UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

LÍNLYA NATÁSSIA SACHS CAMERLENGO DE BARBOSA

UMA RECONSTRUÇÃO HISTÓRICO-FILOSÓFICA DO SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Londrina
2011

LÍNLYA NATÁSSIA SACHS CAMERLENGO DE BARBOSA

UMA RECONSTRUÇÃO HISTÓRICO-FILOSÓFICA DO SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Rodrigues da Silva

Londrina
2011

Catalogação Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

B238r Barbosa, Línlya Natássia Sachs Camerlengo de.
Uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não euclidianas / Línlya Natássia Sachs Camerlengo de Barbosa. – Londrina, 2011. 57 f. : il.

Orientador: Marcos Rodrigues da Silva.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2011.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 3. Matemática – História – Teses. 4. Geometria não-euclidiana – Teses. I. Silva, Marcos Rodrigues da. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

LÍNLYA NATÁSSIA SACHS CAMERLENGO DE BARBOSA

UMA RECONSTRUÇÃO HISTÓRICO-FILOSÓFICA DO SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Marcos Rodrigues da Silva
UEL – Londrina – PR

____
Prof.ª Dr.ª Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
UEL – Londrina – PR

____
Prof.ª Dr.ª Maria Ângela Miorim
UNICAMPI – Campinas – SP

Londrina, 1 de março de 2011.

Dedico este trabalho à minha irmã, Cinthyan, que de todas as formas me ajudou a chegar aqui.
Além de uma segunda mãe e uma grande amiga, é para mim o maior exemplo de superação, persistência e humildade.
Obrigada por tudo!

AGRADECIMENTOS

Um trabalho como este não seria possível sem a colaboração e o apoio de muita gente. Sinto-me incapaz de listar todos que me ajudaram a chegar até aqui, mas gostaria de expressar o carinho e a gratidão que tenho por algumas pessoas em especial, começando pelos professores, todos, que de uma forma ou de outra puseram a minha cabecinha para funcionar! Desde as tias da Educação Infantil que me mostraram as letras e os números e fizeram o trabalho – tão misterioso para mim – de alfabetização, até os professores, que no Ensino Superior, me mostraram um mundo matemático fascinante e, aqui no mestrado, me fizeram pensar sobre esse mundo e sobre a educação. Dentre esses professores quero citar alguns: a professora Maria José, minha primeira professora de matemática, que ao me convidar a participar das olimpíadas brasileira e paulista de matemática, despertou uma curiosidade gigante sobre o assunto em mim; Izabel e Nêuri, professoras do Kumon, que se tornaram para mim, mais que tudo, grandes amigas; o professor Marcos, que, ao aceitar ser meu orientador neste mestrado, colocou em xeque tudo que para mim estava quadradinho e, assim, mostrou que há outras formas – mais interessantes – de se ver o mundo; a professora Márcia que tanto admiro, que aceitou fazer parte da minha banca contribuindo muitíssimo para este trabalho ser como é; aos professores Sérgio Nobre, Maria Ângela e Marinez, que também aceitaram compor a banca e, desta forma, deram para o trabalho mais credibilidade e para mim mais responsabilidade em deixá-lo melhor. Os outros tantos professores me instigaram e inspiraram durante toda a vida escolar e, por isso, os agradeço! Aos amigos tenho também muito a agradecer: por tornarem a minha vida mais leve e feliz, por me incentivarem a seguir o caminho que decidi trilhar, por me ensinarem tanto – cada um a seu modo! Entre todos, um é muito especial: Barretos. Amigo para todas as horas, desde as primeiras aulas de Cálculo num remoto 2004 até os estudos, tão novos para gente, em Educação. Tanta coisa aconteceu de lá para cá; nós nos tornamos grandes amigos e – quem diria? – namorados! Agradeço por ser “minha meta, minha metade, minha seta, minha saudade [...], minha manha, meu amanhã”!! Agradeço à família que me forneceu, muito além dos genes, a estrutura, os valores, a educação. Obrigada por sempre me apoiar! Uma pessoa em especial, e tão especial, não pode ser categorizada (qualquer categoria deixaria a desejar): minha mãe. Ela me fez ser quem eu sou, me deu amor e carinho de mãe, apoio, incentivo e segurança de família, ombro amigo, ouvidos atentos, sábios conselhos e, como educadora que é, ensinou que os maiores valores são o respeito e a humildade. Obrigada por tudo e mais um pouco! Agradeço ainda ao programa de mestrado que me possibilitou esta experiência tão valiosa e à CAPES pelo apoio fundamental. A todos que me fizeram chegar aqui, obrigada!!!

BARBOSA, L. N. S. C. **Uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não euclidianas**. 2011. 57 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2011.

RESUMO

Diante de justificativas favoráveis à participação da história da matemática no ensino de matemática, faremos aqui uma reflexão sobre essas justificativas e sobre as possíveis maneiras de reconstrução dessa história. Apresentaremos, então, uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não euclidianas, envolvendo o quinto postulado de Euclides, na forma de história de problemas, em que se procura mostrar as tentativas bem sucedidas e fracassadas na resolução do problema em questão. Faremos, por fim, uma problematização sobre o que foi apresentado neste trabalho com questionamentos – e não respostas – sobre a participação da história no ensino de matemática.

Palavras-chave: Educação matemática. História da matemática. Geometrias não euclidianas.

BARBOSA, L. N. S. C. **A historical-philosophical reconstruction of the appearing of the non-euclidian geometries**. 2011. 57f. Dissertation (Master in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, 2011.

ABSTRACT

In the face of the favorable justifications to the participation of the history of mathematics in the mathematics teaching, we will do a reflection about these justifications and about the possible ways of reconstruction of this history. We will show then a historical-philosophical reconstruction of the appearing of the non-euclidian geometries, involving the Euclid's fifth postulate, like a *problematic history*, showing the successful and unsuccessful attempts to solve the problem. At last we will do a problematization about what had presented here with questioning – and not answers – about the participation of the history in the mathematics teaching.

Keywords: Mathematics education. History of mathematics. Non-euclidian geometries.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> [...] o que dá o verdadeiro sentido ao encontro é a busca e que é preciso andar muito para alcançar o que está perto.
>
> José Saramago em *Todos os Nomes*

Muitos são os discursos que defendem a participação da história da matemática no ensino de matemática; trata-se de uma grande discussão no campo da educação matemática. As justificativas favoráveis encontram-se tanto no campo da epistemologia, isto é, a história seria útil para o aprendizado da própria matemática, quanto no campo da ética, a história seria útil para a formação ética do cidadão. Apresentaremos aqui algumas dessas justificativas, situando-as de acordo com a natureza de seu argumento – epistemológica e/ou ética.

Já que existe uma corrente na educação matemática favorável à participação da história, acreditamos que isso deva ser feito de um modo em que a história não seja inserida como um acessório dispensável no ensino, mas como parte do conteúdo a ser ensinado. Para a determinação da forma a ser apresentada tal história, faremos aqui uma classificação das possíveis maneiras de fazê-lo e determinaremos qual delas consideramos mais adequada[1] do ponto de vista historiográfico. Apresentaremos aqui uma reconstrução histórica e filosófica de um episódio da matemática da maneira que consideramos a mais apropriada historiograficamente: pela chamada história de problemas, em que se procura mostrar as tentativas bem sucedidas e fracassadas na resolução do problema em questão.

O episódio da matemática escolhido para essa reconstrução é o surgimento das geometrias não euclidianas, por ser considerado um marco na história da matemática: as estruturas – que pareciam tão sólidas – da matemática mostram-se flexíveis com a possibilidade de outras geometrias que não a euclidiana. Como afirma Brito (1995), uma discussão acerca do surgimento de geometrias não euclidianas traz, subjacente a si, uma outra discussão, relativa à concepção de verdade, de rigor, de consistência; uma discussão como esta coloca em debate questões sobre os fundamentos da matemática.

[1] Com o adjetivo *adequado* queremos indicar o modo que consideramos mais pertinente, conveniente ou apropriado para a participação da história. Sabemos que esta palavra – assim como outras que possam vir a substituí-la – contém, de certa forma, um juízo de valor, mas o que procuramos indicar aqui não é que determinadas maneiras de participação da história sejam melhores que outras e sim que são mais *adequadas* que outras do ponto de vista *historiográfico*.

Além disso, por meio do estudo de geometrias não euclidianas – a partir da discussão sobre o quinto postulado de Euclides –, pode-se perceber como definições e axiomas básicos conduzem a determinados resultados, isto é, como mudanças na base de um sistema axiomático podem conduzir a resultados totalmente diferentes. Neste sentido, o matemático e filósofo Jules-Henri Poincaré (1984) escreveu no prefácio de sua obra *A Ciência e a Hipótese* que de cada experiência uma multidão de consequências poderá ser deduzida matematicamente, e assim será possível conhecer outras faces do universo.

O objetivo geral desta pesquisa é apresentar uma reflexão sobre a possibilidade de produzir uma reconstrução histórico-filosófica acerca do surgimento das geometrias não euclidianas de um modo que abranja todo o problema em questão, não somente a sua história bem sucedida. Entendemos por reflexão o ato de pensar e de discutir sobre as possibilidades e as dificuldades envolvidas em uma reconstrução histórica e filosófica.

A pergunta de investigação que se coloca, portanto, é: como apresentar uma reconstrução histórico-filosófica acerca do surgimento das geometrias não euclidianas na forma de história de problemas?

Faremos, então, essa reconstrução cientes de limitações como:

- não sermos historiadores e termos que utilizar histórias já prontas para tal reconstrução. Isto é, utilizaremos fontes historiográficas que podem apresentar erros, omissões e podem privilegiar determinados matemáticos ou determinados fatos em detrimento de outros;
- o acesso a obras historiográficas estar restrito a idiomas que compreendemos;
- o tempo para elaboração desta dissertação, que restringe a nossa busca por informações, sua organização e posterior apresentação.

Essas limitações são semelhantes àquelas encontradas por professores e pesquisadores que se propõem a organizar tarefas em que há a participação da história da matemática. Portanto, não se tratam de dificuldades exclusivas a este trabalho e que poderiam ser superadas facilmente por outros que se propusessem a realizar uma reconstrução de um episódio da história da matemática.

Nossa preocupação principal neste trabalho está na apresentação de uma discussão ampla sobre a participação da história da matemática no ensino de matemática, incluindo uma problematização[2] sobre o tema. Nesta problematização, apresentaremos questionamentos – e não respostas – sobre essa participação e sobre as formas de reconstrução da história. Acreditamos que este trabalho tenha como ponto de partida a atitude apresentada por Miguel e Miorim (2005) com relação à historiografia que poderia ser colocada desta forma: "Colocar questões e problemas, sim! Constituir uma nova história, sim! Usar a história não, porque ela não é um objeto de uso, e sim um campo de diálogo!" (MIGUEL; MIORIM, 2005, p.162).

[2] Este capítulo dedicado às problematizações sobre o tema foi sugerido pela professora Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino no exame de qualificação e nós não apenas aceitamos a sugestão, como acreditamos ter sido um espaço rico para reflexões, discussões e questionamentos.

CAPÍTULO 1

A PARTICIPAÇÃO DA HISTÓRIA

> [...] os lugares-comuns, as frases feitas, os bordões, os narizes-de-cera, as sentenças de almanaque, os rifões e provérbios, tudo pode aparecer como novidade, a questão está só em saber manejar adequadamente as palavras que estejam antes e depois.
>
> José Saramago em *História do cerco de Lisboa*

1.1 A IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA NO ENSINO

Por que uma reconstrução histórica do surgimento das geometrias não euclidianas? Seria a história um elemento importante no ensino de matemática?

Matthews apresenta alguns motivos pelos quais a abordagem contextualista (aquela que defende que a educação em ciências ocorra em seus diversos contextos: ético, social, histórico, filosófico e tecnológico) afirma que a história da ciência pode contribuir para seu ensino:

> (1) motiva e atrai os alunos;
> (2) humaniza a matéria;
> (3) promove uma compreensão melhor dos conceitos científicos por traçar seu desenvolvimento e aperfeiçoamento;
> (4) há um valor intrínseco em se compreender certos episódios fundamentais na história da ciência [...];
> (5) demonstra que a ciência é mutável e instável e que, por isso, o pensamento científico atual está sujeito a transformações que
> (6) se opõem a ideologia cientificista; e finalmente
> (7) a história permite uma compreensão mais profícua do método científico e apresenta os padrões de mudança na metodologia vigente. (MATTHEWS, 1995, p.172-173)

Assim como a lista de Matthews (1995), há outras listas de justificativas para a participação da história no ensino da matemática apresentadas por Antonio Miguel em sua tese de doutorado. Colocamos aqui uma delas:

Segundo ele[3], uma utilização adequada da história, desde que associada a um conhecimento atualizado da matemática e de suas aplicações, poderia levar o estudante a perceber:

[3] P. S. Jones em seu artigo “A história da matemática como ferramenta de ensino”.

> (1) que a matemática é uma criação humana;
> (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática;
> (3) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e o mundo físico e matemática e Lógica;
> (4) que necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas frequentemente servem de estímulo ao desenvolvimento de idéias matemáticas;
> (5) que a curiosidade estritamente intelectual, isto é, que aquele tipo de conhecimento que se produz tendo como base a questão "O que aconteceria se...?", pode levar à generalização e extensão de idéias e teorias;
> (6) que as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática mudam e se desenvolvem ao longo do tempo;
> (7) a natureza e o papel desempenhado pela abstração e generalização da história do pensamento matemático;
> (8) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (MIGUEL, 1993, p.76)

Esses argumentos assemelham-se a alguns de Matthews (1995), porém são específicos para a história no ensino de matemática e não mais da ciência em geral. Os argumentos (1), (2) e (4) de Jones poderiam ser resumidos no argumento (2) de Matthews: "humaniza a matéria" (1995, p.172), o argumento (6) de Jones poderia ser reescrito como parte do argumento (5) de Matthews: "demonstra que a ciência é mutável e instável" (1995, p.172). Já os argumentos (3) e (5) de Jones não foram tratados por Matthews para o ensino de ciências, e os argumentos (7) e (8) de Jones são muito específicos da matemática e, por isto, não há semelhantes na lista de Matthews.

D'Ambrosio (1996) ressalta que, para teorias e práticas matemáticas serem vistas como atividades humanas desenvolvidas e utilizadas em um contexto específico, a história da matemática é fundamental.

Dentre as finalidades da participação da história da matemática no ensino, D'Ambrosio (2000) destaca algumas:

> (1) para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças, os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
> (2) para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
> (3) para destacar que essa Matemática teve origem nas culturas da antigüidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;
> (4) para saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em conseqüência do desenvolvimento científico, tecnológico e

> econômico, e avaliar as conseqüências sócio-culturais dessa incorporação.(D'AMBROSIO, 2000, p.248)

De acordo com Miguel e Miorim (2005), é possível ainda fazer uma distinção entre a natureza dos argumentos a favor da participação da história no processo de ensino-aprendizagem da matemática: os argumentos de natureza ética e os argumentos de natureza epistemológica que, para eles, não são necessariamente excludentes e suas distinções não são totalmente rígidas[4].

Os argumentos de natureza ética sugerem que o conhecimento matemático seja um meio para construção de valores e atitudes que visem a formação integral do cidadão. Desta maneira, seguindo esses argumentos, a história não se confunde com o conteúdo matemático; ela está além do conteúdo. As justificativas de D'Ambrosio (1996; 2000) e as justificativas de Matthews (1995) de números (2), (5), (6) e (7) encaixam-se nessa categoria.

Os argumentos de natureza epistemológica focalizam o conhecimento matemático propriamente dito e justificam que a história seja útil ao estudante para que ele compreenda e se aproprie da própria matemática, ou seja, a matemática, neste caso, é vista como tendo um fim em si e por si mesma. Conforme definido por Cunha (1986), entendemos epistemologia como sendo o estudo crítico daquilo que envolve as ciências já constituídas: princípios, hipóteses e resultados. Pertencem a essa categoria as justificativas (3) e (4) apresentadas por Matthews (1995)[5].

Deve-se tomar cuidado ao utilizar quaisquer argumentos favoráveis à participação da história como recurso pedagógico. Se eles não apresentarem fundamentos consistentes, poderão desmoronar. Miguel (1993) faz uma análise cuidadosa de alguns desses argumentos. O autor nos mostra, por exemplo, que um argumento muito utilizado relaciona-se com o Princípio Genético, segundo o qual o desenvolvimento de um indivíduo é comparável ao desenvolvimento de toda sua espécie. Deveria, então, o estudante passar evolutivamente por etapas semelhantes às da história da matemática ao construir o seu conhecimento

---

[4] Miguel e Miorim (2005) indicam a natureza das justificativas para participação da história da matemática no ensino como argumentos de natureza ética e argumentos de natureza epistemológica. Os autores também apresentam os tipos de vínculos entre a produção sócio-histórica do conhecimento no passado (filogênese) e a produção e/ou apropriação pessoal desse conhecimento no presente (psicogênese), que podem ser do tipo ético ou do tipo epistemológico, mas esta distinção entre os vínculos pode ser considerada ilegítima e os vínculos seriam todos de natureza ético-epistemológica, assim como a aprendizagem (e também a aprendizagem matemática) seria sempre uma aprendizagem ético-epistemológica (MIGUEL; MIORIM, 2005, p.70-72).

[5] A justificativa (1) apresentada por Matthews não acreditamos ser de natureza epistemológica nem de natureza ética, já que a finalidade da participação da história não estaria na compreensão e na apropriação da matemática (natureza epistemológica) e nem na formação do cidadão (natureza ética). Trata-se de uma justificativa mecanicista de motivação por impulsos baseados em necessidades biológicas há muito superada e substituída por enfoques cognitivos de motivação.

matemático, desde suas engatinhadas até chegar aos passos mais largos. Apesar de ser fascinante encarar a evolução cognitiva de um ser humano como semelhante à evolução ocorrida na história da humanidade, é esse um argumento que já foi duramente criticado por antropólogos, sociólogos, psicólogos e historiadores, por não ter validade real; não deve, portanto, se manter como justificativa para a participação da história no ensino de matemática.

Miguel (1993) mostra, também, que a história como fonte de motivação – que é o argumento (1) de Matthews (1995) – é um argumento muito usado e de diversas formas desde a década de 20. Duas questões podem ser colocadas frente a esse argumento como contra-argumentação: se a história motiva os alunos, o ensino da própria história seria automotivador e, por isto, fonte de interesse constante dos alunos? A motivação do sujeito é atingida com os mesmos meios sempre, independentemente do sujeito? O autor responde às duas negativamente: a história não parece ser automotivadora e o modo de se atingir a motivação não parece ser aplicável a todos. Encarar este modo de atingir a motivação como aplicável a todos (no caso, via história) é uma visão mecanicista centrada no objeto do conhecimento e não no sujeito, que foi substituída ao longo dos tempos pelo enfoque cognitivo da motivação: os impulsos baseados em necessidades biológicas dão lugar "a teorias que enfatizam ser o nosso comportamento determinado pelo modo como nos percebemos a nós mesmos e percebemos o nosso meio-ambiente" (EVANS, 1976, p.7 apud MIGUEL, 1993, p.69).

Outra questão se coloca: seria possível fazer uma apresentação da história envolvida em algum episódio sem comprometermos sua integridade?

Partimos do pressuposto de que contar uma história significa valorizar determinados fatos que por si só não são mais ou menos importantes que quaisquer outros. Isto é, a escolha dos fatos que consideramos relevantes e daqueles que necessitamos omitir é totalmente subjetiva. Neste sentido, Schaff (1991) aponta que pelo fato de não existirem acontecimentos quaisquer que se destaquem, a sua valorização depende diretamente do sujeito que os valoriza. Para Dewey (1949 apud SCHAFF, 1991), construir uma história implica em controlar fatos e selecionar conhecimentos, aceitando e rejeitando acontecimentos passados e decidindo o modo de interligá-los, ou seja, constrói-se a história dos acontecimentos passados com os olhos do sujeito (historiador) do presente.

Vemos que não é possível, então, falar em integridade da história, pois ela tem como característica a interpretação daquele que a constrói. Não é possível pensar no conhecimento histórico como um reflexo fiel dos fatos passados, já que a historiografia é a descrição valorizada do processo histórico.

O historiador não pode se manifestar com relação a tudo que contribuiu para determinado acontecimento. Ele terá que escolher e reunir certas asserções sobre o acontecimento que lhe interessa, atribuindo-lhes certo significado (BECKER, 1959 apud SCHAFF, 1991). Assim, ele constrói o fato histórico a partir das fontes que lhe estão disponíveis e o tem como o resultado de todo seu trabalho (SCHAFF, 1991).

Como aponta Miguel (1993, p.109), “a matemática pode ser historizada através de várias reconstituições, sendo que, pedagogicamente, dependendo dos fins que se têm em vista, algumas são mais pertinentes e esclarecedoras que outras” e para que a reconstrução histórica de um episódio da história da Matemática possa ser pedagogicamente útil, ela deve ser feita do ponto de vista do educador matemático e, desta forma, privilegiará certos problemas e enfatizará “a reconstituição, não tanto dos resultados matemáticos, mas dos contextos epistemológico, psicológico, sócio-político e cultural de sua produção” (MIGUEL, 1993, p.109).

Diante disto, faremos aqui uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não euclidianas. Para isto, faremos antes algumas considerações filosóficas e uma categorização sobre a forma de se apresentar a história.

1.2 Considerações Filosóficas

Quando falamos sobre o conhecimento geométrico, devemos esclarecer qual a nossa posição com relação a sua natureza. E esse é um assunto bastante amplo. Podemos assumir, como apresentado por Ponte et al. (1997), entre outras possibilidades, que a geometria trata de um conhecimento empírico e, então, ela nos diz sobre a realidade experimental, porém pouco poderemos concluir sobre generalizações, demonstrações e abstrações. Ou então, podemos assumir que a geometria nada mais é que uma livre invenção matemática rigorosa e dedutiva mas que nada tem a ver com a realidade experimental. Ou ainda, podemos assumir o objeto geométrico como um objeto ideal, além da realidade experimental e além do conhecimento. Tentaremos aqui esclarecer melhor o que assumiremos como sendo a natureza do conhecimento geométrico.

Sem dúvida, a existência da matemática em geral – e da geometria mais especificamente – deve-se a alguma necessidade de entendimento do comportamento empírico de objetos reais. Mas isso não implica dizer que por este motivo é a geometria um conhecimento de natureza empírica.

Kant (1958) afirma que apesar de ser verdade que o conhecimento tenha origem na experiência, por excitar os sentidos e impulsionar a inteligência, não são todos os conhecimentos que têm origem exclusivamente empírica.

As geometrias euclidiana e não euclidiana podem se enquadrar no chamado conhecimento *a priori*, como apresentado por Barker (1969), que diferente do conhecimento empírico, a única experiência necessária é entender as palavras em que o conhecimento se exprime. Filósofos como Platão e Kant afirmam e nos dão motivos para crer que o conhecimento geométrico em geral (seja ele euclidiano ou não) é um conhecimento *a priori*.

Para Platão, de acordo com Brown (2008), o conhecimento matemático é um conhecimento *a priori*, pois necessita apenas da experiência de “ver com os olhos da mente”[6], o que não caracteriza o conhecimento empírico, que por sua vez necessitaria de experiências sensoriais usuais. Os objetos matemáticos, na concepção platônica, existem independentemente dos seres humanos e são exteriores ao espaço e ao tempo; são eles intuídos e as verdades matemáticas compreendidas (BROWN, 2008, p.14). Para Platão, pelo fato de não existirem pontos, nem retas e nem figuras genuínas, da forma que são definidas, as verdades geométricas não podem estar apoiadas em evidências sensoriais sendo, portanto, conhecimentos *a priori* (BARKER, 1969).

É possível fazer uma distinção entre conhecimentos analíticos e sintéticos e entre conhecimentos *a priori* e empíricos, como propôs Kant (1958). Para Carnap (1995), a primeira distinção é de caráter lógico e a segunda de caráter epistemológico. Uma distinção lógica preocupa-se com a determinação do que é verdadeiro e do que não é. Quando podemos dizer somente com os significados atribuídos aos termos de uma sentença se ela é verdadeira, trata-se de um conhecimento analítico – ou explicativo, como sugeriu Kant (1958, p.13). Caso contrário, se precisamos de mais que isto, ou seja, de algum tipo de experiência para determinar se a afirmação é verdadeira, trata-se de um conhecimento sintético – ou extensivo (KANT, 1958, p.13). Já a segunda distinção trata da maneira que se obtém o conhecimento. Como mostra Barker (1969), para se obter um conhecimento *a priori*, a única experiência necessária é entender as palavras em que o conhecimento se exprime, nenhuma experiência adicional é necessária, ao contrário do conhecimento empírico (ou *a posteriori*).

Para Kant (1958), o conhecimento matemático seria um conhecimento *a priori* e sintético – *a priori* porque pode ser adquirido independente da experiência e sintético porque fala sobre coisas do mundo. A esses conceitos de Kant está relacionada a ideia de

---

[6] Do inglês “*see with the mind’s eye*”, algumas vezes traduzido como “ver com os olhos da alma” ou “ver com os olhos do Espírito”.

intuição[7], pois a possibilidade de um conhecimento *a priori* e sintético deve-se ao fato de nossa mente dispor de formas de espaço e tempo, as quais Kant chama de formas puras de intuição. De acordo com Carnap (1995), para Kant a intuição é impecável: se vemos uma verdade geométrica claramente em nossa mente, não apenas com os olhos, vemos com completa certeza.

Com o desenvolvimento das geometrias não euclidianas, a caracterização da geometria como uma verdade baseada na intuição perde força. A verdade geométrica deixa de ser absoluta, havendo, então, a possibilidade de geometrias alternativas à euclidiana.

A concepção de uma nova geometria, aqui explicitada como geometria não euclidiana, está de acordo com a concepção de novo sistema de entidades, explicitado por Carnap (1988), necessitando para isso novas maneiras de falar, sujeito a novas regras, ou seja, a construção de um sistema de referência lingüístico para as novas entidades em questão. Portanto, aceitar ou não aceitar um sistema não significa aceitar um sistema referente à realidade das coisas. A escolha pela geometria proposta por Euclides, a escolha pela geometria não euclidiana ou a escolha por qualquer outra geometria deve satisfazer a esperança de melhores resultados empíricos ou lógicos. Poincaré (1984), neste mesmo sentido, afirma que a experiência não pode decidir entre uma geometria e outra e, ainda mais, que é impossível dizer que uma geometria é verdadeira e real. Para ele, os princípios da geometria não são fatos experimentais, pois se assim fosse, ela seria provisória e fácil de ser derrubada. Os axiomas da geometria – que, para Poincaré “não passam de definições disfarçadas” (1984, p.54) – permanecem válidos mesmo que todo e qualquer experimento indique que são meras aproximações, pois são justamente axiomas.

Uma geometria baseada em axiomas não pode ser dita como sendo um sistema baseado em verdades, mas simplesmente em axiomas convenientes. Por esse motivo, Poincaré (1984, p.54) diz que os axiomas não são “nem juízos sintéticos *a priori*, nem fatos experimentais. São convenções”. Diferente da visão de Kant aqui explicitada – de que a geometria seja um conhecimento sintético *a priori* –, Poincaré encara esta escolha, entre uma geometria e outra, como uma escolha conveniente, que é “guiada por fatos experimentais; mas ela permanece livre e só é limitada pela necessidade de evitar qualquer contradição” (POINCARÉ, 1984, p.54).

Pelos comentadores aqui citados, optamos por apresentar a geometria como um conhecimento *a priori*, não sendo ele baseado em experiências empíricas, mas a escolha

---

[7] Do alemão, *Anschauung*.

por um sistema de entidades – ou por um sistema de convenções – pode se dar com o objetivo de serem atingidos melhores resultados empíricos.

1.3 Metodologias para a Participação da História

Como mostramos, quaisquer acontecimentos podem ser transformados em história. A construção dessa história depende daquele que a faz – do valor que dá aos fatos, da forma que os une, das escolhas, das omissões e do propósito que tem ao fazê-la. Não é coerente falar, por exemplo, em uma única história da matemática. A matemática – vista como uma ciência desenvolvida pelos homens – pode também ser apresentada (ou historizada) de diversas formas, dependendo fortemente do sujeito que o faz.

O historiador da matemática é, deste modo, dono de sua história, uma história possível da matemática, e é responsável pelas escolhas que toma quando valoriza e organiza os indícios que lhe são disponíveis dos acontecimentos que permeiam o desenvolvimento da matemática.

Quando nos deparamos com as construções históricas da ciência, em especial, verificamos algumas regularidades na forma que são feitas (e isto inclui os objetivos de seus historiadores). Para Ernst Mayr (1998), pelo fato de a ciência ser um “processo continuado de solução de problemas na busca de um entendimento do mundo em que vivemos” (p.15), sua história deveria ser construída com a finalidade de mostrar que problemas são esses e quais foram as soluções alcançadas e quais foram as soluções tentadas. Com essa concepção da finalidade que deve ter uma história da ciência, Ernst Mayr faz uma classificação para as possíveis formas de se reconstruir a história da ciência.

Para Mayr (1998) há cinco maneiras distintas de reconstrução histórica que decorrem de suas questões norteadoras e de como são respondidas. Cada uma delas tem suas vantagens e sua importância, mas também suas falhas. São elas a história lexicográfica, a cronológica, a biográfica, a cultural e sociológica e a história de problemas. Cada uma é marcada por buscar responder a determinadas perguntas, suas questões norteadoras, explicitadas pelo autor em apenas um caso, mas propostas por nós nos outros casos.

A história lexicográfica tem um caráter essencialmente descritivo e suas questões norteadoras são “o quê?”, “quando?” e “onde?” (MAYR, 1998, p.16). Sem dúvida, essas são informações importantes, porém não são suficientes, pois, por não apresentarem os problemas motivadores da ciência, desfavorecem a possibilidade de reflexão e de entendimento da ciência como um processo.

A história cronológica visa responder a questões como "o quê?" e "quando?". Isso pode auxiliar na organização da história, dando sequência aos fatos e inserindo-os no tempo. Focar em determinado momento, por um lado dá detalhes do desenvolvimento da ciência em um tempo específico, mas por outro lado ofusca o problema científico maior. Essa maneira de construir a história fragmenta por demais o problema científico em questão.

A história biográfica procura apresentar progressos da ciência por meio das vidas de alguns cientistas. Sua importância está no fato de que a ciência é feita por pessoas e, portanto, suas vidas fazem parte de um contexto maior que tem relações com a ciência em si. Porém, ter como principal questão norteadora "quem?" oculta os problemas maiores da ciência e, assim, criam-se mitos como a genialidade de cientistas isolados e são esquecidos muitos personagens que foram importantes para tais progressos. Contudo, listar todos os personagens envolvidos seria impossível e inútil, pois direta e indiretamente muitas pessoas participam de todo acontecimento.

A história cultural e sociológica descreve a ciência como forma de atividade humana vinculada ao meio cultural, intelectual, social e institucional da época, o que efetivamente é. Para se responder de modo satisfatório a questões como "quando?", "onde?" e "de que modo se relaciona com o meio cultural e social da época?" é importante que se faça um elo entre a ciência e o meio em que ela está inserida para entender algumas razões dos acontecimentos na ciência. Contudo, as atividades humanas ligadas aos aspectos externos à ciência são muito diversificadas e, em geral, vão além dos objetivos da história da ciência, isto é, vão além do que é meramente científico.

A história de problemas tem diversas questões norteadoras e é isto que a diferencia e a destaca das outras formas de se construir a história; engloba vários aspectos importantes aos quais a história da ciência deve propor-se. Busca responder de maneira qualificada a perguntas do tipo "o quê?", "quem?", "onde?", "quando?", "como?" e "por quê?". Por mais que seja uma tarefa extremamente complexa, essas são questões fundamentais quando se deseja mostrar os problemas da ciência e suas tentativas fracassadas e bem sucedidas de solucioná-los. As questões "por quê?" e "como?" são respondidas de modo interpretativo e determinam a singularidade da história construída por determinado sujeito. Essas interpretações são particulares, apesar de fazerem parte de um contexto de trabalho dos historiadores, e dificilmente podem ser provadas por documentos ou outras fontes; geralmente são constituídas somente por indícios.

A subjetividade da construção da história, porém, deve respeitar certos limites: a avaliação dos períodos anteriores deve fugir dos extremos do olhar do passado e do olhar do presente. Por um lado, encarar o passado como se fosse o presente, sem mostrar as mudanças que ocorreram e por que ocorreram é fechar os olhos para a continuidade do tempo. Adotar os olhos do passado é descrever "os eventos passados estritamente em termos do pensamento naquela época" (MAYR, 1998, p.25), ou seja, é ignorar a ciência de hoje, assumindo muitas vezes um caráter saudosista, valorizando demasiadamente o passado em detrimento do presente. Por outro lado, encarar o passado como atrasado em relação ao presente é avaliar o passado com base somente nos conhecimentos e compreensão atuais. Adotar os olhos do presente pode fazer com que se tenha uma visão da história como anacrônica, em que as concepções da atualidade são sempre melhores que as de outrora, uma vez que encarando o problema como sendo o mesmo, aquele que o resolve é o melhor[8]. Isto é avaliar o cientista ignorando completamente "o contexto dos problemas e conceitos em que se movia o cientista antigo" (MAYR, 1998, p.27).

Ao tratarmos de problemas científicos que são caracterizados por serem processos e não simples eventos (MAYR, 1998, p.21) não é adequado abordá-los de forma fragmentada, como no caso da história lexicográfica, da história biográfica e da história cronológica, pois ocultaria o grande problema e o seu desenvolvimento por homens – vários – durante o tempo – longo. Os fragmentos devem constituir o todo nesses casos e não serem apresentados independentemente. O problema científico em questão aqui, do surgimento das geometrias não euclidianas, caracteriza-se por ser justamente um processo e não um evento isolado.

A grande marca da história apresentada como história de problemas está em apresentar a história bem sucedida na resolução do problema em questão e também as tentativas fracassadas. E quando isto é feito, deve ser levada em conta não apenas a história cronológica dos fragmentos de tempo interligados, mas também a história cultural e sociológica do problema para que seja possível relacionar o problema com os meios em que se inseriu.

Portanto, a história de problemas contém traços das outras formas de história, com o diferencial de combinar as respostas às perguntas "o quê?", "quem?", "quando?" e "onde?" e explicá-las – de modo marcadamente interpretativo – com as respostas de "como?" e "por quê?".

---

[8] Adotar os olhos do presente é chamado também de *whig* por Butterfield (1931) e extremo oposto, adotar os olhos do passado, é chamado também de *prig* por Harrison (1987 apud MARTINS, 2005).

Miguel e Miorim (2005) apresentam a concepção de *história-problema* que se assemelha à história de problemas de Mayr (1998), porém com um caráter educacional:

> [...] uma história que põe problemas, isto é, que parte de problemas que se manifestam em práticas pedagógicas e investigativas do presente e que preocupam, de certa forma, o professor de Matemática e/ou o pesquisador em educação matemática do presente. (MIGUEL; MIORIM, 2005, p.160)

Opõe-se à *história-crônica*, de caráter estritamente factual, que ao ser apresentada em sala de aula ou em livros didáticos, na forma de acessório, sobrecarrega o currículo com novas informações factuais e apresenta a superfluidade do elemento histórico aos estudantes.

Podemos esclarecer melhor a diferença entre a história-problema e a história-crônica utilizando uma diferenciação entre a crônica e a história em si. Na crônica, a preocupação reside na exposição de asserções empíricas, como o nome de uma pessoa, o lugar e a data em que nasceu, onde viveu, onde estudou, quando morreu. Na história, por outro lado, existe também a preocupação de explicar o porquê dos eventos (WHITE, 1963 apud SCHAFF, 1991, p.242). Na história-problema, então, existe o objetivo de explicar por que os acontecimentos se sucederam de tal forma, relacionando-os entre si.

Este é um vício historiográfico, indicados por Martins (2005), que cuidaremos de evitar na reconstrução historiográfica a ser feita: construir a história de forma meramente descritiva focando em dados muitas vezes dispensáveis na apresentação do problema em si, como datas e biografias de cientistas. Vício este característico das formas de história lexicográfica e biográfica de Mayr (1998).

Para Klein (1972 apud MATTHEWS, 1995, p.174), dependendo da forma que se constrói a história, quando imprecisões podem ser cometidas pelo fato de haver omissões, trata-se da construção de uma pseudo-história e que, portanto, não deve ser inserida no ensino de ciências. A má qualidade da história sem dúvida compromete os objetivos aos quais ela se propõe, e não sendo atingidos os propósitos de sua participação não há por que mantê-la.

Evitaremos, portanto, as histórias que não a de problemas (MAYR, 1998), a história-crônica (MIGUEL; MIORIM, 2005) e a adoção de olhares extremos sobre o passado. Para que possamos responder a questões norteadoras – "o quê?", "quem?", "quando?", "onde?", "como?" e "por quê?" – do problema científico que analisaremos, usaremos as concepções de história-problema (MIGUEL; MIORIM, 2005) e de história de problemas[9] (MAYR, 1998) para fazer a apresentação da história do surgimento de geometrias não euclidianas.

A constituição da história que apresentaremos se dará, como indicam Miguel e Miorim (2005), de modo que a história

> (1) seja uma história contada a partir das diferentes práticas sociais, que participaram da constituição e transformação, no tempo, do problema sob investigação [...];
> (2) seja mais do que uma história estritamente técnica desse problema;
> (3) seja mais do que uma história das diferentes formas de se conceber esse problema por parte de diferentes grupos sociais integrantes de diferentes práticas sociais ao longo do tempo;
> (4) seja mais do que uma história das necessidades que se configuram no exercício de diferentes práticas sociais de diferentes épocas e contextos culturais [...], que teriam motivado a constituição e transformação do problema sob investigação;
> (5) seja também uma história não apenas dos diferentes grupos sociais que consideravam ou valorizavam esse problema [...], mas também das razões que teriam estado na base desses envolvimentos;
> (6) seja também, e sobretudo, uma história das apropriações, ressignificações, repercussões e transmissões do tema ou problema em estudo no exercício de diferentes práticas sociais de diferentes épocas e contextos culturais [...];
> (7) seja também uma história [...] que nos mostre o modo como o problema sob investigação se instituiu e se constituiu em campos de relação de poder, instituindo-se e constituindo-se, portanto, como um instrumento de poder.
>
> Pensamos que só uma história dessa natureza poderia constituir campo fértil de diálogo para a problematização pedagógica no presente do problema considerado.
> (MIGUEL; MIORIM, 2005, p.162-163)

Cabe ressaltar que o nosso objetivo não é fazer uma investigação histórica, mas uma investigação historiográfica do aparecimento das geometrias não euclidianas, para a qual utilizaremos fontes historiográficas sobre o tema.

Para diferenciar história e historiografia, utilizaremos as definições feitas por D'Ambrosio (2004, p.166): "*História* é o conjunto dos acontecimentos humanos ocorridos no passado, e a *Historiografia* é o conjunto dos registros, interpretações e análises desses acontecimentos". Para esse mesmo autor, as fontes históricas são os registros dos fatos. Assumiremos, portanto, que utilizaremos neste trabalho não as fontes históricas – como as

[9] Entendemos problema como sendo "[...] o caráter próprio de uma situação que não tem um único significado ou que inclui todavia alternativas de qualquer espécie" (ABBAGNANO, 1982, p.764).

anotações dos matemáticos, as suas obras originais, as cartas que eles trocavam – mas as fontes historiográficas, ou seja, os escritos com interpretações e análises dos historiadores.

Acreditamos ainda que a história tenha, por si, a marca daquele que a conta: a escolha dos fatos que consideramos relevantes e daqueles que necessitamos omitir é subjetiva. Neste sentido, como já dito, Schaff (1991) aponta que não existem acontecimentos quaisquer que se destaquem, apenas os sujeitos que os valorizam. Cientes disto, valorizaremos os acontecimentos que permeiem o problema em questão: o surgimento das geometrias não euclidianas.

CAPÍTULO 2

O QUINTO POSTULADO COMO HISTÓRIA DE PROBLEMAS

> [...] um homem não vai menos perdido por caminhar em linha recta.
>
> José Saramago em *O ano da morte de Ricardo Reis*

2.1 EUCLIDES E OS ELEMENTOS

A obra *Os Elementos* é atribuída a Euclides, mas pouco se sabe sobre ele. Há três grandes hipóteses sobre sua autoria, apresentadas por Nobre (2009): Euclides vivera entre os anos aproximados de 325 a.C. e 265 a.C. na Alexandria e fora realmente quem escrevera essa obra e outros trabalhos; Euclides fora o líder de um grupo de matemáticos de Alexandria e juntos escreveram vários trabalhos mas assinavam em seu nome; as obras atribuídas a Euclides foram escritas por um grupo de matemáticos que adotara o nome de Euclides em referência a Euclides de Megara, que vivera cerca de cem anos antes. “Acontece com Euclides o mesmo que com outros matemáticos da Grécia Antiga: restam-nos apenas macérrimas informações sobre a vida e a personalidade do homem” (BICUDO, 2009, p.41).

Seguindo a primeira dessas hipóteses, como indica Brito (1995, p.34), acredita-se que Euclides tenha sido um funcionário do Museu, uma instituição subsidiada pelo Estado onde deveria ser organizado todo conhecimento científico existente nesta fase alexandrina da cultura grega[10]. Por isto, a obra *Os Elementos* ser composta de compilações de trabalhos de outros autores anteriores a Euclides. Esta obra ainda foi por muito tempo um modelo do que o pensamento científico deveria ser (BARKER, 1969, p.28).

Da mesma forma, não se sabe ao certo o que pertencia de fato ao original de *Os Elementos*, já que não existe nenhum texto original da obra. Existem apenas os manuscritos em grego, latim e árabe que chegaram à Europa no século XII. Por isto, não se sabe o que pertencia ao original e o que pertencia aos vários comentaristas, tradutores e copistas (CHABERT, 1997, p.287). De qualquer maneira, a importância dessa obra é indiscutível: apenas a Bíblia tem mais edições no mundo ocidental que *Os Elementos* (KATZ, 1998, p.59) e antes da imprensa, cópias manuscritas dominavam o ensino de geometria (STRUIK, 1992, p.90).

---

[10] Alexandria, cidade do Egito, nessa época era uma cidade cosmopolita habitada tanto por egípcios quanto por gregos (BRITO, 1995, p.33).

De todo modo, essa obra foi escrita em um momento peculiar da história da Grécia: depois do fim da Guerra do Peloponeso (431–404 a.C.) marcado pela queda de Atenas na sua disputa com Esparta. Nesse novo período houve um aumento da desigualdade econômica entre os gregos: as classes sociais mais altas acumulavam riquezas, enquanto crescia a miséria e a insegurança dos pobres. Estes eram responsáveis por todo trabalho manual e sustentavam a ociosidade de seus dirigentes, que podiam, desta forma, dedicar-se aos estudos da filosofia (STRUIK, 1992, p.83).

O primeiro dos treze livros de *Os Elementos* contém 23 definições, 5 postulados e 9 noções comuns[11]. São os postulados:

> (1) Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> (2) Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> (3) E, como todo centro e distância, descrever um círculo.
> (4) E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> (5) E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p.98)

O quinto postulado, também conhecido como o postulado das paralelas, parece ter sido evitado por Euclides: Proclo (século V), grande comentarista de *Os Elementos*, notou que as primeiras 28 proposições – das 465 de todos os livros da obra – são demonstradas sem que ele fosse citado, sendo que muitas dessas proposições seriam muito mais facilmente demonstradas se utilizado o quinto postulado (MORENO; BROMBERG, 1987 apud BRITO, 1995).

O quinto postulado de Euclides é muitas vezes enunciado de outra forma: para toda reta l e todo ponto P fora de l, pode-se traçar uma única reta paralela a l que passe por P. Esse é o chamado postulado de Playfair, pois, de acordo com Greenberg (2001, p.19), apareceu dessa forma em um trabalho de John Playfair em 1795, apesar de já ter aparecido muito antes nos trabalhos de Proclo.

Não há problema em enunciar assim o quinto postulado de Euclides, pois ele e o postulado de Playfair são equivalentes, ou seja, de um infere-se outro. Vejamos a

---

[11] Na edição *Os Elementos* (EUCLIDES, 2009) aqui utilizada usa-se o termo *postulado* para afirmações referentes à geometria que são aceitas sem demonstração e *noções comuns* para outras afirmações que são aceitas sem demonstração, não especificamente referentes à geometria. O mesmo acontece na edição inglesa (HEATH, 1968). Porém, dentre as inúmeras edições da obra, há muitas que, ao invés de *noções comuns*, utilizam o termo *axioma* para as afirmações aceitas sem demonstração que não se referem à geometria em particular. Aqui utilizaremos os termos *postulado* e *axioma* como sinônimos, sendo as afirmações (específicas ou não à geometria) aceitas sem demonstração.

demonstração da equivalência, apresentada por Arcari (2008), utilizando os outros quatro postulados e as proposições que seguem desses quatro (as 28 primeiras de *Os Elementos*). Enunciaremos estes no momento que for necessário durante a demonstração. Para facilitar, indicaremos por $P5$ o postulado enunciado em *Os Elementos* e por $P5'$ o postulado de Playfair.

Demonstração:

$P5$: Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

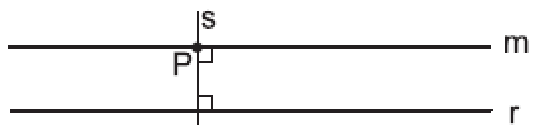
$P5'$: Para toda reta l e todo ponto P fora de l, pode-se traçar uma única reta paralela a l que passe por P.

I. $P5 \Longrightarrow P5'$

Seja P um ponto e r uma reta tal que $P \notin r$.

Tracemos uma perpendicular s a r passando por P e, então, uma perpendicular m a s, também passando por P.

Figura 1 – Equivalência de $P5$ e $P5'$

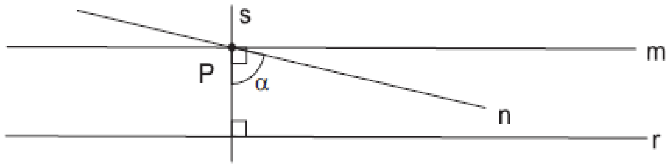


Fonte: Arcari (2008, p.22)

Pela proposição I.28 (Caso uma reta, caindo sobre duas retas faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas entre si), temos m paralela a r e isso prova a existência da paralela m.

Quanto à unicidade, suponhamos que existe n paralela a r passando por P e n diferente de m e seja α o ângulo formado entre as retas n e s.

Figura 2 – Equivalência de $P5$ e $P5'$



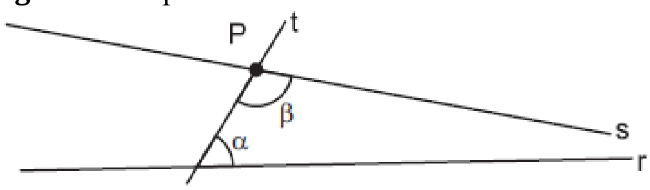
Fonte: Arcari (2008, p.22)

Logo, $\alpha + 90° \neq 180°$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha + 90° < 180°$. Por $P5$, temos que n e r se encontram, o que contradiz a hipótese de que n seja paralela a r. Concluímos, então que m e n não podem ser distintas. Portanto, m é única.

II. $P5' \Longrightarrow P5$

Sejam as retas r e s cortadas por uma reta t de tal modo que os ângulos colaterais internos, α e β, sejam somados menores que dois retos e seja P o ponto de intersecção entre as retas s e t.

Figura 3 – Equivalência de $P5$ e $P5'$

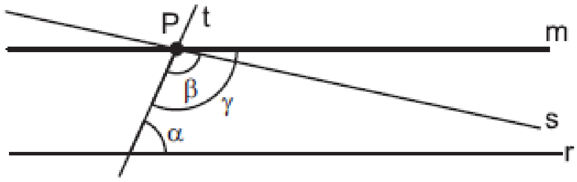


Fonte: Arcari (2008, p.22)

Devemos mostrar que r e s se encontram.

Consideremos uma reta m passando por P tal que os ângulos colaterais internos, α e γ, sejam somados iguais a dois retos, isto é, $\alpha + \gamma = 180°$.

Figura 4 – Equivalência de $P5$ e $P5'$



Fonte: Arcari (2008, p.23)

Pela proposição I.28, temos m paralela a r. Suponhamos que s também seja paralela a r e seja β o ângulo formado entre as retas s e t. Por $P5'$, temos a unicidade da paralela, ou seja:

$$m = s \Rightarrow \gamma = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \alpha + \beta.$$

Porém, isso contradiz a hipótese que $\alpha + \beta < 180°$.

Concluímos, então, que s não é paralela a r.

Portanto, de I e II, $P5 \Leftrightarrow P5'$.

Desde os tempos de Euclides, inúmeras foram as tentativas de provar o quinto postulado, transformando-o assim em uma proposição. Apresentaremos aqui algumas dessas tentativas de prova, seguindo uma ordem cronológica. Não por isso essa reconstrução historiográfica tomaria a forma de história cronológica (MAYR, 1998), visto que este será o critério de organização a ser aqui utilizado e não uma história com questões norteadoras do tipo daquelas da história cronológica.

2.2 Tentativas de Prova do Quinto Postulado

A Idade Média foi marcada pelo objetivo, como aponta D'Ambrosio (1996, p.40), de construir as bases filosóficas do cristianismo e, assim, a matemática abstrata e filosófica pouco poderia contribuir para tal fim. Para a criação da doutrina cristã foram fundados os mosteiros – como alternativa às academias gregas – onde não havia espaço para o estudo da matemática, pelo menos a matemática grega.

De acordo com Nascimento Junior (2003), havia ainda pensadores neoplatônicos que faziam sobreviver o pensamento grego na Idade Média, mas sempre sob a proteção da Igreja. Dentre eles estão os comentaristas. O *Comentário* era na Idade Média o modo que se abordava e se ensinava uma obra: “um comentário ou exposição do pensamento de algum autor era um dos métodos básicos de ensino nas escolas medievais” (BICUDO, 2009, p.63). Um importante comentarista de Euclides foi Proclo, que, como indica Eves (1995), viveu entre os anos de 410 e 485 e apontou *Os Elementos* como uma verdadeira base filosófica, em contraposição ao cristianismo. Nesta direção, Bicudo (2009, p.70) diz que para Proclo a natureza do mundo espiritual é o reflexo da matemática e que pode ser compreendida por meio do estudo das figuras geométricas. Outro neoplatônico que se destaca, Beda, viveu entre os anos de 673 e 735 e, entre outros trabalhos, traduziu parte de *Os Elementos*, o que não teve grande repercussão (D’AMBROSIO, 1996).

É interessante notar por que as tentativas de se provar o quinto postulado de Euclides falharam. Em geral, elas se utilizavam de argumentos equivalentes ao próprio quinto postulado, tornando as provas inválidas. Apresentaremos brevemente aqui algumas tentativas de prova, seguindo a ordem cronológica dos fatos.

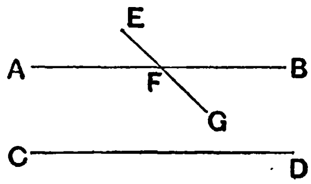
Proclo é um dos que tenta provar o postulado das paralelas. Para provar que “caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos” (EUCLIDES, 2009, p.98), isto é, o quinto postulado, Proclo dividiu a demonstração em duas partes. Primeiro tenta provar que se uma reta corta uma de duas paralelas, então ela cortará a outra, para depois tentar provar o quinto postulado (HEATH, 1968).

I. Se uma reta corta uma de duas paralelas, então ela cortará a outra.
II. Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

<u>Demonstração</u>:

Sejam *AB* e *CD* retas paralelas e seja *EFG* a reta tal que corte *AB*. *EFG* cortará a reta *CD* também, pois as retas *BF* e *FG* ambas passando pelo ponto *F*, quando produzidas indefinidamente têm uma distância maior que qualquer magnitude, inclusive que o intervalo entre as retas paralelas. Como as retas *BF* e *FG* se distanciam uma da outra mais que a distância entre as paralelas, então *PG* cortará *CD*.

Figura 5 – Demonstração de Proclo



Fonte: Heath (1968, p.207)

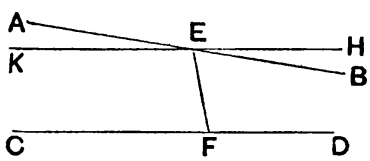
I. Sejam *AB* e *CD* duas linhas retas e seja *EF* a reta que cai sobre elas fazendo os ângulos *BEF* e *DFE*, que juntos são menores que dois ângulos retos. Quero provar que as retas *AB* e *CD* se encontrarão no lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Como os ângulos *BEF* e *DFE* são juntos menores que dois retos, seja o ângulo *HEB* igual ao que falta para *BEF* e *DFE* sejam iguais a dois retos e seja produzida a reta *HE* passando por *K*.

Como *EF* passa por *KH* e por *CD* fazendo os ângulos interiores *HEF* e *DFE* juntos iguais a dois retos, estas retas *HK* e *CD* são paralelas.

Além disto, como *AB* corta *KH*, também cortará *CD* (pelo que mostramos em I). Portanto, *AB* e *CD* se encontrarão no lado em que os ângulos formados são menores que dois retos. Desta forma, está demonstrado.

Figura 6 – Demonstração de Proclo



Fonte: Heath (1968, p.208)

Porém, há um argumento na parte I que não está provado: duas retas distintas que passam por um ponto, quando produzidas indefinidamente têm uma distância maior que qualquer magnitude. Segundo Heath (1968), essa tentativa de prova foi criticada, pois da mesma forma que não se pode assumir que duas linhas que continuamente se aproximam uma da outra se encontrarão, não se pode assumir que duas linhas que continuamente divergem, terão uma distância maior que qualquer distância atribuída.

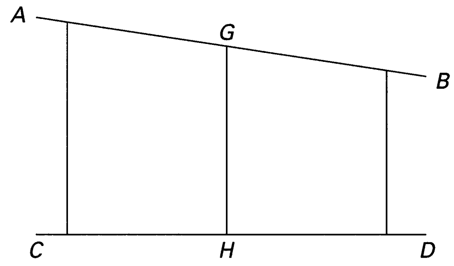
O século VII é marcado pelo advento do islamismo no mundo árabe e pelo fim da hegemonia grega. A partir de então, como mostra Silva (2010), foram fundadas escolas e universidades – como a Casa da Sabedoria (*Bait al-hikma)* – e, desta forma, reuniram-se sábios e eruditos que se dedicavam ao estudo, entre outras coisas, da matemática. O árabe passa a ser a língua oficial – ao invés do grego ou do latim – e obras importantes foram traduzidas do grego para o árabe, entre elas *Os Elementos*.

Dois matemáticos do mundo árabe merecem destaque nas tentativas de prova do quinto postulado: Omar al-Khayyam (1048-1131) e Nasir ad-Din al-Tusi (1201-1274).

Al-Khayyam não havia dúvida sobre a demonstrabilidade do quinto postulado. Para ele o quinto postulado ainda não estava provado por dois motivos principais: os antigos o consideravam tão evidente e, por isto, omitiam a demonstração e os modernos – como os matemáticos árabes al-Hazin e an-Nayziri – falharam nas suas tentativas de prova, pois deixaram de levar em conta certas premissas fundamentais (JAOUICHE, 1986, p.87). Ele criou, então, oito novas proposições para provar o postulado das paralelas. Uma delas dizia que se um quadrilátero simétrico possui dois ângulos retos, então os outros dois são também ângulos retos. O problema estava justamente nesta proposição: equivalente ao quinto postulado (CHABERT, 1997). Esse quadrilátero foi o ponto de partida para os estudos de Saccheri no início do século XVIII.

Nasir ad-Din, da cidade de Tus, publicou em 1250 sua tentativa de prova do quinto postulado no livro intitulado "Discussão que elimina dúvidas sobre as linhas paralelas". Ele considerou o mesmo quadrilátero de al-Khayyam. Em um manuscrito datado de 1298 (provavelmente escrito pelo seu filho) há um novo argumento, porém também equivalente ao quinto postulado: se uma linha GH é perpendicular a CD em H e oblíqua a AB em G, então as perpendiculares são maiores do que GH do lado em que GH faz um ângulo obtuso com AB e menores do outro lado (KATZ, 1998, p.271).

Figura 7 – demonstração de Nasir ad-Din



Fonte: Katz (1998, p.271)

A transição entre a Idade Média e a Idade Moderna no mundo ocidental é marcada por profundas transformações na economia, na cultura, nas relações com a religião, com a ciência. É o chamado Renascimento. Surgem, paralelas às universidades, academias destinadas, entre outras coisas, à recuperação de obras gregas e romanas (D'AMBROSIO, 1996, p.47). Para Chabert (1997), os primeiros comentaristas europeus na geometria na época do Renascimento, como Clavius, Cataldi, Borelli e Vitale, não trouxeram nada novo de fato aos resultados gregos. Apenas o britânico John Wallis (1616-1703) produziu realmente uma contribuição original. Wallis propôs um novo postulado, aparentemente mais plausível, para realizar a prova do quinto postulado de Euclides: dado um triângulo ABC e um segmento de reta DE, existe um triângulo DEF tal que ABC e DEF são semelhantes. Para a infelicidade de Wallis, esse é mais um argumento equivalente ao quinto postulado (CHABERT, 1997).

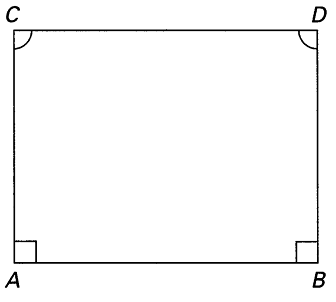
Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) foi um padre jesuíta e lógico italiano. Um pouco antes de morrer, publicou o livro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides livre de toda mácula), que não foi muito reconhecido até um século e meio depois, quando o matemático italiano Eugenio Beltrami o redescobriu (GREENBERG, 2001, p.154).

Diferente das tentativas anteriores de mostrar que o quinto postulado de Euclides era, na verdade, um teorema, Saccheri não tentou demonstrá-lo diretamente. Ele propôs uma prova usando a redução ao absurdo: assumia a negação do postulado das paralelas e tentava chegar a uma contradição[12]. Para isto, utilizou a hipótese (já utilizada por Omar al-Khayyam e por Nasir ad-Din al-Tusi) de que se um quadrilátero simétrico possui dois ângulos retos, os outros dois são iguais entre si. Há, portanto, três possibilidades para estes ângulos chamados por ele de ângulos de topo:

[12] Partindo de uma hipótese Φ, deriva-se uma contradição, podendo, então, descartar a hipótese e inferir não Φ.

a. ambos serem ângulos retos;
b. ambos serem ângulos obtusos;
c. ambos serem ângulos agudos.

Figura 8 – Quadrilátero de Saccheri



Fonte: Katz (1998, p.624)

Saccheri, em sua prova, admitia que apenas uma dessas possibilidades devesse ser correta. Para provar que a primeira opção era a verdadeira, Saccheri admitia, de início, que ela era falsa (de acordo com a redução ao absurdo) e, então, tentava provar que as outras duas eram falsas. Caso chegasse a uma conclusão como esta – que as três possibilidades eram falsas – teria chegado ao absurdo e, portanto, inferiria o contrário de sua hipótese inicial. Assim, provaria que os ângulos de topo eram ambos retos; logo, estaria provado o quinto postulado.

A hipótese dos ângulos obtusos ele afirmava ser falsa, pois contradizia o segundo postulado de Euclides e, por consequência, o Teorema de Saccheri-Legendre (que diz que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor ou igual a 180º). Mas não conseguiu encontrar contradição na hipótese dos ângulos agudos, apenas resultados estranhos. Disse, então, que a hipótese do ângulo agudo era falsa porque era repugnante à natureza da linha reta. Tentava assim chegar à conclusão de que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a quatro ângulos retos, o que equivale ao quinto postulado (GREENBERG, 2001, p.155). Sem notar, Saccheri obteve as consequências de uma geometria que negasse o quinto postulado sem, contudo, ser inconsistente.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) propôs várias provas para o quinto postulado de Euclides. Lobachevsky estudou essas tentativas de prova e elas foram o que talvez finalmente o convenceu da realidade da geometria não euclidiana (CHABERT, 1997). Em uma das provas, Legendre concluiu que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Há, porém, um argumento em sua prova que não está demonstrado: por um ponto qualquer situado no interior de um ângulo pode-se desenhar uma reta que corta os dois lados do ângulo. E esse também é um argumento equivalente ao quinto postulado (CHABERT, 1997). Por isso, a prova de Legendre não é válida.

Essas são algumas tentativas de prova do quinto postulado de *Os Elementos*. Muitas outras não foram aqui apresentadas, como as de an-Nayziri, no século IX, Clairaut e Lambert, no século XVIII, Taurinus e Bolyai, no século XIX.

2.3 GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Muitas vezes algo interessante ocorre na ciência: quando o momento histórico é favorável para uma nova ideia se manifestar, essa nova ideia pode ocorrer a várias pessoas mais ou menos ao mesmo tempo. Foi isso que aconteceu no século XIX com o surgimento das geometrias não euclidianas (GREENBERG, 2001, p.177). Notou-se que o quinto postulado de Euclides além de não poder ser provado – de fato tratava-se de um postulado – poderia ser negado sem que contradições ocorressem. Três matemáticos merecem grande destaque nesse episódio: Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Este momento histórico favorável relaciona a geometria com outras ciências, com a lógica, por exemplo. O desenvolvimento da lógica simbólica (ou moderna) foi fundamental para a possibilidade de desenvolvimento das geometrias não euclidianas.

A lógica aristotélica (ou antiga) estava em consonância com o raciocínio de Kant (1958) que relacionava o conhecimento geométrico com a intuição. Isso significa que certos postulados e certos argumentos podiam ser autoevidentes, ou seja, não podiam ser provados, mas a intuição bastava para serem aceitos como verdades. Já na lógica simbólica, desenvolvida nos séculos XVIII e XIX, não existem evidências intuitivas: axiomas são aceitos (por conveniência) simplesmente; não tratam da verdade. De acordo com Einstein (2005, p.665), "o progresso alcançado pela axiomática consiste em ter separado claramente aquilo que é lógico-formal daquilo que constitui o seu conteúdo objetivo ou intuitivo".

Além disto, Carnap (1995, p.127), afirma que sem uma lógica suficientemente poderosa para estabelecer regras estritamente lógicas para demonstrações geométricas, as falhas nas tentativas de prova do quinto postulado eram muito difíceis de serem detectadas. Havia sempre algum apelo a uma premissa apoiada na intuição e não decorrente dos outros postulados. Muitas vezes essa premissa tratava justamente de algo equivalente ao próprio quinto postulado, como mostramos aqui.

Com o desenvolvimento da lógica simbólica, muda-se o conceito de axioma (ou postulado). Deixa de ser a verdade indemonstrável e passa a ser a definição daquilo que é aceito. Deixa de fazer sentido, então, tentar demonstrar algo que é tomado como axioma. Desta forma, abre-se a possibilidade para a geometria não baseada na intuição, mas baseada em axiomas.

Um matemático alemão, Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800), esteve muito envolvido nos estudos que culminaram no surgimento das geometrias não euclidianas. Orientou a tese de doutorado de Georg Simon Klügel, em que Klügel examina 28 tentativas de prova do quinto postulado, indicando a deficiência de cada uma delas e sugerindo, por fim, que se tratava mesmo de um postulado, isto é, indemonstrável (TRUDEAU, 1987). Kästner também foi orientador de Gauss, professor de Farkas[13] Bolyai (pai de János Bolyai) e professor do professor de Lobachevsky (NOBRE, 2004).

Com relação ao momento favorável ao desenvolvimento das geometrias não euclidianas, podemos citar uma frase dita por Farkas Bolyai: “Muitas coisas têm uma época na qual elas são descobertas em vários lugares ao mesmo tempo, assim como as violetas aparecem por todos os lados na primavera” (BONOLA, 1955, p.99).

O matemático russo Lobachevsky, desde os anos de 1820, estava convicto da possibilidade de uma geometria sem que o quinto postulado fosse afirmado. Em 1829 publicou seu trabalho – o primeiro publicado – sobre a geometria não euclidiana, *Sobre os princípios da geometria*, inicialmente chamada de geometria imaginária. O nome de *geometria imaginária* indica a relação feita por Lobachevsky entre a geometria imaginária e a geometria euclidiana como similar à relação entre os números imaginários (ou complexos) e os números reais (ROSENFELD, 1988, p.207).

Antes disso, em 1826, em uma palestra na Universidade de Kazan ele fez a primeira proclamação pública sobre essa nova geometria com uma palestra intitulada *Uma breve exposição dos princípios da Geometria incluindo uma demonstração rigorosa do teorema das paralelas*. Este título continha certa ironia com relação à demonstração rigorosa. Ele dizia que baseado em dados experimentais seria impossível determinar qual geometria, a euclidiana ou a imaginária, seria a que melhor descreveria o mundo real.

[13] Em alemão muitas vezes referido como Wolfgang (SMITH, 1958, p.528).

Lobachevsky afirmava que a soma dos ângulos internos de um triângulo retilíneo era sempre menor ou igual a π: quando igual a π, tratava-se da geometria de uso comum e quando menor que π, era a geometria imaginária. Ele mostrou que nenhuma contradição advém da possibilidade da soma ser menor que π, ao contrário de Saccheri, que ao se deparar com essa possibilidade disse que isso seria repugnante à natureza da linha reta e, então, assumiu que a soma deveria ser igual a π.

Para Lobachevsky a geometria não estaria relacionada com a ideia de intuição de Kant (1958), mas com convenções e com resultados lógico-formais. Isso fica evidente em sua palestra de 1826 quando diz que os conceitos da geometria devem ser aprendidos pelos sentidos e que não devemos acreditar nos conceitos inatos, ou seja, aqueles baseados na intuição (ROSENFELD, 1988).

O trabalho de Lobachevsky, porém, não foi bem aceito pelos acadêmicos. Em 1832, então reitor da Universidade de Kazan, enviou seu artigo para revisão da Academia de Petersburgo que ignorou as questões geométricas ali presentes e afirmou que esse não era um artigo digno de atenção. No ano de 1834 jornais literários de Petersburgo publicaram textos insultando o trabalho de Lobachevsky. Diziam que ele era o insolente de falsas invenções e que o título de seu artigo, ao invés de *Sobre os princípios da geometria*, deveria ser *Uma sátira na geometria* ou *Uma caricatura da geometria*. Acredita-se que esses textos publicados nos jornais tenham sido escritos por alunos do revisor da Academia de Petersburgo, Ostrogradsky, que desprezou o pedido de revisão feito por Lobachevsky dois anos antes (ROSENFELD, 1988, p.208-209).

Apesar das críticas, ele continuou seu trabalho e escreveu diversos artigos sobre a geometria imaginária, a saber, *Geometria Imaginária* em 1835, *Aplicações da Geometria Imaginária a certas integrais* em 1836, *Novos princípios da geometria com uma completa teoria das paralelas* entre os anos de 1835 e 1838, *Pesquisas geométricas sobre a teoria das retas paralelas* em 1840 e *Pangeometria* em 1855. Este último título, como indica Rosenfeld (1988, p.210), mostra a sua concepção de geometria universal que inclui a geometria euclidiana como sendo um caso especial.

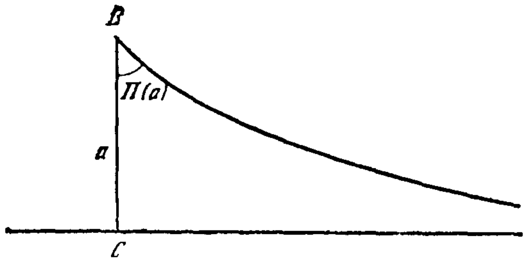
Lobachevsky propôs uma geometria hiperbólica, em que o postulado das paralelas fosse substituído por: para toda reta l e todo ponto P fora de l, há pelo menos duas paralelas distintas a l que passam por P. O nome de geometria hiperbólica foi dado futuramente pelo matemático Felix Klein em 1871, pois, de acordo com a etimologia, a palavra hipérbole está relacionada a excesso e, nesta geometria o número de paralelas a uma reta dada passando por um ponto excede o número (um) da geometria euclidiana (TRUDEAU, 1987, p.159).

Entre as bases de sua geometria imaginária, Lobachevsky definiu o ângulo de paralelismo. Isso porque em um plano, na geometria hiperbólica, todas as retas que saem de um ponto, com relação a outra reta, podem ser divididas em duas classes, as que a cortam e as que não a cortam. As retas que estão no limite entre uma classe e outra são chamadas *paralelas* à reta dada.

Notemos que o fato de uma reta não cruzar outra, nesta terminologia, não indica que sejam paralelas; as paralelas são aquelas que formam o ângulo de paralelismo com a perpendicular à reta dada, ou seja, as retas que estão no limite entre as que cruzam a reta dada e as que não cruzam. Como mostra Greenberg (2001, p.200), outras nomenclaturas são usadas para essas retas que não cruzam a reta dada, por exemplo, "ultraparalelas", "hiperparalelas" e "superparalelas" para aquelas que possuem um ângulo maior que o de paralelismo, e "paralelas assintóticas" para aquelas que formam o ângulo de paralelismo. Optamos aqui por usar a palavra "paralela" nos dois sentidos, isto é, para todas as retas que não cortam a reta dada.

Assim, dada uma reta, traçava-se uma perpendicular de tamanho a, passando pelo ponto *C* (pertencente à reta inicial) e por um outro ponto, *B*. Em *B* passava uma paralela à reta inicial. O ângulo entre a perpendicular e a paralela foi chamado de ângulo de paralelismo. No caso da geometria euclidiana, este ângulo era sempre $\frac{\pi}{2}$, enquanto na geometria imaginária, este ângulo dependia de a, isto é, era uma função de a, que inicialmente Lobachevsky denotou por $F(a)$ e, posteriormente, por $\pi(a)$.

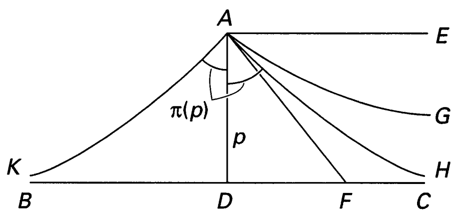
Figura 9 – Ângulo de Paralelismo



Fonte: Rosenfeld (1988, p.221)

Assim, na figura abaixo (figura 10), *AH* é uma paralela à *BC*, pois dada a distância de *A* a *D*, p, tem-se $\pi(p)$ como o ângulo de paralelismo. No plano hiperbólico, então, as retas *AE* e *AG* não cortam a reta *BC*, mas formam com *AD* ângulos maiores que o de paralelismo, ou seja, na terminologia de Lobachevsky não são paralelas à reta *BC*, assim como a reta *AF*, que não é paralela à reta *BC* por cruzar com ela. A reta *AH* se encontra no limite entre as retas que cortam e as que não cortam a reta *BC* e, portanto, é paralela à reta *BC*. Da mesma forma, do outro lado da perpendicular *AD*, tem-se *AK* como paralela à *BC* devido ao seu ângulo de paralelismo $\pi(p)$.

Figura 10 – Ângulo de Paralelismo



Fonte: Katz (1998, p.775)

Tem-se, então, $\lim_{a \to 0} \pi(a) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{a \to \infty} \pi(a) = 0$. Isso quer dizer que quanto menor o valor de a, mais próximo se está da geometria euclidiana, isto é, quando as distâncias são pequenas, o plano hiperbólico se assemelha muito ao euclidiano. Lobachevsky mostrou ainda que para todo ângulo *A* há um valor a, tal que $A = \pi(a)$ (ROSENFELD, 1988, p.221).

Importantes consequências são decorrentes do axioma hiperbólico:

- Para toda reta l e todo ponto P fora de l, há infinitas paralelas a l que passam por P.
- Retângulos não existem – a existência de retângulos implica no postulado das paralelas de Hilbert (Para toda reta l e todo ponto P fora de l, há no máximo uma reta m que passa por P, tal que m é paralela a l).
- Na geometria hiperbólica, todos os triângulos têm a soma dos ângulos internos menor que 180º.
- Por consequência, na geometria hiperbólica todos os quadriláteros convexos têm a soma dos ângulos internos menor que 360º.

- Não existem triângulos semelhantes não congruentes, ou seja, é impossível ampliar ou reduzir um triângulo sem distorção.
- O ângulo determina o tamanho do lado de um triângulo.

O matemático húngaro János Bolyai desenvolveu seu interesse por geometria por influência de seu pai, o matemático Farkas Bolyai. O pai tentou exaustivamente provar o postulado das paralelas sem sucesso, como diz em carta ao filho:

> Eu acreditei que sacrificaria a mim mesmo por causa da verdade. Eu estava pronto para me tornar um mártir que removeria a falha da geometria e a devolveria purificada à humanidade. [...] Minhas criações foram melhores que as de outros e ainda assim não alcancei completa satisfação... (GREENBERG, 2001, p.161-162).

Porém, o filho János teve uma ideia completamente nova e falou sobre isso em 1823 em uma carta ao pai, dizendo que planejava publicar seu trabalho sobre as paralelas assim que o terminasse. Naquele momento o que ele poderia dizer é que do nada havia criado um estranho novo universo!

Em 1832 escreveu um apêndice de 26 páginas ao livro do pai *Tentamen*, intitulado *Apêndice contendo a absoluta verdade científica do espaço, independente da veracidade ou falsidade do XI axioma de Euclides*[14] *(que nunca poderá ser decidido* a priori*).* Bolyai apresenta, então, um sistema geométrico baseado no oposto da hipótese de Euclides, o postulado das paralelas, denominado *sistema S*. O sistema geométrico conhecido como geometria euclidiana, ele denomina *sistema* Σ. O que Bolyai chama de verdade científica absoluta do espaço em seu título, refere-se ao sistema geométrico absoluto, que para ele inclui ambos sistema *S* e Σ.

Farkas Bolyai mandou, ansioso pela resposta e sem o consentimento do filho, uma cópia desse apêndice para seu amigo, o matemático Carl Friedrich Gauss. Ambos trocavam frequentemente correspondências e inclusive quando Farkas acreditou ter provado o postulado das paralelas, enviou a demonstração para Gauss que, por sua vez, mostrou a ele a falha que cometera. Gauss respondeu à correspondência em que Farkas mostrava o trabalho do filho dizendo que não poderia elogiar o trabalho de János, pois estaria elogiando a si mesmo, já que o caminho que János havia tomado e os resultados aos quais havia chegado coincidiam quase exatamente com suas próprias reflexões que ocupavam sua mente há 35 anos (GREENBERG, 2001, p.178).

---

[14] Refere-se ao postulado das paralelas de Euclides, apresentado aqui como o quinto postulado.

János Bolyai ficou profundamente desapontado com a resposta e com o fato de Gauss estar, segundo ele, tentando se apropriar de suas ideias e, depois disto, não publicou mais nada de suas pesquisas. Em 1848, recebeu a informação de que outro matemático, Lobachevsky, havia chegado a resultados semelhantes a ele. Depois de uma análise cuidadosa das publicações, János se sentiu instigado a competir com Lobachevsky e, então, retomou intensamente seus estudos que culminariam em uma grande obra sobre o assunto que, contudo, nunca foi terminada (WOLFE, 1945, p.53).

O notório matemático Carl Friedrich Gauss muito pouco publicou sobre seus estudos envolvendo esta nova geometria, por ele chamada inicialmente de *antieuclidiana*, depois de *geometria astral* e, finalmente, de *não euclidiana*. A maior parte dos registros históricos desses estudos está nas cartas que trocava com outros matemáticos e em algumas notas entre seus artigos. Segundo Bonola (1955, p.65), desde 1792 ele estudava a possibilidade de uma geometria que negasse o quinto postulado de Euclides, visto que a demonstração lhe parecia muito distante. Em uma carta datada de 1817 ao amigo Heinrich Wilhelm Olbers, Gauss escreve que estava cada vez mais convencido que o postulado não poderia ser provado (ROSENFELD, 1988, p.215).

Em outra correspondência, de 1824, agora para o matemático Franz Taurinus, Gauss diz que a hipótese da soma dos três ângulos internos de um triângulo ser menor que 180° conduz a uma curiosa geometria, muito diferente da euclidiana, mas totalmente consistente. Diz que os teoremas dessa geometria parecem ser paradoxais, “mas calma, constantes reflexões revelam que eles não contêm nada de todo impossível”. Segue descrevendo essa geometria e, então, diz: “Todos meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não-Euclidiana têm sido sem sucesso” (WOLFE, 1945, p.47). Conclui dizendo ao amigo que aquela era uma comunicação privada e que ele não deveria torná-la pública.

Em 1829, Gauss escreveu para outro amigo matemático, Friedrich Wilhelm Bessel, que temia os gritos dos beócios[15], caso publicasse seus estudos sobre a nova geometria (GREENBERG, 2001, p.182). Esse receio da reação da comunidade de matemáticos se deve principalmente ao conceito de espaço de Kant (1958), relacionado à ideia de intuição, ainda muito forte no século XIX.

[15] De acordo com o dicionário Houaiss (2009), por extensão de sentido, refere-se àquele “que apresenta as características atribuídas (pelos atenienses) aos beócios, ou seja, espírito pouco cultivado, indiferença à cultura; grosseiro, boçal”.

Como pudemos ver, na primeira metade do século XIX cresceu a convicção em duas coisas: não é possível provar o quinto postulado sem admitir outro postulado equivalente a ele e é possível construir geometrias sem manter o quinto postulado (CHABERT, 1997).

Essa nova situação, com a possibilidade de geometrias que neguem a euclidiana, poderia ser considerada fruto de uma mudança revolucionária, em termos de Thomas S. Kuhn, pelo fato de ter sido necessário recusar componentes essenciais do conhecimento anteriormente admitidos, no caso, a ideia de intuição. Como apresenta Corry (1996, p.173-174), em uma mudança normal (ou não revolucionária) o objetivo está em resolver problemas, sem suscitar dúvidas sobre a validade da teoria geral. Até o início do século XIX os matemáticos buscavam resolver um problema específico – a demonstração do quinto postulado de Euclides – sem questionar se este postulado poderia ser negado; a questão estava em saber se este postulado, tido como verdade, era demonstrável ou não. Abandonada a concepção de axiomas ou postulados como verdades, os fundamentos matemáticos são postos em cheque e, por isto, poderia ser este um momento de revolução. Para Kuhn (1998), as revoluções mudam a concepção de mundo que se tem: “na medida em que seu único acesso [dos cientistas] a esse mundo dá-se através do que vêem e fazem, podemos ser tentados a dizer que, após uma revolução, os cientistas reagem a um mundo diferente” (KUHN, 1998, p.146).

Apesar desses indícios de o surgimento das geometrias não euclidianas marcar um momento de revolução, é muito questionada a possibilidade de haver revolução científica – na forma como é apresentada por Kuhn (1998) – na história da matemática. Crowe (1975) é enfático ao dizer que em matemática nunca ocorrem revoluções, pois princípios são mantidos sem que sejam destruídas doutrinas anteriores. No caso das geometrias não euclidianas, o autor se baseia na preservação da geometria euclidiana, coexistindo às geometrias não euclidianas para descaracterizar o momento como o de uma revolução científica.

Surgiu então a dúvida sobre a consistência da geometria hiperbólica. Como mostra Barker (1969), “dizer que um sistema é inconsistente é dizer que dos axiomas desse sistema podemos deduzir dois teoremas que se contradizem mutuamente” (p.63). Porém, não encontrar dois teoremas que se contradigam não quer dizer que o sistema é consistente; é preciso provar. E essa prova pode ser realizada de diferentes modos. Um deles consiste em encontrar uma interpretação sob a qual todos os axiomas, e todos os teoremas deles decorrentes, sejam, sem sombra de dúvida, verdadeiros. Entretanto, é necessário que a verdade da interpretação dos enunciados esteja perfeitamente definida, o que, no caso das geometrias, seria uma limitação. Outro modo de provar a consistência do sistema é por meio de uma relativização da consistência: "mostramos que um dado sistema é consistente contanto que outro sistema, menos suspeito, também o seja" (BARKER, 1969, p.64).

Então, Eugenio Beltrami propôs o teorema metamatemático: *Se a geometria euclidiana for consistente, então a geometria hiperbólica também será*. Assim, a consistência de uma geometria é relativa à outra. Para a realização dessa prova, não há necessidade de se verificar que a geometria euclidiana é consistente de fato. Apenas se a geometria euclidiana for consistente, a hiperbólica também será e, da mesma forma, se a geometria hiperbólica for inconsistente, a euclidiana também será. E, como mostra Trudeau (1987, p.233), apesar de não haver boas razões para suspeitar da consistência da geometria euclidiana, ela nunca foi exaustivamente demonstrada. Beltrami provou o teorema em 1868, com o auxílio da geometria diferencial. Ele também foi provado por Klein em 1871, mas de outra forma: por meio da geometria projetiva (GREENBERG, 2001).

Como corolário desse teorema metamatemático, foi proposto que se a geometria euclidiana for consistente, então o quinto postulado não poderia, de fato, ser decorrente dos outros quatro, assim como ele não seria contradito pelos outros quatro. A demonstração desse corolário é decorrente do teorema: se assumirmos que o quinto postulado pode ser provado a partir dos outros postulados, então a geometria hiperbólica seria inconsistente, já que ela nega o postulado das paralelas. Mas se a geometria hiperbólica não for consistente, pelo teorema metamatemático, a geometria euclidiana também não será. Teríamos, então, que a geometria euclidiana seria inconsistente, o que nega a hipótese inicial (GREENBERG, 2001, p.225).

Existem, além da geometria euclidiana e das geometrias hiperbólicas, as geometrias elípticas, que não apresentaremos neste trabalho. Vale pontuar que neste caso, o postulado das paralelas é substituído por: Não há reta paralela a l que passe por um ponto P fora de l. Essa substituição não pode ser feita sem alterar outro postulado de modo que ela seja consistente. Assim, o segundo postulado de Euclides, que afirma ser possível alongar arbitrariamente um dado segmento, deve ser alterado, pois nessa geometria cada segmento admite um comprimento máximo que pode atingir.

CAPÍTULO 3

PROBLEMATIZAÇÕES

> Tudo no mundo está dando respostas, o que demora é o tempo das perguntas.
>
> José Saramago em *Memorial do Convento*

Após termos percorrido este caminho, pensamos que seria pertinente nestas palavras finais oferecer aos leitores e à comunidade de ensino de ciências e educação matemática algumas problematizações e sugestões de temas e discussões que, se não podem ser aqui abordadas de forma aprofundada, podem ao menos sugerir caminhos a serem percorridos em pesquisas acadêmicas futuras.

Lembramos que não pretendemos neste trabalho como um todo – tampouco neste espaço para as problematizações – apresentar soluções ou respostas para as questões que surgirão desta reflexão. Pretendemos, ao contrário, proporcionar uma reflexão conscientes das possibilidades e dificuldades com relação à participação da história no ensino de matemática e às maneiras de fazê-lo.

Um primeiro problema que podemos apresentar é o problema geral da participação da história da ciência e, mais especificamente, da história da matemática no currículo. Para um docente interessado em incrementar historicamente suas aulas, qualquer história da matemática poderia lhe parecer atraente. Existe abundante material histórico, sobretudo de divulgações de biografias e de descobertas, que pode ser útil para docentes que desejam apenas utilizar a história, sem a reflexão sobre a história que está utilizando e sem a reflexão sobre a utilidade da história na compreensão do conteúdo matemático.

Como se sabe, a história é um campo essencialmente interpretativo. Evidentemente, certas interpretações estão mais bem estabelecidas que outras e parecem, à primeira vista, mais pertinentes que outras. Entretanto é possível assinalar que, dada a existência de conflitos historiográficos a respeito de episódios da história da ciência, esse é um campo de estudos marcado pela noção de interpretação.

Ora, sendo a história um campo interpretativo, pode-se afirmar, grosso modo, que um episódio pode receber mais de uma interpretação histórica. Neste sentido, fica uma pergunta motivada pelo problema geral acima apontado: dado um episódio qualquer, qual história o narraria de modo mais adequado? Veremos, agora, três situações que apontam efetivamente a existência do problema.

Seja um primeiro professor sem nenhum preparo historiográfico. Como ele poderia escolher dentre as várias interpretações? Supondo que ele não escolha, mas apresente todas (supondo adicionalmente que ele saiba que está diante de todas). Como ele resolveria o conflito interpretativo dos estudantes? Notemos que não apresentamos aqui dificuldades triviais, como o problema do tempo que será consumido para estas incursões historiográficas.

Um segundo professor, melhor preparado, escolheria uma dentre as interpretações disponíveis. Ele teria como saber qual delas é a mais adequada para os objetivos do seu plano de ensino? Como apresentamos, Miguel (1993) afirma que a matemática pode ser historizada de diferentes formas, sendo que, pedagogicamente, umas são mais pertinentes e esclarecedoras que outras. E supondo que, para o plano de ensino desse professor, a mais adequada do ponto de vista historiográfico fosse uma história de problemas, mas que a preferível para ele fosse uma história mais superficial por demandar menos tempo e menos trabalho. Qual seria, então, a opção desse professor?

Um terceiro professor, totalmente preparado para a discussão historiográfica, como faria para que sua aula não se transformasse em uma aula de história da matemática e continuasse sendo uma aula de matemática? Não podemos esquecer que, ao apresentar a história para os estudantes, estes podem se sentir comprometidos com a narrativa de modo que se sintam à vontade para o diálogo historiográfico, isto é, eles podem apresentar questões que fugiriam do alcance do professor de matemática que, apesar de muito bem preparado para a discussão historiográfica, tem sua formação em matemática e não em história, em sociologia ou em outras áreas.

Enfim, estamos diante de um problema que precisa ser enfrentado e discutido com o máximo de clareza possível de modo que os proponentes da participação da história da matemática em seu ensino possam justificar intelectualmente essa participação. No caso do nosso primeiro problema geral, concluímos que o fato de a história ser interpretável, ainda que não seja um empecilho para sua participação, coloca dificuldades que precisam ser enfrentadas.

Um segundo problema, um pouco menos geral, mas nem por isso menos importante, é o do comprometimento com a integridade histórica do episódio a ser narrado. Conforme vimos anteriormente, Klein (1972 apud MATTHEWS, 1995, p.174) argumenta que, dependendo da forma como se constrói a história, imprecisões podem ser cometidas pelo fato de haver omissões e, por isso, a história não deve ser inserida no ensino de ciências.

Como podemos perceber, este problema, ainda que menos geral, pode ser considerado como anterior ao primeiro problema que apontamos. Assumimos, ainda que sem muita discussão, que a história da ciência é essencialmente interpretativa. A argumentação de Klein parece sugerir o contrário: ela parece sugerir que existe uma história a ser apresentada (e por isso haveria omissões).

Estamos aqui diante de uma situação curiosa: vamos supor que sempre ocorrerão omissões. Ainda assim, o ponto de Klein não perde sua importância, pois poderíamos perguntar: para o ensino de um certo conteúdo, quais omissões seriam e quais não seriam permitidas?

Para um certo propósito pedagógico, é mais conveniente que um professor de matemática – que optasse pela participação da história da matemática – omita certos aspectos da história e se concentre em outros. No entanto, e nisto Klein tem razão, ocorrerão omissões. Resta aqui a pergunta que norteia este problema: o professor, por sua vez, omitirá aos estudantes que houve omissões? Se sim, pode parecer uma atitude intelectual e pedagógica pouco louvável. Se não omitir as próprias omissões, terá de investir tempo e energia explicando por que o fez.

Essas omissões podem ser, de fato, necessárias. Por exemplo, Kuhn (1998, p.97) assinala que um episódio da história da ciência pode ser compreendido também em função de uma série de aspectos sociais e culturais da história da época e eles são importantes na determinação dos acontecimentos considerados científicos. Como mostramos, Mayr (1998) identifica algumas maneiras de se reconstruir a história da ciência, sendo que uma delas é a história cultural e sociológica, em que há uma preocupação especial com relação a estes aspectos. Na reconstrução histórica feita neste trabalho – como história de problemas – os aspectos culturais e sociais foram importantes e foram considerados, mas não foram abordados de forma aprofundada, pois isto ultrapassaria nossas limitações. Portanto, aqui foram feitas omissões relacionadas a estes aspectos sociais e culturais. Essas omissões, porém, não são as únicas; outras muitas foram feitas e por diversos motivos: por falta de material (como no caso da história de Euclides), por falta de tempo (como nas opções que fizemos em apresentar apenas algumas tentativas de prova do quinto postulado), por incompreensão da língua em que o material historiográfico se apresentava (como a tese de Klügel, em alemão, em que são apresentadas as deficiências em 28 tentativas de prova do quinto postulado) e por outras razões.

Um terceiro problema que apresentaremos aqui diz respeito à atualmente reconhecida dimensão *institucional* do conhecimento científico. Sabe-se que um campo de investigação precisa se estabelecer como uma tradição de pesquisa, mas também precisa se institucionalizar como tal. Essa institucionalização ocorre não apenas em função das virtudes teóricas e científicas propriamente ditas de um campo de pesquisa (sua capacidade de resolver problemas científicos – teóricos e empíricos), mas também pela capacidade de se apresentar como um campo de pesquisa bem estruturado do ponto de vista da organização de sua comunidade. Deste modo, um campo de pesquisa institucionalizado é um campo dominado por uma comunidade que possui a capacidade de organizar eventos, congressos, angariar recursos para o desenvolvimento de suas pesquisas, editar periódicos, estabelecer relações internacionais, constituir grandes redes de pesquisa, promover a criação e o desenvolvimento de programas de graduação e pós-graduação, captar bolsas de pesquisa etc.

Por sua vez, para que isso ocorra, deve haver alguma forma de sintonia entre o campo de pesquisa e a sociedade que irá legitimar o campo a partir de incentivo financeiro ao próprio campo. E, na lógica do mercado, este incentivo demandará algum tipo de contrapartida. Deste modo, incentivar a matemática é uma ação social que, por sua vez, exigirá um retorno social.

Com relação à geometria especificamente, não se pode negar sua utilidade social e uma pesquisa historiográfica completa, por certo, deve apontar tais relações entre o conhecimento matemático como campo de pesquisa e a sociedade que o legitima como campo de pesquisa institucionalizado. O surgimento da geometria está relacionado com as necessidades práticas dos antigos egípcios, nas tarefas de medição de terra. Como mostra Barker (1969), os gregos observaram os estudos dos egípcios e assimilaram seus princípios empíricos, no entanto, mudaram a finalidade do estudo:

> Os gregos, porém, ao contrário dos egípcios, apreciavam a Geometria não apenas em virtude de suas aplicações práticas, mas em virtude de seu interesse teórico, desejando compreender a matéria por ela mesma, e não em termos de sua utilidade. (BARKER, 1969, p.28)

Portanto, a geometria como campo de pesquisa se estabeleceu com propósitos práticos e também propósitos teóricos. E, para a sociedade, os propósitos teóricos não parecem tão interessantes a ponto de serem financiados quanto aqueles propósitos com fins práticos – semelhantes àqueles dos antigos egípcios na medição da terra. Contudo, a utilidade prática e imediata não se apresenta em um campo institucionalizado como um todo, mas em parte dele. Isso acontece não só com a geometria, mas também – e até mais claramente – com outras áreas do conhecimento, como na biologia, em que se estudam os tratamentos para doenças, o que representa grande interesse para sociedade, mas também se estudam fundamentos teóricos (epistemológicos, lógicos etc.) de grandes modelos científicos, fundamentos estes que, apesar de contribuem para o desenvolvimento da disciplina, não são, em um primeiro momento, de aplicabilidade prática – embora futuramente possam vir a ser.

Entretanto, e aqui está o problema, apresentar este aspecto da história (a institucionalização dos campos de pesquisa) é desfigurar uma imagem tradicional do conhecimento científico, a saber, a imagem de que cientistas produzem alternativas (para os problemas de um campo) de um modo totalmente alheio ao contexto social que os envolve. E esta imagem tradicional, se desfigurada, exigiria a colocação de uma outra imagem em seu lugar; o que não é uma tarefa simples.

Latour (2000) refere-se à apresentação da história com caráter institucional como uma abertura de caixas-pretas. Ele afirma que, quando um determinado conhecimento é produzido, o contexto interfere fortemente em tal produção, pois este conhecimento faz parte, como mostramos acima, do campo de pesquisa institucionalizado: contexto e conteúdo se confundem. Por outro lado, em um momento seguinte, é necessário que se deixe de lado o contexto para prosseguir o trabalho, ou seja, parte-se do pressuposto que aquele conhecimento está correto para o desenvolvimento do campo de pesquisa. Fechou-se a caixa-preta! "Incerteza, trabalho, decisões, concorrência, controvérsias, é isso o que vemos quando fazemos um *flashback* das caixas-pretas certinhas, frias, indubitáveis para o seu passado recente" (LATOUR, 2000, p.16).

Um exemplo das caixas-pretas mencionadas está em um estudante de matemática que está a resolver um exercício de geometria. Para isto, ele parte de determinados pressupostos, como os postulados de Euclides. Uma caixa-preta – certinha, fria, indubitável – para ele é a geometria euclidiana. Para ele não está posta a discussão sobre a validade dos postulados de Euclides, sobre a possibilidade de uma geometria diferente dessa, que negue um dos postulados, alterando o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo e, por conseqüência, os teoremas geométricos. Muito menos está em discussão por que é o nome de Euclides que está ligado a esta geometria, quais motivos levaram os gregos a desenvolverem esta geometria da forma que ela é e por que não os egípcios, ou qualquer outra questão como essas. Se o propósito desse estudante está em resolver aquele problema, não há por que mexer na caixa-preta!

Por outro lado, para D'Ambrosio (1999), se há o objetivo de entender o conhecimento, é necessário que entenda também o seu contexto cognitivo, histórico, epistemológico e político. O autor explica uma dinâmica chamada (por ele) de ciclo do conhecimento:

> [...] a realidade (entorno natural e cultural) informa (estimula, impressiona) indivíduos e povos que em conseqüência geram conhecimento para explicar, entender, conviver com a realidade, e que é organizado intelectualmente, comunicado e socializado, compartilhado e organizado socialmente, e que é então expropriado pela estrutura de poder, institucionalizado como sistemas (normas, códigos), e mediante esquemas de transmissão e de difusão é devolvido ao povo mediante filtros (sistemas) para sua sobrevivência e servidão ao poder. (D'AMBROSIO, 1999, p.106)

Sem dúvida estamos de acordo com a existência do caráter institucional da ciência e com a sua importância no desenvolvimento da ciência, mas apresentar uma história em que estes fatores venham à tona não é tarefa simples: nem a reconstrução histórica e nem a participação de uma reconstrução histórica desse tipo no ensino. Uma reconstrução histórica desse tipo seria uma sexta categoria – diferente de todas apresentadas por Mayr (1998) – e, possivelmente, a mais complicada de todas, por ser um modo totalmente novo de historiografia da ciência[16].

Essas problematizações colocadas aqui ao leitor refletem nossa consciência acerca da complexidade do tema: as formas de reconstrução da história da matemática e a participação da história no ensino. Ainda mais, uma história mais adequada historiograficamente pode não ser a mais adequada do ponto de vista pedagógico. Isso resume os problemas aqui apresentados e indica que eles não são de solução fácil e rápida, mas justamente compostos de dificuldades e controvérsias.

Alguns estudos apontam as dificuldades da participação da história da ciência no ensino: Martins (2007) entrevistou 82 pessoas, entre estudantes de cursos de licenciatura, estudantes de pós-graduação e professores da rede pública, e aponta em suas considerações finais uma pergunta importante: "Se a HFC[17] é – quase – uma unanimidade, por que não é contemplada nas salas de aula do ensino médio e em livros didáticos?" (MARTINS, 2007, p.127) e indica uma resposta também importante: "A resposta é, certamente, simples: não é fácil fazer" (MARTINS, 2007, p.127); Siu (2006) indica dezesseis fatores que justificam a não integração da história às aulas de matemática e, apesar do autor se mostrar favorável à integração, reconhece esses fatores como dificuldades existentes; Oliveira (2009), após uma pesquisa com estudantes de licenciatura, conclui que a contextualização de

[16] Estudos desse tipo vêm sendo desenvolvido por Lenoir (2003).
[17] História e Filosofia da Ciência.

conteúdos por meio da história da ciência apresenta muitas dificuldades, sendo o uso da história e filosofia da ciência "um instrumento de 'difícil manuseio'" (OLIVEIRA, 2009, p.91).

Acreditamos que as dificuldades presentes na possibilidade da participação da história no ensino de ciências e de matemática existem e não podem ser simplesmente ignoradas. Essas dificuldades devem ser discutidas e problematizadas – como fizemos aqui. Assim, ao menos, é possível ter clara compreensão do problema para, então, poder enfrentá-lo.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

> Se não disseres nada compreenderei melhor [...], há ocasiões em que as palavras não servem de nada.
>
> José Saramago em *Ensaio sobre a Cegueira*

Considerando os argumentos favoráveis à participação da história no ensino de matemática, refletimos aqui sobre as formas de fazê-lo. Acreditamos que o modo escolhido deva contemplar a história bem sucedida do problema e também as histórias consideradas fracassadas, sem privilegiar certos matemáticos em detrimento de outros, nomeando estes que obtiveram sucesso de gênios ou mitificando-os, pois é preciso contextualizá-los nos meios sociais e culturais em que viviam e contextualizá-los com relação ao problema matemático em questão. Chamamos aqui de história de problemas esta história que do ponto de vista historiográfico acreditamos ser a mais adequada.

Essa história de problemas, porém, envolve muitos fatores – científicos, culturais, sociais, institucionais etc. –, o que faz com que a sua construção demande muito tempo e o acesso a inúmeras obras historiográficas. Acreditamos, ainda, que a sua completude seja inatingível, visto que recortes necessariamente são feitos na construção de qualquer história. Mesmo cientes desse recorte necessário, julgamos que construir uma história de um problema específico é difícil e pede muito tempo. Desta forma, seria possível construir a história de todos – ou grande parte dos – problemas da história da matemática?

A reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não euclidianas feita aqui procurou contemplar os aspectos adjacentes ao problema – como alguns aspectos sociais e culturais – e os vários personagens envolvidos – tanto aqueles que negaram a possibilidade de geometrias diferentes daquela considerada verdadeira quanto aqueles que aceitaram essa possibilidade – e, portanto, pode ser considerada uma história de problemas.

Vimos que esse episódio da história da matemática envolve uma discussão sobre a natureza do conhecimento matemático, sobre a concepção de verdade – que esteve por muito tempo vinculado às leis da geometria –, sobre as escolhas entre uma geometria ou outra. Atrelado a essa discussão está o desenvolvimento da lógica, com a separação do que, de fato, é lógico-formal e o que é baseado na intuição. Isso faz com que haja uma mudança importante na concepção de geometria: deixa de ser a verdade absoluta e passa a ser uma convenção. Assim, a opção pode ser pela geometria euclidiana, mas igualmente pode ser pela geometria não euclidiana.

Só com toda essa mudança foi possível que os matemáticos abandonassem a renitência pela demonstração do quinto postulado de Euclides e aceitassem que, realmente, se tratava de um postulado que poderia ser aceito ou negado. Assim, geometrias muito diferentes da euclidiana se tornaram possíveis e com a mesma consistência, isto é, se a geometria euclidiana for consistente, então a geometria não euclidiana também será. Antes da mudança que falamos, seria impossível conceber um teorema como esse e, muito menos, prová-lo.

Nas problematizações apresentadas neste trabalho, mostramos as dificuldades da participação, propriamente dita, da história no ensino de matemática – seja em livros didáticos ou em aulas – embora tenhamos tratado especificamente de um episódio da historia da matemática. A singularidade da nossa reconstrução histórico-filosófica abre espaço para questões mais gerais como a seguinte: seria possível a apresentação do conteúdo matemático sempre atrelado com o conteúdo histórico? Isso exigiria um tempo muito maior para apresentação de cada conteúdo, já que junto a ele viria toda a história do problema. Não pretendemos responder aqui a questões como essa, mas o nosso estudo e nossas problematizações podem servir de base para outro estudo futuro com o objetivo de fornecer caminhos ou respostas. Cabe, portanto, uma reflexão sobre a viabilidade da participação da história, considerada de qualidade, no ensino. Como dissemos, quisemos nesse trabalho apresentar o problema da participação da história no ensino para, com maior clareza dele, ser possível enfrentá-lo.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. Tradução coordenada e revista por A. Bosi. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

ARCARI, I. *Um texto da geometria hiperbólica*. 2008. 127 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

BARKER, S. T. *Filosofia da matemática*. Tradução de L. Hegenberg e O. Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

BICUDO, I. Introdução e tradução. In: EUCLIDES, *Os elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BONOLA, R. *Non-euclidean geometry*: a critical and historical study of its development. Tradução de H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.

BRITO, A. J. *Geometrias não-euclidianas*: um estudo histórico-pedagógico. 1995. 187 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

BROWN, J. R. *Philosophy of mathematics*: a contemporary introduction to the world of proofs and pictures. New York: Routeledge, 2008.

BUTTERFIELD, H. *The whig interpretation of history*. London: Bell, 1931.

CHABERT, J-L. Proving the fifth postulate: true or false? In: *History of mathematics, histories of problems*. Paris: Ellipses, 1997. p. 285-305.

CARNAP, R. *An Introduction to the philosophy of science*. New York: Dover, 1995.

______. Empirismo, semântica e ontologia. In: MARICONDA, P. R. (Org.) *Coletânea de textos/Moritz Schlick, Rudolf Carnap*. São Paulo: Nova Cultural, 1988. 3. ed., p. 113-128 (Coleção Os Pensadores).

CORRY, L. Paradigms and paradigmatic change in the history of the mathematics. In: AUSEJO, E.; HORMIGON, M. (Eds.). *Paradigms and mathematics*. Madrid: Siglo Veintiuno de España Editores, 1996, p.169-192.

CROWE, M. J. Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics. *Historia mathematica*. v.2, p.161-166, nov., 1975.

CUNHA, A. G. da. *Dicionário etimológico nova fronteira da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

D'AMBROSIO, U. A História da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p.97-115.

______. A interface entre história e matemática: uma visão histórico-pedagógica. In: FOSSA, J. A. (Org.). *Facetas do diamante*: ensaios sobre educação matemática e história da matemática. Rio Claro: SBHMat, 2000, p.241-271.

______. *Educação matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

______. Tendências historiográficas na história da ciência. In: ALFONSO-GOLDFARB, A. M.; BELTRAN, M. H. R. (Org.). *Escrevendo a história da ciência*: tendências, propostas e discussões historiográficas. São Paulo: EDUC/Livraria Editora da Física, 2004, p.165-200.

EINSTEIN, A. (1921) Geometria e experiência. Tradução de V. A. Bezerra. *Scientiae Studia*. São Paulo, v.3, n.4, p.665-675, 2005.

EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução de I. Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1995.

GREENBERG, M. J. *Euclidean and non-euclidean geometries*: development and history. 3 ed. New York: Freeman, 2001.

HEATH, T. L. *The thirteen books of euclid's elements*: translated from the text of Heiberg with introduction and commentary. Cambridge: University Press, 1968.

HOUAISS, A. *Houaiss eletrônico*. Rio de Janeiro: Editora Objetiva, 2009. CD-ROM.

JAOUICHE, K. *La Théorie des paralleles en pays d'islam*. Paris: VRIM, 1986.

KANT, E. (1781) *Crítica da razão pura*. Tradução de J. Rodrigues de Mereje. São Paulo: Edições e Publicações Brasil Editora, 1958.

KATZ, V. J. *A History of mathematics*: an introduction. 2 ed. Addison-Wesley, 1998.

KUHN, T. S. (1962) *A Estrutura das revoluções científicas*. Tradução de Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. São Paulo: Perspectivas, 1998.

LATOUR, B. *Ciência em ação*: como seguir cientistas e engenheiros sociedade afora. Tradução de Ivone C. Benedetti. São Paulo: Editora UNESP, 2000.

LENOIR, T. *Instituindo a ciência*: a produção cultural das disciplinas científicas. Tradução de Alessandro Zir. São Leopoldo: Editora UNISINOS, 2003.

MARTINS, A. F. P. História e filosofia da ciência no ensino: há muitas pedras nesse caminho. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*. Florianópolis, v.24, n.1, p. 112-131, 2007.

MARTINS, L. A. P. História da ciência: objetos, métodos e problemas. *Ciência & Educação*. Bauru, v.11, n.2, p.305-317, 2005.

MATTHEWS, M. R. História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de reaproximação. Tradução de Claudia Mesquita de Andrade. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*. Florianópolis, v.12, n.3, p. 164-214, 1995.

MAYR, E. *O Desenvolvimento do pensamento biológico*: diversidade, evolução e herança. Tradução de Ivo Martinazzo. Brasília: UNB, 1998.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. *História na educação matemática*: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MIGUEL, A. *Três estudos sobre história e educação matemática*. 1993. 274 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

NASCIMENTO JUNIOR, A. F. Fragmentos da história das concepções de mundo na construção das ciências da natureza: das certezas medievais às dúvidas pré-modernas. *Ciência & Educação*. Bauru, v.9, n.2, p. 277-299, 2003.

NOBRE, S. R. *Introdução histórica às geometrias não-euclidianas* – uma proposta pedagógica. Belém: SBHMt, 2009. (Coleção História da Matemática para Professores, 2).

______. Leitura crítica da história da matemática: reflexões sobre a história da matemática. *Ciência & Educação*. Bauru, v.10, n.3, p.531-543, 2004.

OLIVEIRA, V. D. R. B. *As Dificuldades da contextualização pela história da ciência no ensino de biologia*: o episódio da dupla-hélice do DNA. 2009. 97 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

POINCARÉ, J-H. (1902) *A Ciência e a hipótese*. Tradução de Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: UNB, 1984.

PONTE, J. P. et al. *Didáctica da matemática*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação, 1997.

ROSENFELD, B. A. (1976) *A History of non-euclidean geometry*: evolution of the concept of a geometric space. Translated by Abe Shenitzer. New York: Springer-Verlag, 1988.

SCHAFF, A. (1971) *História e verdade*. Tradução de Maria Paula Duarte. 5 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

SILVA, M. D. O declínio da cultura grega e o desenvolvimento da matemática até a idade média: em busca de uma compreensão sociológica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais*... Ilhéus: Via Litterarum, 2010. 1 CD.

SIU, M.-K. “No, I don’t use history of mathematics in my class. Why?”. In: FURINGHETTI, F.; KAIJSER, S.; TZANAKIS, C. (Eds.). *Proceedings of HPM 2004 & ESU 4*. Iraklion, Greece: University of Crete, 2006, p. 268-277.

SMITH, D. E. *History of mathematics*. New York: Dover Publications, 1958. v.1.

STRUIK, D. J. *História concisa das matemáticas.* Tradução de J. C. S. Guerreiro. 2 ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

TRUDEAU, R. J. *The non-euclidean revolution*. Boston: Birkhäuser, 1987.

WOLFE, H. E. *Introduction to non-euclidean geometry*. New York: The Dryden Press, 1945.