



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

KÁTIA SOCORRO BERTOLAZI

**CONHECIMENTOS E COMPREENSÕES REVELADOS POR
ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
SOBRE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**

Londrina
2012

KÁTIA SOCORRO BERTOLAZI

**CONHECIMENTOS E COMPREENSÕES REVELADOS POR
ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
SOBRE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Londrina
2012

Catálogo Elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

B546c Bertolazi, Kátia Socorro.

Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares / Kátia Socorro Bertolazi. - Londrina, 2012. 227 f.: il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) -Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática - Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino (Superior) -Teses. 3. Equações lineares - Formação de conceitos - Teses. 4. Estudantes de matemática - Desenvolvimento cognitivo - Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

KÁTIA SOCORRO BERTOLAZI

**CONHECIMENTOS E COMPREENSÕES REVELADOS POR
ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA SOBRE
SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores
Savioli
UEL – Londrina – PR

Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina – PR

Profa. Dra. Maria Clara Rezende Frota
PUC – Minas Gerais – MG

Londrina, 27 de fevereiro de 2012.

*Dedico este trabalho a uma mulher admirável,
minha mãe Francisca, por me ensinar que o
impossível não existe quando se deseja algo
verdadeiramente.*

AGRADECIMENTOS

A minha lista de agradecimento é extensa, pois não se chega ao topo do sucesso sozinho. ***Assim, eu agradeço e sou muito grata a...***

Deus, minha fonte de inspiração e força, sempre me mostrou um caminho novo durante os momentos que acreditei não existir saída.

Santa Terezinha do Menino Jesus que viveu com intensidade sua vida religiosa e sempre se mostrou comprometida com a missão que lhe foi concedida. Nas minhas orações sempre peço pela sua intercessão para que me ajude a permanecer firme em minha profissão e, assim desempenhá-la de forma correta e fraterna.

Minha Mãe, a dona Francisca, meu porto seguro! Qualquer problema que eu tenho fica menor quando a tenho perto de mim. Meu *anjo humano* aqui na Terra!

Meu Pai, in memoriam, que me incutiu desde criança o gosto pelo estudo e o amor pela matemática. Pai, se você estivesse aqui, eu lhe diria mais uma vez o quanto te amo e o quanto sou grata por tudo que você fez por mim! O nome do meu herói é **José Domingos Bertolazi** que durante os passeios de bicicleta me fez compreender que a vida só faz sentido quando acreditamos em algo que fazemos!

Silvana, minha irmã, que sempre me ensinou a ver a vida pelo traço colorido da alegria. Também gostaria de agradecê-la pela primeira leitura deste trabalho que muito contribuiu para o aprimoramento do texto final.

João Paulo, Paulinho, meu amor, companheiro, cúmplice, marido, amigo de todas as horas e momentos. Sempre compreensivo, paciente e disposto a me ajudar.

A **direção** da **Escola Franciscana Santa Isabel** que sempre colaborou na adaptação de meus horários de trabalho para que fossem possíveis minhas viagens semanais à Londrina.

A **Professora Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli**, minha orientadora que acreditou em mim e se dedicou muito para que eu pudesse desenvolver esse trabalho, sempre me apoiando, aconselhando, acalmando e me conduzindo na direção correta. Obrigada de coração por cada uma das coisas que me ensinou ou que me fez enxergar. Foram muitas! Sou imensamente grata por tudo que você fez por mim! Te admiro muito!

Às professoras componentes da banca examinadora **Dra. Maria Clara Rezende Frota** e **Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida** pela dedicação, atenção e cuidado que manifestaram na leitura da primeira versão deste trabalho. Obrigada pelas perguntas, correções, sugestões, questionamentos, os quais foram extremamente valiosos.

Aos **sujeitos de pesquisa** pela disponibilidade e atenção em responder as questões propostas por esse trabalho. Não tenho palavras para agradecê-los!

Gostaria ainda de agradecer aos **queridos professores** do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina que tanto contribuíram para meu amadurecimento acadêmico ao longo do meu Curso de Mestrado, são os seguintes:

- **Professora Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli** fez-me entender o que é a tal abstração matemática. Depois disso, meu olhar para a matemática se modificou e passei a aprender com mais qualidade e eficiência, além de aprimorar meu trabalho docente.

- **Professora Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida** me ensinou o quanto a matemática pode ser determinante na tomada de decisões diante de um problema por meio da Modelagem Matemática.

- **Professora Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco** me mostrou significativamente que ser professor exige responsabilidade e solidariedade com aquele que aprende, além de disposição contínua para estudo e pesquisa.

- **Professora Dra. Márcia Cristina de C. Trindade Cyrino** me fez compreender os cuidados e o rigor que exige uma pesquisa científica.

- **Professor Dr. Sérgio Arruda** por abrir minha mente para a condição humana da eterna insatisfação por meio de suas aulas de "psicanálise", bem como as reflexões sobre os vários tipos de saberes de um professor.

Aos meus colegas de mestrado **Antônio, Nilton, Henrique e Débora** sempre leais, companheiros e solidários em todos os momentos.

Aos **membros do grupo de estudo** da Professora Dra. Angela Marta pelas contribuições, sugestões e leituras realizadas na primeira versão deste trabalho.

A **RPM, Revista do Professor de Matemática**, publicação que encontrei um grande apoio para minha pesquisa. Os textos possuem uma linguagem clara e acessível, possibilitando entendimentos e reflexões das ideias que se propõem comunicar.

A **UEL, Universidade Estadual de Londrina**, por abrir oportunidades de crescimento às pessoas que procuram meios para aperfeiçoar suas capacidades sócio-cognitivas.

Aos **meus queridos alunos** com os quais aprendo todos os dias e me sinto motivada a buscar sempre mais.

Obrigada a todos que estiveram comigo e contribuíram de forma direta ou indireta para a realização desse trabalho. Serei sempre grata a todos vocês!

“[...] Deus é amor, e quem permanece no amor permanece em Deus e Deus nele”.

1ª Carta de São João | Cap. IV | Versículo 16

Ensinar é um exercício de imortalidade.
De alguma forma continuamos a viver
naqueles cujos olhos aprenderam a ver o
mundo pela magia da nossa palavra. O
professor, assim, não morre jamais...

Rubem Alves (1994)

BERTOLAZI, Kátia Socorro. **Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares**. 2012. 227 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

RESUMO

A presente dissertação tem por objetivo investigar processos de pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática em tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares. Para tanto, construímos uma Proposta de Avaliação Reflexiva sobre o conteúdo matemático em questão constituída de três partes, a qual foi aplicada em estudantes da 4ª série de um curso de Licenciatura em Matemática, em uma universidade estadual pública do norte paranaense. Com uma abordagem, predominantemente, qualitativa de caráter descritivo-interpretativo buscamos nos registros escritos relatos e indícios que assinalassem a presença de processos de pensamento matemático avançado, conforme Dreyfus (1991) e Resnick (1987), e um perfil conciso dos participantes evidenciando a concepção de matemática no sentido de Thompson (1997), e ainda indícios de atitudes de professor reflexivo à luz de Freire (2004 e 2011). Examinamos questão por questão de cada um dos participantes inventariando seus conhecimentos e compreensões acerca de Sistemas de Equações Lineares. Entendemos que os participantes já demonstram, em suas resoluções, serem conscientes de muitas interações que ocorrem durante o processo de representação, mas ainda provavelmente lhes faltam oportunidades para desenvolverem atividades que os instiguem a formalizar e sintetizar diferentes aspectos de um conceito ou tema matemático, ação que de acordo com Dreyfus (1991) favorece o processo de abstração matemática. As análises revelaram que de dezessete participantes, apenas três desses atingiram o processo de abstração matemática, isto é, a capacidade de sintetizar, formalizar e generalizar pensamentos matemáticos. Ainda, inferimos que a maioria dos participantes apresentou uma visão platônica da matemática no sentido de Thompson (1997).

Palavras-chave: Educação matemática. Sistemas de equações lineares. Pensamento matemático avançado. Concepções de matemática. Pensamento algébrico.

BERTOLAZI, Kátia Socorro. **Knowledge and understanding revealed by undergraduate students in mathematics on systems of linear equations**. 2012. 227 f. Dissertation (Master's degree Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

ABSTRACT

This dissertation proposes to investigate advanced mathematical thinking processes manifested in written records of undergraduate students in mathematics in tasks on systems of linear equations. For this purpose we built a Proposal Evaluation Reflexive about mathematical content in question consisted of three parts, which was applied in the fourth grade students of a Bachelor's Degree in Mathematics in a public state university of northern Paraná. The approach is predominantly qualitative descriptive-interpretative we seek evidence reports and written registers that indicate the presence of advanced mathematical thinking processes, according to Dreyfus (1991) and Resnick (1987), and a concise profile of the participants demonstrating the conception of mathematic in the sense of Thompson (1997), and also evidences of attitudes of reflective teacher in the light of Freire (2004 and 2011). For this, we examined question by question for each of the participants inventorying their knowledge and comprehensions about Linear Equations Systems. We understand that the participants have indicated in their resolutions, be aware of many interactions that occur during the process of representation, but still probably they lack opportunities to develop activities that instigate to formalize and synthesize different aspects of a mathematical concept or theme, action that according to Dreyfus (1991) favors the process of mathematical abstraction. The analysis revealed from seventeen participants, only three of them reached the process of mathematical abstraction, that is, the ability to synthesize, formalize and generalize mathematical thinking. Still, we infer that most participants had a platonic view of mathematics in the sense of Thompson (1997).

Keywords: Mathematics education. Systems of linear equations. Advanced mathematical thinking. Conceptions of mathematics. Algebraic thinking.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Processos envolvidos no pensamento matemático avançado baseado em Dreyfus (1991)	42
Quadro 2 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico.....	47
Quadro 3 – Relações entre Processos de Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991; RESNICK, 1987) e características presentes no Pensamento Algébrico conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), Ponte et al (2009)	49
Quadro 4 – Características do Pensamento Matemático Avançado (RESNICK, 1987)	50
Quadro 5 – Interpretação geométrica de Sistemas de Equações Lineares 2×2	60
Quadro 6 – Informações gerais sobre a Proposta de Avaliação Reflexiva	83
Quadro 7 – Classificação dos termos utilizados na Questão 1 da Parte II	99
Quadro 8 – Interpretação geométrica de Sistemas de Equações Lineares com duas equações e três incógnitas.....	112
Quadro 9 – Síntese do perfil dos participantes da pesquisa	115
Quadro 10 – Síntese das respostas apresentadas - Parte I - Questão 4.....	126
Quadro 11 – Síntese das respostas apresentadas - Parte I - Questão 5.....	129
Quadro 12 – Síntese das respostas apresentadas - Parte I - Questão 6.....	135
Quadro 13 – Síntese das respostas apresentadas - Parte I - Questão 7.....	138
Quadro 14 – Síntese das respostas apresentadas - Parte I - Questão 8.....	140
Quadro 15 – Síntese das respostas apresentadas - Parte I - Questão 10.....	143
Quadro 16 – Transcrição do protocolo de (E. 9) - Parte II - Questão 7	159
Quadro 17 – Classificação dos termos da Questão 1 da Parte II de acordo com processos envolvidos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (1991).....	155
Quadro 18 – Classificação dos termos da Questão 1 da Parte II conforme respostas dos participantes	156
Quadro 19 – Transcrição do protocolo de (E. 9) - Parte II - Questão 7	164
Quadro 20 – Síntese das respostas apresentadas - Parte III - Questão 2.....	173
Quadro 21 – Síntese das respostas apresentadas - Parte III - Questão 3.....	179

Quadro 22 – Transcrição do protocolo de (E. 14) - Parte III - Questão 5 - Item a.....	194
Quadro 23 – Transcrição do protocolo de (E. 6) - Parte III - Questão 5 - Item a.....	195
Quadro 24 – Processos de pensamento matemático avançado: manifestações em algumas questões da Proposta de Avaliação Reflexiva.....	202

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Retas concorrentes	60
Figura 2 – Retas coincidentes	60
Figura 3 – Retas paralelas.....	60
Figura 4 – Interpretação Geométrica para Sistemas de Equações Lineares 3x3.....	61
Figura 5 – Escalonamento de um sistema de equações lineares 3x3 (I)	63
Figura 6 – Escalonamento de um sistema de equações lineares 3x3 (II)	64
Figura 7 – Representação geométrica de SPD 3x3	68
Figura 8 – Sistema Possível e Determinado.....	69
Figura 9 – Representação geométrica de SPI 3x3.....	71
Figura 10 – Sistema Possível e Indeterminado	72
Figura 11 – Representação geométrica de SI 3x3.....	74
Figura 12 – Sistema Impossível.....	75
Figura 13 – Planos coincidentes.....	112
Figura 14 – Planos paralelos	112
Figura 15 – Planos concorrentes	112
Figura 16 – Protocolo do Participante (E. 3) - Parte I - Questão 1 - Item B.....	116
Figura 17 – Protocolo do Participante (E. 13) - Parte I - Questão 1 - Item A	118
Figura 18 – Protocolo do Participante (E. 7) - Parte I - Questão 4.....	124
Figura 19 – Protocolo do Participante (E. 6) - Parte I - Questão 4.....	125
Figura 20 – Protocolo do Participante (E. 11) - Parte I - Questão 5.....	128
Figura 21 – Protocolo do Participante (E. 8) - Parte I - Questão 5.....	129
Figura 22 – Protocolo do Participante (E. 19) - Parte I - Questão 6.....	133
Figura23 – Protocolo do Participante (E. 9) - Parte I - Questão 6.....	134
Figura 24 – Protocolo do Participante (E. 11) - Parte I - Questão 6.....	134
Figura 25 – Protocolo do Participante (E. 10) - Parte I - Questão 7.....	136
Figura 26 – Protocolo do Participante (E. 11) - Parte I - Questão 7.....	137
Figura 27 – Protocolo do Participante (E. 5) - Parte I - Questão 8.....	139
Figura 28 – Protocolo do Participante (E. 9) - Parte I - Questão 8.....	139
Figura 29 – Protocolo do Participante (E. 7) - Parte I - Questão 10.....	143
Figura 30 – Protocolo do Participante (E. 2) - Parte I - Questão 11.....	144
Figura 31 – Protocolo do Participante (E. 14) - Parte I - Questão 11.....	144

Figura 32 – Protocolo do Participante (E. 16) - Parte I - Questão 11.....	145
Figura 33 – Protocolo do Participante (E. 7) - Parte I - Questão 11.....	145
Figura 34 – Protocolo do Participante (E. 10) - Parte II - Questão 6.....	152
Figura 35 – Protocolo do Participante (E. 10) - Parte II - Questão 7.....	153
Figura 36 – Protocolo do Participante (E. 9) - Parte II - Questão 3.....	159
Figura 37 – Definição de Sistemas de Equações Lineares	160
Figura 38 – Protocolo do Participante (E. 10) - Parte II - Questão 9.....	165
Figura 39 – Protocolo do Participante (E. 13) - Parte III - Questão 2.....	175
Figura 40 – Protocolo do Participante (E. 14) - Parte III - Questão 2.....	176
Figura 41 – Protocolo do Participante (E. 8) - Parte III - Questão 2.....	177
Figura 42 – Protocolo do Participante (E. 17) - Parte III - Questão 2.....	181
Figura 43 – Parte do Protocolo do Participante (E. 10) - Parte III - Questão 4 ...	185
Figura 44 – Parte do Protocolo do Participante (E. 2) - Parte III - Questão 4	186
Figura 45 – Parte do Protocolo do Participante (E. 2) - Parte III - Questão 4	186
Figura 46 – Parte do Protocolo do Participante (E. 2) - Parte III - Questão 4	186
Figura 47 – Protocolo do Participante (E. 4) - Parte III - Questão 4.....	188
Figura 48 – Protocolo do Participante (E. 7) - Parte III - Questão 4.....	189
Figura 49 – Protocolo do Participante (E. 11) - Parte III - Questão 4.....	191
Figura 50 – Protocolo do Participante (E. 19) - Parte III - Questão 4.....	192
Figura 51 – Protocolo do Participante (E.16) - Parte III - Questão 5 - Item A	195
Figura 52 – Protocolo do Participante (E. 5) - Parte III - Questão 5 - Item A	195
Figura 53 – Protocolo do Participante (E. 7) - Parte III - Questão 5 - Item A	196
Figura 54 – Protocolo do Participante (E. 7) - Parte III - Questão 5 - Item B	196
Figura 55 – Protocolo do Participante (E. 9) - Parte III - Questão 5 - Item B	197
Figura 56 – Protocolo do Participante (E. 3) - Parte III - Questão 5 - Item B	197
Figura 57 – Protocolo do Participante (E. 4) - Parte III - Questão 5 - Item B	197
Figura 58 – Protocolo do Participante (E. 5) - Parte III - Questão 5 - Item B	198
Figura 59 – Protocolo do Participante (E. 12) - Parte III - Questão 5 - Item B	198
Figura 60 – Protocolo do Participante (E. 14) - Parte III - Questão 4.....	211

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	17
1 PROBLEMÁTICA DE PESQUISA	20
1.1 PROBLEMÁTICA ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	22
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	28
2.1 O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO.....	28
2.2 A CONCEPÇÃO DE DREYFUS (1991)	31
2.2.1 Processos Envolvidos na Representação	33
2.2.2 Processos Envolvidos na Abstração	36
2.2.3 O Pensamento Algébrico.....	43
2.2.4 Contribuições de Paulo Freire para o Exercício da Docência	51
2.5 CARACTERIZAÇÃO DE CONCEPÇÕES CONFORME THOMPSON (1997).....	54
3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	58
3.1 DEFINIÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.....	58
3.2 MÉTODOS ALGÉBRICOS RESOLUTIVOS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	61
3.2.1 Métodos Algébricos Resolutivos de Sistemas de Equações Lineares 2x2...61	
3.2.2 Métodos Algébricos Resolutivos de Sistemas de Equações Lineares NxM.....	62
3.2.2.1 Escalonamento de um sistema de equações lineares 3x3	62
3.2.2.2 Regra de cramer	65
3.3 DISCUSSÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES	67
3.3.1 Sistema Possível Determinado (SPD).....	67
3.3.2 Sistema Possível e Indeterminado (SPI)	70
3.3.3 Sistema Impossível (SI).....	73
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	76
4.1 DESCRIÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA	77
4.2 CARACTERIZAÇÕES DOS SUJEITOS DA PESQUISA	78
4.3 SOBRE A FORMATAÇÃO DA PROPOSTA DE AVALIAÇÃO REFLEXIVA ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	81

4.4	DESCRIÇÃO DO PROCESSO DE COLETA DE DADOS.....	81
4.5	ANÁLISES DE DADOS	83
5	CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA DE AVALIAÇÃO REFLEXIVA ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	85
5.1	A CONSTRUÇÃO DA PARTE I: PERFIL DOS PARTICIPANTES	87
5.5.1	Parte I: Apresentação Profissional	87
5.5.2	Apresentação das Questões da Parte 1.....	88
5.2	A CONSTRUÇÃO DA PARTE II: ASPECTOS CONCEITUAIS E DIDÁTICOS ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.....	97
5.3	A CONSTRUÇÃO DA PARTE III: ASPECTOS MATEMÁTICOS ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.....	105
6	ANÁLISES DOS REGISTROS ESCRITOS DOS PARTICIPANTES	113
6.1	ANÁLISES DA PARTE I: PERFIL DOS PARTICIPANTES	114
6.1.1	Perfil dos Estudantes Participantes.....	115
6.2	ANÁLISES DA PARTE II: ASPECTOS CONCEITUAIS E DIDÁTICOS ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.....	148
6.3	ANÁLISES DAS QUESTÕES DA PARTE III: ASPECTOS MATEMÁTICOS ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.....	167
6.4	MANIFESTAÇÕES DE PROCESSOS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO	199
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	205
	REFERÊNCIAS.....	214
	ANEXOS	218
	ANEXOS A – Proposta de avaliação reflexiva envolvendo sistemas de equações lineares.....	219
	ANEXOS B – Parte II: aspectos conceituais e didáticos envolvendo sistemas de equações lineares	221
	ANEXOS C – Parte III: aspectos matemáticos envolvendo sistemas de equações lineares.....	224

INTRODUÇÃO

Uma das funções que se atribuem a professores de matemática é estimular potencialidades cognitivas, por meio de pensamentos matemáticos, que podem ser desenvolvidos por estudantes mediante estudos e conexões entre ideias e conteúdos matemáticos, gerando novas possibilidades de desenvolvimento intelectual, cultural e até mesmo socioeconómico.

De acordo com Dreyfus (1991) o pensamento matemático avançado envolve muitos processos que interagem e que ocorrem simultaneamente na mente de uma pessoa, e tal pensamento é dependente das experiências vivenciadas por essa.

Nesta pesquisa contemplamos algumas reflexões sobre processos de pensamento matemático avançado conforme caracterizações de Dreyfus (1991) e Resnick (1987). Temos como objetivo investigar processos de pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática, em tarefas sobre Sistemas de *Equações Lineares*¹. E como pergunta norteadora: *que manifestações de processos de pensamento matemático avançado são reveladas em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática ao resolverem tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares?*

Na procura por referências de outras pesquisas concluídas recentemente sobre Sistemas de Equações Lineares encontramos três trabalhos: Battaglioli (2008), Pantoja (2008) e Luccas (2004), sendo os mesmos voltados ao Ensino Médio.

A presente pesquisa procura se diferenciar dessas outras apresentadas em dois aspectos distintos: (i) o público alvo é composto por estudantes de Licenciatura em Matemática, potenciais futuros professores e, (ii) procuramos desenvolver um conjunto de tarefas a qual denominamos por Proposta de Avaliação Reflexiva que pudesse promover revelações sobre conceitos e situações que envolvem Sistemas de Equações Lineares, e além disso suscitasse reflexões a respeito de algumas situações inerentes ao processo de ensino e de aprendizagem. Chamamos o conjunto de questões de *Proposta de Avaliação*

¹ Conteúdo considerado relevante pela comunidade acadêmica e pelo currículo escolar tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior.

Reflexiva, em que consideramos avaliação no sentido de retorno de conhecimento desses estudantes e reflexiva por conta que incentivará considerações sobre processos de entendimento de alguns assuntos específicos.

A presente pesquisa procura relacionar processos e características de pensamento matemático avançados explicitados por estudantes de Licenciatura em Matemática as suas visões particulares de matemática, uma vez que muitos dos aspectos cognitivos desenvolvidos por uma pessoa estão atrelados as suas experiências vivenciadas. Assim como Thompson (1997), acreditamos que as concepções - conjunto de crenças, preferências e visões - mesmo que de forma sutil podem ter um papel relevante na formação docente. Desse modo, buscamos também conhecer concepções pessoais dos participantes dessa pesquisa sobre algumas de suas experiências acadêmicas, questionando-os sobre suas crenças, preferências e visões que remetem, em certa medida, ao contexto social a qual estão inseridos. Destaques também para Freire (2004) e Lorenzato (2010) sobre aspectos relativos à prática docente.

Ainda, considerando que a *Proposta de Avaliação Reflexiva* envolve *Sistemas de Equações Lineares*, sentimos a necessidade de tratar de algumas características do pensamento algébrico, e para isso nos amparamos em Ponte et al (2009), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997). Já para tratar sobre o conteúdo matemático em si, *Sistemas de Equações Lineares*, utilizaremos como referenciais teóricos Lima (1993), Poole (2004), Anton e Busby (2006). A seguir, apresentamos a organização da estrutura textual desta pesquisa, a qual está dividida em seis capítulos.

No capítulo I tratamos da problemática que possibilitou evidenciar algumas razões para o desenvolvimento de uma pesquisa de caráter qualitativo sobre *Sistemas de Equações Lineares*, voltada para a formação inicial do professor. Esse conteúdo matemático apresenta múltiplas faces permitindo atividades matemáticas de cunho algébrico e geométrico, faz parte tanto do currículo da Educação Básica quanto do Ensino Superior, além de possuir diversas aplicabilidades nas mais diferentes áreas do conhecimento.

Já o Capítulo II tem por finalidade apresentar os referenciais teóricos em que nos apoiamos tanto para construir como também para conduzir as análises sobre a *Proposta de Avaliação Reflexiva* envolvendo *Sistemas de Equações*

Lineares. Destaques para Dreyfus (1991), Resnick (1987), Freire (2004), Lins e Gimenez (1997), Thompson (1997).

Em seguida, no capítulo III abordamos alguns aspectos conceituais envolvendo Sistemas de Equações Lineares. Destaques para a discussão e visão geométrica de sistemas de equações de ordem três e, alguns métodos algébricos resolutivos tais como escalonamento e Regra de Cramer.

Sequencialmente, no capítulo IV expomos os procedimentos metodológicos que utilizamos para conduzir e organizar tal pesquisa. Com uma abordagem de caráter descritivo-interpretativo seguimos as características da investigação qualitativa no sentido de Bogdan e Biklen (1994). Além disso, apresentamos as caracterizações dos sujeitos de pesquisa e a descrição detalhada do processo de coleta de dados.

Prosseguindo, no capítulo V descrevemos a construção justificada da Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares, a qual foi dividida em três partes. A Parte I contempla questões que visam retratar aspectos relacionados ao perfil dos participantes da pesquisa. A Parte II aborda elementos conceituais e didáticos a respeito de Sistemas de Equações Lineares, enquanto a Parte III trata de aspectos matemáticos envolvendo tal conteúdo, trazendo questões específicas que demandam pensamento matemático avançado.

Dando continuidade, apresentamos no capítulo VI os resultados encontrados por meio da concretização dessa pesquisa. Destaques para as análises específicas de cada uma das partes da Proposta de Avaliação Reflexiva, revelando a concepção de matemática de cada um dos participantes no sentido de Thompson (1997), bem como as manifestações de processos de pensamento matemático avançado conforme Dreyfus (1991) e Resnick (1987).

E por fim, tecemos as considerações finais que emergiram por meio de reflexões das análises realizadas mediante os registros escritos dos participantes, os quais foram obtidos em virtude da aplicação da Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares.

1 PROBLEMÁTICA DE PESQUISA

A presente pesquisa surgiu em decorrência de inquietações que apareceram mediante estudo de textos que tratavam de pensamento matemático avançado.

Para Domingos (2006, p. 1) os níveis de insucesso elevados na área do ensino e da aprendizagem de matemática podem ser explicados “*pela falta de compreensão de muitos dos conceitos matemáticos que são ensinados, desde o 1º Ciclo até ao Superior*”, uma vez que estes “*apresentam um grau de complexidade acrescido necessitando de recorrer a um pensamento matemático avançado*”.

A comunidade de pesquisadores que investigam o pensamento matemático avançado não apresentam um consenso sobre essa temática.

Resnick (1987) afirma que não é possível definir com exatidão o pensamento matemático avançado, mas que podem ser elencadas algumas características que concernem a este, por exemplo, não é algoritmo, tende a ser complexo e envolve incertezas. Para Tall (2002) a possibilidade de definição formal e dedução são fatores que distinguem o pensamento matemático avançado do pensamento matemático elementar, sendo isso possível a partir do Ensino Superior.

Já para Dreyfus (1991) uma característica distintiva entre o pensamento avançado e pensamento elementar é a complexidade envolvida nos processos de gerenciamento e tratamento referentes aos processos de pensamento.

Baseando-se nas características de pensamento matemático avançado de Resnick (1987) e Dreyfus (1991) desenvolvemos uma pesquisa com estudantes de 4ª série de um curso de Licenciatura em Matemática. Para tanto, temos como objetivo investigar manifestações de processos de pensamento matemático avançado em registros escritos dos mesmos, em tarefas envolvendo Sistemas de Equações Lineares, por conta desse conteúdo apresentar diferentes aplicabilidades, além de possuir representações algébricas e geométricas. É relevante destacar que esses autores trabalham dentro de uma perspectiva cognitivista, isto é, o objetivo de estudo é o modo pelo qual estudantes tratam e compreendem objetos matemáticos independentemente da forma com que são apresentados.

Nesse sentido, Dreyfus (1991) afirma que a reflexão sobre a própria experiência matemática é um aspecto relevante para o desenvolvimento cognitivo e,

tal reflexão é característica do pensamento matemático avançado, reflexão essa que o autor gostaria de “ver” mais nos estudantes de matemática avançada, como também de modo especial nos professores de matemática de Ensino Médio. Mas, relata que o modo habitual que alguns professores formadores escolhem para ministrar suas aulas de matemática, valorizando de forma exagerada o formalismo atrelada a longas sequências expositivas, não oportunizam trabalhos de investigação e reflexões sobre conteúdos matemáticos apresentados durante um determinado curso, porque oferecem o produto matemático pronto e acabado.

Algumas pesquisas de Lorenzato (2006) indicam que na licenciatura alguns conteúdos de matemática são tratados pelo método dedutivo, repleto de demonstrações, enquanto que o que consta nos programas de Ensino Fundamental e Médio é que esses conteúdos devem ser abordados pelo método indutivo, repleto de atividades experimentais. Em uma recente publicação esse autor nos afirma que:

Considerando que ninguém consegue ensinar o que não sabe, decorre que ninguém aprende com aquele que dá aulas sobre o que não conhece. Mesmo quando os alunos conhecem menos que um professor que dá aulas sem domínio do assunto, eles percebem, no mínimo, a insegurança do professor. Qual seria nossa reação, num aeroporto, ao tomarmos conhecimento de que o piloto de nosso voo não conhece bem como nos conduzir? [...]. Reconhecemos que o educando tem o direito de receber do professor um correto conteúdo tratado com clareza, e, para que isso possa acontecer, é fundamental que o professor conheça a matemática e sua didática (LORENZATO, 2010, p. 3).

Concordamos com Lorenzato (2010, p. 52) que são necessárias algumas mudanças no currículo universitário, especialmente aqueles voltados para a Licenciatura de Matemática, pois de acordo com esse autor “[...] o currículo do curso universitário de matemática é concebido e moldado para formar o pesquisador em matemática e não o professor para atuar no Ensino Fundamental ou Médio”. Entretanto, Ernest (1989) alerta que reformas no ensino de matemática não podem ocorrer desconsiderando as concepções (crenças, preferências, visões) dos professores sobre matemática que já estão arraigados no processo de ensino e de aprendizagem.

Diante das considerações mencionadas anteriormente, acreditamos que estudantes de Licenciatura em Matemática - potenciais futuros professores de matemática - necessitariam ter um espaço durante o curso de graduação para

praticarem reflexões, discussões e atividades de investigação sobre alguns conteúdos matemáticos considerados fundamentais por documentos oficiais brasileiros² que devem ser ministrados tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior.

Nesse sentido, o objetivo dessa pesquisa é investigar processos de pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática em tarefas sobre *Sistemas de Equações Lineares*³.

Para tanto, a pergunta norteadora é: *que manifestações de pensamento matemático avançado são reveladas em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática ao resolverem tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares?*

A fim de responder a pergunta de pesquisa elaboramos uma *Proposta de Avaliação Reflexiva*, envolvendo tarefas tanto de Sistemas de Equações Lineares quanto algumas de caráter pessoal sobre o processo de ensino e de aprendizagem, organizado na forma de questionário e posteriormente aplicado para os participantes da mesma.

1.1 PROBLEMÁTICA ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Inegavelmente, uma das razões pelas quais optamos por Sistemas de Equações Lineares consiste no fato deste conteúdo relacionar-se com outros de múltiplas formas tanto no âmbito da própria matemática quanto em outras áreas do conhecimento. Esse conteúdo se faz presente tanto nos currículos de Ensino Médio quanto nos de Ensino Superior, sendo pré-requisito e direcionando o estudo de vários tópicos relacionados à Álgebra Linear, ainda auxilia e apoia o estudo de Geometria Analítica⁴. Possui aplicabilidades em diversas áreas do conhecimento,

² Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (2000), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCN+ (2002), Orientações Curriculares do Ensino Médio - OCEM (2006).

³ Conteúdo considerado relevante pela comunidade acadêmica e pelo currículo escolar tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior.

⁴ Geometria analítica: é o estudo da Geometria pelo método cartesiano (DESCARTES, 1596-1650), que em última análise consiste em associar equações aos entes geométricos, e do estudo dessas equações (com o auxílio da Álgebra, portanto) tirar conclusões a respeito daqueles entes geométricos. [...] do ponto de vista da Geometria Analítica conhecer ou determinar um plano trata-se de conhecer ou determinar sua equação (CAMARGO; BOULOS, 2005, p.x).

como por exemplo: química, balanceamento de equações químicas; informática, análise de métodos numéricos; física, análise de fluxo de redes elétricas; nutrição, construção de cardápios para dietas específicas; economia, modelos econômicos de Leontief que analisam estruturas de preços de equilíbrio e a respectiva produção necessária para satisfazer a demanda, entre outros.

Em relação a Sistemas de Equações Lineares, Leon⁵ (2011) relata a extensa aplicabilidade desse conteúdo matemático na mais nova edição de seu livro “*Álgebra Linear com aplicações*”, segundo o autor:

Provavelmente o problema mais importante na matemática é o da resolução de um sistema de equações lineares. Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em algum estágio. Usando métodos modernos da matemática, é frequentemente possível reduzir um problema sofisticado a um simples sistema de equações lineares. Os sistemas lineares aparecem em aplicações em áreas como negócios, economia, sociologia, ecologia, demografia, genética, eletrônica e física (LEON, 2011, p. 1).

Em consonância com Leon (2011) outros autores defendem a relevância do estudo de Sistemas de Equações Lineares, como por exemplo, Dorier et al. (2002), Lima (1993) e Anton e Busby (2006).

Lima (1993) em um artigo intitulado “*Sobre o Ensino de Sistemas de Equações Lineares*” publicado na Revista do Professor de Matemática nº 23, publicação conhecida pela sigla RPM, que de agora em diante será adotada neste texto, descreve o porquê da importância do conteúdo Sistemas de Equações Lineares figurar no currículo escolar, e ainda faz um alerta sobre a abordagem enfadonha dada para este assunto. Segundo o autor, os sistemas de equações lineares:

constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. Por estes três motivos, é mais do que justa sua inclusão nos currículos escolares. Entretanto, sua abordagem nos compêndios adotados em nossas

⁵ Steven J. Leon é professor reitor do Departamento de Matemática da Universidade de Massachusetts, em Dartmouth, EUA. É diretor do projeto denominado em inglês por “Augmeting the Teaching of Linear Algebra through the Use of Software Tools” (ATLAST) do Comitê Educacional de Álgebra Linear.

escolas é, na maioria das vezes, obsoleta, árida e desmotivada. Em certos casos, até mesmo contém erros matemáticos de fato (LIMA, 1993, p. 8).

Alguns dos erros que Lima (1993) se refere estão associados, por exemplo, à abordagem inadequada que alguns livros didáticos de matemática apresentam sobre a utilização da Regra de Cramer para se realizar a discussão de um Sistema de Equações Lineares. Discutir um Sistema de Equações Lineares significa entender se tal sistema apresenta uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução.

Já Anton e Busby (2006), autores que trabalham com Ensino Superior, em um de seus livros intitulado “*Álgebra Linear Contemporânea*” se posicionam sobre a variedade de aplicabilidades dos Sistemas de Equações Lineares, afirmando que:

Sistemas lineares com milhares de variáveis, ou até com milhões de variáveis, ocorrem nas engenharias, na análise econômica, nas imagens de ressonância magnética, na análise de fluxo de tráfego, na previsão do tempo e na formulação de decisões e de estratégias comerciais (ANTON; BUSBY, 2006, p. 59).

Jean-Luc Dorier et al (2002), grupo de pesquisadores franceses, que têm entre seus principais interesses de pesquisa a Álgebra Linear, declaram em um de seus artigos, intitulado “*Some comments on the role of proof in comprehending and teaching elementary linear Algebra by F. Uhlig*”⁶ que:

[...] aprender álgebra linear requer que os estudantes olhem para diferentes conceitos aprendidos anteriormente do campo da matemática e tente distanciar-se a fim de ter uma atitude reflexiva em relação ao que já sabem. Por exemplo, nós e Uhlig compartilhamos a ideia de que uma reflexão sobre o processo de resolução dos sistemas de equações lineares é um importante ponto de partida para um acesso mais formal sobre as ideias da álgebra linear (DORIER et al., 2002, p. 186)⁷.

⁶ Algumas observações sobre o papel da prova na compreensão e ensino elementar de Álgebra Linear por F. Uhlig.

⁷ [...] learning linear algebra requires that students look back to different previously learned fields of mathematics and step aside in order to have a reflective attitude towards what they already know. For instance, we share with Uhlig the idea that reflecting upon the solvability of systems of linear equations is an important starting point in order to access more formal ideas in linear algebra (DORIER et al., 2002, p. 186).

Nesse artigo, Dorier et al. (2002) afirmam ser adequado aos estudantes de matemática adquirir um bom nível técnico em resolver sistemas de equações lineares, antes de começar o processo de ensino e aprendizagem de álgebra linear. Nesse mesmo contexto, aconselham que os métodos de resolução relacionados aos determinantes devem ser evitados por conta do tecnicismo que pode mascarar algumas ideias.

A reflexão sobre a resolução de Sistemas de Equações Lineares, conforme Dorier et al. (2002, p. 187), consiste em “uma etapa essencial para preparar os estudantes para o conceito formal de dependência linear e fazê-los refletirem sobre o processo de solução e suas ações quanto a solução de um sistema de equações lineares”, apoiando o estudo de tópicos de matemática avançada.

As *Orientações Curriculares do Ensino Médio* (2006), denominadas agora em diante pela sigla OCEM, publicadas pelo MEC - Ministério da Educação e Cultura - indicam e trazem recomendações quanto ao tratamento matemático a ser explorado em relação aos Sistemas de Equações Lineares, esse documento declara que:

No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema 2×2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. A resolução de sistemas 2×3 ou 3×3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3×3 , a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes (OCEM, 2006, p. 77-78).

É relevante destacar que nas recomendações já supracitadas em nenhum momento se orientam um tratamento de caráter geométrico para Sistemas de Equações Lineares 3×3 , como se faz para o de 2×2 . Temos convicção de que um

tratamento geométrico aliado ao algébrico ampliaria a compreensão do estudante sobre esse assunto e poderia minimizar algumas dificuldades.

De forma sintetizada, levantamos algumas razões pertinentes para um estudo de caráter qualitativo sobre *Sistemas de Equações Lineares*, voltado para a formação inicial do professor, por que:

- I. possuem uma extensa aplicabilidade dentro da matemática, com foco especial para Álgebra Linear e Geometria Analítica, conteúdos matemáticos que exigem um pensamento matemático avançado, pois requerem formas distintas de representação matemática, capacidade de sintetizar e gerenciar conceitos, atitudes que podem promover a abstração matemática, grau de desenvolvimento cognitivo apreciado e desejado por aqueles que se dedicam ao estudo profissional e amador da Matemática;
- II. são utilizados em várias áreas do conhecimento, como por exemplo, na física, na informática, na química, na indústria e comércio, na economia dentre outras, para a resolução de problemas;
- III. estão inseridos tanto nos currículos escolares da Educação Básica quanto no Ensino Superior, e neste não apenas no curso de Matemática, mas nos cursos de engenharias de modo geral, cursos relacionados à manipulação de tecnologias de informática avançada, física entre outros;
- IV. figuram entre um dos conteúdos considerados básicos de matemática, portanto o professor de matemática necessita conhecê-lo com profundidade, pois este se constitui ferramenta matemática acessível para a resolução de inúmeras situações, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior;
- V. permitem um trabalho com enfoque algébrico e geométrico simultaneamente, assim sendo de significativa relevância para

promover pensamento matemático avançado, já que pode ser explorado por meio de representações matemáticas variadas, exigindo a manipulação de diversos conceitos matemáticos simultaneamente.

Diante do que apresentamos até aqui, a Proposta de Avaliação Reflexiva sobre Sistemas de Equações Lineares para investigar processos de pensamento matemático avançado aborda aspectos conceituais e didáticos pertinentes a esse conteúdo, contemplando questões que tratam de visão geométrica tanto no plano quanto no espaço, e ainda situações que exigem do estudante uma reflexão acurada quanto à resolução de problemas envolvendo aplicações desse conteúdo matemático.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A finalidade deste capítulo é apresentar os referenciais teóricos em que nos apoiamos tanto para construir como também para conduzir as análises sobre a Proposta de Avaliação Reflexiva.

Apresentamos a visão de Dreyfus (1991) sobre os processos do pensamento matemático avançado que nos guiará durante o desenvolvimento das análises. Abordaremos algumas características do pensamento matemático avançado que já foram tratadas por alguns autores tais como: Resnick (1987), Dreyfus (1991) e Tall (2002), e concomitantemente explicitamos as razões da escolha pela teoria de Dreyfus (1991) e Resnick (1997) e não a de Tall (2002).

Além disso, Freire (2004, 2011) e Lorenzato (2010) serão os referenciais que nos subsidiarão em aspectos gerais inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem. Thompson (1997) nos auxiliará na compreensão de concepções da matemática. Utilizaremos Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), Ponte et al (2009) para tratarmos de elementos e características intrínsecas ao pensamento algébrico. Ainda, nos basearemos em Lima (1993), Poole (2004), Anton e Busby (2006) para tratar conceitos específicos envolvendo Sistemas de Equações Lineares.

2.1 O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Resnick (1987) denomina o que chamamos por pensamento matemático avançado de pensamento de ordem superior. A referida autora expõe em seu livro "*Education and Learning to Think*" (1987), logo nas primeiras páginas que não é possível definir com exatidão o pensamento de ordem superior, mas que podem ser elencadas algumas características que concernem a este, tais como:

- é não algorítmico, ou seja, o caminho da ação não é totalmente especificado com antecedência;

- tende a ser complexo⁸, isto é, o percurso total não é “visível” (mentalmente falando) a partir de um único ponto de vista;
- geralmente rende várias soluções, cada uma com custos e benefícios, ao invés de soluções únicas;
- envolve julgamentos e interpretações sutis;
- envolve a aplicação de vários critérios, que, por vezes, conflitam uns com os outros;
- geralmente envolve incerteza, nem tudo o que se tem na tarefa proposta é conhecido;
- envolve a auto-regulação do processo de pensamento, quer dizer, nós não reconhecemos pensamento matemático avançado em um indivíduo quando esse “pergunta” pelos passos que deve seguir;
- envolve um sentido imposto, a estrutura encontra-se em aparente desordem;
- é trabalhoso, há um trabalho mental considerável envolvido nos tipos de elaborações e julgamentos necessários.

Já para Tall (2002), a possibilidade de definição formal e dedução são fatores que distinguem o pensamento matemático avançado do pensamento matemático elementar. Esse autor também alerta que a graduação apresenta a forma final da teoria deduzida, em vez de permitir ao estudante participar do ciclo criativo. Skemp (1971), citado por Tall (2002), afirma que as abordagens atuais de ensino oferecidas na graduação de matemática tendem a dar pronto aos estudantes o produto do pensamento matemático, em vez de instigá-los ao processo de se pensar em matemática.

Ainda, conforme Tall (2002), a matemática é um conhecimento cultural compartilhado e há aspectos que são dependentes do contexto. Assim, esse autor alerta que qualquer teoria da psicologia do pensamento matemático deve ser vista no contexto da atividade mental que o sujeito desempenha, bem como o meio cultural que esse está inserido.

⁸ Complexo no sentido que abrange ou encerra muitos elementos, partes ou processos, podendo ser considerado sob vários pontos de vista. O pensamento matemático avançado é *complexo* também no sentido de ser refinado e apurado envolvendo sutilezas e abstrações.

Tall (2002) explica que os termos generalização e abstração são usados em matemática, tanto para designar os processos em que os conceitos são vistos num contexto mais amplo, bem como também para compreender os produtos desses processos. Para esse autor a abstração é um objeto mental muito diferente, pois é definido por uma lista de axiomas exigindo uma reorganização mental maciça.

Ainda de acordo com Tall (1995) o pensamento matemático avançado envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma variedade de atividades matemáticas para a construção de novas ideias que desenvolvem e ampliam um sistema cada vez maior de teoremas e relações que podem ser estabelecidas. O referido autor afirma que é essencial distinguir entre a matemática elementar, (incluindo a geometria) em que os objetos são descritos e matemática avançada, na qual os objetos são definidos. Em ambos os casos, a linguagem é usada para formular as propriedades dos objetos, mas no aspecto elementar a descrição matemática é construída a partir da experiência com o objeto. Em matemática avançada, as propriedades do objeto são construídas a partir da definição, fato esse que provoca grandes dificuldades de acomodação para os iniciantes em matemática avançada.

O pensamento matemático avançado, conforme Tall (1995), é inspirado por conceitos imagem, formalizado por conceitos definição e deduções lógicas.

Mesmo concordando em alguns pontos com Tall (1995, 2002), adotaremos a concepção de Dreyfus (1991) e algumas características de Resnick (1997), porque esses autores levam outros aspectos em consideração para caracterizar o pensamento matemático avançado, não se restringindo a formalização e a dedução de conceitos matemáticos. Desse modo, admitem ser possível desenvolver pensamento matemático avançado mesmo em tópicos que tratam de matemática elementar, como por exemplo, problemas presentes em olimpíadas de matemática.

Sendo assim, apresentaremos na próxima seção a concepção de Dreyfus (1991), sobre pensamento matemático avançado, a qual utilizaremos nessa pesquisa.

2.2A CONCEPÇÃO DE DREYFUS (1991)

Dreyfus (1991) discute em seu artigo intitulado “*Processos do Pensamento Matemático Avançado*”⁹ algumas ideias que nos permitem compreender características desse tipo de pensamento. Para esse autor, uma característica distintiva entre o pensamento avançado e pensamento elementar é a complexidade e como são tratados. A distinção explícita consiste na forma de como a complexidade envolvida nos processos de pensamento é gerenciada.

A representação e abstração são dois processos considerados eficientes por Dreyfus (1991) para se construir e gerenciar um pensamento matemático avançado.

No processo de representação exige-se conhecimento e manipulação de símbolos, tradução de enunciados, isto é, transitar entre representações diferentes para um mesmo conceito matemático, além de modelação matemática. Já o processo de abstração requer generalização e capacidade de síntese de conceitos.

Pensamento matemático avançado, de acordo com Dreyfus (1991), consiste em uma sequência de vários processos interagindo simultaneamente entre si obtidos por meio de representação, *visualização*, *generalização*, relacionados a outros processos como *classificar*, *conjeturar*, *induzir*, *analisar*, *sintetizar*, *abstrair* ou *formalizar*. Esse autor ainda afirma que é importante para o professor de matemática ser consciente destes processos, a fim de compreender algumas das dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

Dreyfus (1991) destaca que o processo de reflexão sobre a própria experiência matemática é relevante para o desenvolvimento cognitivo sendo esse de particular importância na solução de problemas não triviais, isto é, que não seguem uma sequência de procedimentos matemáticos padronizados para se chegar à solução. Tal reflexão constitui uma característica marcante do pensamento matemático avançado, sendo esperada tanto em estudantes de matemática avançada, como também de modo especial nos professores de matemática de Ensino Médio.

⁹ “Advanced Mathematical Thinking Processes”.

A matemática e os aspectos psicológicos de um processo raramente podem ser separados, sendo assim, segundo Dreyfus (1991) não há distinção nítida entre muitos dos processos básico e avançado do pensamento matemático, mesmo que a matemática avançada seja mais centrada nas abstrações de definição e dedução. Muitos desses processos considerados já estão presentes em crianças pensando sobre conceitos elementares de matemática.

Davis (1988), citado por Dreyfus (1991), afirma que os produtos da atividade de dezenas de matemáticos estão sendo “ensinados” em sua forma final, por isso a maioria dos estudantes não ganha a introspecção necessária nos processos que levaram matemáticos a construir estes produtos. Esse cenário induz procedimentos de aprendizagem matemática que são chamados de rituais, e atribui a isso ao relativo sucesso que alguns estudantes alcançam ao passar em testes de seleção, apesar dos erros grotescos que carregam em sua formação matemática. Para Dreyfus (1991, p. 28):

[...] o que mais os estudantes aprendem em seus cursos de matemática é realizar um grande número de procedimentos padronizados, expressos em formalismos definidos com precisão para a obtenção de respostas às classes claramente delimitadas de questões de exercício. Eles adquirem a capacidade de executar, embora muito mais lenta, o tipo de operação que um computador pode realizar, por meio de um programa adequado, como Mathematica. Eles terminam com uma quantidade considerável de conhecimento matemático, mas sem a metodologia de trabalho do matemático, isto é, a falta de know-how que lhes permite utilizar os seus conhecimentos de uma forma flexível para resolver problemas de um tipo desconhecido para si mesmos¹⁰.

Nesse sentido, entendemos que a forma como a matemática, na maioria da vezes, é ensinada não abre oportunidade ao estudante para que este tenha condições de chegar ao pensamento matemático avançado, ou seja, os conhecimentos são explanados de modo mecânico, sem se preocupar com aspectos relacionados a processos de reflexão sobre o conceito que está sendo exposto.

¹⁰ [...] what most students learn in their mathematics courses is, to carry out a large number of standardized procedures, cast in precisely defined formalisms, for obtaining answers to clearly delimited classes of exercise questions. They thus acquire the capability to perform, albeit much slower, the kind of operation which a computer can perform by means of a suitable program such as Mathematica. They end up with a considerable amount of mathematical knowledge but without the working methodology of the mathematician, that is they lack the know-how that allows them to use their knowledge in a flexible manner to solve problems of a type unknown to them (DREYFUS, 1991, p. 28).

Para ilustrar o cenário dos tais "rituais matemáticos", Dreyfus (1991) apresenta os resultados de um estudo conduzido por Mason Selden e Selden, (1989) em um curso tradicional de cálculo na Universidade Tecnológica do Tennessee. O estudo mostrou que estudantes obtiveram pelo menos uma nota C, apesar de terem sido ensinados em pequenos grupos por professores experientes e auxiliares de ensino. Esses estudantes foram presenteados com cinco problemas moderadamente complexos que poderiam ser resolvidos com as técnicas que estavam à sua disposição, entretanto os problemas foram formulados de uma forma que estava um pouco fora do padrão, por exemplo: "Encontre pelo menos uma solução para a equação $4x^3 - x^4 = 30$ ou explique por que não existe solução" (DREYFUS, 1991, p.27).

A função $f(x) = 4x^3 - x^4$ tem um valor máximo de 27 e, portanto, nenhuma solução para a dada equação existe. Embora os estudantes no estudo fossem perfeitamente capazes de realizar a discussão necessária da função, eles não conseguiram responder à pergunta dada. A situação foi semelhante em relação aos outros quatro problemas. De fato, os autores afirmam que nenhum estudante entendeu o problema corretamente. A maioria não conseguiu fazer nada (DREYFUS, 1991, p.27)¹¹.

Isso nos permite inferir que os conteúdos ensinados durante o curso de cálculo talvez não oportunizou uma reflexão sobre processos de pensamento matemático, dessa forma, o que se aprendeu foram simplesmente técnicas de cálculo.

Passamo-nos agora a tratar na próxima seção sobre processos envolvidos na representação do pensamento matemático avançado conforme Dreyfus (1991).

2.2.1 Processos Envolvidos na Representação

O processo de representação é central para a aprendizagem e para o pensamento matemático e se deve considerar as experiências pessoais, porque

¹¹ The function $f(x)=4x^3-x^4$ has a maximum value of 27 and thus no solution to the given equation exists. Although the students in the study were perfectly capable to carry out the required function discussion, they could not answer the question as given. The situation was similar with respect to the other four problems. Infact, the authors state that not one student got an entire problem correct. *Most couldn't do anything* (DREYFUS, 1991, p. 27).

cada um pode pensar no mesmo conceito, mas de diferentes modos dependendo do contexto que se está inserido. Tais diferenças frequentemente levam a situações em que os estudantes são incapazes de compreender seus professores, e vice-versa. Pois, de acordo com Dreyfus (1991, p. 31) “quando falamos ou pensamos sobre um grupo, uma integral, uma aproximação, ou a respeito de qualquer outro objeto do processo matemático, cada um de nós o relaciona com algo que temos em mente [...]”¹².

Dentre os processos mentais envolvidos na representação, figuram a *compreensão e a manipulação de símbolos*. Os símbolos envolvem as relações entre os signos e significados, que servem para fazer um conhecimento pessoal implícito - o sentido - explícito em termos simbólicos. Para Dreyfus (1991, p. 31) “a representação simbólica é externamente escrita ou falada, geralmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais simples”¹³.

Conforme indica Lorenzato (2010, p. 44) “foi justamente o simbolismo que internacionalizou a linguagem matemática, possibilitando que a matemática fosse compreendida sem equívocos pelos matemáticos de qualquer país”. Para expressar a complexidade, mas ao mesmo tempo a universalidade da linguagem matemática, apresentamos um exemplo simples da utilização simbólica: $\forall x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1$, isto é, todos os números reais que sejam maiores que zero e simultaneamente menores que um.

Dessa forma, os símbolos utilizados na linguagem matemática podem se tornar um fator que dificulta o processo de ensino e de aprendizagem matemática. Lorenzato (2010) sugere aos professores que esses organizem um glossário de termos e símbolos conforme vão aparecendo ao longo do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos.

Ainda sobre os processos mentais envolvidos na representação de um conceito matemático destaca-se a *visualização*. Conforme Dreyfus (1991), a visualização é um processo pelo qual as representações mentais podem vir a ser. Ainda segundo esse autor, as representações mentais são geradas sobre a base de sistemas de representações concretas, dessa forma, uma pessoa pode gerar, assim,

¹² When we talk or think about a group, an integral, an approximation, about any mathematical object or process at all, each one of us relates to something we have in mind [...]. (DREYFUS, 1991, p. 31).

¹³ A symbolic representation is externally written or spoken, usually with the aim of making communication about the concept easier (DREYFUS, 1991, p. 31).

uma única ou várias representações mentais concorrentes para o mesmo conceito matemático. Assim, inferimos que para se gerar uma representação mental é necessário estabelecer relações entre conceitos e conteúdos e desse modo, conceber a imagem mental (visualização) de um conceito matemático.

Concordamos com Dreyfus (1991) sobre o fato de ser comum entre estudantes universitários a ocorrência de imagens mentais pobres, por exemplo, sobre o conceito de função, pois esses parecem pensar apenas em termos de fórmulas, mesmo sendo capazes de recitar definições a respeito da teoria. Desse modo, “a menor mudança na estrutura de um problema, ou até mesmo em sua formulação, pode bloqueá-los completamente” (DREYFUS, 1991, p. 32)¹⁴.

O processo de representação mental envolve mais uma ação cognitiva: a *tradução*, esta relaciona-se com o fato de o estudante saber transitar entre diferentes representações matemáticas para um mesmo conceito. Por exemplo, compreender características de uma função seja esta dada por meio de sua representação algébrica, gráfica ou tabular. Dreyfus (1991) admite que não é simples de ensinar e nem de se aprender o processo de mudança de diferentes representações para um mesmo conceito matemático, porque a estrutura desse pensamento é complexa. Contudo, salienta que uma abordagem possível é a aplicação sistemática de várias representações no ensino, enfatizando o processo de mudança desde o início de um estudo de um determinado conteúdo matemático.

Nesse sentido, as imagens gráficas geradas pelos softwares computacionais têm oferecido uma contribuição interessante e significativa para o tratamento de alguns temas matemáticos, tais como funções, cálculo diferencial integral e equações diferenciais, entre outros. Dreyfus (1991) nos indica um exemplo clássico de tradução envolvido no processo de representação quando se trata de aplicabilidades. Segundo esse autor, os estudantes, em sua maioria, ficam apreensivos quando são solicitados a resolver situações que envolvem aplicações. O autor exemplifica isso em termos de equações diferenciais aplicadas a circuitos elétricos, segundo o mesmo:

O estudante não só precisa entender o contexto dos problemas aplicados, por exemplo, um circuito elétrico, mas o mais importante, precisa estabelecer uma correspondência estreita e clara entre as

¹⁴ The slightest change in the structure of a problem, or even in its formulation, may completely block them (DREYFUS, 1991, p. 32).

quantidades referidas em termos de circuitos elétricos e quantidades referidas em termos de equações diferenciais. Esta correspondência pode ser óbvia para o professor, mas para o estudante a construção do esquema mental adequado é uma tarefa árdua que precisa ser apoiada por uma ação explícita do professor (DREYFUS, 1991, p. 33)¹⁵.

Ainda a respeito do processo de representação mental de um conceito matemático destaca-se a modelagem, termo esse que se refere à busca de uma representação matemática para um processo não matemático. Neste caso, "significa a construção de uma estrutura matemática ou teoria que incorpora características essenciais do objeto do sistema, ou processo a ser descrito" (DREYFUS, 1991, p.34)¹⁶.

Complementando o significado de modelagem, Bassanezi (2002) afirma que:

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2002, p. 24, destaque do próprio autor).

Em síntese, o processo de representação envolve a compreensão e a manipulação de símbolos, a visualização, a tradução e a modelagem .

Na próxima seção apresentaremos os processos envolvidos na abstração do pensamento matemático avançado conforme a concepção de Dreyfus (1991).

2.2.2 Processos Envolvidos na Abstração

A abstração é entendida por Dreyfus (1991, p. 34) como o processo mental relevante para se construir e consolidar o pensamento matemático avançado. O autor afirma que "se o estudante desenvolve a habilidade de conscientemente

¹⁵ Not only does the student need to understand the context of the applied problems, e.g. an electric circuit, but more importantly, he needs to establish a close and clear correspondence between quantities referred to in terms of electric circuits and quantities referred to in terms of differential equations. This correspondence may be obvious to the teacher, but for the student the construction of the appropriate mental schemata is a difficult task which needs to be supported by explicit teacher action (DREYFUS, 1991, p.33).

¹⁶ [...] it means constructing a mathematical structure or theory which incorporates essential features of the object, system or process to be described (DREYFUS, 1991, p.34).

fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático” e ainda complementa que “atingir essa capacidade de abstrair pode muito bem ser o objetivo principal da educação matemática avançada” (DREYFUS, 1991, p. 34)¹⁷.

Nesse sentido, a generalização é definida por Dreyfus (1991) como sendo a ação de se derivar ou induzir algo a partir de indicações, para identificar pontos em comuns e para expandir domínios de validade. O autor nos apresenta um exemplo para defender sua ideia:

Um estudante pode saber por experiência que uma equação linear em uma variável tem uma solução, e que "a maioria dos" sistemas de duas (três) equações lineares em duas (três) variáveis têm uma solução única. Esse então, pode generalizar isso para sistemas de n equações lineares com n variáveis. Mais importante ainda, com orientação adequada, ele (a) pode ser levado a analisar o significado de 'mais' para $n = 2$ e $n = 3$ na declaração acima, formular uma condição adequada, e generalizar também esta condição para $n > 3$. Neste processo, precisa-se fazer a transição entre os casos particulares de $n = 1, 2, 3$; para n geral, é preciso identificar as condições em que $n = 2$ e $n = 3$ têm em comuns, e conjecturar; em seguida, determinar que o domínio de validade da conclusão 'não há uma única solução' pode ser estendido às n generalizações (DREYFUS, 1991, p. 34)¹⁸.

Desse modo, pode-se compreender que a generalização é importante na medida em que estabelece um resultado para uma grande classe de casos.

Já em se tratando do processo de sintetizar, este de acordo com Dreyfus (1991) consiste em meios para combinar ou compor partes de tal modo que forma um todo. Este conjunto, muitas vezes equivale a mais que a soma de suas partes. Por exemplo, em álgebra linear, os estudantes geralmente aprendem um

¹⁷ If a student develops the ability to consciously make abstractions from mathematical situations, he has achieved an advanced level of mathematical thinking. Achieving this capability to abstract may well be the single most important goal of advanced mathematical education (DREYFUS, 1991, p. 34).

¹⁸ A student may know from experience that a linear equation in one variable has one solution, and that "most" systems of two (three) linear equations in two (three) variables have a unique solution. (S)he may then generalize this to systems of n linear equations in n variables. More importantly, with appropriate guidance, (s)he may be led to examine the meaning of "most" for $n=2$ and $n=3$ in the above statement, formulate it as an appropriate condition, and generalize also that condition to $n>3$. In this process, one needs to make the transition from the particular cases of $n= 1, 2, 3$ to general n , one needs to identify what the conditions for $n=2$ and $n=3$ have in common, and to conjecture and then establish that the domain of validity of the conclusion "there is a unique solution" can be extended to general n (DREYFUS, 1991, p. 34).

bom número de fatos isolados sobre ortogonalização de vetores, diagonalização de matrizes, transformações de bases, solução de sistemas de equações lineares, dentre outros. Mais tarde no processo de aprendizagem, espera-se que todos esses fatos não relacionados anteriormente se fundem em uma única imagem, dentro da qual estão todos interligados e compostos. Entretanto, para iniciar o trabalho de síntese de um conceito matemático se faz necessário uma quantidade considerável de trabalho detalhado com os conceitos e operações que o envolve.

Entretanto, Dreyfus (1991) aponta um fato comum que ocorre em aulas de matemática, isto é, o professor se preocupa muito em dar explicações (e é cobrado por isso) do que em instigar o estudante a organizar e sintetizar os conhecimentos novos com aqueles já adquiridos anteriormente. Segundo o mesmo:

em uma aula prática muitas vezes não se coloca esforço suficiente no processo de síntese. Enquanto os detalhes são explicados em pormenores pelo professor e exercitado pelo estudante, poucas ou nenhuma atividades são destinadas a levar o estudante a sintetizar os diferentes aspectos de um conceito, e ainda menos, conceitos diferentes dentro de um domínio ou mesmo em diferentes domínios (DREYFUS, 1991, p. 34)¹⁹.

Dreyfus (1991) toca em um ponto delicado que em certa medida desestimula o trabalho de reflexão que o professor por vezes tenta construir em sua sala de aula: a falta de paciência dos estudantes para resolver ou pensar em um exercício ou problema de matemática. Conforme o autor "os estudantes, especificamente os estudantes do Ensino Médio que lidam bem com matemática, acreditam que a solução de um problema de matemática, normalmente deve ter um minuto, e nunca mais de dez [...] (DREYFUS, 1991, p. 36)²⁰.

O processo de abstração matemática requer paciência e assimilação (no sentido de memorização) de muitos conceitos matemáticos por parte do estudante, além de estar intimamente ligado com a generalização e a capacidade de sintetização. Porém, nem generalizar e sintetizar demandam tanto esforço e

¹⁹ Classroom practice often does not put enough stress on this process of synthesis. While the details are explained at length by the teacher and exercised by the student, few if any activities are designed to lead the student to synthesize different aspects of a concept, and even less different concepts within a domain or even different domains (DREYFUS, 1991, p. 34).

²⁰ Students, specifically high school students who do well in mathematics, believe that solving a mathematics problem should typically take one minute, and never more than ten [...] (DREYFUS, 1991, p. 36).

empenho cognitivo quanto realizar um trabalho de abstração. Dreyfus (1991) define que:

Abstrair é antes de tudo um processo de construção - a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Este processo é dependente do isolamento de propriedades adequadas e estabelecimento de relações. Requer a capacidade de deslocar a atenção dos objetos em si para a estrutura das suas propriedades e relações. Tal atividade mental construtiva por parte de um estudante é fortemente dependente de sua própria atenção, sendo que se centra sobre as estruturas que estão a fazer parte do conceito abstrato, e desviam-se dos que são irrelevantes no contexto pretendido, a estrutura se torna importante, enquanto detalhes irrelevantes são omitidos, reduzindo assim a complexidade da situação (DREYFUS, 1991, p. 37)²¹.

Já Bassanezi (2002, p. 27) define abstração como sendo um “procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos”, e deve levar em consideração as seguintes ações: (i) seleção de variáveis, (ii) problematização numa linguagem própria da área que se está trabalhando, isto é, “um problema se constitui em uma pergunta científica quando explicita a relação entre as variáveis ou fatos envolvidos em um fenômeno” (BASSANEZI, 2002, p. 28); (iii) formulação de hipóteses e, (iv) simplificação, porque em muitas vezes um problema não apresenta a menor possibilidade de estudo ou compreensão em razão da complexidade que apresenta.

Nesse sentido, Dorier et al (2002) explicitam, por exemplo, que para aprender álgebra linear é preciso compreender aspectos relacionados a generalização e abstração de conceitos matemáticos envolvidos por características que exigem a utilização de uma linguagem matemática formal, e indicam que um caminho para se iniciar a compreensão de algumas ideias consiste na reflexão de processos de resolução de Sistemas de Equações Lineares. Segundo esses autores:

²¹ Abstracting is first and foremost a constructive process - the building of mental structures from mathematical structures, i.e. from properties of and relationships between mathematical objects. This process is dependent on the isolation of appropriate properties and relationships. It requires the ability to shift attention from the objects themselves to the structure of their properties and relationships. Such constructive mental activity on the part of a student is heavily dependent on the student's attention being focussed on those structures which are to form part of the abstract concept, and drawn away from those which are irrelevant in the intended context; the structure becomes important, while irrelevant details are being omitted thus reducing the complexity of the situation (DREYFUS, 1991, p. 37).

a unificação e a generalização de um conceito (ou teoria) é caracterizado pelo fato de que esse não surgiu essencialmente para resolver um novo tipo de problema de matemática (como a derivada ou a integral, por exemplo). A sua construção e sua utilização pelos matemáticos foram motivados sim pela necessidade de unificar e generalizar métodos, objetos e ferramentas, que tinham sido desenvolvidas de forma independente em diversas áreas. Portanto, o formalismo ligado a um conceito de unificação e a generalização é constitutivo da sua existência e construção. Isso significa que o formalismo não é apenas uma pura conveniência da linguagem ou da comunicação, mas é parte inevitável da natureza do próprio conceito. (DORIER et al, 2002, p. 186)²².

Segundo Dreyfus (1991), o caminho para o professor chamar a atenção dos estudantes sobre as propriedades e relações que são relevantes para a abstração pretendida deve ser permeado de exemplos que permitem aos estudantes identificarem pontos comuns e traçar relações entre conceitos, recorrendo à imagens visuais apropriadas que puderem ser construídas a respeito de um determinado conceito matemático, estas são susceptíveis de servirem como apoio conveniente para os estudantes envolvidos no processo de abstrair.

Dreyfus (1991) estabelece em seu artigo uma relação entre a representação e a abstração. O autor afirma que:

representação e abstração são assim processos complementares, em sentidos opostos: por um lado, um conceito muitas vezes é abstraído de várias das suas representações, por outro lado as representações são sempre representações de um conceito mais abstrato (DREYFUS, 1991, p. 38)²³.

Em suma, a generalização e a capacidade de sintetização são dois processos apontados por Dreyfus (1991) que colaboram para o desenvolvimento da abstração matemática.

²² A unifying and generalizing concept (or theory) is characterised by the fact that it did not emerge essentially to solve a new type of problems in mathematics (like the derivative or the integral for instance). Its creation and its use by mathematicians were motivated rather by the necessity to unify and generalise methods, objects and tools, which had been independently developed in various fields. Therefore the formalism attached to a unifying and generalizing concept is constitutive of its existence and creation. This means that the formalism is not just a pure convenience of language or communication, but is an unavoidable part of the nature of the concept itself. (DORIER et al, 2002, p. 186).

²³ Representing and abstracting are thus complementary processes in opposite directions: On the one hand, a concept is often abstracted from several of its representations, on the other hand representations are always representations of some more abstract concept (DREYFUS, 1991, p. 38).

Entretanto, o autor admite que os processos de representação e abstração figuram entre os mais importantes para o pensamento matemático avançado, no entanto, são apenas alguns entre os muitos processos que devem e podem ocorrer nas interações e ligações em cadeias que podem também incluir a descoberta, a intuição, a verificação, as provas, a definição, entre outros.

Bassanezi (2002) corrobora com ideias de Dreyfus (1991) ao explicitar que:

o objetivo fundamental do 'uso' de matemática é de fato extrair parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância (BASSANEZI, 2002, p. 18).

Todos os processos envolvidos no pensamento matemático avançado citado por Dreyfus (1991) demandam reflexões tanto da parte do estudante quanto do professor, além de exigir responsabilidade e comprometimento de ambos no processo de ensino e de aprendizagem. De acordo com Dorier et al (2002) para atingir a meta de ter estudantes refletindo sobre suas próprias ações é essencial fazer-lhes perguntas como: O que acontece se...? Por que isso acontece? Como isso ocorre? O que é verdadeiro aqui?

Complementando, Lorenzato (2010, p. 16) explicita algumas ações específicas que o professor deve realizar para apoiar o desenvolvimento cognitivo de seu estudante, por exemplo, escutá-los e observá-los, mas entre essas figuram a ação de auscultar o estudante, isto é, “analisar e interpretar os diferentes tipos de manifestações dos alunos”.

A seguir, apresentamos um quadro-síntese sobre os processos envolvidos no pensamento matemático avançado conforme a concepção de Dreyfus (1991).

Quadro 1 – Processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado baseado em Dreyfus (1991)

Processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado
REPRESENTAÇÃO
Analisar, classificar, conjecturar, definir, descobrir, induzir, intuir, manipular símbolos, modelar, reconhecer símbolos, traduzir, verificar, visualizar.
ABSTRAÇÃO
Generalizar, formalizar, sintetizar, provar.

Para as análises dos registros escritos dos participantes consideraremos que houve manifestações de pensamento matemático avançado conforme caracterizações de Dreyfus (1991) e Resnick (1987) se forem observadas algumas dessas ações:

- apresentar definição ou características envolvendo um conceito matemático com clareza, podendo aparecer simultaneamente tanto definição quanto característica;
- associar conceitos distintos dentro de um mesmo conteúdo matemático, essa ação evidenciaria representações mentais ricas;
- classificar equações lineares de acordo com a definição desse conceito matemático;
- demonstrar capacidade de análise e síntese envolvendo diferentes métodos de resolução para Sistemas de Equações Lineares observando conveniências de acordo com o segmento de ensino;
- demonstrar capacidade de análise perante um problema proposto;
- demonstrar conhecimento sobre conceitos específicos envolvidos no processo de resolução de Sistemas de Equações Lineares, por exemplo, Regra de Cramer;
- demonstrar conhecimentos de conceitos matemáticos distintos que são pertinentes ao entendimento de Sistemas de Equações Lineares. Por exemplo, saber diferenciar retas concorrentes de retas perpendiculares ou compreender que em “ $(\cos 3) x$ ”, “ $\cos 3$ ” representa uma constante, enquanto “ $\cos 3x$ ou $3 \cos x$ ” constitui uma função trigonométrica;

- empregar modelos matemáticos para sintetizar um problema;
- evidenciar conhecimento de aplicabilidades de Sistemas de Equações Lineares em áreas exteriores à Matemática;
- evidenciar conhecimento de formas distintas para se interpretar um Sistema de Equações Lineares (algébrica, geométrica, matricial ou vetorial);
- resolver um problema que apresenta um enunciado não trivial;
- transitar por representações matemáticas distintas envolvendo Sistemas de Equações Lineares. Por exemplo, a solução de um Sistema de Equações Lineares 2×2 pode ser representada por meio de retas no plano cartesiano, enquanto que sistemas 3×3 podem ser compreendidos sob a perspectiva dos planos (espaço tridimensional);
- utilizar propriedades algébricas para compreender representações geométricas.

Mediante as ações descritas anteriormente, entendemos que *Sistemas de Equações Lineares* requer em certa medida a utilização de pensamento algébrico, pensamento esse que envolve muitos aspectos relacionados à representação e manipulação de símbolos, à tradução de linguagem natural para linguagem simbólica, à interpretação do contexto em que se situa o problema, ao reconhecimento de padrões e regularidades, ao estabelecimento de relações entre variáveis, incógnitas e constantes, distinção entre grandezas, entre outros. Por isso, trataremos na seção seguinte de características e processo de ensino e de aprendizagem que se referem ao do pensamento algébrico.

2.3 O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Kaput (1999) explicita que sem alguma forma de álgebra simbólica, não poderia existir uma matemática sofisticada e nenhuma ciência quantitativa, portanto, não haveria tecnologia e vida moderna, como nós conhecemos hoje. Segundo esse autor o grande desafio é encontrar maneiras de tornar o poder da álgebra (aliás, de toda a matemática) à disposição de todos os estudantes para

encontrar formas de ensinar que criem ambientes adequados em sala de aula que permitam aos alunos aprender com entendimento.

Em linhas gerais, Kaput (1999) apresenta uma série de mudanças que considera necessárias para se desenvolver o ensino e aprendizagem da álgebra, pois segundo o mesmo a álgebra escolar tem sido tradicionalmente ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desconectados tanto de conhecimentos matemáticos e de outros do contexto do estudante. Nesse sentido, o autor aponta que se deve:

- começar cedo (partindo do conhecimento informal dos alunos);
- integrar a aprendizagem da álgebra com a aprendizagem de assuntos, isto é, fazer aplicações do que se aprende;
- incluir formas diferentes de pensamento algébrico, aplicando conhecimento matemático;
- partir das potencialidades linguísticas espontâneas dos estudantes e de suas habilidades cognitivas, incentivando-os a refletir sobre o que aprendem e articular com o que já sabem;
- encorajar uma aprendizagem ativa (estabelecimentos de conexões) valorizando a compreensão.

Enquanto Kaput (1999) traz algumas orientações que permitem mudanças do ponto de vista da organização do trabalho didático pedagógico,

Arcavi (1994) se remete a Fey (1990) para listar algumas habilidades²⁴ matemáticas que se deve levar em consideração no processo de ensino e aprendizagem de situações envolvendo temas algébricos, as quais são:

- habilidade para explorar expressões algébricas e fazer estimativas por meio de padrões numéricos ou representações gráficas;
- habilidade para comparar grandezas em diferentes ordens numéricas;

²⁴ Segundo Polya (1959) o conhecimento consiste em parte de informação e em parte de *know-how*. *Know-how* é destreza; é a habilidade em lidar com informações, usá-las para um dado propósito; *know-how* pode ser descrito como um apanhado de atitudes mentais apropriadas, *know-how* é em última análise a habilidade para trabalhar metodicamente. Em Matemática, *know-how* é a habilidade para resolver problemas, construir demonstrações, e examinar criticamente soluções e demonstrações. E, em Matemática, *know-how* é muito mais importante do que a mera posse de informações.

- habilidade para interpretar funções por meio de valores numéricos ou gráficos, identificando expressões algébricas apropriadas para determinar um padrão numérico;
- habilidade de reconhecer operações algébricas, compreender ou prever resultados de forma adequada;
- habilidade para determinar formas equivalentes variadas de respostas à questões particulares.

Entendemos por meio das habilidades apresentadas por Arcavi (1994) que o autor se remete ao se referir sobre situações envolvendo temas algébricos, a algumas ideias principais, ilustradas por meio de compreensão e manipulação de símbolos, comparação de grandezas, conhecimento e utilização de operações algébricas vinculadas a formas de equivalências, e a presença de generalização quando menciona a aplicação de conhecimentos gerais a situações particulares.

Ao passo que Arcavi (1994) aponta tipos de situações favoráveis que devem ser levadas em consideração quanto ao ensino e aprendizagem de temas algébricos, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) fazem outras recomendações para se iniciar o estudo de tal assunto.

Fiorentini et al (1993) aconselham que uma primeira etapa de estudo deve ser feita com base em situações problemas de forma a contemplar os elementos caracterizados por esses autores para o pensamento algébrico, isto é, atividades que explorem os aspectos da linguagem. Já em uma segunda etapa sinalizam que convém partir de expressões algébricas na tentativa de atribuir-lhes algum significado e possibilidade de comportamento, e finalmente em uma terceira etapa esses autores sugerem o trabalho com o que denominam por “transformismo algébrico”, em que se levariam em consideração as operações com expressões algébricas e suas possíveis relações de equivalência. Todavia, advertem que essas etapas não precisam seguir uma ordem rígida, a flexibilidade pode ser um elemento relevante para a compreensão.

Mas, em que consiste pensar algebricamente?

Para Lins e Gimenez (1997, p. 151) “pensar algebricamente é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas

(e igualdades ou desigualdades) e, com base nisso, transformar as expressões obtidas”. Para esses autores:

A álgebra consiste em um conjunto de afirmações, para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 150).

Ainda de acordo com Lins e Gimenez (1997) há diferentes formas de se produzir significado para a álgebra e afirmam que o pensamento algébrico é um entre as distintas formas. Conforme esses autores, o pensamento algébrico possui três características fundamentais:

1. -produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso aritmetismo);
2. -considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não ‘modelando’ números em outros objetos, por exemplo, objetos ‘físicos’ ou geométricos (chamamos a isso de internalismo); e,
3. -operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (chamamos a isso analiticidade) (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 151).

A concepção de Lins e Gimenez (1997, p. 152) para a Educação Algébrica considera dois objetivos centrais: (i) “permitir que os alunos sejam capazes de produzir significados (em nosso sentido) para a álgebra”; e (ii) “permitir que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente” (LINS; GIMENEZ, 1997, p.152), os quais devem ser desenvolvidos dando especial atenção aos itens (1) e (2) da caracterização do pensamento algébrico realizado pelos mesmos.

Já Ponte et al (2009) apresentam uma caracterização clássica para o pensamento algébrico, segundo esses autores:

[...] o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. (PONTE et al, 2009, p. 11).

E nesse sentido, esses autores apresentam uma síntese das vertentes fundamentais do pensamento algébrico.

Quadro 2 – Vertentes fundamentais do Pensamento Algébrico (PONTE et al, 2009, p. 11)

Representar	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções, gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apresentam alguns elementos que consideram caracterizadores para se compreender a manifestação do pensamento algébrico, e explicitam os seguintes: percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização.

De acordo com o que foi anteriormente exposto na presente seção, entendemos que não há uma consonância entre os autores, já anteriormente citados, sobre pensamento algébrico, mas percebemos também que de modo geral há muitos pontos entre os mesmos em que há uma convergência de ideias, por exemplo, a ideia de generalidade. Não temos a pretensão de apontar nas análises se houve uma característica de pensamento algébrico mais acentuada em detrimento de outra, tampouco interesse na frequência que ocorreram.

Conforme a compreensão que pudemos realizar para essa pesquisa, consideraremos que houve manifestação do pensamento algébrico nas resoluções apresentadas pelos estudantes em tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares, se contemplarem pelo menos alguns dos seguintes itens:

- capacidade de se expressar utilizando símbolos e realizar operações algébricas com estes;

- diferenciar incógnitas, constantes e variáveis;
- perceber características específicas, a partir da definição do que se considera por equação linear, e ser capaz de distingui-las dentre outras que não são;
- traduzir enunciados em linguagem natural para uma linguagem algébrica (utilização de notações algébricas); e
- utilizar expressões algébricas, por exemplo, equações e sistemas de equações para resolver ou modelar um problema.

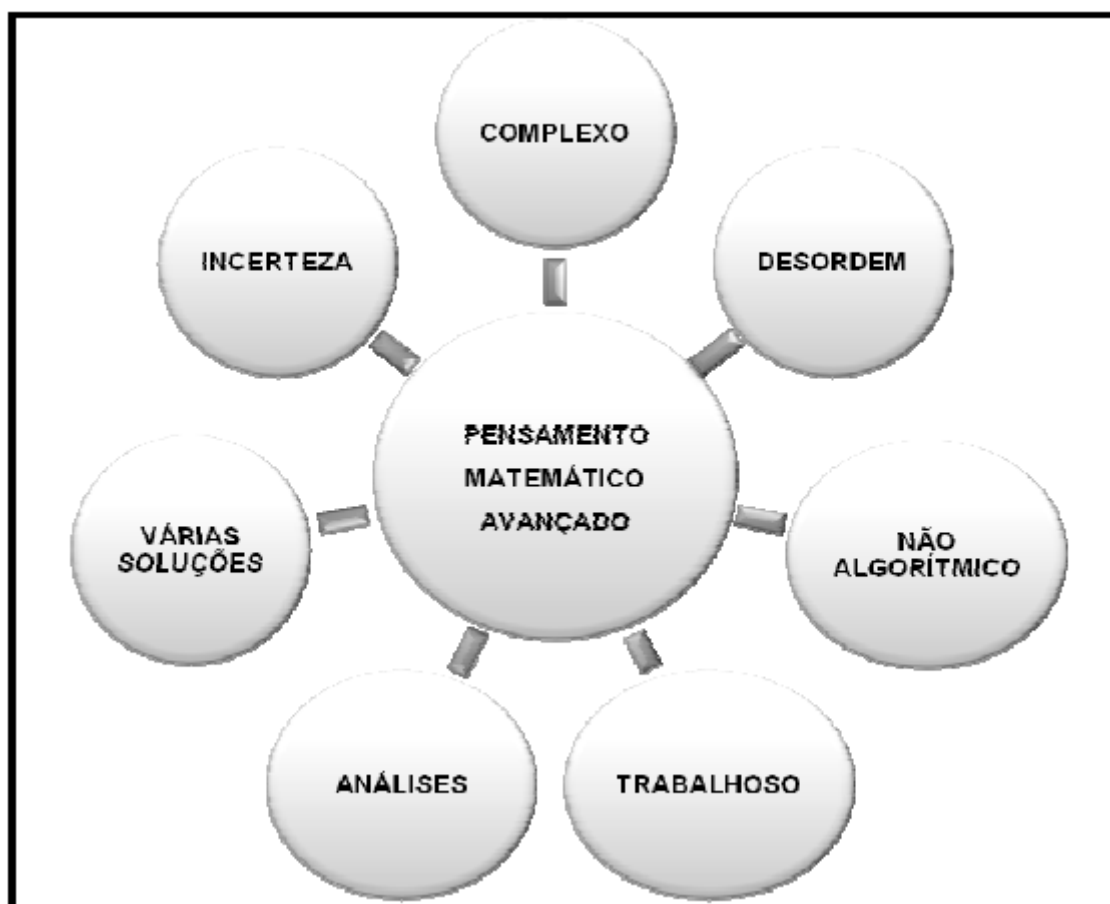
O quadro a seguir sintetiza as ideias gerais que serão utilizadas para as análises da Parte II e da Parte III da Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares.

Quadro 3 – Relações entre Processos de Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991; RESNICK, 1987) e características presentes no Pensamento Algébrico conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), Ponte et al (2009)

Relações entre Processos de Pensamento Matemático Avançado (Dreyfus, 1991 e Resnick, 1987) e características presentes no Pensamento Algébrico conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), Ponte et al (2009)		
Processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado		Características inspiradas em aspectos do Pensamento Algébrico
REPRESENTAÇÃO	Analisar	<ul style="list-style-type: none"> • Perceber características específicas de uma equação ou uma representação geométrica. • Coletar informações do problema.
	Classificar	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar informações do problema conforme a relação que existe entre as grandezas.
	Definir	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender a utilização de uma equação linear.
	Verificar	<ul style="list-style-type: none"> • Examinar se as grandezas apresentam as mesmas unidades de medidas e realizar conversões quando necessário
	Reconhecer símbolos	<ul style="list-style-type: none"> • Diferenciar incógnitas, constantes e variáveis.
	Manipular símbolos	<ul style="list-style-type: none"> • Expressar-se utilizando símbolos e realizar operações algébricas com estes.
	Traduzir	<ul style="list-style-type: none"> • Transitar por representações matemáticas distintas envolvendo Sistemas de Equações Lineares. • Traduzir enunciados em linguagem natural para uma linguagem algébrica.
	Modelar	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentar um modelo matemático adequado para organizar os dados de um problema. Por exemplo, um sistema de equações, uma matriz ou uma tabela. • Utilizar expressões algébricas, por exemplo, equações e sistemas de equações lineares para resolver ou modelar o problema.
	Visualizar	<ul style="list-style-type: none"> • Estabelecer relações entre conceitos, classificações e imagens para sistemas de equações lineares. • Compreender posições relativas entre retas e planos.
ABSTRAÇÃO	Generalizar e Formalizar	<ul style="list-style-type: none"> • Associar conceitos distintos dentro de um mesmo conteúdo matemático, evidenciando representações mentais ricas. • Elaborar um sistema de equações lineares que resolva um problema proposto.
	Sintetizar	<ul style="list-style-type: none"> • Gerenciar processos de representação associados ao processo de abstração matemática produzindo solução e resposta coerente com o enunciado apresentado por um problema.

Ainda, apresentamos um quadro síntese que reúne características do pensamento matemático avançado elencadas por Resnick (1987) que serão consideradas para as análises das resoluções de algumas questões da Proposta de Avaliação Reflexiva.

Quadro 4 – Características do Pensamento Matemático Avançado (RESNICK, 1987)



Além disso, lembramos que dedicaremos uma parte dessa pesquisa para conhecer algumas características pessoais dos participantes a respeito de suas experiências escolares. O intuito disso é valorizar o ser humano e o seu processo de autoconhecimento para promoção de sua própria aprendizagem, uma vez que o pensamento matemático avançado está relacionado intimamente com as experiências vivenciadas pelo indivíduo em diferentes fases de sua vida.

Acreditamos que para alguém aprender com significado e sentido é preciso que se tenha consciência de suas próprias potencialidades cognitivas.

Nesse sentido, nas próximas seções, nos basearemos em Freire (2004, 2011) e Thompson (1997).

2.4 CONTRIBUIÇÕES DE PAULO FREIRE PARA O EXERCÍCIO DA DOCÊNCIA

A educação para Freire consistia em uma meta social que deveria ser alcançada para que se pudesse reorganizar e abrir novas possibilidades para se discutir os aspectos socioeconômicos e políticos do país. Enfatizava que só os oprimidos poderiam libertar os opressores, jamais o contrário.

Freire afirmava que “ninguém é sujeito da autonomia de ninguém”. Defendia que a escolarização, a formação, enfim o acesso ao conhecimento era uma forma eficiente de despertar a consciência humana. Liberdade, democracia e solidariedade figuravam entre seus principais valores na busca pelo diálogo, respeito, compreensão e conscientização social.

Para Freire (2011, p. 35) “quanto mais alguém quer ser o outro, tanto menos ele é ele mesmo”, no sentido de que um ser humano não pode imitar outrem, por isso é preciso que cada um seja o sujeito de sua história, que desenvolva sua autonomia por meio de seu processo de pensamento crítico, contribuindo assim para o crescimento da sociedade.

Em 1996, Freire publicou *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*, um trabalho relevante destinado a professores e educadores de modo geral, cuja temática central é a “formação docente ao lado da reflexão sobre a prática educativo-progressiva em favor da autonomia do ser dos educandos” (FREIRE, 2004, p. 13). O autor destaca três aspectos fundamentais para a prática docente: (i) “*não há docência sem discência*”, na medida em que o ato de aprender precede o ato de ensinar, isto é, quanto mais ampla for a experiência de reflexão pessoal do professor sobre sua própria aprendizagem, maiores se tornarão as possibilidades para que este professor exerça sua profissão de forma efetiva e condizente com as práticas sociais; (ii) “ensinar não é transferir conhecimento”, o professor necessita atentar-se para o fato de que se espera que seus ensinamentos desenvolvam e contribuam para o espírito de autonomia no aprendiz, e não o de dependência e insegurança; (iii) “ensinar é uma especificidade humana”, no sentido que demanda comprometimento, responsabilidade, respeito, paciência e ética por parte do docente que se dispõe ao exercício de ensinar. Nas palavras do autor:

É preciso [...], que o formando, desde o princípio mesmo de sua experiência formadora, assumindo-se como sujeito também da produção do saber, se convença definitivamente de que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua formação. Se, na experiência de minha formação, que deve ser permanente, começo por aceitar que o formador é o sujeito em relação a quem me considero o objeto, que ele é o sujeito que me forma e eu, o objeto por ele formado, me considero como um paciente que recebe os conhecimentos - conteúdos - acumulados pelo sujeito que sabe e que são a mim transferidos. Nesta forma, de compreender e de viver o processo formador, eu, objeto agora, terei a possibilidade, amanhã, de me tornar o falso sujeito da 'formação' do futuro objeto de meu ato formador. É preciso que, pelo contrário, desde os começos do processo, vá ficando cada vez mais claro que, embora diferentes entre si, quem forma se forma e re-forma ao formar e quem é formado forma-se e forma ao ser formado. (FREIRE, 2004, p. 22-23).

Freire (2004) explicita a ideia de que o formando não pode se sentir como um paciente diante de seu professor e receber os conhecimentos simplesmente como um "remédio" e esperar que se faça o efeito. O formando precisa cultivar uma atitude de iniciativa perante sua própria aprendizagem e compreender que é o responsável direto por sua própria formação. Do mesmo modo, o professor deve conscientizar-se de que apenas apresentar conteúdos para o formando não é suficiente para que esse desenvolva sua capacidade de reflexão, se faz necessário questioná-lo, propor-lhes desafios, mostrar-lhes as dificuldades do caminho para que se consigam meios de superá-las, desenvolver diálogos com esse para compreender e verificar se o entendimento está ocorrendo de forma adequada.

Segundo Freire (2011²⁵), o homem é um ser inacabado, e como tal precisa se construir diariamente, e essa construção se dá pelo processo da educação.

Não é possível fazer uma reflexão sobre o que é a educação sem refletir sobre o próprio homem. [...]. O homem pode refletir sobre si mesmo e coloca-se num determinado momento, numa certa realidade: é um ser na busca constante de ser mais e, como pode fazer esta auto-reflexão, pode descobrir-se como um ser inacabado, que está em constante busca. Eis aqui a raiz da educação. [...]. A educação é possível para o homem, porque este é inacabado e sabe-se inacabado. Isto leva-o à sua perfeição. A educação, portanto, implica uma busca realizada por um sujeito que é o homem.

²⁵ Aqui estamos utilizando a 33ª reimpressão do livro Educação e Mudança de Paulo Freire (1979), versão essa que corresponde ao ano de 2011.

O homem deve ser sujeito de sua própria educação. Não pode ser o objeto dela (FREIRE, 2011, p. 27-28).

Assim como Freire (2011) afirma que o homem é um ser inacabado, acreditamos que o professor também é um profissional inacabado, e na medida em que adquire novos conhecimentos, que passa por novas experiências sobre o que ensina e aprende, caminha no rumo de ampliar sua própria construção e dessa forma, colabora na construção de outrem. Dessa forma, “não há docência sem discência, as duas se explicam e seus sujeitos apesar das diferenças que os conotam, não se reduzem à condição de objeto, um do outro. Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender” (FREIRE, 2004, p. 23).

A Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares procura incentivar reflexões por parte de futuros professores de matemática que estão alicerçando seus conhecimentos, e que de certa forma necessitam ser instigados, estimulados a pensar em sua própria aprendizagem como um caminho para superar desafios presentes na prática docente.

Desse modo, inspiramos-nos nas características da consciência crítica de Freire (2011) apresentadas em seu livro *Educação e Mudança* para subsidiar o que entenderemos por atitude reflexiva no contexto do futuro professor de matemática. Freire (2011) explicita dez características que retratam a consciência crítica.

1. Anseio de profundidade de análise de problemas. Não se satisfaz com as aparências. Pode-se reconhecer desprovida de meios para a análise do problema.
2. Reconhece que a realidade é mutável.
3. Substitui situações ou explicações mágicas por princípios autênticos de causalidade.
4. Procura verificar ou testar descobertas. Está sempre disposta às revisões.
5. Ao se deparar com um fato, faz o possível para se livrar de preconceitos. Não somente na captação, mas também na análise e na resposta.
6. Repele posições quietistas. É intensamente inquieta. Torna-se mais crítica quanto mais reconhece em sua quietude a inquietude e vice-versa. Sabe que é na medida que é e não pelo que parece. O essencial para parecer algo é ser algo; é a base da autenticidade.
7. Repele toda a transferência de responsabilidade e de autoridade e aceita a delegação das mesmas.
8. É indagadora, investiga, força, choca.
9. Ama o diálogo, nutre-se dele.

10. Face ao novo, não repele o velho por ser velho, nem aceita o novo por ser novo, mas aceita-os na medida em que são válidos (FREIRE, 2011, p. 40-41).

De acordo com Freire (2011, p. 38) “o homem é consciente e, na medida em que conhece, tende a se comprometer com a própria realidade”. Desse modo, considerando e baseando-se nas características da consciência crítica apontadas por Freire (2011) reconheceremos que um futuro professor de matemática demonstra uma consciência crítica, se evidenciar atitudes reflexivas sobre seus próprios conhecimentos no sentido de buscar promover sua própria aprendizagem matemática de modo autônomo. Revelações sobre suas concepções e ações nos proporcionarão indícios para realizar tal compreensão.

Diante disso, para essa pesquisa levaremos em conta as seguintes ações para identificar manifestações de atitudes reflexivas:

- compreende que por meio da resolução de um problema se abre caminho para novas perguntas;
- possui ideia clara do que lhe parece relevante aprender para exercer sua profissão;
- preocupa-se em compreender os porquês matemáticos;
- procura estudar por conta própria, não espera que algum professor ou instituição o instigue a fazer isso;
- reconhece nos aspectos históricos envolvendo a matemática uma forma para abrir um diálogo com seu futuro aprendiz.

2.5 CARACTERIZAÇÃO DE CONCEPÇÕES CONFORME THOMPSON (1997)

A formação de um professor de matemática pode ser considerada complexa e envolve múltiplos fatores. A começar pelas próprias concepções -que segundo Thompson (1997) consiste em um conjunto de crenças, visões e preferências - de aprendizagem, de ensino, de visão da matemática, além do entorno social no qual o sujeito está inserido. De acordo com essa autora:

[...] crenças, visões, e preferências dos professores sobre a matemática e seu ensino, desconsiderando-se o fato de serem elas conscientes ou não, desempenham, ainda que sutilmente, um significativo papel na formação dos padrões característicos do comportamento docente dos professores (THOMPSON, 1997, p. 40).

Thompson (1997) conduziu uma pesquisa por meio de estudo de caso com três professoras de matemática que trabalhavam na área da Educação Básica, denominadas pela própria pesquisadora por Jeanne, Kay e Lynn que além de tempo de serviço diferentes, cada uma atuava em salas de aula distintas com demandas particulares.

Jeanne ensinava matemática na “junior high school” (Ensino Fundamental II) por dez anos consecutivos e também fora coordenadora na “middle school” (Ensino Médio). Kay tinha experiência de cinco anos e era responsável pelos componentes matemáticos de um programa para estudantes 'superdotados' de sua escola. Já Lynn ensinava há três anos e meio na “junior high school” e também fora coordenadora de matemática “middle school”.

Os resultados da pesquisa de Thompson (1997) podem ser interpretados à luz das considerações de Ernest (1989), o qual elencou três filosofias que apareceram em decorrência da observação do ensino de matemática, bem como na filosofia de matemática e de ciência. Em primeiro lugar, há a visão instrumentalista de que a matemática é uma acumulação de fatos, regras e habilidades a serem utilizadas na efetivação de um fim externo. Assim, a matemática é um conjunto de regras independentes, entretanto utilitária. Em segundo lugar, existe a visão platônica da matemática como um corpo estático, mas unificado de conhecimentos corretos. Matemática é descoberta, e não construção. Em terceiro lugar, há a resolução de problemas, visão da matemática como um campo dinâmico, em constante expansão pela construção humana e pela invenção, um produto cultural. Matemática é um processo de inquérito a vir conhecer, e não um produto acabado, por seus resultados permanecerem em aberto para revisões.

Ainda conforme Ernest (1989) três elementos fundamentais estão associados diretamente à prática do ensino de matemática que determinam a autonomia do professor, são os seguintes: os esquemas mentais que o professor possui dos conteúdos de matemática, particularmente o sistema de crenças sobre a matemática e o seu processo de ensino e de aprendizagem, as oportunidades e as

restrições que se apresentam no contexto social da situação de ensino, e o nível de processos de pensamento e reflexão dos professores.

Assim, de acordo com uma análise comparativa entre as professoras voluntárias da pesquisa, Thompson (1997) identificou diferenças nos elementos das concepções das professoras. Segundo a pesquisadora:

Jeanne, por exemplo, identificou a matemática, principalmente como um conteúdo coerente, consistindo de tópicos logicamente interrelacionados e, de acordo com isto enfatizou o significado de conceitos e a lógica dos procedimentos matemáticos. Kay considerou a matemática principalmente como um conteúdo desafiador, cujos processos essenciais são a descoberta e a verificação. Embora Lynn expressasse pontos de vista relativamente contraditórios, a maioria de suas observações sugeriram uma forma de se conceber a matemática como um conhecimento de natureza essencialmente prescritivo e determinístico (THOMPSON, 1997, p. 32).

Nesse sentido, Thompson (1997, p. 14) declara que a falha de reconhecer “o papel que as concepções dos professores podem exercer na determinação de seu comportamento pode, provavelmente, resultar em esforços mal direcionados para melhorar a qualidade do ensino de matemática nas escolas”. Sendo assim, seria coerente que mudanças no ensino de matemática não ocorressem desconsiderando as crenças já arraigadas pelos professores.

Desse modo, retomando algumas considerações realizadas, conforme Dreyfus (1991), os dois processos fundamentais para se construir e gerenciar o pensamento matemático avançado é a representação e a abstração matemática. Ambos requerem muitos outros processos de pensamento que ocorrem simultaneamente.

Os processos de representação associados ao pensamento matemático avançado, por exemplo, analisar, classificar, definir, verificar, reconhecer e manipular símbolos se aproximam de uma visão instrumentalista e em certa medida até prescritiva da matemática, no sentido de Thompson (1997). Pois, dessa forma, a mesma é vista como sendo a constituição de um corpo organizado de conhecimentos lógicos em que os símbolos e procedimentos auxiliam na explicação e no entendimento de ideias presentes no mundo físico, evitando contradições e ambiguidades. Nesse caso, a certeza e a previsibilidade são tomadas como características inerentes às atividades matemáticas. Mas, segundo Resnick (1987), a incerteza e a desordem são elementos implícitos que conduzem ao

desenvolvimento de um pensamento matemático avançado. Sendo assim, a visão de que a matemática é uma coleção de regras, propriedades e procedimentos que levam a resolução de alguma situação proposta provoca a sensação de automatização, em que não se estabelece relações entre os conceitos, tampouco há compreensão do significado entre os mesmos, trazendo uma impressão de inflexibilidade do conhecimento matemático. Nesta perspectiva, a Matemática é vista como uma ciência desinteressante e imutável, oferecendo poucas oportunidades para o desenvolvimento de um trabalho criativo, conforme algumas crenças professadas por Jeanne e Lynn, ambas voluntárias na pesquisa de Thompson (1997).

Nesse sentido, apenas os processos de representação não são suficientes para se consolidar um pensamento matemático avançado, segundo Dreyfus (1991) e Resnick (1987), mas por outro lado, são por meio desses que se caminha nessa direção. Entendemos que a abertura para o diálogo e a autonomia à luz de Freire (2004) para se estudar matemática são propiciados pelos processos que conduzem a abstração matemática.

As capacidades de generalizar, formalizar e sintetizar requerem uma visão dinâmica da matemática, no sentido Thompson (1997), possibilitando sensação de entusiasmo. Essa pode ser provocada pela percepção da descoberta e compreensão de significados entre as relações que podem ser estabelecidas por meio dos conhecimentos matemáticos, oportunizando e ampliando atividades mentais de alto nível.

A visão ativa e dinâmica de matemática, revelada por Kay, voluntária na pesquisa de Thompson (1997), permite “enxergá-la” como uma ferramenta indispensável para a ciência e outras atividades cotidianas, tendo em vista suas inúmeras aplicabilidades. Por exemplo, contribuir na organização de uma prática comerciária, como a que se destacará na questão quatro da Parte III da Proposta de Avaliação Reflexiva relacionada à venda de três qualidades diferentes de café.

Conforme o que foi exposto nessa sessão, nos inspiraremos em Thompson (1997) para traçar um possível perfil de visão matemática dos participantes dessa pesquisa. Essas análises, provavelmente, emergirão de forma mais efetiva por meio das respostas obtidas mediante a aplicação da Parte I da Proposta de Avaliação Reflexiva.

3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

O presente capítulo tem por finalidade apresentar conceitos e propriedades matemáticas envolvendo Sistemas de Equações Lineares. Aqui trataremos de definições, alguns métodos de resolução e processos de representação gráfica do conjunto solução de um Sistema de Equações Lineares.

3.1 DEFINIÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Antes de definirmos o que é considerado matematicamente um Sistema de Equações Lineares, há necessidade de explicitar o que se entende por uma equação linear.

Uma *equação linear* nas n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n é uma equação que pode ser escrita na forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, onde os coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n são constantes, mas nem todos nulos e o termo independente b é outra constante. No caso específico em que $b = 0$, a equação seguinte: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ é denominada de equação *linear homogênea*.

De acordo com Poole (2004) a solução de uma equação linear da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ é um vetor $[s_1, s_2, \dots, s_n]$, cujas coordenadas satisfazem à equação quando se substitui $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$.

As relações matemáticas $x + 4y = 5, y = \frac{1}{3}x - 2z + 1$ e $x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ são exemplos de equações lineares.

É relevante ressaltar que uma equação linear não envolve quaisquer produtos ou raízes de variáveis. “Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais” (ANTON; RORRES, 2001, p. 28). Portanto, as variáveis aparecem somente na potência de grau um e multiplicadas apenas por constantes.

Um *Sistema de Equações Lineares* é definido como sendo uma coleção finita de equações lineares, que pode simplesmente ser denominado de sistema linear. De acordo com Anton e Busby (2006, p. 59) “as variáveis de um sistema linear são denominadas incógnitas”. Conforme Poole (2004) o conjunto solução de um sistema de equações lineares é um conjunto de todas as soluções do sistema. Neste trabalho vamos nos referir ao processo de encontrar o conjunto solução de um sistema de equações lineares como “resolver o sistema”.

Um sistema de equações lineares com coeficientes reais tem nenhuma, uma ou infinitas soluções, não havendo outras possibilidades.

De acordo com o número de soluções, um sistema de equações lineares pode ser classificado como sistema possível determinado - SPD -(uma única solução), sistema possível indeterminado - SPI - (apresenta infinitas soluções) e sistema impossível - SI - (nenhuma solução).

Conforme Anton e Busby (2006), interseções de retas em \mathbb{R}^2 dão origem a sistemas lineares do tipo 2×2 .

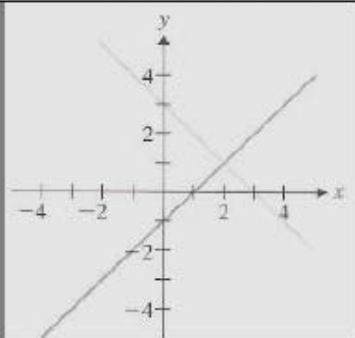
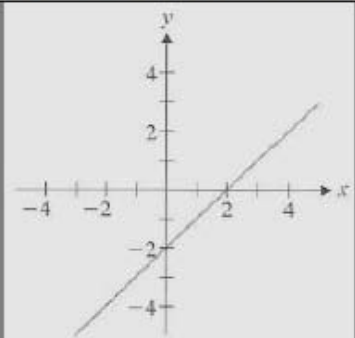
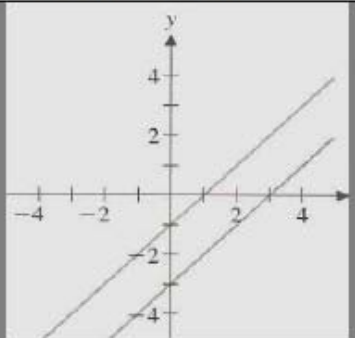
Por exemplo, considere os seguintes sistemas lineares²⁶:

$$(a) \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}, (b) \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}, (c) \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Resolvendo cada um encontramos as seguintes soluções: (a) $S = (2,1)$, considerado sistema possível determinado; (b) sistema possível indeterminado, isto é, possui infinitas soluções, pois a segunda equação desse sistema é exatamente o dobro da primeira; e finalmente (c) é considerado um sistema impossível, porque dois números quaisquer designados por x e y não admitem uma diferença com dois resultados diferentes simultaneamente, no caso 1 e 3. Dito isso, os gráficos destes sistemas de equações são retas no plano xy , portanto de acordo com cada tipo de solução apresentada para esses sistemas haverá uma imagem gráfica diferente correspondente. Sendo assim, existem três possibilidades, as quais são apresentadas a seguir:

²⁶ Os sistemas (a), (b) e (c) podem ser encontrados em (POOLE, 2004, p. 58).

Quadro 5 – Interpretação geométrica de Sistemas de Equações Lineares 2x2

Interpretação geométrica de Sistemas de Equações Lineares 2x2		
		
(A) Figura 1 – Retas concorrentes (POOLE, 2004, p.58)	(B) Figura 2 – Retas coincidentes (POOLE, 2004, p.58)	(C) Figura 3 – Retas paralelas (POOLE, 2004, p.58)
As retas se intersectam exatamente em um único ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma única solução.	As retas são coincidentes, caso em que há uma infinidade de pontos de interseção (todos os pontos da reta comum) e, conseqüentemente, existe uma infinidade de soluções.	As retas são paralelas e distintas, caso em que não existe interseção e, conseqüentemente não existe solução.

Considere agora de forma geral o seguinte sistema, formado pelas equações (1), (2) e (3):

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (1)$$

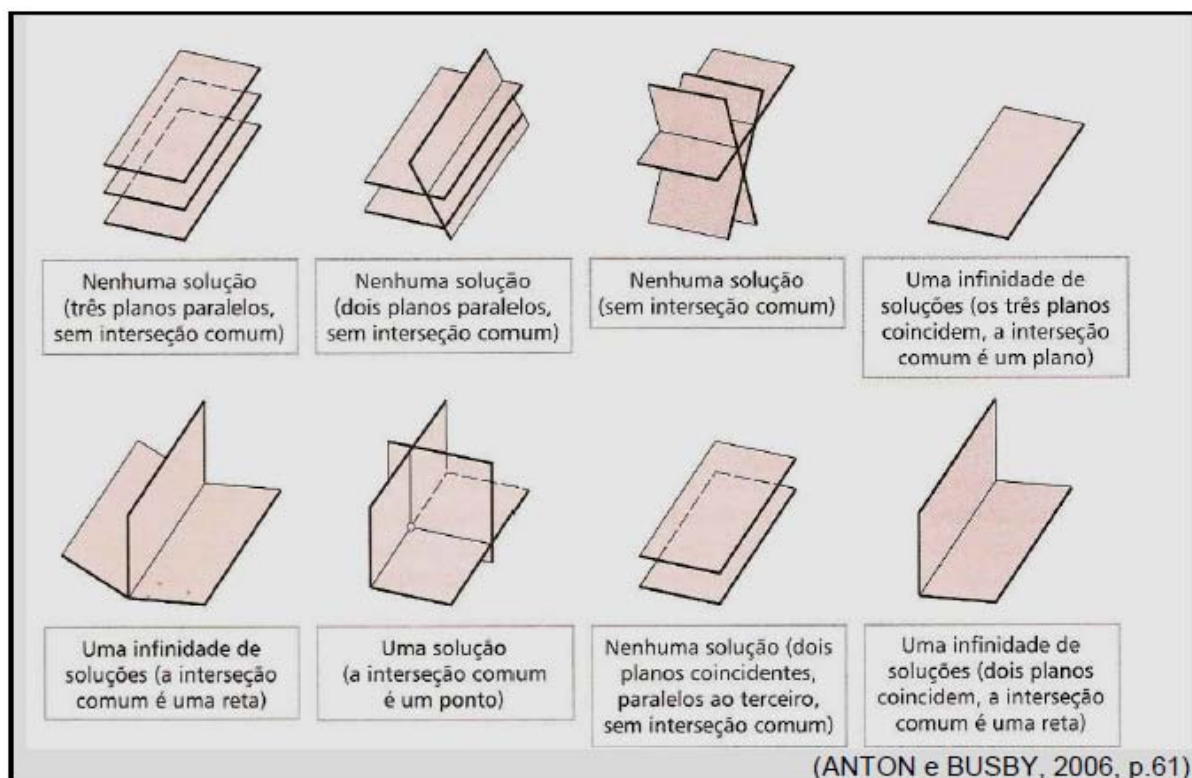
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (3)$$

Segundo Anton e Busby (2006), um sistema de equações lineares de três equações e três incógnitas, apresenta como gráfico da equação correspondente um plano, de modo que as soluções do sistema, se existir, correspondem a pontos em que os três planos se intersectam. Mais uma vez, constata-se que só há três possibilidades, mas oito posições distintas em que os planos podem ser organizados: nenhuma solução, uma solução ou uma infinidade de soluções.

A figura que se segue apresenta uma visualização geométrica das oito posições possíveis para a formação de um plano caracterizado por um sistema de equações lineares 3x3.

Figura 4 – Interpretação Geométrica para Sistemas de Equações Lineares 3x3



3.2 MÉTODOS ALGÉBRICOS RESOLUTIVOS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Dentre os métodos de resolução mais utilizados para Sistemas de Equações Lineares destacaremos o método de substituição, o método de adição e o método de comparação para tratarmos da solução de um Sistema de Equações Lineares 2x2. Já para abordarmos Sistemas de Equações Lineares 3x3, utilizaremos os métodos de escalonamento e Regra de Cramer. A intenção aqui é de se apresentar pelo menos uma ideia geral de cada um dos métodos já citados.

3.2.1 Métodos Algébricos Resolutivos de Sistemas de Equações Lineares 2x2

Os métodos de substituição, adição e comparação são explorados de forma mais acentuada no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, e também em alguns momentos no Ensino Médio, porque exigem cálculos elementares.

O método de substituição consiste basicamente em se escrever uma incógnita em função da outra, e a partir disso realizam-se algumas operações

algébricas elementares utilizando conceitos e propriedades relacionadas às equações de primeiro grau.

Já o método de adição exige que o sistema seja organizado de modo a permitir a realização do cancelamento de uma das incógnitas utilizando propriedades elementares. Convém lembrar que ao adicionar ou subtrair membro a membro duas igualdades, obtemos uma nova igualdade.

E finalmente, o método de comparação demanda a escolha de uma das incógnitas presentes no sistema e, a partir disso, deve escrevê-la em função da outra. Esse procedimento é feito para ambas equações que compõem tal sistema.

3.2.2 Métodos Algébricos Resolutivos de Sistemas de Equações Lineares $n \times m$

Existem diferentes métodos de resolução para sistemas de equações lineares de ordem três. Nesta seção, vamos apresentar o de escalonamento e a Regra de Cramer. Cada um desses tem um motivo diferente para figurar nessa pesquisa. O método do escalonamento é recomendado pela OCEM (2006), pois demanda operações elementares. A Regra de Cramer é apresentada e utilizada, em alguns momentos, de forma equivocada por alguns autores de livros didáticos, especialmente, aqueles voltados para o Ensino Médio.

3.2.2.1 Escalonamento de um sistema de equações lineares 3×3

De acordo com Poole (2004, p. 65) “a palavra escalonar vem da palavra latina *scala*, que significa ‘escada’ ou ‘degraus’”. Assim, escalonar um sistema de equações lineares significa obtê-lo graficamente na forma de uma escada em decorrência da eliminação das incógnitas que vai se realizando ao longo da solução.

Conforme Lima (2007, p. 85) “o escalonamento é um processo simples e extremamente eficiente para resolver um sistema linear”.

Para escalonar um sistema linear devemos levar em consideração três propriedades, conforme Paiva (1995):

- (i) permutando entre si duas ou mais equações de um sistema linear S , obtém-se um novo sistema S' equivalente a S ;

- (ii) multiplicando (ou dividindo) uma equação de um sistema linear S por uma constante k, com $k \neq 0$, obtém-se um novo sistema S' equivalente a S;
- (iii) substituindo uma equação de um sistema linear S pela soma dela com outra equação desse sistema, obtém-se um novo sistema S' equivalente a S;

Vamos escalonar o sistema A²⁷:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 & (1) \\ 2x + y + z = 4 & (2) \\ 3x + 3y + z = 10 & (3); \end{cases}$$

Inicialmente, vamos conseguir os zeros necessários nos coeficientes da incógnita x. Para isso:

- I. substituímos a equação (2) pela soma dela com a equação (1) multiplicada por - 2; e
- II. substituímos a equação (3) pela soma dela com a equação (I) multiplicada por

Figura 5 – Escalonamento de um sistema de equações lineares 3x3 (I)

The diagram shows the transformation of a system of three linear equations in three variables. On the left, the original system is:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 10 \end{cases}$$

Arrows indicate the operations performed to reach the equivalent system on the right. An arrow labeled 'x' points from the coefficient of x in equation (1) to the coefficient of x in equation (2), with a '-2' in a circle. Another arrow labeled 'x' points from the coefficient of x in equation (1) to the coefficient of x in equation (3), with a '-3' in a circle. Plus signs are placed at the end of the arrows to indicate addition. The resulting system is:

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x - 3y - 8z = -11 \end{cases}$$

(PAIVA, 1995, p.123)

- III. No sistema anterior, substituímos a última equação pela soma dela com a segunda multiplicada por - 1, e obtivemos:

²⁷ Exercício extraído de (PAIVA, 1995, p. 123-124)

Figura 6 – Escalonamento de um sistema de equações lineares 3x3 (II)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x - 3y - 8z = -11 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{\mathbf{x} \\ +}} \left(\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x + 0y - 3z = -1 \end{array} \right)$$

(PAIVA, 1995, p.124)

Dessa forma, chegamos a um sistema escalonado equivalente ao sistema A.

Devemos considerar algumas observações relevantes para a compreensão do escalonamento de um sistema de equações lineares 3x3, as quais são:

- (i) se durante o escalonamento do sistema anterior ocorresse uma equação da forma $0x + 0y + 0z = b$, com $b \neq 0$, então o sistema seria classificado como impossível, pois tal equação não é satisfeita para nenhum terno (x, y, z) ;
- (ii) se durante o escalonamento do sistema anterior ocorresse uma equação da forma $0x + 0y + 0z = 0$, então *eliminaríamos* essa equação e o novo sistema assim obtido também seria equivalente ao sistema original.

Além disso, conforme Poole (2004), quando uma redução de linhas é aplicada à matriz completa de um sistema de equações lineares, construímos um sistema equivalente que pode ser resolvido por substituição de trás para frente. O processo inteiro é conhecido como método de *eliminação de Gauss*, ou método de eliminação gaussiana.

O método de eliminação de Gauss, leva em consideração os seguintes procedimentos:

- I. escrever a matriz completa do sistema de equações lineares;
- II. usar operações elementares com as linhas para reduzir a matriz completa à forma escalonada por linhas; e
- III. utilizando substituição de trás para frente, resolve-se o sistema equivalente que corresponde à matriz linha-reduzida.

Ainda aqui destacamos que um sistema de equações lineares pode ter uma interpretação matricial no sentido expresso por Lima (1993).

$$\text{Considere de forma referencial o sistema (S)} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

De acordo com Lima (1993) o sistema (S) põe em destaque as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Fazendo uso da multiplicação de matrizes, esse sistema pode ser escrito sob a forma: $A \cdot X = D$. Quanto à multiplicação de matrizes, Lima (1993) explicita que:

o produto de uma linha, digamos $[a_1, b_1, c_1]$, por uma coluna como X é, por definição, igual a $a_1x + b_1y + c_1z$. O produto de uma matriz A , de m linhas e n colunas, por uma matriz B , de n linhas e p colunas, é a matriz AB , de m linhas e p colunas, cujo elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna é o produto da i -ésima linha de A pela j -ésima coluna de B (LIMA, 1993, p. 11).

3.2.2.2 Regra de Cramer

A Regra de Cramer é um método para a resolução de Sistemas de Equações Lineares utilizado especialmente em sistemas 3×3 , mas o seu uso é aconselhável apenas no caso do sistema ser considerado determinado, isto é, situação em que apresenta uma única solução. Outro fator a ser considerado é que quanto maior o sistema, maior o custo operacional desse processo, e ainda tem mais: a Regra de Cramer só se aplica a sistemas que dão origem a matrizes quadradas.

Lima (2007), em seu livro “Coordenadas no Espaço”, explicita que:

a Regra de Cramer é um dos métodos mais tradicionais para resolver Sistemas de Equações Lineares. Ela apresenta a vantagem de fornecer explicitamente os valores das incógnitas como quocientes de dois determinantes. Mas, por outro lado, possui dois inconvenientes em comparação com o método do escalonamento. O primeiro é que ela só se aplica quando o determinante da matriz do sistema é diferente de zero, ou seja, quando o sistema possui uma única solução. O segundo inconveniente é o custo operacional: dá bem mais trabalho calcular quatro determinantes do que escalar uma única matriz (LIMA, 2007, p. 109).

Dorier et al (2002) consideram que antes de se começar a ensinar Álgebra Linear é importante que os estudantes adquiram um bom domínio quanto a resolução de Sistemas de Equações Lineares, mas advertem que os determinantes, que historicamente dominavam o assunto a partir de 1750 até o início do século XX, devem ser evitados, pois o seu tecnicismo tende a mascarar ideias básicas.

Quando Dorier et al (2002) afirmam que o tecnicismo da Regra de Cramer mascara ideias básicas, pode-se inferir que se referem a seguinte situação apresenta por Lima (2007), pois conforme esse autor:

[...] a Regra de Cramer só se aplica quando a matriz dos coeficientes do sistema tem determinante diferente de zero. Tentar utilizá-la fora desse caso pode conduzir a erros. Um desses erros é o seguinte: quando os quatro determinantes que aparecem na regra são todos iguais a zero, poder-se-ia pensar que ela fornece $x = 0/0$, $y = 0/0$, $z = 0/0$ e concluir que o sistema é indeterminado, isto é, possui infinitas soluções. Mas, não é bem assim. Suponhamos, por exemplo, que os três vetores-coluna a , b , c sejam múltiplos um do outro, mas que o vetor d não seja múltiplo deles. Então os 4 determinantes são nulos mas não existem números x , y , z tais que $x.a + y.b + z.c = d$, isto é, o sistema não tem solução (LIMA, 2007, p.110).

Para detalhar, Lima ainda apresenta um exemplo que possibilita uma compreensão efetiva, e esse mesmo autor continua da seguinte forma:

$$2x + 3y + z = 1$$

$$4x + 6y + 2z = 5$$

Consideremos o sistema: $6x + 9y + 3z = 2$.

Pondo $a = (2, 4, 6)$, $b = (3, 6, 9)$, $c = (1, 2, 3)$ $d = (1, 5, 2)$, vemos que $a = 2c$ e $b = 3c$, portanto $\det[a, b, c] = \det[d, b, c] = \det[a, d, c] = \det[a, b, d] = 0$. Mas, d não é múltiplo de c , logo não é combinação linear de a , b , c , portanto, não existem números x , y , z tais que $d = x.a + y.b + z.c$. Noutras palavras, o sistema não tem solução, embora a regra de Cramer (usada incorretamente, pois foi deduzida mediante da

hipótese de que $\det[a,b,c] \neq 0$) pudesse levar às ‘expressões indeterminadas’ $x = 0/0$, $y = 0/0$, $z = 0/0$ (LIMA, 2007, p. 111).

Ainda, conforme Ferreira e Gomes (1996):

A regra de Cramer para resolver sistemas lineares só pode ser aplicada no caso em que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é não nulo: essa situação corresponde ao caso em que os três planos se intersectam num ponto e o sistema tem solução única. Entretanto, vários livros afirmam erroneamente que um sistema que tem nulos todos os determinantes da regra de Cramer é indeterminado (FERREIRA; GOMES, 1996, p. 14).

3.3 DISCUSSÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Discutir um sistema de equações lineares significa compreender se este apresenta uma, infinitas ou nenhuma solução. Tal discussão é realizada com base na solução que o sistema apresenta. Trataremos essa discussão por meio da técnica do escalonamento de sistemas, porque é possível de realizá-la mesmo com operações matemáticas elementares.

As *Orientações Curriculares do Ensino Médio* (OCEM) publicadas pelo MEC em 2006, afirmam que:

a resolução de sistemas 2×3 ou 3×3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução) (OCEM, 2006, p. 78).

Apresentaremos, a seguir, um exemplo de cada tipo de sistema acompanhado de uma visão geométrica, a saber: possível determinado, possível indeterminado e impossível.

3.3.1 Sistema Possível Determinado (SPD)

Um sistema de equações lineares é considerado possível e determinado se apresentar uma única solução. De acordo com Anton e Busby (2006, p. 61), “geometricamente, isso significa que as retas representadas pelas equações do sistema intersectam em um único ponto”.

Conforme Lima et al (2006, p. 116), um sistema é considerado determinado do ponto de vista algébrico “[...] se, e somente se, os vetores-linha [...] da matriz do sistema são linearmente independentes”. Segundo os autores:

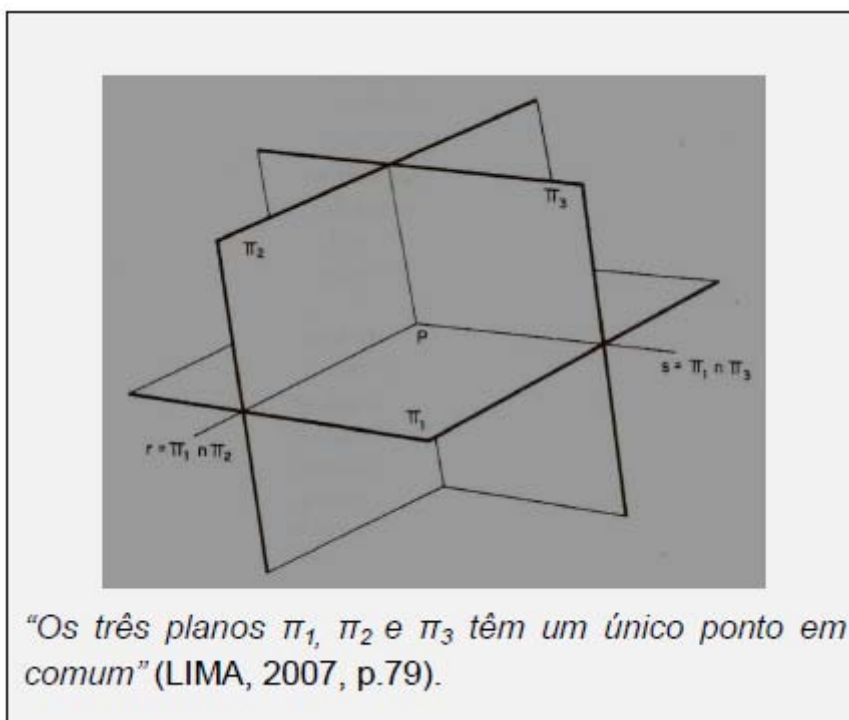
$$x+2y-3z = 1$$

No sistema: $3x + y + z = 2$, os vetores-linha $\ell_1 = (1,2,-3)$, $\ell_2 = (3,1,1)$ e $8x + y + 6z = 6$

$\ell_3 = (8,1,6)$ são dois a dois não-colineares. Tem-se $\ell_3 = 3\ell_2 - \ell_1$ de modo que ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são coplanares. Mas, $6 \neq 3 \times 2 - 1$, logo $L_3 \neq 3L_2 - L_1 - L_1$. Portanto, os planos definidos pelas equações acima se intersectam dois a dois segundo três retas paralelas (LIMA et al, 2006, p. 116).

Geometricamente, temos:

Figura 7 – Representação geométrica de SPD 3x3



A seguir, apresentaremos um exemplo de sistema possível determinado utilizando o método do escalonamento como forma de resolução.

$$\text{Considere o sistema } M^{28} \begin{cases} x+y+2z=4 \\ 4x-2y+z=8 \\ 5x-y+2z=10 \end{cases};$$

Desenvolvendo a resolução, chegamos em:

Figura 8 – Sistema Possível e Determinado

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 4x - 2y + z = 8 \\ 5x - y + 2z = 10 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 0x - 6y - 7z = -8 \\ 0x - 6y - 8z = -10 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 2z = 4 \\ 0x - 6y - 7z = -8 \\ 0x + 0y - z = -2 \end{cases}$$

(PAIVA, 1995, p.124)

Portanto, o que resulta no sistema escalonado:

$$\begin{cases} x+y+2z=4(I) \\ -6y-7z=-8(II) \\ -z=-2(III) \end{cases}$$

Como o sistema escalonado possui número de equações igual ao número de incógnitas, temos que sua classificação é SPD (sistema possível determinado).

Resolvendo o sistema, temos:

- (i) da equação (III): $-z = -2 \rightarrow z = 2$;
- (ii) substituindo $z = 2$ na equação (II): $-6y - 7 \cdot 2 = -8 \rightarrow y = -1$; e
- (iii) finalmente substituindo os valores de $y = -1$ e $z = 2$ na equação (I): $x + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4 \rightarrow x = 2$.
- (iv) Concluindo: o sistema M é possível e determinado e apresenta conjunto solução $S = \{(2, -1, 2)\}$.

²⁸ Esse exercício pode ser encontrado em (PAIVA, 1995, p. 124).

3.3.2 Sistema Possível e Indeterminado (SPI)

Um sistema de equações lineares é definido como sistema possível indeterminado quando apresenta uma infinidade de soluções.

O sistema é indeterminado quando uma (ou duas) dessas informações é (ou são) consequência(s) das demais. Por exemplo, se nos propusermos a determinar x , y , z sabendo que $2x-4y+6z=8$, $x-2y+3z=4$ e $3x-6y+9z=12$, teremos aí um sistema indeterminado, pois na realidade é-nos dada apenas uma informação sobre esses números, a saber, que $x-2y+3z=4$. As outras duas afirmações resultam desta (LIMA, 1993, p. 10).

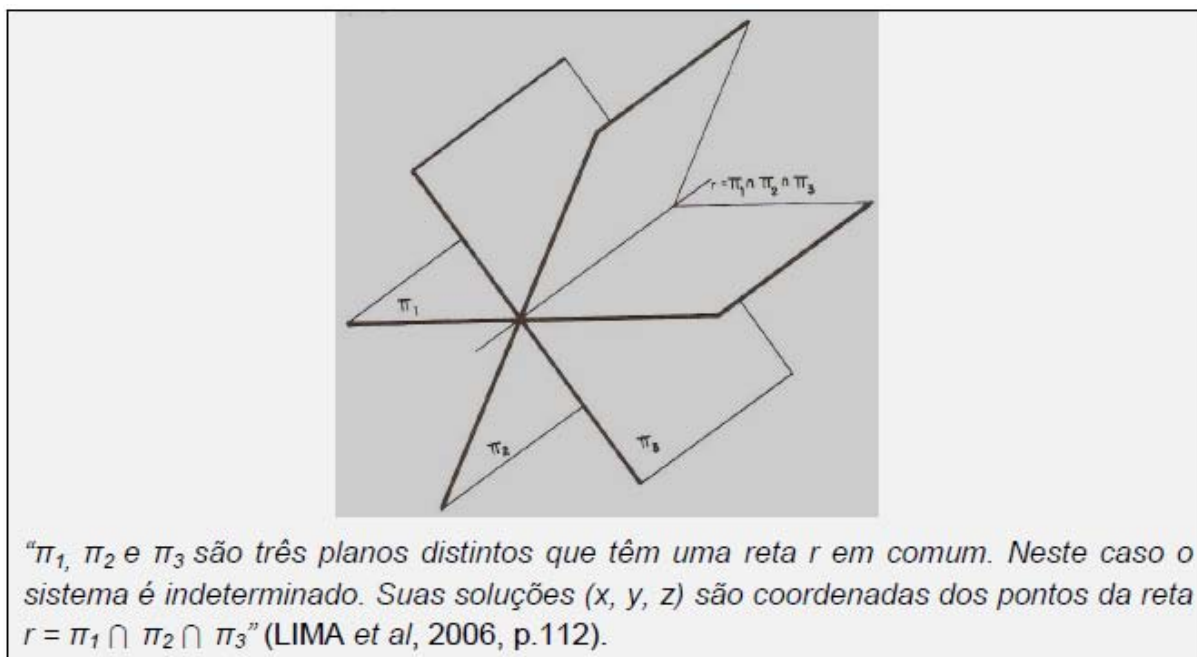
Para Anton e Busby (2006, p. 62), o modo mais conveniente para descrever o conjunto-solução nesse caso é expressar o sistema de forma paramétrica. Ainda segundo esses autores, “geometricamente, isso significa que as retas correspondentes às duas equações do sistema original são coincidentes”.

Lima (1993, p. 10) complementa que:

em cursos elementares, os sistemas indeterminados são deixados de lado sem maior atenção, mas essa atitude não é correta. A indeterminação significa que o problema expresso pelo sistema (S) possui infinitas soluções, cabendo-nos em cada caso escolher a que melhor se adapta as nossas conveniências.

Geometricamente, podemos ilustrar uma situação que ocorre sistema possível indeterminado por meio da seguinte figura:

Figura 9 – Representação geométrica de SPI 3x3



Lima (2007) traz um exemplo que possibilita compreender algebricamente uma situação envolvendo sistema possível indeterminado, conforme esse autor:

$$4x+2y - 6z = 8$$

No sistema: $6x+3y-9z = 12$, tem-se $L_1 = (4,2, - 6, 8)$, $L_2 = (6, 3, - 9,12)$
 $2x+y - 3z = 4$

e $L_3 = (2, 1, - 3,4)$. Evidentemente, valem $L_2 = (3/2)$. L_1 e $L_3 = (1/2)$. L_1 . Portanto, as três equações do sistema determinam o mesmo plano n , que pode também ser definido pela equação $y = 3z - 2x + 4$. Assim, as soluções do sistema são todos os pontos de \mathbb{R}^3 que têm a forma $(x, 3z - 2x + 4, z)$, onde x e z são escolhidos livremente (LIMA, 2007, p. 72).

A seguir, apresentaremos um exemplo de sistema possível indeterminado utilizando o método do escalonamento como forma de resolução.

$$\text{Considere o sistema N}^{29}: \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1(\text{I}) \\ 2x + 3y + 3z = 0(\text{II}) \\ 5x + 7y + 8z = 1(\text{III}) \end{cases}$$

²⁹ Esse exercício pode ser encontrado em (PAIVA, 1995, p. 125).

Para resolver o sistema N, em síntese, adotaremos os seguintes procedimentos:

- (i) substituiremos a equação (II) pela soma dessa multiplicada por 3 com a equação (I) multiplicada por -2;
- (ii) substituiremos a equação (III) pela soma dessa multiplicada por 3 com a equação (I) multiplicada por -5; isso decorre que:

Figura 10 – Sistema Possível e Indeterminado

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ 5x + 7y + 8z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 0x + y - z = -2 \\ 0x + y - z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 0x + y - z = -2 \\ 0x + 0y + 0z = 0. \end{cases}$$

(PAIVA, 1995, p.124)

Continuando, elimina-se a última equação, e chega-se ao sistema

escalonado equivalente ao sistema original: $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ y - z = -2 \end{cases}$. Como esse sistema escalonado possui um número de equações menor que o número de incógnitas, sua classificação é SPI, isto é, sistema possível indeterminado.

(iii) Resolvendo o sistema N em função da variável livre z , temos

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1(I) \\ y - z = -2 \Rightarrow y = z - 2(II) \end{cases} \text{ Substituindo (II) em (I), decorre:}$$

$$3x + 4 \cdot (z - 2) + 5z = 1$$

$$3x + 4z - 8 + 5z = 1$$

$$3x = 1 + 8 - 4z - 5z$$

$$3x = 9 - 9z$$

$$\therefore x = 3 - 3z.$$

(iv) Logo, o conjunto solução é $S = \{(3 - 3z, z - 2, z), z \in \mathbb{R}\}$.

3.3.3 Sistema Impossível (SI)

Um sistema de equações lineares é dito impossível quando não possui solução.

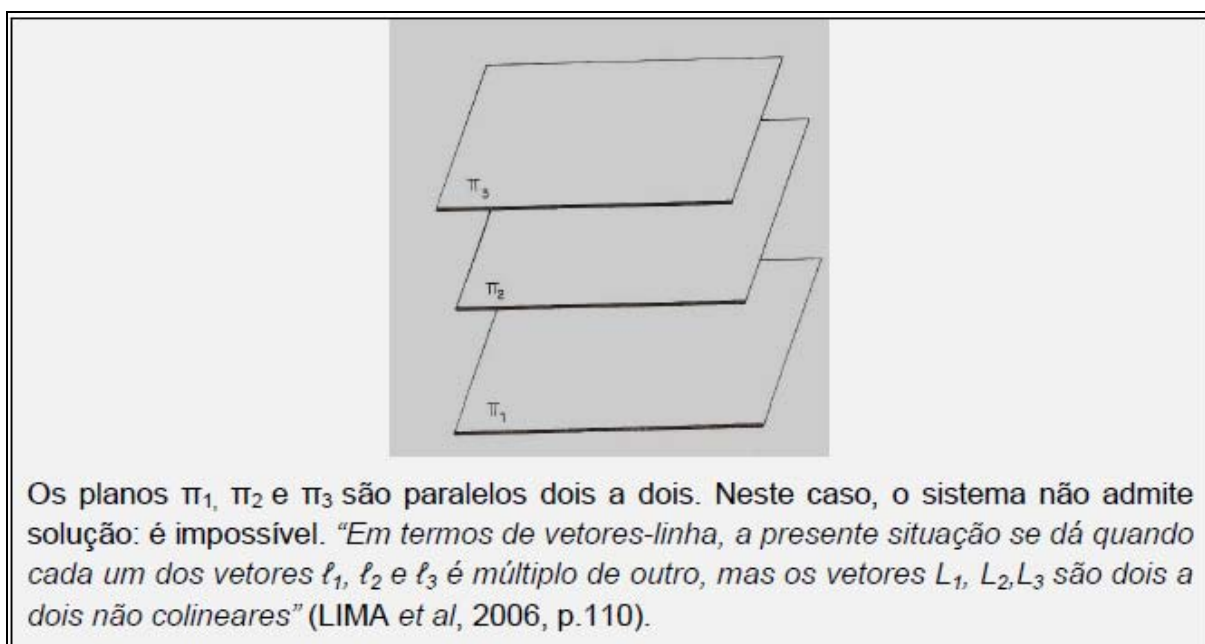
O sistema impossível ocorre quando as informações que nos são fornecidas para calcular x , y e z são incompatíveis. Por exemplo, se uma das equações do sistema é $x - 2y + 3z = 4$, outra equação não pode ter a forma $2x - 4y + 6z = 7$. (Multiplicando a primeira por 2 e subtraindo a segunda, chegaríamos ao absurdo $0 = 1$.) (LIMA, 1993, p. 10).

Anton e Busby (2006, p. 61) afirmam que geometricamente “significa que as retas correspondentes às equações do sistema original são paralelas e distintas”.

Em síntese, geometricamente, um sistema 3×3 é considerado impossível quando apresenta: três planos paralelos sem interseção comum, dois planos paralelos intersectados por outro, ou os três planos que intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas uma às outras.

Vamos exemplificar o sistema impossível utilizando o caso em que três planos estão dispostos paralelamente, portanto sem interseção.

Figura 11 – Representação geométrica de SI 3x3



A seguir, apresentaremos um exemplo de sistema impossível utilizando o método do escalonamento como forma de resolução.

Considere o sistema P^{30} :

$$\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ x+y+2z=1 \\ 4x+5y+5z=6 \end{cases}$$

O escalonamento fica facilitado quando o coeficiente da primeira incógnita da equação, neste caso, x , é igual a 1 (um). Como isso não acontece para esse sistema, mas o coeficiente de x da segunda equação é 1 (um), podemos realizar a permutação das duas primeiras equações, obtendo um

novo sistema, equivalente ao original, isto é:

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+3y+z=2 \\ 4x+5y+5z=6 \end{cases}$$

Escalonando-o, temos:

³⁰ Esse exercício pode ser encontrado em (PAIVA, 1995, p.124 –125).

Figura 12 – Sistema Impossível

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 4x + 5y + 5z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 0x + y - 3z = 0 \\ 0x + y + 0z = 2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 0x + y - 3z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 2 \end{cases}$$

(PAIVA, 1995, p.125)

Note que não conseguimos um sistema escalonado, pois os coeficientes da última equação são todos nulos. Entretanto, a tentativa do escalonamento nos mostrou que o sistema é *impossível*, já que a última equação não é satisfeita para nenhum terno (x, y, z) . Portanto, conclui-se que a classificação do sistema é impossível (SI), logo $S = \emptyset$.

A seguir, apresentaremos o capítulo IV no qual descreveremos os procedimentos metodológicos que orientaram a condução dessa pesquisa.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O capítulo IV tem por finalidade expor a forma pela qual essa pesquisa foi conduzida quanto aos procedimentos metodológicos. Apresentaremos a natureza e a caracterização dos sujeitos da pesquisa e as justificativas pela escolha dos mesmos, as ações realizadas para o desenvolvimento dessa pesquisa, a descrição do modo de como ocorreu a coleta de dados, e ainda algumas considerações segundo as quais se farão as análises dos dados obtidos.

A presente pesquisa é de natureza qualitativa e obedece às características da investigação qualitativa tratadas no livro intitulado “*Investigação Qualitativa em Educação*” propostas por Bogdan e Biklen (1994), a saber: a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento; os dados coletados são predominantemente descritivos; a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto; o significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial do pesquisador; a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.

Os referidos autores afirmam ainda que nem todos os estudos “patenteiam estas características com igual eloquência”. Dessa forma, sentimo-nos seguras para utilizar essa caracterização proposta por Bogdan e Biklen (1994, p. 47), e a seguir descreveremos os porquês que justificam essa escolha metodológica.

A observação, a descrição, a compreensão e a atribuição de significados são aspectos inerentes à pesquisa qualitativa, sendo assim:

- i. o ambiente natural dessa pesquisa é uma sala de aula do Departamento de Matemática de uma universidade pública norte paranaense. A pesquisadora principal foi a responsável pela coleta direta de dados de alguns estudantes matriculados em um curso de Licenciatura em Matemática nessa sala de aula;
- ii. os dados foram coletados por meio de registros escritos desses estudantes que responderam a Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares, a qual contemplava algumas questões abertas;
- iii. o processo de coleta dos dados foi rigorosamente planejado, respeitado e seguido;

- iv. a Proposta de Avaliação Reflexiva trouxe ainda questões de caráter pessoal, pois entendemos que os fatores individuais podem interferir nas respostas apresentadas. As experiências vivenciadas pelos participantes são alguns dos focos de atenção dessa pesquisa;
- v. o capítulo V traz a construção completa de cada questão da Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares.

4.1 DESCRIÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

A presente pesquisa divide-se em quatro fases distintas, mas que não seguem necessariamente uma ordem cronológica. A seguir especificaremos as ações que foram desenvolvidas para constituí-la.

A primeira fase foi dedicada para se realizar levantamento bibliográfico, leituras e reflexões que subsidiaram a fundamentação teórica.

Já na segunda fase foi desenvolvida a construção da Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares, subdividida em cinco etapas:

- (i) estudo sobre Sistemas de Equações Lineares, conforme apresentação do capítulo III;
- (ii) construção e seleção das questões que integraram a Proposta de Avaliação Reflexiva, para maiores detalhes ver capítulo V;
- (iii) análises e discussões a respeito da construção da Proposta de Avaliação Reflexiva realizadas no grupo de estudo³¹; Especificado mais adiante.
- (iv) refinamento da construção da Proposta de Avaliação Reflexiva a partir das considerações e sugestões levantadas pelo grupo de estudo;
- (v) formatação final e impressão das questões da Proposta de Avaliação Reflexiva sobre Sistemas de Equações Lineares para posterior aplicação.

³¹ Especificado mais adiante.

A terceira fase constituiu-se da aplicação da Proposta de Avaliação Reflexiva, a qual foi realizada em dois encontros de noventa minutos cada um, tendo como participantes estudantes que cursam a 4ª série do Curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual pública norte paranaense localizada no município de Londrina.

Finalmente, a quarta fase foi dedicada à análise dos dados obtidos por meio dos registros escritos em tarefas aplicadas que constituíram a Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares.

A seção seguinte tratará de caracterizações dos sujeitos que compõem essa pesquisa.

4.2 CARACTERIZAÇÕES DOS SUJEITOS DA PESQUISA

Os sujeitos de pesquisa são vinte estudantes³² matriculados regularmente na 4ª série de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual pública norte paranaense localizada no município de Londrina, e de agora em diante os denominaremos apenas de participantes, para efeito de simplificação de escrita.

Para realizarmos essa escolha, tivemos três motivos que nos foram suficientemente convincentes para optarmos por esse grupo de estudantes: (1) fazem parte do público com o qual queremos desenvolver essa pesquisa -formação inicial de professores de matemática; (2) já se espera de estudantes que estão em uma etapa final de formação inicial que tenham desenvolvido um pensamento matemático avançado, além de que estes já tiveram disciplinas ao longo do curso que trataram sobre o conteúdo matemático de nosso interesse; e (3) acessibilidade geográfica, administrativa e pedagógica ao campus universitário para realizarmos a coleta de dados com este grupo de estudantes.

- Motivo (1): estão na fase final do processo inicial de formação, portanto são considerados potenciais futuros professores. Todos os participantes já passaram por uma etapa do estágio

³² A Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares foi aplicada no final de fevereiro e início de março de 2011, período de retorno do ano letivo da universidade escolhida, e ainda próximo ao feriado prolongado de Carnaval. Por isso, nem todos os estudantes desta turma puderam se fazer presentes, o que consideramos uma situação normal. O grupo de estudantes participantes representam aproximadamente 85% da turma.

supervisionado, prática exigida em um curso de licenciatura de matemática, então em certa medida já possuem uma familiaridade com a rotina de uma sala de aula.

- Motivo (2): sendo considerados potenciais futuros professores já se espera que assumam algumas reflexões sobre o exercício da prática docente, mais especificamente que apresentem um pensamento matemático avançado sobre o conteúdo matemático de interesse dessa pesquisa - Sistemas de Equações Lineares, visto que já tiveram contato com este em momentos diferentes ao longo do curso.
- Motivo (3): facilidade de acesso geográfico, administrativo e pedagógico ao campus universitário, e conseqüentemente ao grupo desses estudantes, visto que a orientadora dessa pesquisa é docente desta turma, e esta coincidentemente lecionará neste ano (2011) para tal turma uma disciplina denominada “Prática e Metodologia do Ensino da Matemática II” registrada na ementa sob o código “6 MAT 024”. Entre os objetivos desta disciplina se destacam o de “proporcionar ao estudante uma experiência de investigação sobre sua própria produção” e “desenvolver a capacidade de trabalhar em colaboração e estimular os candidatos a professores a assumir uma perspectiva profissional na sua futura prática como professores”, sendo estes totalmente favoráveis à concepção dessa pesquisa.

Acreditamos que o futuro professor inicia uma conduta de atitude profissional eticamente responsável a partir do instante que se atenta com seriedade para sua própria aprendizagem, refletindo propriamente sobre si em como aprende e como pretende ensinar.

Expostos os motivos para a escolha realizada, enfatizamos que optamos pelos estudantes da 4^a série de um curso de Licenciatura em Matemática,

porque os consideramos praticamente aptos³³ para conduzir uma sala de aula na Educação Básica, caso dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Todos os estudantes que participaram dessa pesquisa concederam-nos o *Termo de Consentimento Livre Esclarecido*, declaração utilizada no meio acadêmico para solicitar a autorização por parte dos participantes para a utilização de dados coletados no trabalho de campo com a finalidade de desenvolver pesquisas, podendo ainda divulgá-los em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que seja garantido o anonimato do participante no relato da mesma.

Dezessete participantes responderam integralmente a Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares, e os outros três responderam parcialmente, por motivo de não comparecimento em um dos dias de aplicação da mesma.

Os participantes dessa pesquisa, quando necessária a sua especificação, serão denominados de agora em diante de: E.1, E.2, E.3,...e, E.20, sendo que a letra “E” , para nós, designa Estudante, garantindo-lhes o direito do anonimato.

Ainda tratando-se de explicações terminológicas utilizadas nessa pesquisa, explicitamos que denominaremos de protocolo os registros escritos obtidos por meio das respostas que os participantes nos concederam para cada uma das questões que constituíam a Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares.

Devemos destacar que os participantes E.1, E.15 e E.18 não compareceram em um dos dias de aplicação da proposta, por isso não conseguiram completar seus protocolos. Foram oferecidos a estes outros dias e horários, mas infelizmente não foi possível o comparecimento desses, em razão de seus compromissos particulares. Dessa forma, em termos percentuais, oitenta e cinco por cento dos participantes responderam a proposta integralmente e quinze por cento destes, parcialmente.

Para que possamos realizar o quadro síntese de caracterização do perfil desse grupo de estudantes e a posterior análise de dados coletados desse

³³ Juridicamente, falta-lhes o término do curso, aproximadamente 10 meses e, naturalmente sua diplomação, conferida pelo título de licenciado, mas em algumas ocasiões, a legislação já lhes permite atuarem efetivamente como professores.

grupo, (ver capítulo VI), vamos considerar somente aqueles que responderam a proposta integralmente, sendo estes devidamente denominados nessa pesquisa por: E.2, E.3, E.4, E.5, E.6, E.7, E.8, E.9, E.10, E.11, E.12, E.13, E.14, E.16, E.17, E.19 e E.20.

4.3 SOBRE A FORMATAÇÃO DA PROPOSTA DE AVALIAÇÃO REFLEXIVA ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A Proposta de Avaliação Reflexiva foi constituída de três partes, sendo que a Parte I buscava traçar um perfil dos participantes da pesquisa, bem como conhecer algumas concepções pessoais dos mesmos, constituída de onze questões. A Parte II procurava desenvolver uma reflexão sobre alguns conceitos matemáticos relacionados a Sistemas de Equações Lineares, assim como conhecer algumas concepções didáticas dos participantes, constituída de nove questões. Já a Parte III visava compreender aspectos de pensamento matemático avançado em relação a Sistemas de Equações Lineares, constituída de cinco questões, totalizando assim, vinte e cinco questões que constituíram a proposta integral.

4.4 DESCRIÇÃO DO PROCESSO DE COLETA DE DADOS

Os participantes dessa pesquisa foram orientados a responderem individualmente a Proposta de Avaliação Reflexiva sem manter diálogo com seus colegas, e ainda cada questão foi entregue separadamente, pois não era desejável que uma pergunta posterior influenciasse uma determinada resposta de uma dada pergunta anterior. Uma vez solicitada a próxima questão pelo participante, não lhe era mais permitido alterar a resposta anterior. Por isso, tomamos o cuidado de sempre recolheremos primeiro a questão respondida para, em seguida, ser entregue a próxima.

A identificação dos participantes ocorreu mediante o uso de um código numérico, assegurando o anonimato dos mesmos. Cada questão possuía a seguinte identificação: número da parte referida, número do participante, número da questão e o respectivo enunciado desta.

A Proposta de Avaliação Reflexiva foi programada para ser respondida em dois encontros, com duração de 90 minutos cada um. A distribuição

das questões para esses dois encontros foi realizada da seguinte forma: no primeiro encontro - foram respondidas a Parte I, questões de um a onze e Parte II, questões um e dois, totalizando treze questões. No segundo encontro foram respondidas a Parte II, questões de três a nove e Parte III, questões de um a cinco, totalizando doze questões e, finalmente completando a proposta integral de vinte e cinco questões.

Entretanto, sabendo das peculiaridades que envolvem uma pesquisa qualitativa foi previsto que caso algum participante faltasse em um dos dias de aplicação, sendo possível e de livre e espontânea vontade deste, o convidaríamos para um horário alternativo que não comprometesse a rotina de seus compromissos para que pudesse nos atender. Contudo, ainda consideramos a possibilidade de que algum participante pudesse solicitar um tempo maior para responder a proposta com tranquilidade.

Os participantes E.6, E.7, E.9, solicitaram um tempo maior para responder a proposta. Já os participantes E.17 e E.19 só compareceram no segundo dia de coleta de dados, sendo assim foram convidados a terminar suas questões em um horário alternativo. Ambos aceitaram o convite e finalizaram seus protocolos, sendo atendidos em horário³⁴ alternativo de suas atividades acadêmicas.

O atendimento foi realizado no dia 16 de março de 2011 no período vespertino entre às 14h e 17h30min, visto que cada participante tinha a necessidade de um horário diferente, em uma sala do Departamento de Matemática da universidade destinada às atividades de monitoria, a qual foi reservada antecipadamente.

A seguir, apresentamos um quadro que contempla informações gerais sobre a Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares.

³⁴ O atendimento foi realizado no dia 16 de março de 2011 no período vespertino entre as 14h e 17h30min, visto que cada participante tinha a necessidade de um horário diferente, em uma sala do Departamento de Matemática da universidade destinada as atividades de monitoria, a qual foi reservada antecipadamente.

Quadro 6 – Informações gerais sobre a Proposta de Avaliação Reflexiva

PROPOSTA DE AVALIAÇÃO REFLEXIVA					
CONTEÚDO MATEMÁTICO			SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES		
FORMATO			QUESTIONÁRIO		
Organização das questões					
DIVISÃO		TEMA		N ^o DE QUESTÕES	
Parte I		Perfil dos estudantes		11	
Parte II		Aspectos conceituais e didáticos		9	
Parte III		Aspectos matemáticos		5	
Total de questões				25	
Local de aplicação			Curso		
Universidade Estadual Pública – PR			4 ^a série – Curso de Licenciatura em Matemática		
Tempo de construção			Tempo de Aplicação		
4 meses			2 encontros de 90 min		
Sujeitos de pesquisa		Estudantes Participantes		Ano	Município
Total	Porcentagem	Total	Porcentagem	2011	Londrina -PR
20	100%	17	85%		

4.5 ANÁLISES DE DADOS

A coleta de dados se deu por meio da aplicação de uma Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares em que obtivemos, por meio de registros escritos, as respostas dos participantes.

Em razão das características da Proposta de Avaliação Reflexiva, as análises seguirão um processo descritivo-interpretativo indutivo, porque o objetivo é investigar processos de pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática em tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares.

As análises foram subdivididas em três etapas:

- (i) análise questão a questão - etapa em que se colheram impressões para se ter uma ideia geral das respostas dos participantes, a qual subsidiou as análises posteriores, e sempre que possível serão acompanhadas por um quadro que sintetize as considerações gerais apresentadas;

- (ii) análise do perfil dos estudantes participantes - etapa em que se buscou traçar a visão matemática revelada no sentido de Thompson (1997), bem como a identificação de manifestações de atitudes reflexivas à luz de Freire (2004, 2011);
- (iii) análise de manifestações de processos de pensamento matemático avançado, conforme caracterizações de Dreyfus (1991) e Resnick (1987) evidenciadas por cada um dos participantes, considerando o que foi obtido nas resoluções das questões da Proposta de Avaliação Reflexiva, especialmente da Parte II e Parte III.

Sendo assim, apresentaremos no capítulo VI essas análises de forma detalhada.

A seguir, no capítulo V, trataremos da construção e das justificativas para cada uma das questões que compõem o conjunto de tarefas, o qual denominamos por Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares.

5 CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA DE AVALIAÇÃO REFLEXIVA ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A intenção principal da *Proposta de Avaliação Reflexiva* sobre *Sistemas de Equações Lineares*, direcionada a estudantes de Licenciatura em Matemática, é que promova revelações sobre alguns conceitos e situações que envolvem tal conteúdo matemático, e que também suscite reflexões pessoais a respeito de algumas situações inerentes ao processo de ensino e de aprendizagem.

Para que possamos explicitar as escolhas e decisões tomadas a respeito do processo de construção da Proposta de Avaliação Reflexiva, bem como a condução das atividades realizadas durante o trabalho de campo, queremos aqui retomar a pergunta norteadora que delineou o processo de trabalho exposto até o presente momento: que manifestações de processos de pensamento matemático avançado são reveladas em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática ao resolverem tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares?

Destacamos mais uma vez que denominaremos por Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistema de Equações Lineares o conjunto de tarefas que foi elaborado e posteriormente aplicado para coletarmos dados para essa pesquisa.

Entendemos tarefa à luz das ideias de Ponte et al (1997, p. 3), segundo esses autores a investigação sobre a aprendizagem tem mostrado que o estudante aprende em consequência da atividade que desenvolve e da reflexão que faz sobre essa. Dessa forma, “as tarefas devem despertar curiosidade e entusiasmo, fazendo apelo aos seus conhecimentos prévios e intuições”. Desse modo, Ponte et al (1997), caracterizam tarefa matemática da seguinte forma:

uma tarefa envolve sempre uma dada situação de aprendizagem e aponta para um certo conteúdo matemático. A situação de aprendizagem constitui o referente de significados da vida quotidiana ou do domínio da Matemática a que a tarefa se refere, no quadro da cultura do aluno. O conteúdo matemático diz respeito aos aspectos matemáticos envolvidos (factos, conceitos, processos, ideias), no quadro do currículo correspondente (PONTE et al, 1997, p. 4-5).

A construção de fato da proposta levou aproximadamente quatro meses para ser concluída, tempo este dedicado para se elaborar e selecionar questões, realizar discussões, leituras, refinamentos e correções.

Retomaremos aqui a forma pela qual fizemos a divisão da Proposta de Avaliação Reflexiva para a coleta de dados, realizada em três partes:

- Parte I: constituída de onze questões buscava traçar um perfil dos participantes da pesquisa, bem como conhecer algumas concepções pessoais dos mesmos;
- Parte II: constituída de nove questões procurava desenvolver uma reflexão sobre alguns conceitos matemáticos relacionados a Sistemas de Equações Lineares, assim como conhecer algumas concepções didáticas dos participantes;
- Parte III: constituída de cinco questões visava compreender aspectos de pensamento matemático avançado em relação a Sistemas de Equações Lineares.

Decidimos por essa estrutura de coleta de informações, porque consideramos que uma quantidade diversificada de elementos nos propiciará uma visão abrangente do conteúdo temático de pesquisa.

Tanto as questões de caráter pessoal quanto as questões de caráter matemático foram elaboradas ou selecionadas pela pesquisadora principal. As discussões das mesmas ocorreram no grupo de estudo da orientadora dessa pesquisa composto por seus orientandos e alguns colaboradores. As reuniões acontecem semanalmente em todas as tardes de quarta-feira, na UEL-PR. Todas as perguntas passaram por algum tipo de modificação, seja esta por análises diretas dos participantes do grupo de estudo que detectaram alguns problemas, como por exemplo, ambiguidade, ou em ocasiões em que as discussões promovidas pelos participantes do grupo de estudo suscitaram reflexões que motivaram a realizar mudanças em relação ao conteúdo e objetivo das questões propostas inicialmente.

Nas próximas seções, faremos a apresentação e as considerações sobre cada uma das questões que compõem as partes I, II e III da presente pesquisa.

5.1 A CONSTRUÇÃO DA PARTE I: PERFIL DOS PARTICIPANTES

A primeira parte da Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares é composta de onze questões que buscavam traçar um perfil pessoal dos participantes da pesquisa, bem como conhecer algumas concepções dos mesmos.

Todo processo de aprendizagem requer em certa medida autonomia do sujeito que aprende, pois este não pode considerar-se dependente do professor.

Como afirma Freire (2004) “*ensinar não é transferir conhecimento*”. Para que o ato de ensinar se consolide exige-se reflexão por parte daquele que ensina, que ministra a aula, e por parte daquele que aprende. Estes devem ter conhecimento e consciência suficientes para que entendam que o processo de construção do conhecimento precisa se dar mediante a autonomia do pensamento do sujeito, e não por dependência daquele que se propõe a ensinar.

Acreditamos que o sujeito precisa tomar consciência de si mesmo, de suas potencialidades e carências, para que se sinta sujeito autônomo perante sua própria aprendizagem. A Parte I inicia-se com uma pequena apresentação de cada participante. Para isso, foi-lhes perguntado a idade, se já atuam como professor na Educação Básica e, em caso afirmativo, o segmento que desenvolve suas atividades profissionais, isto é, Ensino Fundamental e/ou Ensino Médio.

5.1.1 Parte I: Apresentação Profissional

Idade: _____

Você já atua ou atuou como professor?

Sim Não

Em caso afirmativo, indique o segmento e o ano que desempenha ou desempenhou a função:

Ensino Fundamental I – 2º ao 5º anos (1ª a 4ª séries) | Ano/série:

Ensino Fundamental II – 6º ao 9ª anos (5ª a 8ª séries) | Ano/série:

Ensino Médio – (1º ao 3º anos) | Ano:

O objetivo da apresentação profissional é o de realizar um levantamento entre os participantes da pesquisa para saber quais destes já atuam como professor, mesmo não tendo completado sua formação inicial -aqui entendida

como o término do Curso de Licenciatura em Matemática, visto que é de conhecimento público a falta de professores para lecionar Matemática na Educação Básica.

Para essa pesquisa se considerou-se professor aquele participante que já atua ou atuou em uma instituição regulamentada pelo Ministério da Educação, como por exemplo, escolas e colégios que ofertam Ensino Fundamental ou Ensino Médio, podendo também oferecer os dois segmentos simultaneamente, tanto pública quanto privada, ministrando aulas de matemática no Ensino Fundamental e/ou Médio.

5.1.2 Apresentação das Questões da Parte I

A Parte I da Proposta de Avaliação Reflexiva subsidia a Parte II e III, porque busca estimular reflexões sobre algumas concepções pessoais dos participantes da pesquisa relevantes no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Percebemos que quando trabalhamos com educação é preciso ter em mente que a prioridade deve ser a valorização e o respeito pelo ser humano. Entendemos que a Matemática se caracteriza como um processo de construção humana por meio do desenvolvimento histórico sociocultural da sociedade atrelado às necessidades, que se conectam intimamente com as ações que as pessoas realizam em seu cotidiano e o significado que atribuem a isso. Por essa razão, acreditamos que algumas perguntas pessoais podem revelar elementos que nos darão uma riqueza efetiva de detalhes para subsidiar as futuras análises.

As perguntas desta primeira parte são abertas totalizando onze questões. Elaboramos desta forma, porque o participante pode exercer sua espontaneidade, respeitando o que esse deseja expor e compartilhar de sua experiência com outras pessoas.

Segundo Bogdan e Bicklen (1994, p. 50) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa, por isso “o investigador qualitativo planeja³⁵ utilizar parte do estudo para perceber quais são as questões mais

³⁵ No sentido do verbo planejar.

importantes”, isto é, os investigadores qualitativos não presumem “reconhecer as questões importantes antes de efectuar a investigação”.

Para construir as questões pessoais levamos em consideração suscitar uma possível reflexão do participante, porque segundo Freire (2004, p. 39) “[...] quanto mais me assumo como estou sendo e percebo a ou as razões de ser de porque estou sendo assim, mais me torno capaz de mudar, de promover-me [...]”. Desse modo, para finalizar a Parte I, inserimos a questão onze para que o participante tenha liberdade para deixar seus comentários sobre as perguntas que respondeu.

Após essas breves considerações, passamo-nos a descrever as ideias, intenções e expectativas sobre o que se espera encontrar com cada uma das questões a seguir.

PARTE I | QUESTÃO 01 | ITEM A

Pensando em seu futuro profissional, como professor de matemática, o que considera importante em matemática que não pode deixar de aprender?

A questão um da Parte I, item a, foi construída com a intenção de perceber o valor creditado pelo participante em relação aos conteúdos matemáticos conforme suas concepções pessoais, podendo aparecer também nas respostas aspectos relacionados com a didática da matemática e a forma de abordagem de um determinado tema matemático. Nesta questão pretendemos identificar que ideias ou conteúdos são considerados importantes pelos participantes dessa pesquisa, se estes se situam na Educação Básica -Ensino Fundamental e Médio, ou no Ensino Superior. De acordo com as respostas que recebemos, sendo possível, podemos classificar se os conteúdos matemáticos citados guardam uma relação mais específica com aspectos aritméticos, algébricos ou geométricos, revelando consequentemente o interesse desse grupo de estudantes quanto à valorização de alguns temas matemáticos em detrimento de outros.

PARTE I | QUESTÃO 01 | ITEM B

Para você, o que a matemática representa?

A questão um da Parte I, item b, foi elaborada com a finalidade de conhecer a concepção pessoal do participante em relação à Matemática.

Convém destacar aqui que os dicionários de Língua Portuguesa, de modo geral, definem matemática como uma ciência que trata das medidas, propriedades e relações de quantidades e grandezas.

Esperamos, no mínimo, de um futuro professor de matemática que se identifique e aprecie esta área do conhecimento, pois se possuímos uma familiaridade e uma afinidade com o que nos propomos fazer, geralmente nos dedicamos mais, e, portanto podemos atingir resultados eficazes e satisfatórios.

Segundo Bogdan e Bicklen (1994, p. 86) quando escolhemos desenvolver um trabalho em uma área qualquer “[...] a autodisciplina só pode levar até um certo ponto. Sem um toque de paixão pode não ter fôlego suficiente para manter o esforço necessário à conclusão do trabalho ou limitar-se a realizar um trabalho banal [...]”. Será que os participantes revelarão sentimentos passionais em relação à matemática? O que relatarão sentir ou compreender sobre matemática?

PARTE I | QUESTÃO 02

Explique o porquê de sua escolha pelo curso de matemática. Que razões lhe motivaram para tal escolha?

A questão dois da Parte I visa conhecer um pouco da história de vida de cada participante e entender as razões que o motivou a tomar tal decisão, optar por um curso de matemática. Valorizar a escolha de cada um pode implicar em compreender seu sentido de pertença em uma sociedade organizada que procura conviver harmoniosamente com as diferenças, mas se beneficiando do trabalho específico e singular que cada pessoa pode desempenhar.

PARTE I | QUESTÃO 03

Há espaço em seu curso de graduação para debates, reflexões e discussões a respeito de habilidades matemáticas, a fim de estimular um pensamento matemático avançado?

A finalidade da questão três da Parte I é ter conhecimento se os participantes desta pesquisa tiveram ao longo de seu Curso de Licenciatura em Matemática espaço para refletir sobre situações matemáticas que propiciassem um pensamento matemático avançado, assim como oportunidade para refletir sobre suas próprias habilidades matemáticas.

De acordo com Dreyfus (1991) “pesquisadores em Educação Matemática, em particular, tornaram-se conscientes da importância dos componentes do processo para a compreensão de matemática avançada e suas interações (DREYFUS, 1991, p. 25³⁶)”. Ainda segundo este autor, a reflexão sobre a própria experiência matemática é de particular importância na solução de problemas não triviais.

Pretendemos com essa questão verificar se os estudantes de licenciatura dessa pesquisa estão ou não recebendo oportunidades de refletir sobre conteúdos matemáticos de modo avançado, isto é, que transcenda o que é elementar instigando novas relações conceituais, e em caso positivo, qual a amplitude, área e frequência que essas discussões acontecem.

PARTE I | QUESTÃO 04

Você como futuro professor o que procura fazer para compreender os porquês específicos de um conteúdo de matemática? Comente.

Por meio dessa questão, renovamos a pretensão de buscar nas respostas, dos participantes dessa pesquisa, atitudes que estes desenvolvem por iniciativa própria para complementar e subsidiar sua própria formação, e consideramos importante explicitar essas iniciativas, porque a formação de uma pessoa está relacionada diretamente com as práticas que adota em sua rotina. Pois, se almejarmos uma educação de qualidade devemos começar a investir mais tempo e estudo em nossa própria formação.

De acordo com Lorenzato (2010, p. 3) “considerando que ninguém consegue ensinar o que não sabe, decorre que ninguém aprende com aquele que

³⁶ Researchers in mathematics education, in particular, have become conscious of the importance of the component processes for understanding advanced mathematics and their interactions (DREYFUS, 1991, p. 25).

dá aulas sobre o que não conhece”. Nesse sentido, para que um professor tenha segurança para ministrar uma aula, este necessita compreender alguns porquês específicos inerentes quanto aos conteúdos matemáticos, para que consiga transmitir confiança no que diz e faz.

Um ensino que não leva em consideração a compreensão do significado, o porquê propriamente dito, desencadeia consequências graves e desagradáveis, como por exemplo, estudantes desatenciosos e perda do estímulo para a aprendizagem.

PARTE I | QUESTÃO 05

- (a) Quais são seus hábitos de estudo enquanto estudante da graduação? Relate.
- (b) Considerando seus hábitos de estudos, de que maneira você reflete sobre sua própria aprendizagem matemática? Explique.
- (c) Que fatores você considera relevantes para seu próprio processo de aprendizagem matemática?

Para confrontarmos atitudes que os estudantes explicitam ao se preocupar com os porquês matemáticos, vamos pergunta-lhes a respeito de seus hábitos de estudo, reflexões que estes desenvolvem sobre sua própria aprendizagem e fatores que contribuem para o processo da aprendizagem matemática. Esperamos ter subsídios que nos permitam construir um quadro síntese envolvendo os aspectos que dão sentido e significado na prática de estudo desses participantes. Entendemos que por meio de uma rotina de estudo podemos perceber dúvidas, e se as considerarmos pertinentes buscamos respostas que nos satisfaçam. Se não paramos para estudar, a dúvida provavelmente nunca poderá surgir ou ser extinta, e podemos perder a oportunidade de aprender mais.

PARTE I | QUESTÃO 06

Qual a sua expectativa, enquanto estudante do Ensino Superior, para uma aula que contempla um tema específico matemático, como por exemplo, Sistemas de Equações Lineares? Relate seus comentários.

Pretendemos com a essa questão conhecer algumas expectativas dos participantes, bem como também algumas razões que lhes motivem a estudar um tema matemático específico. Levando em conta o interesse de estudo na temática de Sistemas de Equações Lineares, citamos esta expressão na pergunta, porque podem aparecer relatos que nos permitam encontrar elementos interessantes para responder a pergunta de investigação, de uma maneira espontânea, já que os participantes não saberão, por nossa fala, exatamente o tema matemático dessa pesquisa nesta primeira parte de aplicação das questões. Entendemos que precisamos preservar essa atitude inicialmente, porque não desejamos que os mesmos recorram a estudos prévios para responder as tarefas matemáticas propostas. Mas, procuraremos deixar algumas pistas sobre a temática que será desenvolvida, nesta primeira fase, por considerar que esse primeiro dia de coleta de dados é uma novidade, e como tal em certa medida provocam respostas naturais, isto é, desveladas de formalismos excessivos.

PARTE I | QUESTÃO 07

Como você abordaria Sistemas de Equações Lineares com estudantes do Ensino Médio? Relate suas ideias sobre isso.

A intenção da questão sete da Parte I é perceber algumas concepções de prática de sala de aula que esses participantes demonstram conhecer, assim como saber o que esses consideram relevante ao abordar o conteúdo matemático em questão, por exemplo, conceitos, aplicações, modos de resolução, aspectos históricos, entre outros. Preferimos deixar o enunciado com a expressão Sistemas de Equações Lineares por entender que alguns participantes poderiam deixar comentários e sugestões específicas sobre a temática de interesse, colaborando dessa forma para que aos poucos consigamos reunir elementos suficientemente pertinentes que nos favoreçam a responder a pergunta de investigação.

PARTE I | QUESTÃO 08

De que forma os aspectos históricos que envolvem um conteúdo matemático específico, quando utilizados, colaboram para o desenvolvimento de uma aula, seja esta no Ensino Médio ou Ensino Superior? Explique.

A História da Matemática consiste em um recurso didático pedagógico de grande utilidade para professores e estudantes na medida em que traz elementos que podem caracterizar o contexto social e processo de construção dos objetos matemáticos. É relevante explicitar que mesmo que se tragam para as aulas de matemática pequenos fragmentos históricos que agregam valores humanos à teoria matemática já se pode começar a cultivar novos interesses e, a partir disso os estudantes podem ter novos olhares para os conceitos matemáticos.

Acreditamos que os aspectos históricos que envolvem uma determinada situação enriquecem a visão de uma pessoa, porque lhe abre novas alternativas para se pensar, por exemplo, no desfecho de um conceito matemático. É interessante a visão histórica, porque esta pode quebrar o mito de que uma teoria matemática nasce pronta.

Pretendemos saber dos participantes se estes consideram a possibilidade de utilizar aspectos históricos que se relacionam a um conteúdo matemático, e caso indicarem que partilham de tal concepção, que atitudes esperam que sejam estimuladas ou fomentadas com tal uso.

PARTE I | QUESTÃO 09

(a) Geralmente todos nós, enquanto estudantes, temos uma recordação marcante de alguma aula. Relate a sua e explique que atitudes você percebeu que o professor demonstrou na ocasião.

(b) A situação que você descreveu no item "a" trouxe alguma mudança no seu comportamento? Influenciou você de alguma forma? Comente.

A etapa da vida escolar pode deixar marcas profundas, tanto positivamente quanto negativamente na vida de uma pessoa, pois nesta etapa

vivem-se momentos intensos de descobertas, experiências, convivências sociais que despertam relações de amizade, confiança, mas também de insegurança e medo.

Dando sequência à importância dos aspectos históricos para o entendimento de algumas situações, pretendemos estimular os participantes a contar um pouquinho de sua história escolar por meio de uma experiência marcante. Queremos saber se tal acontecimento trouxe novas atitudes e em que medida isso afetou ou beneficiou os participantes. Com esta pergunta pretendemos conhecer algumas experiências que produziram efeitos positivos ou negativos, pois em certa medida o professor tem a vocação de amparar ou de humilhar, dependendo da forma de como se age no momento de uma determinada situação.

PARTE I QUESTÃO 10	
Em relação ao conhecimento dos documentos educacionais brasileiros listados no quadro apresentado a seguir, justifique de que modo estes contribuem para a organização da prática do professor.	
DOCUMENTO	SEU RELATO
Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN /1997)	
Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM / 2000)	
Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+/2002)	
Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Matemática V.2 (OCEM/2006)	
Diretrizes Curriculares Estaduais da Educação Básica do Paraná - Matemática (DCE-PR/2008)	

Os documentos educacionais brasileiros foram produzidos por especialistas de áreas diversas do conhecimento e, por isso procuraram retratar a magnitude da tarefa de educar. Aqui queremos destacar os documentos oficiais³⁷ referentes à disciplina de Matemática que foram produzidos por pesquisadores da área e contemplam as principais tendências internacionais de pesquisas no campo da Educação Matemática e as principais abordagens e estratégias metodológicas de

³⁷ PCN (1997), PCNEM (2000), PCN+(2002), OCEM (2006), DCE-PR (2008).

ensino. Os documentos no que se referem aos conteúdos matemáticos procuram oferecer uma visão ampla do currículo e enfatizam os pontos relevantes para a prática na sala de aula.

A leitura e o estudo destes documentos podem proporcionar ao futuro professor conhecimento geral das diretrizes de ensino e de aprendizagem orientando-o, por exemplo, na elaboração de seus planejamentos didáticos pedagógicos. Tais documentos trazem ainda uma série de orientações didáticas e metodológicas para o professor, oferecendo uma visão local (matemática) e global (relações com outras disciplinas) dos principais conteúdos estruturantes presentes nos currículos escolares.

Pretendemos com a questão dez saber se os participantes conhecem estes documentos, e se possuem uma ideia clara sobre a sua importância para o trabalho do professor. É bom lembrar que esses documentos são acessíveis e que qualquer pessoa que se interesse pelos mesmos pode encontrá-los em formatos digitais disponibilizados, por exemplo, no portal do MEC³⁸.

PARTE I | QUESTÃO 11

Deixe suas análises e comentários sobre as perguntas que você respondeu anteriormente. Foram interessantes ou triviais? Por quê? Você acredita que as perguntas anteriores colaboram para uma reflexão pessoal e profissional? Comente.

A questão onze finaliza a Parte I, por meio desta pretendemos verificar se essas questões pessoais suscitaram algum tipo de reflexão em nos estudantes participantes, e que também tenhamos mais uma oportunidade de propiciar ao participante um momento para que este expresse sua opinião com liberdade prevalecendo à espontaneidade, quesito apreciado nessa pesquisa, pois entendemos que favorecem respostas naturais.

³⁸ O endereço eletrônico e: < www.mec.gov.br >.

5.2 A CONSTRUÇÃO DA PARTE II: ASPECTOS CONCEITUAIS E DIDÁTICOS ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A Parte II procurava incentivar reflexões sobre alguns conceitos matemáticos relacionados a Sistemas de Equações Lineares, assim como conhecer algumas concepções didáticas dos participantes a respeito do exercício da prática docente, constituída de nove questões.

Para a construção e elaboração das tarefas matemáticas da Parte II procuramos manter uma estrutura não convencional, isto é, buscamos focar alguns questionamentos que não se encontram em livros didáticos, levando em consideração algumas de nossas inquietações.

A seguir, apresentaremos as questões e respectivas justificativas de cada uma dessas que compõem a Parte II da Proposta de Avaliação Reflexiva.

PARTE II QUESTÃO 01		
Quando você pensa em Sistemas de Equações Lineares, que termos têm a ver com esse conteúdo? Assinale.		
<input type="checkbox"/> Equações	<input type="checkbox"/> Regra de Cramer	<input type="checkbox"/> Variáveis
<input type="checkbox"/> Planos	<input type="checkbox"/> Pensamento algébrico	<input type="checkbox"/> Intersecção de retas
<input type="checkbox"/> Retas	<input type="checkbox"/> Circuitos elétricos	<input type="checkbox"/> GPS ¹
<input type="checkbox"/> Igualdades	<input type="checkbox"/> Frações parciais	<input type="checkbox"/> Interpolação polinomial
<input type="checkbox"/> Desigualdades	<input type="checkbox"/> Matriz identidade	<input type="checkbox"/> Álgebra linear
<input type="checkbox"/> Determinante	<input type="checkbox"/> Construção de parábola	<input type="checkbox"/> Análise de redes
<input type="checkbox"/> Matriz	<input type="checkbox"/> Vetores	<input type="checkbox"/> Método de eliminação de Gauss-Jordan
<input type="checkbox"/> Incógnitas	<input type="checkbox"/> Balanceamento químico	<input type="checkbox"/> Coordenadas cartesianas
<input type="checkbox"/> Plano Cartesiano	<input type="checkbox"/> Escalonamento	
<input type="checkbox"/> Relações de equivalência	<input type="checkbox"/> Método de eliminação de Gauss	
<input type="checkbox"/> Geometria analítica	<input type="checkbox"/> Posto de matriz	
<input type="checkbox"/> Alocação de recursos		
<input type="checkbox"/> Matriz inversa		
¹ Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global)		

Existe uma variedade extensa de termos matemáticos associados a Sistemas de Equações Lineares. Os termos contemplados na questão um da Parte II

foram retirados de textos didáticos de livros de Álgebra Linear de Ensino Superior e de livros de matemática geral de Ensino Médio que abordam este assunto. Para esta pesquisa de termos utilizamos Boldrini et al (1980), Lima (1992,1993,1998), Poole (2004), Dante (2004), Anton e Busky (2006), autores em que nos apoiamos para construir e organizar a base teórica quanto ao conteúdo matemático escolhido para essa pesquisa.

Os termos foram selecionados com a intenção principal de saber se o participante possui uma visão geral do tema em questão, se consegue compreender termos relacionados às aplicações do conteúdo em questão, e também se estabelece relações entre conceitos e conteúdos matemáticos aparentemente distintos.

Por exemplo, dados três pontos não colineares do plano cartesiano é possível construir uma função quadrática, matematicamente expressa por $F(x) = ax^2 + bx + c$, e esta por sua vez poderá ser representada no plano cartesiano sob a forma de uma curva conhecida como parábola. Para acessarmos tal função quadrática podemos elaborar um Sistema de Equações Lineares, cuja solução oferecerá os coeficientes da função procurada.

Cada um dos termos que constituem a questão um da Parte II se relaciona de forma direta ou indireta com Sistemas de Equações Lineares. Entre os termos associados, alguns se destacam pela conceituação, outros se relacionam a processos de resolução, outros ainda estão ligados por conteúdos matemáticos que guardam entre si relações em comuns, alguns são pertinentes à representação geométrica, e muitos outros termos se encontram quando se tratam das várias aplicações deste conteúdo matemático. Com a análise posterior, esperamos identificar em que aspectos os participantes dessa pesquisa demonstram familiaridade em relação ao conteúdo de Sistemas de Equações Lineares: (I) conceituação, (II) temas matemáticos que se relacionam, (III) métodos de resolução, (IV) representação geométrica e (V) aplicabilidade.

Para tanto, os termos que constituem a questão um da Parte II foram classificados dentro dos cinco aspectos já ditos anteriormente.

Quadro 7 – Classificação dos termos utilizados na Questão 1 da Parte II

Classificação dos termos da Questão 1 da Parte II				
GRUPO I	GRUPO II	GRUPO III	GRUPO IV	GRUPO V
Conceitos envolvidos	Conteúdos matemáticos relacionados	Métodos de resolução	Expressões relacionadas com representação geométrica	Aplicações
<ul style="list-style-type: none"> • Álgebra linear • Coordenadas Cartesianas • Desigualdades • Equações • Igualdades • Incógnitas • Matriz identidade • Matriz inversa • Pensamento algébrico • Posto de matriz • Relações de equivalência • Variáveis 	<ul style="list-style-type: none"> • Determinantes • Geometria analítica • Matrizes • Vetores 	<ul style="list-style-type: none"> • Escalonamento • Método de Eliminação de Gauss • Método de Eliminação de Gauss-Jordan • Regra de Cramer 	<ul style="list-style-type: none"> • Intersecção de retas • Plano cartesiano • Planos • Retas 	<ul style="list-style-type: none"> • Alocação de recursos • Análise de redes • Balanceamento químico • Circuitos elétricos • Construção de parábola • Frações parciais • GPS • Interpolação polinomial

PARTE II | QUESTÃO 02

(a) Em quais épocas escolares você estudou Sistemas de Equações Lineares? Relate sua experiência de forma detalhada sobre esse conteúdo.

(b) Existe diferença da abordagem da Educação Básica para a do Ensino Superior sobre o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares? Explique.

Em relação ao item 'a' da questão dois da Parte II, por meio das lembranças escolares, pode ser que o participante ao nos relatar sua experiência, nos conte detalhes sobre sua própria compreensão envolvendo o tema de interesse dessa pesquisa, e desta forma nos ofereça mais pistas para as futuras análises.

Já em relação ao item 'b' da questão dois da Parte II, queremos perceber se o participante estabelece diferenças quanto ao tratamento do conteúdo

Sistemas de Equações Lineares em etapas distintas de formação, caso da Educação Básica e do Ensino Superior.

PARTE II | QUESTÃO 03

Defina um Sistema de Equações Lineares e explicita suas características.

Uma das ações que se deve ter em mente quando se estuda matemática é ter claro para si a definição de alguns conceitos considerados fundamentais para favorecer a compreensão e se estudar temas avançados. Desse modo, a definição de um conceito matemático torna-se relevante no processo de ensino e de aprendizagem, porque esta traz consigo elementos que permitem reconhecimento, identificação e entendimento sobre características e formas matemáticas pertinentes ao tema proposto.

PARTE II | QUESTÃO 04

O que é sistema linear homogêneo?

A questão quatro da Parte II procura identificar se os participantes conhecem definições específicas quanto a temática de interesse. Vale ressaltar que esta pergunta é considerada básica dentro do tema matemático proposto por essa pesquisa.

PARTE II QUESTÃO 05		
Quando se trata de Sistemas de Equações Lineares são considerados alguns métodos de solução, tais como: substituição, comparação, adição, escalonamento, resolução matricial, Regra de Cramer, entre outros. Relate suas ideias, experiências, dúvidas e compreensões a respeito desses métodos.		
Método de Resolução	SEU RELATO	Em que situação é aconselhável o uso desse método, e em que segmento de ensino?
SUBSTITUIÇÃO		
COMPARAÇÃO		
ADIÇÃO		
ESCALONAMENTO		
RESOLUÇÃO MATRICIAL		
REGRA DE CRAMER		

A organização proposta na questão cinco da Parte II busca estimular uma das ações desejadas e esperadas para se desenvolver um pensamento matemático avançado, isto é, a capacidade de sintetizar, relacionar conceitos e procedimentos, além de verificar o entendimento de que situação e segmento de ensino, um método de resolução é mais favorável que outro. Nesse sentido, a questão cinco da Parte II pretende conhecer algumas compreensões que os participantes têm a respeito de métodos de resolução de Sistemas de Equações Lineares que aparecem com frequência em livros didáticos de matemática seja este voltado à Educação Básica ou ao Ensino Superior.

A ação de relacionar conceitos e procedimentos colabora para que se consiga realizar um diagnóstico da situação estudada e decidir em que momento um procedimento matemático é mais aconselhável e favorável que outro.

Entre os métodos que foram contemplados nessa questão, a Regra de Cramer é considerada, por alguns, uma técnica trabalhosa e que exige muitos cálculos. Por meio dessa pesquisa, também queremos verificar se os participantes estão ou não fazendo a utilização desta técnica, já que alguns documentos educacionais federais explicitam em suas recomendações que tal método deve ser

abandonado. Por exemplo, de acordo com *As Orientações Curriculares para o Ensino Médio*, OCEM, lançado em 2006 pelo Ministério da Educação, afirma que “a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única” (p.77) e por isso, complementa que fica também dispensado o estudo de determinantes.

Conforme o que está escrito nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, pode-se inferir que tanto o conteúdo matemático Determinantes, quanto as relações matemáticas que se desenvolvem neste em torno, podem ser suprimidas dos currículos escolares de Ensino Médio. Ainda de acordo com a OCEM (2006), aconselha-se o processo de escalonamento para a resolução de Sistemas de Equações Lineares, porque requer operações matemáticas elementares.

Para complementar as considerações da questão cinco da Parte II, queremos lembrar que os métodos de adição, substituição e comparação para resolver Sistemas de Equações Lineares são frequentemente utilizados na resolução de Sistemas de Equações Lineares do tipo 2×2 , situações essas que já podem ser abordadas desde o Ensino Fundamental II, mais especificamente no oitavo e nono anos.

PARTE II | QUESTÃO 06

O que deve ser levado em consideração quando se trata de Sistemas de Equações Lineares? Enumere de acordo com o que acredita que seria prioridade para você enquanto professor. Explique e justifique suas escolhas.

- Aplicabilidades.
- Aspectos históricos.
- A relação que existe entre esse conteúdo e outros no próprio âmbito da matemática.
- Conceito.
- Explicações dos porquês matemáticos (demonstrações matemáticas).
- Outro (s). Qual (is)?

Para a questão seis da Parte II houve preocupação quanto aos aspectos didáticos que envolvem um determinado tema matemático, isto é, o modo

pelo qual é realizada a explanação, a apresentação e desenvolvimento desse conteúdo matemático.

Esperamos de futuros professores de matemática que instiguem em seus estudantes a curiosidade suscitada pelos porquês matemáticos, que mostrem aplicações distintas que os conteúdos matemáticos oferecem para se compreender e solucionar situações atreladas tanto ao cotidiano quanto em áreas científicas. Temos ainda expectativas que esses possam contribuir para o enriquecimento cultural de estudantes destacando, por exemplo, aspectos históricos que colaboraram para o desenvolvimento e fortalecimento da Matemática ao longo do tempo. Dessa forma, é possível ampliar a percepção de utilidade de um tema matemático tratado.

PARTE II | QUESTÃO 07

Um Sistema de Equações Lineares possui diferentes formas de interpretação tais como: interpretação geométrica, interpretação matricial e interpretação vetorial, entre outras. Relate o que você compreende sobre essas diferentes maneiras de se interpretar um Sistema de Equações Lineares.

A questão sete da Parte II pretende provocar reflexões sobre diferentes formas de se representar um Sistema de Equações Lineares. Por exemplo, a interpretação geométrica pode ser feita tanto por meio de retas no plano cartesiano, quanto por planos no espaço tridimensional. O que os estudantes demonstram conhecer sobre essas diferentes representações? Com essa questão poderemos ter indícios se os participantes, futuros professores de matemática, possuem familiaridade ou não com interpretação vetorial, geométrica ou matricial.

Dentre as representações contempladas na questão sete da Parte II, a representação vetorial não é vista no Ensino Médio sob o enfoque de um tratamento matemático. A disciplina de Física faz uma abordagem quando trata da mecânica clássica e das Leis de Newton, mas isso não é suficiente para que o estudante tenha uma visão geral do conteúdo.

PARTE II | QUESTÃO 08

O conteúdo de Sistemas de Equações Lineares está presente tanto no currículo da Educação Básica quanto no Ensino Superior. Que aplicabilidades você conhece relacionada a esse conteúdo? Você pode dar algum exemplo? Comente.

A questão oito foi inserida na Parte II, porque pretendemos saber se o participante, potencial futuro professor de matemática atuando na Educação Básica, compreende na prática alguma utilização dos Sistemas de Equações Lineares, pois de acordo com as orientações dos PCNEM (2000) a matemática do Ensino Médio além de possuir um valor formativo que auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico, constitui-se como ferramenta de grande utilidade na resolução de problemas nas mais diversas áreas do conhecimento humano.

PARTE II | QUESTÃO 09

Analise a afirmação: Segundo Ferreira e Gomes (1996), vários livros didáticos de matemática afirmam que um sistema que possui nulos todos os determinantes da Regra de Cramer é indeterminado. Posicione-se em relação a essa afirmação concordando ou discordando. Justifique.

A questão nove da Parte II foi inspirada em um artigo de Ferreira e Gomes (1996) em que as autoras relatam a experiência que tiveram quando ministraram um curso de aperfeiçoamento para professores da Educação Básica. Essas pesquisadoras desenvolveram suas atividades, em relação a Sistemas de Equações Lineares, em duas abordagens diferentes: interpretação geométrica para Sistemas de Equações Lineares 3×3 , e outra baseada em uma abordagem voltada para o enfoque algébrico contemplando a compreensão da Regra de Cramer e a técnica do escalonamento.

A Regra de Cramer ainda é tratada de modo equivocado em alguns livros didáticos de matemática. Ressaltamos que a regra de *Cramer* é *válida somente quando o determinante de matriz quadrada dos coeficientes do sistema for diferente de zero*, isto é, quando o sistema é possível e determinado, portanto não pode ser utilizada para discussão de Sistemas de Equações Lineares em geral.

5.3A CONSTRUÇÃO DA PARTE III: ASPECTOS MATEMÁTICOS ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A Parte III visa compreender aspectos de pensamento matemático avançado em relação a Sistemas de Equações Lineares, constituída de cinco questões.

As questões um, dois e três exploram aspectos relacionados aos processos de classificar, analisar, definir, além de exigir reconhecimento de símbolos. De maneira mais específica, as questões dois e três abordam também o processo de visualização sobre representações geométricas de sistemas de equações lineares 2×2 e 3×3 . Já a questão quatro demanda a utilização da maioria dos processos do pensamento matemático avançado apontado por Dreyfus (1991). E, finalmente, a questão cinco requer compreender diferentes representações matemáticas para um mesmo conceito (processo de traduzir) e, a partir disso, realizar conjecturas e inferências.

A seguir, apresentaremos as questões e as respectivas justificativas de cada uma dessas que compõem a Parte III da Proposta de Avaliação Reflexiva.

A questão um da Parte III pretende identificar se os participantes compreendem ou não se uma dada equação é ou não linear. Na Parte II, na questão três já havíamos perguntado a definição de um sistema de equações lineares. Agora vamos apresentar algumas equações para que os participantes reflitam a respeito do conceito e indique seu posicionamento quanto à classificação das mesmas. Mas, para nós não basta apenas classificar uma equação em linear ou não linear, queremos ter alguma certeza sobre as respostas dos participantes, por isso solicitamos que justificassem a escolha realizada. Procuramos compor esta questão com equações que não fossem triviais, isto é, buscamos modelos de equações que pudessem despertar relações entre diferentes conceitos matemáticos, por exemplo,

a equação (C) $\sqrt{2x + \frac{\pi}{4}y - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}z\right)} = 1$ e a equação (G) $\sqrt{2}x + \frac{\pi}{4}y - \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)z = 1$

, inicialmente observadas rapidamente pode até causar a impressão que seja a mesma sentença matemática, mas não é! O simples fato do primeiro termo da equação (C) figurar completamente dentro do radical, enquanto que na equação (G) apenas o número dois aparece envolvido pelo radical muda completamente o

sentido matemático das mesmas. Nessa pesquisa procuramos por esses detalhes, pois entendemos que estes dão sentido especial à Matemática.

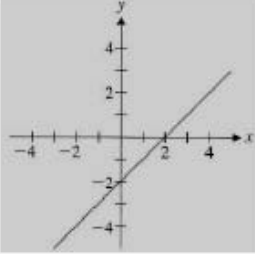
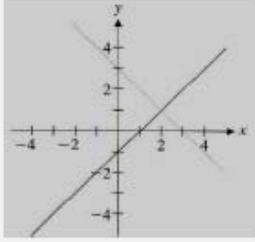

PARTE III QUESTÃO 01				
(POOLE, 2004, adaptado) Nos itens de <i>a</i> até <i>h</i> , considere as equações nas variáveis <i>x</i> , <i>y</i> e <i>z</i> . Assinale se a equação dada é ou não linear; a partir disso justifique o motivo de sua escolha.				
Item	Equação	Equação linear	Equação não linear	Justificativa da escolha
A	$2x - xy - 5z = 0$			
B	$(\cos 3) x - 4y + z = \sqrt{3}$			
C	$\sqrt{2}x + \frac{\pi}{4}y - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}z\right) = 1$			
D	$x^{-1} = 7y + z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)$			
E	$x - \pi y + \sqrt[3]{5}z = 0.$			
F	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$			
G	$\sqrt{2}x + \frac{\pi}{4}y - \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)z = 1$			
H	$3 \cos x - 4y + z = \sqrt{3}$			

Já a respeito da discussão da solução de um sistema de equações lineares 2x2, quando envolve variáveis contínuas, é comumente apresentada em livros didáticos utilizando a representação de retas no plano cartesiano. Por meio da questão dois, buscamos identificar se os participantes compartilham de tal visão.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 77) enfatizam e recomendam em vários momentos que “no estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria”.

PARTE III | QUESTÃO 02

(POOLE, 2004, adaptado) Analise os gráficos apresentados a seguir. Descreva a posição apresentada pelas retas nas figuras que se seguem, e a partir dessa descrição, considere que as retas representem soluções de sistemas de equações lineares 2×2 . Indique qual seria a classificação do sistema: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI). Justifique suas escolhas.

Figura ³⁹	Descrição da figura Posição das retas	Classificação do Sistema	Justificativa de sua escolha
			
			
			

Em seguida, pretendemos com a questão três da Parte III identificar que conhecimentos os participantes demonstram mediante a interpretação geométrica para sistemas de equações lineares 3×3 , visto que essa é praticamente inexistente nos livros didáticos. Destacamos que encontramos tal representação em Lima (1993) em um de seus trabalhos voltado ao aperfeiçoamento de professores de Ensino Médio originando o livro “Coordenadas no Espaço”, em Dante (2004) com o livro “*Matemática Contexto e Aplicações - Volume único*” direcionado a estudantes do Ensino Médio, trabalho este considerado como referência para esse segmento de

³⁹ As figuras foram retiradas de POOLE, David. Álgebra Linear. São Paulo: Thomson (2004.p. 58).

ensino, e ainda Anton e Busby (2006), autores que trabalham na área de conteúdos matemáticos voltado ao Ensino Superior, com ênfase em Álgebra Linear.

Matematicamente, entendemos que uma equação do 1º grau com três variáveis $ax+by + cz = d$ representa, no sistema tridimensional de eixos, um plano, portanto um sistema de equações lineares de ordem três pode ter sua solução analisada sob o aspecto da visão geométrico. Dreyfus (1991) afirma que a visualização é um processo pelo qual as representações podem vir a ser, nesse sentido explicita que várias representações mentais para o mesmo conceito podem complementar o outro e, eventualmente, podem ser integrados numa única representação desse conceito. Este processo de integração está relacionado à abstração matemática.

PARTE III 1 QUESTÃO 03

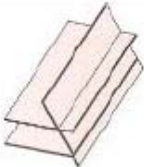

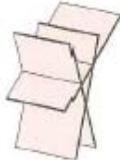


Segundo Ferreira e Gomes (1996), nos sistemas de equações lineares 3 x 3 da forma:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad (2)$$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (3)$; as equações (1), (2), (3) representam planos Π_1, Π_2 e Π_3 no espaço tridimensional. As possibilidades para as posições dos três planos são oito. Quanto à classificação da solução de sistemas de equações lineares, estes podem ser: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI).

Descreva a posição apresentada pelos planos nas figuras que se seguem, e a partir dessa descrição, considere que os planos representem soluções de sistemas de equações lineares 3x3. Indique qual seria a classificação do sistema: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI). Justifique suas escolhas.

Figura ⁴⁰	Descrição da figura Posição dos planos	Classificação do Sistema	Justificativa de sua escolha
			
			
			
			
			

⁴⁰ As figuras dos planos foram retiradas de ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra Linear Contemporânea*. Porto Alegre: Bookman, 2006. p. 61.

A questão quatro da Parte III foi escolhida por apresentar uma forma um pouco fora do padrão, isto é, o enunciado precisa ser minuciosamente compreendido e analisado para que se consiga elaborar um sistema de equações lineares que permita solucionar o problema. Pretendemos com esta questão descobrir se os participantes demonstram a capacidade de sintetização e abstração matemática por meio de organização de ideias entre grandezas e conceitos matemáticos diferentes para resolver tal problema. Segundo Dreyfus (1991) uma característica distintiva entre pensamento matemático avançado e pensamento matemático elementar é a complexidade e a forma pela qual são gerenciados.

PARTE III | QUESTÃO 04

(POOLE, 2004, p.109) Um comerciante de café vende três misturas de grãos. Um pacote com a “mistura da casa” contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com a “mistura especial” contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 100 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com “mistura gourmet” contém 100 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 200 gramas de café tostado tipo francês. O comerciante tem 30 quilos de café colombiano, 15 quilos de café queniano e 25 quilos de café tostado tipo francês. Se ele desejar utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura devem se preparar?

Em relação à fonte dessa questão, gostaríamos de destacar que Poole (2004) figura entre as principais referências bibliográficas de cursos superiores em universidades brasileiras voltados ao ensino e aprendizagem de Álgebra Linear com o livro intitulado “*Álgebra Linear*” publicado pela editora Thomson, São Paulo, por isso a escolha deste autor.

Já a questão cinco da Parte III pretende retomar o conceito geométrico de representação de sistemas de equações lineares, mas agora focando sistemas de duas equações com três incógnitas. Pretendemos com esta questão entender se os participantes estabelecem relações entre tratamento algébrico na questão proposta e o significado geométrico que atribuem por meio da análise dos coeficientes explicitados nos sistemas apresentados nesta questão.

PARTE III | QUESTÃO 05

(ANTON e BUSBY, 2006, p.80) Considere os sistemas lineares:

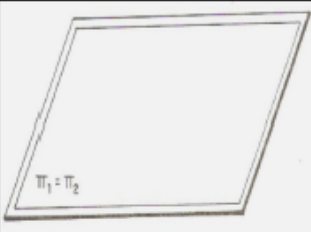
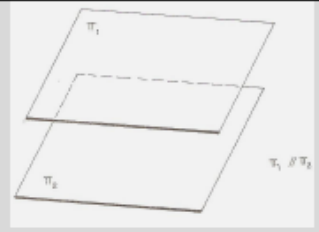
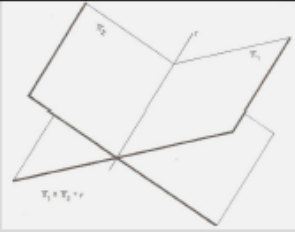
$$(I) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

- a) Mostre que o primeiro sistema não possui solução e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por estas equações.
- b) Mostre que o segundo sistema tem uma infinidade de soluções e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por essas equações.

Geometricamente, um sistema de equações lineares com duas equações e três incógnitas podem ser representados por planos. O quadro seguinte sintetiza as situações que podem ocorrer para esse tipo de sistema.

Quadro 8 – Interpretação geométrica de Sistemas de Equações Lineares com duas equações e três incógnitas

Interpretação Geométrica de Sistemas de Equações Lineares com duas equações e três incógnitas		
		
<p>(A) Figura 13 – Planos coincidentes (LIMA, 2007, p.65)</p>	<p>(B) Figura 14 – Planos paralelos (LIMA, 2007, p.66)</p>	<p>(C) Figura 15 – Planos concorrentes (LIMA, 2007, p.67)</p>
<p>Os planos π_1 e π_2 coincidem. Neste caso, o sistema é considerado indeterminado e possui infinitas soluções.</p>	<p>Os planos π_1 e π_2 são paralelos. Neste caso, o sistema é considerado impossível, portanto não admitem soluções.</p>	<p>A interseção de π_1 e π_2 é uma reta. Neste caso, o sistema é considerado indeterminado e possui infinitas soluções.</p>

6 ANÁLISES DOS REGISTROS ESCRITOS DOS PARTICIPANTES

O capítulo VI tem a finalidade de apresentar as análises realizadas a partir dos registros escritos colhidos, por meio da aplicação do conjunto de tarefas que compõem a Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares, a estudantes da 4ª série de um Curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual pública norte paranaense.

As análises buscarão respostas para a pergunta norteadora, qual seja: *que manifestações de processos de pensamento matemático avançado são reveladas em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática ao resolverem tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares?*

Como já exposto anteriormente no capítulo IV, as análises seguirão um processo descritivo-interpretativo, visto que o objetivo é investigar processos de pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática em tarefas sobre *Sistemas de Equações Lineares*. Para tanto, faremos uma análise global para se ter ideia do que revelam as respostas da amostra pesquisada. Iniciaremos tais análises, fazendo um levantamento minucioso de questão por questão.

Para a apresentação das análises construiremos alguns quadros sintetizando ideias globais que emergiram por meio das respostas dos participantes. Em algumas questões haverá transcrição de trechos de registros escritos, em outras vamos inserir pelo menos um protocolo de algum participante.

No capítulo II quando tratamos da fundamentação teórica mencionamos que dedicaríamos uma parte dessa pesquisa para conhecer algumas características pessoais dos participantes a respeito de suas experiências acadêmicas, inspirados em Freire (2004) e Thompson (1997), no intuito de valorizar o ser humano e o seu processo de autoconhecimento para promoção de sua própria aprendizagem, isso se refere à Parte I da Proposta de Avaliação Reflexiva.

A Parte II contempla aspectos conceituais e didáticos envolvendo sistemas de equações lineares e finalmente, a Parte III trata de alguns aspectos matemáticos inerentes a esse conteúdo.

Nas próximas seções, apresentaremos as considerações, percepções, observações, inferências e deduções a respeito do que obtivemos analiticamente por meio dos registros escritos desses participantes.

6.1 ANÁLISES DA PARTE I: PERFIL DOS PARTICIPANTES

A Parte I buscava traçar um perfil dos participantes dessa pesquisa, bem como conhecer algumas concepções pessoais dos mesmos, e era constituída de onze questões abertas e subjetivas. As análises das questões serão apresentadas de forma geral.

Ressaltamos mais uma vez que a Parte I oferece elementos relevantes para compreendermos indícios de pensamento matemático avançado, já que muitas respostas explicitam ações, experiências, reflexões e hábitos relacionados às vivências e práticas dos participantes no âmbito sócio-escolar.

Conforme Tall (2002), matemática é um conhecimento cultural compartilhado e há aspectos que são dependentes do contexto em que o sujeito desempenha sua atividade mental, bem como o meio cultural que esse está inserido o que corrobora com as ideias de Dreyfus (1991).

Com base nos aspectos quantitativos que se referem ao grupo de participantes que compõem essa pesquisa, apuramos que dez desses já atuam como professor na Educação Básica, fato que revela a carência de professores formados na área de Matemática, e entre esses setenta por cento ministram aulas tanto no Ensino Fundamental II quanto no Ensino Médio. Nenhum dos participantes atua ou já atuou no Ensino Fundamental I, segmento de ensino que corresponde do 2º ao 5º anos, isto é, 1ª a 4ª séries (nomenclatura antiga).

Um dado curioso é que a faixa etária dos participantes regula em torno de 25 anos. Esse fato nos indica que jovens estão se interessando pelo trabalho docente, um indício que deve ser comemorado em um país emergente como o Brasil, que se precisa de profissionais qualificados em todas as áreas para continuar avançando.

A seguir, apresentamos um quadro síntese com informações gerais sobre o os participantes dessa pesquisa.

Quadro 9 – Síntese do Perfil dos Participantes da Pesquisa

Informações gerais sobre os Participantes da Pesquisa								
Curso	Série	Disciplina	Cidade ⁴¹	Estado	Instituição	Ano		
Licenciatura Plena em Matemática	4 ^a	6 MAT 024 ⁴²	Londrina	Paraná	Pública	2011		
Estudantes Participantes		Sexo		Idade (anos)	Estudantes Professores		Estudantes não professores	
		M	F	Média				
Total	Porcentagem	09	08	25	Subtotal	Percentual	Subtotal	Percentual
17	100%				10	= 60%	07	= 40%

6.1.1 Perfil dos Estudantes Participantes

Os participantes, de modo geral, revelaram uma visão romântica da Matemática por conta dos adjetivos usados para qualificar-lá, mas parece que ainda não desenvolveram um senso crítico acurado quanto o que essa representa para si mesmo. Ainda permanecem com algumas ideias simplistas, mas sem avançar em uma reflexão mais profunda quanto aos aspectos, por exemplo, epistemológicos, históricos, filosóficos e sociais que envolvem essa ciência.

Entretanto, há que se levar em consideração que esses participantes ainda estão em processo de formação inicial, necessitando de tempo para se aprimorarem e se aprofundarem em leituras que lhes proporcionem reflexões sobre o que a matemática representa tanto para si mesmos quanto para o desenvolvimento da sociedade.

A maioria dos participantes respondeu que a matemática representa o pensamento lógico, alguns apresentaram respostas evasivas, pouco explicativas e até populares, como por exemplo, a matemática está presente no cotidiano, mesmo que não seja percebida, mas não explicaram como a matemática se faz presente.

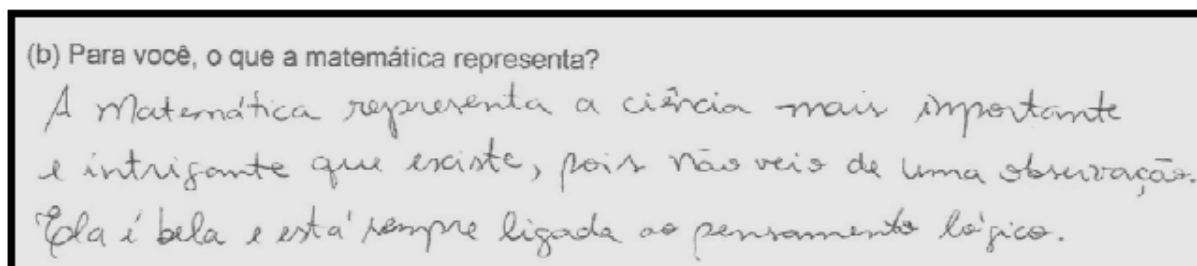
⁴¹ Cidade sede do Curso de Licenciatura em Matemática dos estudantes participantes

⁴² Prática e Metodologia do Ensino da Matemática II, ofertada anualmente pelo Departamento de Matemática no Curso de Licenciatura em Matemática, na 4^a série, com carga horária de 68 horas-aula.

Adjetivos como bela, intrigante, complexa, importante, curiosa, grandiosa apareceram em várias respostas. Alguns participantes destacaram que a matemática é uma forma de diversão, de distração e até mesmo um grande desafio para estimular a mente humana. Nesse sentido (E. 11) explicita que a matemática consiste em um modo de se alcançar 'elevação intelectual'. Já segundo (E.4) a matemática representa “uma filosofia de vida” , talvez essa asserção esteja relacionada com a dedicação, comprometimento e tempo dispensado aos estudos quando se decide aprender e estudar matemática de forma responsável.

O protocolo de (E.3) apresenta alguns dos adjetivos atribuídos à matemática.

Figura 16 – Protocolo do Participante (E. 3) - Parte I - Questão 1 - Item B



O participante (E.11) afirma que a matemática é “o que há de mais abstrato no pensamento humano”; enquanto que (E.16) complementa que “é uma ciência que serve de base para todas as outras ciências”.

Destacamos a resposta de (E. 19), porque destoa da ideia geral da amostra dessa pesquisa, por apresentar uma reflexão de caráter social. Segundo esse participante:

A Matemática, talvez não em sua totalidade, representa um mal necessário aos alunos, sejam eles de qualquer nível de educação. A matemática demonstra-se como uma área do conhecimento inseparável da sociedade e da vida da sociedade pós-moderna. A matemática também é distração, divertimento para a mente humana e apenas a obrigatoriedade do seu aprendizado é que a torna o 'mal necessário' citado acima (E. 19, 2011, Parte I, Questão 1, Item B).

Já (E.7) levanta dois aspectos relevantes sobre a matemática: a complexidade dos conteúdos e a atenção que se deve dar aos detalhes. Conforme palavras do próprio estudante:

A matemática representa para mim um grande aprendizado em diversas áreas. Talvez pela complexidade de muitos conteúdos ou pela atenção em detalhes que aprendemos a ter, nos possibilita uma facilidade de compreensão que nos ajuda na vida pessoal e também profissional (E. 7, 2011, Parte I, Questão 1, Item B).

Ainda no sentido de se destacar a relevância da Matemática, aproximadamente quarenta por cento dos participantes afirmaram que todos os conteúdos tratados nessa área são importantes. O participante (E.7) ilustra esse fato, e se expressou da seguinte forma:

Na minha opinião todos os conteúdos são importantes. Seria interessante rever conteúdos do ensino fundamental e médio na faculdade, pois hoje podemos analisar e aprender de uma forma diferente de quando estávamos na escola (ensino fundamental e médio). Gostaria de aprender principalmente números complexos, combinações, pois não me sinto preparada e tenho muitas dúvidas nesses conteúdos (E. 7, 2011, Parte I, Questão 1, Item A).

As considerações de (E.7) lembram um dos fatores apontado por Lorenzato (2010) sobre dificuldades enfrentadas por professores iniciantes, pois muitas vezes o professor recém-formado necessita ministrar conteúdos que ele mesmo só conheceu enquanto criança ou jovem, e esse fato “explica a superficialidade com que muitos conteúdos são tratados em sala de aula e, também, o apego de muitos professores ao livro didático” (LORENZATO, 2010, p. 52).

Já outros participantes valorizam os aspectos pedagógicos referentes as ações do professor, como por exemplo, trabalhar com aplicações dos conteúdos em sala de aula, além de incentivar a prática da leitura. Outro ponto destacado pelos mesmos é de que um futuro professor de matemática deve aprender diferentes procedimentos de resoluções para uma determinada situação, e ainda saber interpretar corretamente resultados obtidos seja na resolução de problemas ou até mesmo em situações mais simples de cálculos.

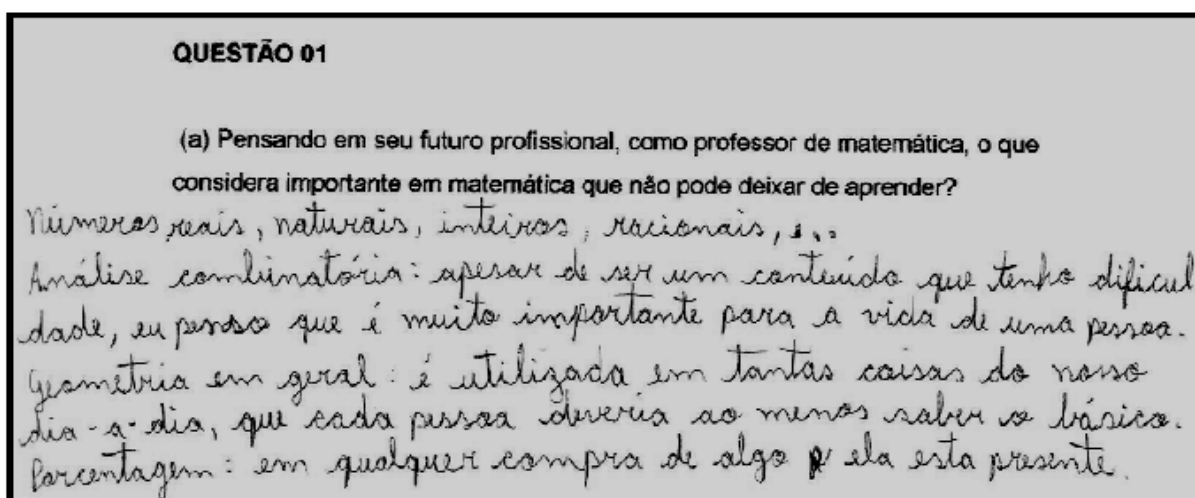
(E.19) apresentou uma resposta inusitada e praticamente inviável, pois em sua declaração afirma que “o professor deve entender a matemática por completo”. Inferimos, por meio da resposta de tal participante, que esse ainda apresenta uma visão romântica e idealizada do que deva ser um professor de matemática. De acordo com (E.19) o professor deve compreender de:

Tudo! Não há conteúdo 'desimportante', tenho que entender de tudo, incluindo conteúdos, procedimentos, história e filosofia, aplicações,... enfim, o professor deve entender a matemática por completo, deve 'respirar matemática' (E. 19, 2011, Parte I, Questão 1, Item A).

A ideia de (E.19) se aproxima da visão da professora Kay, voluntária na pesquisa de Thompson (1997). Conforme o relato da pesquisadora, Kay atribuía as dificuldades dos estudantes às dificuldades dos próprios conteúdos ou a um descuido por parte do professor na condução ou na preparação do mesmo.

Seguindo as análises, em relação aos conteúdos mais lembrados figuraram sistemas numéricos para o Ensino Fundamental, enquanto que para o Ensino Médio a análise combinatória, a porcentagem e a geometria ganharam destaques. Apresentamos o protocolo de (E. 13) que ilustra essa ideia geral entre os participantes.

Figura 17 – Protocolo do Participante (E. 13) - Parte I - Questão 1 - Item A



Quanto aos aspectos que desencadearam as razões para a escolha do curso de matemática identificamos duas tendências de respostas: participantes que explicitaram em seus registros escritos o gosto pela matemática e aqueles que não explicitaram o gosto pela matemática, mas isso não significa que esses não gostam de matemática, apenas que em suas respostas não foram encontradas declarações sobre isso.

O gosto e interesse pela Matemática foram as principais razões declaradas que motivou a maioria dos participantes a escolher o curso de matemática, aproximadamente oitenta por cento da amostra.

Durante as leituras de análises pudemos perceber dois enfoques diferentes quanto às explicações dos motivos que os levaram para tal escolha. Alguns participantes relataram Motivos psico-cognitivos para justificar sua tomada de decisão, enquanto que outros declaram Motivos socioculturais.

A expressão Motivos psico-cognitivos foi inspirada por meio de estudos e leituras realizados a partir do texto “Processos do Pensamento Matemático Avançado” de Dreyfus (1991), conforme esse autor a matemática e os aspectos psicológicos de um processo raramente podem ser separados.

Já a ideia para a expressão Motivos socioculturais emergiu das reflexões de estudos de alguns textos de Paulo Freire. A educação, para esse autor, consistia em uma meta que deveria ser alcançada para que se pudesse reorganizar e abrir novas possibilidades para se discutir os aspectos socioeconômicos e políticos do país.

Muitos participantes destacaram como Motivos psico-cognitivos a paixão pela matemática, o prazer de sanar dúvidas de parentes e amigos, a possibilidade de conseguir verificar respostas, isto é, ‘tirar prova real’, e o fascínio pela exatidão, no sentido de alcançar uma resposta que seja coerente com cada situação estudada. Tais motivos também foram destaques na concepção das professoras voluntárias na pesquisa de Thompson (1997).

De acordo com (E.7) a participação em um projeto de matemática promovido por sua professora quando ainda cursava a 8ª série do Ensino Fundamental lhe despertou o desejo de realizar um trabalho semelhante e por isso, escolheu o curso de matemática.

A minha escolha se deu por um projeto que participei quando estava na oitava série. Como sempre gostei e tinha facilidade com os conteúdos matemáticos, fui convidada a participar de um projeto que auxiliava alunos repetentes da 4ª série de uma escola da periferia. Eu gostava muito de poder ajudar outras crianças que tinham dificuldade e que aos poucos melhoravam e conseguiam acompanhar a turma. A professora que coordenou esse projeto também me motivou bastante, pois ela conseguia envolver os alunos em suas aulas, o que facilitava o aprendizado, e eu gostaria de fazer algo semelhante (E. 7, 2011, Parte I, Questão 2).

Em contrapartida, a resposta de (E.10) surpreende, pois alega que resolveu cursar matemática como forma de vencer um desafio, já que enfrentava muitas dificuldades nessa disciplina na escola.

Eu sempre gostei de ensinar e gostaria de ser professora e escolhi a matemática porque na escola era a matéria que tinha mais dificuldade, aí resolvi vencer o desafio (E.10, 2011, Parte I, Questão 2).

Em relação aos Motivos socioculturais, alguns participantes declararam a influência de alguns professores da própria família, outros manifestaram a vontade de ser aprovado em concurso público e ainda alguns responderam que optaram pelo curso de Matemática por ser um dos menos concorridos no vestibular, então era mais fácil obter aprovação. Mas, quando iniciaram o curso perceberam que poderiam gostar de matemática. O participante (E.16) declara que a "Matemática foi uma das minhas últimas opções. Sinceramente o que me motivou foi a baixa concorrência. Porém, aprendi a gostar de matemática".

Ainda identificamos nas respostas apresentadas a influência de professores de matemática que passaram pela vida acadêmica de alguns participantes e lhes inspiraram de alguma forma para que tomassem esse caminho. Nesse sentido, lembramos que segundo Freire (2004) "não há docência sem discência", na medida em que o ato de aprender precede o ato de ensinar. Destacamos a resposta de (E.17) a qual declara que:

No ensino médio eu ensinava meus colegas de sala e parentes mais novos muitos assuntos matemáticos e conseguia tirar muitas dúvidas deles. Isso somado ao fato de eu sempre ter gostado dos meus professores de matemática, me motivou a cursar matemática (E.17, 2011, Parte I, Questão 2).

Embora a maioria dos participantes declarem seu gosto e interesse pela matemática também revelam que nem sempre há espaço no curso de graduação para reflexões a respeito de habilidades matemáticas, a fim de estimular um pensamento matemático avançado.

Identificamos por meio dos registros escritos que apesar de muitos expressarem que há oportunidade para se realizar debates, reflexões e discussões a respeito de habilidades matemáticas, isso ocorre apenas em disciplinas voltadas às

áreas de aspectos pedagógicos, como por exemplo, Didática da Matemática e Metodologia e Prática de Ensino. Não obtivemos uma resposta sequer em que algum participante declara que isso ocorra em disciplinas que tratam especificamente de conhecimentos matemáticos, como por exemplo, Cálculo, Álgebra Linear, Geometria Analítica.

De acordo com Dreyfus (1991) educadores matemáticos foram os primeiros a reconhecer a importância dos processos de pensamento matemático avançado e suas interações, para se compreender o que se passa na mente de um estudante, enquanto este procura entender e relacionar um conceito matemático para a resolução de algum problema.

Por meio das considerações realizadas pelos participantes, podemos inferir que essas retratam o que Dreyfus (1991) nos declara, isto é, a preocupação com as reflexões sobre as habilidades matemáticas para se incitar um pensamento matemático avançado origina-se com educadores matemáticos, situação que ainda permanece de acordo com os relatos apresentados pelo grupo de participantes dessa pesquisa. A declaração de (E.11) caracteriza muitas respostas obtidas, ao expressar que “em disciplinas de Educação Matemática nós temos este espaço”.

Em relação a professores que ministram disciplinas de conhecimento específico matemático na graduação, como por exemplo, Álgebra, Dreyfus (1991) afirma que tendem basicamente a trabalhar com demonstrações de alguns teoremas matemáticos e, em alguns casos incluem aplicações dos mesmos. Essa afirmação aponta para o fato de que não há espaços para desenvolver discussões que instiguem pensamento matemático avançado em disciplinas como essas. Segundo a percepção de (E.13) “[...] o departamento de matemática não dá abertura a esses tipos de atividades para os alunos”.

Dreyfus (1991) vai além e traz uma conclusão de um trabalho de Davis (1988, p. 28), o qual explicita que “A maior parte do ensino de matemática, desde o ensino fundamental até cursos universitários, ensina o que poderia ser chamado de rituais: “faça isso, faça isso, então faça isso...” e que normalmente muitos professores aceitam o ritual desde que esse seja realizado com sucesso suficiente para o momento. A palavra ritual pressupõe um conjunto sistemático de regras a cumprir, desse modo não se abre oportunidade para contestação,

tampouco para refletir sobre o porquê as regras são como se apresentam. Nesse sentido, o participante (E.19) faz uma espécie de desabafo e declara que:

Nunca me senti estimulado a isso. Na verdade sempre quis fazê-lo, mas nenhum professor nos estimulou a isso, e nenhum aluno acompanha minhas ideias sobre o curso. Poucos professores estimulam debates sobre a 'Educação Matemática', Filosofia, Psicologia e coisas do tipo (E.19, 2011, Parte I, Questão 3).

Já a resposta de (E.6) traz evidências de que debates e reflexões, quando realizados, podem contribuir para se compreender mais de matemática. Segundo esse participante:

[...] eu sempre gostei de matemática mas nunca tive um raciocínio rápido ou facilidade, e quando acontece esses debates, reflexões e discussões eu consigo perceber e entender mais de matemática. Um exemplo sobre o que disse é que, já fiz dependências de algumas matérias, mas não fiquei triste até então por ter que fazer de novo, pois todas as dependências que fiz, pude aprender e olhar com outros olhos, acho que isso aconteceu por ter a oportunidade de rever conteúdos e também por estudar com professores diferentes, não que um seja melhor que o outro, mas a didática de um talvez combinou mais com minha maneira de aprender (E.6, 2011, Parte I, Questão 3).

Logo, diante da constatação de que nem sempre há oportunidades, segundo os participantes dessa pesquisa, para discutirem suas próprias habilidades matemáticas em seu curso de graduação, aproveitamos para apresentar as respostas globais que obtivemos na Questão 4 da Parte I em que perguntamos: "*Você como futuro professor o que procura fazer para compreender os porquês específicos de um conteúdo de matemática? Comente*".

Separamos as respostas obtidas em três partes para compor um quadro síntese: identificamos *o que fazem, porque fazem* e, quais são as *fontes que costumam consultar*.

É relevante destacar que muitos participantes afirmaram que procuram pelos porquês matemáticos para se sentirem seguros e confortáveis para responder algum questionamento em sala de aula, enquanto outros declararam que essa busca está associada à compreensão de significado de conceitos matemáticos.

Quanto às ações que desenvolvem para entender os porquês matemáticos figuram com mais frequência as pesquisas por demonstrações ou deduções de fórmulas matemáticas.

Quanto a fontes consultadas alguns responderam que realizam suas pesquisas em ambientes virtuais, internet, outros relataram que buscam em livros ou até mesmo que perguntam para colegas ou professores. Por meio dos relatos escritos, verificamos que nenhum dos participantes citou consultas a alguma revista especializada ou artigos científicos, isso revela que ainda precisam conhecer mais sobre publicações da área. São exemplos de publicações relevantes para a formação do professor a RPM - *Revista do Professor de Matemática* - que traz matérias de nível elementar ou avançado, acessível a professores de Ensino Fundamental, Médio e a alunos de cursos de Licenciatura em Matemática, e o *Bolema - Boletim de Educação Matemática* que dissemina produções científicas, tais como resumos de teses e dissertações, artigos, ensaios, resenhas que se relacionam à aprendizagem de Matemática ou ao papel da Matemática e da Educação Matemática na sociedade.

Os participantes (E.7) e (E.20) relataram ter algumas dificuldades para encontrar materiais que tratem de porquês matemáticos. Destacamos o protocolo de (E.7):

Figura 18 – Protocolo do Participante (E. 7) - Parte I - Questão 4

Você como futuro professor o que procura fazer para compreender os porquês específicos de um conteúdo de matemática? Comente.

Tenho dúvidas sobre muitos conteúdos, mas percebe que tenho capacidade de pesquisar em livros, internet, etc, para solucionar algumas dúvidas. Sobre os porquês dos conteúdos matemáticos tenho dificuldades de encontrar materiais que tratam desses assuntos. Alguns desses porquês pude "resolver-las" com estudos e debates com colegas e professores, e procuro me dedicar e continuar estudando para esclarecer os muitos porquês que aparecem.

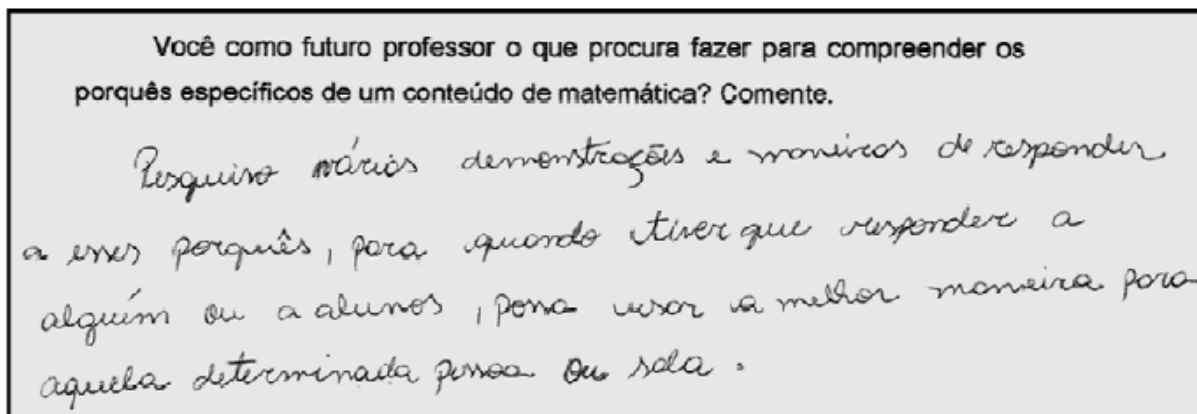
Conforme Lorenzato (2010, p. 95) a compreensão do porquê revela que o processo de aprendizagem está ganhando significado e explicita que “ensinar como se chega a um resultado dito certo não é o mesmo que ensinar a aprender por quais razões o resultado a que se chega pode ser considerado adequado, certo ou errado”.

Outro motivo apontado por alguns participantes para buscar os porquês matemáticos é o de colaborar para que o seu futuro aluno tenha um entendimento mais amplo e adquira gosto pela matemática. Nesse sentido, Lorenzato (2010, p. 97) nos afirma que “ensinar matemática valorizando os ‘porquês’ propostos pelos alunos ou propondo ‘porquês’ a eles é escolher um tipo de ensino que opta por processo e não por resultado, opta por aprendizagem com significado e não memorização”.

O participante (E.6) demonstra em sua resposta atitudes reflexivas conforme características de Freire (2011), pois revela por meio de seus registros que cada público apresenta necessidades diferentes. Sendo assim, o repertório do

professor precisa ser diversificado, conforme o que podemos perceber em seu protocolo.

Figura 19 – Protocolo do Participante (E. 6) - Parte I - Questão 4



Essa resposta de (E.6) se assemelha ao relato da professora Jeanne, conforme Thompson (1997), no sentido de que o professor deve procurar manter relações positivas, de cordialidade e de incentivo para com seus alunos a fim de aproximá-los do processo de ensino e de aprendizagem.

A seguir, apresentamos um quadro síntese que retrata as principais ações desenvolvidas por esse grupo de participantes na busca dos porquês matemáticos.

Quadro 10 – Síntese das respostas apresentadas - Parte I - Questão 4

Porquês matemáticos: o que fazer, porque fazer e onde procurar?		
AÇÕES	MOTIVOS	FONTES
<ul style="list-style-type: none"> • Busca entendimento por meio da história da matemática. • Compara conceitos e definições. • Debates com colegas e professores. • Investiga o porquê da necessidade do conteúdo e em que situação se pode aplicar. • Pesquisas sobre a origem do conteúdo. • Pesquisas sobre demonstrações e maneiras diferentes de responder tais porquês. • Procura pela utilidade do conteúdo. • Procura por aplicações fora do contexto matemático. • Questiona professores que lidam ou pesquisam sobre o conteúdo. • Realiza dedução de fórmulas matemáticas na busca de compreensão. • Reflete individualmente sobre o assunto, caso não consiga solucionar a dúvida, procura auxílio de professores. • Resumos sobre o que foi encontrado nas pesquisas buscando compreensão do tema estudado. • Tenta construir um significado mental do conteúdo pesquisado. 	<ul style="list-style-type: none"> • Adquirir raciocínio lógico. • Busca de significados. • Decorar conteúdo supra apenas necessidades momentâneas. • Preocupação com o entendimento e gosto do aluno pela matemática. • Sentir-se seguro em sala de aula. • Ter argumentos diferentes para atender pessoas com necessidades distintas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ambientes virtuais. • Entre amigos ou colegas. • Livros. • Professores mais experientes.

Se existe a procura pelos porquês matemáticos entre os participantes dessa pesquisa é razoável inferir que desenvolvem estudos além da sala de aula.

Sendo assim, entendemos que por meio de uma rotina de estudo podemos perceber dúvidas, e se as considerarmos pertinentes buscar respostas que

nos satisfaçam. Se não paramos para estudar, tolhemos oportunidades de aprender e conseqüentemente de crescer no âmbito pessoal, intelectual e profissional.

Nesse sentido, para ser bem sucedido em matemática deve se encarar o estudo como uma das ferramentas mais efetivas para se adquirir conhecimentos, compreensões e experiências sobre conceitos e conteúdos matemáticos. Ou conforme Freire (2004) essa atitude pode desenvolver a autonomia do sujeito, fazendo-o protagonista principal de sua história.

Quanto aos hábitos de estudo relatados pelos participantes houve muitas declarações de que se deve estudar matemática fazendo ou até mesmo refazendo listas de exercícios. Em nenhum momento, algum participante referiu-se ao fato explicitamente que procura desenvolver e ampliar seus conhecimentos matemáticos por meio da resolução de problema, apesar de na questão sete da Parte I se remeterem à abordagem de resolução de problema como estratégia metodológica de ensino. Isso parece suscitar uma visão dicotômica: usa-se para ensinar, mas não para aprender.

Outro fator interessante para registrar aqui refere-se à questão quatro da Parte III que solicitava dos participantes a resolução de um problema, de dezessete participantes, apenas três solucionaram corretamente a questão, e entre esses, dois declaram que mantém uma rotina semanal de estudos, ou seja, frequentemente estão construindo novas oportunidades de aprendizagem e enriquecendo suas experiências.

A seguir, apresentamos o protocolo de (E.11), um dos participantes que resolveu corretamente a questão quatro da Parte III. O relato de (E.11) explicita que a falta de organização é um dos fatores que compromete a qualidade de sua aprendizagem. Entretanto, declara que quase todos os dias procurar se envolver com alguma coisa relacionada à matemática.

Figura 20 – Protocolo do Participante (E. 11) - Parte I - Questão 5

<p>PARTE I Nº 11</p> <p>QUESTÃO 05</p> <p>(a) Quais são seus hábitos de estudo enquanto estudante da graduação? Relate.</p> <p>QUANDO ME INTERESSA MUITO PELA DISCIPLINA, CHEGO A ESTUDAR OS CONTEÚDOS COM ATÉ UM SEMESTRE DE ANTESCENDÊNCIA, ISTO ACONTECE, POR EXEMPLO, COM DISCIPLINAS QUE SÓ SÃO OFERTADAS NO SEGUNDO SEMESTRE. NO ENTANTO, QUASE TODO DIA ESTOU LENDO, REVENDO, APREENDENDO OU RESOLVENDO ALGUMA COISA DE MATEMÁTICA.</p>
<p>(b) Considerando seus hábitos de estudos, de que maneira você reflete sobre sua própria aprendizagem matemática? Explique.</p> <p>NÃO ORGANIZO A FORMA COMO VOU ESTUDAR. ESTUDO O QUE DER VONTADE. É POR ESTA FALTA DE ORGANIZAÇÃO QUE EU ME PREJUDICO UM POUCO QUANTO À APRENDIZAGEM.</p>
<p>(c) Que fatores você considera relevante para seu próprio processo de aprendizagem matemática?</p> <p>ORGANIZAÇÃO.</p>

Mas, nem todos os participantes se mostraram empenhados em construir uma rotina de estudo, como se pode perceber nas declarações de (E.8):

Figura 21 – Protocolo do Participante (E. 8) - Parte I - Questão 5

PARTE I | Nº 08

QUESTÃO 05

(a) Quais são seus hábitos de estudo enquanto estudante da graduação? Relate.

- Deixar a maioria das coisas de última hora pra estudar. (Jincero, pelo menos, RS!)

- Não prestar muita atenção os aulas.

(b) Considerando seus hábitos de estudos, de que maneira você reflete sobre sua própria aprendizagem matemática? Explique.

Considere que tenho uma aprendizagem rápida por muitas vezes deixar pra aprender e estudar de última hora. Porém, muitas coisas tornam-se "mecânicas" e vários detalhes se perdem.

(c) Que fatores você considera relevante para seu próprio processo de aprendizagem matemática?

Um bom professor que estimule os alunos a estudar além do que é dado em aula.

A seguir, exibimos o quadro com as considerações gerais dos participantes quanto aos hábitos de estudo relatados.

Quadro 11 – Síntese das respostas apresentadas - Parte I - Questão 5

ROTINA DE ESTUDO DOS PARTICIPANTES							
(A) Quais são seus hábitos de estudo enquanto estudante da graduação? Relate.							
ASPECTOS QUANTITATIVOS SOBRE A ORGANIZAÇÃO PESSOAL DE ESTUDO							
Estudo diário		Estudo semanal		Estudo apenas na véspera de provas ou trabalhos		Não relataram a frequência de estudo	
Total	Percentual	Total	Percentual	Total	Percentual	Total	Percentual
5	29,5%	4	23,5%	4	23,5%	4	23,5%

HÁBITOS DE ESTUDO RELATADOS	
<ul style="list-style-type: none"> • Resolver listas de exercícios. • Tirar dúvidas e ler muito. • Fazer poucas disciplinas por semestre para conseguir um tempo maior para rever conteúdos e resolver exercícios. • Realizar atividades diárias para rever e compreender conteúdos. • Não deixar acumular tarefas. • Deixar a maioria dos conteúdos para estudar nas vésperas de provas ou trabalhos. • Perguntar as dúvidas para os professores. • Estudar no dia seguinte da aula em que os conteúdos foram ensinados. • Quando possível, estudar os conteúdos com até um semestre de antecedência. • Procurar estudar individualmente ou em grupo na biblioteca. • Conforme a situação, estudar a teoria antes ou depois de resolver exercícios. • Buscar exemplos prontos e tentar aplicá-los a exercícios diferentes. 	
<p>(B) Considerando seus hábitos de estudos, de que maneira você reflete sobre sua própria aprendizagem matemática? Explique.</p>	
<p>Ações que despertam/despertaram reflexões sobre a própria aprendizagem matemática</p>	<p>Considerações gerais sobre a própria aprendizagem matemática: reconhecimento de potencialidades cognitivas</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Percepção ou não de sucesso em relação ao desempenho nas avaliações. • Reconhecimento de que se deve estudar e se dedicar mais. • Entendimento do assunto estudado. • No decorrer do desenvolvimento do curso procura perceber os conteúdos em que têm domínio. • Reconhece que a prática que adquiriu ministrando aulas particulares lhe fez aprender a ter mais paciência e concentração para estudar, dessa forma o seu desempenho aumentou. • Reflete se imaginando como aluno e se pergunta se haveria uma forma mais clara para realizar a explicação do conteúdo que aprendeu. • Reflexão sobre a nota que obtém na avaliação. • Pensa sobre sua aprendizagem quando se depara com um problema que não consegue resolver. 	<ul style="list-style-type: none"> • Considera a própria aprendizagem matemática boa, em relação ao tempo disponível que tem para estudar. • Reconhece que aprende rápido, mas vários detalhes se perdem. • Explicita que sua aprendizagem é muito lenta e que apresenta algumas dificuldades. • Alguns acreditam que deveriam se dedicar mais ao curso. • Considera que aprende muito, visto que estuda pouco. Relata que tem facilidade para entender os assuntos de modo geral. • Reconhece que a sua própria aprendizagem matemática é baixa. • Admite que não faz reflexão sobre a própria aprendizagem e tem medo de não aprender os conteúdos como deveria. • Relata que a falta de organização prejudica sua aprendizagem, visto que estuda o que lhe der vontade. • Explicita que se preocupa com a quantidade de conteúdos, e por isso acaba não refletindo sobre sua própria aprendizagem.
<p>(C) Que fatores você considera relevante para seu próprio processo de aprendizagem matemática?</p>	
<p>Fatores específicos relacionados à própria</p>	<p>Fatores gerais</p>

matemática	
<ul style="list-style-type: none"> • Gostar de matemática. • Aprender matemática básica. • Participação nas aulas e estudar os porquês matemáticos. • Aula que disponibilize tempo para a prática de exercícios. • Envolver-se diariamente com atividades de matemática. 	<ul style="list-style-type: none"> • Disponibilidade de tempo. • Organização e dedicação quanto aos estudos. • Ser paciente e perseverante. • Presença nas aulas e reforçar a compreensão em casa. • Realizar pelo menos o mínimo que é solicitado pelos professores em sala de aula. • Recorrer a diferentes materiais para se esclarecer dúvidas. • Estudar em ambiente tranquilo e com boa iluminação. • Professor que estimule os alunos a estudar além do que foi dado. • Talento natural para determinados assuntos. • Esforço do próprio aluno para aprender. • Refletir e ter atenção no momento do estudo. • Baixo entendimento de um determinado assunto.

Os participantes, de modo geral, possuem como principal hábito de estudo a resolução de listas de exercícios sugerida pelos professores, alguns até admitiram que chegam a refazer algumas questões a ponto de decorá-las, pois a compreensão não acontece. De acordo com Thompson (1997) essas atitudes podem estar relacionadas com uma abordagem de ensino prescritiva, cujo principal objetivo é estimular a memorização de procedimentos específicos. Já como parâmetro de se obter sucesso em matemática, as notas das avaliações continuam recebendo o destaque especial, notas altas são praticamente sinônimos de ótimo desempenho. Mas, houve outras respostas sobre o sucesso matemático, como por exemplo, a do participante (E.9) que se preocupa com a compreensão do que está sendo estudado, segundo esse participante:

Reflito me imaginando como um aluno meu. Pergunto-me: será que conseguiria entender o que eu expliquei? Fui claro? Objetivo? Será que eu conseguiria explicar o que aprendi de uma forma mais clara do que foi ensinado a mim? (E.9, 2011, Parte I, Questão 5, Item B).

O pensamento de (E.9) revela características de professor reflexivo, conforme Freire (2004), pois percebemos que há uma inquietação quanto ao processo de autonomia do próprio aprendiz, perpassando pela capacidade de autoavaliação quando se pergunta: "Será que eu conseguiria explicar o que aprendi de uma forma mais clara do que foi ensinado a mim"? Nesse sentido, (E.9) também partilha da visão professada pela professora Jeanne no relato de pesquisa de Thompson (1997, p. 20), segundo a mesma "a função do professor é apresentar o conteúdo de maneira clara, lógica e precisa". E para isso se deve "[...] enfatizar as razões e a lógica subjacente às regras e procedimentos matemáticos [...]" (THOMPSON, 1997, p.20) adotados para que se estabeleça o significado matemático entre os conceitos abordados.

Em relação aos fatores que são considerados relevantes para o próprio processo de aprendizagem matemática, o gosto pela matemática e a disponibilidade de tempo para estudo figuraram como pontos fundamentais na concepção geral dos participantes.

Mas, qual seria a expectativa desses, enquanto estudante do Ensino Superior, para uma aula que contempla um tema específico matemático, como por exemplo, Sistemas de Equações Lineares? Esse questionamento foi realizado na questão seis da Parte I e, apesar de a questão solicitar que fosse respondida enquanto estudante do Ensino Superior, muitos responderam como professores, caso, por exemplo, de (E. 19) que se expressou da seguinte forma:

Figura 22 – Protocolo do Participante (E. 19) - Parte I - Questão 6

PARTE I | Nº 19

QUESTÃO 06

Qual a sua expectativa, enquanto estudante do Ensino Superior, para uma aula que contempla um tema específico matemático, como por exemplo, Sistemas de Equações Lineares? Relate seus comentários.

ACREDITO QUE PARA A GRANDE MAIORIA DOS CONTEÚDOS DEVEMOS MOSTRAR AOS ALUNOS DE ONDE VEIO O CONTEÚDO, DEVEMOS SIGNIFICÁ-LO E FAZER COM QUE ELES APRENDA-AM.

(*) NO CASO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES UMA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SERIA EFICAZ, EXPLICAR BEM O QUE SIGNIFICA A PALAVRA "LINEAR" DENTRO DO CONTEXTO E APLICAR PROBLEMAS ONDE OS ALUNOS TENHAM QUE MONTAR O SISTEMA, PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS E QUE SE ASSEMELHEM, SEJAM ASSOCIADOS À REALIDADE DELES. ISSO TRARIA À ELES, FARIA COM QUE ELES PERCEBESSEM A IMPORTÂNCIA DO ASSUNTO E OS MOTIVOS PARA SE ESTUDAR ISSO.

Novamente, a visão de (E.19) se aproxima da professora Kay, voluntária da pesquisa de Thompson (1997). Pois, segundo a mesma o professor deve procurar utilizar uma variedade de abordagens para estimular o interesse dos estudantes, fazendo uso de exemplos, contraexemplos e mostrando as aplicações dos tópicos ensinados.

Já outros participantes, ao contrário de (E. 19) apresentaram respostas evasivas, que trazem poucos elementos para se compreenda as razões de um estudo de um tema matemático específico, como o caso de (E. 9).

Figura 23 – Protocolo do Participante (E. 9) - Parte I - Questão 6

PARTE I | Nº 09

QUESTÃO 06

Qual a sua expectativa, enquanto estudante do Ensino Superior, para uma aula que contempla um tema específico matemático, como por exemplo, Sistemas de Equações Lineares? Relate seus comentários.

As expectativas são grandes.
Sistemas de Equações lineares é um tema muito bom para se trabalhar. Possui várias aplicações, e é de grande importância no nosso dia.

Mas, houve respostas ambiciosas que caracterizam pensamento próprio de estudante, e entre essas destacamos a de (E.11), o qual afirma que espera:

Figura 24 – Protocolo do Participante (E. 11) – Parte I – Questão 6

PARTE I | Nº 11

QUESTÃO 06

Qual a sua expectativa, enquanto estudante do Ensino Superior, para uma aula que contempla um tema específico matemático, como por exemplo, Sistemas de Equações Lineares? Relate seus comentários.

VER E APRENDER TODA ALGEBRA POR TRÁS DESTA TEMA.

Ainda conforme as análises realizadas, alguns participantes responderam de modo geral e outros apresentaram relatos específicos em relação às expectativas de uma aula para o estudo de Sistema de Equações Lineares. Dessa forma, organizamos as considerações em um quadro que sintetiza as respostas obtidas para esse assunto.

Quadro 12 – Síntese das respostas apresentadas - Parte I - Questão 6

Expectativas geradas em uma aula que contempla um tema específico de matemática	
Considerações gerais	Considerações específicas sobre Sistemas de Equações Lineares
<ul style="list-style-type: none"> • Boa introdução para iniciar preparação para a abordagem do conteúdo. • Explicação clara e objetiva. • Oportunidade de conhecer detalhes específicos do tema. • Conseguir resolver um problema após a aula que se utiliza o conteúdo estudado. • Rever o conteúdo e sanar dúvidas. • Uma aula que explore exemplos de utilização do conteúdo no cotidiano. • Explicação seguida de exemplos e exercícios com grau de dificuldade crescente para os alunos resolverem. • Que o professor procure significar o conteúdo. • Uma aula explicativa que não seja cópia do livro didático. 	<ul style="list-style-type: none"> • Problemas que instiguem reflexões matemáticas. • Que os estudantes saibam métodos de resolução, bem como, quando e em qual momento utilizar. • Identificar situações que podem ser resolvidas usando Sistemas de Equações Lineares. • Ver e aprender álgebra por trás deste tema.

Diante das respostas apresentadas, entendemos que os participantes dessa pesquisa, estudantes de 4a série de um curso de matemática, ainda esperam que o professor evidencie durante uma aula que envolve um tema específico de matemática, o significado do conteúdo que está sendo abordado, seja por meio de aplicações ou até mesmo recorrendo a elementos da História da Matemática que auxiliem na compreensão do tema estudado. Muitos participantes destacaram e reconheceram que problemas que tratam de Sistemas de Equações Lineares estimulam e instigam reflexões matemáticas, pois há necessidade de se conseguir lidar com representações algébricas associadas aos aspectos de análise e interpretação, e isso requer em certa medida pensamento matemático avançado.

Além disso, identificamos entre os participantes dessa pesquisa duas concepções em relação ao tratamento de Sistemas de Equações Lineares: *resolução de problemas* e *aula tradicional*. Para ilustrar a concepção de resolução de problemas, apresentamos o protocolo de (E. 10).

Figura 25 – Protocolo do Participante (E. 10) - Parte I - Questão 7

PARTE I | Nº 10

QUESTÃO 07

Como você abordaria Sistemas de Equações Lineares com estudantes do Ensino Médio? Relate suas ideias sobre isso.

Eu levaria vários problemas separados por níveis onde cada problema tivesse 3 dicas para resolver. Escreveria os alunos livres para escolherem (depois de ter feito um problema de nível 1) o nível que faziam e pegar as dicas se ~~precisassem~~ precisassem.

Depois de resolverem alguns problemas segundo seus critérios, conversaríamos sobre o que eles descobriam, semelhanças na forma de resolver e depois faria a sistematização.

Já em contraste com as ideias de (E. 10) temos o relato de (E. 11), que escolheria uma concepção de aula tradicional, conforme podemos verificar em a seguir seu protocolo.

Figura 26 – Protocolo do Participante (E. 11) - Parte I - Questão 7

PARTE II | Nº 11

QUESTÃO 07

Como você abordaria Sistemas de Equações Lineares com estudantes do Ensino Médio? Relate suas ideias sobre isso.

COM SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES, LITERALMENTE. LÓGICO QUE TOMARIA O CUIDADO DE DEIXAR CLARO PARA OS ESTUDANTES O QUE É UMA EQUAÇÃO LINEAR E A FORMA COMO RESOLVÊ-LÁ. SINCERAMENTE NÃO SEI QUAL METODOLOGIA USAR, EM TERMOS GERAIS FARIA O SEGUINTE:

- SISTEMA LINEAR COM DUAS EQUAÇÕES E DUAS INCOGNITAS
- // // // TRÊS // // TRÊS //

A PARTIR DESTES DOIS TÓPICOS DESENVOLVERIA, COM OS ESTUDANTES, UM MEIO MAIS PRÁTICO PARA RESOLVER SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES CULMINANDO COM MATRIZES.

A seguir, expomos um quadro com as considerações gerais dos participantes sobre formas de abordagem para Sistemas de Equações Lineares direcionadas a estudantes de

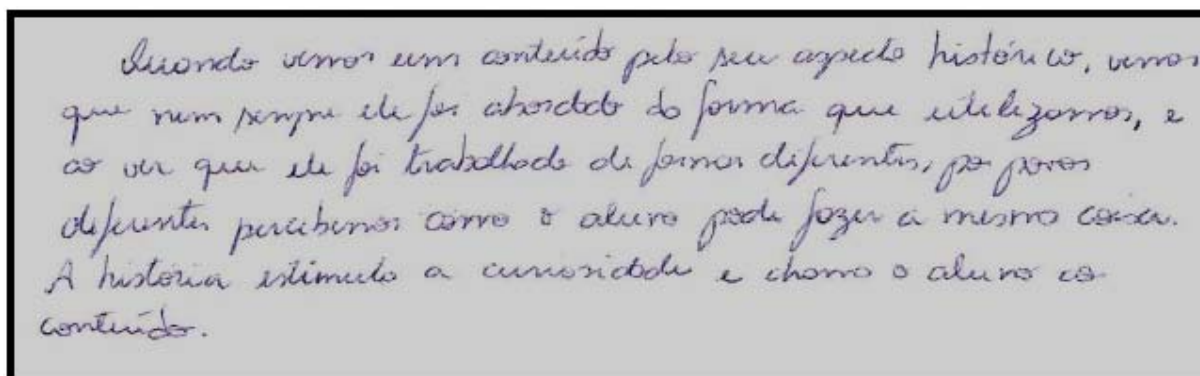
Quadro 13 – Síntese das respostas apresentadas – Parte I – Questão 7

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES : FORMAS DE ABORDAGEM	
Resolução de problemas	Outras formas de abordagem
<ul style="list-style-type: none"> • Propiciar oportunidades para que os estudantes discutam formas de resolver o problema e compartilhem suas ideias. 	<ul style="list-style-type: none"> • Aula tradicional, visando uma maneira clara para a exposição. • Alguns declaram que não teriam uma metodologia específica, mas apresentaram explicações do que fariam.
Encaminhamentos metodológicos sugeridos	
<ul style="list-style-type: none"> • Problemas que estimulem pensamento matemático. • Utilização de gráficos. • Problemas simples que retratem situações do cotidiano. • Explicação do significado da palavra linear. 	<ul style="list-style-type: none"> • Explicação sobre a definição de equação linear e modos de resolução da mesma. • Retomada de equações lineares. • Realizar-se-iam algumas explicações acompanhadas de exemplos, a seguir, problemas que teriam grau de dificuldade diferente.

Mediante as análises realizadas, a resolução de problemas figurou entre os participantes como uma das estratégias metodológicas mais indicada para o tratamento de conteúdos específicos de matemática, porque pode favorecer discussões e trocas de ideias. Entretanto, quando o assunto é proporcionar aulas de matemática dinâmicas e atraentes aos olhos daqueles estudantes que não possuem familiaridade com área de ciências exatas, os participantes acreditam que a estratégia ideal é buscar nos aspectos históricos elementos que valorizam e instigam o estudo de assuntos matemáticos por explicitar as circunstâncias em que foram desenvolvidos, bem como compreender algumas de suas aplicabilidades.

Durante as leituras de análises, identificamos dois enfoques de respostas quanto à utilização dos aspectos históricos, um relacionado aos aspectos matemáticos e outro aos aspectos didáticos.

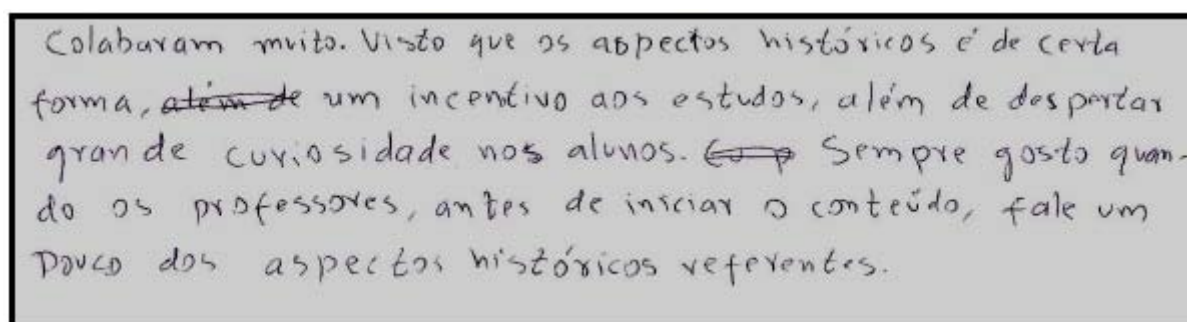
A seguir, apresentamos o protocolo do participante (E.5), relatando que:

Figura 27 – Protocolo do Participante (E. 5) - Parte I - Questão 8


Quando vemos um conteúdo pelo seu aspecto histórico, vemos que nem sempre ele foi abordado da forma que utilizamos, e ao ver que ele foi trabalhado de formas diferentes, por pessoas diferentes percebemos como o aluno pode fazer a mesma coisa. A história estimula a curiosidade e chama o aluno ao conteúdo.

A resposta de (E.5) associa, em certa medida, formas de trabalho de povoados diferentes às atitudes semelhantes praticadas por alunos que tentam compreender um tema matemático em estudo por aspectos distintos. Essa consideração nos remete a visão de Lorenzato (2010, p. 107), quando este relata que “é interessante, principalmente para nós professores, observar que aquilo que os matemáticos demoraram em descobrir, inventar ou aceitar, são os mesmos pontos em que nossos alunos apresentam dificuldades de aprendizagem”.

Já o participante (E.9) destaca que os aspectos históricos além de serem um incentivo aos estudos, desperta curiosidade, pois:

Figura 28 – Protocolo do Participante (E. 9) - Parte I - Questão 8


Colaboraram muito. Visto que os aspectos históricos é de certa forma, ~~atém~~ de um incentivo aos estudos, além de despertar grande curiosidade nos alunos. ~~←~~ Sempre gosto quando os professores, antes de iniciar o conteúdo, fale um pouco dos aspectos históricos referentes.

Por meio do relato de (E.9), lembramos as palavras de Freire (2004, p. 32) que considera a curiosidade como um dos elementos necessários ao processo de aprendizagem, conforme esse autor “não haveria criatividade sem a curiosidade que nos move e que nos põe pacientemente impacientes diante do mundo que não fizemos, acrescentando a ele algo que fazemos”.

A seguir, apresentamos um quadro com as considerações gerais dos participantes sobre contribuições trazidas pelos aspectos históricos, quando utilizados em uma aula de matemática.

Quadro 14 – Síntese das respostas apresentadas – Parte I – Questão 8

Contribuições dos aspectos históricos para aulas de matemática	
Enfoque em aspectos matemáticos	Enfoque em aspectos didáticos
<ul style="list-style-type: none"> • Compreender a dimensão do conteúdo. • Colabora para quebrar o mito de que a disciplina de matemática é sem sentido e propósito. • Conhecer as condições em que um conteúdo matemático específico se desenvolveu. • Oportunidade de conhecer como diferentes povos trabalharam determinado conteúdo. • Mostra a importância do conteúdo matemático. • Explicitam-se motivos que levaram ao desenvolvimento de uma ideia. • Aborda a utilidade do conteúdo matemático. • Percebem-se dificuldades e limitações sobre o desenvolvimento de um conteúdo matemático em determinadas épocas. • Auxilia na percepção de detalhes que em algumas ocasiões a teoria sobre o próprio conteúdo não deixa claro. • Para dar significado ao conteúdo e colaborar na compreensão de “porquês”. 	<ul style="list-style-type: none"> • Quanto mais o professor sabe sobre o conteúdo, maior a possibilidade de oferecer uma explicação clara para o aluno. • Estimula a curiosidade do aluno e por isso, chama a atenção. • Facilita o entendimento do conteúdo. • Toma o conteúdo mais interessante e atraente aos olhos do aluno. • Incentiva o aluno a estudar. • Motiva aqueles alunos que gostam mais da área de ciências humanas.

Mas, não é apenas privilégio da Matemática ser retratada e interpretada por meio dos aspectos históricos, a vida acadêmica de um estudante revela muitos elementos de sua formação e traz à tona experiências as quais mostram a influência de algumas atitudes de professores, que segundo os participantes dessa pesquisa, deixaram lembranças inesquecíveis.

A maioria dos participantes guiaram-se por suas sensações e emoções revividas e nos relataram episódios memoráveis de suas vidas escolares, sendo coerentes em suas declarações.

Contudo, nem todos possuem tais recordações, os participantes (E.4), (E.11), (E.12) e (E.16) declararam que não se lembravam de aulas marcantes. Entretanto, (E.11) nos revela que em decorrência da atitude de alguns professores passou a gostar de Matemática.

Não me recordo de alguma aula marcante, no entanto me lembro de ótimos professores que tive no final do ensino fundamental e durante o ensino médio. Eles davam aulas tradicionais, porém sempre se preocuparam com a nossa aprendizagem. Eu me lembro que eles levavam livros para a sala de aula (qualquer tema) e davam nota (1 ponto) por cada resumo de livro que a gente lia. Ensinavam xadrez para a gente e com isto nos ajudaram com o raciocínio lógico. Passei a gostar de matemática, antes odiava. (E.11, 2011, Parte I, Questão 9).

Já o estudante (E. 8) apresentou uma resposta confusa, porém reconheceu que suas aulas de Geometria Euclidiana lhes foram úteis, porque passou a perceber a importância de detalhes nos processos de demonstrações matemáticas.

Perante os relatos registrados nos protocolos, para esse grupo de participantes, a ação do professor influenciou de algum modo a forma desses de pensar, agir ou até mesmo deixou sinais desagradáveis no âmbito das lembranças escolares, e muitos desses ainda lhes acompanham.

Por exemplo, o relato de (E. 3) se mostra comovente, além de gerar nesse participante o medo de realizar leituras em público. Segundo o mesmo:

Teve uma vez que eu estava na 5ª série e uma professora de português pediu para eu ler um texto. Eu li muito mal, pois sou ansiosa e fiquei nervosa. Aí, a professora ficou me reprimindo na frente dos meus colegas e isso me marcou muito. [...] Não leio nada em público. (E.3, 2011, Parte I, Questão 9).

Contudo, tivemos declarações de momentos que provocaram inspirações e o professor tornou-se admirado pela turma, conforme, a seguir, nos relata (E. 19).

Foi uma aula de química onde meu professor (na época estava no segundo ano do ensino médio), para falar de alguma relação que o elemento 'lítio' tinha com outro elemento (faz tanto tempo que não me lembro com muitos detalhes) ele utilizou o cesto de 'lixo' da sala e o apagador para representá-los. Ele demonstrou um grande nível

de insanidade, uma quebra de padrões, ele se mostrou diferente dos outros professores, o que chamou a atenção dos alunos e o fez ganhar grande respeito da turma, inclusive o meu. Influenciou diretamente na minha formação como professor, eu como sempre fui visto o 'esquisito' da turma, (no colégio) 'o diferente' e etc. me identifiquei, e ali afirmei: 'quero ser um professor igual a esse' (E.19, 2011, Parte I, Questão 9).

Muitos participantes afirmaram que em função de algumas situações que presenciaram ou até mesmo foram protagonistas aprenderam que um professor deve preparar cuidadosamente suas aulas para evitar erros ou situações de constrangimentos, outros entre esses reconheceram que é desrespeito para com o professor não realizar as tarefas ou estudos de casa, e ainda houve aqueles que aprenderam a ser questionadores em razão das perguntas que seus professores lhe faziam.

Já a dedicação e o afincamento que alguns professores demonstraram despertou o interesse em determinados participantes em seguir a carreira docente, como ficou explicitado, por exemplo, nas declarações tanto de (E.19) quanto de (E.7). O participante (E.7) relata que:

na oitava série, quando a professora estava falando sobre racionalização de denominadores, e ela inventou uma música que tratava do assunto. Essa professora era muito dedicada e ela tinha muita satisfação e amor no que fazia, e isso me influenciou, me fez querer fazer algo semelhante (E.7, 2011, Parte I, Questão 9).

De modo geral, os participantes dessa pesquisa alegam que o professor possui grandes responsabilidades perante seus estudantes e revelam que a atenção na preparação das aulas por parte do professor se configura em um dos pontos mais relevantes para que o estudante se sinta estimulado a aprender. Nesse sentido, também emitiram suas declarações sobre possíveis contribuições que alguns documentos educacionais podem trazer para a organização da prática docente.

Mas, muitas respostas apresentadas foram evasivas. Afirmações como "não me lembro" ou "não conheço" apareceram com frequência, com destaque especial para o documento federal OCEM/2006, em que a maioria dos participantes relatou não conhecê-lo.

(E.7) apresentou uma consideração geral para todos os itens presentes na questão dez e isso ilustra a concepção geral obtida por meio dos registros escritos. Expressou-se da seguinte forma no espaço do verso da questão dez da Parte I:

Figura 29 – Protocolo do Participante (E. 7) - Parte I - Questão 10

Sei que esses documentos servem para auxiliar o professor.
 Já estudei sobre alguns deles, mas não sei diferenciá-los, sobre o que se trata cada um. Sei que há documentos com orientações metodológicas, com conteúdos que devem ser tratados em cada série, e outros.

A seguir, apresentamos o quadro obtido por meio dos registros escritos dos participantes com as considerações gerais para alguns dos principais documentos educacionais voltados à Educação Básica do Brasil.

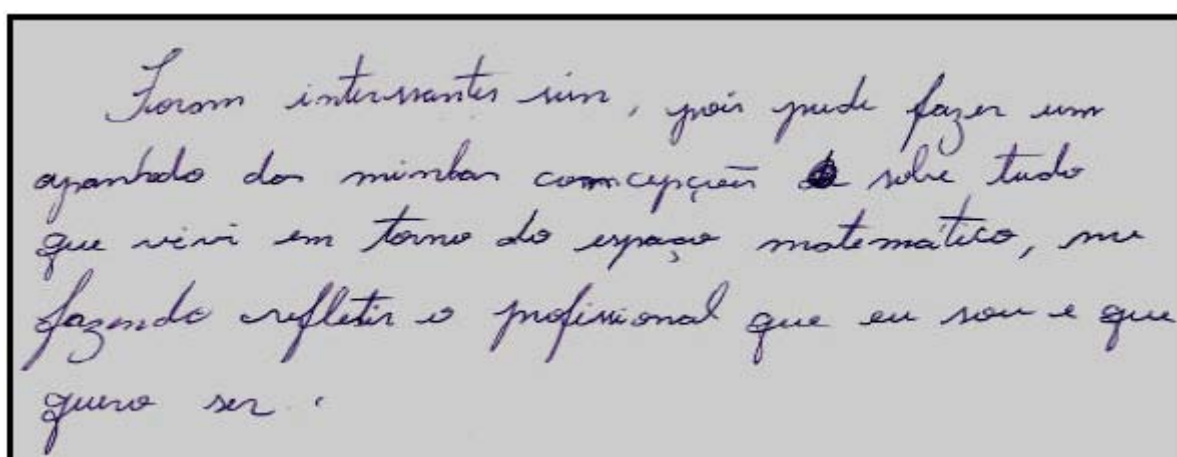
Quadro 15 – Síntese das respostas apresentadas – Parte I – Questão 10

Documentos educacionais brasileiros: contribuições para a prática docente				
Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN /1997)	Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM / 2000)	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+/2002)	Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Matemática V.2 (OCEM/2006)	Diretrizes Curriculares Estaduais da Educação Básica do Paraná - Matemática (DCE-PR/2008)
Considerações gerais dos Participantes				
<ul style="list-style-type: none"> • Oferecem elementos de fundamentação didática e política pedagógica em relação à educação. • Guia para saber as matérias que devem ser ministradas em cada série escolar. • Apresentam orientações para elaborar planos de aula. • Servem para mostrar como os conteúdos devem ser abordados. • Padronizam o conteúdo e auxilia na organização dos planejamentos anuais dando segurança ao professor. 				

Para encerrar a Parte I solicitamos uma apreciação crítica por parte dos participantes para que esses pudessem expressar sua opinião com liberdade visando à espontaneidade, sobre o primeiro conjunto de questões da Proposta de Avaliação Reflexiva envolvendo Sistemas de Equações Lineares.

A seguir, apresentamos alguns protocolos dos participantes com suas considerações. Começamos com (E.2) que ressaltou que as perguntas colaboram para se “refletir o profissional que eu sou e que quero ser”.

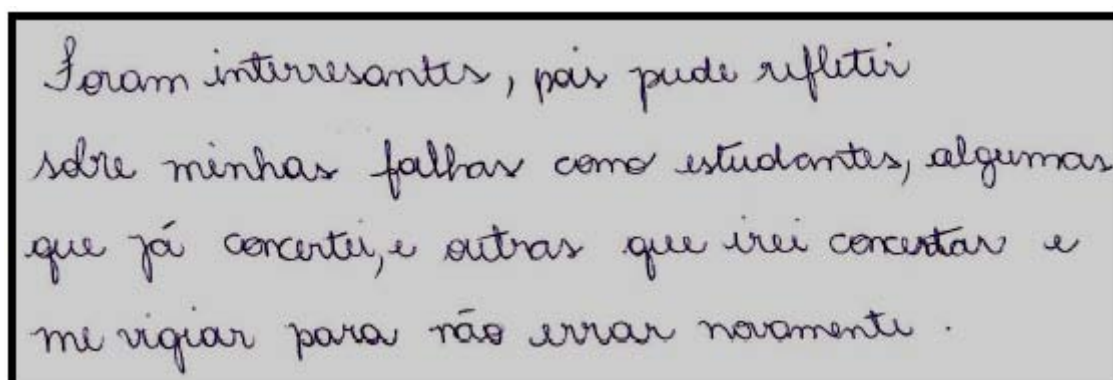
Figura 30 – Protocolo do Participante (E. 2) - Parte I - Questão 11



Foram interessantes sim, pois pude fazer um apontado das minhas concepções sobre tudo que vivi em torno do espaço matemático, me fazendo refletir o profissional que eu sou e que quero ser.

Já (E.14) destacou que as perguntas suscitaram reflexões sobre suas falhas enquanto estudante.

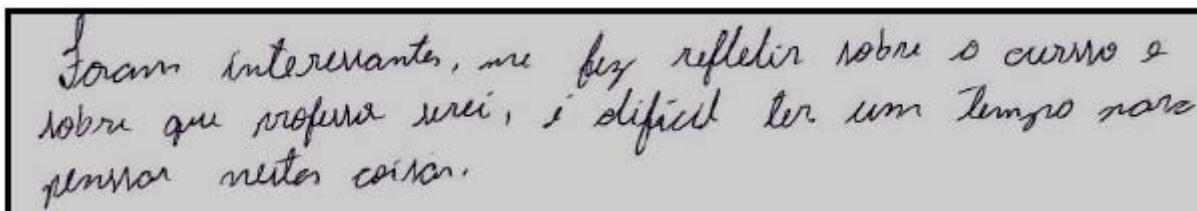
Figura 31 – Protocolo do Participante (E. 14) - Parte I - Questão 11



Foram interessantes, pois pude refletir sobre minhas falhas como estudante, algumas que já corriji, e outras que irei corrigir e me vigiar para não errar novamente.

O participante (E. 16) considerou as perguntas como uma oportunidade para refletir sobre seu curso e que professor será futuramente, visto que relata nem sempre dispor de tempo para se pensar nesses assuntos.

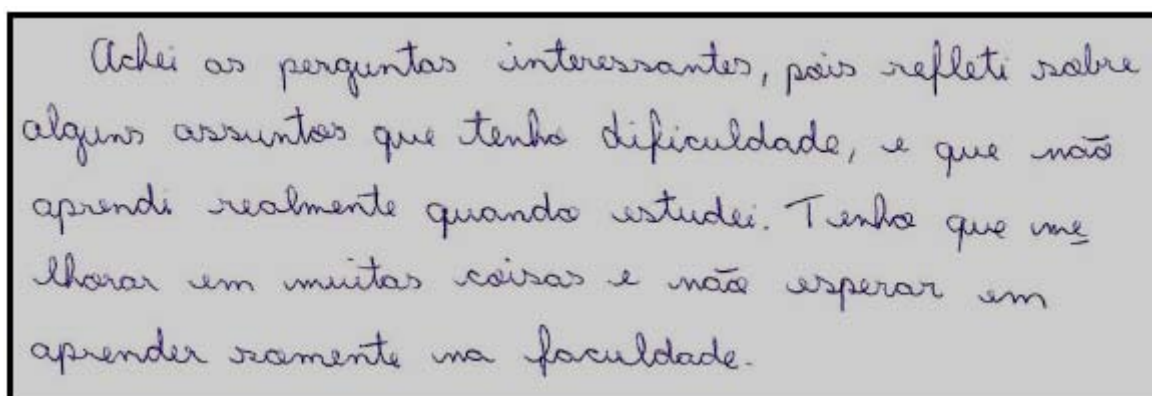
Figura 32 – Protocolo do Participante (E. 16) - Parte I - Questão 11



Foram interessantes, me fez refletir sobre o curso e sobre que professa serei, é difícil ter um tempo para pensar nestas coisas.

Complementando as declarações anteriores, (E.7) relatou que refletiu sobre alguns assuntos que apresenta dificuldades, e declarou:

Figura 33 – Protocolo do Participante (E. 7) - Parte I - Questão 11



Achei as perguntas interessantes, pois refleti sobre alguns assuntos que tenho dificuldade, e que não aprendi realmente quando estudei. Tenho que me esforçar em muitas coisas e não esperar em aprender somente na faculdade.

Conforme essas respostas apresentadas, entendemos que a Parte I da Proposta de Avaliação Reflexiva suscitou reflexões pessoais a respeito de algumas situações inerentes ao processo de ensino e de aprendizagem entre os participantes, pois perceberam que essas perguntas lhes ofereceram uma oportunidade para pensar sobre atribuições de estudante e responsabilidades de ser professor.

A partir das análises apresentadas na Parte I, objetivando demonstrar um perfil sucinto dos participantes dessa pesquisa, agrupamo-los de acordo com as visões de matemática professadas por Jeanne, Kay e Lynn,

professoras voluntárias que participaram da pesquisa de Thompson (1997), para realizar uma síntese dos aspectos gerais revelados pelos participantes.

A professora Jeanne revela, em linhas gerais, uma visão instrumentalista da matemática, pois acredita que a matemática é precisa, lógica, livre de contradições e ambiguidades, consistente em um sistema organizado e pautado em uma simbologia específica. Essas impressões combinam com as respostas de (E.5), (E.6), (E.9), (E.10) e (E.17). De acordo com tais participantes, a matemática desperta curiosidade pela sistematização lógica que apresenta, figurando na visão dos mesmos como uma espécie de arte, em que os desafios são superados pelo caráter de exatidão e a possibilidade de verificação de respostas, a chamada "prova real".

Os participantes (E.2), (E.3), (E.4), (E.8), (E.12), (E.13), (E.14), (E.16) e (E.20) se aproximaram da visão de Lynn, explicitando uma visão de matemática como uma ciência prescritiva que consiste em uma coleção de procedimentos, propriedades, fatos e "regras necessárias para encontrar respostas a tarefas específicas" (THOMPSON, 1997, p. 27). Conforme esses participantes, a matemática é considerada como uma estrutura lógica de pensamento que pode ser aplicada em atividades do cotidiano, por exemplo, a utilização das quatro operações fundamentais. Mas, também reconhecem que essa ciência serve de base para outras, pois segundo alguns, tem um caráter grandioso, intrigante e pode ser encarada como uma "filosofia de vida".

Já a professora Kay demonstra uma visão dinâmica de matemática, sustentada e manifestada pelo seu gosto durante as sessões que ministrava de resolução de problemas com seus estudantes superdotados. Segundo Thompson (1997) era evidente seu entusiasmo pela matemática, pois de acordo com Kay, essa ciência proporciona uma oportunidade estimulante para o desenvolvimento de trabalho intelectual de alto nível, assim como Dreyfus (1991) indica na explanação dos processos de pensamento matemático avançado. Tal crença caminha na direção das respostas e resoluções apresentadas por (E.7), (E.11) e (E.19). Na concepção dos mesmos, a matemática representa o pensamento abstrato caracterizado pela complexidade, demanda um nível significativo de atenção que se deve empregar aos detalhes, além de compreender as aplicações de um determinado conteúdo matemático. Ainda, conforme (E.19) a matemática constitui uma área de conhecimento inseparável da vida social moderna.

Ainda, diante das análises realizadas, entendemos que a maioria dos participantes manifestaram atitudes reflexivas à luz das ideias de Freire (2004), porque compreendem que por meio da resolução de um problema se abrem caminhos para que se instiguem reflexões matemáticas, preocupando-se dessa forma com os porquês suscitados pelos conceitos e propriedades derivados dos conteúdos matemáticos. Possuem uma ideia clara do que lhe parecem relevante aprender para exercer a docência, e consideram tanto aspectos de ordem didática, metodológica e de caráter específico acerca dos conhecimentos matemáticos que necessitam aprender para desempenhar satisfatoriamente sua futura profissão.

De modo geral, muitos participantes reconhecem nos aspectos históricos envolvendo a matemática uma forma agradável e adequada para iniciar um diálogo com seu futuro aprendiz. Pois, acreditam que é necessário estimular a curiosidade do aluno para lhe chamar a atenção, e assim ter a possibilidade de tornar o conteúdo mais interessante e atraente aos olhos de quem o conhece pela primeira vez.

A manifestação da autonomia do sujeito tão enfatizada por Freire (2004, 2011) é expressa pelo gosto predominante em todos os participantes pela matemática, encarada pelos mesmos como desafio, diversão e elevação intelectual. Sendo assim, a maioria enxerga nos hábitos de estudo uma forma indispensável de aperfeiçoamento de suas capacidades cognitivas. Porém, pelo menos metade desses são conscientes de que não mantêm um ritmo regular de estudo conforme gostariam, por conta da falta de organização pessoal. Contudo, consideram relevantes para seu processo de aprendizagem o conhecimento denso das propriedades e conceitos relacionados a matemática básica, participação ativa durante as aulas e tempo para a prática de atividades diárias que envolvam conteúdos matemáticos.

A seguir, passamos para as análises gerais da Parte II da Proposta de Avaliação Reflexiva, a partir da qual daremos ênfase aos processos de pensamento matemático avançado conforme caracterizações de Dreyfus (1991) e Resnick (1987).

6.2 ANÁLISES DA PARTE II: ASPECTOS CONCEITUAIS E DIDÁTICOS ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A Parte II foi constituída de nove questões que procuravam incentivar pensamentos matemáticos sobre conceitos relacionados a Sistemas de Equações Lineares, e também se buscava suscitar reflexões a respeito de alguns aspectos que envolvem concepções didáticas dos participantes inerentes ao processo de ensino e de aprendizagem.

A seguir apresentaremos as análises gerais da Parte II. Posteriormente faremos análises pontuais das questões um, três, quatro e cinco, pois essas tratam de elementos conceituais matemáticos específicos sobre Sistemas de Equações Lineares.

Por meio do processo de análise, constatamos que mais da metade dos participantes dessa pesquisa tiveram o primeiro contato com Sistemas de

Equações Lineares de ordem dois ainda no Ensino Fundamental, e quase oitenta por cento desses reconheceram que estudaram essa temática de forma mais abrangente em algum momento do Ensino Superior.

As respostas obtidas em relação as diferenças quanto ao tratamento do conteúdo Sistemas de Equações Lineares, em etapas distintas de formação, revelaram que no âmbito da Educação Básica o estudo desse assunto resume-se quase que exclusivamente na aprendizagem de processos de resolução, e para tal o sistema já vem constituído, isto é, na maioria das vezes não há um enunciado que instiga a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica. Outro fator apontado diz respeito a ordem dos sistemas, no Ensino Fundamental trabalha-se o tipo 2×2 , enquanto que no Ensino Médio até 3×3 .

Entretanto, no Ensino Superior o tema é explorado como uma ferramenta matemática para se resolver problemas de modo detalhado, além de apresentar muitas aplicabilidades, mas conforme algumas declarações esses fatores aumentam a dificuldade para se ter domínio do conteúdo. Desse modo, os Sistemas de Equações Lineares são retratados de várias formas e com graus diferentes de complexidade mesclando conteúdos estudados em Álgebra Linear, por exemplo, matrizes e outros em Geometria Analítica (equações de retas e planos), ou até mesmo em disciplinas de Física quando se trata de sistemas mecânicos de força. Ainda, de acordo com algumas respostas obtidas, a utilização de muitas variáveis

pode tornar os processos de resoluções trabalhosos requerendo do estudante concentração e atenção aos detalhes do problema estudado.

O participante (E.17) nos relatou sua experiência escolar quanto aos diferentes momentos de estudo de Sistemas de Equações Lineares, segundo o mesmo, na:

6^a série, gostei do tema, estudei bastante e me destacava entre os colegas de sala. 2^o ano do colegial, a matéria ficou um pouco chata porque o nível das questões era fácil e o professor tinha ficado estagnado, pois alguns alunos não acompanharam a dificuldade. Ensino Superior: Álgebra Linear. A dificuldade aumentou demais e eu estava estagnado mesmo dificuldade fácil e sofri para reaprender (E.17, 2011, Parte II, Questão 2).

Entendemos por meio do relato de (E.17) uma angústia, se assim pudéssemos dizer, pois afirmou que sofreu para reaprender em virtude do que chamou de estagnação durante seu processo de aprendizagem desse tema.

De acordo com a declaração de (E.17) reconhecemos que em alguns momentos de sua formação, teve professores que provavelmente ministravam aulas de forma “mecânica”, ou como Dreyfus (1991) declara, o que se seguiu foi apenas um ritual, considerado suficiente para o momento. Isto é, não houve preocupação com os aspectos relacionados a compreensão do conteúdo tratado. Desse modo, os processos de representação relacionados ao pensamento matemático avançado possuem pouca chance de serem consolidados, e os de abstração matemática praticamente nem chegam a ser cogitados.

Mas, o que deve ser levado em consideração quando se trata de Sistemas de Equações Lineares? As respostas dos participantes, de modo geral, indicaram que a primeira prioridade seria tratar sobre aplicabilidades e a relação que existe entre esse conteúdo e outros no próprio âmbito da matemática. Pois, dessa forma o estudante teria a oportunidade de perceber a utilidade do que está aprendendo e, possivelmente isso contribuiria para que esse tivesse ânimo e interesse para estudar o assunto em questão. Segundo (E.10) “sempre os alunos perguntam para que servem os conteúdos, quando é visível a aplicabilidade eles ficam mais interessados”. Já (E.6) complementa que as aplicabilidades permitem “aperfeiçoar os conteúdos que estão envolvidos e que já devem estar dominados”. Essas afirmações nos remetem a Dreyfus (1991) quando este explicita a

importância de possuir um grande repertório de situações (entenda-se aplicabilidades) para estimular o pensamento matemático avançado.

Todavia, embora o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares figure tanto no currículo da Educação Básica quanto no do Ensino Superior, verificamos que muitos participantes apesar de considerarem o item aplicabilidade na questão seis da Parte II como prioridade para abordar Sistemas de Equações Lineares, ainda não evidenciam ter domínio sobre isso, visto que menos de trinta por cento desses souberam apontar uma aplicabilidade ou área envolvendo esse tema matemático. Esse indício já tinha sido constatado desde as análises preliminares da questão um da Parte II em relação aos termos associados a essa temática, e retratado novamente na questão oito da Parte II.

Alguns participantes apenas citaram que Sistemas de Equações Lineares são utilizados para realizar balanceamento químico, compreender o funcionamento de GPS, resolver problemas na área de Informática e de Física, sem mencionar detalhes ou maiores explicações. O participante (E.11) explicitou que:

Frequentemente lidamos com problemas que envolvem várias equações e várias incógnitas, logo é muito importante saber lidar com sistemas de equações lineares. Podemos aplicar os sistemas de equações lineares para fazer balanceamentos químicos, por exemplo (E. 11, 2011, Parte II, Questão 8).

Em contrapartida, (E.2) e (E.8) declararam em seus protocolos que não se recordavam de aplicabilidades. (E.2) se posicionou relatando que “um exemplo não me recordo, e sua aplicabilidade não me lembro. Difícil assim lembrar de cara desses fatores”. Já o participante (E.8) apresentou uma resposta com elementos mais específicos afirmando que “não lembro de aplicabilidades como um exemplo, lembro dos professores citando área da computação. Estudei bastante em Álgebra Linear, Cálculo numérico, EDO⁴³”. Outras situações particulares referiram-se a conteúdos matemáticos, como por exemplo, resolução de equações diferenciais ordinárias e aplicação do método dos mínimos quadrados.

A segunda prioridade revelada nos registros escritos foram conceito e aspectos históricos, e justificaram que por meio do conceito é possível estabelecer

⁴³ Equações Diferenciais Ordinárias.

relações com outros podendo abrir espaço para se questionar alguns aspectos históricos. O participante (E.5) relata que o:

[...] mais importante é o conceito, pois é por meio dele que estabelecemos relações com os demais, é o momento que damos 'forma' com nome e fazemos relações com os demais itens, querendo assim aplicar e fazer relações e neste momento questionando sobre a história (E.5, 2011, Parte II, Questão 6).

Segundo (E.10) os aspectos históricos “*é uma forma de chamar a atenção dos alunos para o conteúdo*” e (E.11) ressalta que por meio desses “*é possível ver o contexto no qual estava inserido o desenvolvimento do assunto*”.

A terceira prioridade elencada pela amostra dessa pesquisa se refere as explicações dos porquês matemáticos (demonstrações matemáticas), pois isso auxiliaria na compreensão do conteúdo estudado. Nesse sentido, de acordo com (E.11) “*não devemos aceitar tudo pronto e acabado. Questionamentos devem ser feitos*”, o que demonstra uma visão ativa, no sentido de Thompson (1997), diante da matemática.

O participante (E.19) apesar de ter enumerado uma ordem de prioridade para os itens da questão seis da Parte II sobre o tratamento de Sistemas de Equações Lineares, declarou acreditar que:

[...] ‘pra’ cada perfil de aluno deve ser dada uma ênfase diferente, na verdade não há uma regra, cada aluno aprende de uma forma, e cada um se convence da importância desse conteúdo de uma maneira diferente. Acredito que todos os tópicos tem sua relevância, portanto não há mais importante' nesse caso (E.19, 2011, Parte II, Questão 6).

Destacamos a seguir o protocolo de (E.10) , pois ilustra algumas justificativas apresentadas para essa questão.

Figura 34 – Protocolo do Participante (E. 10) - Parte II - Questão 6

PARTE II | Nº 10

QUESTÃO 06

O que deve ser levado em consideração quando se trata de Sistemas de Equações Lineares? Enumere de acordo com o que acredita que seria prioridade para você enquanto professor. Explique e justifique suas escolhas.

(2) Aplicabilidades. Sempre os alunos perguntam para que estudar os conteúdos, quando é possível a aplicabilidade eles ficam mais interessados.

(3) Aspectos históricos. É uma forma de chamar a atenção dos alunos para o conteúdo.

(4) A relação que existe entre esse conteúdo e outros no próprio âmbito da matemática. → É importante o aluno perceber que os conteúdos matemáticos não são separados, des-entres.

(4) Conceito. É necessário que o aluno saiba os conceitos.

(5) Explicações dos porquês matemáticos (demonstrações matemáticas). De não parecer mágica o que o professor faz e como explica o conteúdo, não vejo para Equações Lineares muita necessidade de demonstração matemática.

() Outro (s). Qual (is)?

Dando continuidade as análises, questionamos ainda na Parte II da Proposta de Avaliação Reflexiva sobre diferentes modos de se representar ou interpretar um Sistema de Equações Lineares tais como: interpretação geométrica, interpretação matricial e interpretação vetorial. Por exemplo, a interpretação geométrica pode ser feita por meio de retas no plano cartesiano, e também por planos no espaço tridimensional.

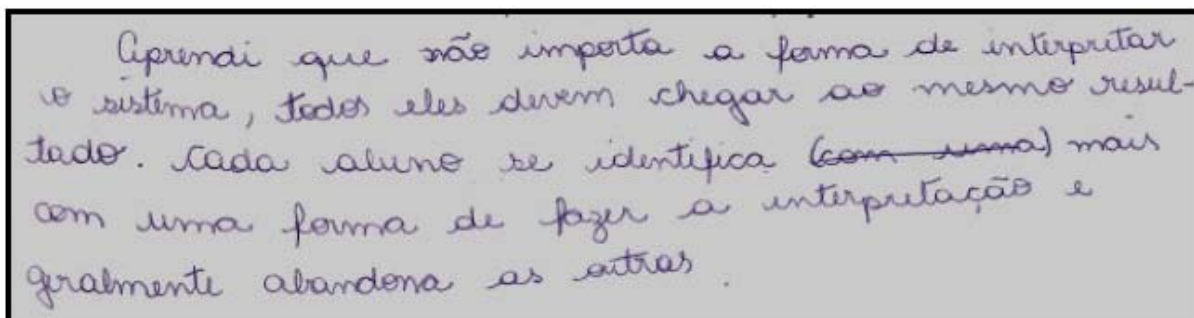
O participante (E.19) declarou que “a interpretação geométrica talvez dê mais significado a esse conteúdo, pois é um pouco mais palpável, em contraponto com a interpretação matricial que é mais ‘puramente matemática’ (apesar de suas aplicações)”, resposta que evidencia um processo de visualização apurado conforme Dreyfus (1991).

De modo geral, a maioria dos participantes demonstram conhecer e compreender mais o modo geométrico para sistemas 2×2 , isto é, aqueles que podem ser representados por meio de retas no plano cartesiano, mas não houve menção de sistemas de ordem três, tampouco algum relato que evidenciasse a associação de planos a esse tipo de sistema.

A interpretação matricial e vetorial foi quase exclusivamente lembrada apenas pelos nomes, isto é, muitos participantes não souberam indicar características matemáticas que envolviam tais interpretações. (E.5) relatou que “sobre a interpretação vetorial não me recordo quase nada, mas lembro de algo sobre as retas da interpretação geométrica poderem ser representação de força, logo, vetores”. Quando questionados sobre a descrição de retas e planos, representando possíveis soluções de Sistemas de Equações Lineares, evidenciaram falta de conhecimento e compreensão diante da descrição de figuras geométricas.

(E.10) apresentou uma resposta um tanto evasiva, a qual não contempla a solicitação da questão, a seguir destacamos seu protocolo.

Figura 35 – Protocolo do Participante (E. 10) – Parte II – Questão 7



Aprendi que não importa a forma de interpretar o sistema, todos eles devem chegar ao mesmo resultado. Cada aluno se identifica (com uma) mais com uma forma de fazer a interpretação e geralmente abandona as outras.

Em contrapartida, (E.9) tentou redigir uma resposta formalizada do ponto de vista matemático, mas não foi coerente com algumas simbologias e ideias utilizadas. Em virtude de ter utilizado um lápis de grafite muito claro, a digitalização de seu protocolo não apresentou nitidez suficiente para leitura. Por isso, transcrevemos seu protocolo na íntegra.

Quadro 16 – Transcrição do protocolo de (E.9) – Parte II – Questão 7

(E.09) Considerando sistemas com número de variáveis ≤ 3 , temos:

- Interpretação geométrica:

- 1) cada equação é vista como uma reta. Se o sistema tiver solução única, então essas retas são concorrentes, isto é, se interceptam em um único ponto.
- 2) Se tiver infinitas soluções, essas retas serão paralelas coincidentes.
- 3) Se o sistema não tiver solução, então as retas serão paralelas distintas.

- Interpretação matricial:

- 1) Se o determinante de tal matriz for nulo, o sistema pode apresentar infinitas soluções ou não apresentar solução.
- 2) Se o sistema for diferente de zero, o sistema terá solução única.

- Interpretação vetorial:

Se o sistema apresentar solução única, então os vetores são L.I.

Em relação à utilização de símbolos em matemática, Dreyfus (1991) explicita que esses são absolutamente indispensáveis à matemática moderna, porém reconhece que também existem alguns perigos associados a seu uso. Como exemplo disso, podemos perceber que (E.9) utilizou a desigualdade (menor e igual a três) de forma incompatível com o conceito de representação geométrica para sistemas de equações lineares 3×3 , pois uma equação com três variáveis pode representar um plano e não necessariamente uma reta como é explicitado no relato do participante, que possivelmente pensou no caso de duas variáveis.

A seguir, apresentaremos as análises pontuais para a questões um que trata de termos associados ao estudo de Sistema de Equações Lineares, três e quatro que abordam definições específicas relacionadas a esse conteúdo matemático e, por último a questão *cinco*, a qual retrata alguns processos de resolução a respeito desse tema.

Todas as palavras ou expressões da questão um da Parte II estão relacionadas de alguma forma com Sistemas de Equações Lineares. Destacamos que os trinta e dois termos que compõem essa questão foram organizados em cinco grupos diferentes: (I) conceitos envolvidos, (II) conteúdos matemáticos relacionados, (III) métodos de resolução, (IV) expressões relacionadas com representação geométrica e, (V) aplicações. Pretendemos com isso saber em qual (ou quais) (s) grupo (s) desse (s) os participantes demonstram mais familiaridade, e dessa forma obtermos mais alguns indícios para conduzir as próximas análises.

Para a questão *um* da Parte II consideraremos que uma palavra ou expressão foi lembrada pelos participantes se esta alcançar um índice de mais de

cinquenta por cento de ocorrência nas respostas, pois tal porcentagem caracteriza a maioria da amostra.

A seguir, apresentamos o quadro que associa a organização dos grupos aos processos de pensamento matemático avançado conforme Dreyfus (1991).

Quadro 17 – Classificação dos termos da Questão 1 da Parte II de acordo com processos envolvidos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (1991)

Organização dos termos da Questão 1 da Parte II de acordo com processos envolvidos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (1991)			
GRUPO I	Conceitos envolvidos	Representação	<ul style="list-style-type: none"> • Definir • Verificar
GRUPO II	Conteúdos matemáticos relacionados		<ul style="list-style-type: none"> • Analisar • Classificar
GRUPO III	Métodos de resolução		<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer e manipular símbolos
GRUPO IV	Expressões relacionadas com representação geométrica		<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer símbolos • Visualizar
GRUPO V	Aplicações	Representação	<ul style="list-style-type: none"> • Conjeturar • Modelar • Traduzir
		Abstração	<ul style="list-style-type: none"> • Generalizar • Sintetizar

Quanto aos aspectos quantitativos, constatamos que quatro dos participantes assinalaram apenas um quarto desses itens, e o maior índice alcançado foi de setenta e oito por cento atingido por apenas dois participantes: (E.9) e (E.11).

Conforme as análises realizadas, verificamos que a palavra Equações foi a única citada por todos, em contrapartida. *Posto de matriz* foi mencionado por menos de trinta por cento desses, embora já se esperasse um resultado nesse sentido. Ainda em relação ao Grupo I de palavras denominado *Conceitos envolvidos*, quase oitenta por cento dos participantes responderam que *Álgebra Linear* e *Pensamento Algébrico* estão associados a Sistemas de Equações Lineares.

Outro destaque dessa questão é sobre a ocorrência das palavras relacionadas com aplicabilidade pertencentes ao Grupo V, a qual girou em torno de vinte por cento. As únicas citadas, *Balanceamento químico*, *Circuitos elétricos* e *GPS* foram lembradas por apenas quatro participantes, em uma amostra de dezessete. As expressões *Alocação de recursos* e *Construção de parábola* não foram assinaladas, enquanto que *Análise de redes*, *Frações parciais* e *Interpolação polinomial* receberam uma indicação cada uma, citadas respectivamente por (E.11), (E.8), (E.7).

A seguir, exibimos o quadro obtido mediante as respostas dos participantes da pesquisa, que ficou assim definido:

Quadro 18 – Classificação dos termos da Questão 1 da Parte II conforme respostas dos participantes

Classificação dos termos da Questão 1 da Parte II conforme respostas dos participantes				
GRUPO I	GRUPO II	GRUPO III	GRUPO IV	GRUPO V
Conceitos envolvidos	Conteúdos matemáticos relacionados	Métodos de resolução	Expressões relacionadas com representação geométrica	Aplicações
<ul style="list-style-type: none"> • Álgebra linear • Coordenadas cartesianas • Equações • Igualdades • Incógnitas • Pensamento algébrico • Variáveis 	<ul style="list-style-type: none"> • Determinantes • Matrizes 	<ul style="list-style-type: none"> • Escalonamento • Método de Eliminação de Gauss • Método de Eliminação de Gauss-Jordan 	<ul style="list-style-type: none"> • Plano cartesiano • Retas 	

Perante o Quadro 18 ficou evidente que a maioria dos participantes não conhece ou não se recorda de possíveis aplicabilidades ou utilização de Sistemas de Equações Lineares relacionadas às expressões alocação de recursos, análise de redes, balanceamento químico, circuitos elétricos, construção de parábola, frações parciais, GPS e interpolação polinomial. O quadro 18 associa justamente o processo de abstração quando o estudante apresenta familiaridade com situações que envolvem a aplicação do conteúdo matemático.

Agora, nos questionamos: será que esses estudantes de 4a série de Licenciatura em Matemática, participantes dessa pesquisa, tiveram oportunidades de trabalhar com situações problemas, as quais evidenciaram possíveis aplicabilidades do tema matemático aqui tratado? Cremos que se aconteceram, foram poucas vezes diante do que encontramos em seus protocolos. Portanto, aqui temos uma forte evidência que esse grupo de participantes, de modo geral, ainda não atingiu o processo de abstração matemática no sentido de Dreyfus (1991).

Outro destaque a ser feito diante desse quadro é que em relação às expressões ligadas aos aspectos geométricos, a ideia de plano (espaço tridimensional) sequer é cogitada pela maioria que pode vir a ser representado por um sistema de equações lineares de três variáveis, por exemplo, e mais uma vez temos novos indícios de que o processo de visualização, o qual auxilia na organização das estruturas de pensamento matemático, ainda não está desenvolvido em muitos desses participantes.

As palavras mais lembrados estão associadas a diferentes conceitos, que por sua vez leva a refletir a respeito de definições variadas.

De acordo com Dreyfus (1991) um dos processos envolvidos no pensamento matemático avançado é a capacidade de definir. A definição de um conceito matemático torna-se relevante no processo de ensino e de aprendizagem, a medida que esta agrega elementos que permitem reconhecimento, identificação e entendimento sobre características e formas matemáticas pertinentes a um determinado tema proposto.

Dando continuidade, a questão três da Parte II investigava se os participantes conseguiam definir ou explicitar características sobre Sistemas de Equações Lineares. As análises dessa questão baseiam-se, matematicamente, em Poole (2004), Anton e Busby (2006) e Lima (2006).

Para a questão três da Parte II dividimos os participantes em quatro grupos: *Grupo I*, constituídos de quatro participantes que responderam corretamente a questão. *Grupo II*, formado por nove participantes que definiram incorretamente um Sistema de Equações Lineares. *Grupo III*, composto por dois participantes que declararam não saber definir, (E.4) e (E.19). Entretanto, (E.19) considera que sabe outros processos como reconhecer, criar e resolver. Finalmente o *Grupo IV* formado também por dois integrantes (E.2) e (E.3) da pesquisa que relataram não se

recordarem da definição, mas apresentam exemplos de sistemas de equações lineares formados por duas equações e duas incógnitas.

As respostas encontradas no *Grupo I* se destacaram por apresentar linguagem formal e simbologias adequadas. Além disso, também foram explicitadas nas respostas a classificação das soluções de um sistema de equações lineares, podendo este ser considerado determinado quando apresenta solução única, indeterminado nos casos em que há mais de uma solução e impossível, quando não apresenta solução.

O participante (E.11) apresenta uma definição sucinta, e de características matemáticas marcantes por conta da simbologia que utiliza, além de apresentar a classificação de um sistema de equações lineares. Segundo (E.11):

um sistema de equações lineares contém equações do tipo: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = b$. Neste sistema pode haver x equações e y incógnitas.

(i) Se $x=y$, o sistema terá uma solução.

(ii) Se $x<y$, o sistema terá infinitas soluções.

(iii) Se $x>y$, o sistema poderá ser indeterminado.

Obs.: (i), (ii) e (iii) serão consideradas se as equações forem linearmente independentes caso (E.11, 2011, Parte II, Questão 3).

Já (E.14) optou por expor sua resposta de um modo mais simples, desprovido de simbologias. Constatamos que parece ser quase uma regra, entre esses, que quando se explana a definição de um sistema, é necessário relatar sobre sua classificação. Conforme (E.14):

Um conjunto de equações do primeiro grau, com duas ou mais equações; com duas ou mais incógnitas e suas soluções podem ser: determinado (único), indeterminado ou impossível (E.11, 2011, Parte II, Questão 3).

Para (E.16) “*um sistema de equações lineares é composto de no mínimo de duas equações, e no mínimo duas incógnitas*” e complementa com o

seguinte tempo: $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 3y = 28 \end{cases}$ Apesar desse participante apresentar uma definição incompleta do ponto de vista matemático, diferentemente de seus colegas do *Grupo I*, em vez de expor a classificação de Sistemas de Equações Lineares, optou por apresentar um exemplo de um sistema de ordem dois.

Mas, em relação ao *Grupo I*, a resposta de (E. 9) se destacou e nos chamou a atenção, ainda mais por nos fazer lembrar as considerações de Boldrini et al (1980), nos remetendo à Lima (2001, p. 45), quando este afirma que “o nível, a qualidade do ensino e, conseqüentemente, a formação adquirida pelo aluno dificilmente serão superiores ao nível e à qualidade média dos livros didáticos disponíveis. Daí a importância dos mesmos”. Conforme (E.9):

Figura 36 – Protocolo do Participante (E. 9) - Parte II - Questão 3

PARTE II | Nº 09

QUESTÃO 03

Defina um Sistema de Equações Lineares e explicita suas características.

Em \mathbb{R} , dados $x_i, a_{ij}, b \in \mathbb{R}$ com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, um sistema de equações lineares é um conjunto de equações da forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (1)$$

Dizemos que o sistema acima tem m equações e n variáveis. As variáveis são x_1, x_2, \dots, x_n , $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{m2}$ são chamados de coeficientes e b_1, b_2, \dots, b_m são constantes.

• Se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, dizemos que o sistema (1) é homogêneo; caso contrário, dizemos que é não-homogêneo.

• Um sistema de equações lineares pode ser:

- Determinado (Apresenta solução única)
- Indeterminado (Apresenta mais de uma solução)
- Impossível (Não apresenta solução)

E, conforme Boldrini et al (1980):

O participante (E.7) evidencia conhecer uma simbologia matemática específica para alguns tipos de sistemas ao declarar que estes são formados por equações “do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots = 0$ ”. O problema da definição de (E.7) é que este quando utilizou essa simbologia matemática “ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots = 0$ ” não se atentou que esta só corresponde a sistemas lineares homogêneos, mas também existem os não-homogêneos, caso em que a constante é diferente de zero.

O participante (E.13) relata que “um sistema de equações lineares pode conter no mínimo uma variável”, quando na verdade, é necessário que haja pelo menos duas. Entretanto, apresenta como exemplo um sistema 2x2

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$$

. Prosseguindo, (E.17) apresenta uma resposta confusa que não atende à solicitação da questão. (E.8) admite em sua definição que “um sistema de equações lineares é composto de duas ou mais equações que podem ser de 1º ou 2º grau”. Finalmente, (E.20) apresenta apenas um exemplo, embora este seja equivocado. De acordo com esse participante um sistema de equações lineares pode ser representado por um sistema de duas equações que apresentam quatro incógnitas diferentes, e em seu protocolo encontramos como exemplo a seguinte

sentença: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2z + 3t = 4 \end{cases}$.

Uma característica marcante em muitas respostas do *Grupo II* é a apresentação de exemplos de Sistema de Equações Lineares contemplando apenas duas equações e duas incógnitas, isto é, de ordem dois.

Dando sequência nas análises pontuais da Parte II, a questão quatro procurava identificar se os participantes conheciam definições específicas quanto a temática de interesse, e questionamos: o que é um sistema linear homogêneo? As leituras de análises revelaram que apenas cinco participantes responderam corretamente, os quais foram (E.4), (E.9), (E.10), (E.11) e (E.19). (E.12) e (E.14) tentaram responder, mas sem sucesso. Já (E.2), (E.3), (E.5), (E.7), (E.13), (E.16) relataram que não se lembravam dessa definição, e (E.6), (E.8), (E.17) e (E.20) admitiram não saber.

O participante (E.19) que havia declarado na questão três da Parte II que não sabia definir Sistemas de Equações Lineares, apresentou um relato completo sobre a definição de sistema linear homogêneo, segundo este:

um sistema linear homogêneo é aquele sistema formado por equações lineares homogêneas, ou seja, é composto por equações lineares cujo termo independente é nulo. Por exemplo: $2x + y = 0$: é uma equação linear homogênea (E.19, 2011, Parte II, Questão 4).

Na definição de (E.19) há um tom explicativo, em oposição a resposta apresentada por (E.11) com elementos puramente simbólicos. Em seu protocolo encontramos o seguinte registro:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= 0. \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= 0. \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_m &= 0 \end{aligned} \text{ (E.11, 2011, Parte II, Questão 4).}$$

O participante (E.7) apesar de declarar que não se recordava suspeitou “[...] que é quando a equação é igualada a zero”. Já (E.5), (E.14) e (E.16) apresentaram um erro comum, pois acreditavam que um sistema linear homogêneo é definido quando o mesmo é classificado como possível e determinado.

Sabemos que a compreensão de definições, a organização e o estabelecimento de relações entre conceitos e métodos de resolução de um conteúdo matemático estimulam uma das ações desejadas e esperadas para se desenvolver o pensamento matemático avançado, a capacidade de sintetizar, considerada um dos processos fundamentais para se chegar à abstração matemática, conforme caracterizações de Dreyfus (1991). E de acordo com Resnick (1987), durante esses processos podem haver confusões entre conceitos e até algumas incertezas, porque esses não são algoritmos envolvendo interpretações e julgamentos diferentes dependendo da experiência do sujeito. Sendo assim, os erros ou possíveis equívocos são inerentes aos processos de pensamento matemático avançado, e a medida que se adquirem novos conhecimentos, esses vão desaparecendo ou tornando-se menos frequente.

Desse modo, a ação de relacionar conceitos e procedimentos colabora para que se consiga realizar um diagnóstico da situação estudada e decidir em que momento um procedimento matemático é mais aconselhável e favorável que outro, esse processo de integração está relacionado à abstração, segundo as considerações de Dreyfus (1991).

Continuando as análises, após sínteses realizadas na questão cinco da Parte II sobre os métodos de resolução para Sistemas de Equações Lineares,

verificamos que o mais conhecido entre os participantes é o método de substituição e, por sua vez, o que conhecem menos é o método relacionado a Regra de Cramer. Outra informação relevante é que essa amostra considera o método de escalonamento uma ferramenta matemática efetiva para se trabalhar na disciplina de Álgebra Linear.

Na sequência, apresentamos as considerações gerais para cada um dos métodos de resolução abordados pela questão cinco da Parte II.

Quanto ao método de substituição, o participante (E.12) relata em seus registros que este é *“usado para isolar uma incógnita de uma equação e substituir em outra equação do sistema”*, enquanto (E.4) e (E.11) destacam o mesmo, como sendo o método mais utilizado na Educação Básica. Já o (E.9) lembrou que não é vantajoso o uso de tal procedimento para sistemas com muitas incógnitas, porque os cálculos se tornam trabalhosos e demorados.

Sobre o método de comparação, o participante (E.7) declarou que *“os alunos usam este método quando já estão familiarizados, para resolver o sistema de uma forma mais rápida”*, enquanto (E.11) relatou que para utilização deste *“isola-se uma das incógnitas em quantas equações estiver trabalhando, e compara-se os resultados”*. Para a maioria dos participantes tal método é aconselhável para sistemas que apresentam duas incógnitas.

Para a utilização do método de adição, (E.11) explica que *“escreve-se uma equação embaixo da outra, organizando-se colunas só com as primeiras incógnitas, segundas, e assim por diante. O método consiste em somar uma linha com o múltiplo de outra para eliminar uma incógnita”*. Mas, o seu uso é aconselhável segundo (E.9) *“para sistemas de poucas variáveis e equações”*. (E.10) apresenta uma consideração relevante sobre este método, de acordo com suas experiências esse *“é o método em que os alunos tem mais dificuldade, acredito que seja porque existe a necessidade de ‘manipular’ as equações”*, no sentido da explicação relatada por (E.11).

O método de escalonamento, segundo (E.11), consiste em *“reduzir uma matriz quadrada qualquer para uma matriz identidade”*, e conforme os registros de (E.12) *“serve para diminuir o número de incógnitas das equações até que se obtenha a última equação com uma incógnita”*. De acordo com a resposta da maioria dos participantes, esse método só foi visto na graduação, e segundo os

mesmos é aconselhável para resolver sistemas com muitas equações e muitas variáveis, auxiliando-os em disciplinas como a Álgebra Linear.

Em relação ao método de resolução matricial, muitos participantes relataram que esse só foi visto na graduação e relatam ter dificuldades para utilizar esse método, no entanto, não explicitam que tipo de dificuldades seriam essas. Limitaram-se apenas em dizer que tal método transforma um sistema em matriz e envolve equações com muitas incógnitas. O participante (E.14) explicitou que usa esse método “poucas vezes, pois com sistemas de equações maiores que (3x3) tenho bastante dificuldade”.

Ainda, a questão cinco da Parte II sobre métodos de resolução para Sistemas de Equações Lineares no item Regra de Cramer evidenciou que a maioria dos participantes declararam que não se lembravam ou não conheciam tal método. Esse fato é confirmado mais uma vez pela questão nove da Parte II, já que apenas dois participantes demonstraram compreensão sobre a utilização inadequada da Regra de Cramer.

O participante (E.9) apresentou em suas considerações, para a questão nove da Parte II, o erro a que Lima (1996) se refere em suas explicações quanto à utilização equivocada da Regra de Cramer, isto é, quando “os quatro determinantes que aparecem na regra são todos iguais a zero, poder-se-ia pensar que ela fornece $x = 0/0$, $y = 0/0$, $z = 0/0$ e concluir que o sistema é indeterminado, isto é, possui infinitas soluções. Mas, não é bem assim” (LIMA,1996, p. 110) . Porém, mais uma vez escreveu com um grafite muito claro e, apesar de realizarmos um tratamento na figura, não ficou suficientemente nítido, por isso fizemos a transcrição de seu protocolo, conforme o que apresentamos a seguir.

Quadro 19 – Transcrição do protocolo de (E.9) – Parte II – Questão 7

Concordo. Nesse método considerando um sistema 3 por 3 e uma matriz A, nas variáveis x, y, z a solução é dada por (em síntese)

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \text{ e } z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Se todos os determinantes são nulos, então teremos: $x = \frac{0}{0}, y = \frac{0}{0}$ e $z = \frac{0}{0}$, cujo valor é indeterminado, pois a divisão $\frac{0}{0}$ não está definida.

Já (E.10) evidencia que não se pode utilizar a Regra de Cramer em qualquer situação e lembra as considerações de Ferreira e Gomes (1996, p. 14). Segundo essas pesquisadoras “a regra de Cramer para resolver sistemas lineares só pode ser aplicada no caso em que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é não nulo: essa situação corresponde ao caso em que os três planos se intersectam num ponto e o sistema tem solução única”. A seguir, destacamos o protocolo de (E. 10).

Figura 38 – Protocolo do Participante (E. 10) - Parte II - Questão 9

PARTE II | Nº 10

QUESTÃO 09

Analise a afirmação: Segundo Ferreira e Gomes (1996), vários livros didáticos de matemática afirmam que um sistema que possui nulos todos os determinantes da Regra de Cramer é indeterminado. Posicione-se em relação a essa afirmação concordando ou discordando. Justifique.

Essa afirmação eu acredito estar errada, pois se os determinantes forem zero, ~~isto~~ isto significa que a regra de Cramer não é adequada para aquela situação.

O participante (E.4) discorda da afirmação apresentada e alerta para o fato de que a Regra de Cramer é restrita, ou seja, só pode ser utilizada em sistemas que podem ser representados por meio de uma matriz quadrada. De acordo com seu relato, “[...] pode haver sistema que não dá para resolver por Regra de Cramer, pois a matriz associada a esse sistema não possui determinantes, pois não é quadrada”.

Algumas questões da Parte II apresentaram indícios de que determinados participantes demonstraram relações entre processos de pensamento matemático avançado (DREYFUS, 1991; RESNICK, 1987) e características presentes no pensamento algébrico conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993),

Lins e Gimenez (1997), Ponte et al (2009), segundo a organização do quadro três, exposto no final capítulo II.

As análises da Parte II indicaram algumas manifestações de processos de representação, o qual inclui outros tais como analisar, classificar, definir, reconhecer e manipular símbolos, considerados por Dreyfus (1991) ações elementares que podem subsidiar a construção e o gerenciamento do pensamento matemático avançado. Entretanto, o processo relevante para atingir tal pensamento continua sendo o de abstração, que envolve a capacidade de generalização, formalização e sintetização, os quais serão possivelmente evidenciados nos exames das questões da Parte III.

Diante do que encontramos até aqui, inferimos que muitos participantes ainda nem sequer consolidaram processos elementares relacionados ao pensamento matemático avançado, fato constatado, por exemplo, pela carência de entendimento do significado da definição de um sistema de equações lineares, conteúdo visto pelos mesmos desde a etapa da Educação Básica. Somado a isso, a ideia sobre situações que envolvem aplicabilidades desse conteúdo matemático é praticamente desconhecida pelos mesmos.

Sobre alguns processos de resolução de sistemas de equações lineares, os participantes demonstraram conhecimento do método de substituição, esse, segundo os mesmos, trabalhado exaustivamente nas séries finais do Ensino Fundamental II.

A Regra de Cramer, considerada uma técnica tradicional para resolver sistemas de equações lineares, mesmo apresentando alguns inconvenientes, presente no currículo de matemática do Ensino Médio foi quase que ignorada pelos participantes, exceto por (E.4), (E.9) e (E.10). Já o método do escalonamento, recomendado pelas Orientações Curriculares do Ensino Médio (2006), só foi estudado pela maioria, segundo respostas presentes nos protocolos, em disciplinas da graduação, como por exemplo, a de Álgebra Linear.

A seguir, continuaremos com as análises da Parte III, cujas questões retratam aspectos matemáticos mais específicos e exigem tanto processos de representação quanto de abstração matemática, no sentido de Dreyfus (1991).

6.3 ANÁLISES DAS QUESTÕES DA PARTE III: ASPECTOS MATEMÁTICOS ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

O objetivo principal da Parte III era investigar aspectos dos processos de pensamento matemático avançado em relação a Sistemas de Equações Lineares, a qual era constituída de cinco questões.

As questões um, dois e três exploram elementos relacionados aos processos de classificar, analisar, definir, além de exigir reconhecimento e manipulação de símbolos. De maneira mais específica, as questões dois e três ainda abordam o processo de visualização sobre representações geométricas de Sistemas de Equações Lineares 2×2 (retas) e 3×3 (planos). Já a questão quatro demanda a utilização da maioria dos processos do pensamento matemático avançado apontado por Dreyfus (1991), inclusive processos de generalizar, formalizar e sintetizar inerentes ao processo de abstração matemática. E, finalmente, a questão cinco requer compreender diferentes representações matemáticas para um mesmo conceito (processo de traduzir e analisar) e, a partir disso realizar inferências a respeito de representações algébricas associadas a representação geométrica.

A seguir serão apresentadas as análises gerais de cada uma das questões que constituíam a Parte III da Proposta de Avaliação Reflexiva.

Iniciamos com a questão um, em que esperávamos identificar se os participantes evidenciam a compreensão ou não, se uma dada equação é ou não linear. Para isso, apresentamos algumas equações e solicitamos para que os mesmos as classificassem em linear ou não, mas que justificassem suas respostas.

Destacamos que (E.5), (E.9), (E.10) e (E.19), acertaram integralmente essa questão, e ainda explicaram cada uma de suas classificações. Em contrapartida, (E.20) acertou apenas metade de suas respostas e não apresentou justificativas para as mesmas, o que não ocorreu com outros participantes.

Muitos participantes acertaram a classificação da maioria das equações, entretanto a equação do item (A) " $2x - xy - 5z = 0$ " alcançou o maior percentual de erro, obtendo nove respostas incorretas. Acreditamos mediante as análises que o erro foi cometido por conta do termo xy , o qual apresenta grau geral dois e não um. No próximo parágrafo descrevemos algumas situações que

apareceram nos registros escritos dos participantes que classificaram essa equação incorretamente.

Os participantes (E.2), (E.3), (E.4), (E.7), (E.12), (E.13), (E.16), (E.17) e (E.20) erraram a classificação da equação apresentada no item (A), isto é, responderam que " $2x - xy - 5z = 0$ " é tida como equação linear. Os participantes (E.2) e (E.7) justificaram que suas respostas foram baseadas na presença do expoente um, mas que estavam incertos sobre isso. (E.4) explicou que todos os termos eram lineares, enquanto (E.12) declarou que "as variáveis estão sendo multiplicadas por constante". Esses não se atentaram para o fato de xy figurar como produto de duas incógnitas. Neste caso, (E.12) cometeu mais de um engano, pois não soube diferenciar incógnita de variável, o que também ocorreu com (E.17). Conforme os registros escritos de (E.17), esse considerava tal equação como sendo linear, porque continham "*variáveis elevadas a um*". Já o participante (E.13) justificou sua escolha dizendo que se baseava na definição de equações lineares. Mas, diante da resposta que apresentou para sistemas de equações lineares na [Q.3] da Parte II relatando que "*um sistema de equações lineares pode conter no mínimo uma variável*", suspeitamos que o mesmo confunde variável com incógnita. Já o participante (E.16) justificou que poderia representar graficamente a equação " $2x - xy - 5z = 0$ " utilizando uma reta, e por isso considerava-a como linear. Tanto (E.3) quanto (E.20) apesar de terem assinalado que tal equação era tida como linear, não apresentaram explicações para a realização dessa classificação.

A equação (F) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ foi classificada incorretamente por (E.6), (E.8) e (E.11), isto é, relataram que a mesma se tratava de uma equação linear, sendo que tais participantes apresentaram apenas esse erro. Entretanto, (E.6) apesar de acertar quase todas as classificações, declarou não saber diferenciar uma equação linear de uma não linear. Encontramos o seguinte relato em seu protocolo: "Não tenho certeza de nada. Estou com vergonha de admitir que não sei diferenciar uma equação linear de uma não linear. A regra que usei para diferenciar é uma regra que eu acho". Já o erro cometido por (E.8) pode estar associado ao que esse participante acredita. Segundo o mesmo "um sistema de equações lineares é composto de duas ou mais equações que podem ser de 1o ou 2o grau", resposta encontrada no protocolo desse para a questão três da Parte II.

Uma surpresa foi o erro apresentado por (E.11), e justamente em uma equação de grau dois, visto que foi um dos participantes que definiu

corretamente um sistema de equações lineares. Ora, compreendemos que se um estudante sabe definir corretamente tal sistema, seria coerente que esse mesmo soubesse reconhecer equações lineares. Por isso, insistimos no fato de que é necessário que haja discussões sobre as habilidades matemáticas ao longo do desenvolvimento das muitas disciplinas que integram um curso de matemática. Uma coisa é compreender a definição de um conceito matemático, outra muito diferente consiste em apenas saber declamá-lo corretamente, sem ter ocorrido o processo de abstração matemática.

Por meio das análises, ficou evidente que muitos participantes apresentam incompreensões ou dúvidas em conceitos básicos de matemática. Por exemplo, reconhecimento de números reais, tido como constantes, os quais foram prontamente confundidos ou classificados como incógnitas ou até mesmo como variável. Muitos participantes equivocam-se no tratamento matemático de constantes, variáveis, incógnitas e termos associados a elementos de características trigonométricas.

Dentre as oito equações apresentadas na questão um da Parte III, cinco traziam elementos que se remetiam a trigonometria. Conforme Sampaio et al (1978, p. 89) “são consideradas equações trigonométricas aquelas nas quais a incógnita figura submetida a seno, cosseno, tangente etc”.

Os participantes (E.2), (E.3), (E.4), (E.14) e (E.17) responderam de forma incorreta a classificação da equação (B) $(\cos 3) x - 4y + z = \sqrt{3}$ relatando que a mesma era uma equação não linear. Duas foram as razões apresentadas para tal situação. As justificativas explicitadas nos protocolos de (E.2), (E.3), (E.4) e (E.14) sinalizavam que tal equação era trigonométrica. Conforme a compreensão de (E.14) o termo $\cos(x)$ lhe dava garantia disso. Mas, na verdade como se pode observar na equação (B), o termo que aparecia era $(\cos 3)x$, este apontado por (E.3) e (E.4) como fator que a caracterizava como equação trigonométrica. Esses participantes não perceberam que $(\cos 3)$ é uma constante real. Já (E.17) demonstrou a compreensão desse fato, pois não fez qualquer menção sobre $(\cos 3)$. Entretanto, declarou em seu protocolo que tal equação era não linear pelo motivo de figurar nesta $\sqrt{3}$, considerado um número irracional. Esse mesmo participante comete esse mesmo erro na equação apresentada na letra (H) $(H) 3 \cos x - 4y + z = \sqrt{3}$. Apesar de acertar a classificação, justifica que a mesma

não é linear em decorrência dos termos $3 \cos x$ (o que é correto), mas também em razão da presença de $\sqrt{3}$. Talvez (E.17) possa ter pensado no fato de $\sqrt{3}$ ser um irracional, e por isso, não poderia ser tratado como uma constante. Essa situação nos remete a Resnick (1987), pois conforme a mesma o pensamento matemático avançado envolve diferentes critérios que por vezes conflitam uns com outros revelando incertezas, e tende a ser complexo, a medida que nem tudo que se precisa para resolver uma tarefa é conhecido pelo sujeito.

Houve um erro similar ao de (E.17) no protocolo de (E.3), quando esse realizou a classificação da equação apresentada no item (E) $x - \pi y + \sqrt[3]{5} z = 0$. De acordo com (E.3) tal equação era tida como não linear, porque apresentava o termo $\sqrt[3]{5}$. Neste caso, entendemos que o participante não soube reconhecer que raiz cúbica de cinco se tratava de uma constante. Nesse sentido, (E.7) classificou tal equação como sendo de grau três em função da presença do termo $\sqrt[3]{5}$. Quer dizer, neste caso, (E.7) evidenciou não saber realizar a distinção entre constante e incógnita.

A equação apresentada no item (D) $x^{-1} = 7y + z = \text{sen} \left(\frac{\pi}{9} \right)$ foi classificada corretamente pelos participantes (E.2) e (E.17) como sendo não linear, mas justificaram tal classificação pelo fato de considerarem o termo $\text{sen} \left(\frac{\pi}{9} \right)$ como não linear, sendo que este se trata de uma constante, e não, neste caso, pelo motivo de figurar o termo x^{-1} nessa equação.

Seguindo com essas análises específicas, os participantes (E.3), (E.4) e (E.14) erraram a classificação da equação (G) $\sqrt{2}x + \frac{\pi}{4}y - \left(\text{sen} \frac{\pi}{5} \right)z = 1$ pois entenderam que $\sqrt{2}$ e $\left(\text{sen} \frac{\pi}{5} \right)$ eram termos não lineares, em vez de constantes.

E para finalizar as considerações matemáticas relacionadas a essa questão da Parte III, destacamos mais um erro cometido por (E.13). Conforme esse

participante, a equação $\sqrt{2}x + \frac{\pi}{4}y - \text{sen} \left(\frac{\pi}{5} z \right) = 1$ é considerada não linear, o que está

correto, mas explica que a justificativa para isso é a presença da constante n , em vez apontar os termos $\sqrt{2x}$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}z\right)$, ambos não lineares.

Mediante as análises realizadas nessa questão, inferimos que muitos participantes confundem constantes irracionais $\{\sqrt{2}, \pi, \sqrt[3]{5}\}$ ou trigonométricas $\left\{\text{sen}\frac{\pi}{5}\right\}$ quando essas estão associadas com incógnitas. Em outras palavras, parece que quando percebem esses termos associados com incógnitas, a primeira resposta que tendem a registrar é que em função do tipo de coeficiente que acompanha a incógnita, tal termo algébrico é considerado não linear. Neste caso, a capacidade de se expressar utilizando determinadas simbologias e compreender operações algébricas veiculadas a essas aparentam estar um tanto comprometida.

Quanto às manifestações de pensamento algébrico, os registros escritos de muitos participantes sugerem que a diferenciação entre incógnitas, constantes e variáveis ainda não é clara. Esse fato é relevante tendo em vista que a maioria desses já desempenham a função de professor de matemática, além do que tais termos se referem a conceitos básicos de matemática.

A percepção de características, por exemplo, quanto ao que se trata ou não de uma equação linear foi detectada por menos da metade dos participantes. Sendo assim, deduzimos que para essa amostra o processo de tradução de enunciados em linguagem natural para uma linguagem algébrica podem ser afetados de forma significativa.

Além disso, a maioria das respostas evidenciou que a demonstração de conhecimentos sobre conceitos matemáticos distintos que podem ser pertinentes para a identificação de Sistemas de Equações Lineares ainda não estão consolidados.

Alguns registros escritos explicitam falta de compreensão de que na sentença “ $(\cos 3) x$ ”, “ $\cos 3$ ” representa uma constante, enquanto “ $\cos 3x$ ” ou “ $3 \cos x$ ” constitui uma função trigonométrica. Esse fato, por exemplo, corrobora para entendermos que esses indícios sinalizam que muitos participantes permanecem apenas no processo de representação em relação ao pensamento matemático avançado no sentido de Dreyfus (1991).

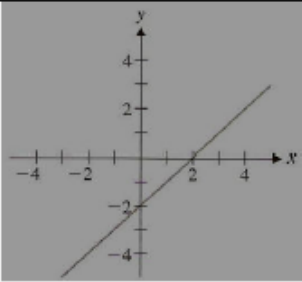
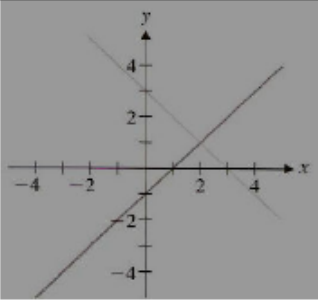
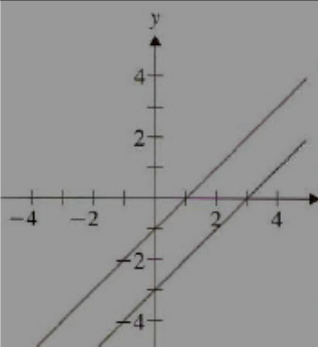
Prosseguindo com as análises, a discussão da solução de um sistema de equações lineares 2×2 , quando envolve variáveis contínuas, é

comumente apresentada em livros didáticos utilizando a representação de retas no plano cartesiano, as quais podem ser descritas do ponto de vista geométrico como sendo coincidentes, concorrentes ou paralelas. Por meio da questão dois da

Parte III buscamos identificar se os participantes demonstram conhecer e compreender essas representações gráficas.

A seguir, apresentamos um quadro síntese com os modelos de respostas obtidos mediante os registros escritos dos participantes.

Quadro 20 – Síntese das respostas apresentadas – Parte III – Questão 2

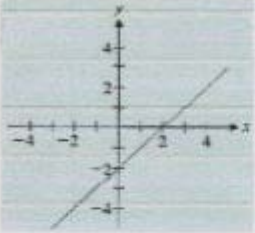
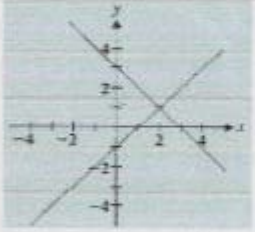
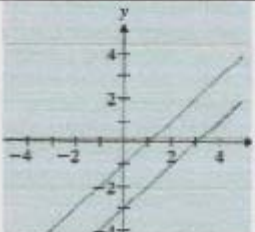
PARTE III 1 QUESTÃO 02	
<p>(POOLE, 2004, adaptado)⁴⁴ Analise os gráficos apresentados a seguir. Descreva a posição apresentada pelas retas nas figuras que se seguem, e a partir dessa descrição, considere que as retas representem soluções de sistemas de equações lineares 2×2. Indique qual seria a classificação do sistema: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI). Justifique suas escolhas.</p>	
FIGURA I	Síntese das repostas apresentadas
	<ul style="list-style-type: none"> • 35% descreveram a figura corretamente, isto é, as retas são coincidentes. • 65% classificaram o sistema corretamente, isto é, SPI. • 47% justificaram adequadamente, isto é, o sistema apresenta infinitas soluções.
FIGURA II	Síntese das repostas apresentadas
	<ul style="list-style-type: none"> • 65 % descreveram a figura corretamente, isto é, as retas são concorrentes, e mais especificamente perpendiculares. • 82% classificaram o sistema corretamente, isto é, SPD. • 82% justificaram adequadamente, isto é, o sistema apresenta uma única solução, sendo que esta corresponde ao ponto de interseção entre as retas.
FIGURA III	Síntese das repostas apresentadas
	<ul style="list-style-type: none"> • 76% descreveram a figura corretamente, isto é, as retas são paralelas. • 88% classificaram o sistema corretamente, isto é, SI. • 82% justificaram adequadamente, isto é, o sistema não apresenta solução, pois não há interseção entre as retas.

⁴⁴ As figuras foram retiradas de POOLE, David. *Álgebra Linear*. São Paulo: Thomson, 2004. p. 58.

Por meio das respostas obtidas, verificamos que o sistema possível indeterminado (SPI) é o menos conhecido e compreendido entre muitos participantes, pois nem metade desses apresentaram justificativas corretas, e quase trinta por cento decidiram por deixar em branco esse espaço em seus protocolos. Isso nos remete à afirmação de Lima (1993, p.10) de que em alguns cursos elementares é dada pouca atenção aos sistemas indeterminados. Segundo o mesmo, “a indeterminação significa que o problema expresso pelo sistema (S) possui infinitas soluções, cabendo-nos em cada caso escolher a que melhor se adapta as nossas conveniências”.

Um fator relevante para destacar nessa questão é sobre a descrição da posição das retas, em que os percentuais de acertos foram os menores comparados aos itens de classificação e justificativa da mesma. O protocolo de (E.13), por exemplo, traz uma descrição das retas baseado em aspectos relativos ao plano cartesiano e não exatamente a respeito da posição das retas, exceto na figura três, em que o participante registra que “as retas são crescentes e paralelas”. Inferimos que (E.13) talvez não se recordou que além de paralelas, a posição entre duas retas podem ser chamadas de coincidentes ou concorrentes. Ainda a respeito desse protocolo, destacamos o fato de que não se tem reta crescente ou decrescente, tem-se função crescente ou decrescente e o seu gráfico representado por uma reta.

Figura 39 – Protocolo do Participante (E.13) – Parte III – Questão 2

Figura ¹	Descrição da figura Posição das retas	Classificação do Sistema	Justificativa de sua escolha
	Uma reta cres- cente passando por $y = -2$ e $x = 2$.	SPD	
	Uma reta decres- cente que corta o eixo y em 3 e o eixo x em 3 . A outra reta é crescente passan- do por $y = -1$ e $x = 1$. Elas se *	SPI	* Cruzam no 1º Q. E temos um ponto de intersecção $y = 1$ e $x = 3$.
	duas retas cres- centes. Retas paralelas.	SI	

Já as respostas de (E.14) sobre a posição das retas é centrada em uma descrição algébrica, e não geométrica. Esse participante demonstra, neste caso específico, reconhecer que uma representação gráfica envolvendo duas retas pode ser expressa por meio de um sistemas de equações lineares de ordem dois. Contudo, comete vários erros relacionados à matemática básica, os quais já deveriam ter sido superados. Pois, essa questão aborda uma situação trivial que pode ser encontrada na maioria dos livros didáticos da área que trata sobre o assunto.

Figura 40 – Protocolo do Participante (E.14) - Parte III - Questão 2

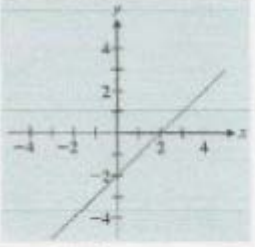
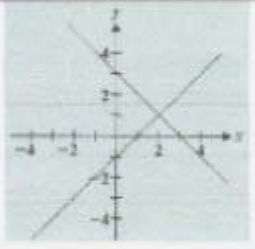
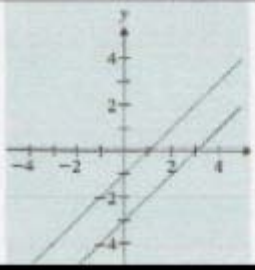
Figura ¹	Descrição da figura Posição das retas	Classificação do Sistema	Justificativa de sua escolha
	$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$	Sistema indeterminado	pela interseção das retas
	$\begin{cases} x = 3 \wedge y = 3 \\ x = 1 \wedge y = -1 \\ \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 0 \end{cases} \end{cases}$	Sistema determinado	pela interseção das retas em um único ponto.
	$\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$	Sistema impossível	pela não interseção das retas

De acordo com as análises que realizamos, (E.14) não soube relacionar adequadamente a representação algébrica à gráfica. Na primeira figura, apesar de classificar o sistema como indeterminado, registra um sistema de equações retratando um sistema possível determinado, cujo ponto de interseção seria (2,-2), e parece não se atentar para esse fato. Tanto no segundo quando no terceiro gráfico, (E.14) classifica o sistema e o justifica corretamente mediante o aspecto gráfico das retas. Entretanto, os sistemas apresentados evidenciam erros inusitados para um estudante de licenciatura em matemática da 4ª série que, de acordo com seu relato, já atua como professor na Educação Básica em todas as séries do Ensino Fundamental e Médio. Por exemplo, o participante não percebe que o ponto de interseção do segundo gráfico, é (2,1) como o mesmo já sugere, pois conforme o sistema apresentado, tal ponto é (3, -3). E, no terceiro gráfico, apesar de classificar o sistema como impossível, elabora um sistema de equações lineares que representa um sistema possível determinado, cujo ponto de interseção é de (3,0).

Neste protocolo, inferimos que o participante parece não refletir sobre a coerência que deve coexistir entre classificação, justificativa e representação algébrica para um sistema de equações lineares de ordem dois.

Ainda, sobre essa questão, (E.8) demonstrou não compreender a diferença entre retas coincidentes e retas concorrentes. Conforme, podemos verificar nos registros apresentados em seu protocolo. Outro aspecto a ser apontado na solução desse são os equívocos quanto a classificação de um sistema de equações lineares 2×2 . O segundo e o terceiro gráficos mesmo sendo totalmente diferentes quanto a posição relativa entre duas retas acabaram recebendo a mesma resposta, isto é, no entendimento desse participante ambos representam sistemas impossíveis, quando na verdade, é apenas o gráfico três que retrata essa situação.

Figura 41 – Protocolo do Participante (E.8) – Parte III – Questão 2

Figura ¹	Descrição da figura Posição das retas	Classificação do Sistema	Justificativa de sua escolha
	Concorrentes	SP	1 ponto em comum, 1 solução ²
	Concorrentes	SPI	Dois pontos em comum nenhuma solução não possui 3 pontos em comum.
	Paralelas	SI	Nenhum ponto em comum, nenhuma solução

Dando continuidade as análises, passamos agora para a questão três da Parte III.

Matematicamente, uma equação do 1o grau com três variáveis $ax+by + cz = d$ representa, no sistema tridimensional de eixos, um plano. Portanto, um sistema de equações lineares 3x3 pode ter sua solução analisada sob esse aspecto geométrico. Pretendemos com a questão três da Parte III identificar que conhecimentos e compreensões os participantes demonstram explicitar diante de tal questão, pois de acordo com algumas pesquisas que fizemos (para maiores detalhes ver capítulo III) essa interpretação geométrica para sistemas de equações lineares é praticamente inexistente nos livros didáticos. A seguir, apresentamos um quadro síntese para essa questão, o qual retrata os percentuais de acertos alcançados entre os participantes.

PARTE III I QUESTÃO 03

Segundo Ferreira e Gomes (1996), nos sistemas de equações lineares 3 x 3 da forma:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad (2)$$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (3)$; as equações (1), (2), (3) representam planos Π_1, Π_2 e Π_3 no espaço tridimensional. As possibilidades para as posições dos três planos são oito. Quanto à classificação da solução de sistemas de equações lineares, estes podem ser: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI).

Descreva a posição apresentada pelos planos nas figuras⁴⁵ que se seguem, e a partir dessa descrição, considere que os planos representem soluções de sistemas de equações lineares 3x3; indique qual seria a classificação do sistema: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI). Justifique suas escolhas.

⁴⁵ As figuras dos planos foram retiradas de ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Porto Alegre: Bookman, 2006. p. 61.

Quadro 21 – Síntese das respostas apresentadas – Parte III – Questão 3


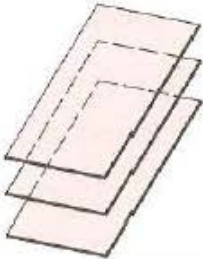
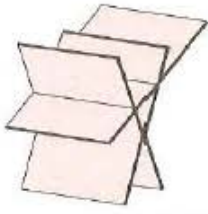
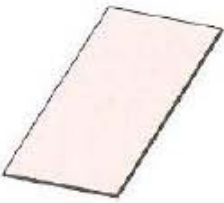
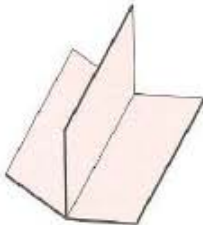
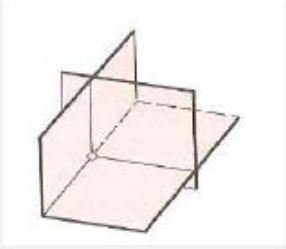
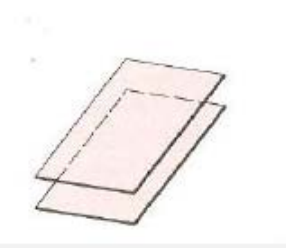
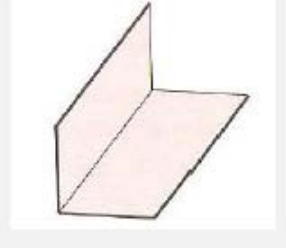
Síntese das respostas apresentadas	
FIGURA I	
	<ul style="list-style-type: none"> • 11,7% descreveram a figura corretamente, isto é, dois planos são paralelos entre si e outro os intersecta segundo retas paralelas. • 23,5% classificaram o sistema corretamente, isto é, SI. • 23,5% justificaram adequadamente, isto é, o sistema não apresenta solução, porque não há interseção comum entre os planos.
FIGURA II	
	<ul style="list-style-type: none"> • 11,7% descreveram a figura corretamente, isto é, os três planos são paralelos distintos. • 82,3% classificaram o sistema corretamente, isto é, SI. • 82,3% justificaram adequadamente, isto é, o sistema não apresenta solução, porque não há interseção comum entre os planos.
FIGURA III	
	<ul style="list-style-type: none"> • 5,8% descreveram a figura corretamente, isto é, os três planos se intersectam dois a dois, segundo retas paralelas umas as outras. • 41,1% classificaram o sistema corretamente, isto é, SI. • 29,4% justificaram adequadamente, isto é, o sistema não apresenta solução, porque não há interseção comum entre os planos.
FIGURA IV	
	<ul style="list-style-type: none"> • 52,9% descreveram a figura corretamente, isto é, três planos coincidentes entre si. • 64,7% classificaram o sistema corretamente, isto é, SPI. • 47% justificaram adequadamente, isto é, o sistema apresenta infinitas soluções, porque a interseção comum é um plano.
FIGURA V	
	<ul style="list-style-type: none"> • 5,8% descreveram a figura corretamente, isto é, os três planos são distintos e têm uma reta em comum. • 29,4% classificaram o sistema corretamente, isto é, SPI. • 35,2% justificaram adequadamente, isto é, o sistema apresenta infinitas soluções, porque tem uma reta como interseção comum entre os planos.





FIGURA VI	
	<ul style="list-style-type: none"> • 11,7% descreveram a figura corretamente, isto é, os três planos se intersectam dois a dois em um único ponto comum. • 70,5% classificaram o sistema corretamente, isto é, SPD. • 52,9% justificaram adequadamente, isto é, o sistema apresenta solução única, porque há um ponto de interseção comum entre os planos.
FIGURA VII	
	<ul style="list-style-type: none"> • 29,4% descreveram a figura corretamente, isto é, dois planos coincidentes paralelos ao terceiro, sem interseção comum. • 76,4% classificaram o sistema corretamente, isto é, SI. • 64,7% justificaram adequadamente, isto é, o sistema não apresenta solução, porque não há interseção comum entre os planos.
FIGURA VIII	
	<ul style="list-style-type: none"> • 23,5% descreveram a figura corretamente, isto é, dois planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta. • 41,1% classificaram o sistema corretamente, isto é, SPI. • 47% justificaram adequadamente, isto é, o sistema apresenta infinitas soluções, porque a interseção comum entre os planos é uma reta.


Enquanto o participante (E.14) afirmou não entender o modo como iria descrever a posição dos planos representados pelas figuras, (E.4) optou por deixar em branco essa parte de seu protocolo. Já (E.16) relatou não se lembrar do modo como faria tal descrição. Essas foram as únicas declarações registradas por esses participantes para todas as figuras presentes nessa questão. Já o participante (E.20) deixou seu protocolo completamente em branco e no momento da entrega, no dia da aplicação da Proposta de Avaliação Reflexiva, relatou verbalmente que não sabia nem por onde começar a questão três da Parte III. (E.3) descreveu apenas os planos que davam a ideia de serem paralelos ou coincidentes, o restante das outras figuras permaneceram em branco. (E.11) e (E.13) apesar de apresentarem uma descrição para os planos e a possível classificação quando esses mesmos representassem sistemas de equações lineares de ordem três, cometeram alguns

erros e não justificaram as razões para suas respostas. Os participantes (E.2), (E.5), (E.7), (E.8) e (E.10) apresentaram muitas respostas coerentes, entretanto houve alguns erros, ora de classificação ou de descrição dos planos. O protocolo de (E.12) mostra registros quanto a descrição e classificação dos planos, e algumas justificativas ficaram em branco. Porém, muitas respostas tiveram a notação “não sei” registrada pelo mesmo, o que não ocorreu com outros. Já as respostas de (E.6), (E.9) e (E.19) demonstram que os mesmos conhecem e compreendem adequadamente a descrição da posição dos planos, além de conseguirem classificar e justificar corretamente as escolhas realizadas.

A seguir, apresentamos o protocolo de (E.17) que ilustra alguns modelos de respostas obtidas para essa questão.

Figura 42 – Protocolo do Participante (E. 17) – Parte III – Questão 2

Figura ²	Descrição da figura Posição dos planos	Classificação do Sistema	Justificativa de sua escolha
	3 planos paralelos e 1º cruzando-os	SPD	Como há cruzamento é porque possuem pontos em comum
	3 planos paralelos	S_1	não possuem pontos em comum
	3 planos se cruzam	SPD	há pontos em comum é possível encontrar uma solução determinada
	3 planos juntos	SPi	Todos os pontos são comuns.

	3 planos se encontram	SPD	temos pontos em comum a solução é determinada
	3 planos se "cruzam"	SPD	idem a justificativa anterior
	2 planos "juntos" 1 plano paralelo	SI	O plano paralelo impede qualquer outra solução do sistema
	3 3 planos que se encontram	SPD	O plano se encontram em tão temos pontos em comum

O protocolo de (E.17) exemplifica um dos primeiros elementos que constatamos nas respostas desses participantes, para essa questão, isto é, a descrição da figura dos planos que remetem a ideia de serem paralelos ou coincidentes são reconhecidas prontamente por muitos. Contudo, esses quase sempre não conseguem utilizar uma linguagem matemática formalizada para descrevê-los. Mas, por outro lado, o reconhecimento de tal ideia parece contribuir para que consigam tanto classificar tal sistema, quanto emitir uma declaração satisfatória perante a resposta apresentada. Isso também acontece com a sexta figura, única representativa de um sistema possível determinado, cuja interseção comum de tais planos é um ponto $P(x, y, z)$.

Em relação a linguagem empregada para designar a posição entre planos, a palavra "junto" ou "sobreposto" é utilizada praticamente como sinônimo para expressar *coincidente*, o que não é correto. Pois, junto denota por algo em contato com outro, ou ficar próximo um do outro. Já sobreposto remete a ideia geral de por em cima, independentemente, se há ajuste correto ou não. Já a palavra coincidente, geometricamente, significa ajustar-se perfeitamente uma linha ou

superfície sobre outra, definição essa que combina perfeitamente com a posição de planos coincidentes.

Além disso, em vez de se usar a palavra interseção para descrever entrecortes em algumas figuras preferem “*cruzamento*”, conceito que, de acordo com dicionários da Língua Portuguesa, expressa o ponto em que se encontram duas linhas ou superfícies.

Já as figuras I, III, V e VIII receberam várias respostas inadequadas. Por exemplo, em muitas descrições relacionadas a posição desses planos, os registros encontrados foram de que tais planos eram simplesmente concorrentes ou perpendiculares.

Diante das análises realizadas para a questão três da Parte III, muitos participantes evidenciaram carência de conhecimentos em relação às representações geométricas para sistemas lineares de ordem três. Dessa forma, a visualização envolvendo a posição relativa entre três planos, um dos processos requeridos para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado ainda não faz parte do domínio da maioria.

Se as duas questões anteriores focavam representações gráficas, a próxima requer associação de conceitos distintos para se elaborar um modelo matemático satisfatório, a fim de produzir uma resposta coerente com o problema proposto.

A questão quatro da Parte III pode ser considerada não trivial, pois apresenta um enunciado fora do padrão, isto é, este precisa ser minuciosamente compreendido e analisado para que se consiga, por exemplo, elaborar um sistema de equações lineares que permita solucionar o problema, exigindo processos de abstração matemática, conforme Dreyfus (1991).

PARTE III | QUESTÃO 4

(POOLE, 2004, p.109) Um comerciante de café vende três misturas de grãos. Um pacote com a “mistura da casa” contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com a “mistura especial” contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 100 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com “mistura gourmet” contém 100 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 200 gramas de café tostado tipo francês. O comerciante tem 30 quilos de café colombiano, 15 quilos de café queniano e 25 quilos de café tostado tipo francês. Se ele desejar utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura devem se preparar?

A partir das considerações de Resnick (1987) entendemos que essa questão pode ser caracterizada como complexa, pois se compõem de diversos elementos relacionados entre si, exigindo a reunião de vários conhecimentos para se acessar o que deseja, nesse caso específico, a quantidade de pacotes de misturas diferentes de café que deveriam ser preparadas pelo comerciante.

Por meio das análises realizadas encontramos diferentes tentativas de soluções, entre essas, sete participantes optaram por elaborar um sistema de equações lineares, e entre esses (E.11) e (E.19) obtiveram êxitos em sua resoluções, mas (E.2), (E.4), (E.6), (E.14), e (E.20) cometeram erros diversos e por isso, não alcançaram o resultado esperado. Outros nove escolheram organizar as informações por meio de esquemas, os quais foram (E.3), (E.5), (E.7), (E.8), (E.10), (E.12), (E.13), (E.16) e (E.17), sendo que apenas (E.7) conseguiu chegar na resposta correta. Um único participante, (E.9), após alguns esboços de soluções sem êxito apagou tudo o que havia produzido até então, registrando em seu protocolo que não havia compreendido o problema.

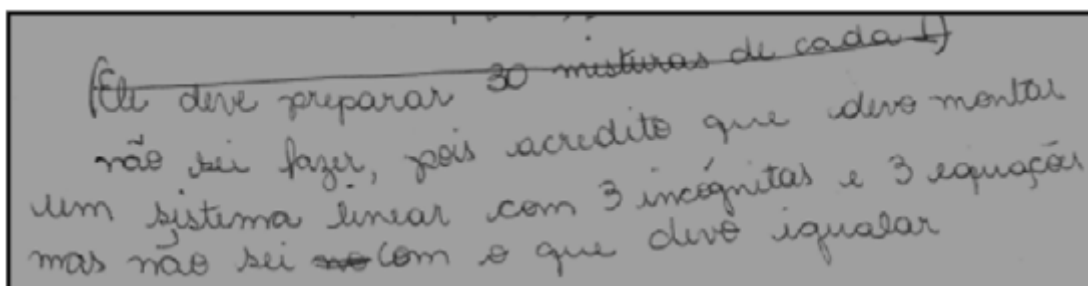
De acordo com Dreyfus (1991), os problemas envolvendo aplicabilidades apresentam dificuldades adicionais, porque o estudante precisa estabelecer uma relação estreita e clara entre as grandezas e quantidades referidas no enunciado de um problema, e esse processo demanda abstração matemática, isto é, a construção e reorganização de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas.

Sendo assim, se o estudante conseguir expressar adequadamente, além de outras características presentes no processo de representação, a solução

completa desta questão, consideraremos que o mesmo atingiu o processo de abstração matemática.

Tal questão desafiou os participantes. De dezessete protocolos, apenas três, (E.7), (E.11) e (E.19), apresentaram a solução de forma correta, demonstrando desse modo em seus registros escritos a capacidade de abstração matemática, isto é, generalizar, formalizar e sintetizar matematicamente as informações trazidas pela questão. Entretanto, todos os participantes tentaram solucioná-la e nenhum protocolo ficou em branco, fato que nem sempre ocorreu, por exemplo, com outras questões. Alguns participantes registraram ainda suas percepções diante dessa questão, como (E.10) que relatou no final de seu protocolo em tom de dúvida:

Figura 43 – Parte do Protocolo do Participante (E. 10) - Parte III - Questão 4



Já (E.3) coletou dados, tentou esboçar um esquema, porém sem sucesso, e finalizou declarando: “não lembro como continuar esse exercício”, enquanto (E.8) após algumas tentativas registrou “*DESISTO*”.

O processo de resolução do participante (E.2) explicita o caminho que muitos tentaram seguir para solucionar essa questão. Primeiro, começou coletando informações do enunciado e até realizou conversões entre unidades de medidas. Neste caso, houve transformação de quilogramas para gramas.

Figura 44 – Parte do Protocolo do Participante (E. 2) – Parte III – Questão 4

$$\begin{array}{lll}
 M_C : 300g\ C & M_E : 200g\ C & M_g : 100g\ C \\
 & 100g\ F & 200g\ g \\
 & 200g\ g & 200g\ F \\
 \\
 30\ C = 30000g\ C & & \\
 15\ g = 15000g\ g & & \\
 25\ f = 25000g\ f & &
 \end{array}$$

De posse das informações, tentou construir um sistema de equações lineares, mas o mesmo não resolvia o problema.

Figura 45 – Parte do Protocolo do Participante (E. 2) – Parte III – Questão 4

$$\left\{ \begin{array}{l}
 300\ C + 200\ F = 55000 \\
 200\ C + 100\ f + 200\ g = 40000 \\
 100\ C + 200\ f + 200\ g = 40000
 \end{array} \right.$$

Figura 46 – Parte do Protocolo do Participante (E. 2) – Parte III – Questão 4

pele du vida q̄m̄f̄m̄ n̄c̄ō cont̄inū
ā res̄olver.

Muitos participantes aparentaram frustração por não conseguir resolver essa questão, já que se tratava de um conteúdo que a maioria teve contado desde o Ensino Fundamental, sendo este aprofundado no Ensino Superior.

Por exemplo, o participante (E.17) foi um dos que necessitaram de um tempo maior para responder integralmente a Proposta de Avaliação Reflexiva e comentou verbalmente⁴⁶ que a questão quatro da Parte III era extremamente trabalhosa. Relatou ainda que não tinha certeza se sua solução estava correta. Mostrou-se interessado, curioso e intrigado com a questão, e ainda perguntou pela referência da mesma, no caso, (POOLE, 2004, p.109). Demonstrou determinação para solucionar a questão, e segundo o mesmo “*encarou-a como uma questão de prova*”.

Por meio dos comentários de (E.17) nos remetemos a algumas características do pensamento matemático avançado conforme Resnick (1987), isto é, envolve a aplicação de vários critérios, que, por vezes, conflitam uns com os outros exigindo muitas etapas de trabalho, além de aparentar desordem gerando incertezas quanto a validade da solução encontrada.

Já o protocolo de (E.4) evidencia mais um modo como alguns participantes tentaram organizar as informações presentes no problema, isto é, compor um sistema de equações lineares conforme a ordem dos dados explicitados pelo enunciado, mas não obtiveram êxito com essa atitude, pois elaboraram um sistema de equações lineares que não resolvia o problema. Não se atentaram que era necessário conferir se a solução encontrada para o sistema era uma resposta plausível para o problema.

A situação exposta no parágrafo anterior nos remete a Dreyfus (1991), quando este afirma que em cursos de matemática apesar dos estudantes aprenderem um grande número de técnicas envolvidas por uma série de formalismos, faltam-lhes a metodologia do trabalho do matemático, quer dizer, não desenvolvem habilidades para resolver problemas desconhecidos para si mesmos. Pois, não conseguem manejar seus conhecimentos de forma flexível, ficam em certa medida inibidos por conta da organização de procedimentos formalizados que lhes foram transmitidos ao longo do curso. Segue o protocolo de (E.4).

⁴⁶ Foi feito um diário de campo, por escrito, durante a aplicação da Proposta de Avaliação Reflexiva para registrar acontecimentos relevantes para a pesquisa.

Figura 47 – Protocolo do Participante (E. 4) – Parte III – Questão 4

$30 \text{ Kg Café colombiano } = C.C$
 $15 \text{ Kg Café guineano } = C.G$
 $25 \text{ Kg Café francês } = C.F$

"mistura cara"
 $300.C.C + 200.C.F$
 "mistura especial"
 $200.C.C + 200.C.G + 100.C.F$
 "mistura gourmet"
 $100.C.C + 200.C.G + 200.C.F$

$C.C = x; C.G = y; C.F = z$

$$\begin{cases} 300x + 200z = 30 + 25 \\ 200x + 200y + 100z = 30 + 15 + 25 \\ 100x + 200y + 200z = 30 + 15 + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 300x & & & 200z = 55 \\ 200x + 200y + 100z = 70 \\ 100x + 200y + 200z = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60x & + & 40z = 11 \\ 40x & + & 40y + 20z = 14 \\ 20x & + & 40y + 40z = 14 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 60 & 0 & 40 & 11 \\ 40 & 40 & 20 & 14 \\ 20 & 40 & 40 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 40 & 40 & 20 & 14 \\ 20 & 40 & 40 & 14 \\ 60 & 0 & 40 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 40 & 40 & 20 & 14 \\ 0 & -20 & -20 & -7 \\ 0 & 120 & 20 & 31 \end{bmatrix}$$

$$6x \begin{bmatrix} 40 & 40 & 20 & 14 \\ 0 & -20 & -20 & -7 \\ 0 & 0 & -160 & -11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 40x + 40y + 20z = 14 \\ -20y - 20z = -7 \\ -160z = -11 \end{cases}$$

$$z = \frac{11}{160};$$

Destacamos que (E.4) encontrou um valor da ordem dos milésimos para expressar o número de pacotes de café do tipo francês, conforme a nomenclatura que escolhera, e não procurou validar ou conferir tal resposta. Além disso, não se atentou para realizar transformações de unidades de massa. Possivelmente, compreendeu que a solução a qual desenvolvera não lhe garantia êxito para finalizar tal questão, e por isso, talvez, desistiu da mesma, deixando-a carente de esclarecimentos.

Prosseguindo, apresentamos e analisamos os protocolos de (E.7), (E.11) e (E.19) que resolveram adequadamente essa questão. Iniciamos com a resolução de (E.7).

Figura 48 – Protocolo do Participante (E. 7) – Parte III – Questão 4

PARTE III | Nº 07

QUESTÃO 04

(POOLE, 2004, p.109) Um comerciante de café vende três misturas de grãos. Um pacote com a "mistura da casa" contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com a "mistura especial" contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 100 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com "mistura gourmet" contém 100 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 200 gramas de café tostado tipo francês. O comerciante tem 30 quilos de café colombiano, 15 quilos de café queniano e 25 quilos de café tostado tipo francês. Se ele desejar utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura devem se preparar?

c : café colombiano q : café queniano
 f : café tipo francês

$$\text{Mistura da casa} = 300c + 200f$$

$$\text{Mistura especial} = 200c + 200q + 100f$$

$$\text{Mistura gourmet} = 100c + 200q + 200f$$

$$30.000 \text{ g} \rightarrow \text{café colombiano}$$

$$15.000 \text{ g} \rightarrow \text{café queniano} \rightarrow 75 \text{ pkt de } 200 \text{ g}$$

$$25.000 \text{ g} \rightarrow \text{café francês}$$

$$\frac{15.000}{300}c + \frac{15.000}{200}f = x$$

$$\frac{10.000}{200}c + \frac{30.000}{200}q + \frac{25.000}{100}f = y$$

$$\frac{10.000}{100}c + \frac{30.000}{200}q + \frac{25.000}{200}f = z$$

$$600c = 30.000$$

$$c = 50$$

$$400q = 15.000$$

$$q = 37,5$$

$$500f = 25.000$$

$$f = 50$$

TABELA 1:

	C	Q	F
M.C.	15.000g 50pkt	X	10.000g 50pkt
M.E.	10.000g 50pkt	7.500g 37,5pkt	5.000g 50pkt
M.G.	5.000g 50pkt	7.500g 37,5pkt	10.000g 50pkt

TABELA 2:

	C	Q	F
M.C.	50pkt 15pkt	X	50pkt 15
M.E.	30 (4000g)	30	30 (2000g)
M.G.	45 (6=500g)	45	45 (3=1000g)

Resp.: Ele deve preparar 65 pacotes de café "mistura da casa", 30 pacotes de café "mistura Especial", e 45 pacotes de café "mistura gourmet".

O estilo de resolução apresentado por (E.7) se assemelha aos registros de um estudante que parece se preocupar apenas em encontrar uma resposta, sem se importar se outra pessoa entenderá o que foi produzido. Compreendemos que esse participante utiliza uma linguagem algébrica sincopada em que mistura simbologias matemáticas às palavras ou abreviações. Em relação ao modo de resolução, optou por utilizar uma organização tabular para reunir as informações dadas e as encontradas. Além disso, realiza comparações entre as quantidades remetendo à operações elementares, como por exemplo, a divisão. As igualdades registradas mantêm uma equivalência entre o que é trazido pelo problema e o que se espera encontrar. Há uma espécie de preocupação por parte de (E.7) no sentido de sintetizar ao término de sua solução, a conclusão do resultado em que chegou. Isso mostra indícios de que tal participante compreendeu a pergunta, produzindo uma resposta coerente com seus procedimentos adotados.

Já (E.11) e (E.19) diferentemente de (E.7) apresentaram modelos de soluções formalizadas do ponto de vista matemático. Quanto a escolha do modo de resolução, (E.11) utilizou o método de eliminação de Gauss, enquanto (E.19) optou pelo método de substituição. Ambos demonstraram conhecer a simbologia matemática adequada para tal situação, além de realizar as manipulações algébricas corretamente.

Uma característica comum evidenciada nos processos de resolução de (E.7), (E.11) e (E.19) consiste na conversão entre unidades de medidas, a qual se deu pela transformação de quilogramas em gramas. Além disso, os mesmos classificaram e nomearam as informações contidas no enunciado do problema conforme a relação existente entre as grandezas. Outro fator relevante a ser destacado nessas resoluções consiste no gerenciamento de processos de representação associados ao processo de abstração matemática, produzindo solução e explicitando em linguagem natural, a resposta adequada mediante a pergunta proposta pelo enunciado da questão.

Nesse sentido, o estilo de resolução de (E.11) é formalizado e conciso lembrando registros escritos de matemático, pois se percebe cuidados na utilização de simbologias, como por exemplo, as indicações explicitadas pelas setas em cada linha da matriz revelando o processo do cálculo realizado.

A seguir, expomos a resolução apresentada por (E.11).

Figura 49 – Protocolo do Participante (E. 11) – Parte III – Questão 4

PARTE III | Nº 11

QUESTÃO 04

(PÓOLE, 2004, p.109) Um comerciante de café vende três misturas de grãos. Um pacote com a "mistura da casa" contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com a "mistura especial" contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 100 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com "mistura gourmet" contém 100 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 200 gramas de café tostado tipo francês. O comerciante tem 30 quilos de café colombiano, 15 quilos de café queniano e 25 quilos de café tostado tipo francês. Se ele desejar utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura devem se preparar?

MISTURAS

A - 300g CC + 000g CQ + 200g CF MISTURA DA CASA
 B - 200g CC + 200g CQ + 100g CF MISTURA ESPECIAL
 C - 100g CC + 200g CQ + 200g CF MISTURA GOURMET

$300x + 200y + 100z = 30000$
 $0x + 200y + 200z = 15000$
 $200x + 100y + 200z = 25000$

$$\begin{bmatrix} 300 & 200 & 100 & : & 30000 \\ 0 & 200 & 200 & : & 15000 \\ 200 & 100 & 200 & : & 25000 \end{bmatrix} \div 100 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 300 \\ 0 & 2 & 2 & | & 150 \\ 2 & 1 & 2 & | & 250 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 50 \\ 0 & 2 & 2 & | & 150 \\ 2 & 1 & 2 & | & 250 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 50 \\ 0 & 2 & 2 & | & 150 \\ 0 & -1 & 4 & | & 150 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 50 \\ 0 & 1 & 1 & | & 75 \\ 0 & -1 & 4 & | & 150 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -25 \\ 0 & 1 & 1 & | & 75 \\ 0 & 0 & 5 & | & 225 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3 \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -25 \\ 0 & 1 & 1 & | & 75 \\ 0 & 0 & 1 & | & 45 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 65 \\ 0 & 1 & 0 & | & 30 \\ 0 & 0 & 1 & | & 45 \end{bmatrix}$$

65 PACOTES DE A
 30 PACOTES DE B
 45 PACOTES DE C

E para finalizar, apresentamos a solução de (E.19).

Figura 50 – Protocolo do Participante (E. 19) – Parte III – Questão 4

PARTE III | Nº 19

QUESTÃO 04

(POOLE, 2004, p.109) Um comerciante de café vende três misturas de grãos. Um pacote com a "mistura da casa" contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com a "mistura especial" contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 100 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com "mistura gourmet" contém 100 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 200 gramas de café tostado tipo francês. O comerciante tem 30 quilos de café colombiano, 15 quilos de café queniano e 25 quilos de café tostado tipo francês. Se ele desejar utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura devem se preparar?

Casa: $300g.c + 200g.tf$
 Esp: $200g.c + 200g.q + 100g.tf$
 Gour: $100g.c + 200g.q + 200g.tf$

$30kg\ c \rightarrow 30000g$
 $15kg\ q \rightarrow 15000g$
 $25kg\ tf \rightarrow 25000g$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 300 \\ 2x + y + 2z = 250 \\ 2y + 2z = 150 \end{cases}$$

ONDE x, y e z REPRESENTAM RESPECTIVAMENTE A QUANTIDADE DE PACOTES DE "MISTURA DA CASA", "MISTURA ESPECIAL" e "MISTURA GOURMET".

Resolvendo o sistema:

$$z = \frac{150 - 2y}{2}$$

Substituindo

$$2x + y + 150 - 2y = 250$$

$$x = \frac{100 + y}{2}$$

Substituindo

$$3 \cdot \left(\frac{100 + y}{2} \right) + 2y + \frac{150 - 2y}{2} = 300$$

$$300 + 3y + 4y + 150 - 2y = 600$$

$$5y = 150$$

$$\boxed{y = 30}$$

$$x = \frac{100 + 30}{2} = 65$$

$$z = \frac{150 - 60}{2} = 45$$

Res Logo serão 65 pacotes da "mistura da casa", 30 pacotes da "mistura especial" e 45 pacotes da "mistura gourmet".

O estilo de resolução de (E.19) lembra a de um professor, pois esse procura meios para explicitar de modo claro e coerente o que produziu para se

chegar a solução da questão. O participante deixa explicações de cada etapa que está realizando. Isso demonstra que o mesmo quer se fazer compreendido. Não se satisfaz apenas encontrando a resposta correta, vai além, busca compartilhar sua compreensão e conhecimento com outrem, visto que se mostra cuidadoso, organizado e claro em seus registros escritos apresentados.

Um detalhe relevante para se destacar na resolução de (E.7) e (E.19) se refere ao fato de que ambos adotaram processos de solução que remetem a conteúdos abordados no Ensino Fundamental. Em relação a escolha de (E.19), o método de substituição consiste basicamente em se escrever uma incógnita em função da outra, e a partir disso, realizam-se algumas operações algébricas elementares utilizando conceitos e propriedades relacionadas às equações de primeiro grau. Essa caracterização é visualizada nos procedimentos seguidos e realizados por tal participante.

Por outro lado, (E.11) optou por um método popular explorado no Ensino Superior, o método de eliminação de Gauss. Conforme a resolução de (E.11) esse método consiste em escrever a matriz completa do sistema de equações lineares utilizando operações elementares com as linhas para reduzir a matriz completa obtida à forma escalonada, e assim, usando substituição de trás para a frente, se resolve o sistema equivalente que corresponde à matriz linha-reduzida.

Para finalizar as análises da Parte III, a questão cinco retoma o conceito geométrico de representação de sistemas de equações lineares, mas agora focando sistemas de duas equações com três incógnitas. A intenção desta questão é de procurar entender se os participantes estabelecem relações entre tratamento algébrico e o significado geométrico por meio da análise dos coeficientes explicitados nos sistemas apresentados nesta questão.

Durante as análises dessa questão encontramos respostas corretas, incorretas, (E.8) rasurou seu protocolo inviabilizando-o para análises e (E.20) mais uma vez deixou seu protocolo completamente em branco.

Contudo, uma resposta inesperada que tivemos foi a de (E.19) que veio se destacando em todas as questões da Proposta de Avaliação Reflexiva, porém segundo o mesmo não sabia fazer essa questão. Entendemos que a questão cinco carrega uma linguagem formal simbólica intensa do ponto de vista matemático, e requer a mesma, na solução. Talvez esse fator tenha sido um empecilho para esse participante. Pois, constatamos ao longo das análises que (E.19) demonstra uma

tendência peculiar, isto é, escolhe em muitas ocasiões expressar-se por meio de palavras, fazendo uso da linguagem natural, e não necessariamente com símbolos matemáticos. Parece que tem a necessidade de se certificar que quando outrem analisar seus registros, desde que tenha formação para isso, terá elementos suficientes para compreendê-lo. Entretanto, tal participante nos apresentou frequentemente em suas respostas fortes evidências de compreensão simbólica em todas as outras questões da Parte III, a qual exigia bastante nesse aspecto.

A seguir, rerepresentamos a questão cinco da Parte III.

PARTE III | QUESTÃO 05

(ANTON e BUSBY, 2006, p.80) Considere os sistemas lineares:

$$(I) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases} \text{ e } (II) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

- a) Mostre que o primeiro sistema não possui solução e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por estas equações.
- b) Mostre que o segundo sistema tem uma infinidade de soluções e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por essas equações.

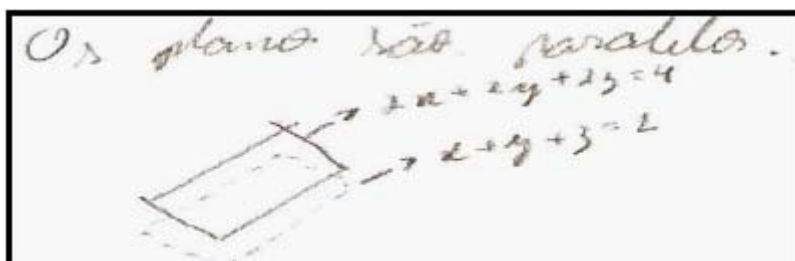
O sistema I, expresso algebricamente por: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$ não admite solução alguma, portanto os planos que representam suas equações são paralelos. Conforme os registros escritos encontrados, por exemplo, no protocolo de (E.14) entendemos que a classificação do sistema foi adequada, porém o participante não soube relatar o significado geométrico de tal solução, fato similar verificado nas respostas de (E.3), (E.4), (E.12) e (E.13). A seguir, apresentamos a resposta de (E.14) para o "item a".

Quadro 22 – Transcrição do protocolo de (E.14) – Parte III – Questão 5 – Item A

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z = -2 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ 0 = 2 \end{cases} \text{ pelo método da adição. Sistema impossível.}$$

Já (E.16) foi o único participante que optou por realizar um desenho esquemático para responder tal questão. A seguir apresentamos seu protocolo

Figura 51 – Protocolo do Participante (E.16) - Parte III - Questão 5 - Item A



Ainda, destacamos os protocolos de (E.5), (E.6) e (E.7), porque além de apresentarem uma solução algébrica correta evidenciaram riqueza de detalhes, para justificar o que ocorre matematicamente no sistema I.

Figura 52 – Protocolo do Participante (E. 5) – Parte III – Questão 5 – Item A

$$\begin{array}{l}
 2x + 2y + 2z = 4 \\
 x + y + z + (x + y + z) = 4 \\
 x + y + z + 1 = 4 \\
 x + y + z = +3 \text{ logo } x + y + z \neq 1
 \end{array}$$

*Planos
paralelos*

Já (E.6) realizou seus registros utilizando um lápis de grafite muito claro, sendo assim, a digitalização de seu protocolo não apresentou nitidez necessária para uma leitura inteligível. Por isso, transcrevemos na íntegra o "item a" deste.

Quadro 23 – Transcrição do protocolo de (E.6) - Parte III - Questão 5 - Item A

$$(2x) - \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 0 + 0 + 0 = -2 \\
 0 = -2
 \end{array}$$

Como é um falso o resultado não possui solução. Significa que os planos não se encontram.

Figura 53 – Protocolo do Participante (E. 7) – Parte III – Questão 5 – Item A

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (x=2) \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z = -2 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases} +$$

$$0 + 0 + 0 = 2$$

$$0 = 2 \rightarrow \text{está incorreto, logo esse sistema não tem solução no conjunto dos números reais, e}$$

os planos são paralelos.

Continuando as análises dessa questão para o item b, o sistema II,

expresso algebricamente por: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ admite infinitas soluções, por isso os planos que representam suas equações são ditos coincidentes. Os protocolos dos participantes (E.7) e (E.9) trazem muitos elementos matemáticos que ilustram a solução adequada para o “item b” dessa questão.

Figura 54 – Protocolo do Participante (E. 7) – Parte III – Questão 5 – Item B

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (x=2) \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} +$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$0 = 0 \rightarrow \text{isso representa que esse sistema tem infinitas soluções, e os planos são coincidentes.}$$

Figura 55 – Protocolo do Participante (E. 9) – Parte III – Questão 5 – Item B

Podemos escrever o segundo sistema da seguinte forma:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0. \end{cases} \text{ ou simplesmente, } x+y+z=0$$

Queremos determinar $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais $x+y+z=0$.
 Porém, podemos notar que existem infinitos valores para x, y, z que satisfazam essa equação. Logo, o sistema possui infinitas soluções. Geometricamente, estes planos são paralelos coincidentes, ou seja, "são apenas um".

Em contrapartida, houve respostas para esse item que se apresentaram até certa coerência do ponto de vista de caracterização matemática, mas não explicitaram o que tal solução significava quanto aos planos representados. Ou seja, não se evidenciou a interpretação geométrica conforme a solicitação da questão. Podemos tomar como exemplo dessa situação os registros escritos dos participantes (E.3), (E.4), (E.5) e (E.12), os quais são apresentados a seguir.

Figura 56 – Protocolo do Participante (E. 3) – Parte III – Questão 5 – Item B

Pois tudo é múltiplo de dois. 0 zero também é múltiplo de 2, pois $2 \cdot 0 = 0$.

Figura 57 – Protocolo do Participante (E. 4) – Parte III – Questão 5 – Item B

Temos que um sistema homogêneo e o segundo também é múltiplo da primeira.

Figura 58 – Protocolo do Participante (E. 5) – Parte III – Questão 5 – Item B

$2x + 2y + 2z = 0 \quad (+1)$
 $2x + 2y + 2z = 0$
 duas equações equivalentes
 logo não temos um sistema determinado.

Figura 59 – Protocolo do Participante (E. 12) – Parte III – Questão 5 – Item B

$x = -y - z$
 $2(-y - z) + 2y + 2z = 0$
 $-2y - 2z + 2y + 2z = 0$
 $0 = 0$
 NÃO sei

Entendemos, por exemplo, que (E.12) trabalha corretamente com a manipulação algébrica, mas o mesmo não consegue compreender o significado geométrico dessa solução. Isso ocorreu com aproximadamente metade dos participantes que tentaram resolver essa questão.

Tal modelo de exercício é considerado clássico no estudo de sistemas de equações lineares. Esse costuma figurar com maior frequência em livros didáticos da área direcionados ao Ensino Superior. Uma de suas características que podemos destacar consiste na reprodução de uma resposta padrão, a qual utiliza uma linguagem de aspecto simbólico, conforme a que foi evidenciada nos registros escritos de (E.7) e (E.9) para essa questão no item b.

A seguir, apresentamos as considerações gerais sobre as análises realizadas mediante os registros escritos apresentados, pelos participantes dessa pesquisa, nas resoluções das questões que integravam a Proposta de Avaliação Reflexiva.

6.4 MANIFESTAÇÕES DE PROCESSOS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

As concepções apontadas pelos participantes na Parte I evidenciaram que a maioria possui uma visão platônica da matemática conforme Thompson (1997), pois acreditam que a matemática é um corpo de conhecimento organizado, sistematizado e lógico que serve para elevação intelectual e até mesmo como fonte de entretenimento. Poucos participantes manifestaram uma visão analítica perante a matemática. Isso concerne com o que obtivemos nas análises específicas sobre processos de pensamento matemático avançado.

Os participantes (E.7), (E. 11) e (E.19) que se posicionaram de modo ativo em relação à matemática revelaram em suas resoluções processos de pensamento matemático avançado tanto de representação quanto de abstração conforme caracterizações de Dreyfus (1991) e Resnick (1987). Demonstraram uma visão dinâmica da matemática no sentido de Thompson (1997), souberam apontar aplicabilidades de sistemas de equações lineares, evidenciaram uma visão geométrica apurada e relataram que tiveram professores que lhe inspiraram a seguir na área docente, além de que os três explicitaram o gosto pela matemática desde os primeiros anos do Ensino Fundamental.

Mediante as análises da Parte I, o participante (E.7) reconheceu a complexidade como um dos fatores inerentes a muitos conteúdos matemáticos, e por isso, o cuidado em relação aos detalhes deve ser foco especial de atenção quando se estuda matemática, o que corrobora com Resnick (1987). Relatou em uma de suas respostas que gostava de ajudar crianças que tinham dificuldades em matemática e se sentia bem quando percebia o progresso das mesmas. Já o participante (E.11) afirmou que a matemática é o que existe de mais abstrato no pensamento humano e manifestou a vontade de seguir carreira como matemático. Os protocolos de (E.11) evidenciam características de formalização, generalização e síntese, além deste utilizar adequadamente a simbologia matemática tornando suas resoluções claras e objetivas. Isso demonstra um pensamento matemático avançado conforme Dreyfus (1991) e Resnick (1987). O participante (E.19) revela praticidade em suas resoluções e comentários. Parece preocupar-se sempre se o outro entenderá o que deixou registrado, evidenciando atitudes reflexivas conforme caracterizações de Freire (2004, 2011).

Podemos observar em várias resoluções que muitos participantes não insistem ou não confiam em suas ideias, parecem acreditar que a tarefa está fora de seu alcance, parecem sentir-se intimidados diante das questões e acabam desistindo. Por isso, houve protocolos em branco, rasurado, com manifestações emocionais no sentido de que não conseguiam resolver tal questão, além de não apontarem aplicabilidades envolvendo sistemas de equações lineares.

O quadro três, ver capítulo II, sintetiza alguns processos envolvidos no pensamento matemático avançado associados à características do pensamento algébrico conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), Ponte et al (2009), a partir das caracterizações de Dreyfus (1991) e Resnick (1987). Este servirá de referência para tecermos as considerações gerais a respeito de manifestações de processos do pensamento matemático avançado encontrados nos registros escritos dos participantes, objetivando responder a pergunta norteadora dessa pesquisa: *que manifestações de processos de pensamento matemático avançado são reveladas em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática ao resolverem tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares?*

A partir das análises da seção anterior, inferimos que os participantes já evidenciam, em suas resoluções, serem conscientes de muitas interações que ocorrem durante o processo de representação, mas ainda provavelmente lhes falem oportunidades para desenvolverem atividades que os instiguem a formalizar e sintetizar diferentes aspectos de um conceito ou tema matemático, ação que de acordo com Dreyfus (1991) favorece o processo de abstração matemática.

Em contrapartida, devemos considerar que o pensamento matemático avançado apresenta interpretações que podem suscitar incertezas, além de provocar julgamentos que conduzem a diferentes tentativas de soluções. Por isso, também concordamos com as características elencadas por Resnick (1987) sobre o pensamento matemático, denominando-o por pensamento de ordem superior. Ao contrário de Dreyfus (1991) que apresenta em detalhes alguns processos inerentes ao pensamento matemático avançado, Resnick (1987) abre oportunidades para se refletir sobre alguns elementos mais amplos intrínsecos ao reconhecimento desse tipo de pensamento, tais como a complexidade, a certeza em contraste com a dúvida e a capacidade de análise crítica frente a repetição de padrões de soluções encontrados em livros didáticos.

Além disso, duas características comuns e intrínsecas devem ser destacadas quanto aos processos de representação e abstração, associados ao pensamento matemático avançado: a capacidade de memorização e a familiaridade com representações distintas, simbologias e manipulações algébricas relacionadas ao pensamento algébrico.

A partir das análises conduzidas, consideramos que respondemos satisfatoriamente a questão da pesquisa, atingindo o objetivo estabelecido inicialmente, isto é, investigar processos de pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática em tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares.

A seguir expomos, de forma geral e concisa, manifestações, revelações e ações que foram encontradas de acordo com as respostas obtidas nos protocolos dos participantes. Para tanto, focamos nas questões que receberam análises pontuais na Parte II e todas as questões que constituíram a Parte III, em decorrência das mesmas apresentarem aspectos matemáticos específicos.

Destacamos que a maioria dos processos de representação e abstração ocorrem simultaneamente, sendo assim, a separação dos mesmos é realizada apenas com o intuito de facilitar o processo de análise dos dados obtidos.

Para o próximo quadro síntese utilizamos as notações P.II e P.III em referência às partes II e III da Proposta de Avaliação Reflexiva, além de Q. para designar questão. Em seguida à notação, descrevemos as manifestações reveladas sobre processos de pensamento matemático que prevaleceram em tal questão, mediante as respostas encontradas nos registros escritos dos participantes dessa pesquisa.

Quadro 24 – Processos de Pensamento Matemático Avançado manifestados em algumas questões da Proposta de Avaliação Reflexiva

Processos associados ao Pensamento Matemático Avançado: manifestações, revelações e ações consideradas.		
REPRESENTAÇÃO	ANALISAR e CLASSIFICAR	Participantes
	(P.III – Q.1) Reconhecer características inerentes às equações lineares de primeiro grau classificando corretamente as mesmas diante de uma coleção de equações algébricas de formas variadas.	(E.5), (E.9), (E.10) e (E.19).
	(P.III – Q.2) Associar corretamente as posições relativas entre duas retas que representem a solução de um sistema de equação linear de ordem dois e classificá-lo em SPD, SPI e SI.	(E.2), (E.3), (E.5), (E.7), (E.9), (E.10), (E.11), (E.13), (E.17) e (E.19).
	(P.III – Q.3) Associar satisfatoriamente as posições relativas entre três planos que representem a solução de um sistema de equação linear de ordem três e classificá-lo em SPD, SPI e SI.	(E.11), (E.6), (E.7), (E.9) e (E.19).
	(P.III – Q.4) Organizar informações de um problema conforme as relações existentes entre as grandezas quantificadas.	(E.7), (E.11) e (E.19).
	(P. II – Q.5) Demonstrar conhecimento perante diferentes métodos de resolução para um sistema de equações lineares.	A maioria. Exceto (E.20) que deixou em branco.
	DEFINIR	Participantes
	(P.II – Q.3) Definir corretamente sistema de equações lineares.	(E.9), (E.11), (E.14) e (E.16).
	(P.II – Q.4) Definir corretamente sistemas de equações lineares homogêneos.	(E.4), (E.9), (E.10), (E.11) e (E.19).
	(P.II – Q.9) Evidenciar o entendimento da definição do método da Regra de Cramer e associá-lo apenas a SPD.	(E.9), (E.10).
	VERIFICAR	Participantes
	(P.III – Q.4) Examinar se as grandezas apresentam as mesmas unidades de medidas e realizar conversões quando necessário.	(E.2), (E.3), (E.5), (E.6), (E.7), (E.8), (E.11), (E.12), (E.14) e (E.19).
	RECONHECER SÍMBOLOS	Participantes
	(P.III – Q.1) Diferenciar satisfatoriamente incógnitas, constantes e variáveis.	(E.5), (E.6), (E.7), (E.8), (E.9), (E.10), (E.16), (E.17) e (E.19).
	MANIPULAR NOTAÇÕES ALGÉBRICAS	Participantes
	(P.III – Q.4 e Q.5) Expressar-se utilizando símbolos e realizar operações algébricas com estes.	Todos.
	TRADUZIR	Participantes
	(P.III – Q.4) Traduzir enunciados em linguagem natural para uma linguagem algébrica.	Todos.
	(P.III – Q.5) Utilizar adequadamente propriedades algébricas para associar descrições de representações geométricas.	(E.2), (E.5), (E.6), (E.7), (E.9), (E.10), (E.11), (E.16), (E.17).
	(P.III – Q.2, Q3 e Q.5) Transitar por representações matemáticas distintas envolvendo Sistemas de Equações Lineares.	(E.7), (E.9), (E.11) e (E.19).
MODELAR	Participantes	
(P.II – Q.3) Apresentar modelo matemático generalizado para expressar um sistema de equações lineares.	(E.9) e (E.11).	
(P.II – Q.4) Apresentar um modelo matemático para sistemas de equações lineares diante de um problema.	(E.2), (E.4), (E.6), (E.11), (E.14), (E.19) e (E.20).	
(P.III – Q.4) Apresentar um modelo matemático adequado para organizar os dados de um enunciado. Por exemplo, um sistema de equações lineares, uma matriz ou uma tabela.	(E.7), (E.11) e (E.19).	
(P.II – Q.1) Reconhecer aplicabilidades envolvendo sistemas de equações lineares.	(E.7), (E.8), (E.9), (E.11), (E.19)	

	VISUALIZAR	Participantes
	(P.III – Q.2) Observar e descrever as posições relativas entre duas retas, classificando-as em coincidentes, concorrente e paralelas.	(E.2), (E.3), (E.4) (E.5), (E.7), (E.9), (E.10), (E.11), (E.13), (E.17) e (E.19).
	(P.III – Q.3) Descrever as posições relativas entre três planos.	(E.6), (E.7), (E.9), (E.11) e (E.19).
ABSTRAÇÃO	GENERALIZAR	Participantes
	(P.III – Q.4) Evidenciar representações mentais ricas associando conceitos matemáticos variados.	(E.7), (E.11), (E.19).
	FORMALIZAR	
	(P.III – Q.4) Elaborar um sistema de equações lineares que resolva o problema.	
	SINTETIZAR	
(P.III – Q.4) Resolver problema que apresenta um enunciado não trivial.		
	(P.III – Q.4) Gerenciar processos de representação associados aos processos de abstração matemática produzindo solução e resposta coerente com o enunciado apresentado.	

De forma geral, o quadro anterior explicita manifestações ocorridas de processos de pensamento matemático avançado revelados nos registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática, ao resolverem tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares.

Inferimos que (E.7), (E.11) e (E.19), os quais conseguiram atingir o processo de abstração matemática, demonstraram entender e lidar de forma adequada com a maioria dos processos de representação, conforme caracterizações de Dreyfus (1991) e Resnick (1987).

Destacamos que (E.9) não atingiu os processos relacionados à abstração matemática, pois não conseguiu elaborar um sistema de equações lineares que resolvesse a questão quatro da Parte III, e nem gerenciar processos de representação associados aos processos de abstração matemática produzindo solução e resposta coerente com o enunciado apresentado. Contudo, evidenciou conhecimentos e compreensões acuradas na maioria dos processos de representação. O cuidado com a linguagem matemática, as manipulações algébricas e as notações simbólicas foram marcantes. Em alguns momentos, cometeu até alguns erros, porém era perceptível que o estudante procurava formalizar sempre que possível suas resoluções, buscando o registro matemático apropriado para a situação.

Oposto ao (E.9), tivemos (E.20), o qual deixou a maioria das questões em branco, especialmente das partes II e III. Naquelas em que tentou

resolver cometeu diversos tipos de erros, como por exemplo, de definição tanto de equações lineares quanto de sistemas de equações lineares, de exemplos equivocados, e ainda, não reconheceu a diferença entre incógnita e constantes irracionais, como o π (pi) ou raiz cúbica de cinco. (E.20) e (E.12) foram os participantes que demonstraram ter desenvolvido o menor número de processos de pensamento matemático avançado, apenas três, conforme exposto no quadro 24, e todos relacionados à representação matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos a presente pesquisa tendo em vista o objetivo de investigar processos de pensamento matemático avançado, manifestados em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática, em tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares. O mesmo emergiu em decorrência de inquietações que apareceram mediante estudo de textos que tratavam de pensamento matemático avançado, tais como Domingos (2006), Tall (2002), Dreyfus (1991) e Resnick (1987).

Diante desse objetivo trabalhamos para elaborar um conjunto de tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares, ao qual denominamos por Proposta de Avaliação Reflexiva, a fim de responder a pergunta norteadora dessa pesquisa, qual seja: que manifestações de processos de pensamento matemático avançado são reveladas em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática ao resolverem tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares? Para isso, nos apoiamos em Dreyfus (1991), Resnick (1987), Freire (2004, 2011), Lorenzato (2010), Thompson (1997), Poole (2004), Lima (1993), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), Ponte et al (2009), para construir a fundamentação teórica que sustentasse a condução dessa pesquisa, e posteriormente as análises da mesma.

Considerando as análises realizadas, dos dezessete participantes, dez já atuam como professores na Educação Básica, e a maioria desses apresenta uma visão instrumentalista ou até mesmo prescritiva da matemática no sentido de Thompson (1997). Contudo, em linhas gerais, a maioria desses explicitou o gosto pela matemática desde seus primeiros passos da vida escolar. Muitos desses ainda demonstraram atitudes reflexivas à luz das ideias de Freire (2004, 2011), pois evidenciaram autonomia e responsabilidade perante sua própria formação. Isto é, já reconhecem e são conscientes que sem sua própria parcela de contribuição e esforço não conseguirão uma formação que os satisfaçam do ponto de vista pessoal e profissional.

Algumas questões da Parte I mostraram que pelo menos metade dos participantes ainda não adotou uma rotina regular de estudos. Alguns declaram que trabalham e dispõem de pouco tempo livre, outros afirmaram que deixam quase tudo para a “última hora”. Mas, houve aqueles que explicitaram que estudam

ativamente quase todos os dias da semana, e verificamos que esses se destacaram em relação àqueles que não mantêm um ritmo regular de estudo.

Entre as práticas de estudo adotadas pelos participantes, figura o hábito de fazer ou até mesmo refazer listas de exercícios. Alguns até admitiram que chegam a decorar determinadas resoluções. Outros relataram que procuram aplicar modelos prontos a situações novas. Essas práticas evidenciam que muitos concebem a matemática de forma automática, isto é, acreditam quase sempre que tem uma maneira certa para resolver determinados exercícios. Tal visão pode contribuir para um pensamento de caráter inflexível, o qual não concebe a Matemática como um corpo de conhecimento dinâmico que necessita do estabelecimento de relações entre as ideias para que os conceitos façam sentido e tenham um significado efetivo. Entendemos que essas atitudes não favorecem o pensamento matemático avançado, pois o estudante preocupa-se em repetir a estrutura algorítmica e pode passar a desconsiderar a compreensão como um fator relevante no seu processo de ensino e de aprendizagem.

Dentre os participantes que declararam estudar semanalmente por iniciativa própria, esses afirmam que buscam pelos porquês matemáticos para se sentirem mais seguros no momento em que precisam explicar alguma coisa, enquanto que outros relatam que essa procura está associada à compreensão de significados ou até mesmo que pesquisam pelos porquês para estimular, em seus futuros alunos, o gosto pela matemática.

Já quanto ao conhecimento de sistemas de equações lineares, quase oitenta por cento desses relataram em seus registros escritos que estudaram esse conteúdo em alguma etapa do Ensino Superior. Ainda, excetuando (E.11), que declara só ter visto no cursinho pré-vestibular, todos os outros tiveram o primeiro contato com esse assunto ainda na Educação Básica. Mas, mesmo assim, muitas respostas sinalizam que se sentem inseguros, confusos e alguns até afirmaram que possuem dificuldades para lidar com o assunto, declarações essas comprovadas mediante as análises de manifestações de processos de pensamento matemático avançado, conforme Dreyfus (1991) e Resnick (1987).

Contudo, destacaram que a resolução de problemas consiste em um encaminhamento metodológico adequado para se realizar a abordagem para sistemas de equações lineares. Ainda, assinalam que os aspectos históricos que envolvem tal conteúdo sempre são bem-vindos, pois podem trazer elementos que

instiguem a curiosidade do estudante e desse modo, os estimulem a estudar. Relataram que sistemas de equações lineares permitem o trabalho com problemas que incitam pensamentos matemáticos reflexivos, e esperam de uma aula específica, que contemple esse assunto, aprenderem detalhes que evidenciam o significado e aplicabilidades desse conteúdo.

Nesse contexto, os registros escritos dos participantes revelaram que o professor, ao tratar de sistemas de equações lineares, deve ter como prioridade a abordagem de aplicabilidades e as relações que esses conteúdos mantêm com outros no próprio âmbito da matemática. Argumentam que quando o estudante entende o motivo pelo qual um conteúdo matemático é relevante para resolver problemas diversificados, esses tendem a ter mais atenção pela aula e gosto pelo estudo. Sendo assim, os conceitos inerentes ao tema devem figurar em segundo plano juntamente com os aspectos históricos que podem garantir ou auxiliar em sua compreensão. Já os porquês matemáticos, responsáveis por gerar muitos dos processos de reflexões, não receberam tanta importância, fato esse que pode ser compreendido perante a concepção platônica que a maioria demonstra em relação à Matemática. Isto é, tal ciência não é para ser questionada, deve ser admirada, contemplada, pois segundo essa visão, a Matemática revela-se precisa, lógica, imutável, livre de contradições ou ambiguidades.

Especificamente, sobre a temática da pesquisa, as análises revelaram que menos de um quarto dos participantes soube definir corretamente um sistema de equações lineares. A situação não muda muito quando o assunto é reconhecimento de uma equação linear. Quando confrontados com equações algébricas que trazem elementos não convencionais, como por exemplo, termos trigonométricos, raízes irracionais ou uma constante como o t , emergiram muitos erros ligados à diferenciação de incógnitas, variáveis e constantes.

Em relação aos métodos utilizados para resolver um sistema de ordem dois, a maioria prefere o método de substituição. Caso a situação exigir o trabalho com três ou mais variáveis, optam pelo método do escalonamento. Apesar de conhecerem, sinalizaram que o método de comparação é pouco utilizado. Já em relação ao método de adição, houve relatos de que estudantes possuem dificuldades para trabalhar com tal método em virtude de manipulações algébricas que se devem realizar em alguns casos com as equações que compõem o sistema, e isso é um empecilho no processo de ensino e de aprendizagem. O método de

resolução matricial só foi visto por esses durante a graduação, e evidenciam pouca familiaridade com o mesmo.

Mas, nem só de métodos de resolução se faz o estudo de sistemas de equações lineares. Esses também oportunizam trabalhos que demandam o conhecimento de representações geométricas, tais como a relação entre retas ou planos. De modo geral, os participantes compreendem satisfatoriamente que a posição relativa entre duas retas associadas podem representar a solução de um sistema de equações, além de evidenciar sua classificação em SPD, SPI e SI. Mas, o mesmo não acontece quando o foco se altera para a posição relativa entre três planos. A maioria dos participantes demonstra uma carência em relação ao processo de visualização, verificado pelo fato de não conseguirem descrever a posição de uma figura gerada por meio da associação entre três planos. Dessa forma, nesse caso, a discussão sobre a classificação dos sistemas de equações lineares com base nas representações geométricas fica seriamente comprometidas.

Quanto às aplicabilidades relacionadas ao conteúdo matemático dessa pesquisa, essas são praticamente desconhecidas entre muitos participantes. Tal fato evidencia que os mesmos raramente trabalham com situações que solicitem a resolução de um problema nessa área. A questão quatro da Parte III reforçou tais evidências, pois apenas (E.7), (E.11) e (E.19) conseguiram gerenciar os processos de representação e abstração matemática obtendo êxito na resolução da questão. Anteriormente, esses mesmos participantes demonstraram conhecimentos relacionados às aplicações de sistemas de equações lineares, bem como a noção apurada de outros processos de pensamento matemático avançado, tais como a visualização, a tradução e a modelação.

Outro fato relevante a ser destacado aqui consiste no processo de memorização dos estudantes. Os exemplos de sistemas de equações lineares apresentados só faziam menção ao de ordem dois. Quanto ao de ordem três, geralmente, abordado no Ensino Médio sequer foi cogitado. Em relação às lembranças dos métodos de resolução para um sistema de equações lineares, recordaram muito bem do método de substituição visto no Ensino Fundamental e o método de escalonamento, que apesar de figurar no currículo oficial do Ensino Médio, de acordo com a maioria dos participantes, somente o conheceram e estudaram no Ensino Superior. Ainda, conforme as respostas apresentadas, a Regra de Cramer que poderia ter sido retratada também no Ensino Médio é considerada

quase que desconhecida de tais participantes. Apenas (E.9) e (E.10) evidenciaram conhecê-la de forma detalhada, mas segundo os mesmos, por iniciativa própria, pois não se lembram de tê-la estudada em alguma etapa acadêmica.

Didaticamente, muitos participantes apontam diferenças no tratamento de sistemas de equações lineares nas distintas etapas de formação. Por exemplo, na Educação Básica afirmam que se enfatizam processos de resolução, porém não se exploram situações que necessitam de interpretações apuradas, caso dos problemas que envolvem o conteúdo. Por sua vez, ao chegarem ao Ensino Superior se depararam com situações complexas, que exigem reflexões, compreensões e aplicações desse conteúdo para aprenderem outros.

Nesse sentido, muitos declararam que acabam se perdendo em meio aos conteúdos, pois possuíam experiências simples com o mesmo, as quais não ofereceram subsídios para algo mais específico. Prova disso, é que a maioria desses nem sequer consolidaram processos de representação associados ao pensamento matemático avançado, além disso os exemplos encontrados nos protocolos transitam pelo campo da Educação Básica.

Dessa forma, alegam que o modo de abordagem de alguns professores não favoreceu a compreensão desses em situações que demandavam o que Dreyfus (1991) concebe por processos de representação e abstração matemática. Resultado, não obtiveram o avanço de aprendizagem desejado. Por exemplo, (E.6) relata que reprovou na disciplina de Álgebra Linear por não conseguir compreender a quantidade considerável de conceitos novos que lhes foram passados no primeiro ano de seu curso de Licenciatura em Matemática. Já (E.17) declarou que no Ensino Médio, seus colegas apresentavam muitas dificuldades em sistemas de equações lineares, e o professor precisou avançar lentamente, e de tão devagar (E.17) se sentiu prejudicado e nos afirmou que seu conhecimento a respeito desse tema matemático ficou estagnado, pois os exercícios abordados em aula eram muito simples. Mais tarde, na graduação, segundo o mesmo, sofreu muito para tentar reaprender novamente.

Tendo em vista a pergunta norteadora, em busca de respostas trabalhamos com processos de pensamento matemático avançado, conforme Dreyfus (1991) e caracterizações de Resnick (1987).

Entendemos que todos os participantes apresentaram pelo menos três processos diferentes de representação associados ao pensamento matemático

avançado, dentre nove que analisamos. Já em relação aos processos essenciais envolvendo a abstração matemática, apenas três dentre dezessete participantes manifestaram a capacidade de formalização, generalização e síntese na resolução de tarefas sobre sistemas de equações lineares.

De modo geral, essa pesquisa trouxe um diagnóstico de futuros professores de matemática contemplando elementos que permitem inferir que experiências pessoais no âmbito escolar podem influenciar em algumas de suas decisões, e até mesmo no modo de conduta profissional.

Em muitos momentos, ficou claro que a atitude do professor, não importando a disciplina que ministra, diante de uma turma pode até determinar a carreira que o estudante exercerá futuramente. Como um dos vários exemplos disso que apareceram nos registros escritos dos participantes dessa pesquisa, temos a declaração de (E.19). Este nos conta sobre um episódio marcante que aconteceu quando o mesmo assistia uma aula de química. A seguir, recordamos o relato de tal participante:

foi uma aula de química onde meu professor (na época estava no segundo ano do ensino médio), para falar de alguma relação que o elemento 'lítio' tinha com outro elemento (faz tanto tempo que não me lembro com muitos detalhes) ele utilizou o cesto de 'lixo' da sala e o apagador para representá-los. Ele demonstrou um grande nível de insanidade, uma quebra de padrões, ele se mostrou diferente dos outros professores, o que chamou a atenção dos alunos e o fez ganhar grande respeito da turma, inclusive o meu. Isso influenciou diretamente na minha formação como professor, eu como sempre fui visto como o 'esquisito' da turma, (no colégio) 'o diferente' e etc. me identifiquei, e ali afirmei: 'quero ser um professor igual a esse' (E.19, 2011, Parte I, Questão 9).

Nesse sentido, acreditamos que esse trabalho poderá servir como um instrumento para professores formadores terem uma ideia de perfis diferentes de futuros professores de matemática, além de mostrar que muitos dos problemas que vários estudantes enfrentam derivam de questões pessoais. Alguns dos estudantes participantes trabalham durante o dia e estudam à noite, no entanto não fazem isso por opção, e sim por necessidade.

Alguns se queixam que quando chegam à universidade estão cansados e tem pouco ânimo para estudar. Então, se a aula não for atraente, por exemplo, envolvendo aplicabilidades dos conteúdos matemáticos mesclado a

aspectos históricos, segundo palavras dos mesmos, acabam por não prestarem a atenção ou até mesmo chegam a cochilar.

Nesse contexto, a questão quatro da Parte III da Proposta de Avaliação Reflexiva trouxe uma resposta que retrata a situação enfrentada por alguns estudantes. De acordo com (E.14), o cansaço foi um dos motivos por não ter obtido êxito na solução de tal questão. Após muitos registros de cálculos, encontramos as seguintes palavras no final de sua resolução:

Figura 60 – Protocolo do Participante (E. 14) - Parte III - Questão 4

$$\frac{42.000.000}{3} - \frac{100F}{3} + \frac{800Q}{3} = \frac{21.000}{3}$$

(não consigo terminar tô cansado, trabalhei o dia todo)! Desculpe

Isso evidencia que se queremos ter professores qualificados atuando em nossas salas de aula, primeiro é necessário oferecer condições socioeconômicas compatíveis para que aquele que demonstra aptidões para ser professor possa se desenvolver de forma plena. Se não, podemos encontrar cada vez mais relatos de histórias como a que nos conta (E.20), de professores que não cumprem a sua função do modo esperado. De acordo com o mesmo, em uma:

aula de álgebra linear no primeiro ano do curso, um professor não preparava as aulas, e em certa aula, ele começou a resolver um exercício e cinco minutos antes de acabar a aula ele 'percebeu' que a resolução estava errada e mandou os alunos resolverem sozinhos (E.20, 2011, Parte I, Questão 9).

Em contrapartida, mesmo enfrentando obstáculos, aqueles que decidem com firmeza construir um caminho novo encontram formas para se organizarem e buscarem o que lhes realmente dá sentido à vida. É o que verificamos, por exemplo, na resposta de (E.5), o qual nos relatou que:

até o ano passado eu trabalhava em horário comercial e muitas vezes fazia horas extras, assim tinha pouco tempo livre para estudos. Um modo de ter tempo para ao menos estudar para as provas foi fazer poucas disciplinas por ano sobrando assim algumas janelas. Costumava rever conteúdo e resolver exercícios, alguns mais complicados já cheguei até a decorar a resolução (E.5, 2011, Parte I, Questão 5, Item A).

Outro ponto relevante evidenciado por essa pesquisa é de que o atual Ensino Médio figura como se fosse um 'abismo' ao longo da formação acadêmica dos participantes dessa pesquisa. Tal fato se verifica pelos relatos de respostas apresentadas, em que a grande maioria desses evidenciou lembranças que sempre se remetiam ao Ensino Fundamental, tais como exemplos, modelos de soluções e definições em relação a sistemas de equações lineares, um conteúdo considerado básico pela comunidade acadêmica. Aqueles que demonstraram conhecimentos específicos declararam que esses foram constituídos ao longo do curso superior.

Somos conscientes da limitação de uma pesquisa qualitativa. A Proposta de Avaliação Reflexiva que aplicamos pode apresentar resultados diferentes conforme a formação do público em que se trabalha, além de estar atrelada a uma série de fatores subjetivos, tais como gosto ou não pela matemática, compreensão ou não do tema matemático abordado, e outros de caráter socioculturais, como por exemplo, tempo de dedicação de estudo em virtude ou não de um trabalho remunerado.

Escolhemos traçar um perfil, mesmo que conciso, dos participantes dessa pesquisa e ainda realizar as análises dos registros escritos de forma descritivo-interpretativo para que pudéssemos levar em conta não apenas as resoluções matemáticas, e sim também as manifestações de experiências de cada um nos revelando suas histórias, inseguranças, anseios, objetivos, sonhos e conhecimentos. Antes de sermos estudantes ou professores, somos seres humanos impregnados de sentimentos, emoções e desejos que nos movem para algo maior e nos instiga a querer aprender sempre mais. Dessa forma, os processos de pensamentos matemáticos funcionam como meios para ativarmos as capacidades cognitivas e assim construir novos conhecimentos que nos levam a novas reflexões, e desse modo continuar o infindável ciclo do aprender e do ensinar!

Como sugestão para futuras pesquisas indicamos análises de livros didáticos que tratam do tema, pois encontramos alguns problemas que poderiam comprometer o aprendizado de algum estudante iniciante que porventura fizesse uso de tal material. Necessitamos cobrar de forma mais efetiva a qualidade das informações oferecidas nos livros didáticos, já que esses muitas vezes são as principais fontes de consultas e estudos de muitos estudantes e professores. Lima (2001, p. 45) já afirmava que a “formação adquirida pelo aluno dificilmente serão superiores ao nível e à qualidade média dos livros didáticos disponíveis. Daí a importância dos mesmos”.

Por isso, se pudéssemos oferecer um conselho diríamos aos professores formadores que incentivem e instiguem seus estudantes a lerem artigos científicos de suas áreas de interesses, pois normalmente são derivados de pesquisas que trazem reflexões específicas que jamais poderão ser encontradas em livros didáticos, afinal os objetivos são diferentes.

Para finalizar, compreendemos que os processos de pensamento matemático avançado no sentido de Dreyfus (1991) e conforme caracterizações de Resnick (1987) requerem disciplina e tempo para serem consolidados, sendo assim as dúvidas, as incertezas, os erros e as confusões constituem partes integrantes dos processos, e mesmo com esses podemos ainda aprender. A pesquisa de Thompson (1997) nos permite dizer que as concepções pessoais influenciam no processo de ensino e de aprendizagem, e que a matemática pode assumir 'inúmeras faces', isto é, metódica, prescritiva, dinâmica, etc., e para isso basta apenas compreender um pouco da pessoa que estuda ou que nos fala!

Agora é chegado o momento de fazer um balanço de parte do que foi aprendido com essa pesquisa, pois produzir uma dissertação é um exercício intenso e constante de introspecção e reflexão de muitos conceitos e ideias que às vezes nos passam despercebidos. Por meio da realização dessa pesquisa, entre outras coisas, aprendi a compreender o modo pelo qual a teoria estudada do pensamento matemático avançado pode ser aplicada na prática, isto é, desenvolvi habilidades de analisar características e processos de pensamentos matemáticos explicitados nas resoluções dos participantes dessa pesquisa. De modo geral, isso tornou a minha visão sobre o processo de ensino e de aprendizagem matemática refinada, clara, objetiva e desafiadora!

REFERÊNCIAS

- ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra contemporânea**. Porto Alegre: Bookman, 2006. 610 p.
- ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. 572 p.
- ARCAVI, Abraham. **Symbol sense**: informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics. Canada: FLM Publishing Association, 1994. p. 24-35.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p.
- BATTAGLIOLLI, C.S.M. **Sistemas lineares na segunda série do ensino médio**: um olhar sobre os livros didáticos. 2008. 114f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994. 336 p.
- BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra linear**. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1980. 411 p.
- BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2012: Matemática. Ensino Médio. Brasília: MEC, 2011.
- BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: volume 2. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.
- BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio (PCN+)**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2002.
- BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília, MEC, 2000.
- BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (5ª a 8ª séries)**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2005. 543 p.

CUNHA, Antônio Geraldo da. **Dicionário etimológico da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Lexikon, 2010. 712 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 2.ed. São Paulo: Ática, 2004. 624 p.

DOMINGOS, A. Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17., Setúbal, 2006.

DORIER, Jean-Luc; ROBERT, Aline; ROGALSKI, Marc. Some comments on 'the role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra' by F. Uhlig. **Educational Studies in Mathematics**, Holanda: Kluwer Academic Publishers, n. 51, p.185-191, 2002.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Processes. In : TALL, David. **Advanced mathematical thinking**. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, pp.25-41.

ERNEST, Paul. The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In: **6th International Congress of Mathematical Education**, Budapest, August 1988. Printed as 'The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics', in P. Ernest, Ed. **Mathematics Teaching: The State of the Art**, London, Falmer Press, 1989: 249-254.

FERREIRA, Maria Cristina Costa; GOMES, Maria Laura Magalhães. Sobre o Ensino de Sistemas Lineares. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 32, p. 9-16, 1996.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela.; MIGUEL, Antonio. Contribuições para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pró-posições**. Campinas, v.4, n.1, pp.78-91,1993.

FREIRE, Paulo. **A pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 30. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2004. 148 p.

FREIRE, Paulo. **Educação e mudança**. 33. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2011. 79 p.

HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles; FRANCO, Francisco Manoel de Mello. **Minidicionário Houaiss da língua Portuguesa**. 2.ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2004. 905 p.

KAPUT, James J. **Teaching and learning a new algebra with understanding**. Dartmouth: University of Massachusetts, 1999. 33 p.

LEON, Steven J. **Álgebra Linear com aplicações**.8.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 451p.

LIMA, Elon Lages. Análise de livros de matemática para o Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: SBM, n. 46, p. 43-51, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no espaço**. 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.164 p.

- LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no espaço**. Rio de Janeiro: SBM, 1993. 164 p.
- LIMA, Elon Lages. Sobre o ensino de sistemas lineares. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: SBM, n. 23, p. 8-18, 1993.
- LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 249 p.
- LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papyrus, 1997. 176 p.
- LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3.ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2010. 141 p.
- LUCCAS, S. **Abordagem histórico-filosófica na educação matemática: apresentação de uma proposta pedagógica**. 2004. 222f. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.
- MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 116 p.
- MULLER, Mary Stela; CORNELSEN, Julce Mary. **Normas e padrões para Teses, dissertações e Monografias**. 6.ed. Londrina: Eduel, 2007. 155 p.
- PAIVA, Manoel R. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995. 592 p. v.2.
- PANTOJA, L. F. L. **A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas**. 2008. 102f. Dissertação. (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Belém.
- PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná - SEED. Edital n.º 117/2010 - GS/SEED. **Processo de seleção simplificado - PSS para professor substituto nas disciplinas da educação básica**. Curitiba, 2010. (Séries Finais do Ensino Fundamental e Séries do Ensino Médio, Ensino Médio em Bloco e Ensino Médio Inovador)
- PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes curriculares da educação básica: matemática**. Curitiba, 2008.
- POLYA, George. Dez mandamentos para professores. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: SBM, n. 10, p. 2-10, 1987.
- PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: ministério da educação - DGIDC, 2009, 181 p.
- PONTE, João Pedro da, et al. A dinâmica da aula de matemática. In: **Didática da Matemática**. cap.4. Lisboa: DES do ME, 1997.

POOLE, David. **Álgebra linear**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. 690 p.

RESNICK, Lauren B. **Education and learning to think**. Washington: National Academy Press, 1987. 62 p.

SAMPAIO, José Luiz Pereira; NETO, Aref Antar; LAPA, Nilton; CAVALLANTE, Sidney Luiz. **Trigonometria - noções de matemática**. v. 3. São Paulo: Moderna, 1979. 314p.

TALL, David. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF LEARNING MATHEMATICS, Recife, v 1, p. 161-175. July 1995.

TALL, David. The psychology of advanced mathematical thinking. In : TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 3 - 21.

THOMPSON, Alba Gonzales. A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. **Zetetike**. Campinas, v. 5, n. 8, p.11 - 44, 1997.

ANEXOS

ANEXOS A – Proposta de avaliação reflexiva envolvendo sistemas de equações lineares

Parte I: Apresentação Profissional

Idade: _____

Você já atua ou atuou como professor?

Sim Não

Em caso afirmativo, indique o segmento e o ano que desempenha ou desempenhou a função:

Ensino Fundamental I – 2º ao 5º anos (1ª a 4ª séries) | Ano/série:

Ensino Fundamental II – 6º ao 9º anos (5ª a 8ª séries) | Ano/série:

Ensino Médio – (1º ao 3º anos) | Ano:

Parte I: Perfil Do Estudante

QUESTÃO 01

- (a) Pensando em seu futuro profissional, como professor de matemática, o que considera importante em matemática que não pode deixar de aprender?
 (b) Para você, o que a matemática representa?

QUESTÃO 02

Explique o porquê de sua escolha pelo curso de matemática. Que razões lhe motivaram para tal escolha?

QUESTÃO 03

Há espaço em seu curso de graduação para debates, reflexões e discussões a respeito de habilidades matemáticas, a fim de estimular um pensamento matemático avançado?

QUESTÃO 04

Você como futuro professor o que procura fazer para compreender os porquês específicos de um conteúdo de matemática? Comente.

QUESTÃO 05

- (a) Quais são seus hábitos de estudo enquanto estudante da graduação? Relate.
 (b) Considerando seus hábitos de estudos, de que maneira você reflete sobre sua própria aprendizagem matemática? Explique.
 (c) Que fatores você considera relevantes para seu próprio processo de aprendizagem matemática?

QUESTÃO 06

Qual a sua expectativa, enquanto estudante do Ensino Superior, para uma aula que contempla um tema específico matemático, como por exemplo, Sistemas de Equações Lineares? Relate seus comentários.

QUESTÃO 07

Como você abordaria Sistemas de Equações Lineares com estudantes do Ensino Médio? Relate suas ideias sobre isso.

QUESTÃO 08

De que forma os aspectos históricos que envolvem um conteúdo matemático específico, quando utilizados, colaboram para o desenvolvimento de uma aula, seja esta no Ensino Médio ou Ensino Superior? Explique.

QUESTÃO 09

(a) Geralmente todos nós, enquanto estudantes, temos uma recordação marcante de alguma aula. Relate a sua e explique que atitudes você percebeu que o professor demonstrou na ocasião.

(b) A situação que você descreveu no item "a" trouxe alguma mudança no seu comportamento? Influenciou você de alguma forma? Comente.

QUESTÃO 10

Em relação ao conhecimento dos documentos educacionais brasileiros listados no quadro apresentado a seguir, justifique de que modo estes contribuem para a organização da prática do professor.

DOCUMENTO	SEU RELATO
Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN /1997)	
Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM / 2000)	
Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+/2002)	
Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Matemática V.2 (OCEM/2006)	
Diretrizes Curriculares Estaduais da Educação Básica do Paraná – Matemática (DCE-PR/2008)	

QUESTÃO 11

Deixe suas análises e comentários sobre as perguntas que você respondeu anteriormente. Foram interessantes ou triviais? Por quê? Você acredita que as perguntas anteriores colaboram para uma reflexão pessoal e profissional? Comente.

ANEXOS B – Parte II: Aspectos conceituais e didáticos envolvendo sistemas de equações lineares

QUESTÃO 01

Quando você pensa em Sistemas de Equações Lineares, que termos têm a ver com esse conteúdo? Assinale.

- | | | |
|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> Equações | <input type="checkbox"/> Regra de Cramer | <input type="checkbox"/> Variáveis |
| <input type="checkbox"/> Planos | <input type="checkbox"/> Pensamento algébrico | <input type="checkbox"/> Intersecção de retas |
| <input type="checkbox"/> Retas | <input type="checkbox"/> Circuitos elétricos | <input type="checkbox"/> GPS ¹ |
| <input type="checkbox"/> Igualdades | <input type="checkbox"/> Frações parciais | <input type="checkbox"/> Interpolação |
| <input type="checkbox"/> Desigualdades | <input type="checkbox"/> Matriz identidade | polinomial |
| <input type="checkbox"/> Determinante | <input type="checkbox"/> Construção de | <input type="checkbox"/> Álgebra linear |
| <input type="checkbox"/> Matriz | parábola | <input type="checkbox"/> Análise de redes |
| <input type="checkbox"/> Incógnitas | <input type="checkbox"/> Vetores | <input type="checkbox"/> Método de eliminação |
| <input type="checkbox"/> Plano Cartesiano | <input type="checkbox"/> Balanceamento | de Gauss-Jordan |
| <input type="checkbox"/> Relações de | químico | <input type="checkbox"/> Coordenadas |
| equivalência | <input type="checkbox"/> Escalonamento | cartesianas |
| <input type="checkbox"/> Geometria analítica | <input type="checkbox"/> Método de eliminação | |
| <input type="checkbox"/> Alocação de recursos | de Gauss | |
| <input type="checkbox"/> Matriz inversa | <input type="checkbox"/> Posto de matriz | |

¹ Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global)

QUESTÃO 02

(a) Em quais épocas escolares você estudou Sistemas de Equações Lineares? Relate sua experiência de forma detalhada sobre esse conteúdo.

(b) Existe diferença da abordagem da Educação Básica para a do Ensino Superior sobre o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares? Explique.

QUESTÃO 03

Defina um Sistema de Equações Lineares e explicita suas características.

QUESTÃO 04

O que é sistema linear homogêneo?

QUESTÃO 05

Quando se trata de Sistemas de Equações Lineares são considerados alguns métodos de solução, tais como: substituição, comparação, adição, escalonamento, resolução matricial, Regra de Cramer, entre outros. Relate suas ideias, experiências, dúvidas e compreensões a respeito desses métodos.

Método de Resolução	SEU RELATO	Em que situação é aconselhável o uso desse método, e em que segmento de ensino?
SUBSTITUIÇÃO		
COMPARAÇÃO		
ADIÇÃO		
ESCALONAMENTO		
RESOLUÇÃO MATRICIAL		
REGRA DE CRAMER		

QUESTÃO 06

O que deve ser levado em consideração quando se trata de Sistemas de Equações Lineares? Enumere de acordo com o que acredita que seria prioridade para você enquanto professor. Explique e justifique suas escolhas.

- () Aplicabilidades.
- () Aspectos históricos.
- () A relação que existe entre esse conteúdo e outros no próprio âmbito da matemática.
- () Conceito.
- () Explicações dos porquês matemáticos (demonstrações matemáticas).
- () Outro (s). Qual (is)?

QUESTÃO 07

Um Sistema de Equações Lineares possui formas de interpretação tais como: interpretação geométrica, interpretação matricial e interpretação vetorial, entre outras. Relate o que você compreende sobre essas diferentes maneiras de se interpretar um Sistema de Equações Lineares.

QUESTÃO 08

O conteúdo de Sistemas de Equações Lineares está presente tanto no currículo da Educação Básica quanto no Ensino Superior. Que aplicabilidades você conhece relacionada a esse conteúdo? Você pode dar algum exemplo? Comente.

QUESTÃO 09

Analise a afirmação: Segundo Ferreira e Gomes (1996), vários livros didáticos de matemática afirmam que um sistema que possui nulos todos os determinantes da Regra de Cramer é indeterminado. Posicione-se em relação a essa afirmação concordando ou discordando. Justifique.

ANEXOS C – Parte III: aspectos matemáticos envolvendo sistemas de equações lineares

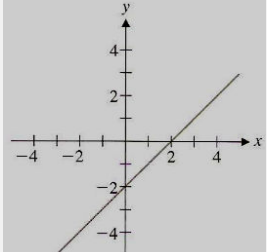
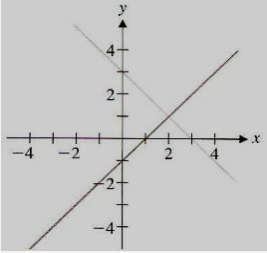
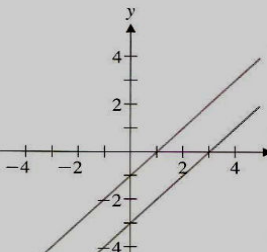
QUESTÃO 01

(POOLE, 2004, adaptado) Nos itens de *a* até *h*, considere as equações nas variáveis *x*, *y* e *z*. Assinale se a equação dada é ou não linear, a partir disso justifique o motivo de sua escolha.

Item	Equação	Equação linear	Equação não linear	Justificativa da escolha
A	$2x - xy - 5z = 0$			
B	$(\cos 3) x - 4y + z = \sqrt{3}$			
C	$\sqrt{2}x + \frac{\pi}{4}y - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}z\right) = 1$			
D	$x^{-1} = 7y + z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)$			
E	$x - \pi y + \sqrt[3]{5}z = 0.$			
F	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$			
G	$\sqrt{2}x + \frac{\pi}{4}y - \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)z = 1$			
H	$3 \cos x - 4y + z = \sqrt{3}$			

QUESTÃO 02

(POOLE, 2004, adaptado) Analise os gráficos apresentados a seguir. Descreva a posição apresentada pelas retas nas figuras que se seguem, e a partir dessa descrição, considere que as retas representem soluções de sistemas de equações lineares 2×2 . Indique qual seria a classificação do sistema: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI). Justifique suas escolhas.

Figura ⁴⁷	Descrição da figura Posição das retas	Classificação do Sistema	Justificativa de sua escolha
			
			
			

⁴⁷ As figuras foram retiradas de POOLE, David. *Álgebra Linear*. São Paulo: Thomson, 2004. p.58.

QUESTÃO 03

Segundo Ferreira e Gomes (1996), nos sistemas de equações lineares 3 x 3 da forma:

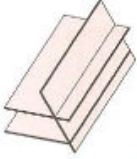
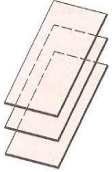
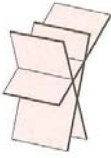


$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (3); \text{ as equações (1), (2), (3) representam planos } \pi_1, \pi_2 \text{ e } \pi_3 \text{ no}$$

espaço tridimensional. As possibilidades para as posições dos três planos são oito. Quanto à classificação da solução de sistemas de equações lineares, estes podem ser: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI).

Descreva a posição apresentada pelos planos nas figuras que se seguem, e a partir dessa descrição, considere que os planos representem soluções de sistemas de equações lineares 3x3. Indique qual seria a classificação do sistema: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI). Justifique suas escolhas.

Figura ⁴⁸	Descrição da figura Posição dos planos	Classificação do Sistema	Justificativa de sua escolha
			
			
			
			
			

⁴⁸ As figuras dos planos foram retiradas de ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Porto Alegre: Bookman, 2006. p.61.

QUESTÃO 04

(POOLE, 2004, p.109) Um comerciante de café vende três misturas de grãos. Um pacote com a “mistura da casa” contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com a “mistura especial” contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 100 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com “mistura gourmet” contém 100 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 200 gramas de café tostado tipo francês. O comerciante tem 30 quilos de café colombiano, 15 quilos de café queniano e 25 quilos de café tostado tipo francês. Se ele desejar utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura devem se preparar?

QUESTÃO 05

(ANTON e BUSBY, 2006, p.80) Considere os sistemas lineares:

$$(I) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que o primeiro sistema não possui solução e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por estas equações.

(b) Mostre que o segundo sistema tem uma infinidade de soluções e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por essas equações.