplicação, até porque ele riscou o zero do número que estava no multiplicador.

$$\begin{array}{r} 5,0 \\ \times 1,9 \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 1,9 \\ \times 5\cancel{0} \\ \hline \end{array}$$

Desse modo, esse estudante efetuou corretamente a multiplicação, na qual não considerou o zero do número que estava no multiplicador, procedimento comumente realizado pelos alunos em sala de aula, os quais procedem dessa maneira para facilitar seus cálculos. Para resolver o problema, E025, utilizando o resultado alcançado nessa multiplicação como âncora, efetuou corretamente outra multiplicação e apresentou o seu resultado como resposta para o problema. A partir da análise de seus registros, podemos inferir que ele domina o conceito de média aritmética, pois, mesmo fazendo os cálculos com uma calculadora, ele efetuou corretamente a média aritmética das notas, pois, para lidar com uma calculadora, o aluno precisa saber quais cálculos deve realizar para resolver o problema,. Também inferimos que ele domina as operações com os números decimais, o que fica evidente quando olhamos para seus registros e notamos que ele procedeu corretamente ao operar com tais números. Ademais, ele efetuou as multiplicações como se não houvesse vírgula nos fatores e, supostamente, depois, contou quantas casas decimais havia ao todo nos fatores para colocar a vírgula no resultado com essa mesma quantidade de casas decimais.

Em relação à única produção escrita pertencente ao terceiro subgrupo do G23, podemos considerar que o aluno compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado do problema pelo fato de ter adotado uma estratégia adequada para resolver o problema proposto no Item 5. Dentre as notas informadas no enunciado, E013 descartou corretamente a nota máxima e a mínima e efetuou corretamente a média das notas restantes. A partir da leitura de seus registros, podemos considerar que ele não apresentou dúvidas em relação ao conceito da média aritmética, pois, ao efetuá-la, diferentemente dos demais estudantes desse grupo, ele efetuou a adição das notas restantes e dividiu-as pela quantidade de notas. Utilizando o resultado obtido no cálculo da média aritmética, esse aluno efetuou uma multiplicação, para a qual não montou o algoritmo, apenas escreveu-a na forma de uma expressão numérica. Contudo, procedeu incorretamente ao efetuar essa multiplicação. Para proceder à resolução do problema, ele passou para a última etapa do processo de resolução, na qual, utilizando, como âncora, o resultado nela alcançado, efetuou corretamente outra multiplicação. Ele também não montou o algoritmo e, assim como fez ao efetuar a operação anterior, apenas escreveu-a na forma de uma expressão numérica e apresentou o seu resultado como resposta para o problema. Analisando seus registros, podemos considerar que E013 domina o conceito de média aritmética, pelo fato de ter procedido corretamente ao efetuá-la. Ele, além de reconhecer a importância de se colocar a vírgula nos números para indicar as casas decimais, também mostrou ter domínio das operações aritméticas envolvendo números decimais. Esse aluno apresentou, em seus registros, um procedimento considerado incorreto do ponto de vista da linguagem matemática. Podemos notar isso quando ele efetua as multiplicações, nas quais, utilizando o resultado obtido, realiza outra operação, tal como é apresentado no exemplo a seguir:

$$9 \times 5,0 = 45,0 \times 2 = 90,0$$

O *quarto subgrupo* do G23 é formado apenas pela produção escrita de E024, o qual elaborou uma estratégia adequada para resolver o problema proposto no Item 5. Foi possível inferir que, de acordo com a sua estratégia para resolver o problema, esse estudante interpretou corretamente o enunciado. A partir da leitura que realizamos de seus registros escritos, pudemos observar que ele, ao resolver o problema, não seguiu todas as etapas apresentadas no enunciado, mas indicou duas notas dentre as informadas, sendo uma delas a menor nota. Esse fato o levou a desenvolver um procedimento incorreto, pois ele não

excluiu corretamente a maior nota. Utilizando as notas restantes, o aluno não calculou a média aritmética dessas notas, ele apenas armou e efetuou corretamente uma adição. Usando o resultado obtido nessa adição como âncora, ele efetuou uma multiplicação e, em seguida, empregando o seu resultado como âncora, efetuou incorretamente outra multiplicação. Para realizar tais operações, esse aluno utilizou os números decimais e indicou corretamente a posição da vírgula nos números após ter realizado cada uma das operações. Além disso, para calcular a média aritmética utilizando todas as notas, ele montou o algoritmo de uma adição, na qual não escreveu a vírgula para representar os números decimais, e, para efetuá-la, utilizou alguns cálculos auxiliares, tais como uma adição e uma subtração, o que nos leva a pensar que ele não usou uma calculadora para efetuar os cálculos. Empregando o resultado nela obtido como âncora, o aluno efetuou incorretamente uma divisão, na qual dividiu o resultado obtido na adição pela quantidade de notas que foram somadas e apresentou o seu resultado como resposta para o problema. De modo geral, mesmo não apresentando uma resposta correta, podemos inferir que esse aluno domina as técnicas operatórias da adição e da subtração com reserva e compreende o conceito de média aritmética, já que procedeu corretamente ao calculá-la. Inferimos também que ele sabe resolver as operações que envolvem números decimais, mesmo que, em uma das operações, ele tenha se equivocado e deixado de usar a vírgula para indicar os números decimais. Essa inferência pode ser reforçada quando olhamos para a sua resposta, na qual, embora sem efetuar as operações com números decimais, percebeu a necessidade de escrever o resultado colocando a vírgula para indicar um número decimal.

A produção escrita de E062 forma o *quinto subgrupo* de procedimentos. Para resolver o problema proposto no Item 5, esse aluno seguiu passo a passo as etapas apresentadas no enunciado, pois, dentre as notas, ele indicou corretamente a maior e a menor, porém não apresentou, em seus registros escritos, a resolução da média aritmética das notas restantes, o que nos leva a pensar que ele tenha feito os cálculos com o auxílio de uma calculadora, já que encontramos apenas o seu resultado. Empregando-o e seguindo as etapas apresentadas no enunciado, o estudante armou e efetuou incorretamente uma multiplicação e, utilizando o seu resultado, armou e efetuou incorretamente outra multiplicação, mas não apresentou o resultado alcançado como resposta para o problema. É possível que ele tenha selecionado uma nota dentre as atribuídas ao jogador para apresentar uma resposta para o problema. Analisando os seus registros, podemos considerar que ele parece compreender o conceito de média aritmética, já que procedeu corretamente ao realizar os cálculos necessários para encontrar o seu valor. Mesmo procedendo incorretamente ao efetuar as operações,

inferimos que o aluno domina as operações com os números decimais, o que fica evidente quando olhamos para seus registros e observamos que, ao resolver as multiplicações, ele efetuou os cálculos como se não houvesse vírgula nos fatores e, supostamente, depois, contou quantas casas decimais havia ao todo nos fatores para colocar a vírgula no resultado com essa mesma quantidade de casas decimais.

O aluno E083, pertencente ao *sexto subgrupo* do **G23**, antes de calcular a média aritmética para resolver o problema do Item 5, excluiu a maior e a menor nota dentre as indicadas. Para calcular a média aritmética, E083, supostamente, utilizou o auxílio de uma calculadora, porque não apresentou, em seus registros escritos, indícios de que tenha efetuado tais cálculos e, ainda assim, apresentou uma resposta correta para o cálculo da média aritmética. A fim de proceder à resolução do problema, esse aluno armou e efetuou incorretamente uma multiplicação utilizando o resultado atingido no cálculo da média aritmética. Empregando o resultado alcançado nessa operação, ele armou e efetuou corretamente outra multiplicação e apresentou o seu resultado como resposta para o problema. A partir da análise de seus registros, podemos considerar que ele, mesmo não apresentando uma resposta correta, parece dominar as operações envolvendo números decimais, pelo fato de que procedeu corretamente ao efetuá-las. Do mesmo modo, observamos que não há indícios de que ele tenha validado a resposta encontrada.

O *sétimo subgrupo* do **G23** é formado apenas pela produção escrita de E091, o qual, durante o processo de resolução, seguiu passo a passo os procedimentos necessários para encontrar a resposta. De acordo com a sua estratégia, é possível inferir que ele tenha compreendido o que estava sendo pedido no enunciado do problema proposto nesse item, pois, dentre as notas informadas no enunciado, E091 excluiu corretamente a maior e a menor e, utilizando as notas restantes, efetuou corretamente a média aritmética. Para isso, esse aluno montou corretamente o algoritmo de uma adição com reserva considerando a importância da sua organização espacial. Contudo, ao montá-lo, o aluno não colocou as vírgulas nos números para indicar as casas decimais e, para calcular a média aritmética, não apresentou indícios de que tenha efetuado a divisão usando o resultado alcançado na adição pela quantidade de notas do jogador. Apenas há vestígios de que, supostamente, ele tenha efetuado essa divisão mentalmente, o que fica evidente quando voltamos nosso olhar para os seus registros e observamos que ele efetuou a operação inversa da divisão como se tivesse tirando a "prova real". A fim de resolver o problema, ainda seguindo as etapas apresentadas no enunciado, esse aluno utilizou o resultado obtido no cálculo da média aritmética; efetuou uma multiplicação envolvendo números decimais; usando o resultado obtido nessa

multiplicação, armou e efetuou corretamente outra multiplicação; e apresentou o resultado nela obtido como resposta para o problema. A partir da análise de seus registros escritos, podemos considerar que E091 compreende o conceito de média aritmética, assim como parece dominar as operações aritméticas. Podemos considerar que ele, escrevendo o multiplicador abaixo do multiplicando, montou corretamente o algoritmo das duas multiplicações e desenvolveu corretamente os procedimentos necessários para resolvê-las. Também foi possível observar que ele efetuou os cálculos como se não houvesse vírgula nos fatores e, supostamente, depois, contou quantas casas decimais neles havia ao todo para colocar a vírgula no resultado com essa mesma quantidade de casas decimais. Todavia, inferimos que, devido a uma distração, ele esqueceu-se de escrever a vírgula em um dos fatores e, por esse motivo, obteve um resultado diferente do correto.

Pertencente ao *oitavo subgrupo* do **G23** o aluno E160 compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado do problema, já que selecionou uma estratégia que resolvia o problema proposto no *Item 5*. A partir da análise de seus registros, observamos que ele, para resolver o problema, desenvolveu os procedimentos corretos seguindo passo a passo as etapas apresentadas no enunciado, pois excluiu a maior e a menor nota, como indicado. Entretanto, esse aluno não apresentou, em seus registros escritos, indícios de que tenha tentado calcular a média aritmética, o que nos leva a inferir que ele realizou os cálculos com a ajuda de uma calculadora, já que apenas apresentou o resultado final dessa operação. Isso evidencia que ele compreende o conceito de média aritmética. Ademais, utilizando esse resultado como âncora, o aluno efetuou incorretamente uma multiplicação com números decimais e, empregando o seu resultado como âncora, efetuou corretamente outra multiplicação, para, em seguida, apresentar o seu resultado como resposta para o problema. Ao analisar seus registros escritos, chama-nos a atenção o fato de o aluno não ter montado o algoritmo dessas operações. Ele apenas escreveu-o na forma de uma expressão numérica e, para resolvê-la, utilizou cálculos auxiliares. Cabe salientar que esse aluno parece dominar o cálculo das operações com números decimais, pois ele procedeu corretamente ao efetuá-las. Além disso, é possível que ele tenha efetuado os cálculos como se não houvesse vírgula nos fatores e, supostamente, depois de ter resolvido a operação, tenha contado quantas casas decimais havia ao todo nos fatores, a fim de, assim, colocar a vírgula no resultado com essa mesma quantidade de casas.

No *nono subgrupo* do **G23**, encontramos a produção escrita de E190, o qual utilizou o conceito de média aritmética e o cálculo de duas multiplicações e, assim como E160, também não apresentou indícios de que tenha tentado calcular a média aritmética sem utilizar a calculadora, pois apenas apresentou o resultado nela obtido. De acordo com a

estratégia utilizada por esse aluno, podemos considerar que a sua compreensão foi adequada e que ele parece compreender o conceito de média aritmética. Observamos, em seus registros escritos, que, para resolver o problema, ele seguiu, da maneira como estavam apresentadas no enunciado, as etapas necessárias para resolvê-lo, pois ele excluiu corretamente a maior e a menor nota e, usando as notas restantes, efetuou o cálculo da média aritmética. Para proceder à resolução do problema, o aluno utilizou o resultado obtido no cálculo da média aritmética, montou e efetuou corretamente uma multiplicação envolvendo números decimais. Empregando o seu resultado, ele armou e efetuou corretamente outra multiplicação e apresentou o resultado obtido como resposta para o problema. Todavia, essa operação não solucionava o problema proposto nesse item. Analisando seus registros escritos, podemos considerar que, devido a uma distração, o aluno, mesmo desenvolvendo os procedimentos corretos, tenha efetuado essa última multiplicação utilizando um multiplicador diferente daquele apresentado no enunciado, fato que levou à resposta errada. Isso leva-nos a inferir que, ainda que tenha atingido uma resposta diferente da correta, esse aluno domina as operações com números decimais. Ao resolver essas multiplicações, ele efetuou os cálculos como se não houvesse vírgula nos fatores e, supostamente, depois de ter resolvido a operação, contou quantas casas decimais neles havia ao todo, colocando a vírgula no resultado com essa mesma quantidade de casas decimais.

De modo geral, notamos que, para realizar o cálculo da média aritmética, os estudantes do **G23** não utilizaram o algoritmo considerado como o "tipo escolar", pois, em um primeiro momento, eles armaram e efetuaram uma adição e, em seguida, utilizando o resultado nela obtido, armaram e efetuaram uma divisão pela quantidade de parcelas dessa adição. Contudo, para efetuar a multiplicação, eles utilizaram o algoritmo considerado como o "tipo escolar", no qual o armaram corretamente, considerando a importância da sua organização espacial. Apenas E013 utilizou, em todos os momentos, o algoritmo considerado como o "tipo escolar", no qual ele determinou o quociente entre a soma dos valores e a quantidade dos mesmos.

#### 5.1.24 Grupo de Estratégias G24

O vigésimo quarto grupo de estratégias (**G24**) é formado por seis (6) produções escritas e está dividido em quatro (4) subgrupos de procedimentos.

**Quadro 49** - Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G24	Agrupa as notas que representam o dinheiro fictício	Escreve uma coluna contendo cinco vezes determinado número e três vezes outro número. Ao lado da coluna, indica a soma desses números. Apresenta a resposta correta.	E172, E233, E252	03
		Arma e efetua corretamente duas adições que resolvem o problema. Não apresenta resposta.	E102	01
		Arma e efetua corretamente uma multiplicação que não resolve o problema. Utilizando o resultado obtido nessa multiplicação como âncora, efetua corretamente outra adição. Arma e efetua corretamente a multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente outra multiplicação que não resolve o problema. Arma e efetua corretamente outra multiplicação que também não resolve o problema. Entre os registros descritos acima, escreve alguns números. Apresenta uma resposta incorreta.	E197	01
		Escreve, em uma coluna, um determinado número cinco vezes e, ao lado dessa coluna, escreve outro número quatro vezes. Apresenta uma resposta incorreta.	E238	01

No *primeiro subgrupo*, temos a produção escrita de E172, E233 e E252, os quais elaboraram uma estratégia adequada para resolver o problema proposto no Item 6 e, por esse motivo, podemos considerar que a sua compreensão do enunciado do problema foi adequada. Esses alunos não apresentaram, em seus registros escritos, indícios de que tenham efetuado alguma operação para resolver o problema, pois eles apenas realizaram agrupamentos com as notas do dinheiro fictício para encontrar uma resposta para o problema. Analisando seus registros, podemos considerar que eles elaboraram a resposta para o problema a partir dos agrupamentos realizados.

O aluno E102, do *segundo subgrupo* do **G24**, assim como os outros do primeiro subgrupo, realizou agrupamentos com as notas do dinheiro fictício para tentar encontrar uma resposta para o problema proposto no *Item 6*. A partir da análise de seus registros escritos, foi possível inferir que, mesmo agrupando as notas do dinheiro fictício, ele mostrou não ter interpretado corretamente o enunciado, pois não conseguiu elaborar uma resposta que atendesse às exigências do problema, o que, supostamente, se deve ao fato de ele não ter concluído a resolução do problema.

A produção escrita de E197 forma o *terceiro subgrupo* de procedimentos do **grupo 24**. Para resolver o problema proposto no enunciado, esse aluno realizou dois agrupamentos utilizando as notas do dinheiro fictício e, para realizá-los, inferimos que efetuou alguns cálculos auxiliares. Além disso, ele armou e efetuou corretamente quatro multiplicações, as quais o ajudaram a montar os agrupamentos para encontrar uma solução para o problema. Analisando seus registros escritos, observamos que ele parece dominar os algoritmos das operações aritméticas e compreende a importância da sua organização espacial.

O **quarto subgrupo** de procedimentos do **G24** é formado apenas pela produção e E238, o qual realizou alguns agrupamentos com as notas do dinheiro fictício, de modo a encontrar uma resposta plausível. Inferimos que esse aluno, mesmo não apresentando uma resposta considerada correta, tenha compreendido o que estava sendo pedido no enunciado do problema.

#### 5.1.25 Grupo de Estratégias G25

O vigésimo quinto grupo de estratégias - **G25** - é formado por vinte e três produções escritas.

**Quadro 50** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G25	Segue corretamente todas as quatro etapas indicadas no enunciado e representa corretamente, nas células em branco, a fração pedida.	Efetua corretamente os quatro procedimentos propostos no enunciado. Apresenta uma resposta correta.	E013, E014, E015, E016, E023, E025, E035, E036, E037, E064, E077, E083, E103, E104, E120, E160, E168, E171, E191, E192, E231, E242, E250	23

Os estudantes desse grupo utilizaram uma estratégia correta para resolver o problema proposto no *Item 3*. A fim de resolvê-lo, eles seguiram as etapas apresentadas no enunciado e representaram corretamente, nas células em branco, a fração tal como estava posta no enunciado. De acordo com a estratégia utilizada, podemos considerar que esses alunos compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado do problema. É interessante

destacar que eles reconheceram a importância de se indicar um desses números como denominador da fração, o que mostra que realizaram uma reflexão acerca do modo como deveriam proceder para resolver o problema, pois as informações necessárias para solucioná-lo não estavam explícitas no enunciado.

### 5.1.26 Grupo de Estratégias G26

O vigésimo sexto grupo de estratégias (**G26**) é formado por dezenove (19) produções escritas e está dividido em dois (2) subgrupos de procedimentos.

**Quadro 51** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos	
<b>G26</b>	Segue corretamente algumas das etapas indicadas no enunciado e representa	Efetua corretamente três dos quatro procedimentos propostos no enunciado. Apresenta uma resposta incorreta.	E001, E092, E140, E152, E241, E170, E179, E047, E091	E003, E102, E142, E162, E034,	14
	incorretamente, nas células em branco, a fração pedida.	Efetua corretamente um dos quatro procedimentos propostos no enunciado. Apresenta uma resposta incorreta.	E113, E209, E063, E062	E198,	05

Os alunos cujas produções escritas formam o primeiro subgrupo do **G26**, para resolver o problema proposto no *Item 3*, seguiram parte das etapas apresentadas no enunciado e apresentaram uma resposta considerada incorreta. Analisando os seus registros escritos, inferimos que eles, supostamente, não compreenderam ou, até mesmo, esqueceram-se de que o último número tinha de ser representado na forma de um denominador para formar a fração, ou seja, eles deveriam inverter a posição do número para indicar um denominador, o que não ocorreu.

O *segundo subgrupo* do **G26** é constituído pelas produções dos estudantes que selecionaram uma estratégia que não resolvia o problema proposto no *Item 3*. De acordo com a estratégia apresentada, podemos considerar que eles não compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado do problema. Seguindo as etapas nele apresentadas, esses alunos apenas representaram corretamente um símbolo numérico no local indicado. A partir da

análise de seus registros escritos, podemos considerar que eles não seguiram as orientações apresentadas no enunciado, pois não utilizaram os dados necessários para resolver o problema.

#### 5.1.27 Grupo de Estratégias G27

O grupo de estratégias **G27** é constituído por quatro (4) produções escritas.

**Quadro 52** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G27	Segue incorretamente as etapas indicadas no enunciado e representa incorretamente, nas células em branco, a fração pedida.	Efetua incorretamente os quatro procedimentos propostos no enunciado. Apresenta uma resposta incorreta.	E125, E128, E141, E199	04

Para resolver o problema proposto no *Item 3*, os alunos do **grupo 27** não seguiram as etapas apresentadas no enunciado e não utilizaram uma estratégia adequada para resolvê-lo. De acordo com a estratégia empregada, inferimos que E125, E128, E141 e E199 não compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado do problema. A partir da análise de seus registros escritos, observamos que eles não utilizaram as informações apresentadas no enunciado para elaborar uma estratégia que resolvia o problema. Isso fica evidente quando olhamos para seus registros escritos e observamos que eles não representaram nenhum dos números como um denominador para indicar que se tratava de uma fração.

#### 5.1.28 Grupo de Estratégias G28

As produções escritas de E011, E012, E024, E055, E075, E076, E084, E110, E119, E121, E127, E161, E190, E193, E200, E207 e E208 formam o vigésimo oitavo grupo de estratégias - **G28**. Esses estudante, para resolver o problema, não seguiram as etapas apresentadas no enunciado e utilizaram uma estratégia que não o resolvia.

**Quadro 53** - Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G28	Marca várias posições nas células, mas não representa número algum.	Marca várias posições nas células que não representam número algum.	E011, E012, E024, E055, E075, E076, E084, E110, E119, E121, E127, E161, E190, E193, E200, E207, E208	17

Os alunos E011, E024, E084, E121, E161, E190 e E193 marcaram quaisquer números, sem seguir as informações apresentadas no enunciado, o que gerou uma resposta considerada incorreta. De acordo com a estratégia utilizada e os procedimentos desenvolvidos, foi possível inferir que eles não compreenderam o que estava sendo pedido no enunciado do problema, já que não apresentaram, em seus registros escritos, indícios de que tenham representado algum dos números como um denominador. Isso mostra que os alunos não estão acostumados a realizar uma leitura cuidadosa do enunciado, buscando interpretar e refletir acerca de como devem proceder para resolver o problema.

#### 5.1.29 Grupo de Estratégias G29

O último grupo de estratégias (**G29**) é constituído apenas pela produção escrita de, o qual desenvolveu uma estratégia que resolvia o problema proposto no *Item 7* e apresentou uma resposta considerada correta.

**Quadro 54** – Grupo construído de acordo com a estratégia elaborada e os procedimentos desenvolvidos.

Grupo	Estratégia	Procedimento	Alunos	Total de alunos
G29	Monta três colunas.	Na primeira coluna, escreve uma relação que estabeleceu entre os dados contidos na tabela. Na segunda, assim como na primeira, escreve outra relação que estabeleceu entre os dados contidos na tabela. Na terceira coluna, também escreve uma relação que estabeleceu entre os dados contidos na tabela. Apresenta a resposta correta.	E097	01

Analisando seus registros escritos, podemos considerar que esse aluno compreendeu o que estava sendo pedido no enunciado, pelo fato de ter apenas estabelecido uma correspondência entre alguns dados localizados na tabela. Como não há indícios de que ele tenha efetuado nenhuma operação, é possível que tenha utilizado uma calculadora para efetuar os cálculos.

Na seção a seguir, apresentamos a discussão que realizamos das produções escritas dos estudantes à luz do referencial teórico adotado.

## 6 DISCUSSÃO

Com base nos objetivos que nortearam o desenvolvimento deste trabalho, apresentamos uma discussão das produções escritas analisadas à luz do referencial teórico adotado.

### 6.1 AS COMPREENSÕES QUE OS ALUNOS FIZERAM DO ENUNCIADO

Como foi apresentada no decorrer deste trabalho, a compreensão do enunciado, segundo alguns autores (BRITO, 1999; POLYA, 1978), caracteriza a primeira fase do processo de resolução de um problema e funciona como um veículo para elaborar uma estratégia apropriada para a sua resolução. Os alunos, na maior parte das vezes, encontram dificuldades para solucionar um problema, não porque não sabem qual operação aritmética devem efetuar, mas porque mostram ter dificuldade em compreender o enunciado, de modo que eles não contam com o seu auxílio na elaboração de uma estratégia adequada. Segundo o documento do PISA (GAVE, 2004, p.28), a compreensão do enunciado está relacionada à maneira como os estudantes interpretam-no, como selecionam as informações nele contidas e como as relacionam com seus conhecimentos prévios.

A respeito das informações contidas no enunciado dos problemas propostos em cada item, observamos que a maioria dos alunos que deram uma resposta estabeleceu relações entre elas, principalmente quando precisava utilizar dados de tabelas e gráficos, contudo nem todos procederam corretamente ao solucionar o problema.

Grande parte dos alunos que apresentou uma resolução para o problema proposto no *Item 1* parece ter interpretado corretamente o enunciado, já que selecionou todos os dados necessários para resolvê-lo e utilizou uma estratégia que o solucionava. Em apenas duas (2) produções, os estudantes não selecionaram os dados corretos para elaborar uma estratégia que resolvia o problema e, desse modo, mostraram não ter compreendido o que estava sendo pedido no enunciado.

Dentre todos os itens, o *Item 4* apresentou a menor quantidade de produção escrita. Isso pode ter acontecido pelo fato de os alunos não terem compreendido o que estava sendo pedido no enunciado ou por não terem familiaridade em lidar com informações dadas em tabelas e gráficos. Dentre os vinte e seis (26) alunos que apresentaram indícios de resolução em seus registros escritos, observamos que a minoria deles realizou uma

compreensão correta do enunciado, visto que só alguns elaboraram uma estratégia apropriada para resolver o problema e desenvolveram corretamente os procedimentos.

Dentre os setenta e cinco (75) alunos que apresentaram uma resolução para o problema proposto no *Item 5*, apenas quinze (15) compreenderam, de maneira apropriada, o enunciado, pois eles elaboraram uma estratégia correta para resolver o problema. Os demais alunos mostraram não ter compreendido o que estava sendo pedido no enunciado, pois não conseguiram elaborar uma estratégia que os ajudasse a resolver o problema. Isso pode ter ocorrido pelo fato de a estratégia que resolvia o problema, proposto nesse item, envolver um conjunto de procedimentos que deveria ser desenvolvido passo a passo a fim de encontrar uma resposta correta para o problema. Dentre esses setenta e cinco (75) estudantes, cinco (5) utilizaram as palavras-chave do enunciado para apresentar uma resposta para o problema. Isso mostra que os alunos não estão acostumados a realizar uma leitura do enunciado para tentar compreendê-lo, mas realizam apenas uma leitura superficial.

O *Item 6* foi o que apresentou a maior quantidade de resoluções corretas para o problema proposto. Dos cento e sete (107) alunos que tentaram resolvê-lo, quarenta (40) mostraram ter compreendido o que estava sendo pedido no enunciado, já que retiraram os dados corretos para elaborar uma estratégia que resolvia o problema.

Em relação ao *Item 7*, dentre os sessenta e sete (67) alunos que apresentaram uma resolução para o problema proposto nesse item, apenas vinte e um (21) parecem ter compreendido o que estava sendo pedido no enunciado, pois somente eles retiraram os dados corretos para elaborar uma estratégia que resolvia o problema. De modo geral, a não compreensão do enunciado pelos estudantes é uma questão preocupante e leva-nos a pensar a respeito de como os professores têm trabalhado a leitura compreensiva em sala de aula, uma vez que, para resolver os problemas adequadamente, é necessário compreender o enunciado e, a partir dessa compreensão, elaborar uma estratégia e desenvolver os procedimentos necessários. As dificuldades observadas são, em sua grande maioria, originadas principalmente da (in)compreensão do enunciado. Será que a falta de entendimento desse texto deve-se à ausência de familiaridade dos alunos com a leitura da "língua materna" e, por esse motivo, alguns não são capazes de interpretar matematicamente o que está sendo pedido?

A partir da análise dos registros escritos dos estudantes que resolveram os problemas propostos em cada um dos sete itens, notamos que a grande dificuldade, apresentada pela maioria deles, não está relacionada ao cálculo das operações aritméticas, porém à interpretação que eles fazem do enunciado do problema, o que, muitas vezes, leva à

elaboração de uma estratégia incorreta. Isso mostra, novamente, que os alunos não estão acostumados a trabalhar, em sala de aula, com problemas que exigem interpretação.

## 6.2 OS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS PARA RESOLVER OS PROBLEMAS

Neste trabalho, tencionamos identificar os conteúdos matemáticos utilizados para resolver o problema proposto em cada um dos itens estudados, verificar se eram aqueles requeridos para resolver o problema, examinar se os alunos efetuaram correta ou incorretamente determinada operação aritmética, bem como determinar a quantidade de estudantes que empregou ou não o algoritmo considerado como o "tipo escolar".

Os conteúdos requeridos para resolver cada um dos problemas, bem como os conteúdos usados pelos alunos, são apresentados no quadro que segue:

**Quadro 55** – Conteúdos requeridos e conteúdos utilizados pelos alunos para resolução dos problemas propostos em cada item.

Item	Conteúdos requeridos para resolver o problema	Conteúdos utilizados pelos alunos para resolver o problema
Item 1	Subtração de números naturais	Subtração de números naturais (19)
		Adição de números naturais (3)
		Multiplicação de números naturais (1)
Item 2	Adição de números naturais	Adição de números naturais (22)
	Multiplicação de números naturais	Subtração de números naturais (3)
	Divisão de números naturais	Multiplicação de números naturais (1)
	Regra de três simples	Divisão de números naturais (4)
		Regra de três simples (5)
Item 3	Números inteiros	Números fracionários (63)
	Frações	
Item 4	Divisão de números naturais	Adição de números naturais (1)
		Subtração de números naturais (2)
	Regra de três simples	Divisão de números naturais (21)
		Razão (2)
Item 5	Média Aritmética	Média Aritmética (17)
	Multiplicação de números naturais e	Multiplicação de números naturais e decimais (47)

	decimais	Adição de números naturais e decimais (8)
		Divisão de números decimais (1)
<b>Item 6</b>	Adição de números naturais	Adição de números naturais (15)
	Multiplicação de números naturais	Subtração de números naturais (4)
	Decomposição de um número natural em fatores primos	Multiplicação de números naturais (8)
	Múltiplos de um número natural	Divisão de números naturais (2)
	Divisores de um número natural	Expressão numérica (1)
<b>Item 7</b>	Adição de números naturais	Multiplicação de números naturais (3)
	Subtração de números naturais	
	Multiplicação de números naturais	
	Divisão de números naturais	Divisibilidade (20)
	Divisibilidade	Expressão numérica (43)
	Expressão numérica	

Apresentamos, na próxima tabela, de modo sistematizado, a quantidade de operações efetuadas correta e incorretamente, a quantidade de operações efetuadas utilizando ou não os algoritmos considerados como o padrão escolar e a quantidade de alunos que mostrou ou não saber efetuar essas operações.

**Tabela 10** – Leitura dos dados obtidos a partir das leituras realizadas.

Conteúdo matemático utilizado	Quantidade de operações efetuadas	Quantidade de operações efetuadas:				Quantidade de operações utilizando:				Quantidade de alunos que mostram:			
		corretamente		incorretamente		algoritmo “padrão escolar”		algoritmo “não padrão escolar”		saber efetuar as operações.		não saber efetuar as operações.	
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Adição	49	41	83,67	8	16,33	39	79,59	10	20,41	48	95,92	1	4,08
Subtração	28	23	82,14	5	17,86	26	92,86	2	7,14	27	96,43	1	3,54
Multiplicação	60	42	70,0	18	30,0	17	28,33	43	71,67	58	96,67	2	3,33
Divisão	28	16	57,14	12	42,86	27	96,43	1	13,57	24	85,71	4	14,29
Expressão numérica	44	31	70,45	13	29,54	39	88,63	5	11,37	44	100	0	0
Média aritmética	17	12	70,59	5	29,41	17	100	0	0	17	100	0	0
Regra de três simples	5	4	80,0	1	20,0	5	100	0	0	5	100	0	0
Razão	2	2	100	0	0	2	100	0	0	2	100	0	0

Os conteúdos empregados pelos estudantes para resolver os problemas propostos nos itens analisados, em sua maior parte, eram aqueles requeridos para resolver cada item. No *Item 1*, o algoritmo da subtração com reserva foi o conteúdo matemático mais utilizado, seguido da adição e da multiplicação de números naturais. Essas operações aritméticas mostraram-se familiares para a maioria dos alunos, uma vez que eles foram capazes resolver cada uma delas, independente do fato de tal operação resolver ou não o problema proposto.

A adição de números naturais, por sua vez, foi o conteúdo mais utilizado na resolução do *Item 2*. Em geral, os alunos que efetuaram uma adição para resolvê-lo não apresentaram, em sua maioria, dificuldades em efetuá-la. Um dos obstáculos apresentados por alguns alunos ao resolver essa operação foi utilizar as técnicas operatórias da adição com reserva. Nesse item, os estudantes também mostraram saber resolver a regra de três simples, o algoritmo da divisão e da subtração, porém alguns se equivocaram durante o processo de resolução, o que os levou a desenvolver procedimentos incorretos. O conteúdo matemático números fracionários foi o único usado para resolver o problema proposto no *Item 3*, sendo que a maioria dos alunos não apresentou dificuldades ao empregá-lo.

Os alunos utilizaram diversos conteúdos matemáticos para resolver o problema proposto *Item 4*, dentre os quais se destaca a utilização do algoritmo da divisão. Efetuar essa operação parece ser um procedimento familiar para eles, uma vez que a maior parte deles procedeu corretamente ao efetuá-la. Será que na sala de aula, ao resolvê-la, os alunos o fazem de forma mecânica, por meio da memorização de regras e da utilização de técnicas específicas ou realmente compreendem os procedimentos desenvolvidos? A memorização ou a aplicação de regras conectadas às operações, na maioria das vezes, não garante que os estudantes tenham compreendido tal procedimento e, portanto, torna-se necessário que o professor trabalhe com seus alunos, em na sala de aula, situações que lhes deem a possibilidade de compreender todo o procedimento envolvido na aplicação dessa espécie de cálculo.

Os alunos, ao resolverem o problema proposto no *Item 5*, usaram vários conteúdos matemáticos, tais como a adição, a multiplicação, a divisão de números naturais e decimais e o conceito de média aritmética. Dentre esses conteúdos, a multiplicação de números naturais e decimais foi a mais utilizada pelos alunos, pelo fato de a resolução do problema requerer o emprego desse conteúdo. Grande parte dos estudantes mostrou ter familiaridade com essa operação, pois desenvolveram os procedimentos corretos ao efetuá-la. O segundo conteúdo mais utilizado por eles na resolução do problema proposto no *Item 5* foi

o conceito de média aritmética. De modo geral, a maioria deles não apresentou dificuldades para calculá-la. Contudo, o obstáculo que se fez presente nas resoluções de alguns alunos foi em relação à operação da adição com números decimais, pois eles mostram não dominar essa operação quando se trata de operar com números decimais, supostamente pelo fato de eles não dominarem o valor posicional dos algarismos. Ainda em relação ao Item 5, foi possível observar que apenas um aluno, ao resolver o problema, utilizou a divisão de números decimais como conteúdo matemático.

Em relação ao *Item 6*, o conteúdo matemático mais utilizado foi a adição, seguido da multiplicação de números naturais. A maioria dos estudantes que utilizaram essas operações não mostrou dificuldades ao efetuá-las, pelo fato de elas lhes serem familiares, uma vez que, para efetuá-las, eles desenvolveram os procedimentos corretos, independente de tal operação resolver ou não o problema proposto nesse item. Alguns alunos também usaram as operações da subtração e da divisão de números naturais como conteúdo matemático. Esses alunos não apresentaram dificuldades em efetuar essas operações, já que desenvolveram os procedimentos corretos para encontrar uma resposta para o problema.

Para resolver o problema proposto no *Item 7*, os alunos utilizaram diversos conteúdos matemáticos, dentre os quais se destaca a utilização de uma expressão numérica, seguida do conceito de divisibilidade. Alguns deles também utilizaram o algoritmo da multiplicação como conteúdo matemático. Uma das dificuldades apresentadas por alguns alunos para resolver o problema, proposto nesse item, foi lidar com o conceito de divisibilidade, pelo fato de eles não terem familiaridade com esse conteúdo. É possível que, no momento de o professor apresentá-lo aos seus alunos, ele apenas mostre as técnicas que devem ser desenvolvidas durante sua resolução, acompanhadas de numerosos exercícios semelhantes, com o objetivo de os alunos aperfeiçoarem essas técnicas. Por conseguinte, como afirma Kamii (1992), os alunos são ensinados e treinados a escrever respostas corretas. Desse modo, no momento em que encontrarem problemas que requeiram a utilização desse conteúdo matemático para a sua resolução, eles apresentarão dificuldades e, na maioria das vezes, não alcançarão um resultado satisfatório.

Em alguns casos, foi possível perceber que os estudantes, ao efetuarem a operação da subtração e da adição com reserva, realizaram-nas utilizando as técnicas operatórias dessas operações de forma mecânica, sem compreensão. Acreditamos que essa falta de compreensão das técnicas operatórias deve-se ao fato de eles desconhecerem os princípios do sistema de numeração decimal, uma vez que, para ter domínio das operações aritméticas, é necessário, primeiramente, conhecer e dominar tais princípios. Além disso, é

desejável que os alunos, além de compreenderem as técnicas operatórias de cada operação aritmética, compreendam as ideias envolvidas em cada uma, visto que a compreensão das diferentes:

[...] idéias presentes nas operações fundamentais é essencial para a construção do conhecimento matemático e também para o estabelecimento de relações entre estas operações e situações do cotidiano. Desse modo, para que os alunos utilizem as operações entendendo-as, e com desenvoltura, é importante que eles tenham contato com diferentes situações-problema nas quais as idéias presentes nas operações envolvidas sejam exploradas (NAGY-SILVA, 2005, p.98).

Quanto às estratégias elaboradas por eles, percebemos que, na maioria das produções, elas referiam-se aos algoritmos considerados como o "tipo escolar", os quais são, tradicionalmente, ensinados na escola. Verificamos, em alguns casos, que os alunos não utilizaram esses algoritmos para resolver o problema apresentado em determinado item, mas desenvolveram suas próprias ferramentas matemáticas, a fim de estabelecer relações entre os dados do enunciado e encontrar uma solução ao item. Constatamos também que, embora alguns alunos tenham utilizado uma estratégia correta para resolver o problema proposto, não conseguiram desenvolver um procedimento que permitisse encontrar uma resposta considerada correta. Por esse e por tantos outros apontamentos salientados, cabe ressaltar a importância de o professor trabalhar com problemas que ofereçam a oportunidade de os estudantes construir suas próprias ferramentas para resolvê-los, pois isso contribui para o desenvolvimento de sua aprendizagem.

### 6.3 O CONTEXTO E A MATEMATIZAÇÃO

O contexto, envolvido no enunciado dos problemas propostos, foi um aspecto relevante para investigarmos o modo como os alunos os resolveram, uma vez que, de acordo com Shannon (2007), os contextos podem funcionar como uma dimensão importante para avaliar possíveis entraves para a compreensão matemática dos alunos.

Na perspectiva da Educação Matemática Realística, a utilização de problemas que apresentam um contexto, o qual, por sua vez, traga consigo elementos relacionados ao mundo real, contribui com o desenvolvimento do processo de aprendizagem dos estudantes. O contexto, como parte relevante e essencial do enunciado de um problema, de acordo com De Lange (1995), contribui para o desempenho deles, pois, ao motivá-los a

resolver o problema, ajuda-os na sua interpretação. O interesse, gerado por essa motivação, auxilia e potencializa a interpretação do problema, levando-os, por exemplo, a selecionar uma estratégia de resolução adequada.

Alguns alunos demonstraram ter interpretado corretamente o enunciado ao selecionar e relacionar as informações contidas em gráficos e tabelas, ao utilizar diversos conteúdos matemáticos e ao elaborar estratégias de resolução coerentes com a interpretação realizada. Esse fato permitiu-nos inferir que o contexto, presente no enunciado dos problemas propostos nos sete (7) itens analisados, supostamente ofereceu oportunidades para os estudantes realizarem um processo de matematização. Ele, portanto, pode ser classificado como *Contexto de Segunda Ordem* (DE LANGE, 1987). O *Contexto de Segunda Ordem* requer um processo de matematização horizontal, no qual, segundo Treffers (1987), os alunos realizam uma tradução de um problema situado na realidade para uma linguagem matemática e utilizam os conhecimentos matemáticos por eles construídos no processo de aprendizagem para identificarem regularidades, relações e estruturas, a fim de, assim, resolverem o problema.

A partir da análise dos registros escritos, percebemos que o contexto envolvido no enunciado do problema, supostamente, tornou-o mais interessante para que o aluno tentasse resolvê-lo. Isso fica evidente quando voltamos nosso olhar para os problemas que apresentavam um contexto familiar para os estudantes, tal como é o caso dos problemas propostos no *Item 1, 2 e 6*. O enunciado dos problemas propostos nesses itens apresentava um contexto considerado conhecido pelos alunos, pois as informações nele contidas estão relacionadas com atividades que os alunos realizam no seu dia-a-dia.

O enunciado dos problemas propostos no *Item 3, 5 e 7* apresentava um contexto considerado um pouco familiar para os alunos, pois grande parte deles não vivenciam determinada situação em suas atividades diárias, porém, devido ao fato de o enunciado apresentar um contexto realístico, ou seja, um contexto que pode ser imaginado ou realizado na mente daquele que o resolve, grande parte dos alunos que apresentaram uma resolução para o problema conseguiu elaborar uma estratégia que o resolvia.

O enunciado do problema proposto no *Item 4* apresentava um contexto científico, isto é, mostrava uma situação encontrada apenas na rotina da sala de aula (OCDE, 2004). Embora esse contexto lhes seja pouco familiar, muitos alunos que apresentaram uma resposta para o problema conseguiram, pelo menos, imaginar-se na situação sugerida, tentando elaborar uma estratégia para solucioná-lo. Entretanto, a resolução de problemas que envolvam um contexto relacionado ao mundo real e que permitam que as situações sejam

imagináveis ou realizáveis na mente dos alunos é uma das principais características da RME, pois, de acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen (1998), os alunos aprendem a matemática por meio de atividades relacionadas a situações da realidade, em um processo de matematização.

O fato de grande parte dos alunos que resolveram esses problemas não ter conseguido elaborar uma estratégia que os ajudasse a solucioná-los parece que não está diretamente relacionado ao contexto apresentado no enunciado, pois, conforme afirma Shannon (2007, p.178), um contexto realístico apresenta-se como elemento facilitador do desempenho dos alunos, ajudando-os a representar, de modo adequado, o problema e a formular e selecionar uma estratégia de resolução que o resolva.

Foi possível identificar, nos registros escritos dos alunos, indícios de um processo de matematização horizontal, que apresenta como principal característica, segundo Freudenthal (1991), a tradução de um problema situado na realidade para um problema matemático, utilizando, nesse caso, os algoritmos apropriados. Em geral, esses estudantes mostraram saber lidar com questões não-rotineiras de matemática, porque procederam corretamente para desenvolver as estratégias elaboradas a partir da compreensão que cada um realizou do enunciado do problema e porque utilizaram corretamente as técnicas operatórias ao efetuar as operações aritméticas.

#### 6.4 O PENSAMENTO ARITMÉTICO

A partir da análise dos registros escritos dos alunos, foi possível identificar indícios do pensamento aritmético, caracterizado como a capacidade do aluno de compreender os números e suas relações, dominar as regras e as técnicas operatórias das operações aritméticas e compreender o significado das operações aritméticas e o modo como elas se relacionam entre si. A necessidade de se identificar a presença desse tipo de pensamento nos registros escritos deve-se ao fato de muitos deles terem: utilizado números para representar quantidades; mostrado domínio das técnicas operatórias das operações aritméticas; empregado os algoritmos usuais e as técnicas de cálculo das operações e das expressões, o que, consoante Sá (2003), constitui o terceiro componente do pensamento aritmético.

De forma geral, as análises realizadas permitiram-nos observar que uma parte dos alunos utilizou, como âncora, o resultado obtido em determinada operação aritmética, com a finalidade de efetuar outra operação. O uso de âncoras é um indicador de

que os estudantes desenvolveram, além do sentido de número, o encadeamento necessário para concluírem a solução do problema. De acordo com Spinillo (2006, p.93), isso revela "formas flexíveis de raciocínio" durante o processo de resolução de um problema.

Não foi possível notar, em nenhuma produção escrita, indícios de que os alunos tenham realizado um processo de validação da resposta obtida, o que lhes daria a possibilidade de perceber se a resposta apresentada resolvia o problema, permitindo-lhes, assim, tentar realizar outra estratégia que talvez os levasse a uma resposta correta. Isso acontece porque os alunos não estão acostumados a realizar reflexões acerca das estratégias que empregam, dos procedimentos desenvolvidos e da resposta obtida. O que os estudantes costumam fazer é, após terem efetuado uma operação, tirar a "prova real" para verificar se a resposta encontrada está correta ou não. Isso ficou claro na produção de um aluno, o qual, após ter efetuado uma divisão, tirou a "prova real" efetuando a operação de uma multiplicação, considerada, por eles, a operação inversa da divisão. Tirar a "prova real" é um indício de que o aluno compreende o modo como as operações relacionam-se e essa é uma das características do pensamento aritmético, o qual mostra que os estudantes estão desenvolvendo seu raciocínio matemático ao resolver problemas.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Guiadas pelo anseio de buscar respostas para as questões que nortearam o desenvolvimento deste trabalho, analisamos os registros escritos das provas de uma amostra de alunos paranaenses em questões discursivas de matemática, consideradas *não-rotineiras* e classificadas como as que envolvem aspectos da área de conteúdo *Quantidade*. Esses registros escritos foram retirados das provas da aferição do PISA/2006. Nosso objetivo, em analisar e discutir os registros escritos dos estudantes, foi compreender como eles lidam com essas questões quando se encontram em situação de avaliação e identificar os conteúdos matemáticos, as estratégias e os procedimentos utilizados, a forma como os alunos lidam com as técnicas operatórias das operações aritméticas e a compreensão que eles fazem dos enunciados das questões.

Por meio das análises realizadas, foi possível notar que os entraves dos alunos, ao resolverem uma questão não-rotineira de matemática, originam-se, principalmente, da interpretação que eles fazem do enunciado. Por isso, buscamos investigar se eles apenas apresentaram dificuldades em compreender o enunciado ou se também as apresentaram em relação ao conteúdo matemático utilizado para resolver os problemas. Desse modo, além de analisar, nos registros escritos dos alunos, as estratégias, os procedimentos e as técnicas operatórias utilizadas e a sua compreensão do enunciado de cada questão, também examinamos se eles mostraram dominar os conteúdos matemáticos usados para resolver os problemas. Verificamos, também que os estudantes, exceto em alguns casos, mostraram saber efetuar as operações aritméticas, tais como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, manifestaram compreender o conceito de média aritmética, souberam calcular uma razão e uma regra de três e procederam corretamente ao calcular as expressões numéricas. Encontramos indícios do processo de matematização realizado pelos alunos, porém apenas foi possível identificar indícios apenas de uma matematização horizontal, na qual os alunos realizaram uma tradução do problema situado na vida real para uma linguagem matemática utilizando seus conhecimentos previamente aprendidos.

Por fim, a partir dos resultados alcançados por meio das análises realizadas, pudemos constatar que os estudantes, mesmo aqueles que interpretaram equivocadamente o enunciado, pois elaboraram uma estratégia que não resolvia o problema, desenvolveram corretamente a maioria dos procedimentos aritméticos, o que indica que estão "dominando bem" as operações aritméticas, inclusive as técnicas operatórias de cada operação.

Esperamos que o presente trabalho sirva para subsidiar a regulação do processo de ensino e aprendizagem e possa contribuir com todos os envolvidos nesse processo. Com ele, conhecemos um pouco mais a respeito da avaliação adotada como prática de investigação, realizando uma análise dos registros escritos de alunos, buscando investigar a forma como eles lidam com as questões de matemática, a sua compreensão, os conteúdos, as estratégias e os procedimentos utilizados e, por fim, as dificuldades que se fizeram presentes.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. L. C. **Questões não-rotineiras**: a produção escrita de alunos de uma graduação em Matemática. 2009. 144f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ARITMÉTICA. In: ENCICLOPÉDIA Brasileira Mérito. Porto Alegre: Mérito, 1967, v.16, p.285.

\_\_\_\_\_. In: FERREIRA, A. B. H. **Novo Aurélio século XXI**: o dicionário da língua portuguesa. 3.ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999, p.190.

\_\_\_\_\_. In: HOUAISS, A. **Dicionário eletrônico da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. CD-ROM.

\_\_\_\_\_. In: MICHAELIS, H. **Michaelis**: moderno dicionário da língua portuguesa. 10.ed. São Paulo: Melhoramentos, 1998, p.213.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

\_\_\_\_\_. **Análise de conteúdo**. 3.ed. Lisboa: Edições 70, 2004.

BARLOW, M. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BECKENBACH, E. F. et al. **Sugerencias para resolver problemas**. México: Trillas, 1970.

BLACK, P.; WILIAM, D. Assessment and classroom learning. **Assessment in Education**, v.5, n.1, p.7-74, 1998.

BOALER, J. The role of context in the mathematics classroom: do they make mathematics more real? **For the Learning of Mathematics**, Alberta, v.1, n.2, p.12-17, 1993. Disponível em:

<[http://www.sussex.ac.uk/education/documents/boaler\\_19\\_role\\_and\\_contexts\\_in\\_maths\\_classroom.pdf](http://www.sussex.ac.uk/education/documents/boaler_19_role_and_contexts_in_maths_classroom.pdf)>. Acesso em: 16 jun. 2009.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto, 1994.

BORASI, R. On the nature of problem. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.17, p.124-141, 1986.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Matemática: ensino de quinta a oitava séries. Brasília, 1998.

BRITO, M. R. F. Esse problema é difícil porque não é de escola!: a compreensão e a solução de problemas aritméticos verbais com crianças da escola fundamental. In: REUNIÃO ANUAL DE PSICOLOGIA, 29., 1999, Campinas. **Anais...** Campinas, SP: Ed. da Unicamp, 1999.

BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 232f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

\_\_\_\_\_; SOARES, M. T. C. Avaliação de sistemas escolares: da classificação dos alunos à perspectiva de análise de sua produção matemática. In: VALENTE, W. (Org.) **Avaliação em matemática**. São Paulo: Papirus, 2008. p.101-142.

\_\_\_\_\_;\_\_\_\_\_; CYRINO, M. C. de C. T. Manual para correção das provas com questões abertas de matemática AVA - 2002. Curitiba: SEED/ CAADI, 2004.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p.32-48.

CAI, J.; MOYER, J. C.; LAUGHLIN, C. Algorithms for solving nonroutine mathematical problems. In: MORROW; L. J.; KENNEY, M. J. (Ed.). **The teaching and learning of algorithms in school mathematics reston**: National Council of Teachers of Mathematics, 1998. p.218-229.

CARRAHER, T. N. et al. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

\_\_\_\_\_. Mathematics in the streets and in schools. **British Journal of Developmental Psychology**, Leicester, v.3, p. 21-29, 1985.

CEBOLA, G. Do número ao sentido do número. In: PONTE, J. P. et al. **Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Coimbra: SEM, 2002. p.233-239. Disponível em: <[www.spce.org.pt/sem/156cebola.pdf](http://www.spce.org.pt/sem/156cebola.pdf)>. Acesso em: 23 jun. 2009.

CELESTE, L. B. **A Produção Escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA**. 2008. 85f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

CHARLES, R.; LESTER, F. **Teaching problem solving**: what, why and how. New York: Dale Seymour, 1982.

DE LANGE, J. **Mathematics, insight and meaning**. Utrecht: OW & OC, 1987.

\_\_\_\_\_. Assessment: no change without problems. In: ROMBERG, T. (Ed.) **Reform in school mathematics and authentic assessment**. Albany: Suny Press, 1995. p.87-172. Disponível em: <<http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/1131.pdf>>. Acesso em: 09 fev. 2009a.

\_\_\_\_\_. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madisons: WCER, 1999. Disponível em: < <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6279.pdf> > Acesso em: 12 jan. 2009b.

DEKKER, T., QUERELLE, N. **Great assessment problems**. Utrecht: Freudenthal Institute. Traduction. Ma. Fernanda Gallego. GPDM. Bariloche, Río Negro, Argentina, 2002.

DELLA NINA, C. T. et. al. (Org.) **Um currículo de matemática em movimento**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2005.

DOORMAN, M. et al. Problem solving as a challenge for mathematics education in the Netherlands. **ZDM Mathematics Education**, Netherland, v.39, p.405-418, Oct. 2007.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Ed. da Unicamp, 1995.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

FRANÇA. Ministère de L'Éducation Nationale de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche. Direction de L'Évaluation, de la Prospective et de la Performance. **L'évaluation internationale PISA 2003: compétences des élèves français en mathématiques, compréhension de l'écrit et sciences**. Paris, 2007. (Les Dossier)

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education**. Netherlands: Kluwer Academic, 1991.

GAVE. **Resultados do Estudo Internacional PISA 2003**. Lisboa, 2004. Disponível em: <[http://www.gave.minedu.pt/np3content/?newsId=33efileName=relatorio\\_nacional\\_pisa2003.pdf](http://www.gave.minedu.pt/np3content/?newsId=33efileName=relatorio_nacional_pisa2003.pdf)>. Acesso em: 30 jan. 2009.

GRAVEMEIJER, K; TERWEL J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal Curriculum Studies**, 32, n.6, p.777-796, 2000.

HOWDEN, H. Teaching number sense. **Arithmetic Teacher**, Reston, v. 36, n. 6, p.6-11, 1989.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. **Resultados Nacionais - PISA 2006**: Programa Internacional de Avaliação de Alunos. Brasília: 2008.

KAMMI, C. **A criança e o número**: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. 16.ed. Campinas, SP: Papirus, 1992a.

\_\_\_\_\_. **Aritmética**: novas perspectivas - implicações da teoria de Piaget. 9.ed. Campinas, SP: Papirus, 1992b.

KANTOWSKI, M.G. Algumas considerações sobre o ensino para resolução de problemas. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

LINS, R. C. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis**, Blumenau, v.1, n.7, p.29-39, 1994.

\_\_\_\_\_. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade de Nottingham, Nottingham, 1992.

\_\_\_\_\_; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

MEYER, M. R.; DEKKER, T.; QUERELLE, N. Contexts in mathematics curricula. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v.6, p.522-527, 2001.

MENDONÇA, M. do C. D. Resolução de problemas pede (re)formulação. In: ABRANTES, P. et al. (Org.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. p.15-33.

NAGY-SILVA, M. C. **Do observável ao oculto**: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática. 2005. 123f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS. **Normas para avaliação em matemática escolar**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1999.

\_\_\_\_\_. **Normas para a avaliação em matemática escolar**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991.

NESHER, P.; HERSHKOVITZ, S. Real world knowledge and mathematical knowledge. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., 1997, Lathi, Finland. **Proceedings...** Lathi, Finland: University of Helsinki, 1997. p.280-287.

NEWMAN, James R. (Org.) **The universal encyclopedia of mathematics**. London, England: George Allen & Unwin, 1964.

NUNES, T. et al. **Mathematics in the streets and schools**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

\_\_\_\_\_; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OCDE. **Estrutura de avaliação PISA 2003**: conhecimentos e habilidades em matemática, leitura, ciências e resolução de problemas. Tradução B & C Revisão de textos. São Paulo: Moderna, 2004b.

OECD. **The PISA 2003 - Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills**. Paris: OECD, 2003. Disponível em <<http://www.pisa.oecd.org>>. Acesso em: 27 ago. 2008.

\_\_\_\_\_. **Learning for Tomorrow's World - First Results from PISA 2003**. Paris, 2004a. Disponível em <<http://www.pisa.oecd.org>>. Acesso em: 27 ago. 2008.

\_\_\_\_\_. **PISA 2006: Science competencies for tomorrow's world**. V.1: Analysis. Paris, 2007.

PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p.33-39.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PORTANOVA, R. Educar na e para a diversidade: um currículo de matemática em movimento. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2006, Caxias do Sul, RS. **Anais...** Caxias do Sul, 2006. Disponível em: <[http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro\\_Gaicho\\_Ed\\_Matem/cientificos/C37.pdf](http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro_Gaicho_Ed_Matem/cientificos/C37.pdf)>. Acesso em: 19 jan. 2009.

PORTUGAL. Ministério da Educação. Gabinete de Avaliação Educacional. **PISA-2003 - Programme for international student assessment**: conceitos fundamentais em jogo na avaliação de resolução de problemas. Lisboa: GAVE, 2004.

PROBLEMA. In: HOUAISS, A. **Dicionário eletrônico da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. CD-ROM.

POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

RICO, R. L. Evaluación de competencias matemáticas: proyecto PISA/OCDE 2003. In: CASTRO, E.; DE LA TORRE, E. (Eds.). Investigación en educación matemática: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA (S.E.I.E.M.), 8., La Coruña **Actas...** La Coruña, 2004.

SÁ, P. F. **Os problemas envolvendo as 4 operações e a unidade do pensamento linear**. 2003. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2003.

SANTOS, E. R. dos. **Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões não-rotineiras de matemática**. 2008. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SCHLIEMANN, A. D. As operações concretas e a resolução de problemas de matemática. In: CARRAHER, T. N. **Aprender pensando**: contribuições da psicologia cognitiva para a educação. 4.ed. Rio de Janeiro: Vozes, 1989. p.47-48.

SCHLIEMANN, A. Da matemática da vida diária à matemática da escola. In: \_\_\_\_\_; CARRAHER, D. (Orgs). **A compreensão de conceitos aritméticos**: ensino e pesquisa. Campinas, SP: Papirus, 1998. p.11-38.

SFARD, A.; LINCHEVSKI, L. The gains and the pitfalls of reification: the case of algebra. **Educational Studies in Mathematics**, v.26, p.191-228, 1994.

SHANNON, A. Task context and assessment. In: SCHOENFELD, A. H. (Ed.). **Assessing mathematical proficiency**. Berkeley: University of California, 2007. p.177-191.

SOARES, M. B. **Letramento**: um tema em três gêneros. Belo Horizonte: Autêntica, 1998.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. de S. V. **Álgebra**: das variáveis às equações e funções. São Paulo: IME/ USP, 1996.

SPINILLO, A. G. O sentido do número e sua importância na educação matemática. In: BRITO, M. R. F. (Org). **Soluções de problema e matemática escolar**. Campinas, SP: Alínea, 2006. p.83-111.

STREEFLAND, L. **Fractions in realistic mathematics education**: a paradigm of developmental research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

TREFFERS, A. **Three dimensions**: a model of goal and theory description in mathematics instruction: the Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Assessment and realistic mathematics education**. Utrecht: CD-B Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

\_\_\_\_\_. Realistic mathematics education: work in progress. In: BREITEIG, T.; BREKKE, G. (Eds.), **Theory into practice in mathematics education**. Norway: Faculty of Mathematics and Sciences/Hogskolen I Agder, 1998, p.1-38. Disponível em: <<http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/4966.pdf>>. Acesso em: 05 fev. 2009.

\_\_\_\_\_. The role of context in assessment problems in mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Alberta, v.25, n.2, p.2-9, 2005. Disponível em: <<http://74.125.47.132/search?q=cache:XHFq8O0huGIJ:www.fi.uu.nl/~marjah/documents/01-Heuvel.pdf+www.fi.uu.nl/~marjah/documents/01-Heuvel.pdf&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>>. Acesso em: 28 jan. 2009.

VASCONCELOS, L. Problemas de adição e subtração: modelos teóricos e práticas de ensino. In: SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (Orgs). **A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa**. Campinas, SP: Papyrus, 1998. p.53-72.

VYGOTSKI, L. S. **Obras escogidas III**: incluye problemas del desarrollo de la psique. Madrid: Visor Distribuciones, 1995.

ZULKARDI, Z. **How to design lessons based on the realistic approach**. University of Twente, 1999. Disponível em : <http://www.geocities.com/ratuilma/rme.html> >. Acesso em: 16 de fev. 2009.