UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

EDELAINE CRISTINA DE ANDRADE

ANÁLISE DE UMA PROPOSTA APLICADA EM SALA DE AULA SOBRE GEOMETRIA COM FOCO NA DEMONSTRAÇÃO

Londrina
2011

EDELAINE CRISTINA DE ANDRADE

ANÁLISE DE UMA PROPOSTA APLICADA EM SALA DE AULA SOBRE GEOMETRIA COM FOCO NA DEMONSTRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Marinez Meneghello Passos.

Londrina
2011

Catalogação Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

A553a Andrade, Edelaine Cristina de.
Análise de uma proposta aplicada em sala de aula sobre geometria com foco na demonstração / Edelaine Cristina de Andrade. – Londrina, 2011.
148 f. : il.

Orientador: Marinez Meneghello Passos.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2011.
Inclui bibliografia.

1. Geometria – Estudo e ensino – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 3. Geometria demonstrativa – Teses. I. Passos, Marinez Meneghello. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título

CDU 51:37.02

EDELAINE CRISTINA DE ANDRADE

ANÁLISE DE UMA PROPOSTA APLICADA EM SALA DE AULA SOBRE GEOMETRIA COM FOCO NA DEMONSTRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof[a]. Dr[a]. Ana Márcia F. Tucci de Carvalho
UEL – Londrina – PR

____

Prof. Dr. Marcos Rodrigues da Silva
UEL – Londrina – PR

____

Prof[a]. Dr[a]. Marinez Meneghello Passos
UEL – Londrina – PR

Londrina, 15 de fevereiro de 2011.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela força e inspiração para a concretização deste trabalho.

Ao meu marido Sandro pelo incentivo e apoio incondicional durante os meus estudos. Também por ter me incentivado a me inscrever para a seleção do Mestrado acreditando que o meu sonho pudesse se realizar. E, por ter sido *cameraman* na coleta de dados. Tenho certeza que realizou esta atividade com muita paciência e carinho. Obrigada amor!

Aos meus amigos e demais familiares que me incentivaram, apoiaram e estiveram sempre torcendo por mim.

À Profa. Dra. Marinez Meneghello Passos, minha orientadora na realização deste trabalho, devido à sua maneira carinhosa de tratar as pessoas, especialmente a mim. Por ter acreditado em meu projeto e me apoiado desde o momento em que aceitou ser minha orientadora, e em minha capacidade para a realização deste estudo. Pelo apoio, incentivo, confiança e respeito que teve com as minhas ideias, pelas discussões e orientações que muito contribuíram não apenas para o trabalho, mas também para o meu crescimento profissional. Pela disponibilidade no decorrer deste processo e por todo o tempo dedicado à realização deste estudo.

Ao Prof. Dr. Marcos Rodrigues da Silva, meu orientador “por tabela”, por sua amizade, apoio, incentivo, disponibilidade, dedicação e por suas considerações, nunca deixando de me esquecer: “esse é o ponto” como ele sempre frisou.

Ao Prof. Dr. Sérgio de Mello Arruda e todos os participantes do GQ – grupo de quarta –por suas contribuições no crescimento de meu trabalho.

Aos professores componentes da banca, Prof. Dr. Marcos Rodrigues Silva e Profa. Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho, pela dedicação e atenção ao analisarem esta pesquisa e pelas observações e sugestões apresentadas, que certamente trouxeram contribuições para o aprimoramento da mesma.

À professora Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, exemplo para mim enquanto profissional, mas acima de tudo exemplo enquanto ser humano, pelos ensinamentos que certamente levarei por toda a vida.

Aos participantes da pesquisa pela colaboração, disponibilidade e comprometimento que demonstraram e pelos ricos depoimentos que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores e colegas do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina por todos os momentos compartilhados.

À Fundação Araucária pela bolsa de estudos concedida, através da qual pude me dedicar integralmente à realização deste estudo.

Sinto-me compelido ao trabalho literário: [...] pelo meu não reconhecimento da fronteira realidade- -irrealidade; [...] pelo meu amor platônico às matemáticas; [...] porque através do lirismo propendo à geometria.

Murilo Mendes

ANDRADE, Edelaine Cristina. **Análise de uma proposta aplicada em sala de aula sobre geometria com foco na demonstração**. 2011. 148 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

RESUMO

No presente estudo, investigamos as percepções referentes ao método demonstrativo de Euclides quanto à primeira *Proposição* – da obra *Os Elementos* – na ótica de um grupo de alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual do norte do Paraná. Para isso, realizamos uma pesquisa de abordagem qualitativa de cunho interpretativo na busca de compreender como os conceitos da geometria demonstrativa eram recepcionados neste contexto didático. O referencial investigativo adotado foi a análise textual discursiva, a partir da qual foi possível constituir uma base de dados, ou seja, o *corpus*. A principal questão que norteou esta pesquisa foi: De que modo os alunos compreenderam a proposta que lhes mostrou o método demonstrativo euclidiano referente à primeira *Proposição*? Nesta pesquisa mostramos um breve histórico da geometria grega; tecemos alguns comentários sobre o método axiomático; apresentamos duas propostas por nós sugeridas para a intervenção didática; realizamos um estudo buscando algumas causas que justificassem a ausência ou o pouco estudo da geometria demonstrativa nas salas de aula, e conseguimos no decorrer de nosso trabalho, identificar três delas: o abandono da geometria no período do Movimento da Matemática Moderna; a formação dos professores e a supressão da demonstração geométrica nos livros didáticos. Esses estudos iniciais nos proporcionaram inspirações, compreensão e entendimento para a conjectura dessa intervenção em busca das percepções dos alunos a respeito da demonstração da *Proposição I*. A investigação realizada evidenciou que, para os participantes da pesquisa, a demonstração euclidiana fica mais evidente tendo em mãos a figura geométrica que a representa e que mesmo faltando vocabulário, os participantes conseguiram avançar no raciocínio geométrico.

Palavras-chave: Educação matemática. Geometria. Geometria demonstrativa. Análise textual discursiva.

ANDRADE, Edelaine Cristina. **Analysis of a proposal for geometry study in the classroom, with focus on demonstration**. 2011. 148 f. Dissertation (Master in Science Teaching and Mathematics Education) – Londrina State University, Londrina, 2011.

ABSTRACT

In the present study, we researched the perceptions related to Euclidean demonstrative method based on the first *Proposition* – from the work *The Elements* – according to the optic of a group of students attending the first year of Secondary School in a State School of Northern Parana. With that aim, we performed a research of qualitative approach, an interpretative research, with the objective of understanding how the concepts of demonstrative geometry were received by the pupils, in this didactic context. The discursive textual analysis was the research referential adopted, according to wich we constructed a database, that is to say, the *corpus*. The lead issue in this research was: In which way the pupils understood the proposal showed to them, the Euclidean demonstrative method based on the first Proposition? In this investigation we presented a brief history of Greek geometry; we made some comments about the axiomatic method; we presented two proposals suggested by us for the didactic intervention; we carried out a study searching for some causes which justified the absence or the little study of demonstrative geometry in the classrooms. We succeeded, during our study, in the identification of three of them: the abandonment of geometry during the Movement of Modern Mathematics; the issue of teachers education and the suppression of geometric demonstration in Didactic Books. These initial studies proportionated us inspiration and understanding in order to figure out the intervention in our search for the students´ perceptions about the demonstration of the *Proposition I*. The research performed evidenced that, for the pupils participating in this investigation, the Euclidean demonstration is more clear when they have in hands the geometric figure that represents this demonstration and that, in spite of the lack of appropriate vocabulary, the participants made progress in their geometric thinking.

Key-words: Mathematical education. Geometry. Demonstrative geometry. Discursive textual analysis.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A prova tem uma importância histórica e epistemológica[1] no desenvolvimento da atividade matemática e atualmente ocupa o cenário em que se encontra a Ciência. Tem papel fundamental para a Matemática, e por diversas vezes se torna imprescindível no ensino de diferentes conteúdos que se encontram nos programas curriculares de matemática. Para os matemáticos, a prova é dedutiva formalizada, ou ainda, um conjunto de teoremas, deduzidos de axiomas mediante raciocínio essencialmente lógico. Encontramos a prova em outras áreas como o Direito, em que torna uma comprovação de fatos juridicamente relevantes e, de modo geral, todas as formas de prova são admitidas, desde que não contestem a lei (PODVAL, 2002).

Na busca por algumas informações sobre ensino de provas com foco no Ensino Médio, fizemos uma leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de 2002 e encontramos elementos que mostram uma preocupação com o ensino de provas:

> [...] a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (BRASIL, 2002, p.40).

E ainda, percebemos que além de alguns documentos tratarem do ensino de provas no Ensino Fundamental e Médio, trazem uma valorização deste tema nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> O ensino de Geometria no Ensino Fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. [...] Toda vez que um campo do conhecimento se organiza a partir de algumas verdades eleitas, preferivelmente poucas, simples e evidentes, então

[1] Epistemologia: estudo dos postulados, conclusões e métodos dos diferentes ramos do saber científico, ou das teorias e práticas em geral, avaliadas em sua validade cognitiva, ou descritas em suas trajetórias evolutivas, seus paradigmas estruturais ou suas relações com a sociedade e a história; teoria da ciência (HOUAISS, 2009, dicionário eletrônico da língua portuguesa).

> se diz que esse campo está apresentado de forma axiomática. Esse é o caso, por exemplo, da geometria clássica (BRASIL, 2002, p.125).

Em nossa busca bibliográfica, notamos que o assunto de provas matemáticas está aumentando e adquirindo importância nas pesquisas nacionais na área da Educação Matemática, como, por exemplo, o encontro realizado em 2002 na UNESP de Rio Claro – SP (Brasil), o qual discutiu o tema e originou um número especial do periódico BOLEMA[2]. Hanna e De Villiers (2008) confirmam que diversos documentos curriculares de matemática elevaram a condição da prova na matemática escolar em diversas jurisdições educacionais pelo mundo. Contudo, acreditamos que ainda deva ser expandida pelos pesquisadores brasileiros. No que se refere à Educação Matemática, segundo Pietropaolo (2006), temos um crescente número de pesquisas internacionais realizadas nos últimos anos, e podemos destacar que se deu a partir de meados dos anos 80 e intensificou-se nos anos 90. Provavelmente, o fato deste aumento nas pesquisas sobre provas e demonstrações tenha sido a inclusão das demonstrações no currículo da educação básica em países como Inglaterra, Canadá e Estados Unidos.

Por acreditarmos ser um assunto notável, a prova foi o motivo que impulsionou-nos ao desenvolvimento desta pesquisa. Diante de um referencial teórico, pretendeu-se apresentar conceitos de geometria e perceber a aplicabilidade desses conceitos num contexto didático. Para tal, aplicou-se a proposta que será aqui apresentada buscando compreensões sobre como os alunos do primeiro ano do Ensino Médio percebem o método demonstrativo euclidiano referente à primeira *Proposição*. Desta forma, neste trabalho a pergunta que levantamos é: De que modo os alunos compreenderam a proposta que lhes mostrou o método demonstrativo euclidiano referente à primeira *Proposição*?

Assim, devemos esclarecer que para o desenvolvimento de nosso trabalho não há um problema em torno da geometria demonstrativa, pois ela é apenas ilustração de uma proposta didática, ou seja, de uma proposta de intervenção que utilizamos em sala de aula.

Mostramos nos próximos parágrafos o caminho percorrido para a constituição de nossa dissertação, porém, a princípio, tínhamos como foco central a

---

[2] O BOLEMA (Boletim de Educação Matemática) – é um dos mais antigos periódicos da área de Educação Matemática do Brasil. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bolema/. Acesso em: 24 dez. 2010.

geometria demonstrativa e o intuito de sua aplicabilidade. Com o amadurecimento da ideia, as propostas foram surgindo e alguns trabalhos foram construídos nos norteando na investigação e na produção deste material.

Após o levantamento teórico acerca do conteúdo a ser tratado, organizamos o plano de aula para a coleta dos dados, na qual nossa preocupação era quanto à receptividade dos participantes diante da proposta, e nossos anseios se pautavam na aplicabilidade desta coleta de dados. Mas devemos relatar que todas as etapas aconteceram em conformidade com o planejado e nossas angústias foram superadas.

Este trabalho está estruturado em três capítulos, considerações finais e apêndices. A seguir descrevemos, resumidamente, cada um deles para que se possa ter uma visão geral do mesmo e das informações nele contidas.

No primeiro capítulo apresentamos um pouco sobre a geometria e sua importância, um breve histórico da matemática grega, da obra de Euclides e duas propostas didáticas sugeridas para o ensino e aprendizagem da demonstração em geometria, sendo uma delas aplicada para nossa coleta de dados e, ainda, uma reflexão sobre a geometria demonstrativa centrando-nos na procura de justificativas para o abandono de seu ensino. Oferecemos um levantamento parcial da literatura acerca das causas desse abandono, procurando estruturar e sistematizar as causas apresentadas na literatura consultada.

Nesta busca – desencadeada em nossa pesquisa – foi possível identificar três principais causas deste abandono: o abandono da geometria no período do Movimento da Matemática Moderna; a formação dos professores e a supressão da demonstração geométrica nos livros didáticos.

No segundo capítulo apresentamos a opção metodológica, o contexto desta pesquisa, descrevemos os participantes e a proposta didática utilizada, assim como sobre análise textual discursiva, metodologia que utilizamos para compreender as intervenções dos participantes.

No terceiro capítulo realizamos a análise dos dados coletados, assim como a codificação[3] utilizada para organizarmos essas informações.

---

[3] Codificação foi o processo por nós utilizado para estabelecer um código que possibilite a identificação rápida de cada elemento da amostra de depoimentos dos participantes a serem analisados. Este código foi constituído de números, os quais servirão para orientar o professor pesquisador e o leitor quando quiserem retornar às acomodações realizadas para cada questão discutida na proposta didática de nossa coleta de dados. Nossa referência para a codificação foi Moraes e Galiazzi (2007).

Para as considerações finais, descrevemos nossos entendimentos a respeito do que observamos nessa caminhada de investigação.

Para os apêndices, inserimos informações referentes a todo processo investigativo descrito no decorrer desta dissertação.

1 GEOMETRIA DEMONSTRATIVA

1.1 A GEOMETRIA E SUA IMPORTÂNCIA

A geometria é um ramo da matemática importante tanto como objeto de estudo quanto como instrumento para outras áreas. Tem por elemento o estudo do espaço e das formas (planas e espaciais) com as suas propriedades. Ela pode ser estudada a partir de axiomas e demonstrações, como fez Euclides em sua obra *Os Elementos*. Para Mlodinow (2004), Euclides foi um homem que representa, ainda hoje, a geometria abstrata e demonstrativa. Esta geometria não se baseia na experiência e nem inclui aplicações práticas; é baseada em axiomas ou postulados e definições que são empregados para demonstrar a legitimidade de teoremas (GREENBERG, 1994).

Os pensadores encaravam a geometria como ciência. Euclides visava aperfeiçoar o conhecimento referente a pontos, linhas e figuras, tornando mais rigorosas as provas de leis já conhecidas, e para conseguir atingir esse objetivo, demonstrava leis até então desconhecidas. Precisava dar à geometria uma forma dedutiva sistemática para que as provas fossem mais rigorosas e permitissem a elaboração de novas leis. Desta forma, destacamos o que Piaget e Garcia (1987) relataram:

> [...] a geometria é, nas matemáticas gregas, o ramo que deu prova de uma tal perfeição que se transformou, durante vários séculos, no próprio paradigma da ciência. Dois mil anos após Euclides, ela será para Newton o modelo para toda a construção de uma teoria científica e os seus *Principia* inspirar-se-ão neste modelo (PIAGET; GARCIA, 1987, p.91).

Para se justificar a importância da geometria, bastaria o contexto de que tem função essencial na formação dos indivíduos, pois permite uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da matemática (LORENZATO, 1995).

O estudo da geometria é enfatizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como sendo um “campo fértil para trabalhar com situações-problema” (BRASIL, 1998, p.51), assunto costumeiramente de interesse natural dos alunos. A atividade com elementos geométricos favorece a “aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc.” (BRASIL, 1998, p.51).

E ainda, conforme Fainguelernt (1995), a geometria “exerce papel primordial no ensino” (p.46), pois ativa as construções mentais na passagem de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização. Além disso, é tema integrador entre as diversas partes da matemática, assim como um “campo fértil para o exercício de aprender a fazer a aprender a pensar” (FAINGUELERNT, 1995, p.46), no qual a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução são representantes de sua essência.

O assunto demonstração vem ganhando importância nas pesquisas da área da Educação Matemática, e conforme Hanna e Barbeau (2008), as áreas de ênfase desses estudos são os aspectos cognitivos, os epistemológicos da prova, a relação entre prova e raciocínio, a ênfase em estruturas lógicas no ensino superior, a utilidade da heurística para o ensino da prova, etc.

1.2 Matemática Grega: um Histórico

É difícil delimitar as origens da matemática ou da geometria com precisão. Boyer diz que “afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever” (BOYER, 1994, p.4). Bicudo ainda ressalta que “cada historiador da Matemática [...] age a partir de pequenas evidências” (BICUDO, 2009, p.33).

Eves (1997) observa que são antigas as primeiras considerações feitas pelo homem sobre a geometria e, provavelmente, um dos primeiros conceitos geométricos desenvolvidos foi a noção de distância, e as primeiras descobertas geométricas foram subconscientes. Esta “geometria subconsciente” foi utilizada pelo homem primitivo para organizar um posterior desenvolvimento geométrico e estaria fundamentada somente na capacidade humana de observações e comparações de formas e tamanhos. Não se sabe quantos séculos se passaram até que o homem pudesse enaltecer essa “geometria subconsciente” à consideração de ciência. Mas o que se sabe é que essa concepção de geometria está no plano elementar de instruções que auxiliam os alunos a conhecer muitos conceitos geométricos elementares (EVES, 1997, p.61).

Segundo Boyer (1994), o desenvolvimento da geometria pode ter sido entusiasmado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras. Ressaltando que “a geometria pode ter sido uma dádiva do Nilo” (BOYER, 1994, p.16), o autor argumenta que no Egito antigo, o rio Nilo extravasava às margens e inundava o seu delta. Como conseqüência, o delta do Nilo recebia lamas aluviais ricas em nutrientes, tornando-se assim as terras mais férteis do mundo antigo; mas, por outro lado, o rio destruía as marcas que delimitavam as propriedades de terra, dificultando que os agricultores soubessem ao certo as fronteiras de suas propriedades.

Ainda conforme Boyer (1994) essa situação foi solucionada com os agrimensores que, nomeados pelos faraós, restauravam as fronteiras entre as propriedades. Utilizavam para tal, cordas entrelaçadas para marcar ângulos retos, realizando dessa forma a divisão das terras. Muito mais tarde, essa técnica empírica baseada no teorema de Pitágoras veio a ser demonstrada. “E nada é surpreendente começar a descoberta tanto dessa quanto das outras ciências pela necessidade, porque tudo o que é produzido na geração avança do imperfeito ao perfeito” (BICUDO, 2009, p.37).

Como nos mostra Bicudo (2009), foi com os matemáticos gregos que a matemática recebeu característica de ciência dedutiva. Pode ser que Tales de Mileto (624-548 a.C. aproximadamente) tenha sido o primeiro matemático a enunciar e provar um teorema, pois realmente muito pouco se conhece de sua vida e obra. O que se sabe é que a proposição, hoje conhecida como teorema de Tales (um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto), pode ter sido aprendida por ele em uma de suas viagens à Babilônia. Por isso, Tales foi cumprimentado como “o primeiro matemático verdadeiro – originador da organização dedutiva da geometria” (BOYER, 1994, p.34).

Eves (1997, p.129) ainda conclui que:

> [...] os primeiros três séculos da matemática grega, começando com os esforços iniciais de Tales por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a.C.) e culminando com os notáveis Elementos de Euclides (por volta de 300 a.C.), constituem um período de realizações extraordinárias.

Para Mlodinow (2004, p.15),

> Os gregos foram os primeiros a perceber que a natureza poderia ser entendida usando-se a matemática – que a geometria poderia ser aplicada para revelar, não apenas para descrever. Desenvolvendo a geometria a partir de descrições simples de pedra e areia, os gregos extraíram as ideias de ponto, linha e plano. Retirando a cortina que encobria a matéria, eles revelaram uma estrutura possuidora de uma beleza que a civilização nunca tinha visto antes. No clímax desta luta para inventar a matemática destaca-se Euclides. A história de Euclides é uma história de revolução. É a história do axioma, do teorema, da demonstração, a história do nascimento da própria razão.

Assim sendo, foi com Euclides que a demonstração contida em *Os Elementos* e toda sua formalização, axiomatização e dedução, tomaram forma.

Nos séculos posteriores, os matemáticos gregos deram continuidade ao trabalho de sistematização em geometria iniciado por Tales. Tempos depois, Platão interessou-se pela geometria, confirmando a necessidade de demonstrações rigorosas dedutivas. Assim, também outros nomes atribuíram esforços para que a matemática tivesse continuidade (EVES, 1997).

Pouco se sabe sobre Euclides, sua vida e personalidade (BICUDO, 2009). É quase certo que tenha vivido em Alexandria por volta de 300 a.C., época em que a universidade abriu suas portas e daí em diante, por aproximadamente um milênio, “Alexandria se tornou a metrópole intelectual da raça grega” (EVES, 1997, p.167).

Também não se tem conhecimento preciso do conteúdo original de *Os Elementos*, visto que apenas os manuscritos em grego, latim e árabe chegaram à Europa no século XII (CHABERT, 1997), época essa distante da qual viveu Euclides. Segundo Eves (1997), é possível que *Os Elementos* seja, na sua maior parte, uma coletânea muito bem elaborada e um arranjo metódico de trabalhos prévios.

A obra não possui um prefácio para, ao menos, indicar qual seu objetivo, ou qual é a abordagem metodológica a ser utilizada ao longo deste, ou qual é o propósito do livro, ou qual é a metodologia para ser usada ao longo deste ou qual é a base técnica que o autor assume conhecer, se a própria matemática ou outras disciplinas, como poderia ser a lógica e a filosofia, sobre o qual repousa. Não podemos afirmar qual era o alvo de Euclides, nem mesmo sabemos se se tratava de um livro para ensinar seus alunos, de uma enciclopédia que reunia o conhecimento geométrico até então conhecido, de um guia que propunha a construção de determinadas formas geométricas, ou se se tratava de um livro dirigido a outros colegas; o que se sabe é que as três primeiras hipóteses são as mais defendidas na literatura (GARCIADIEGO, 2007).

Mesmo assim, é indiscutível a importância desta obra, pois segundo Eves (1997), nenhuma obra, com exceção da Bíblia, foi tão amplamente usada e estudada e, muito provavelmente, nenhuma tenha exercido tamanha influência no pensamento científico. Conforme Katz (1998), foi traduzida em inúmeras línguas e ainda permanece sendo copiada. Na história, é o único caso em que um só livro fundou uma disciplina científica, estabelecendo um padrão que passou a servir de referência ao pensamento rigoroso.

Vale ressaltar o que Kant (1783), na introdução de seu trabalho "Afinal, é a metafísica possível?", escreveu: "Se quiserdes conhecer o que é a matemática, basta olhardes *Os Elementos* de Euclides" (KANT, 1783, apud BICUDO, 2009, p.16).

Conforme apresentado por Bicudo (2009), a geometria euclidiana deve ser estudada metodicamente, passo a passo, em conformidade com o trajeto exposto na obra *Os Elementos*. Estes passos a serem seguidos possuem a finalidade de convencer alguém da veracidade da tese a ser demonstrada.

1.3 Euclides – Os Elementos

A obra *Os Elementos* tornou-se uma referência de demonstração rigorosa, por esse fato apresentaremos aqui um pouco de seu conteúdo. O livro inicia sem preâmbulo e é composto por 465 proposições distribuídas em treze livros. E segundo Barker (1969), o primeiro traço característico das técnicas adotadas por Euclides é que:

> [...] ele sempre enuncia as suas leis em forma universal. Não examina as propriedades de uma determinada linha ou figura realmente existente; examina, ao contrário, as propriedades que todas as linhas ou figuras de tal ou qual espécie devem ter. Não apenas isso. Formula as leis de modo a torná-las rigorosas e absolutas – nunca são dadas como simples aproximações (BARKER, 1969, p.28-29).

Tratando-se, portanto, de uma obra desta grandeza, descreveremos na seqüência, o conteúdo dos treze livros:

a) os livros de 1 a 6 abordam a geometria plana. Livro 1: Os fundamentos da geometria: teorias dos triângulos, paralelas e áreas. Livro 2: Álgebra geométrica; Livro 3: Teoria dos círculos; Livro 4: Construções para figuras inscritas e circunscritas; Livro 5: Teoria das proporções abstratas; Livro 6: Figuras similares e proporções em geometria.

b) os livros de 7 a 9 lidam com a teoria dos números. Livro 7: Fundamentos da teoria dos números; Livro 8: Proporções contínuas na teoria dos números; Livro 9: Teoria dos números.

c) o livro 10 apresenta a teoria dos números racionais: Classificação de incomensuráveis.

d) os livros de 11 a 13 referem-se à geometria tridimensional. Livro 11: Geometria sólida; Livro 12: Medida de figuras; Livro 13: Sólidos regulares.

O livro 1 apresenta 23 *definições*, 5 *postulados* (ou axiomas) e 9 *noções comuns* (como está em *Os Elementos*) e 48 proposições (todas com demonstração). Na sequência, as proposições são apresentadas e demonstradas com base nos pressupostos, tornando-se mais complexa e à medida que o texto avança as proposições se sustentam em pressupostos e proposições anteriormente demonstradas.

Observemos que este livro está dividido em três partes. Compreendendo as 26 primeiras proposições, temos a primeira parte, onde encontramos a construção de triângulos e as propriedades especiais para os seus ângulos e lados, cada triângulo é estudado e comparado com outros, incluindo também os três teoremas de congruências. Para as proposições 27 a 32, há o desenvolvimento da teoria dos paralelogramos, estabelecendo primeiramente a teoria das paralelas e a prova de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Para compor a terceira parte, temos as proposições 33 a 46, as quais lidam com paralelogramos, triângulos e quadrados, dedicando atenção especialmente para a relação entre as áreas. Ainda pertencendo a esta parte, a proposição 47 trata do teorema de Pitágoras, sendo a demonstração concedida por Euclides e a proposição 48 que é o recíproco do teorema de Pitágoras.

Nosso foco de pesquisa são as percepções dos alunos sobre a *Proposição I* segundo a proposta de abordagem, a qual se mostra como um problema de construção que "juntamente com uma régua e com o compasso euclidiano pode transferir um segmento de reta de uma dada posição a uma outra posição desejada" (EVES, 1997, p.169). Vale ressaltar que não seção 1.3.2 mostraremos alguns detalhes sobre o compasso euclidiano.

Descreveremos as *definições*, os *postulados* e as *noções comuns* do primeiro desses treze livros de Euclides, tendo como referência a tradução de Irineu Bicudo (2009).

São as definições:

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
9. E quando as linhas que contêm o ângulo são retas, o ângulo é chamado retilíneo.
10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.
11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto.
12. E agudo, o menor do que um reto.
13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
16. E o ponto é chamado centro do círculo.
17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois.

18. E semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo.
19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas.
20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.
21. E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.
22. E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios.
23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

São os postulados:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

São as noções comuns:

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

Mostraremos a Proposição I, do primeiro livro Os Elementos, juntamente com a demonstração realizada por Euclides (2009) e sua representação.

Proposição I:

Construir um triângulo equilátero sobre uma reta limitada dada.

Demonstração:

Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero.

Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB.

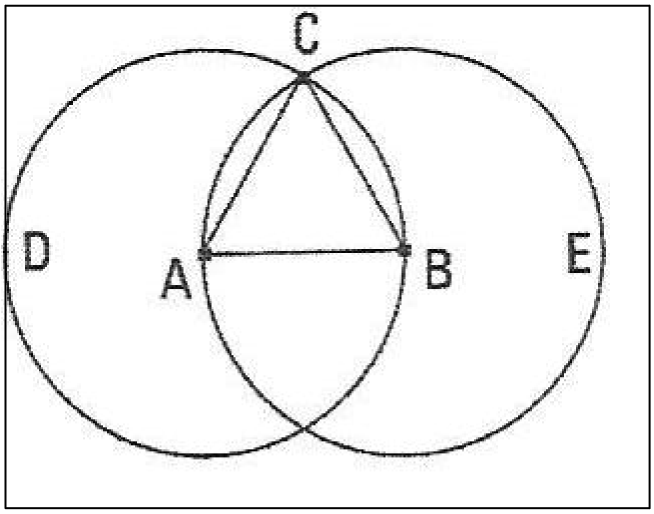
E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.

Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB.

Portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo equilátero; o que era preciso fazer.

Representação[4]:

Figura 1 – Essa figura representa a *Proposição I*.



Tanto para as duas propostas sugeridas no Capítulo 1 – seção 1.6.1 e 1.6.2 – quanto no contexto didático apresentado neste trabalho, usamos apenas as *definições*, *postulados* e *noções comuns* utilizadas para demonstrar a *Proposição I*.

1.3.1 Diferenciação entre Postulados, Noções Comuns e Definições

Na seção anterior nomeamos termos utilizados por Euclides e pensamos ser importante distingui-los nessa seção. Pois, postulados, noções comuns (axiomas) e definições compõem os pontos de partida para as demonstrações de Euclides.

Em se tratando de geometria, parece, portanto, que algumas leis geométricas podem ser demonstradas e que outras não. Dessa forma, segundo Barker (1969), as leis da geometria são distribuídas em dois grupos: um grupo em que se acomodam as leis que não receberão demonstrações, mas que serão utilizadas como premissas básicas, e o outro grupo que acomoda um grande número de novas leis, a qual se espera poder demonstrar com ajuda das premissas básicas.

---

[4] Representamos aqui a demonstração da *Proposição I* do livro *Os Elementos* (BICUDO, 2009, p.99).

Euclides, no livro *Os Elementos*, chama de *postulado* as leis do primeiro grupo – as leis que não receberão demonstrações. Conforme Barker (1969), “trata-se de leis a propósito de retas, ângulos e figuras, consideradas verdadeiras, mas que o geômetra não procura demonstrar, utilizando-se para demonstração de outras leis geométricas”. As leis demonstráveis são denominadas teoremas, ou ainda proposições (BARKER, 1969, p.30). Assim, compreendemos que os *postulados* seriam hipóteses próprias da geometria.

Segundo Eves (1997), a maioria dos matemáticos gregos antigos distinguia *postulados* de *axioma*. Citaremos três destas distinções sustentadas por eles:

> (i) Um axioma é uma afirmação assumida como autoevidente e um postulado é uma construção de algo assumida como autoevidente; assim, os axiomas e os postulados estão entre si, em grande parte, como os teoremas e os problemas de construção.
> (ii) Um axioma é uma suposição comum de todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo.
> (iii) Um axioma é uma suposição de algo que é, ao mesmo tempo, óbvio e aceitável para o aprendiz; um postulado é uma suposição de algo que não é nem necessariamente óbvio nem necessariamente aceitável para o aprendiz (EVES, 1997, p.179).

Interpretamos, portanto, de modo simples, que *postulados* são aceitações de algo tido como sendo verdadeiro. Para Bicudo (2009), não se faz hoje qualquer diferença entre postulado ou axioma, pois são “proposições admitidas sem demonstração”. De um modo bem simples, podemos dizer que se referem exclusivamente a hipóteses próprias da geometria. Para Euclides, axioma e postulados “eram conceitos distintos” (SANT’ANNA, 2003, p.130).

Já as n*oções comuns* são definições de coisas não geométricas; de modo grosseiro, podemos dizer que são afirmações de validade geral, ou seja, as noções comuns seriam consideradas hipóteses aceitáveis a todas as ciências. Como por exemplo: *as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si* – primeira citada por Euclides no Livro I. Isso não é característica exclusiva da geometria, mas sim das coisas em geral.

Barker (1969) afirma que Euclides desejava assegurar que cada um de seus teoremas geométricos estivesse demonstrado de modo logicamente conclusivo, e inclusive, seu anseio pelo rigor teve a austeridade de sistematizar os termos que estão presentes nas leis geométricas para dar-lhes um significado bem delimitado. No método empregado por Euclides, era fundamental que os termos fossem "*definidos* antes de serem utilizados", pois desse modo se ganha em clareza e se garante que o significado de cada palavra está adequadamente fixado. Os princípios estabelecidos por Euclides nos postulados e nas *noções comuns* são de tal modo evidentes, que nenhuma pessoa teria dúvida a seu respeito, por isso, não haveria problemas em deixá-los sem demonstração, permitindo que, mesmo assim, sejam considerados como base para garantir "as demonstrações de leis muito menos óbvias" (BARKER, 1969, p.33). Assim foram as *definições* utilizadas por Euclides.

Conforme Barker (1969), ainda que Euclides não tenha deixado explícitos os termos primitivos e os definidos, as suas *definições* tomam aspectos diversos. Algumas, como por exemplo, a primeira[5], segunda[6] e quarta[7] definições, são consideradas "elucidações mais ou menos vagas em que termos utilizados nos postulados e teoremas ficam parcialmente explicados mediante apelo a termos que não pertencem realmente ao sistema". Essas *definições* não pertencem às demonstrações elaboradas por Euclides. As *definições* que introduzem esses termos "podem ser consideradas como os primitivos do sistema euclidiano". Já, outras *definições*, como por exemplo, a décima[8], décima quinta[9] e vigésima terceira[10], relacionam explicitamente certos termos do seu sistema com outros termos do sistema, e essas *definições* surgem nas demonstrações. Os termos dessa forma introduzidos, "podem ser considerados como os definidos do sistema euclidiano" (BARKER, 1969, p.36).

Devemos ressaltar ainda que, segundo Barker (1969), Euclides utiliza o vocábulo *noções comuns* no lugar de *axiomas* e a distinção utilizada entre axiomas e postulados não é adotada por escritores mais modernos à época de Euclides, os quais os empregam, na maioria das vezes, como sinônimos.

---

[5] Ponto é aquilo de que nada é parte.
[6] E linha é comprimento sem largura.
[7] E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
[8] E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.
[9] Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
[10] Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

1.3.2 Instrumentos de Euclides

Como nos mostra Eves (1997), os postulados presentes na obra *Os Elementos* reduzem o uso dos instrumentos – régua e compasso. Euclides utilizava régua não graduada e o compasso, diferente dos existentes atualmente, pois aquele se desmonta quando se levanta um de seus braços do papel e com o compasso moderno é permitido traçar um círculo com centro num ponto qualquer e tendo como raio um segmento *AB* qualquer, sendo possível desta forma transportar a distância AB ao centro C utilizando-o como transferidor, mas devemos notar que os dois compassos são equivalentes, ou seja, os dois compassos produzem o mesmo resultado. Esses dois instrumentos – régua e compasso – ficaram conhecidos como *instrumentos euclidianos*.

Para Euclides, a régua permite "traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados" e o compasso permite "traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado" (EVES, 1997, p.134).

1.4 Método Axiomático

Dentro de sua estrutura, o método axiomático e a noção de demonstração, são frutos de um longo desenvolvimento histórico. Assim, é essencial um conhecimento básico desse desenvolvimento para a compreensão da noção contemporânea de demonstração (TARSKI, 2007, p.223).

Um método axiomático – do mesmo modo que a matemática – é formado por uma coleção de termos primitivos, denominados axiomas, e um conjunto de todos os teoremas que são concluídos tendo como base esses termos. Portanto, excluindo os termos primitivos, nada em um método axiomático pode ser considerado verdadeiro antes de ser provado. As conclusões podem ser atingidas se os símbolos forem manipulados de acordo com conjuntos de regras. Inferimos que um método axiomático é um sistema abstrato, livre de interpretações sobre seus elementos e suas relações. Um clássico exemplo deste método axiomático é a geometria de Euclides, pois sua estrutura só se torna possível por intermédio de procedimentos dedutivos que caracterizam um sistema matemático.

Assim, na elaboração da obra *Os Elementos*, Euclides apresentou uma das primeiras axiomatizações da história da matemática: “A axiomatização de uma teoria representa um ponto de chegada, o final do seu desenvolvimento; ela constitui uma formulação sistemática de elementos previamente elaborados, através da qual se tenta esclarecer as suas relações lógicas (PIAGET; GARCIA, 1987, p.92). Esta obra consiste em um livro de demonstrações, sem ter o objetivo de propor que efetuemos a soma de ângulos de triângulos reais para verificar se a soma é igual à soma de dois ângulos retos; não aparecem preocupações com experimentos ou observações dessa espécie. Pelo contrário, Euclides proporciona demonstrações de caráter dedutivo, procurando estabelecer as suas conclusões com o rigor da absoluta necessidade lógica. Euclides apresentou alguns conhecimentos dos seus antecessores, também de forma axiomática, além de suas próprias contribuições, onde reuniu e apresentou um sistema axiomático com cinco postulados do qual são deduzidas as demais proposições geométricas.

Como nos mostra Barker (1969), Euclides escolheu e apresentou os principais teoremas geométricos de seus precursores, atribuindo-lhes uma consideração axiomática; isto quer dizer que se utilizava do método dedutivo. Euclides não teve a preocupação em enunciar um grande número de leis geométricas, mas teve preocupação em demonstrá-las. A geometria demonstrativa de Euclides não se trata de um mero agrupamento de dados desconexos, mas sim de um sistema lógico, chamado *método axiomático*. Este é um método de provar que resultados matemáticos estão corretos.

Para Omnès (1996), a consequência deste método é alcançar a verdade matemática. Mas o que é a verdade? Para Tarski (1969) – que se utiliza da concepção clássica focada na correspondência – uma sentença é verdadeira se ela reflete o real, ou seja, retrata aquilo que é.

Então, se o cerne da atividade científica está em encontrar a verdade, evidenciamos que o problema é buscar critérios (nem que sejam parciais) de verdade e ampliar os procedimentos que possibilitem uma averiguação ou mesmo uma negação da afirmação dada. Assim, o conhecimento de prova é um destes procedimentos e, além disso, é um elemento importante do *método axiomático*.

Mas, afinal, para que serve o método axiomático? Resolvemos então, de acordo com Sant’Anna (2003), elencar 4 perspectivas que o ilustram:

> 1. O processo de axiomatização sintetiza parte significativa do método científico. As chamadas teorias científicas sempre partem de um mínimo de pressupostos para, por meio de um sistema dedutivo, permitir a inferência de um máximo de consequências lógicas.
> 2. O método axiomático tem um grande poder de síntese em um grau que oferece outra perspectiva em relação ao exposto acima. Ele tem qualidades pedagógicas interessantíssimas. Isso porque o método axiomático representa economia de pensamento.
> 3. O método axiomático tem o poder de qualificar discurso, de modo a permitir que questões de caráter filosófico em ciência sejam respondidas objetivamente.
> 4. O método axiomático é também excelente instrumento de pesquisa em matemática (SANT'ANNA, 2003, p.129-131).

Concordamos com o autor acima citado, quando esclarece que o método axiomático "não é solução para todos os problemas de sistematização em ciências" (SANT'ANNA, 2003, p.132). Mas acreditamos que a prova desempenha um papel importante desde o ensino fundamental até o ensino superior, e, assim sendo, concordamos com a afirmação de Carvalho (2004) de que a prova na matemática e nos currículos de matemática, há muito tempo são e continuam sendo até hoje, considerados importantes. Assim, em seus trabalhos, Hanna (2000 apud CARVALHO, 2004, p.i.), afirma que "... a prova está viva e saudável na prática matemática e continua a merecer um lugar de destaque no currículo de matemática".

Desta forma, pensamos ser conveniente definir o que é uma demonstração ou uma prova. Buscando no dicionário da língua portuguesa, encontramos as definições:

> Demonstração: Raciocínio pelo qual se estabelece a verdade de uma proposição: a demonstração de um teorema. / Prova. / Lição prática e experimental. / Manifestação de sentimentos, de intenções; sinais; mostra: demonstração de afeto (LAROUSSE, 1979, p.255).
>
> Prova: O que se demonstra a veracidade de uma proposição, ou a realidade de um fato. Mat. Operação pela qual se confirma a exatidão de um cálculo (LAROUSSE, 1979, p.684).

No dicionário etimológico, encontramos:

> Demonstrar: prova por meio de raciocínio concludente, provar, tornar patente, ensinar (CUNHA, 1982, p.247).
>
> Provar: estabelecer a verdade, patentear, testemunhar (CUNHA, 1982, p.642).

No Dicionario de Matematicas (BOUVIER; GEORGE, 1984, p.678) a palavra prova aparece como “sinônimo de demonstração”.

Os termos demonstração e prova que muitas vezes são empregados como sinônimos especialmente em matemática, para alguns educadores se distinguem. No dicionário de filosofia (ABBAGNANO, 1982, p.819) a palavra prova tem um sentido mais vasto que demonstração:

> Prova: procedimento apto a estabelecer um saber, isto é, um conhecimento válido. Constitui prova: todo procedimento desse gênero, qualquer que seja sua natureza: mostrar uma coisa ou um fato, exibir um documento, dar testemunho, efetuar uma indução são provas tanto quanto as demonstrações da matemática e da lógica. Portanto, esse termo é mais extenso que demonstração: as demonstrações são provas, mas nem todas as provas são demonstrações.

Conforme definido por Fossa (2009, p.47), demonstrar é oferecer pretextos os quais precisam garantir a “verdade do teorema demonstrado”, ou seja, “uma demonstração é um argumento” em que tem por conclusão o “teorema demonstrado”. A demonstração é uma ação fecunda e não uma ação automática, em que técnicas e estratégias são instrumentos básicos (FOSSA, 2009, p.48).

E ainda, conforme Barker (1969), uma demonstração – no sentido comum da palavra – é uma sequência de raciocínios que nos consente afirmar uma conclusão mostrando que ela possui uma sequência lógica de algumas premissas “sabidamente verdadeiras”. Para o autor, não existe demonstração sem “que se possa partir de uma ou mais premissas conhecidas”, pois essa é a base para se sustentar a demonstração. O autor ainda ressalta que seria complexo “imaginar que sérias conclusões geométricas pudessem provir de premissas que não incluíssem pelo menos algumas leis relativas a pontos, linhas, figuras, ou algo parecido”. Para Euclides, as premissas geométricas eram imprescindíveis para se obter as conclusões geométricas. Mas, se for aceito este ponto de vista em que as conclusões geométricas só podem ser demonstradas a partir da premissa onde exista pelo menos uma de caráter geométrico, isso tornaria impossível demonstrar todas as leis geométricas, pois de uma, teríamos que deduzir outra, desta outra, teríamos que deduzir de outra, e assim até chegar às leis originais. O que o autor aqui discute, não é a viabilidade, pois “qualquer lei geométrica pode ser derivada de outras leis geométricas”, mas sim, que “a suposta demonstração estaria baseada num raciocínio circular" e para ele, "um raciocínio circular não é uma demonstração porque não consegue estabelecer a verdade de suas conclusões" (BARKER, 1969, p.29-30).

A noção de demonstração era, até o final do século XIX, essencialmente, de caráter psicológico. Uma demonstração era uma atividade intelectual que visava o convencimento do próprio indivíduo e de outras pessoas sobre a veracidade da sentença que se discutia. Assim, utilizavam-se da demonstração para convencer o próprio indivíduo e outros de que a sentença deveria ser aceita como verdadeira, já que certas outras sentenças haviam sido anteriormente aceitas como tal. Com relação aos argumentos usados na demonstração, a única restrição era de que "eles deveriam ser intuitivamente convincentes". Porém, em determinada época, sentiu-se a necessidade de sujeitar a noção de demonstração a uma análise mais profunda e provavelmente isso tenha relacionado "com alguns desenvolvimentos específicos da matemática", a qual deu início a uma nova noção, denominada de "demonstração formal" (TARSKI, 2007, p.225).

Um contraponto para isso: ainda para Tarski (2007) "a demonstração formal, assim como a antiga demonstração intuitiva, é um procedimento que objetiva a obtenção de novas sentenças verdadeiras" (TARSKI, 2007, p.227). Desta forma, encontramos em Hanna e Janke (1996), que a prova formal nasceu em resposta à imutável preocupação pela justificação.

Hanna (1990) entende que devemos considerar a prova sob três aspectos: prova formal – que pode ser considerada como o ideal que se aproxima da prática matemática; prova aceitável e ainda o ato de ensinar por intermédio da prova. Desta forma, encontramos o modo como Carvalho (2004) analisa a prova formal:

> A 'prova formal' é a prova vista sob o viés da conceitualização teórica, na lógica formal, uma sequência finita de afirmações, cada afirmação sendo ela própria um axioma ou advindo de uma afirmação prévia – e, portanto, talvez de um axioma – como resultado de aplicações corretas das regras de inferência, a última sentença sendo o resultado a ser provado (CARVALHO, 2004, p.60).

Portanto, interpretamos que a veracidade ou a dedução de um enunciado se dá a partir daqueles que o precedem por meio de uma regra de dedução; dessa forma, demonstração é uma consequência do procedimento particular de prova o qual valida uma asseveração por método axiomático.

Dessa forma, concordamos com a citação de Sant'Anna (2003) quando diz que:

> [...] o método axiomático veio ao mundo para mostrar sua beleza para aqueles que desejam vê-la. Para os demais, que o deixem passar. Toda essa aventura faz parte do processo criativo da atividade científica que, assim como a vida, é repleta de facetas e surpresas (SANT'ANNA, 2003, p.135).

No âmbito particular da matemática, *prova* e *demonstração* são geralmente usadas como sinônimas e assim o faremos neste trabalho.

1.5 A Figura na Geometria

Não há discussão de que Euclides foi quem deu o passo fundamental para o conceito de demonstração que usamos hoje, e que Os *Elementos* foi a primeira obra – em matemática – organizada em definições, postulados e noções comuns (axiomas), teoremas e suas respectivas demonstrações. Ao longo dos tempos, esta obra passou por várias análises e sofreu diversas críticas, e mesmo assim continua sendo considerada um marco na evolução da matemática e na história das demonstrações.

Segundo Braz, é preciso que o conjunto de axiomas tenha três propriedades:

> a) Completude: tudo que será usado na teoria está apropriadamente contido nos axiomas, de maneira que não haja hipóteses implícitas.
> b) Consistência: é impossível deduzir dois teoremas contraditórios dos axiomas.
> c) Independência: nenhum axioma é consequência de alguma combinação dos demais (BRAZ, 2009, p.13).

As análises e críticas ao trabalho do geômetra impulsionaram, de certa forma, o desenvolvimento na matemática e do método axiomático. Essas críticas devem-se ao fato de haver, segundo Barker (1969), "inúmeras passagens nas demonstrações de Euclides em que as hipóteses enunciadas não são suficientes para fazer que a conclusão apareça como decorrendo apenas da Lógica formal". Um exemplo desta falha está presente na *Proposição I*, pois em sua demonstração Euclides "pede que se trace um par de circunferências, uma com centro em *A* e a outra com centro em *B*, sendo a distância *AB* o raio comum dessas duas circunferências". Euclides passa a falar direto do ponto *C* em que as curvas se cortam. O geômetra não utiliza nenhum postulado "que assegure a continuidade de segmentos e circunferências". Era necessário acrescentar um postulado para solucionar esta lacuna lógica no raciocínio de Euclides (BARKER, 1969, p.55). Lembramos que a demonstração desta *Proposição* se encontra na seção 1.3.

A figura que acompanha a demonstração da *Proposição I* realizada por Euclides, fez com que "parecesse inteiramente clara a existência de um ponto como *C*". Quando o leitor analisa essa figura entende que "o raciocínio é perfeitamente conclusivo, pois parece impossível visualizar as duas circunferências, situadas no mesmo plano, sem que admitam o ponto comum *C*" (BARKER, 1969, p.56). Lembramos também que a figura encontra-se representada na seção 1.3 deste trabalho.

Outras falhas foram encontradas no trabalho de Euclides, porém, devem ser lamentadas "porque são falhas não intencionais: foi simplesmente por não ter consciência delas que Euclides as cometeu". Assim, o objetivo de Euclides quando propôs sistematizar a geometria era, segundo Barker (1969), "tentar reunir demonstrações que seriam válidas em virtude de sua forma lógica e apenas em virtude dessa forma" (BARKER, 1969, p.56).

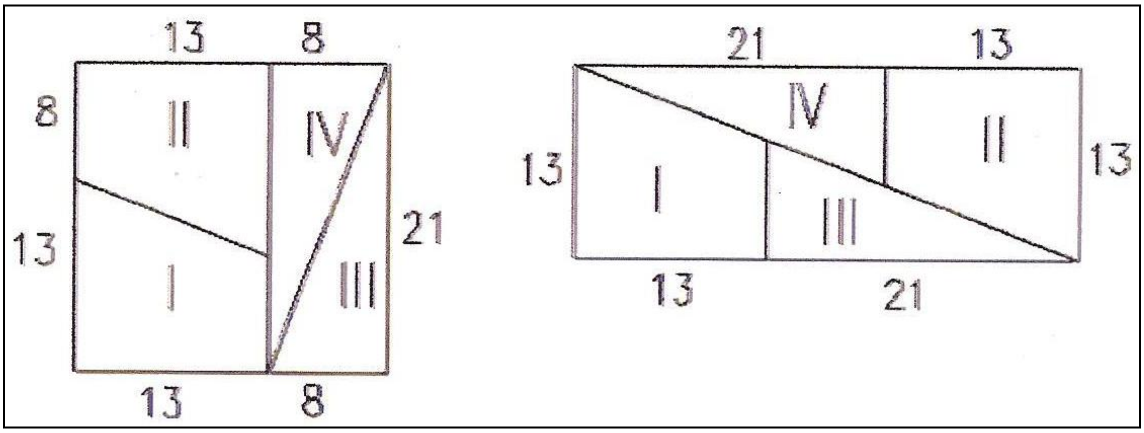
Destarte, compreendemos que para Euclides, assim como para muitos até o século XVIII, as figuras eram importantíssimas. E por isso ocorreram tantas falhas lógicas nas demonstrações, por exemplo, na *Proposição I*, pois logicamente as hipóteses enunciadas não são suficientes para concluir o que se deseja, mas apoiado nas imagens é possível mostrar o que se quer. Euclides se valia de argumentos não antes enunciados, mas de argumentos ligados à intuição.

Partindo do princípio de que a figura é parte integrante de uma demonstração, tomamos como referência a obra de Doubnov (1996) para elucidarmos nessa seção o papel desempenhado por um desenho em uma demonstração geométrica e relacionarmos com nossa coleta de dados.

No momento, consideremos o que Doubnov (1996) apresenta sobre desenho, o qual "não somente torna mais acessível o conteúdo de um teorema, mas igualmente o próprio andamento da demonstração", supondo para tanto um desenho feito cuidadosamente. Contudo, devemos considerar a outra face em que desmonta esses mesmos argumentos, pois não devemos “exagerar nem subestimar o papel do desenho”; seria um excesso “considerar o desenho como parte integrante de uma demonstração”. Acredita-se que as demonstrações geométricas podem acontecer sem o auxílio do desenho, ainda com a vantagem de não afirmar evidências geralmente ilusórias que o mesmo possa ocasionar (DOUBNOV, 1996, p.2).

Essas duas faces do desenho, uma atribuindo-lhe papel notável e outra servindo como um alerta ajudam a tentarmos justificar a concepção da figura na demonstração e, para tanto, elucidaremos com um exemplo extraído da obra de Doubnov (p.7). A figura a seguir representada nos indica uma semelhança em suas áreas; depois de remontadas as peças I, II, III e IV, verificamos que suas áreas não são similares, mesmo contrariando sua aparência, mas essa aparência errônea pode ser justificada com cálculos.

Figura 2 – Essa figura representa uma falsa demonstração.



Para calcular a área do primeiro desenho temos que multiplicar seus lados, ou seja, 13 + 8 é um lado, então devemos fazer: (13 + 8) x (13 + 8), o que resulta em 441. Para o segundo desenho, temos que realizar o mesmo processo, porém, um lado é 21 + 13 e o outro é 13, então devemos fazer: (21 + 13) x 13 o qual resulta em 442. Desta forma, verificamos que as figuras possuem áreas diferentes. Assim sendo, embora muitas vezes o desenho seja um elemento importante na elaboração do argumento em uma demonstração, não podemos confiar na percepção visual que o mesmo nos apresenta, por isso, essa figura acima representada mostra uma falsa demonstração.

Por outro lado, para Duval (1995 apud FAINGUELERNT, 1999), o aprendizado de geometria abarca os seguintes processos cognitivos, os quais se apresentam fortemente ligados: o processo de visualização referindo-se à representação espacial; o processo de construção por intermédio de materiais, como por exemplo, régua, compasso, esquadros e *software*; e o processo de raciocínio, ou seja, a prova, a qual depende de um corpo qualquer de proposições que esteja disponível, como as definições, axiomas e teoremas. Esses processos podem ser visualizados separadamente uns dos outros, mas a “visualização é um apoio intuitivo” (FAINGUELERNT, 1999, p.54). Ou seja, essa visualização permite identificar a representação visual, pois aquilo que visualmente não se consegue imaginar, dificilmente será percebido mentalmente.

Assim, fica-nos a inquietação diante da seguinte questão: até que ponto a representação geométrica é fundamental para a compreensão da demonstração?

1.6 Ensino e Aprendizagem da Demonstração em Geometria

Tentando encontrar informações sobre o ensino e aprendizagem da demonstração em geometria, encontramos nos PCN+ (2002), elementos que reforçam a importância deste:

> Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no Ensino Médio haja um aprofundamento dessas ideias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares. Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática (BRASIL, 2002, p.124).

Porém, mesmo identificando a importância do ensino e aprendizagem da demonstração em geometria, em nosso estudo, encontramos supostas lacunas no ensino da geometria demonstrativa que elucidaremos na seção 1.7 deste trabalho. Essas lacunas podem estar associadas às dificuldades apresentadas no ensino e aprendizagem de demonstrações em geometria. Mais do que isto, podem estar associadas às dificuldades com relação a demonstrações matemáticas em geral. Nagafuchi (2009) lista algumas dificuldades dos estudantes em relação à demonstração matemática. Entre estas dificuldades estão a de identificar os elementos lógico-estruturais de demonstrações (como hipóteses e teses) e a de escrever na notação matemática. Com relação a esta segunda dificuldade, Duval (1995 apud ALMOULOUD; MELLO, 2000) indica que a demonstração necessita de uma linguagem distinta da linguagem praticada pelo pensamento natural e que necessita de um modo de processamento cognitivo peculiar.

Ainda diante destas dificuldades que se referem à demonstração, Carvalho (2004) afirma que o estudante tem dificuldade em aprender com as demonstrações e que isso gera um alto índice de desistência em cursos de matemática, pois para a autora,

> Demonstrar é um grande desafio para o aluno, iniciante ou não, pois o professor usa argumentos que parecem "obscuros", os encadeamentos de proposições não lhe fazem sentido. Aparecem as queixas relativas à excessiva ansiedade provocada pelo que é ensinado e pela repetição de um enunciado que será cobrado em prova. Os alunos costumam declarar que se sentem impotentes diante das primeiras tentativas de elaborar demonstrações e que isso provoca ansiedades (CARVALHO, 2004, p.iii).

Compreendemos que o estudante possa ter dificuldade em aprender demonstração, mas evidenciamos também que a demonstração tem sua função na matemática. E buscando argumentos para nossa colocação, Carvalho (2004) aponta que:

> O ato de se ensinar através de uma demonstração deve incluir a possibilidade de se fazer da própria demonstração a resposta de *como o* resultado foi possível de ser provado e não apenas de demonstrar o resultado (CARVALHO, 2004, p.61).

Em nossa busca, encontramos em Hanna (2000 apud CARVALHO, 2004) outras 8 funções para a prova em matemática:

> 1. Verificar (relacionado com a verdade de uma afirmação);
> 2. Explicar (fornecendo 'pistas' do porquê é verdade);
> 3. Sistematizar (organizar os vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas);
> 4. Descobrir (a descoberta ou a invenção de novos resultados);

> 5. Comunicar (a transmissão do conhecimento matemático);
> 6. Construir (uma teoria empírica);
> 7. Explorar (o significado de uma definição ou as consequências de uma afirmação);
> 8. Incorporar (um fato bem conhecido em um contexto diferente e, portanto vê-lo sob outro ponto de vista) (CARVALHO, 2004, p. 61).

Estando cientes de algumas funções para a prova e das possíveis dificuldades em relação às demonstrações, elaboramos duas propostas de plano de aula para serem aplicadas em sala de aula com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, sendo: uma delas desenvolvida e planejada segundo uma linguagem clássica objetivando que o aluno prove a *Proposição I* de Euclides – proposta 2 – e a outra sistematizada de maneira a deixar que o aluno exponha suas concepções a respeito da resolução da atividade de forma que julgar mais adequada – proposta 1. Estas propostas encontram-se detalhadas na seção 1.6.1 e 1.6.2.

Considerando o contexto didático descrito neste trabalho aplicamos a proposta 1, considerando e explicando no decorrer do trabalho que a mesma, em sua aplicabilidade, sofreu alterações. Pensamos por bem aplicar essa proposta por se tratar de um modo que pudesse ter mais compreensão por parte do aluno, mesmo contendo particularidade que supostamente poderia ser novidade para ele. Apresentamos a seguir, as duas propostas do contexto didático.

1.6.1 Primeira Proposta Sugerida

Introdução: apresentação do professor pesquisador; do tema da aula; dos objetivos da aula (propor aos alunos a construção da demonstração da *Proposição I* de Euclides); análise da receptividade e da importância dada à demonstração geométrica.

Tempo: 4 aulas de 50 minutos cada.

Público alvo: 1ª série do Ensino Médio.

Material necessário: os alunos serão filmados mediante autorização concedida por eles e pela direção escolar e entrevistados com relação à receptividade à atividade, às dificuldades apresentadas, a importância que dão à demonstração geométrica, além de suas opiniões quanto à abordagem do tema da aula. Lembrando que os alunos que concordarem com a filmagem/gravação não terão seus nomes revelados, e, para tanto, o professor pesquisador, na descrição do trabalho, se referirá a eles por A1, A2 e assim sucessivamente.

AULA 1 – Faremos aos alunos um questionamento quanto à geometria. O professor pesquisador estará exercendo o papel de questionadora. Ainda não será o momento de responder às perguntas que, porventura, possam surgir no decorrer do questionamento.

Possíveis perguntas:

1. O que é geometria para você?
2. O que você sabe sobre geometria?
3. Você já ouviu falar em Euclides?
4. Você já ouviu falar em construção geométrica?
5. O que você entende por construção geométrica?
6. O que é uma demonstração?
7. Você já ouviu falar em geometria demonstrativa? Sabe o que é?

AULA 2 – O professor pesquisador retoma o questionamento apresentado na aula anterior e agora, com o auxílio de um globo, mostrará onde Euclides viveu, em que época, mostrará imagens que se tem de Euclides, falará da importância de *Os Elementos* para a matemática e também responderá às referidas indagações dos alunos.

Aqui será o momento de apresentar ao aluno um breve histórico sobre a geometria, a geometria grega/geometria euclidiana, sobre Euclides, sobre a obra *Os Elementos*, sua importância e seu conteúdo.

AULA 3 – O professor pesquisador fará alguns questionamentos aos alunos, como:

1. O que é um triângulo equilátero?
2. O que você entende por construir?

Após uma discussão sobre estes questionamentos e sobre as respostas dadas pelos alunos, entregaremos aos alunos uma folha com a *Proposição I* de Euclides: “Construir um triângulo equilátero, dado um de seus lados”. Pediremos a eles que expliquem passo a passo como fariam para provar a veracidade da *Proposição I*. Esta explicação pode ser por meio de desenho, de palavras, com a utilização do material geométrico. Este é o momento em que o aluno descreverá o que pensou.

Em um segundo momento desta aula, será entregue aos alunos outra folha com a mesma proposição, porém, agora o professor pesquisador poderá induzir os alunos na construção da demonstração, com a utilização de régua e compasso. Para tanto, o professor pesquisador deverá ter material suficiente para disponibilizar a todos os alunos que quiserem e precisarem. Da mesma maneira, os alunos descreverão passo a passo o que realizaram.

AULA 4 – Esta aula iniciará com a retomada do que foi realizado nas aulas anteriores. A partir daí, o professor pesquisador entregará aos alunos uma folha com a *Proposição I* de Euclides e a demonstração realizada por ele. Tomaremos como referência o livro *Os Elementos*, traduzido para o português por Bicudo (2009). No verso desta folha, constarão todas as definições, postulados e noções comuns utilizadas por Euclides para a referida demonstração.

Na sequência, os alunos serão indagados com as possíveis questões:

1. Que relação existe entre esses passos e a demonstração de Euclides?
2. Como Euclides fez e como você pensou?
3. Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma de Euclides?
4. Onde você pensou usando a forma de Euclides?
5. Como você pensou usando a forma de Euclides?

1.6.2 Segunda Proposta Sugerida

Introdução: será a mesma apresentada na proposta 1.
Tempo: 4 aulas de 50 minutos cada.
Público alvo: 1ª série do Ensino Médio.
Material necessário: Os mesmos utilizados na proposta 1.

AULA 1 – Começará a aula com uma introdução histórica à geometria grega euclidiana. Neste momento falaremos sobre a geometria, sobre Euclides e sobre sua obra *Os Elementos*. Exploraremos também o que é o método axiomático.

AULA 2 – O professor pesquisador fará uma retomada do que foi visto na aula anterior e apresentará os requisitos necessários para o método axiomático. Explicará a diferença entre os termos utilizados por Euclides na sua demonstração. Para Greenberg (1994) existem três requisitos que devem ser cumpridos para que concordemos que a demonstração está correta. São eles: (i) a aceitação de certas afirmações chamadas de *axiomas* ou *postulados*, sem justificação; (ii) concordar em como e quando uma afirmação segue logicamente de outra, ou seja, concordar com certas regras de raciocínio; e (iii) o entendimento mútuo do significado das palavras e símbolos utilizados no discurso, as chamadas *definições* e *noções comuns*.

AULA 3 – O professor pesquisador retomará os requisitos apresentados na aula anterior e apresentará, mediante explicações e exemplificações, as *definições*, os *postulados* e as *noções comuns* utilizados para a demonstração da primeira *proposição* de Euclides.

A PROVA DA PRIMEIRA *PROPOSIÇÃO* DE EUCLIDES

Para a demonstração da *Proposição I* de Euclides (EUCLIDES, 2009), necessitaremos de alguns passos que aqui, para melhor comodidade, trataremos da seguinte forma: *definições* (D), *postulados* (P) e *noções comuns* (N). São eles:

D1. Ponto é aquilo de que nada é parte.

D3. E extremidades de uma linha são pontos.

D2. E linha é comprimento sem largura.

D4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.

D13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.

D14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.

D15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha (que é chamada circunferência), em relação à qual todas as retas que a encontram (até a circunferência do círculo), a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.

D16. E o ponto é chamado centro do círculo.

D20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.

N1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.

P1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

P3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

AULA 4 – O professor pesquisador entregará aos alunos uma folha com a *Proposição I* de Euclides – “Construir um triângulo equilátero, dado um de seus lados” (EUCLIDES, 2009, p.99) – e as *definições*, *postulados* e *noções comuns* utilizados (já apresentados na aula anterior). Também lhes entregará outra folha e pedirá que se reúnam em duplas para tentarem a realização da prova da primeira *proposição* de Euclides. Explicará que Euclides em sua obra *Os Elementos* demonstra suas 465 proposições com a utilização dos requisitos que lhes foram apresentados na aula anterior. Após os alunos tentarem fazer a demonstração, serão entrevistados quanto à receptividade a este modelo demonstrativo.

1.6.3 Atividades Desenvolvidas

Em nosso trabalho, quando usamos o vocábulo “atividades” estamos nos referindo à realização de uma função específica dirigida pelo professor pesquisador, a qual pertence à proposta didática apresentada e realizada em nossa coleta de dados.

Observa-se nos APÊNDICES B, C e D, as folhas das atividades que foram entregues aos participantes. O desenvolvimento das três atividades encontra-se explicado na seção 2.4 e as Atividades 1 e 2 encontram-se exemplificadas nas seções 3.3.1 e 3.3.2. Já a Atividade 3 encontra-se exemplificada na seção 3.5.

1.7 Lacunas no Ensino da Geometria Demonstrativa

Desde a década de 80 se vem percebendo que o ensino da geometria demonstrativa possui algumas lacunas e essa problemática foi analisada por alguns pesquisadores e, para tanto, enumeramos três dessas causas por nós encontradas e as apresentaremos no decorrer da próxima seção.

Para pesquisadores como Pavanello (1989), Lorenzato (1995) e Pereira (2001), a geometria do modo demonstrativo era pouco estudada nas escolas – estava ausente ou quase ausente da sala de aula. Vários trabalhos de pesquisadores brasileiros, entre eles Perez (1991) e Pavanello (1993), confirmaram esta realidade educacional. Evidenciamos que é de interesse do profissional da educação identificar os problemas relacionados ao ensino e aprendizado da matemática especificamente da geometria demonstrativa.

Deste modo, mesmo o tema demonstração estando presente no curso de matemática e fazer parte da trajetória do professor de matemática, encontramos pesquisas que continuam indicando o abandono do ensino de provas e demonstrações por parte de alguns professores de Ensino Fundamental e Médio (Carvalho, 2007).

Nos trabalhos destes profissionais da educação, uma discussão em comum diz respeito às causas do abandono do ensino da geometria demonstrativa dentro e fora do Brasil. Conseguimos identificar três principais causas deste abandono: o abandono da geometria no período do Movimento da Matemática Moderna; a formação dos professores e a supressão da demonstração geométrica nos livros didáticos.

Essa busca inicial por lacunas no ensino da geometria foi o deflagrador em nossa pesquisa, e encontramos trabalhos mais recentes que continuam identificando essas lacunas, como citaremos na próxima seção.

1.7.1 Algumas Causas Identificadas que podem Justificar essas Lacunas

A primeira causa é a influência do ensino da geometria demonstrativa decorrente do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Conforme Nasser e Tinoco (2001) este movimento atribuiu à matemática uma maneira genuinamente estruturalista que não condizia com a realidade do saber escolar. Durante o movimento, existiu um abandono do ensino de geometria ou uma intenção de retornar aos fundamentos tradicionais. Grande parte dos professores que hoje ainda atua em salas de aula teve em sua formação um *déficit* no que tange à geometria e em especial à geometria demonstrativa, devido à influência que o MMM exerceu nos currículos das décadas de 60 e 70 – este movimento idealizado nos Estados Unidos teve repercussão mundial. Para Pavanello (1993), a ideia central deste movimento foi a adaptação do ensino da matemática aos novos entendimentos surgidos com a evolução deste ramo do conhecimento, que tinha a preocupação de trabalhar as estruturas algébricas e o uso da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. Dessa forma, muitos professores de matemática não se encontravam preparados para desenvolver as propostas sugeridas para o ensino de geometria demonstrativa, o que fez com que parte deles enfatizasse a álgebra e deixasse de “ensinar a geometria sob qualquer enfoque” (PAVANELLO, 1993, p.13).

A segunda causa refere-se aos problemas da formação dos professores, e, para tanto, Vianna (1988, p.22) ressalta que a “rejeição do ensino da Geometria dedutiva em sala de aula é a inabilidade do professor na utilização da Geometria dedutiva gerada, em parte, pela deficiência de alguns cursos de licenciatura em Matemática”. Perez (1991, p.174) atribui o abandono da geometria demonstrativa ao “despreparo do professor quanto a sua formação” e do mesmo modo à falta de metodologia dos professores ao realizarem seu ensino.

Pavanello e Andrade (2002) revelam em seu trabalho que mesmo os professores reconhecendo a importância do trabalho com a geometria demonstrativa, asseguram não ter condições de realizá-lo pelo fato de que enquanto foram alunos aprenderam muito pouco desse ramo da matemática. Os professores também justificam que quando esse conteúdo era abordado, apresentava deficiências e as aulas eram preferencialmente complexas e que os conteúdos posteriores a serem desenvolvidos em sala de aula “ou não eram abordados, ou essa abordagem era muito superficial” (PAVANELLO; ANDRADE, 2002, p.80).

Em épocas mais atuais, continuamos encontrando trabalhos nos apresentando que:

> A grande parte dos professores que hoje estão em atividade tiveram uma formação de base muito precária em Geometria. Além disso, os cursos de formação inicial de professores – tanto os cursos de magistério como os de licenciatura – continuam não dando conta de discutir suficientemente com seus alunos uma proposta mais eficiente para o ensino de geometria, E, também as modalidades de formação continuada, postas em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de reciclagem, não têm atingido ainda o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria (ALMOULOUD, 2004, p.1).

E, segundo Ferreira, Soares e Lima (2009), uma das causas que se apresenta para a “não utilização ou, até mesmo, para a tradicional abordagem das demonstrações no ensino e aprendizagem da Geometria”, encontra-se no “fato de os professores não possuírem os conhecimentos geométricos necessários para a realização de tal prática” e ainda que “pesquisas apontam sérios problemas com a formação de professores de Matemática" (FERREIRA; SOARES; LIMA, 2009, p.186-187).

Quanto a esta segunda causa, o trabalho de Braz (2009) nos revela que "o ensino da geometria costuma ser muito desprivilegiado na educação básica" e que "muitos professores não têm segurança ao ensinar geometria, com seus axiomas e teoremas" (BRAZ, 2009, p.8).

Compreendemos que nessa segunda causa o despreparo de alguns professores para trabalharem com a geometria demonstrativa é justificado pelos mesmos, como sendo uma parte da matemática bastante abstrata e de difícil compreensão.

Uma terceira causa importante foi a supressão da geometria demonstrativa em livros didáticos. Acreditamos que o livro didático tenha papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem, pois o livro didático é um instrumento de fácil acesso ao aluno, e também um instrumento próximo do professor visto que muitos o utilizam no preparo de suas aulas. Para Pavanello (1993, p.13), no início da década de 60, o ensino da geometria passou a ser desenvolvido intuitivamente, sem qualquer preocupação com a construção de uma sistematização.

De acordo com Imenes,

> A geometria apresentada desta maneira reduz-se a uma série de "receitas". Não é intuitiva ou experimental, nem dedutiva. Assim sendo, as verdades geométricas transformam-se em dogmas. Os fatos geométricos carecem de significação. A geometria perde seu encanto [...] (IMENES, 1987, p.57).

Nasser e Tinoco (2001) relatam que ultimamente a influência do MMM – que contribuiu e contribui para a supressão da geometria demonstrativa em livros didáticos – está se modificando, por intermédio da avaliação nacional do livro didático, os quais vêm valorizando atividades que abrangem processos de inferência, análise, argumentação, tomada de decisões, críticas, validação de resultados e produções da comunidade nacional de educadores matemáticos.

No que se refere ao livro didático, encontramos o trabalho de Costa e Allevato (2010) que reforçam que:

> O livro didático é um dos instrumentos mais utilizados pelos professores para organização e desenvolvimento das atividades em sala de aula e, até mesmo, para aprimorar seu próprio conhecimento sobre o conteúdo e, para os alunos, trata-se de uma fonte muito valiosa de informação, que deveria despertar o interesse e o gosto pela leitura, além do avanço dos estudos.
> Portanto, o livro didático deve ser muito bem organizado tanto para o professor, que o tem como apoio pedagógico, quanto para os alunos, que poderão utilizá-lo para estudar sozinhos. O livro adquire, assim, a função de contribuir para o ensino-aprendizagem (COSTA; ALLEVATO, 2010, p.72)

Verificamos que essa terceira causa também possui sua relevância baseada no fato de que o livro didático muitas vezes é um contato inevitável do aluno e do próprio professor com a geometria demonstrativa e sua apresentação nos livros didáticos auxiliaria em uma maior aproximação tanto de professor quanto de aluno com o respectivo conteúdo.

Percebemos que outra realidade acerca do ensino de demonstração está por vir, pois Rolkouski (2009) conclui em seu trabalho que a pesquisa sobre o ensino de demonstrações está se destacando devido à existência de mesas-redondas, palestras, grupos de trabalho, seminários que se dedicam a seu estudo. Além disso, expõe que no que se refere ao ensino de demonstrações “pouco se tem feito nas salas de Ensino Fundamental e Médio. O medo e a insegurança que os futuros professores sentem em “demonstrar”, [...] é possivelmente, uma das causas desta situação” (ROLKOUSKI, 2009, p.50).

Com relação a esse nosso breve estudo constante nesta seção, constatamos que as dificuldades encontradas nos professores com relação ao ensino e aprendizagem da geometria revelaram que muitas vezes a causa está na deficiência que o professor teve em sua formação, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. E, para que possamos refletir sobre o assunto, concordamos com o que os autores dizem: “O modelo de formação do professor é um passo indispensável para a melhoria da qualidade do ensino de forma geral e para o ensino de Geometria em particular” (GUIMARÃES; VASCONCELOS; TEIXEIRA, 2006, p.104).

Bem, os dados da investigação do trabalho de Serralheiro (2007 apud DIAS, 2009) revelam que a geometria ainda não é um conteúdo abordado efetivamente nas salas de aula e pensamos que se a geometria tivesse mais espaço nas salas de aula, tanto com o aluno quanto com o professor, esse seria o primeiro passo para que a geometria demonstrativa também fosse mais trabalhada, seja com o ensino fundamental, médio ou ainda com o ensino superior.

2 ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Esta pesquisa tem como objetivo compreender as percepções de um grupo de alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual do norte do Paraná a respeito de uma proposta que trabalha com o método demonstrativo euclidiano referente à primeira *Proposição*.

Neste capítulo, descrevemos a opção metodológica adotada, o argumento e os procedimentos metodológicos relativos aos participantes, aos instrumentos de coleta das informações e, da análise.

2.1 Opção Metodológica

Buscando cumprir o objetivo do estudo e as questões que dele surgem, optamos por realizar uma pesquisa qualitativa de natureza interpretativa.

Esta abordagem foi escolhida pelo fato de se fazerem presentes as cinco características indicadas por Bogdan e Biklen (1994), tratadas a seguir:

1. A fonte direta de dados é o ambiente natural e o investigador compõe o principal instrumento de coleta. Os dados foram obtidos por intermédio de entrevistas e instigações feitas aos alunos durante a aplicabilidade do método axiomático em sala de aula. Assim, o investigador foi o principal instrumento de coleta de dados, pois, apesar de recorrer à gravação de áudio e vídeo, esteve presente no local da coleta, onde constituiu seu diário de campo com as observações colhidas em seu contexto natural.

2. A investigação tem natureza descritiva, sendo que foi alcançada a partir de observações feitas pelo professor pesquisador referentes à receptividade alcançada na aplicação do plano de aula, as quais foram descritas em um diário de campo. As entrevistas, vídeos, áudios e anotações apresentadas pelos alunos, foram transcritos, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos, constituindo dessa forma um material repleto de informações, predominantemente descritivo.

3. O interesse do investigador está voltado mais para o processo do que simplesmente para os resultados ou produtos. Empenhamo-nos, ao longo de todo o processo de aplicação do projeto, em buscar informações que pudessem

revelar aspectos relativos ao objetivo de nossa pesquisa. Desta forma, podemos afirmar que nossa preocupação foi maior com o processo do que com o produto.

4. Os dados são analisados de modo indutivo. Os dados foram recolhidos no decorrer da análise e foram agrupados e inter-relacionados, na busca de aspectos mais característicos de nossa análise.

O conhecimento do significado que os participantes conferem às suas experiências possui importância vital. Enquanto analisamos os dados, respeitamos e ressaltamos o ponto de vista dos alunos acerca do nosso objeto de estudo. Desta forma, o significado que os participantes de nossa pesquisa deram a elementos constituintes da receptividade do modo axiomático foi foco de especial atenção.

2.2 O Contexto da Pesquisa

Ao compor o pano de fundo desta investigação foi necessária a escolha dos sujeitos de pesquisa, bem como o local que a mesma seria realizada. Neste sentido, foi escolhida uma escola da rede pública de ensino, localizada no norte do estado do Paraná, sendo o lugar que o professor pesquisador iniciou sua carreira no magistério.

A escolha da série em que a proposta didática foi aplicada, também se deu por conveniência, pois a 1ª série do Ensino Médio se configura como o início de uma nova etapa de escolarização em que muitos dos conceitos do Ensino Fundamental são aprofundados, principalmente os que se referem à geometria. Vale salientar que a escola trabalha com a proposta de Ensino Médio por blocos[11] e somente uma das duas turmas de 1º ano de Ensino Médio tinha aula de matemática no segundo semestre de 2010, sendo esta eleita para a realização da pesquisa.

Os primeiros contatos com a escola se deram de modo satisfatório e a conversa com a diretora e com a equipe pedagógica foi agradável, sendo-lhes

[11] O Ensino Médio regular em blocos de disciplinas semestrais tem o objetivo de “fazer com que o aluno tenha expectativa de prosseguir seus estudos, buscando a continuidade dos estudos e o ingresso na universidade. [...] o novo sistema não fere a LDB, aos estudantes ficam asseguradas as 800 horas de aula ou os 200 dias letivos, pois cada Bloco é composto por 100 dias letivos, o que garante que não há diminuição de carga horária. Também não são alteradas a exigência de 75% de frequência mínima do aluno e média final igual ou maior a 6,0 para aprovação. E escolas têm autonomia na definição do seu processo de avaliação, evidentemente, respeitando as normas presentes no Sistema Estadual de Ensino”. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/alunos/modules/noticias/article. php?storyid=409).

apresentado o projeto de pesquisa, detalhando também a proposta didática a ser seguida. Houve questionamentos quanto à escolha da escola por parte da diretora, pois a mesma acredita que os alunos são “fracos” e que teriam dificuldades na realização das tarefas que serão desenvolvidas. Também perguntou o porquê da escolha da escola, pois dependendo do objetivo e perspectivas do projeto seria mais adequado buscar por outra, temendo que o trabalho não atingisse os objetivos esperados devido ao fato de os alunos não se mostrarem participativos e de não terem o conhecimento necessário para a realização das tarefas.

Essa situação, elucidada pela diretora, soou como um desafio para o trabalho, haja vista que se acredita que os alunos, independentemente da escola, região ou classe social a que pertençam, possuem a mesma capacidade de compreensão. O trabalho também tem um compromisso de ser fiel à realidade em que foi desenvolvido e não faz sentido diante deste contexto a busca por escola e alunos ideais.

Dessa forma, é necessária a caracterização do contexto educativo em que essa escola está inserida, levando em consideração os dias em que o professor pesquisador permaneceu na mesma desenvolvendo a proposta didática.

2.2.1 A Escola

A escola situa-se na região periférica de uma das cidades do norte do Paraná. O bairro no qual a mesma se encontra é ocupado, em sua maioria, por pessoas que são atendidas por políticas públicas com auxílio financiado pelo governo federal, exigindo a permanência das crianças e adolescentes na escola. O público atendido pela escola não se limita a este bairro principal, englobando ainda uma favela e outro bairro, constituído por decorrência de invasões de terras.

2.3 Os Participantes da Pesquisa

A pesquisa contou com vinte e sete participantes, porém, nem todos compareceram a todas as etapas desenvolvidas.

Observamos, diante da convivência em sala de aula, que as primeiras impressões constituídas por meio das informações apresentadas pela diretora, foram sendo modificadas. Os alunos se mostraram receptivos e empenhados em contribuir com o desenvolvimento do trabalho.

Logo na primeira aula, enquanto ocorriam as apresentações e a elucidação do que se tratava o trabalho, um aluno quis intimidar o professor pesquisador – acreditamos que isso ocorreu porque o aluno quis testar-nos – dizendo que a região próxima onde morava era violenta e temida por todos, mas isso não foi empecilho para a continuidade do desenvolvimento das etapas, além do que, o professor pesquisador conhecia a região local e não se intimidou. Percebemos que a atitude de tentar naturalmente esta situação foi a escolha mais acertada, pois a partir daí o aluno agiu normalmente como os demais participantes da pesquisa.

Após as apresentações, todos os alunos aceitaram participar da pesquisa e receberam a autorização para que seus responsáveis a assinassem. Somente dois eram maiores de 18 anos e eles próprios a assinaram. As aulas foram gravadas em áudio e vídeo – pelo cônjuge do professor pesquisador – com a autorização de todos os participantes. Aos participantes foi explicado que não será divulgada a imagem, apenas suas falas, preservando suas identidades.

Com o desenvolvimento das atividades alguns alunos se mostraram participativos, argumentando diante dos questionamentos propostos. Desta maneira, as duas primeiras aulas que se seguiram fluíram dentro das perspectivas desejadas.

Porém, no segundo dia de contato com os participantes, um aluno, mesmo aceitando participar, recusou a execução das atividades escritas não as respondendo. Notamos que dois participantes que sentavam próximo a este, também não entregaram a primeira atividade, sendo que a segunda foi entregue por apenas um deles, mas sem as devidas explicações referentes à resolução. Percebemos que com a ausência do primeiro aluno mencionado, especificamente no dia 19/8/2010 – quinta aula – um dos participantes mudou de lugar, sentando-se mais próximo dos demais colegas. Dessa forma, os demais alunos que em aulas anteriores recusaram participar da proposta didática, a realizaram.

A professora regente – professora da sala de aula – optou por não participar das atividades desenvolvidas e o professor pesquisador teve autonomia para desenvolver o procedimento didático aplicado.

Contudo, notamos a preocupação de alguns alunos em aprender e também em auxiliar o professor pesquisador para que o projeto fosse realizado com êxito. Mostraram-se carinhosos e atenciosos para com o professor pesquisador e com a pessoa que os filmava. Tanto que na pós-coleta de dados, alguns alunos mantiveram contato com o professor pesquisador querendo saber como estava sendo concluído o trabalho.

2.4 A Proposta Didática

Nesta seção apresentamos a proposta didática mobilizada na sala de aula entre os dias 16 e 20 de agosto de 2010. A princípio elaborou-se para ser desenvolvida em quatro aulas de 50 minutos cada, mas em decorrência da participação dos alunos e do tempo diferenciado para cada aula, fez-se necessário o desenvolvimento em seis, todas acontecendo na mesma semana.

Pensamos ser interessante citar que o procedimento didático inicial foi apresentado em 4 aulas – o que pode ser visto no APÊNDICE A – e durante a aplicação das atividades algumas alterações se fizeram necessárias. O procedimento ocorreu da seguinte forma: as etapas 1 e 2 – inicialmente planejadas – foram aplicadas no dia 16 de agosto em duas aulas (aulas 1 e 2); a etapa 3 foi aplicada no dia 17 de agosto em duas aulas (compreendendo as aulas 3 e 4); a etapa 4 foi aplicada nos dias 19 e 20 de agosto ocupando duas aulas – uma para cada dia (compreendendo as aulas 5 e 6).

Esta proposta didática teve como objetivo apresentar uma proposta relacionada à geometria para os alunos propor-lhes a construção da demonstração da *Proposição I* de Euclides e compreender as percepções referentes à proposta.

A primeira e segunda etapas aconteceram em duas aulas acopladas – especificamente a quarta e quinta aulas – com questionamentos referentes à geometria; a geometria demonstrativa; com referências a Euclides; a construção geométrica e a demonstração (transcrições dos diálogos presentes nas seções 3.2.1 e 3.2.2). A finalidade era situar o participante no contexto da pesquisa e obter informações referentes ao conhecimento que o mesmo tinha sobre a geometria.

O desenvolvimento deu-se inicialmente sem a interferência do professor pesquisador, que agiu apenas direcionando e questionando a cada intervenção dos participantes. As questões elaboradas e que nortearam o desenvolvimento da atividade foram:

1. O que é geometria para você?
2. O que você sabe sobre geometria?

3. Você já ouviu falar em Euclides?
4. Você já ouviu falar em construção geométrica?
5. O que você entende por construção geométrica?
6. O que é uma demonstração?
7. Você já ouviu falar em geometria demonstrativa? Sabe o que é?

Estas questões norteadoras foram preparadas para esta etapa da proposta didática, porém, com o desenvolvimento da atividade e com as respostas obtidas, fizeram-se necessários outros questionamentos, como por exemplo: a) alguém já ouviu falar em demonstração? b) na matemática existe demonstração? c) o que é uma demonstração matemática?

Após os questionamentos, ocorreu um diálogo em que foram apresentadas aos alunos algumas informações relevantes como: um breve histórico sobre a geometria grega; um breve histórico sobre a geometria euclidiana; um breve histórico sobre Euclides; comentários sobre a obra *Os Elementos* – mostrando aos alunos a tradução de Irineu Bicudo sobre a referida obra; comentários sobre a importância e conteúdo da obra euclidiana. A intenção aqui foi a de esclarecer aos participantes as questões levantadas e que no primeiro momento tinham ficado sem respostas.

A terceira etapa foi desenvolvida em duas aulas no mesmo dia, mais especificamente a terceira e a quinta aulas. Houve então uma retomada dos comentários pertinentes à etapa anterior e à explanação da atividade inicialmente planejada aplicando-se as seguintes questões:

1. O que é um triângulo equilátero?
2. O que você entende por construir?

Assim como ocorreu na primeira etapa, aqui também foram acrescentados questionamentos e esclarecimentos que não estavam presentes na etapa inicial, mas que se fizeram pertinentes ao desenvolvimento da atividade, ou seja, foram elaboradas com os alunos questões referentes à classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos. Na sequência, foi entregue aos participantes a primeira folha – Atividade 1 – que se encontra no APÊNDICE B e exemplificado na seção 3.3.1, contendo apenas o local específico para colocarem o nome e a primeira *proposição* de Euclides: *Construir um triângulo equilátero dado um de seus lados*.

Pediu-se que tentassem resolver o que estava sendo proposto, descrevendo os procedimentos por eles utilizados, podendo ainda utilizar-se de figura(s), palavras, material geométrico, ou seja, neste momento, o aluno descreveu como pensou.

Alguns alunos utilizaram material geométrico – régua e compasso foram fornecidos pelo professor pesquisador – outros representaram com figura e outros ainda representaram com figura e escrita. O objetivo com esta atividade foi verificar como os alunos resolveriam o que lhes estava sendo sugerido tendo ciência de que se tratava de um assunto novo e com poucas chances de terem conhecimentos suficientes para realizarem a mencionada demonstração.

Mesmo diante desta suposição, os alunos mostraram-se capazes de realizar o que lhes foi proposto, como consta exemplificado na seção 3.3.

Dando sequência à Atividade 1 – atividade anterior –, após o recolhimento desta primeira folha foi apresentada aos participantes uma construção do triângulo equilátero dado um de seus lados – *Proposição I* de Euclides. O professor pesquisador realizou a construção na lousa com o auxílio do material geométrico – régua e compasso – e com as devidas explicações referentes aos passos da demonstração. Utilizou-se de uma linguagem menos rebuscada. Na sequência, foi entregue aos participantes a segunda folha, a qual se encontra no APÊNDICE C, contendo também a *Proposição* e foi requerida sua demonstração. O participante podia optar em fazer uso ou não do material geométrico, porém, foi solicitado que descrevessem os passos utilizados nesta demonstração. A presente atividade teve por objetivo perceber como os alunos realizariam a referida demonstração diante do procedimento didático apresentado. A exemplificação e breve análise desta atividade realizada pelos participantes e escolhida aleatoriamente encontram-se na seção 3.3.2.

Dando continuidade ao contexto didático, a quarta etapa aconteceu em duas aulas – uma no dia 19 de agosto e outra no dia 20 de agosto – respectivamente, a quarta e a terceira aula do dia. Retomou-se o conteúdo trabalhado nas etapas anteriores, assim como os passos e construção da demonstração euclidiana. Determinou-se um tempo para que alguns participantes terminassem a atividade da segunda folha.

Para a continuidade dessa etapa, o professor pesquisador explicou aos alunos algumas questões como: o que é prova; alguns detalhes sobre o que é demonstração; o que é axioma/postulado; o que é teorema e as *definições*, *postulados* e *noções comuns* utilizados por Euclides na demonstração. Na sequência, foi-lhes entregue a atividade, a qual se encontra no APÊNDICE D, contendo: a *Proposição I – Construir um triângulo equilátero dado um de seus lados* – com a demonstração sugerida por Euclides; as *definições*, *postulados* e *noções comuns* utilizadas para a mencionada demonstração; a demonstração de Euclides tendo sido inserido pelo professor pesquisador as *definições*, *postulados* e *noções comuns* respectivamente necessários para a demonstração e a página com as seis perguntas:

1. Você entendeu a demonstração de Euclides?
2. O que você acha desse método?
3. Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma de Euclides?
4. Quais elementos da demonstração de Euclides você utilizou na sua construção?
5. Você consegue ler e compreender o que Euclides fez?
6. Esta demonstração de Euclides faz algum sentido para você?

Os participantes deram início a essa atividade no dia 19 e a concluíram no dia 20 de agosto quando finalizamos a coleta de dados. A exemplificação e breve análise desta atividade realizada pelos participantes e escolhida aleatoriamente encontram-se na seção 3.5.

2.5 ANÁLISE TEXTUAL DISCURSIVA

De acordo com Moraes e Galiazzi (2007), percebe-se o aumento do número de pesquisas qualitativas que se utilizam de análises textuais. Essa análise pode ser realizada com textos já existentes ou com textos que serão produzidos por meio de entrevistas e observações – documentos produzidos, especificamente, para a pesquisa.

Utilizando-se desta metodologia, objetiva-se aprofundar a concepção daquilo que está sendo apresentado no material, não existindo o intuito de testar hipóteses para serem comprovadas ou rejeitadas ao término da pesquisa, ou seja, a "intenção é a compreensão, reconstruir conhecimentos existentes sobre os temas investigados" (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.11). Esses autores ainda expõem que: a análise de conteúdo, de discurso e textual discursiva são metodologias de análise, todas pertencentes à análise textual.

A análise de discurso e a análise de conteúdo pertencem a um mesmo eixo, podendo insurgir diferentes características as quais podem ser concretizadas em diferentes graus ou intensidades. Isto significa que mesmo possuindo um eixo em comum, apresentam diferentes características as quais se intensificam mais em grau ou magnitude do que em qualidade.

Desta forma, os autores acima citados justificam que:

> [...] as diversificadas metodologias têm suas finalidades e objetivos dentro da pesquisa qualitativa. Têm seus espaços. Não se excluem. Não são empregadas ao mesmo tempo numa pesquisa, mas no conjunto das pesquisas de cunho qualitativo cada uma delas tem condições de contribuir para ampliar nossa compreensão da realidade (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.160).

As informações derivadas de nossa coleta de dados foram submetidas à metodologia da análise textual discursiva, a qual se constitui das seguintes etapas: "desmontagem dos textos, estabelecimentos de relações, captando o novo emergente", compondo uma primeira fase do trabalho os quais se constituem em elementos primordiais e uma segunda fase que é constituída por "um processo auto - organizado" (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.11-12).

Deve-se destacar que a análise textual discursiva nos oferece um modo de trabalhar com os textos, levando em conta que um mesmo texto pode proporcionar uma diversidade de sentidos, podendo estar circunstanciadas pela intenção que o pesquisador apresenta em relação ao texto, pelos referenciais que o acompanham no desenvolvimento da abordagem e pelas interpretações dos sentidos que os termos que compõem o texto podem oferecer, ou seja, a "análise textual propõe-se a descrever e interpretar alguns dos sentidos que a leitura de um conjunto de textos pode suscitar". Todo processo de análise textual discursiva gira em torno da produção do metatexto e é a partir da unitarização e categorização que se constrói a estrutura básica do metatexto (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.14).

Assim, sintetizamos que a análise textual discursiva tem como ponto de partida um conjunto de pressupostos em relação à leitura dos textos a serem examinados e estes materiais analisados constituem um conjunto de significantes, os quais recebem significados por meio do pesquisador. Isso ocorre a partir de seus "conhecimentos, intenções e teorias". "A emergência e comunicação desses novos sentidos e significados são os objetivos da análise" (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.16).

Na desmontagem dos textos, também denominada de processo de unitarização, o primeiro contato com o texto ocorre com o exame detalhado do mesmo, tendo o intuito de estabelecer unidades que caracterizem o fenômeno a ser investigado.

Na definição destas unidades de análise propostas pelo próprio pesquisador, as respostas conseguidas são digitadas e interpretadas considerando-se a ideia principal de cada unidade estabelecida com a finalidade de atingir unidades que distingam o fenômeno estudado. Desta forma o *corpus*[12] da pesquisa é formado pelos registros coletados – transcrição dos vídeos; digitação das respostas dos questionários; digitação das figuras compostas acompanhadas de suas notas, ou seja, após a definição do texto a ser analisado, inicia-se sua desconstrução, evidenciando os elementos que compõem o *corpus*, do mesmo modo que em um processo de fragmentação, no qual se pretende compreender as particularidades do texto.

Esta fase em que existe a desorganização e desconstrução do documento analisado, no qual o professor pesquisador lança seu olhar sobre as categorias por ele organizadas, recebe o nome de unitarização e é entendida por Moraes e Galiazzi (2007), como um:

> [...] processo que produz desordem a partir de um conjunto de textos ordenados. Torna caótico o que era ordenado. Nesse espaço uma nova ordem pode constituir-se à custa da desordem. O estabelecimento de novas relações entre os elementos unitários de base possibilita a construção de uma nova ordem, representando uma nova compreensão em relação aos fenômenos investigados (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.21).

Na etapa do estabelecimento de relações, temos a segunda fase que incide na categorização das unidades. Aqui são reunidos elementos semelhantes, nomeados e definidas suas categorias, e, ao passo em que são construídas obtém-se maior rigor e exatidão. Isso ocorre por se tratar de um processo de acomodação cíclico. Com essas categorias organizadas se obterá o

---

[12] É o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos (BARDIN, 2004, p.90).

metatexto que se pretende escrever. Moraes e Galiazzi (2007) descrevem metatexto como: “Expressão por meio da linguagem das principais ideias emergentes das análises e apresentação dos argumentos construídos pelo pesquisador em sua investigação, capaz de comunicar a outros as novas compreensões atingidas” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.94).

A análise textual discursiva pode ser qualificada a partir das propriedades exigidas para as categorias. Essas categorias não seguem uma uniformidade entre distintos autores, “especialmente em alguns aspectos o encaminhamento das análises pode levar a produtos bem diversificados”. Nem todas as maneiras de guiar as análises são iguais em seus pressupostos. Porém, duas propriedades se fazem presentes sem maiores divergências: a validade ou pertinência das categorias – “categorias de análise necessitam ser válidas ou pertinentes no que se refere aos objetivos e ao objeto da análise” – essa validade ocorre à medida que se conseguem “uma nova compreensão sobre os fenômenos pesquisados”; e a propriedade da homogeneidade – as categorias “precisam ser construídas a partir de um mesmo princípio, a partir de um mesmo contínuo conceitual” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.26).

Destacam-se ainda outras duas categorias denominadas: *a priori*[13] e emergentes. As categorias *a priori* referem-se às construções que o pesquisador organiza antes da análise dos dados. Os dados são examinados com base em teorias escolhidas com antecedência, ou seja, “são caixas em que os dados serão classificados” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.28). Ao passo que para as categorias emergentes, o professor pesquisador utiliza-se de construções teóricas organizadas a partir do *corpus*.

A fase captando o novo emergente visa à construção de metatextos analíticos que anunciam os sentidos que foram lidos num conjunto de textos e sua estrutura se constrói por meio de categorias e subcategorias procedentes da análise. Significa que a produção de metatextos fundamentados nos textos do *corpus* é o objetivo da análise textual discursiva, e mesmo produzidos a partir das unidades de significado e das categorias, não compõem apenas montagens. Desta forma, um metatexto,

---

[13] *A priori*: loc. Adv. (expressão latina) Lóg. Segundo um princípio anterior à experiência, aceito como hipótese: *“a priori”, nada posso dizer*. / Loc. Adj. Anterior à experiência: *raciocínio “a priori”* (LAROUSSE, 1979, p.63).

> [...] mais do que apresentar as categorias construídas na análise, deve constituir-se a partir de algo importante que o pesquisador tem a dizer sobre o fenômeno que investigou, um argumento aglutinador construído a partir da impregnação com o fenômeno que representa o elemento central da criação do pesquisador. Todo texto necessita ter algo importante a dizer e defender e deveria expressá-lo com o máximo de clareza e rigor (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.40-41).

Nesta fase, a partir do *corpus*, o professor pesquisador expõe os frutos de sua construção expressando suas apreensões e percepções sobre o trabalho que estava incumbido de realizar.

No processo da auto-organização, quando a análise textual discursiva atinge a produção de metatextos, surge o processo da compreensão, tendo início no movimento de desconstrução, nos quais os textos do *corpus* são fracionados e desordenados, “seguindo um processo intuitivo auto-organizado de reconstrução, com emergência de novas compreensões que, então, necessitam ser comunicadas e validadas cada vez com maior clareza em forma de produções escritas” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.41).

Em conformidade com esta metodologia dá-se continuidade à investigação buscando uma caracterização para a coleta de dados realizada em sala de aula com os participantes.

2.6 Codificação para Compor a Identificação dos Participantes

Cabe elucidar que a codificação[14] das representações apresentadas nos Quadros utilizou os códigos A1, A2, A3 até A27, sendo que a letra A significa Aluno, e o número que a acompanha indica cada um dos participantes da atividade – neste caso temos 27 alunos. Dois são os motivos pelos quais alguns alunos não se encontram nos Quadros: ou pelo fato de não terem participado oralmente do questionamento ou por não terem comparecido à referida etapa.

Os dados considerados, assim como seus resultados, estão descritos neste trabalho e referem-se às interferências suscitadas pelos participantes nas etapas 1, 2 e 3, assim como as respostas obtidas na atividade 3. Deste modo, as etapas e um questionário compuseram o *corpus* desta análise.

---

[14] A codificação é o processo pelo qual os dados brutos são transformados sistematicamente e agregados em unidades, as quais permitem uma descrição exata das características pertinentes do conteúdo (BARDIN, 2004, p.97).

As respostas apresentadas pelos depoentes referentes às duas primeiras etapas foram transcritas e organizadas em 15 Quadros, não incluindo os demais por se tratar de mera repetição do conteúdo explanado. Para a primeira etapa, acomodamos as 10 primeiras perguntas e no Apêndice N, as questões encontram-se identificadas por Q1.1 a Q10.1, onde Q refere-se a Questão, o primeiro número refere-se ao número da questão e o segundo número que aparece na sequência, refere-se à etapa a que a questão pertence. Portanto, a codificação para os Quadros que organizamos no Apêndice N possui as abreviações de Q1.1 a Q10.1. No Apêndice O, organizamos as Questões que estão codificadas da seguinte forma: Q11.2 a Q15.2, correspondendo às questões de número 11 a número 15 e à segunda etapa. Portanto, a codificação para os Quadros que organizamos no Apêndice O possuem as abreviações de Q11.2 a Q15.2.

Para a identificação ágil dos dados – aluno, sua respectiva codificação, número correspondente à linha da transcrição das etapas de 1 a 3 – adotou-se a seguinte codificação: A1.1 – aluno 1, linha 1, e o mesmo critério de codificação foi utilizado para os demais participantes.

Foram respeitadas as ordens das falas dos participantes no decorrer do diálogo, por esse motivo, o número correspondente às linhas não estão em ordem, nem mesmo o número que se refere aos alunos.

3 ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, descrevemos e analisamos as impressões dos participantes da pesquisa quanto aos questionamentos realizados no decorrer das etapas e quanto ao questionário realizado referente à geometria demonstrativa.

As intervenções dos alunos ocorreram de maneira espontânea e foram transcritas e apresentadas nos Quadros que surgirão a seguir.

3.1 RELATO DA PRÁTICA

Para a seção 3.2, organizamos as falas dos depoentes em Quadros descritivos com as intervenções realizadas no contexto didático. Essas intervenções ocorreram em forma de diálogo com a participação dos alunos presentes.

As intervenções ocorreram no início das duas etapas realizadas nos dois primeiros dias de coleta – compondo as quatro primeiras aulas – antes da realização das atividades descritas na seção 3.3.

3.2 QUADROS DESCRITIVOS DAS INTERVENÇÕES REALIZADAS NO CONTEXTO DIDÁTICO

Apresentaremos 15 Quadros, os quais foram transcritos com os relatos dos alunos participantes. Os 10 primeiros Quadros pertencem à primeira etapa e os demais à segunda etapa de nosso procedimento didático.

Nestes Quadros, acomodamos as respostas colhidas no decorrer do diálogo, visto que nem todos os alunos responderam aos questionamentos por não estarem presentes em sala. Para a primeira e segunda etapas – as quais ocorreram no mesmo dia – estavam presentes 25 alunos e, desses, 17 compuseram os Quadros por nós descritos. Dezesseis alunos compuseram os Quadros referentes à primeira etapa e 7 alunos compuseram os Quadros que se referem à segunda etapa. Lembramos que na segunda etapa, como será citado na seção 3.2.2, não demos continuidade à transcrição porque na sequência dos diálogos transcritos, aconteceu a explicação por parte do professor pesquisador referente à classificação dos triângulos e pouca intervenção por parte dos alunos.

3.2.1 Transcrição do Diálogo Referente à Primeira Etapa

Nos Quadros pertencentes à primeira etapa, tivemos os relatos dos participantes, os quais aconteceram sem qualquer intervenção do professor pesquisador e esse apenas direcionava o diálogo com as questões norteadoras.

Citamos as questões norteadoras para a composição de cada Quadro assim como nomeamos cada um deles.

Questão norteadora*:* Alguém aqui sabe me dizer o que é geometria?

Quadro 1 – O que é geometria.

CODIFICAÇÃO	RESPOSTAS OBTIDAS
A14.1 A14.5 A14.6 A14.10	Não. (Acreditamos que este participante tenha inicialmente respondido rapidamente a esta questão, pois depois de algumas intervenções de outros colegas, as respostas por ele atribuídas foram adequadas com a questão e com o que os demais participantes estavam argumentando).[15] Retângulo. Quadrado. Como é aquele negócio difícil de falar? (Com o gesto executado pelo aluno, pudemos entender que se tratava de um paralelepípedo, e foi o que o professor pesquisador respondeu). Raiz quadrada.
A10.2	Figuras geométricas.
A1.3	Matemática das figuras geométricas, ângulos e lados.
A4.4 A4.9	Retângulo. Círculo. Metro quadrado.
A17.7	Área do triângulo.
A11.8	Estuda esse negócio de raio, cúbicos.

O Quadro 1 foi composto com a participação de 6 alunos e incluímos todas as falas transcritas pelos participantes no início da coleta de dados referente à questão norteadora. Notamos que as respostas obtidas se basearam em figuras geométricas, e compreendemos que isso se deva ao conteúdo por eles estudado na disciplina de matemática, como podemos exemplificar com algumas falas: “Figuras geométricas” (A10.2); “Matemática das figuras geométricas, ângulos e lados” (A11.8).

---

[15] Os comentários inseridos entre parênteses nas falas aqui apresentadas e no decorrer deste trabalho referem-se aos comentários do pesquisador.

Questão norteadora: O que a gente usa na geometria?

Quadro 2 – A geometria e seu uso.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A11.11	O que cabe dentro do local. (Esta resposta foi questionada pelo professor pesquisador e o participante explicou melhor nas linhas 12 e 13. Também exemplificou na tentativa de esclarecer o questionamento).
A11.12	Raiz cúbica. Nós pegamos uma caixa d'água e vê o que cabe dentro dela. Por exemplo, uma caixa d'água a gente vê quantos litros cabe dentro dela.
A11.13	É o raio que nós utilizamos nos metros para saber quanto que cabe ali de litro de água.

Para compor este Quadro, tivemos a participação de 1 aluno, e a primeira ressalva que se faz é justamente o fato de apenas 1 aluno ter respondido a este questionamento, fato que surpreendeu o professor pesquisador diante da participação e interação dos alunos. A descrição deste aluno fundamentou-se em torno de algo concreto para ele, pois se referiu à "caixa d'água" para exemplificar o que é usado na geometria.

Questão norteadora: *A caixa d'água é uma forma geométrica?*

Quadro 3 – Forma geométrica

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A14.14	Claro que sim, é quadrada, retangular. (Percebemos que o aluno teve convicção ao responder).
A14.15	Professora, você sabe de tudo por que você fica perguntando para nós? (Aqui percebemos uma indignação do aluno quanto aos questionamentos, mas o professor pesquisador respondeu dizendo que precisava saber justamente o que pensavam sobre o assunto).

Este Quadro também foi composto com a participação de 1 aluno. Mas, observamos que outro participante continuou o raciocínio iniciado pelo colega referente ao questionamento anterior, o qual afirmou ser a caixa d'água uma forma geométrica a qual – muitas vezes – possui a forma de um quadrado ou um retângulo.

Questão norteadora: Onde já ouviram falar de geometria?

Quadro 4 – Falar de geometria.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A14.16 A14.20 A14.23 A14.26	Na aula de matemática. Na geografia também. Na geografia para construir mapas. Na geografia.
A1.17	Na escola.
A5.18	Na sala de aula.
A20.19 A20.22	Em artes. Nas linhas, nas notas, nas partituras, nas claves, nos sustenidos, nos pontos.
A13.21	Na música.
A9.24	Na física.
A4.25	Na química.

Em virtude de dois alunos se mostrarem interessados pelo desenvolvimento do processo, a pergunta investigativa foi reformulada com a finalidade de obter um número maior de participantes, e foi assim que sucedeu. Tivemos 7 alunos participando da composição deste Quadro 4.

Os participantes disseram que a geometria estava nas ciências exatas, na geografia quando se trabalha com mapas, na arte – “Na aula de matemática” (A14.16); “Na geografia também” (A14.20); “Na geografia para construir mapas” (A14.23); “Em artes” (A20.19) – e dois alunos referiram-se à música – (A13.21) e (A20.22). Acreditamos que essa referência tenha justificativa pelo fato de participarem da atividade desenvolvida na escola aos sábados, onde lhes é ofertado o curso de música.

Questão norteadora: *Onde mais a gente já ouviu falar que tem geometria?*

Quadro 5 – E mais geometria.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A14.27 A14.30 A14.32	Na bandeira do Brasil. (Percebemos que o participante visualizou a bandeira e lembrou as formas geométricas que a compõem – um retângulo, um losango e uma circunferência.) Uma sala de aula. Na janela também.
A4.28 A4.31 A4.33	Na construção. Na televisão tem geometria. Na lâmpada.
A10.34	Tem geometria em um monte de lugar, a gente não faz ideia.
A2.29	Na cadeira. (Aqui o participante fez referência ao objeto que, para ele, supostamente tenha o uso da geometria em sua construção.)

Para compor o Quadro 5 tivemos a participação de 3 alunos. Verificamos que a questão aqui é continuidade da anterior, seu objetivo foi o de dar sequência ao raciocínio que estava sendo desenvolvido com os participantes. E, a fala do (A10) – "Tem geometria em um monte de lugar, a gente não faz ideia" – mostra que estavam conseguindo argumentar sobre o assunto, e que estavam conseguindo identificar a presença da geometria em vários lugares.

Questão norteadora: *Construção geométrica? Já ouviram falar?*

Quadro 6 – Construção geométrica.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A5.35 A5.36	Ué... desenhar um quadrado. Como se fôssemos construir um quadrado ou um triângulo.
A10.37	Tudo o que construímos com a geometria.
A20.38	Na música, no traço da partitura.
A14.39 A14.43 A14.44 A14.46	Em todos os lugares. No esquadro. No compasso. Naquele outro assim que eu esqueci... ó ... que é tipo uma bola no meio. (O aluno quando disse: "naquele outro assim" e gesticulou, o professor pesquisador entendeu que era o transferidor e disse o nome do instrumento.)
A11.40 A11.41	Na construção de uma casa. Na construção de uma casa é uma construção geométrica.
A4.42 A4.45 A4.47	Na régua. No apontador. Em várias coisas.
A16.48	Círculo. Globo.
A2.49	Nos desenhos.

Este Quadro contou com o maior número de participantes, pois tivemos a participação de 8 alunos.

Diante das respostas dos participantes, o professor pesquisador resolveu dar sequência àquilo que estavam atribuindo aos objetos geométricos, por isso perguntou sobre “construção geométrica”. A resposta não foi a esperada, mas em todas as respostas dos sujeitos foi possível constatar que continuaram se referindo aos objetos geométricos: “Nos desenhos” (A2.49); “[...] desenhar um quadrado” (A5.35); “Na construção de uma casa é uma construção geométrica” (A11.41).

Quando A2 respondeu “nos desenhos”, o professor pesquisador pediu a ele que mostrasse o desenho que tinha feito e que estava em seu caderno. E o professor pesquisador interrogou os participantes perguntando-lhes: Tem geometria, tem construção geométrica nos desenhos? Porém, não houve resposta para esta indagação e os participantes ficaram em silêncio.

Questão norteadora: Quem é Euclides? Já ouviram falar?

Quadro 7 – Euclides.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A14.50	Euclides da Cunha? (Supostamente o aluno associou ao que estudou e/ou ouviu falar em literatura.)
A20.51 A20.52	Já. Mas não me lembro. No colégio que eu estudava antes eu ouvi falar, mas eu não lembro mais.

O Quadro 7 teve a participação de 2 alunos, e verificamos que esses alunos mostraram desconhecer totalmente o matemático Euclides, apenas um aluno relatou ter ouvido falar dele, mas não se lembrava o que especificamente. O aluno que fez esse comentário estava demonstrando interesse pela atividade que estava sendo desenvolvida. Devemos ressaltar que o único aluno que mostrou ter ouvido falar de Euclides não participou das outras etapas.

Questão norteadora – *Alguém já ouviu falar em demonstração?*

Quadro 8 – Demonstração.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A5.53 A5.55	Já. O trabalho.
A15.54	Demonstrar roupas.
A10.56	Você demonstrar o serviço no trabalho.
A4.57	Demonstra competência.
A14.58	Demonstra qualidade, competência.

Este Quadro foi composto com a participação de 5 alunos e em todas as respostas dos sujeitos foi possível constatar que a demonstração estava associada ao esclarecimento de algo, no qual um produto era demonstrado, uma roupa era apresentada, um trabalho onde o funcionário demonstra a seu patrão que tem competência para executar tal função, mas nenhum deles referiu-se à matemática, como exemplificamos: “Demonstrar roupas” (A15.54); “Você demonstrar o serviço no trabalho” (A10.56); “Demonstra qualidade, competência” (A14.58).

Questão norteadora: *O que é uma demonstração? Na matemática, existe uma demonstração?*

Quadro 9 – Existe demonstração na matemática.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A14.59	Lógico que existe. Demonstra uma pessoa maravilhosa, bonita.
A14.76	Uma pessoa maravilhosa, bonita. (Aqui o aluno repetiu o que tinha dito anteriormente – na linha 59.)
A22.60	Primeiro vem o exemplo. Geralmente quando você vai aprender alguma coisa, primeiro vem um exemplo para depois para ver os exercícios para você fazer.
A22.61	É... primeiro o exemplo para depois te ensinar a fazer.
A22.65	Não. O exemplo é a demonstração.
A22.68	Falei sim.
A22.69	Na construção você faz o projeto, desenha tudo, passa para o computador em 3D para poder demonstrar para depois construir. Faz todo o desenho, vê como vai fazer, para depois ir lá construir, daí constrói.
A22.71	Um desfile a pessoa está demonstrando a roupa.
A20.62	Não.
A20.63	O exemplo já é uma demonstração.
A20.64	Não. Ela disse que o exemplo é... depois vem a demonstração.
A20.66	Então... isso que eu estou falando. O exemplo já é a demonstração.
A20.67	Não. Você não falou isso.
A3.70	Demonstrar uma peça de teatro.
A19.72	Uma propaganda.
A19.74	Demonstrando para vender.
A10.73	Mostra o que você quer vender, na propaganda da televisão.
A10.75	Demonstra uma pessoa bonita.

Notamos que o Quadro 9 contou com uma participação razoável de alunos, pois 6 responderam à questão norteadora.

Diante do que expusemos na explicação da questão anterior, o professor pesquisador percebeu a necessidade de fazer menção à demonstração na matemática. Percebemos que para esta questão, dois alunos tiveram argumentos diferentes, um deles (A22) referiu-se aos livros didáticos que trazem o exemplo com os procedimentos para a realização do exercício que se segue, para ele, essa seria a demonstração. O (A20.63), se posicionou contrário ao colega dizendo que "o exemplo já é uma demonstração".

Talvez justamente por essa divergência de opinião, esta foi a questão que teve mais intervenções. E, mesmo sendo a pergunta sobre demonstração em matemática, alguns responderam do mesmo modo que a pergunta anterior, ou seja, referindo-se a fatos do dia a dia, como podemos observar nas seguintes falas: “Demonstrar uma peça de teatro” (A3.70); “Mostra o que você quer vender, na propaganda da televisão” (A10.73). O próprio aluno que iniciou a arguição sobre os exercícios seguidos pelos exemplos relatou que: “Na construção você faz o projeto, desenha tudo, passa para o computador em 3D para poder demonstrar para depois construir. Faz todo o desenho, vê como vai fazer, para depois ir lá construir, daí constrói” (A22.69) e “um desfile a pessoa está demonstrando a roupa” (A22.71).

Questão norteadora: *O que é uma demonstração matemática?*

Quadro 10 – Demonstração matemática.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A5.77	Contas.
A20.78	O exemplo de uma conta. Tipo... mais... quando eu era pequeno eu não sabia conta de mais, aí me ensinaram. Tipo 1 + 1 é 2. Daí eu aprendi. Foi uma demonstração.
A20.79	A professora pegou 2 lápis e ela fez esse lápis mais esse lápis é igual a 2 lápis.

Percebendo que alguns ainda se referiram à demonstração de forma não direta à matemática, ou seja, com exemplos que não se referiram diretamente à matemática, como pudemos verificar no Quadro 9: “Uma propaganda” (A19.72) e “Demonstrando para vender” (A19.72), a pergunta foi reformulada e dois participantes responderam utilizando-se da matemática. Um apenas disse “contas” (A5.77), e evidenciamos que com o resultado obtido por uma operação matemática, estaria demonstrando os procedimentos de uma demonstração. Outro aluno exemplificou na prática a operação de adição, dizendo que foi desta forma que aprendeu ainda quando criança: “[...] Tipo 1 + 1 é 2. Daí eu aprendi. Foi uma demonstração” (A20.78); “A professora pegou 2 lápis e ela fez esse lápis mais esse lápis é igual a 2 lápis” (A20.79).

Estes 10 Quadros transcritos representam as respostas dos questionamentos realizados. Depois destes questionamentos, o professor pesquisador esclareceu as questões levantadas aqui, conforme consta na seção 2.4 deste trabalho – “Após os questionamentos, ocorreu um diálogo em que foram apresentadas aos alunos algumas informações relevantes como: um breve histórico sobre a geometria grega; um breve histórico sobre a geometria euclidiana; um breve histórico sobre Euclides; comentários sobre *Os Elementos* – mostrando aos alunos a tradução de Irineu Bicudo sobre a referida obra; comentários sobre a importância e conteúdo da obra euclidiana. A intenção aqui foi a de esclarecer aos participantes as questões levantadas e que no primeiro momento tinham ficado sem respostas".

Notamos que destas 10 questões pertencentes à primeira etapa, algumas tiveram mais envolvimento dos alunos do que outras. Ressaltamos que as questões mais respondidas pelos participantes foram as pertencentes aos Quadros 1, 4, 6, 8 e 9. A questão norteadora do Quadro 9: "O que é uma demonstração? Na matemática, existe uma demonstração?" foi a que teve maior intervenção[16] por parte dos alunos. Interpretamos que na questão do Quadro 8 os participantes responderam sobre demonstração e que apenas foi aproveitada a ideia e inserido a matemática no contexto para a resposta da pertencente ao Quadro 9. Porém, notamos que em algumas respostas, a questão com referência à demonstração matemática não foi exatamente respondida, a qual pode ser observada: "Demonstrar uma peça de teatro" (A3.70); "Uma propaganda" (A19.72); "Demonstrando para vender" (A19.72); "Mostra o que você quer vender, na propaganda da televisão" (A10.73); "Demonstra uma pessoa bonita" (A10.75).

Assim também interpretamos a questão norteadora do Quadro 1 juntamente com a do Quadro 4 e a do Quadro 5, pois a primeira refere-se a geometria, a próxima, se já ouviram falar de geometria e na sequência a pergunta deu continuidade ao raciocínio que estava sendo desenvolvido pelos participantes.

Quanto à questão norteadora do Quadro 6 acreditamos que teve considerável participação, seu questionamento referiu-se à construção geométrica, e se eles – os participantes – já tinham ouvido falar. Compreendemos que foi sendo construído um raciocínio com as perguntas e respostas dos participantes, fazendo com que se envolvessem com a atividade proposta.

Entretanto, em algumas questões percebemos menor participação dos alunos, como é o caso das pertencentes ao Quadro 2, 3, 7 e 10. Notamos que quando lhes foi perguntado sobre o que se usa na geometria e o professor pesquisador deu sequência a esta pergunta, a partir da resposta obtida pelo único aluno formulou a pertencente ao Quadro 3, novamente apenas um aluno argumentou o que estava sendo questionado. Para a questão do Quadro 7,

---

[16] O que aqui chamamos de "intervenção" se refere a cada uma das linhas transcritas com as falas dos participantes.

evidenciamos que poucos alunos se envolveram para respondê-la porque desconheciam a pessoa de Euclides.

E quanto à questão do Quadro 10, quando lhes foi perguntado especificamente sobre a demonstração na matemática e não como na questão anterior, a qual responderam sobre demonstração de modo geral, apenas dois alunos responderam, mas notamos ainda que apenas um participante exemplificou o que ele entendia como sendo a demonstração matemática, como podemos verificar em sua fala: “O exemplo de uma conta. Tipo... mais... quando eu era pequeno eu não sabia conta de mais, aí me ensinaram. Tipo 1 + 1 é 2. Daí eu aprendi. Foi uma demonstração” (A20.78) e “A professora pegou 2 lápis e ela fez esse lápis mais esse lápis é igual a 2 lápis” (A20.79).

3.2.2 Transcrição do Diálogo Referente à Segunda Etapa

A segunda etapa, composta pelas aulas 3 e 4, iniciou-se com uma retomada das falas exemplificadas nestes 10 Quadros anteriores – o que se verifica nos três primeiros Quadros apresentados a seguir. Neste momento, os alunos já tinham realizado a atividade 1 – representada pelas figuras de 3 a 7, seção 3.3.1 deste trabalho. Os outros dois Quadros mostram as questões em que foram tratadas brevemente sobre a classificação dos triângulos. A continuidade desta transcrição não foi por nós retratada pelo fato de se tratar mais da explicação do professor pesquisador e da pouca intervenção dos participantes.

Questão norteadora – *O que é geometria? Alguém lembra?*

Quadro 11 – Recordando o que é geometria.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A1.80	Figuras geométricas.
A21.81	Figuras geométricas. É tudo, em tudo que vemos tem geometria.
A10.82	Onde usamos a geometria. Uma construção geométrica. (Compreendemos que o participante tenha se referido a outros pontos comentados sobre a geometria.)

Para compor o Quadro 11 tivemos a participação de 3 alunos. Em todas as respostas dos sujeitos foi possível constatar a forte influência da “figura geométrica" e a utilização de régua e compasso quando se referem à construção geométrica.

Questão norteadora – *O que é uma construção geométrica? Lembram que falamos isso?*

Quadro 12 – Recordando o que é construção geométrica.

ALUNOS	RESPOSTA OBTIDA
A11.83 A11.85	É construir uma figura geométrica. Precisamos de algum material geométrico.
A1.84 A1.86	Precisamos de régua. Precisamos de régua, compasso, transferidor, aquela régua triangular (Quando o depoente se referiu à "régua triangular", o professor pesquisador esclareceu dizendo o nome do instrumento geométrico – esquadro).
A5.87	Esquadro.

Aqui verificamos a participação de 3 alunos. E também que este Quadro repete o que foi perguntado no Quadro 6, e percebemos que os alunos continuam se referindo à figura geométrica e ao material geométrico para argumentar sobre construção geométrica, o que podemos verificar nas seguintes falas: "É construir uma figura geométrica" (A11.83) e "Precisamos de algum material geométrico" (A11.85).

Questão norteadora – *Quem é Euclides, lembram o que falamos?*

Quadro 13 – Recordando quem é Euclides.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A10.88 A10.92	Foi ele quem iniciou a geometria. Ele escreveu aquele livro.
A11.89 A11.90	Ele nasceu em um país e viveu em outro. (Foi esclarecido para o aluno que essas informações podem não ser verídicas, o que se confirma pelo próprio aluno na fala seguinte quando diz: "Não se sabe".) Não se sabe quando e onde ele morreu.
A5.91	Ele escreveu vários livros.
A21.93	Ele fez a matemática por causa das marcações de terra, por causa das enchentes do Rio Nilo.
A22.94	Ele viveu aproximadamente 300 a.C.

Este Quadro contou com a participação de 5 alunos. E, podemos comparar as respostas aqui encontradas com as do Quadro 7 – em que apenas um aluno disse ter ouvido falar de Euclides – percebendo que realmente a ideia passada pelo professor pesquisador foi recebida pelos alunos, e isso pode ser em parte pelo fato de termos apresentado o livro e mostrado a importância deste matemático para a ciência. Cada uma das falas inseridas neste Quadro 13 corresponde a um pouco do que lhes foi transmitido.

Questão norteadora – *O que é um triângulo equilátero?*

Quadro 14 – Triângulo eqüilátero.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A1.95	Tem 3 lados.
A21.96	Tem todos os ângulos iguais.
A22.97	Os ângulos são iguais.

Para compor este Quadro 14 tivemos a participação de 3 alunos, os quais supostamente lembraram do triângulo em tela, pois se referiram aos lados e aos ângulos.

Questão norteadora – *Quem me diz qual será a medida de cada um desses ângulos?*

Quadro 15 – Medida dos ângulos de um triângulo equilátero.

ALUNOS	RESPOSTAS OBTIDAS
A22.98 A22.101	120º. Não. 90º cada lado.
A17.99 A17.100	180º. 180º é a soma dos três lados.
A5.102	Não é 60º? Porque são três vezes para dar 180º.

O Quadro 15 também foi composto com a participação de 3 alunos.

No momento em que foi formulada a questão do Quadro 15, o professor pesquisador se referia aos ângulos internos do triângulo equilátero e os alunos já tinham realizado a atividade 1, atividade essa que necessitava de algum conhecimento sobre o referido triângulo.

Apenas um aluno respondeu corretamente à questão: “Não é 60º? Porque são três vezes para dar 180º” (A5.102).

Com este questionamento, deu-se sequência a outros esclarecimentos pertinentes à classificação dos triângulos quanto a seus lados e ângulos e inclusive quanto à soma dos ângulos internos de qualquer triângulo.

3.3 Exemplificação e Breve Análise das Atividades 1 e 2 Realizadas pelos Participantes na Terceira Etapa

Nesta seção exemplificaremos a primeira atividade desenvolvida pelos participantes, e faremos uma breve análise das atividades expostas. Essa atividade ocorreu depois da transcrição do diálogo realizado no contexto didático descrito nas seções 3.2.1 e 3.2.2.

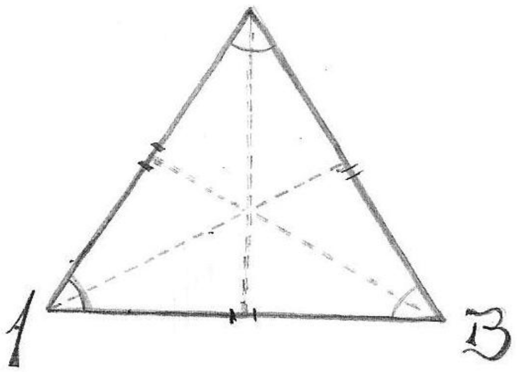
Lembramos que, como já descrito anteriormente, o objetivo aqui foi verificar como os alunos resolveriam o que lhes estava sendo sugerido. E, detalhes do modo como foi realizada esta atividade encontra-se descrita na seção 2.4.

3.3.1 Atividade 1

A exemplificação desta atividade, assim como as demais, se deu aleatoriamente, ou seja, as atividades resolvidas pelos participantes foram escolhidas independentemente de qual aluno se tratava ou do que ele tinha realizado.

Figura 3 – Atividade 1 – realizada pelo participante A2.

Construir um triângulo equilátero dado um de seus lados.



FIZ AS MESMAS MEDIDAS DE CADA LINHA, NA PRIMEIRA LINHA FIZ O CENTRO E PUXEI UMA LINHA PONTILHA PRA CIMA PARA ACERTAR A PONTA DO TRIANGULO

Nota-se que em função do desenho e do que o participante descreveu para realizar essa atividade, ele tentou demonstrar a construção do triângulo equilátero e interpretamos que tenha utilizado os seguintes passos: traçou uma reta de A até B com a medida escolhida por ele, encontrou a medida central dessa reta e a prolongou verticalmente. Partindo do ponto A utilizou a mesma medida escolhida, traçou outra reta que encontrasse a tracejada. Utilizou o mesmo processo com o ponto B.

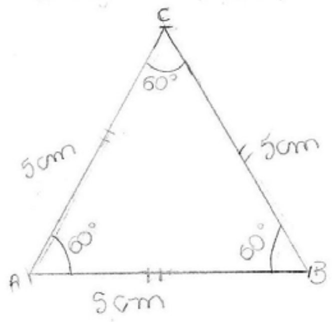
Figura 4 – Atividade 1 – realizada pelo participante A10.

Construir um triângulo equilátero dado um de seus lados.

Dado um lado do triângulo como informação é só utilizar um material para medir como uma regua, e fazer mais dois lados com a mesma medida os três lados, pois o nome equilátero é dado para todos triângulo cujo tem lados iguais.

DEMONSTRAÇÃO..

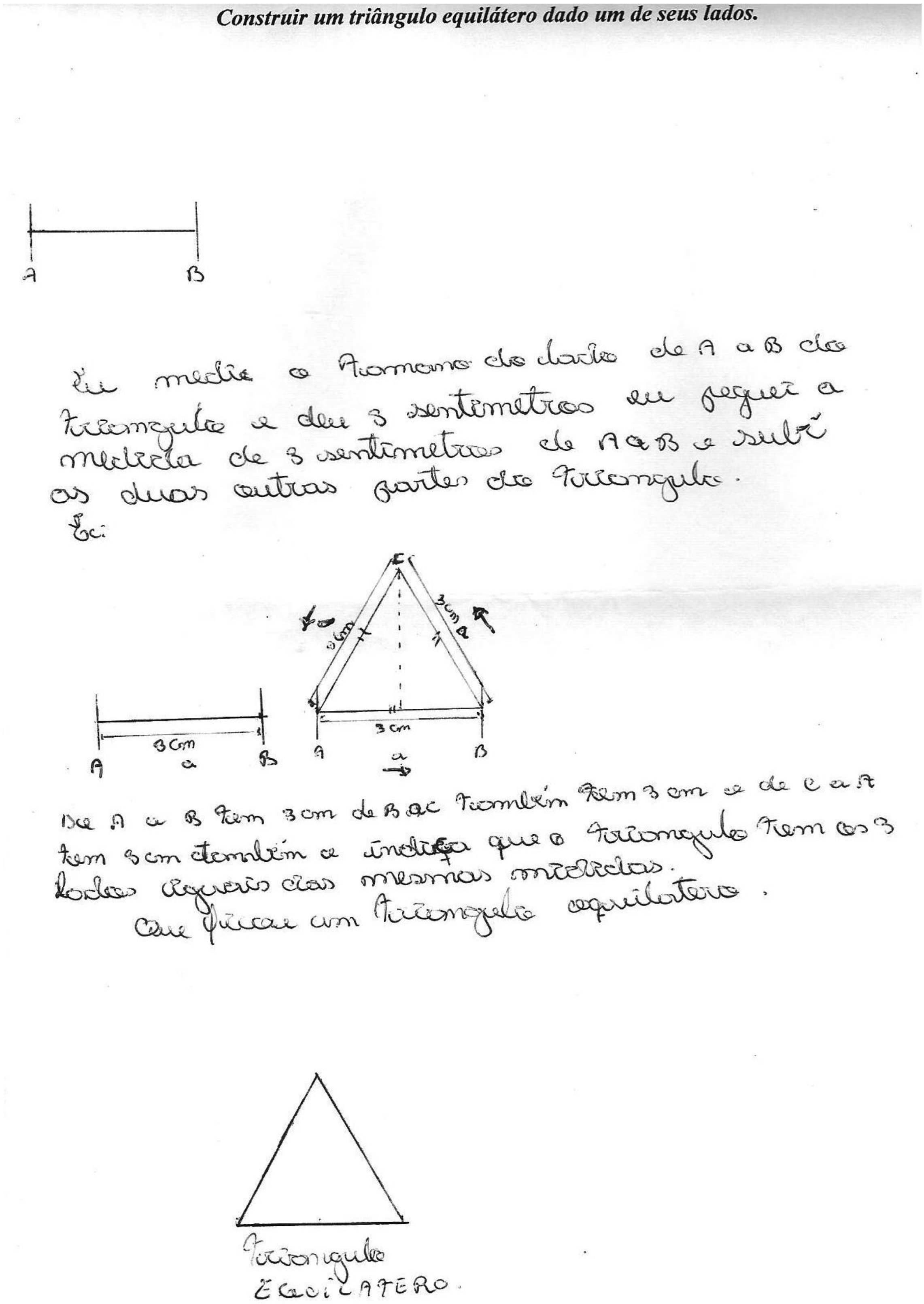
triângulo equilátero...



Eu determine um lado do meu triângulo de A ao B, tem uma distância de 5cm então com uma regua eu medi mais 2 lados até o centro no alto chamado C então obtive um triângulo equilátero.

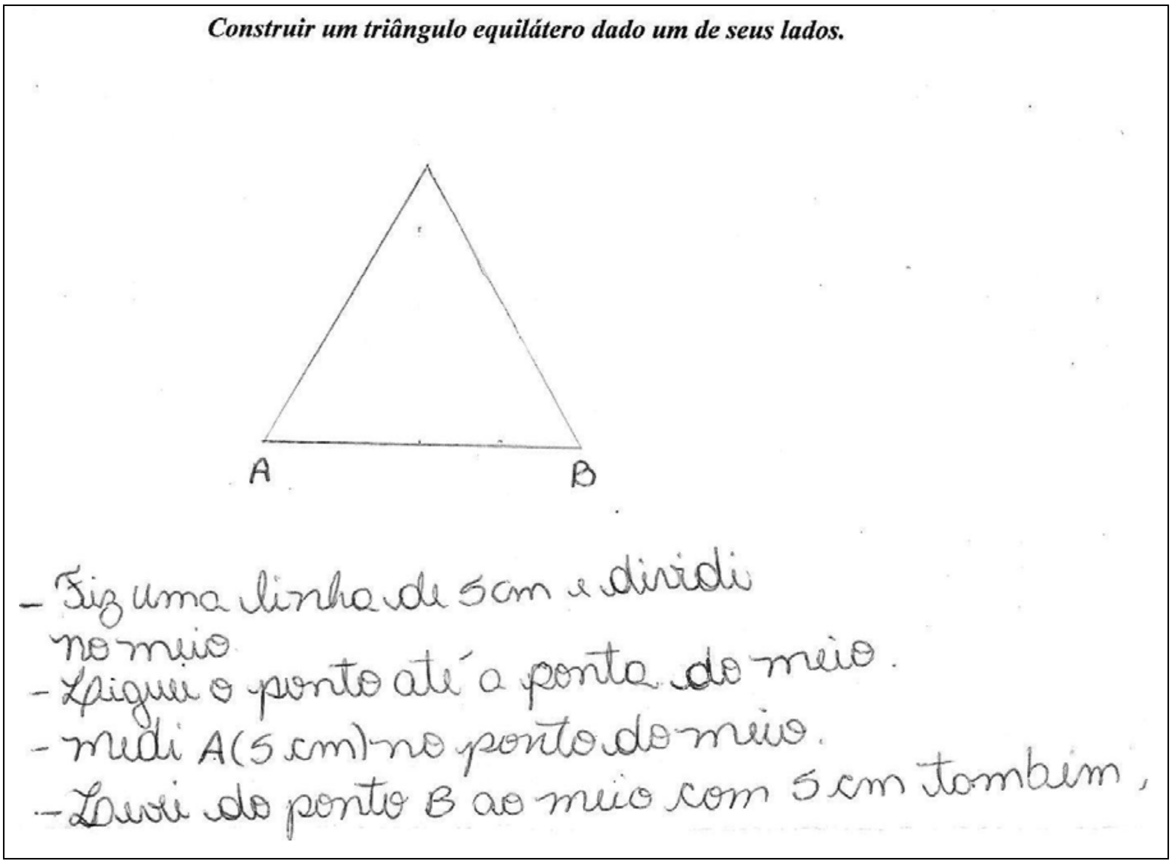
Para a realização dessa atividade, também em função do desenho e do que detalhou, entende-se que o participante especifica em sua explicação a utilização do material geométrico e também se refere ao triângulo assim como o descreve tentando corresponder ao que lhe fora proposto. Acredita-se que tenha tentado demonstrar a construção do triângulo eqüilátero.

Figura 5 – Atividade 1 – realizada pelo participante A11.



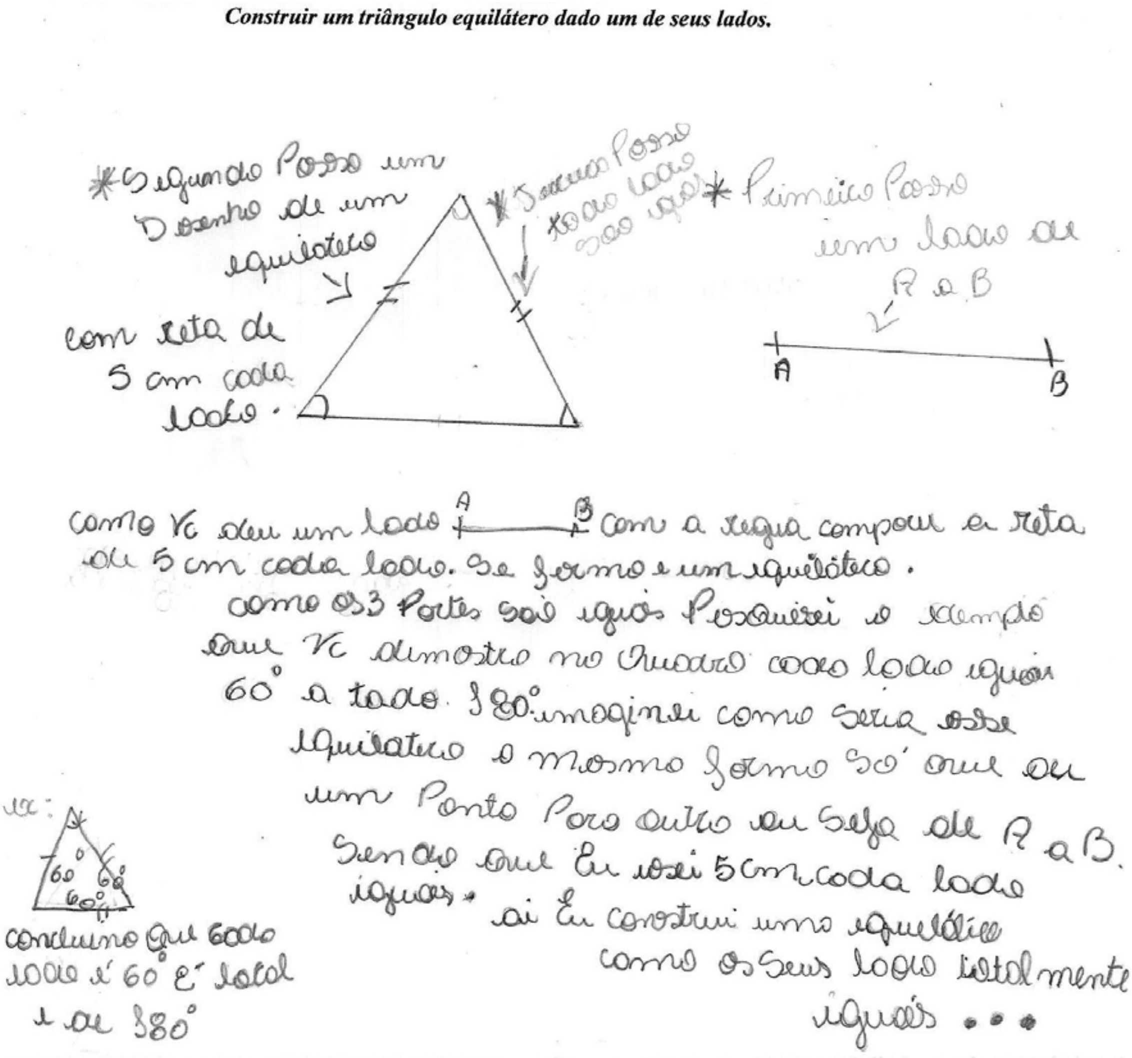
Com referência à Figura 5, supõe-se que o participante tenha realizado esta atividade tentando demonstrar minuciosamente descrevendo os passos utilizados, com a finalidade de atingir o que lhe foi proposto. Para tal, utilizou-se do lado dado e acredita-se que também tenha empregado a tentativa para a realização da atividade.

Figura 6 – Atividade 1 – realizada pelo participante A19.



Acredita-se que o participante para realizar esta atividade tenha desenvolvido o mesmo procedimento do participante exemplificado anteriormente – tentativa. Mas, mesmo se utilizando desse processo, o participante descreve os passos por ele realizados.

Figura 7 – Atividade 1 – realizada pelo participante A23.



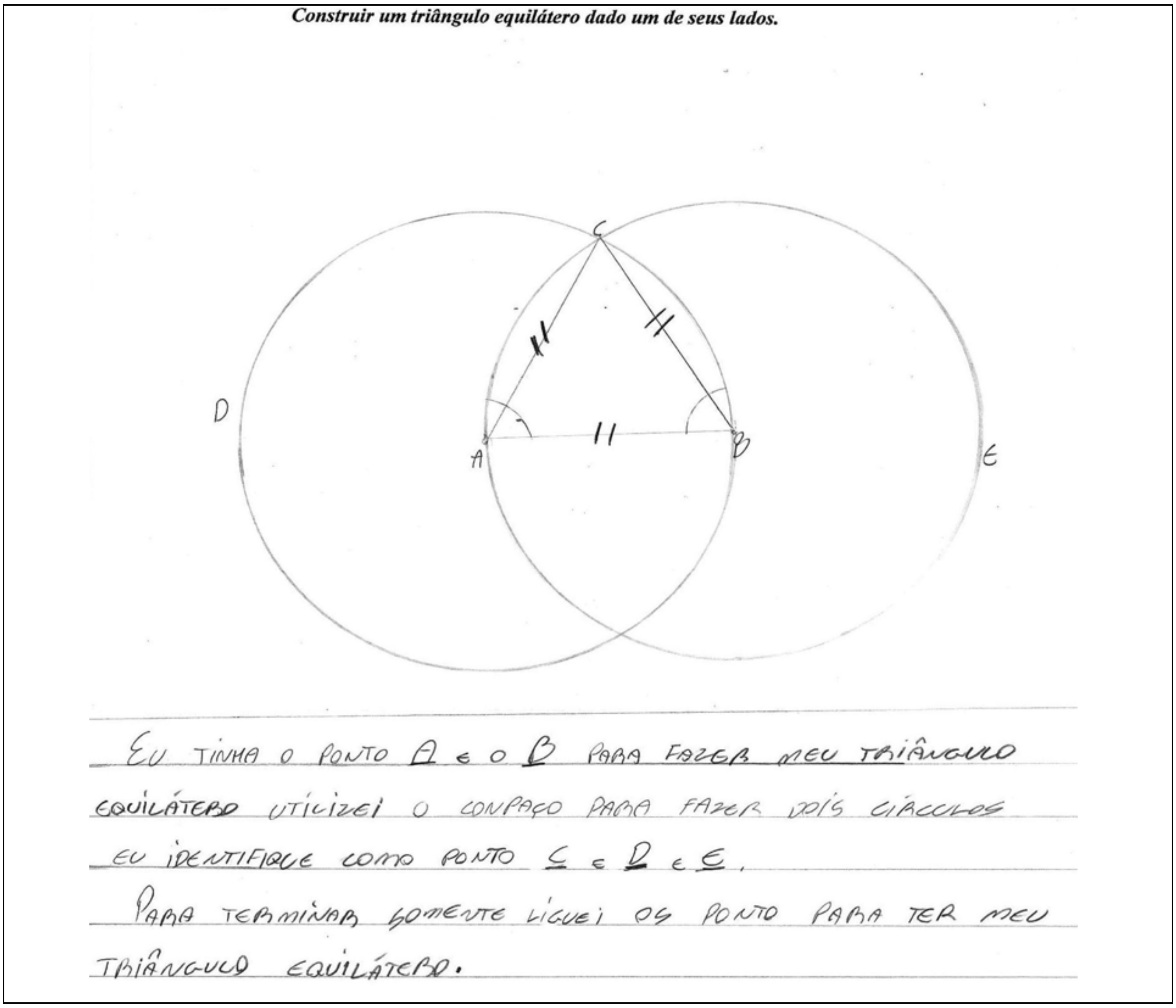
Para a realização desta atividade, acredita-se que o depoente tenha se esforçado para descrever minuciosamente todos os passos imaginados na realização da atividade. Porém, crê-se que embora tentando exemplificar o que estava realizando, utilizou-se do mesmo procedimento dos participantes já exemplificados anteriormente.

Para realizar estas atividades por nós exemplificadas – compondo a seção 3.3.1 – compreendemos que os participantes, independente da maneira como responderam, tenham se esforçado para realizar o que estava sendo solicitado: *Construir um triângulo equilátero dado um de seus lados*.

3.3.2 Atividade 2

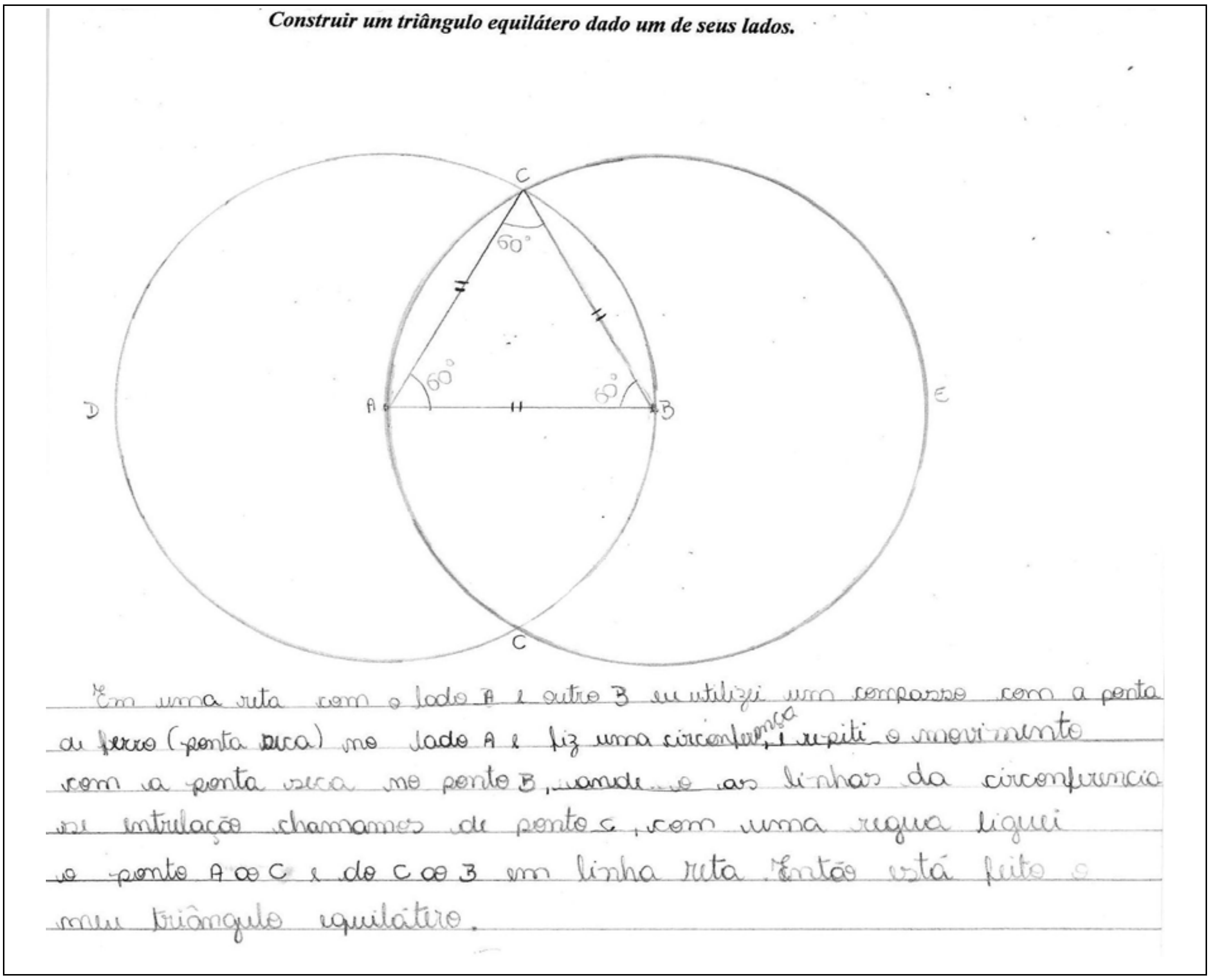
Para exemplificar a atividade realizada pelos participantes, apresentamos na sequência alguns exemplos escolhidos aleatoriamente com seus respectivos comentários.

Figura 8 – Atividade 2 – realizada pelo participante A5.



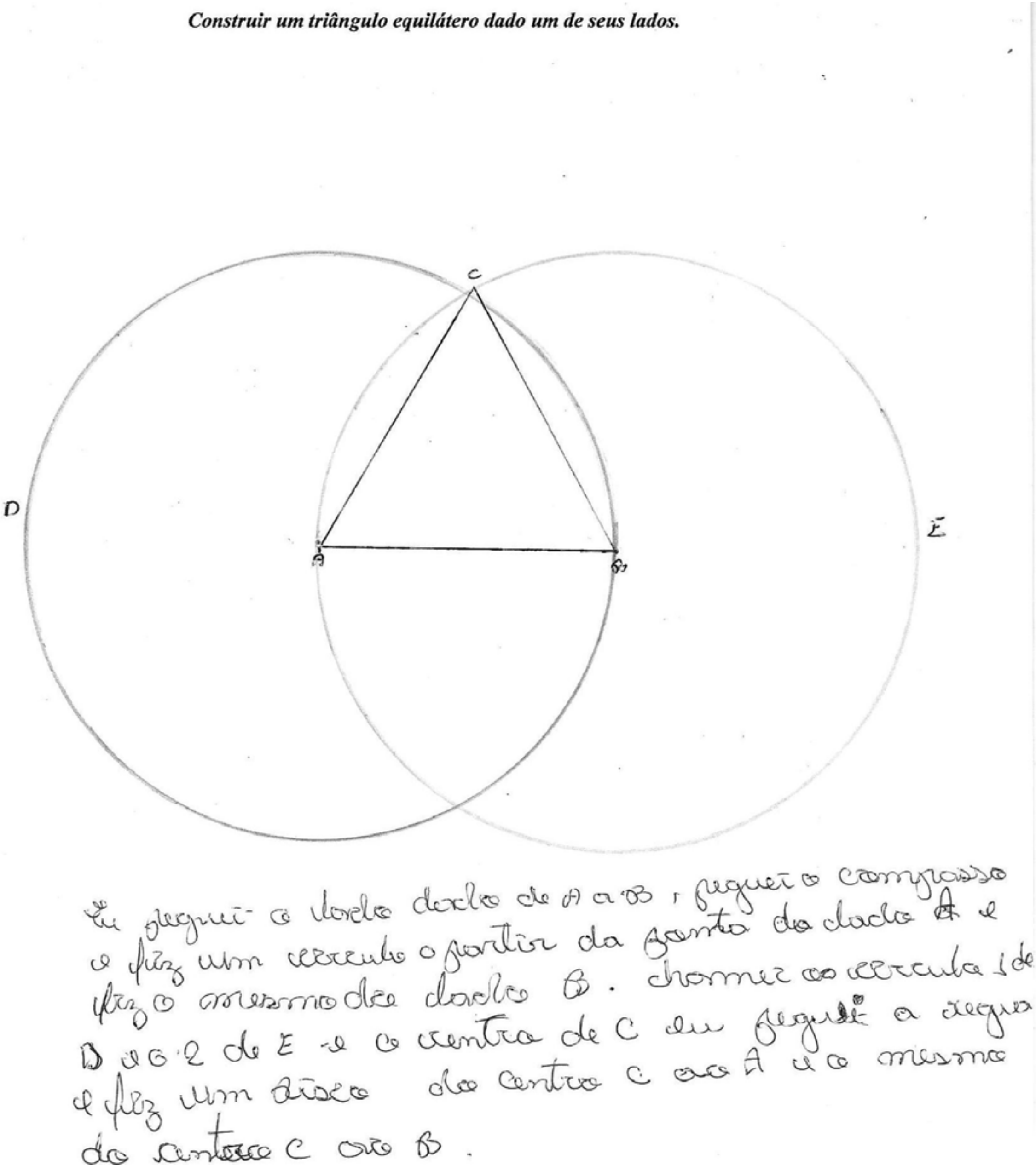
Para a realização desta atividade, verifica-se que o aluno fez uso do material geométrico e seguiu os procedimentos exemplificados pelo professor pesquisador, que era para descrever os passos utilizados, e o depoente tentou explicá-lo.

Figura 9 – Atividade 2 – realizada pelo participante A10.



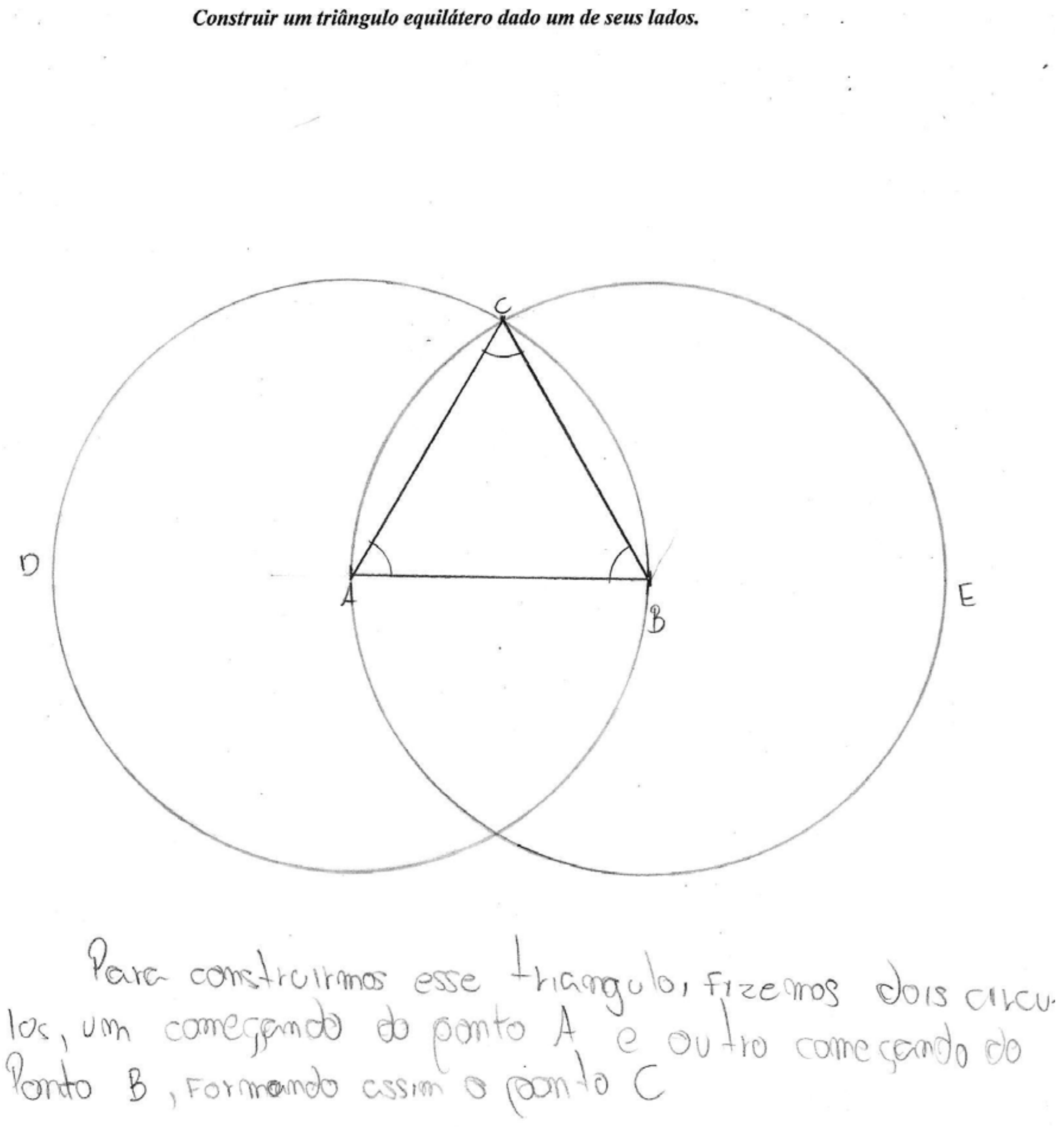
Para a realização desta atividade, mesmo o aluno explicando alguns detalhes quanto ao material geométrico, acredita-se que tenha se utilizado também dos procedimentos exemplificados pelo professor pesquisador.

Figura 10 – Atividade 2 – realizada pelo participante A11.



Para a compreensão desta explicação, entende-se que o procedimento utilizado seja o mesmo descrito anteriormente, mesmo o depoente utilizando-se de uma escrita diferente da dos participantes anteriormente exemplificados.

Figura 11 – Atividade 2 – realizada pelo participante A21.



Em função do desenho, acredita-se que o aluno tenha pensado em conformidade com o que o professor pesquisador representou quando demonstrou essa construção na lousa. Acredita-se que o aluno tinha ciência do ponto de partida – lado AB – mesmo não o tendo descrito.

Para realizar estas atividades por nós exemplificadas – compondo a seção 3.3.2 – interpretamos que os participantes, independente da maneira como responderam, tenham se esforçado para realizar o que estava sendo solicitado: *Construir um triângulo equilátero dado um de seus lados,* e que aqui, a realização desta atividade foi diferente das que integram a seção anterior pelo fato de o professor pesquisador ter demonstrado na lousa, com o auxílio de compasso e régua, a *Proposição I* que consta no livro *Os Elementos* de Euclides.

3.4 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO APLICADO NO CONTEXTO DIDÁTICO

Para a finalização da coleta de dados, aplicou-se aos participantes um questionário contendo seis questões com o objetivo de compreender as percepções que esse grupo de alunos teve em relação ao método demonstrativo euclidiano que lhes foi apresentado.

Desta forma, para explorar o material, realizamos uma leitura cuidadosa das respostas, considerando o possível sentido em relação ao contexto de cada uma delas, assim como as semelhanças encontradas nos significados das palavras ou expressões, sintetizando-as em categorias.

O questionário foi elaborado com as seguintes perguntas:

1. Você entendeu a demonstração de Euclides?
2. O que você acha desse método?
3. Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma de Euclides?
4. Quais elementos da demonstração de Euclides você utilizou na sua construção?
5. Você consegue ler e compreender o que Euclides fez?
6. Esta demonstração de Euclides faz algum sentido para você?

Compondo o questionário aplicado aos participantes, temos a segunda pergunta investigativa “O que você acha desse método de Euclides?” – poderá ser verificada na seção 3.8 –, na qual quando nos referimos ao “método de Euclides” estamos nos referindo à descrição da demonstração realizada por Euclides apresentada aos participantes na terceira atividade na quarta etapa.

Para a terceira pergunta investigativa “Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma de Euclides?” – verificada na seção 3.9 –, utilizamos a palavra “forma de Euclides” querendo nos referir à demonstração euclidiana.

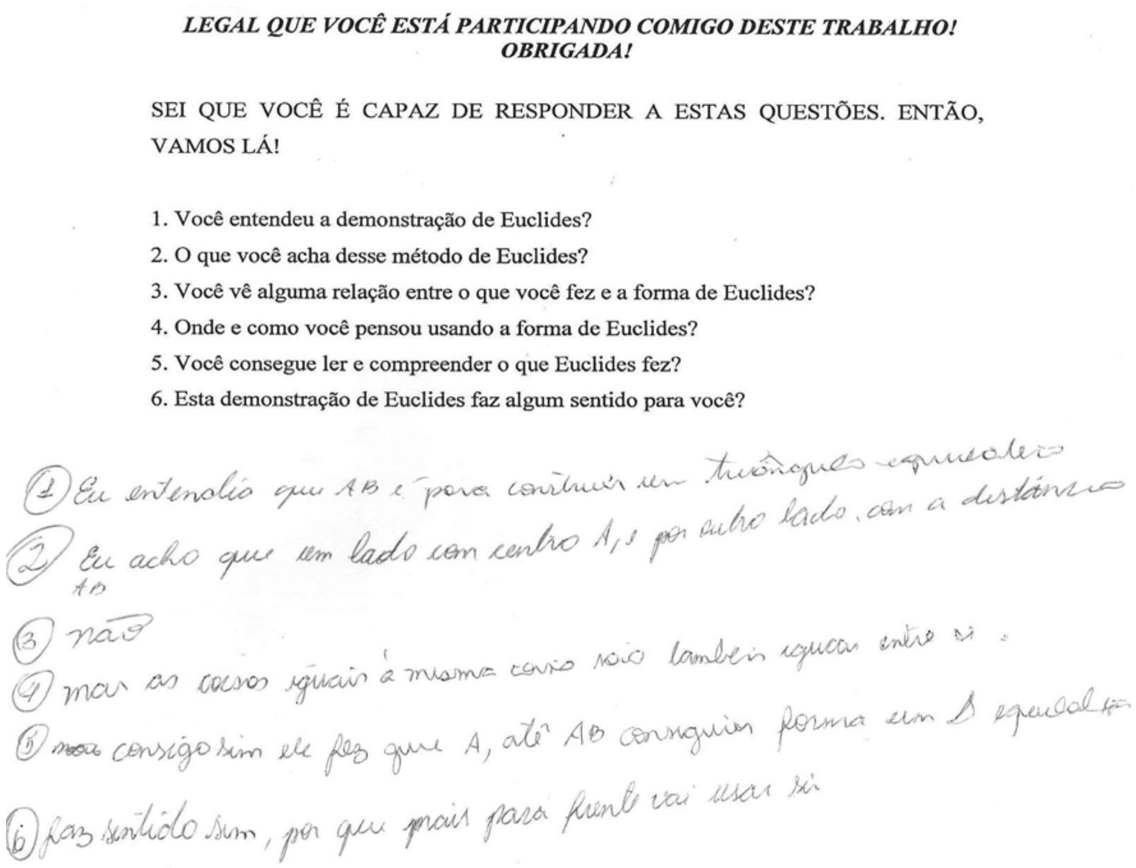
Para a quinta pergunta investigativa “Você consegue ler e compreender o que Euclides fez?”, quando mencionamos “ler e compreender o que Euclides fez” nos referimos à demonstração realizada por Euclides e que foi apresentada aos participantes na quarta etapa do trabalho desenvolvido com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Com a sexta pergunta investigativa “Esta demonstração de Euclides fez algum sentido para você?”, quisemos saber do depoente se a *Proposição I* demonstrada por Euclides mostrou-se coerente para seu entendimento.

3.5 EXEMPLIFICAÇÃO DA TERCEIRA ATIVIDADE – QUESTIONÁRIO – RESPONDIDA PELOS PARTICIPANTES NA QUARTA ETAPA DO CONTEXTO DIDÁTICO

A seguir, exemplificamos (com as Figuras 12, 13 e 14) a quarta etapa com a terceira atividade desenvolvida pelos participantes – digitalizamos apenas a folha em que os participantes responderam às referidas questões, excluindo seus respectivos nomes. Sua transcrição e breve análise encontram-se na seção 3.7 a 3.12.1 deste trabalho.

Figura 12 – Atividade 3 – realizada pelo participante A15.



LEGAL QUE VOCÊ ESTÁ PARTICIPANDO COMIGO DESTE TRABALHO! OBRIGADA!

SEI QUE VOCÊ É CAPAZ DE RESPONDER A ESTAS QUESTÕES. ENTÃO, VAMOS LÁ!

1. Você entendeu a demonstração de Euclides?
2. O que você acha desse método de Euclides?
3. Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma de Euclides?
4. Onde e como você pensou usando a forma de Euclides?
5. Você consegue ler e compreender o que Euclides fez?
6. Esta demonstração de Euclides faz algum sentido para você?

(1) Eu entendio que AB é para contruir um triângulo equilatero

(2) Eu acho que um lado com centro A, e por outro lado, com a distância AB

(3) não

(4) mas os casos iguais à mesma como raio também iguais entre si.

(5) ~~nao~~ consigo sim ele fez que A, até AB conseguir forma um Δ equilátero

(6) faz sentido sim, por que mais para frente vai usar si

Figura 13 – Atividade 3 – realizada pelo participante A5.

LEGAL QUE VOCÊ ESTÁ PARTICIPANDO COMIGO DESTE TRABALHO! OBRIGADA!

SEI QUE VOCÊ É CAPAZ DE RESPONDER A ESTAS QUESTÕES. ENTÃO, VAMOS LÁ!

1. Você entendeu a demonstração de Euclides?
2. O que você acha desse método de Euclides?
3. Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma de Euclides?
4. Onde e como você pensou usando a forma de Euclides? OS PONTOS
5. Você consegue ler e compreender o que Euclides fez?
6. Esta demonstração de Euclides faz algum sentido para você?

1 = SIM. PORQUE ELE TEVE QUE ESTUDAR MUITO PARA DEMOSTRAR COMO SE MONTA O TRIÂNGULO EQUILATERO.

2 = ACHEI MUITO INTERESANTE PORQUE ELE DEU UMA DEMONSTRAÇÃO DE COMO SE FAIS O TRIÂNGULO EQUILÁTERO

3 = SIM. PORQUE USANDO A FORMA DE EUCLIDES EU CONTRUI O TRIÂNGULO EQUILATERO COM MUITA FACILIDADE. CONFEÇO SE NÃO TIVESSE O PONTO A E B NÃO SERIA TÃO FACIO NÃO.

4 = COM OS PONTOS DADO EU PENSEI LIGANDO OS PONTOS CONSTRUIREI O MEU TRIÂNGULO EQUILATERO

5 = POSSO ATÉ ENTENDER MAIS PREFIRO DEIXAR PARA ELE MESMO.

6 = FAIS. COMO SE FOSSE OS PONTOS DADO E SENDO MEDIDO AS LATERAIS COM A MESMA MEDIDA. COM CERTEZA TEREI MEU TRIÂNGULO EQUILÁTERO.

Figura 14 – Atividade 3 – realizada pelo participante A10.

LEGAL QUE VOCÊ ESTÁ PARTICIPANDO COMIGO DESTE TRABALHO! OBRIGADA!

SEI QUE VOCÊ É CAPAZ DE RESPONDER A ESTAS QUESTÕES. ENTÃO, VAMOS LÁ!

1. **Você entendeu a demonstração de Euclides?**
2. **O que você acha desse método de Euclides?**
3. **Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma de Euclides?**
4. **Onde e como você pensou usando a forma de Euclides?**
5. **Você consegue ler e compreender o que Euclides fez?**
6. **Esta demonstração de Euclides faz algum sentido para você?**

Respostas:

1→ Sim olhando o desenho do triangulo e as letras quando lemos a demonstração fica fácil de intender.

2→ Um pouco complicado de intender mais temos menos chance de errar nas medidas.

3→ tudo a unica diferença é que a figura esta na prática e a demonstração está na teoria.

4→ Eu só usei a forma de Euclides em aula, eu achei que como ele explica tudo é bem detalhado lendo com um pouco de paciência e atenção fica fácil de entender.

5→ Sim tenho um pouco de dificuldade mas consigo entender.

6→ Sim ele explica todos os passos que usamos para construir um triângulo equilátero, que nos dias de hoje com todo nosso desenvolvimento é fácil de compriender mas no tempo que ele vivel é necessário todo os detalhis para tentar compriender.

Para compor esta seção, escolhemos aleatoriamente três folhas dos participantes que realizaram a terceira atividade.

Notamos que nas três folhas exemplificadas os alunos responderam todas as questões solicitadas.

3.6 Codificação Utilizada para Compor a Compreensão do Questionário

Quanto ao questionário, a identificação dos dados – categoria e subcategoria – adotou-se a seguinte codificação: 1.1 – 1ª questão, 1ª categoria; 1.1.1 – 1ª questão, 1ª categoria, 1ª subcategoria; 1.1.2 – 1ª questão; 1ª categoria, 2ª subcategoria; 1.2.1 – 1ª questão, 2ª categoria, 1ª subcategoria; 1.2.2 – 1ª questão, 2ª categoria, 2ª subcategoria; 2.1 – 2ª questão, 1ª categoria; 2.1.1 – 2ª questão, 1ª categoria, 1ª subcategoria; 2.2.1 – 2ª questão, 2ª categoria, 1ª subcategoria; 2.2.2 – 2ª questão, 2ª categoria, 2ª subcategoria; e assim sucessivamente. Isso significa que o primeiro número refere-se à questão, o segundo à categoria e o terceiro número da sequência refere-se à subcategoria.

Para cada argumentação dos depoentes às respostas apresentadas, realizou-se a determinação de unidades de análise e, em momento posterior, a categorização. Desse movimento interpretativo surgiram 4 categorias e 2 subcategorias na segunda acomodação para a primeira questão norteadora; 4 categorias na terceira acomodação para a segunda questão; 3 categorias e 5 subcategorias na segunda acomodação para a terceira questão; 5 categorias na segunda acomodação para a quarta questão; 3 categorias e 5 subcategorias na segunda acomodação para a quinta questão; 3 categorias e 6 subcategorias na segunda acomodação para a sexta e última questão.

Na sequência, cada categoria está exemplificada por meio da apresentação das respostas e das considerações abstraídas nesta etapa investigativa, constituindo assim o metatexto, e, para tal, consideramos sempre a última acomodação por nós realizada para cada uma das seis questões. Por se tratar de um processo de acomodação cíclico proporcionado pela análise textual discursiva, somente após uma terceira leitura, em alguns contextos, é que se conseguiu abstrair tais considerações.

3.7 Quadro com as Unidades de Registro Referentes à Primeira Pergunta Investigativa

Nos Quadros que seguem, colocamos as respectivas perguntas investigativas e a transcrição das respostas obtidas pelos 21 participantes.

Registramos aqui a ordem numérica que foi atribuída a cada participante que respondeu aos seis questionamentos, lembrando que esta numeração se deu aleatoriamente e que a letra A corresponde a Aluno e o número que acompanha a letra corresponde ao referido aluno.

O objetivo desta pergunta investigativa foi compreender as percepções dos alunos quanto à demonstração realizada por Euclides.

Pergunta investigativa: *Você entendeu a demonstração de Euclides?*

Quadro 16 – Demonstração euclidiana.

CÓDIGO	UNIDADE DE REGISTRO
A1	Sim, porque além de demonstrar ele também explica.
A2	Sim, lendo e observando a imagem.
A3	Sim. Euclides demonstrou muito bem a formação do triângulo equilátero.
A4	Sim, porque a professora explicou muito bem como fazer.
A5	Sim, porque ele teve que estudar muito para demonstrar como se monta o triângulo equilátero.
A6	Sim.
A7	Sim, eu entendi porque ele demonstra como usar os círculos, os pontos, as letras.
A8	Bom, Euclides foi um verdadeiro mestre da matemática como se fala, o pai da matemática.
A10	Sim, olhando o desenho do triângulo e as letras, quando lemos a demonstração fica fácil de entender.
A11	Sim. Porque a professora [...] nos explicou o método de que é pegar o todo dado de A a B fazer dois círculos com a ponta seca do compasso em cada um dos centros, o centro C fica entre os dois círculos. Eu fiz duas linhas, uma do centro C ao centro A e outra do centro C ao centro B, aí temos um triângulo equilátero.
A12	Eu entendi que Euclides naquela época ele era inteligente para saber tantas coisas e escrever um livro muito bom e fácil de entender.
A13	Sim.
A15	Eu entendi que AB é para construir um triângulo equilátero.
A18	Sim.
A19	Na folha não, no quadro sim. (Interpretamos que o depoente tenha se referido à construção realizada na lousa pelo professor pesquisador, e quando diz “na folha” é porque está se referindo à demonstração euclidiana.)
A22	Sim, pois ele mostra passo a passo o que ele fez para formar um triângulo equilátero e provou que todos os lados são iguais.
A23	Eu entendi a demonstração de Euclides descrita. Por um lado A por outro lado que o equilátero e coisas iguais a mesma coisa entre si. Por exemplo: em circunferência ao círculo temos a linha reta e os três lados iguais, formando um triângulo equilátero. (Transcrevemos como o aluno indicou, porém não conseguimos interpretar o exemplo por ele citado.)
A24	Sim.
A25	Sim
A26	Sim
A27	Sim, eu entendi que a forma que ele fez é mais fácil para construir a figura.

Neste Quadro encontramos as mais variadas respostas, mas nenhum aluno respondeu que não tinha entendido a demonstração de Euclides.

Compreendemos com isso que, mesmo o participante se referindo a ter entendido o que o professor pesquisador desenvolveu na lousa, e não o que lhes foi apresentado no papel (que foi a demonstração euclidiana), como foi a fala do A19: “Na folha não, no quadro sim”, ele assume que entendeu o que lhe foi perguntado.

Notamos que dois alunos – A11 e A23 – exemplificaram suas respostas, desta forma, evidenciamos que além de entender, o participante quis mostrar que realmente tinha entendido, mesmo sendo relatado por nós que não conseguimos interpretar o exemplo dado pelo A23.

Observamos que dos 21 alunos participantes, 6 deles responderam “sim” à referida pergunta.

Achamos por bem explicar que na fala do A11 foi omitido o nome do professor pesquisador, por isso aparecem reticências entre colchetes.

3.7.1 Acomodações[17] Utilizadas para Compor a Análise da Primeira Pergunta Investigativa

Da interpretação e análise apresentada no Quadro anterior (Quadro 16), emergiram quatro categorias. A primeira categoria foi por nós classificada como “Remissão a Euclides” e teve duas subcategorias: “Remissão a Euclides em relação à construção em específico” e “Remissão à pessoa de Euclides”.

A segunda categoria foi denominada: “Remissão ao professor pesquisador” e não organizamos subcategorias. O mesmo aconteceu com a terceira – “Remissão ao método utilizado pelo aluno no desenvolvimento da atividade” e com a quarta categoria – “Dados quantitativos, ou seja, alunos que disseram apenas “sim” ao questionamento”.

Organizamos a primeira categoria – “Remissão a Euclides” – de modo a acomodar os depoimentos que se referem a Euclides e sua primeira subcategoria acomodou as respostas que se referiram à demonstração de Euclides, fazendo parte os depoimentos: A1, A3, A7, A22, A23 e A27. Na segunda subcategoria foram acomodadas as respostas que remeteram à pessoa do matemático, como foi o caso dos alunos: A5, A8 e A12.

---

[17] “Acomodações” indica um movimento de interpretação, análise e comunicação do que foi observado e compreendido. Os parágrafos em que apresentamos tais compreensões dos dados é o nosso metatexto.

Na primeira subcategoria – “Remissão a Euclides em relação à construção em específico” – as respostas dos participantes se fundamentaram na obra de Euclides, argumentando que compreenderam a demonstração, pois além de demonstrar, explicaram de que modo ocorreu a construção, ou seja, os alunos apresentaram argumentos que se referiram aos elementos que foram utilizados para representar os passos da construção, como por exemplo: “Eu entendi porque ele demonstra como usar os círculos, os pontos, as letras” (A7); “Ele mostra passo a passo o que ele fez para formar um triângulo equilátero e provou que todos os lados são iguais” (A22). Neste contexto, existe o entendimento do professor pesquisador de que ao se referir a “ele”, o depoente refere-se a Euclides.

Para a segunda subcategoria – “Remissão à pessoa de Euclides” – foram acomodados os relatos que se sustentaram na obra e pessoa do matemático Euclides, ou seja, os alunos, ao responderem à questão, fundamentaram-se na contribuição e renome que o matemático realizou para sua área do conhecimento. Euclides é apresentado como: uma pessoa que estudou muito (A5); o mestre da matemática (A8); uma pessoa muito inteligente para a época que viveu (A12), ou seja, o pai da matemática (A8).

Na segunda categoria – “Remissão ao professor pesquisador” – acomodamos as respostas dos alunos A4 e A14 e os argumentos se fundamentaram no modo como o professor pesquisador desenvolveu as intervenções anteriores à resposta ao questionário (na sala de aula). Neste sentido, os alunos mostraram que compreenderam o método de Euclides: “Sim. Porque a [...] nos explicou o método de que é pegar o todo dado de A a B fazer dois círculos com a ponta seca do compasso em cada um dos centros, o centro C fica entre os dois círculos. Eu fiz duas linhas, uma do centro C ao centro A e outra do centro C ao centro B, aí temos um triângulo equilátero” (A11).

Na terceira categoria denominada “Remissão ao método utilizado pelo aluno no desenvolvimento da atividade”, acomodamos os relatos dos alunos: A2, A10, A15 e A19. Aqui, os argumentos se fundamentaram no modo utilizado pelo aluno A10 para conseguir entender a demonstração euclidiana, associando a figura realizada na lousa pelo professor pesquisador com a demonstração dada por Euclides. Como podemos ver: “Sim, olhando o desenho do triângulo e as letras quando lemos a demonstração fica fácil de entender”. Para a resposta do A19: “Na folha não, no quadro sim”, apreendemos que o depoente tenha se referido à construção realizada na lousa pelo professor pesquisador, e quando diz “na folha” é porque está se referindo à demonstração euclidiana.

A quarta categoria à qual chamamos de “Dados quantitativos, ou seja, alunos que disseram apenas “sim” ao questionamento”, composta pelos alunos: A6, A13, A18, A24, A25 e A26, acomodou os depoimentos que servirão apenas para quantificar as informações, pois os alunos disseram apenas sim ao questionamento.

Percebemos que as características atribuídas a Euclides evidenciam o respeito que os participantes tiveram com o matemático após conhecer um pouco de sua história, como verificamos na seguinte fala: “Eu entendi que Euclides naquela época ele era inteligente para saber tantas coisas e escrever um livro muito bom e fácil de entender” (A12).

Estas acomodações referentes à primeira pergunta investigativa encontram-se no APÊNDICE H.

3.8 Quadro com as Unidades de Registro Referentes à Segunda Pergunta Investigativa

No Quadro abaixo apresentaremos as respostas obtidas pelos depoentes quanto à pergunta investigativa: “O que você acha desse método de Euclides?”

O objetivo desta questão foi analisar a receptividade que os alunos tiveram diante do método euclidiano referente à primeira *Proposição*.

Pergunta investigativa: *O que você acha desse método[18] de Euclides?*

Quadro 17 – Opinião dos alunos sobre o método de Euclides.

CÓDIGO	UNIDADE DE REGISTRO
A1	Eu acho que é bem explicado e fácil de fazer.
A2	A demonstração é bem grande de fazer, mas foi a forma mais fácil que eu aprendi, eu nunca pensei em fazer um triângulo assim.
A3	Acho um método simples de compreender, Euclides justifica todos os detalhes corretamente.
A4	Eu acho um pouco mais fácil.
A5	Achei muito interessante porque ele deu uma demonstração de como se faz o triângulo equilátero.
A6	Mais fácil e longo, deixa mais claro para entender. (Se é "mais claro para entender" supõe-se o fato de estar bem explicado.)
A7	Eu acho que esse método é muito interessante porque com as medidas, os pontos, as letras, os círculos com a régua pode se construir um triângulo equilátero perfeito.
A8	Demonstra a importância da matemática.
A10	Um pouco complicado de entender, mas temos menos chances de errar nas medidas.
A11	Eu acho bom que é um método que não tem tanto trabalho para fazer um triângulo equilátero e é mais prático, também é bom aprender coisas novas.
A12	É um método muito bom, fácil de entender.
A13	Um método de Euclides é uma coisa diferente não tinha ouvido falar de Euclides.
A15	Eu acho que um lado com centro A, e por outro lado, com a distância AB.
A18	Mais fácil do que o normal.
A19	Diferente, mas inteligente.
A22	O método é bem fácil de executar e ele é bem explicativo para podermos entender melhor, mas, porém, para que tudo saia correto, temos que seguir exatamente o que Euclides fala.
A23	Muito bom.
A24	Eu acho que esse método que ele foi criado para possamos o demonstrativo de como podemos criar os triângulos e quadrados e as outras formas etc.
A25	Interessante. Muito bom para quem tá começando aprender.
A26	Muito bom, pois é mais fácil o triângulo equilátero. (Percebemos que o aluno esteja se referindo a ser fácil a construção do triângulo equilátero.)
A27	Bom, eu acho que ele fez bem de ter criado esse método, mas tem pessoas que não compreendem esse método porque ele pode nos confundir. (Este "bom" que aparece no relato refere-se a uma exclamação na fala do depoente).

[18] Tratamos de "método" a descrição da demonstração realizada por Euclides apresentada aos participantes, conforme descrevemos na seção 3.4 deste trabalho.

Mesmo encontrando respostas de que o método utilizado por Euclides para a demonstração da *Proposição* não foi tão fácil, ou que foi uma demonstração extensa, percebemos que a maioria deles respondeu que não é difícil de entender e que foi bem explicado.

3.8.1 Acomodações Utilizadas para Compor a Análise da Segunda Pergunta Investigativa

Desse movimento interpretativo do Quadro 17 foi possível construir 5 categorias e não acomodamos as respostas obtidas em subcategorias.

As categorias formadas foram: primeira – “Remissão ao método ser bem explicado, fácil, bom e/ou interessante”; segunda – “Remissão ao método não ser tão fácil (DIFÍCIL)”; terceira – “Remissão à importância da matemática”; quarta – “Remissão à novidade na aprendizagem” e quinta – “Remissão à incoerência quanto à pergunta”.

Na primeira categoria – “Remissão ao método ser bem explicado, fácil, bom e/ou interessante” – foram acomodados os depoimentos dos alunos A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A11, A12, A18, A22, A23, A25, A26 e A27, que se sustentam no seguinte argumento: o método demonstrado por Euclides se apresenta de forma fácil de fazer e/ou de forma longa. Pode-se compreender que o uso do termo “forma fácil” se refere ao detalhamento dos passos de execução que a demonstração apresenta, sendo esta característica que sustenta a classificação “fácil de fazer”. Observa-se nos seguintes depoimentos: “Achei muito interessante porque ele deu uma demonstração de como se faz o triângulo equilátero” (A5); “Mais fácil e longo, deixa mais claro para entender” (A6); “Eu acho que esse método é muito interessante porque com as medidas, os pontos, as letras, os círculos com a régua pode se construir um triângulo equilátero perfeito” (A7).

Quando o depoente (A6) declara “deixa mais claro para entender”, pudemos inferir que o processo apresentado por Euclides se encontra explicado de uma maneira compreensível.

Outros depoentes basearam-se no fato de o método ter boa explicação, mas que os passos sugeridos por Euclides devem ser seguidos, como exemplo: “O método é bem fácil de executar e ele é bem explicativo para podermos entender melhor, mas, porém, para que tudo saia correto, temos que seguir exatamente o que Euclides fala” (A22).

Na segunda categoria – “Remissão ao método não ser tão fácil (DIFÍCIL)” – o relato do único aluno A10 elucida que mesmo sendo um método que apresenta certo grau de dificuldade, com ele o aluno tem mais chances de conseguir construir com êxito o que lhe foi proposto, o que se verifica na seguinte fala: “Um pouco complicado de entender, mas temos menos chances de errar nas medidas”.

Na terceira categoria – “Remissão à importância da matemática” – o único depoente A8 acomodado nesta categoria, declara que o método euclidiano justifica a importância da matemática. Mostrando, desta forma, a importância que foi atribuída ao matemático, já que a pergunta faz referência ao que o aluno pensa do método de Euclides, como observamos em sua resposta: “Demonstra a importância da matemática”.

Tornou-se por bem criar a quarta categoria – “Remissão à novidade na aprendizagem” – para acomodar os depoimentos dos alunos A2, A11, A13 e A19, que sustentam ser este método novidade na aprendizagem do aluno. Entende-se que realmente deva ser considerado que a maioria dos alunos não tinha ouvido falar de Euclides e nem mesmo tinha ouvido falar de seu método demonstrativo. Fato este comprovado por alguns relatos, como por exemplo: “A demonstração é bem grande de fazer, mas foi a forma mais fácil que eu aprendi, eu nunca pensei em fazer um triângulo assim” (A2); “Um método de Euclides é uma coisa diferente, não tinha ouvido falar de Euclides” (A13).

Na quinta categoria – “Remissão à incoerência quanto à pergunta” – acomodam-se dois depoimentos: A15 e A24 que, diante da interpretação do professor pesquisador, não se apresentaram de forma coerente com a questão em tela, como pode ser verificado: “Eu acho que um lado com centro A, e por outro lado, com a distância AB” (A15) e “Eu acho que esse método que ele foi criado para possamos o demonstrativo de como podemos criar os triângulos e quadrados e as outras formas etc.” (A24). Uma segunda interpretação nos surgiu no relato do A24, em que tenha se referido ao método de Euclides ter sido criado para demonstrar a construção de triângulos, quadrados e outras formas geométricas. Porém, como esta interpretação não nos parece muito segura, preferimos optar por categorizá-la como incoerente no que se refere à pergunta.

Vale ressaltar ainda, que os depoimentos do A2 e A11 pertencem à primeira e quarta categorias, pois foram acomodados seguindo o entendimento de que para compor a primeira categoria – “Remissão ao método ser bem explicado, fácil, bom e/ou interessante” – o relato do A2 menciona: “mais fácil” e o depoimento do A11: “Não tem tanto trabalho” e “mais prático”, assim, se não é trabalhoso, e é mais prático, interpretamos que pode ser fácil. Para acomodá-los na quarta categoria – “Remissão à novidade na aprendizagem” – compreendemos que o depoimento do A2 quando menciona: “Eu nunca pensei em fazer um triângulo assim” e o do A11 “Aprender coisas novas” referiram-se a uma novidade no processo de aprendizagem.

Estas acomodações referentes à segunda pergunta investigativa encontram-se no APÊNDICE I.

3.9 QUADRO COM AS UNIDADES DE REGISTRO REFERENTES À TERCEIRA PERGUNTA INVESTIGATIVA

No Quadro a seguir, apresentaremos as respostas obtidas pelos depoentes quanto à pergunta investigativa: “Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma de Euclides?”.

O objetivo desta questão foi o de investigar se o aluno associou o que ele fez nas duas atividades anteriores, as quais se referiram à primeira *Proposição* de Euclides, com esta terceira atividade a qual se refere à demonstração euclidiana.

Pergunta investigativa: Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma[19] de Euclides?

Quadro 18 – Forma realizada pelo aluno e por Euclides.

CÓDIGO	UNIDADE DE REGISTRO
A1	Porque a única coisa que tem de semelhança é a ligação de A, B, C.
A2	Não, utilizei apenas a régua.
A3	Sim. Porque Euclides usou a mesma forma que eu usei, as mesmas letras etc.
A4	Sim.
A5	Sim, porque usando a forma de Euclides eu construí o triângulo equilátero com muita facilidade, confesso que se não tivesse o ponto A e B não seria tão fácil não.
A6	Sim, a forma de Euclides da na mesma do que fazer um triângulo é mais fácil usando o compasso fica mais fácil nas medidas.
A7	A relação que eu vejo é que eu usei a forma e desenhei um triângulo equilátero e usei as mesmas medidas e as letras etc.
A8	Sim e não, é só eu mais meus colegas, você bom todos porque a matemática está no dia a dia. (Nesta fala não conseguimos ter clareza do que o depoente quis dizer.)
A10	Tudo, a única diferença é que a figura está na prática e a demonstração está na teoria.
A11	Sim, eu fiz praticamente igual, mas não fiz os círculos de centro C.
A12	Não, porque na forma que eu fiz, não parecia com a de Euclides.
A13	Sim um pouquinho.
A15	Não.
A18	Não muito, sei que nós dois fizemos o triângulo de forma diferente. (Interpretamos que, quando o depoente diz “não muito” subentende-se que existe relação, talvez não de forma tão nítida, mas existe, por este motivo, inserimos este depoimento na primeira categoria e na primeira subcategoria.)
A19	Não, porque só usei a régua.
A22	Sim, pois como ele eu usei de formas geométricas circulares para conseguir fazer o triângulo equilátero corretamente. (Quando o depoente falou “ele” evidenciamos que tenha se referido a Euclides.)
A23	Ah, mais ou menos, porque eu fiz do meu jeito e imaginei, ele fez com uma boa explicação. (Quando o depoente fala “mais ou menos” compreendemos que de uma forma ou outra, exista relação entre o que ele fez anteriormente e a demonstração de Euclides.)
A24	A relação foi com a distância entre AB e os círculos e a medida.
A25	Pelo menos eu não vi nenhuma relação.
A26	Na verdade não muito, pois o que eu fiz foi o que eu entendi no ligamento dos pontos para formar o triângulo equilátero.
A27	Sim, porque ele dá todas as letras que nós usamos, ou seja, ele dá o primeiro ponto AB depois CDE.

[19] Utilizamos a palavra “forma de Euclides” querendo nos referir à demonstração euclidiana.

Notamos que neste Quadro 18 apareceu diretamente uma resposta “não” e outra em que o depoente diz não ter visto relação entre o que ele fez para a demonstração da *Proposição* e o modo como Euclides demonstrou, o que nos chamou atenção, pois nas duas primeiras perguntas investigativas, isso não tinha ocorrido.

3.9.1 Acomodações Utilizadas para Compor a Análise da Terceira Pergunta Investigativa

Para esta questão presente no Quadro 18, construímos duas categorias e cinco subcategorias com as respostas dadas pelos participantes.

Compondo a primeira categoria denominada “Existe relação entre as duas formas” formamos as seguintes subcategorias: “Existe relação entre as duas formas referindo-se a Euclides”; “Existe relação entre as duas formas referindo-se aos pontos”; “Existe relação entre as duas formas referindo-se ao uso do material geométrico”; “Existe relação entre as duas formas e refere-se à teoria e à prática” e “Existe relação, porém não se apresenta de forma clara pelos depoentes”. A segunda categoria foi por nós denominada de “Remissão a não existir relação entre as duas formas” e, por fim, a terceira categoria emergida para esta questão foi “Dados quantitativos, ou seja, alunos que foram sucintos em suas respostas”.

Para compor a primeira categoria, acomodamos os depoimentos subdividindo-os em declarações fundamentadas em referência a Euclides; nos pontos[20] dados para a construção do triângulo retângulo; no uso do material geométrico; na teoria e prática; e ainda naqueles que não se apresentam de forma clara pelos depoentes, criando assim as subcategorias por nós já relacionadas.

Na primeira subcategoria acomodamos os relatos dos alunos A3, A5, A6, A18, A22 e A23. Na segunda subcategoria adaptamos as respostas dos seguintes alunos: A1, A3, A5, A7, A11, A24, A26 e A27. Na terceira subcategoria apenas A6. Na quarta subcategoria também acomodamos o depoimento de apenas um aluno, o A10. Para compor a quinta categoria, inserimos a fala de dois alunos, A8 e A13.

[20] Os pontos são aqui entendidos como sendo as letras apresentadas pelo professor pesquisador na construção do triângulo equilátero.

Notamos que apenas um aluno declara que em seu entendimento há relação entre as duas formas, porém, que existe a diferença de que a "figura está na prática e a demonstração está na teoria" (A10), ou seja, para o depoente, a figura geométrica construída nas atividades anteriores se caracteriza como sendo a prática e, a demonstração euclidiana apresentada a ele nesta terceira atividade, como a teoria. Para aqueles que se fundamentaram se referindo a Euclides, temos o depoimento do (A5): "Sim, porque usando a forma de Euclides eu construí o triângulo equilátero com muita facilidade, confesso que se não tivesse o ponto A e o ponto B não seria tão fácil não". Para acomodar os relatos dos alunos que sustentaram a criação da subcategoria referente aos pontos, temos: "Porque a única coisa que tem de semelhança é a ligação de A, B, C" (A1).

Um único aluno afirma a existência da relação entre as duas formas, referindo-se ao uso do material geométrico: "Sim, a forma de Euclides dá na mesma do que fazer um triângulo. É mais fácil usando o compasso, fica mais fácil nas medidas" (A6).

Na subcategoria que se refere a existir relação entre as duas formas, para o professor pesquisador os depoentes não a apresentaram de forma clara: "Sim e não sou só eu mais meus colegas, você bom todos porque a matemática está no dia a dia" (A8) e "Sim, um pouquinho" (A13).

Para a segunda categoria – "Remissão a não existir relação entre as duas formas", foram acomodados depoimentos nos quais percebemos que os alunos A2, A12, A19 e A25 não visualizaram semelhança entre as atividades realizadas anteriormente e a atividade que aqui se discute: "Pelo menos eu não vi nenhuma relação" (A25); "Não, porque só usei a régua" (A19).

Os dois relatos sucintos foram acomodados na terceira categoria – "Dados quantitativos", ou seja, alunos que foram sucintos em suas respostas e serviram apenas como dados quantitativos, como se verifica: "Sim" (A4) e "Não" (A15).

Consideramos depoimentos pertencentes a mais de uma subcategoria, como é o caso dos alunos A3, A5 e A6. Isso ocorre porque os dois primeiros se referiram a Euclides e aos pontos utilizados na construção e o último se referiu a Euclides e ao material geométrico.

Estas acomodações referentes à terceira pergunta investigativa encontram-se no APÊNDICE J.

3.10 Quadro com as Unidades de Registro Referentes à Quarta Pergunta Investigativa

No Quadro a seguir, apresentaremos as respostas obtidas pelos depoentes quanto à pergunta investigativa: “Onde e como você pensou usando a forma de Euclides?”

Esta pergunta teve como objetivo fazer com que o aluno detalhasse os elementos utilizados por ele na construção das duas atividades anteriores e que pôde ser comparada com a demonstração euclidiana que lhes foi apresentada.

Pergunta investigativa: *Onde e como você pensou usando a forma de Euclides?*

Quadro 19 – Elementos da demonstração euclidiana.

CÓDIGO	UNIDADE DE REGISTRO
A1	Somente dá ligação e junção entre A, B, C.
A2	Somente nas ligações A, B, C.
A3	Pensei e vi que Euclides usa o mesmo método que eu.
A4	Por um lado A eu fiz e B um círculo que ia ser o centro entre A e B.
A5	Com os pontos dados eu pensei: ligando os pontos construirei o meu triângulo equilátero.
A6	Eu nunca pensei em fazer isso como Euclides explicou, do jeito que ele explicou parece ter ficado mais claro, mais fácil de fazer, eu nunca pensei em fazer o que Euclides explicou até hoje.
A7	Eu usei a forma de Euclides para construir um triângulo equilátero com as mesmas medidas, as letras e círculos e pontos foi assim que eu pensei usando a forma. (Quando o aluno menciona a palavra “forma”, interpretamos que está se referindo aos “passos” seguidos na demonstração euclidiana.)
A8	Bom, aqui mesmo na escola. Bom, aprendi um pouco mais, você tem que pegar primeiro A e depois B para fazer o triângulo equilátero.
A10	Eu só usei a forma de Euclides em aula, eu achei que como ele explica tudo é bem detalhado lendo com um pouco de paciência e atenção fica fácil de entender.
A11	Pegar a linha dada de A a B no centro A com a ponta seca do compasso eu faço um círculo e no centro B eu faço um círculo também. Temos o ponto BCD e ACE que são os círculos, o centro C se fizermos uma risca até o centro A fazemos outro lado do triângulo e C a B fazemos outro lado do triângulo.
A12	De nenhum jeito.
A13	Na sala com a ajuda da professora e conhecendo mais sobre Euclides.
A15	Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
A18	Na sala com a [...], não pensei muito como ele foi ela quem me ensinou a pensar assim. (Evidenciamos que “ele” se

	refere a Euclides.)
A19	O jeito do círculo usando o compasso.
A22	Em basicamente tudo, pois usei desta fórmula para fazer o triângulo equilátero. (Quando o aluno menciona a palavra “fórmula”, entendemos que está se referindo aos “passos” seguidos na demonstração euclidiana.)
A23	Ah, imaginei e pensei da forma que você explicou no quadro da forma mais clara. (Quando o depoente diz “quadro” está se referindo à lousa.)
A24	Nos trabalhos da escola quando medimos algo.
A25	Em desenhos, trabalhos escolares, fazer alguma montagem etc.
A26	Na formação do triângulo equilátero.
A27	Eu pensei em usar a fórmula quando ele nos dá o ponto AB e depois é só usar a cabeça e fazer os círculos e usar as outras letras CDE. (Quando o aluno menciona a palavra “fórmula”, entendemos que está se referindo aos “passos” seguidos na demonstração euclidiana.)

Compondo este Quadro 19 notamos que a fala do A15 – “Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si” – foi retirada da folha da terceira atividade entregue aos participantes, o que pode ser verificado conforme o APÊNDICE D, onde aparece: *N1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si*.

3.10.1 Acomodações Utilizadas para Compor a Análise da Quarta Pergunta Investigativa

Com as respostas dos depoentes transcritas no Quadro 19, construímos cinco categorias denominadas a seguir. Primeira categoria: “Remissão aos pontos”. Segunda categoria: “Remissão à explicação na lousa pelo professor pesquisador”. Terceira categoria: “Remissão ao modo realizado por Euclides”. Quarta categoria: “Remissão a Euclides juntamente com a explicação do professor pesquisador em aula”. Quinta e última categoria: “Remissão à incoerência quanto à pergunta”.

Na primeira categoria foram acomodadas as falas dos alunos A1, A2, A4, A5, A7, A8, A11, A19 e A27, os quais remetem aos pontos pertencentes à construção geométrica, ou seja, para estes alunos o que se apresenta em comum entre a construção por eles realizada anteriormente e a demonstração euclidiana foram os pontos, inclusive com as letras, pertencentes à figura. Aqui o entendimento do professor pesquisador se faz presente, pois se acredita que o aluno acompanhou a leitura da demonstração de Euclides tendo em mãos a figura geométrica construída anteriormente. Esta categoria pode ser verificada nas falas de alguns alunos: “Somente nas ligações A, B, C” (A2); “Pegar a linha dada de A a B no centro A com a ponta seca do compasso eu faço um círculo e no centro B eu faço um círculo também. Temos o ponto BCD e ACE que são os círculos, o centro C se fizermos uma risca até o centro A fazemos outro lado do triângulo e C a B fazemos outro lado do triângulo” (A11).

Para a segunda categoria adequamos os depoimentos dos alunos A18 e A23, que sustentaram que a construção realizada pelo professor pesquisador facilitou o entendimento da demonstração de Euclides, porém o depoente A23 não detalhou quais elementos foram utilizados, o que pode ser verificado no seguinte exemplo: “Ah, imaginei e pensei da forma que você explicou no quadro da forma mais clara”.

A terceira categoria acomoda relatos dos alunos A3, A6, A7, A10 e A22, sustentados na demonstração euclidiana, ou seja, os alunos aqui justificaram que para suas construções foram utilizados os passos de Euclides ou que mesmo não tendo pensado neste método, esses deixaram mais compreensível a demonstração. Por exemplo: “Eu usei a forma de Euclides para construir um triângulo equilátero com as mesmas medidas, as letras e círculos e pontos foi assim que eu pensei usando a forma” (A7).

O depoimento que se fundamenta na explicação dada pelo professor pesquisador e no matemático sustenta a quarta categoria e tem a fala do aluno A13: “Na sala com a ajuda da professora e conhecendo mais sobre Euclides”.

Dentre as respostas obtidas, cinco participantes – A12, A15, A24, A25 e A26 – não mostraram coerência quanto à pergunta realizada, sustentando assim a construção da quinta categoria. Como pode ser verificado nos exemplos: “De nenhum jeito” (A12); “Nos trabalhos da escola quando medimos algo” (A24); “Em desenhos, trabalhos escolares, fazer alguma montagem, etc.” (A25). Diante da fala do A12 e A24, por exemplo, compreende-se que suas respostas se fundamentaram na discussão ocorrida em aulas anteriores à realização desta atividade, na qual foi discutido o que era uma construção, o que era uma construção matemática, o que era uma demonstração, assim como o que era uma demonstração matemática. Por este motivo, acredita-se que o aluno tenha fornecido esta resposta, mesmo estando esta incoerente com a questão em tela.

Também devemos ressaltar que o depoimento do A7 pertence a duas categorias, pois em uma categoria refere-se a Euclides e em outra se refere aos pontos, ou seja, às letras presentes na construção geométrica do triângulo equilátero apresentado pelo professor pesquisador.

Estas acomodações referentes à quarta pergunta investigativa encontram-se no APÊNDICE K.

3.11 Quadro com as Unidades de Registro Referentes à Quinta Pergunta Investigativa

No Quadro a seguir, apresentaremos as respostas obtidas pelos depoentes quanto à pergunta investigativa: *Você consegue ler e compreender o que Euclides fez?*

O objetivo desta questão foi o de verificar se o aluno consegue realmente ler e compreender a demonstração euclidiana.

Pergunta investigativa: *Você consegue ler e compreender*[21] *o que Euclides fez?*

Quadro 20 – Interpretação da forma euclidiana.

CÓDIGO	UNIDADE DE REGISTRO
A1	Mais ou menos.
A2	Sim, observando a imagem sim. (Quando o aluno se refere à "imagem", percebemos que ele está associando a demonstração às aulas que o professor pesquisador ministrou anteriormente a esta atividade.)
A3	Apesar de ter tido dificuldades, compreendi o que Euclides fez.
A4	Mais ou menos.
A5	Posso até entender mas prefiro deixar para ele (Euclides) mesmo.
A6	Sim, mas ele coloca aquelas letras confunde um pouco a cabeça, mas consegui compreender o que ele fez.
A7	De 100% eu pude compreender 80.
A8	Um pouco mais, aprendi muita coisa.
A10	Sim, tenho um pouco de dificuldade, mas consigo entender.
A11	Mais ou menos.
A12	Mais ou menos.
A13	Não conseguiria mas depois da aula sim.
A15	Consigo sim, ele (Euclides) fez que A, até AB conseguiu formar um triângulo equilátero.
A18	Mais ou menos.
A19	Mais ou menos.
A22	Somente com a escrita ficou meio complicado, mas com o desenho é mais fácil de compreender.
A23	Sim, claro.
A24	Sim, se ler bem vou conseguir entender, ver a demonstração dele (Euclides), porque lendo vai se imaginando as figuras.
A25	Não.
A26	Sim.
A27	No começo não consegui compreender, mas depois que eu li agora sim eu compreendi.

De acordo com o Quadro 20, observamos que dos 21 alunos participantes, 6 deles responderam "mais ou menos"; 1 respondeu "sim"; 1 respondeu "sim, claro" e apenas 1 aluno respondeu "não" à referida pergunta.

[21] Quando mencionamos "ler e compreender o que Euclides fez" nos referimos à demonstração realizada por Euclides e que foi apresentada aos participantes na quarta etapa do trabalho desenvolvido com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

3.11.1 Acomodações Utilizadas para Compor a Análise da Quinta Pergunta Investigativa

Das respostas dadas pelos depoentes e que compuseram o Quadro anterior, pudemos construir três categorias. A primeira categoria – “Compreensão” – acomodou os depoimentos que foram por nós subdivididos em três subcategorias. A primeira subcategoria foi denominada “Existe compreensão” e acomodou as respostas dos alunos A7, A23 e A26; a segunda subcategoria: “Existe compreensão, mas os depoentes não a apresentam de forma clara” acomodou as respostas dos alunos A1, A4, A5, A11, A12, A18 e A19; terceira subcategoria: “Remissão à compreensão após a aula dada pelo professor pesquisador” acomodou as respostas dos alunos A2, A8 e A13; a quarta subcategoria: “Existe compreensão e existe a remissão a Euclides” acomodou as respostas dos alunos A15 e A24.

Para compor a segunda categoria – “Existe dificuldade” – foram construídas duas subcategorias. A primeira subcategoria: “Remissão à construção na lousa feita pelo professor pesquisador” foi estabelecida para acomodar a resposta do aluno A22; a segunda subcategoria: “Remissão a ter dificuldade, mas existe compreensão” acomodou as respostas dos alunos A3, A6, A10 e A27.

A terceira categoria – “Remissão a não existir compreensão” – foi instituída para acomodar a resposta do aluno A25.

Na primeira categoria foram acomodados os relatos que se sustentaram na compreensão por parte dos depoentes, diante do que lhes foi perguntado, porém, em algumas falas isso não se apresentou de forma clara; em outros a compreensão ocorreu em decorrência da exposição realizada pelo professor pesquisador em atividades anteriores; em outros ainda existe a remissão ao matemático Euclides; e, por fim, existe a remissão aos dois: ao matemático e ao professor pesquisador.

Quando os depoentes relataram que conseguiram ler e compreender o que Euclides fez, ou seja, que compreenderam sua demonstração, não houve explicação deste entendimento, apenas se restringiram a respostas como: “Sim, claro” (A23) ou apenas: “Sim” (A26). Esses relatos foram acomodados para compor a primeira subcategoria.

Outros alunos disseram que a compreensão foi “Mais ou menos” (A1). Esta resposta elucida para o professor pesquisador que o aluno conseguiu compreender, porém não de forma nítida, pois fica a dúvida do que possa significar este “mais ou menos” a que o aluno se referiu; depoimentos que constituíram a segunda subcategoria.

Nesta mesma categoria, quando o depoente relata que a compreensão ocorreu após a intervenção do professor pesquisador, entende-se que existiu progresso das aulas, como podemos verificar nos seguintes relatos: “Um pouco mais, aprendi muita coisa” (A8) e “Não conseguiria, mas depois da aula sim” (A13); estes depoimentos pertencem à terceira subcategoria.

Dois depoimentos referiram-se ao matemático, e o A15 tentou explicar que para demonstrar, Euclides usou de A até AB e desta forma conseguiu demonstrar o triângulo equilátero; estes relatos compuseram a quarta subcategoria.

Para a segunda categoria, acomodamos depoimentos que relataram haver dificuldades para compreender a demonstração.

Esta categoria compreende a primeira subcategoria em que o depoente relata que a demonstração ficou mais clara diante da construção realizada pelo professor pesquisador – “Somente com a escrita ficou meio complicado, mas com o desenho é mais fácil de compreender” (A22). Também encontramos a segunda subcategoria na qual acomodamos as falas dos alunos que relataram que tiveram dificuldades, mas que mesmo assim conseguiram compreender a demonstração realizada por Euclides, como: “Apesar de ter tido dificuldades, compreendi o que Euclides fez” (A3); “No começo não consegui compreender, mas depois que eu li agora sim eu compreendi” (A27).

A única resposta negativa à compreensão referente à demonstração proposta foi do A25, porém não foi justificada. E pudemos verificar que este mesmo aluno na terceira pergunta investigativa – “Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma de Euclides” – também respondeu não ter observado relação com o que lhe fora perguntado.

Estas acomodações referentes à quinta pergunta investigativa encontram-se no APÊNDICE L.

3.12 QUADRO COM AS UNIDADES DE REGISTRO REFERENTES À SEXTA PERGUNTA INVESTIGATIVA

No Quadro que se segue, apresentaremos as respostas obtidas pelos depoentes quanto à pergunta investigativa: *Esta demonstração de Euclides fez algum sentido para você?*

O objetivo desta questão foi o de verificar se a demonstração da primeira *proposição* de Euclides tinha algum significado para o aluno, ou seja, se essa demonstração mostrou-se coerente para seu entendimento diante da atividade proposta.

Pergunta investigativa: Esta demonstração de Euclides fez algum sentido para você?

Quadro 21 – Significado da demonstração de Euclides.

CÓDIGO	UNIDADE DE REGISTRO
A1	Porque ensina que tudo é possível até uma fórmula de uma figura geométrica. (Quando o aluno menciona a palavra “fórmula”, entendemos que está se referindo aos “passos” seguidos na demonstração euclidiana.)
A2	Sim.
A3	Sim. Porque sua escrita estava muito compreensível com o triângulo equilátero.
A4	Sim, um jeito de fazer mais fácil.
A5	Faz. Como se fosse os pontos dados e sendo medindo as laterais com a mesma medida, com certeza terei meu triângulo equilátero.
A6	Um pouco, é meio estranho ter que usar um compasso para fazer um triângulo.
A7	Sim, porque com as medidas perfeitas você pode construir muitas coisas. Ex.: casa, prédio, escola etc.
A8	Faz sentido para mim, que é bem mais fácil do que ficar medindo.
A10	Sim, ele explica todos os passos que usamos para construir um triângulo equilátero, que nos dias de hoje com todo nosso desenvolvimento é fácil de compreender, mas no tempo que ele viveu são necessários todos os detalhes para tentar compreender.
A11	Sim, ele fez um método que não precisamos ficar medindo cada dado para ficar da mesma medida.
A12	Sim, porque fica mais fácil de fazer as coisas e eu vou precisar no futuro.
A13	Sim, todo.
A15	Faz sentido sim, porque mais para frente vai usar sim.
A18	Sim, deixa as coisas mais fáceis.
A19	Sim porque ele provou que todos os lados são iguais.
A22	Com o desenho é bem mais fácil, pois a explicação é meio confusa.

A23	Muito, entendi e aprendi várias coisas.
A24	Sim.
A25	Sim. A demonstração ajuda a desenvolver melhor um triângulo equilátero sem ficar se batendo com nenhuma dúvida.
A26	Fez, pois ficou mais fácil de fazer o triângulo.
A27	Sim, pelos pontos que ele se refere e pelo que a professora falou a gente consegue ligar os pontos depois que nós fizemos o desenho eu consegui interpretar melhor a fórmula de Euclides. (Quando o aluno menciona a palavra “fórmula”, entendemos que está se referindo aos “passos” seguidos na demonstração euclidiana.)

Com a observação do Quadro 21, pudemos verificar que dos 21 alunos participantes, 2 deles responderam “sim” e 1 respondeu “sim, todo” à referida pergunta.

3.12.1 Acomodações Utilizadas para Compor a Análise da Sexta Pergunta Investigativa

Das respostas dadas pelos depoentes e que compuseram o Quadro anterior elaboramos três categorias e seis subcategorias para compor a primeira categoria.

Para compor a primeira categoria – “Existe interpretação quanto ao método da demonstração de Euclides” – a primeira subcategoria elaborada acomodou o depoimento do aluno A27 e a denominamos “Remissão ao pesquisador”; a segunda subcategoria – “Remissão à construção geométrica” – acomodou os relatos dos alunos A1, A3, A5, A7, A8, A22, A25, A26 e A27. A terceira subcategoria: “Remissão a Euclides” ajustou o relato dos alunos A10, A11, A19 e A27. A quarta subcategoria: “Remissão à aprendizagem de outros conteúdos não especificados pelo depoente” acomodou o depoimento do aluno A23. A quinta subcategoria: “Existe interpretação da demonstração de Euclides e esta torna as coisas mais “fáceis” para o depoente” acomodou a resposta de três alunos: A4, A12 e A18. E, finalmente a sexta subcategoria: “Existe interpretação quanto ao método da demonstração de Euclides e o depoente acredita que utilizará as informações em sua vida escolar” conta com as respostas dos alunos A12 e A15.

Para compor a segunda categoria – “A demonstração não se apresenta de forma clara para o depoente” – acomodamos a resposta do aluno A6.

Na composição da terceira categoria – “Dados quantitativos” – organizamos as respostas dos alunos A2, A13 e A24.

Na primeira categoria, observamos que um participante respondeu que os pontos – isso quer dizer, as letras apresentadas na demonstração euclidiana – juntamente com o que o professor pesquisador lhe apresentou, tornou-se compreensível ao aluno. Como exemplificamos: “Sim, pelos pontos que ele se refere e pelo que a professora falou a gente consegue ligar os pontos depois que nós fizemos o desenho eu consegui interpretar melhor a fórmula de Euclides” (A27). Este relato foi inserido na primeira subcategoria.

Nesta mesma categoria temos a justificativa por parte dos depoentes de que a demonstração euclidiana tem significado e a remetem à construção geométrica, como por exemplo: “Faz. Como se fosse os pontos dados e sendo medindo as laterais com a mesma medida, com certeza terei meu triângulo equilátero” (A5). E, diante da resposta: “Faz sentido para mim, que é bem mais fácil do que ficar medindo” (A8), com o que foi vivenciado pelo professor pesquisador em sala de aula, o aluno aqui quis mostrar que, seguindo a demonstração de Euclides para construir do triângulo equilátero, seria a maneira mais acertada do que tentar construí-lo por tentativa e erro. Estes depoimentos compuseram a segunda subcategoria da primeira categoria, e assim, descreveremos as outras subcategorias pertencentes a essa categoria.

Na terceira subcategoria alguns participantes justificaram suas respostas remetendo-se a Euclides, como no caso: “Sim, porque ele provou que todos os lados são iguais” (A19).

Temos também um depoimento de que a demonstração além de fazer-lhe sentido, possibilitou aprender “várias coisas” (A23), porém, estas “várias coisas” não foram especificadas, mas crê-se que o aluno referiu-se a ter aprendido conteúdos referentes à matemática, que antes não conhecia ou não se lembrava. Este relato compôs a quarta subcategoria.

Nesta categoria também acomodamos depoimentos – que pertencem à quinta subcategoria – em que os alunos relataram que com a demonstração as *coisas* ficaram “mais fáceis” (A18).

Para compor a sexta subcategoria, observamos que outros depoentes disseram que a demonstração não só faz sentido como utilizaram o aprendizado em suas vidas escolares, como por exemplo: “Faz sentido sim, porque mais para frente vou usar sim” (A15).

A segunda categoria acomodou a fala de apenas um aluno, para o qual a demonstração não se mostrou compreensível, como mostramos: “Um pouco, é meio estranho ter que usar um compasso para fazer um triângulo” (A6).

Tem-se que três dos entrevistados indicam “sim” em suas respostas, sem justificá-las. Desta forma, foram adequadas à terceira categoria.

Também devemos ressaltar que o depoimento do A12 e do A27 pertence a mais de uma categoria. O A27 pertence às subcategorias 6.1.1, 6.1.2 e 6.1.3. O A12 pertence à subcategoria 6.1.5 e à subcategoria 6.1.6.

Estas acomodações referentes à sexta pergunta investigativa encontram-se no APÊNDICE M.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao tecermos nossas considerações finais, ressaltamos que o principal interesse desta pesquisa, elaborada com um grupo de 27 alunos do Ensino Médio, foi a compreensão de suas percepções diante da proposta que lhes apresenta o método demonstrativo euclidiano. Essa busca residiu na contextualização do objeto de estudo e da demonstração.

Percebemos que, mesmo faltando vocabulário para os alunos, eles conseguiram avançar no raciocínio geométrico, assim como, por diversas vezes notamos o *endeusamento*[22] a Euclides. Os participantes, a princípio, desconheciam o matemático, mas em função da intervenção e do professor pesquisador ter mostrado Euclides como um matemático importante, notamos que os alunos, de certa forma, foram receptivos às informações transmitidas pelo professor pesquisador, o que pode ser verificado nos seguintes relatos: “Bom, Euclides foi um verdadeiro mestre da matemática como se fala, o pai da matemática” (A8); “Eu entendi que Euclides naquela época ele era inteligente para saber tantas coisas e escrever um livro muito bom e fácil de entender” (A12). Estas respostas foram obtidas na primeira pergunta investigativa.

Evidenciamos que, para o aluno, todo matemático é importante, que tudo que deriva da matemática é algo adequado, a matemática é uma ciência certa, correta, exata, inquestionável, e aquilo que é exposto pela matemática e é construído matematicamente, tende a ser acertado.

Também apreendemos que, para o aluno, quando tratamos das demonstrações, é mais fácil trabalhar a matemática – no caso, a geometria – partindo da manipulação de material, manipulação de instrumentos e, assim, alguns participantes perceberam os conceitos que estavam sendo abordados, perceberam as definições que precisavam para serem aplicadas na resolução da *Proposição*. Dizemos isso porque o professor pesquisador demonstrou a construção do triângulo equilátero na lousa e foi a partir daí que, para nós, alguns dos participantes transpareceram esta conclusão.

Compreendemos que o contexto didático desenvolvido em nossa pesquisa foi novidade para o aluno, o que pode ser verificado na fala do aluno A13 –

[22] Entendemos que este endeusamento a Euclides pode ser pelo processo, pelo envolvimento do professor pesquisador ou por seu entusiasmo e dedicação.

“Um método de Euclides é uma coisa diferente, não tinha ouvido falar de Euclides” – quando respondia à segunda pergunta investigativa.

Em nossa proposta, os participantes responderam às seis questões que foram organizadas em seis Quadros – Q16 a Q21. As respostas obtidas foram organizadas seguindo suas respectivas codificações. Sobre o primeiro Quadro, ou seja, sobre a primeira pergunta investigativa, observamos que no que diz respeito a Euclides, foi possível perceber que houve remissão em relação à construção realizada por ele, assim como remissão à sua pessoa. Usou-se a fala do pesquisador enquanto atuava como professor, assim como houve remissão ao método em que o próprio participante utilizou para o desenvolvimento da atividade e notamos também que seis dos vinte e sete participantes para esta atividade disseram sim ao questionamento.

Sobre o segundo Quadro – segunda pergunta investigativa – observamos que no que diz respeito ao método de Euclides, houve remissão ao método ser bem explicado, ser fácil, ser bom e/ou interessante. Também houve remissão ao método não ser tão fácil, um participante evidenciou a importância da matemática, houve depoimentos que remeteram à novidade quanto ao que lhes estava sendo mostrado e encontramos duas respostas que interpretamos serem incoerentes com o questionamento.

Sobre o terceiro Quadro – terceira pergunta investigativa – observamos que quando foi perguntado aos participantes se eles visualizavam alguma relação entre o que tinham realizado para demonstrar a *Proposição I* e o modo realizado pelo geômetra, alguns disseram que houve sim relação entre as duas formas e fizeram referência a Euclides, outros se referiram aos pontos que aparecem na representação e na demonstração da referida proposição; já outros referiram ao uso do material geométrico utilizado para a construção da representação. Ainda tivemos o entendimento de um participante que disse existir apenas uma relação entre as formas, ou seja, para ele, a figura é a representação na prática e a demonstração por escrito, refere-se à teoria. Tivemos dois depoimentos que foram entendidos como havendo sim relação entre as formas, porém, os participantes não a apresentaram de forma clara. Acomodamos também as respostas em que os participantes não entenderam haver relação entre as formas. E, por fim, acomodamos os depoimentos, que percebemos apenas servir para futuros dados quantitativos, pois um depoente disse “sim” e outro disse “não” ao questionamento.

No que se refere ao quarto Quadro – quarta pergunta investigativa – observamos que no que diz respeito a onde e como o participante pensou usando a forma de Euclides houve remissão aos pontos, ou seja, às letras utilizadas para a representação e para demonstração da *Proposição*. Houve remissão à explicação realizada pelo pesquisador enquanto atuava como professor, assim como ao modo realizado por Euclides para a referida demonstração e também remissão a esses dois modos, ou seja, remissão ao geômetra juntamente com a explicação realizada pelo pesquisador enquanto atuava como professor. Acomodamos ainda neste Quadro, cinco depoimentos que acreditamos ser incoerentes quanto ao questionamento.

Em se tratando do quinto Quadro, ou seja, sobre a quinta pergunta investigativa, interpretamos que houve compreensão por parte de alguns participantes, mas em alguns depoimentos essa compreensão não se mostrou de forma clara. Em outros, houve remissão à compreensão após a exposição realizada pelo pesquisador enquanto atuava como professor. Acomodamos depoimentos que mostraram existir compreensão, mas justificaram essa compreensão ao que foi demonstrado por Euclides. Também percebemos que, além da remissão à construção realizada na lousa pelo pesquisador, enquanto atuava como professor, alguns participantes declararam ter encontrado dificuldades, mas que, mesmo com dificuldades, conseguiram compreender o que estava sendo proposto. Analisamos também que apenas um participante declarou não ter compreendido a demonstração euclidiana.

Sobre o sexto Quadro, ou seja, sobre a sexta pergunta investigativa, evidenciamos que houve interpretação quanto ao método da demonstração euclidiana, mas essa interpretação se divide em remissão ao pesquisador enquanto atuava como professor, remissão à construção geométrica, ou seja, acreditamos que para o participante, se for seguida passo a passo a demonstração de Euclides, essa seria a maneira mais acertada de construir o triângulo equilátero. Houve remissão a Euclides e remissão à aprendizagem de outros conteúdos, mas o depoente não os deixa especificados. Existe interpretação quanto à referida demonstração, e esta auxilia facilitando a compreensão. Também acomodamos depoimentos que abarcam a interpretação quanto ao que estava sendo perguntado e, além disso, o depoente acredita que estas informações serão úteis em sua vida escolar. Neste mesmo Quadro, ainda acomodamos o depoimento de um aluno que declara não ter compreendido o que lhe foi apresentado. Por fim, três depoimentos serviram para análise quantitativa, ou seja, os alunos disseram sim ao questionamento, mas não a especificaram.

Diante da aplicação de nossa proposta didática, analisamos que o aluno, na maioria das vezes, conseguiu compreender o método demonstrativo euclidiano referente à *Proposição I* da obra *Os Elementos* e também se mostraram receptivos quanto ao que lhes estava sendo apresentado. Desta forma, mesmo com algumas dificuldades que a princípio a demonstração pode oferecer aos participantes, quando eles associaram a figura que representava a referida demonstração com a descrição desta, a compreensão tornou-se mais nítida.

Pensamos ser importante ressaltar que hoje, como pesquisadores, visualizamos outro caminho para o plano de aula dentro de um processo de construção didática. Acreditamos que quando os alunos responderam às questões, estavam contaminados pelo que foi apresentado anteriormente, pela construção realizada pelo professor pesquisador e não pura e simplesmente pela demonstração euclidiana.

Certos de que a proposta aplicada teve seu mérito e que conseguimos alcançar o objetivo inicial de nosso trabalho, não podemos deixar de esclarecer que a proposta hoje seria realizada em duas fases. A primeira seria a aplicação da atividade pura, sem nenhum questionamento e verificaríamos o que os alunos responderiam diante da demonstração realizada por Euclides – *Proposição I*, e, em outra fase, depois de realizarmos as intervenções, tais como aconteceram neste trabalho, pediríamos aos participantes para responderem novamente aos mesmos questionamentos, comparando desta forma as respostas obtidas nas duas fases.

Enfim, os argumentos finais acima delineados deixaram alguns pontos em aberto, podendo um dia constituir em problemas para novas investigações.

Não desconsideramos a possibilidade de esses caminhos serem retomados na construção de um ou mais artigos, na elaboração de um projeto para o doutorado ou, ainda, por outros pesquisadores que porventura venham a se dispor.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. Tradução de A. Bosi. 2. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. G. S. de. Iniciação à demonstração apreendendo conceitos geométricos. In: Reunião Anual da Associação Nacional de Pós - Graduação e Pesquisa em Educação, Caxambu. **Anais..**. Caxambu: ANPED, 2000. Disponível em <http://www.ufrrj.br/emanped/index.php>. Acesso em: 15 jul. 2010.

ALMOULOUD, S. A. **A geometria na escola básica**: que espaços e formas tem hoje? 2004. Disponível em: <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/ mr21 Saddo.doc>. Acesso em: 18 nov. 2010.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições: 70, 1977, 3. ed., 2004.

BARKER, S. F. **Filosofia da matemática**. Tradução de L. Hegenberg e O. Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

BICUDO, I. Introdução e tradução. In: EUCLIDES, **Os elementos**. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Portugal: Ed. Porto, 1994.

BOUVIER, A ; GEORGE, M. **Dicionario de Matematicas**. Tradução de M. Armiñi e V. Bordoy. Madrid: Akal Editor, 1984.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de E. F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Secretaria de educação fundamental. Brasília: MEC, 1998.

______. **Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio**: matemática. Brasília: MEC, 2002.

______. **PCN+ ensino médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciência da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRAZ, F. M. **História da geometria hiperbólica**. 2009. Monografia (Curso de Especialização em Matemática para Professores) – Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2009. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~espec/ monografiasPdf/Monografia_FernandaMartins.pdf. Acesso em: 21 dez. 2010.

CARVALHO, A. M. F. T. **A Extimidade da demonstração**. 2004. Tese (Doutorado) – Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, São Paulo.

CARVALHO, C. C. S. **Uma análise praxeológica das tarefas de provas e demonstrações em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do ensino médio**. 2007. Dissertação (Mestrado) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CHABERT, J. L. **Proving the fifth postulate**: true or false? In: History of Mathematics, Histories of Problems. Paris: Ellipses, 1997. p.285-305.

COSTA, M. S., ALLEVATO, N. S. G. **Livro didático de matemática**: análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria. Vidya, v.30, n.2, p.71-80, jul./dez., 2010. Santa Maria, 2010.

CUNHA, A. G. da. **Dicionário etimológico nova fronteira da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1982.

DIAS, M. S. da S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em matemática**: uma articulação entre os tipos de provas e os níveis de raciocínio geométrico. 2009. Tese (Doutorado) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DOUBNOV, I. **Erros nas demonstrações geométricas**. Tradução de Robinson M. Tenório. São Paulo: Atual; Moscou: Mir, 1996. (Coleção Matemática: aprendendo e ensinando.)

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de I. Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, H. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**: Geometria. Trad. H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

FAINGUELERNT, E. K. O ensino de geometria no 1º e 2º graus. **Educação Matemática em Revista**, n.4, p.45–52, 1995. Edição Especial.

______. **Educação matemática**: representação e construção. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FERREIRA, E. B.; SOARES, A. B.; LIMA, J. C. As demonstrações no ensino da geometria: discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias. **BOLEMA**, Rio Claro – SP, ano 22, n.34, p.185-208, 2009.

FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2. ed. ampl. e rev. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2009.

GARCIADIEGO, A. R. Los elementos de euclides, una introducción. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Especial n.1, p.333-348, 2007.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-euclidean geometries**: development and history. 3. ed. New York: Freeman, 1994.

GUIMARÃES, S. D., VASCONCELOS, M. e TEIXEIRA, L. R. M. O ensino de geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: concepções dos acadêmicos do normal superior. **Revista Zetetiké**, v.14, n.25, 2006, p.93-105.

HANNA G. Some pedagogical aspects of proof. **Interchange**. 21 (1): 6–13, 1990.

HANNA, G.; BARBEAU, E. Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge. **ZDM Mathematics Education**, v.40, p.345-353, 2008.

HANNA G., DE VILLIERS, M. ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education. **ZDM Mathematics Education**, v. 40, n.2, 2008.

HANNA G., JANKE N. **Proof and proving**. In: Bishop A. et al. (Eds.) International handbook of mathematics education. Dordrecht: Kluwer Acad. Pub., 1996.

HOUAISS. **Dicionário eletrônico da língua portuguesa**. Versão monousuário 3.0. Junho, 2009. Ed. Objetiva Ltda.

IMENES, M. I. A geometria no primeiro grau: experimental ou dedutiva? **Revista de Ensino de Ciências**, n.19, p. 55-60, out. 1987.

KATZ, V. J. **A History of mathematics**: an introduction. 2 ed. Addison-Wesley, 1998.

LAROUSSE, K. **Pequeno dicionário enciclopédico**. Rio de Janeiro: Ed. Larousse do Brasil Ltda., 1979.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, n.4, p.3-13, 1995. Edição Especial.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides**: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Tradução de E. E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2007. 224p.

NAGAFUCHI, T. **Um estudo histórico-filosófico acerca do papel das demonstrações em cursos de bacharelado em matemática**. 2009. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

NASSER, L.; TINOCO, L. **Argumentações e provas no ensino de matemática**. projeto fundão. Instituto de Matemática, UFRJ. Rio de Janeiro: UFRJ, 2001.

OMNÈS, R. **Filosofia da ciência contemporânea**. Tradução de Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Ed. Unesp, 1996.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria**: uma visão histórica. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

______. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, ano 1, n.1, 1993.

PAVANELLO, R. M ; ANDRADE, N. G. Formar professores para ensinar geometria: um desafio para as licenciaturas em matemática. **Educação Matemática em Revista** – SBEM, ano 9, n. 11, p.78-87, 2002.

PEREIRA, M. R. O. **A geometria escolar***:* uma análise dos estudos sobre o seu abandono. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino da geometria para as camadas populares (1º E 2º graus)**. 1991. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1991.

PIAGET, J; GARCIA, R. **Psicogênese e história das ciências**. Tradução de M. F. de M. R. Jesuíno. 1ª ed. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

PIETROPAOLO, R. C. Demonstrações e educação matemática – uma análise de pesquisas existentes. SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 3. Curitiba. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2006.

PODVAL, M. F. T. R. Demonstração em Direito. **BOLEMA**, Rio Claro – SP, ano 15, n.18, p.112-122, 2002.

ROLKOUSKI, E. Demonstração em Geometria: alunos de licenciatura, ambientes informatizado e reflexões para a formação do professor de Matemática. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 54, p. 1-150, jan./jun.2009.

SANT'ANNA, A. S. **O que é um axioma**. Barueri: Manole, 2003 (Série Lógica Matemática, v. 1).

TARSKI, A. **A concepção semântica da verdade**. Tradução de C. Braida et. al. São Paulo. Ed. UNESP, 2007.

TARSKI, A. **Truth and proof**. Scientific American, ed. n.220, 1969.

VIANNA, C. C. S. **O papel do raciocínio dedutivo no ensino da matemática**. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1988.

APÊNDICES

APÊNDICE A

PLANO DE AULA

Universidade Estadual de Londrina
Departamento de Matemática – CCE
Programa/Curso: Ensino de Ciências e Educação Matemática-Mestrado.

EDELAINE CRISTINA DE ANDRADE

PLANO DE AULA/ SEGUNDO SEMESTRE/ 2010.

Tema: O modo demonstrativo no ensino de geometria e sua aceitabilidade pelos alunos.

Objetivos: propor aos alunos a construção da demonstração da *Proposição I* de Euclides; analisar a receptividade e a importância da demonstração geométrica.

Conteúdo: Geometria demonstrativa.

Introdução: apresentação do professor pesquisador; do tema da aula; dos objetivos da aula.

Tempo estimado: 4 aulas de 50 minutos cada.

Público alvo: 1º ano do Ensino Médio.

Material necessário: Os alunos serão filmados mediante autorização concedida por eles e pela direção escolar e entrevistados com relação à receptividade à atividade, às dificuldades apresentadas, a importância que dão à demonstração geométrica, além de suas opiniões quanto à abordagem do tema da aula. Lembrando que os alunos que concordarem com a filmagem/gravação não terão seus nomes revelados, e, para tanto, o professor pesquisador na descrição do trabalho se referirá por A1, A2 e assim sucessivamente.

Desenvolvimento:

ETAPA 1 – O professor pesquisador depois de uma apresentação tanto pessoal quanto de seus objetivos, e de que as atividades a serem desenvolvidas versarão exclusivamente sobre a geometria, dialogará com os alunos sobre a possibilidade de suas conversas serem gravadas em áudio e vídeo. Os alunos que permitirem a gravação/filmagem receberão uma autorização que será encaminhada aos seus responsáveis, os quais deverão assinar dando ciência do fato.

Na sequência, iniciar-se-á um questionamento quanto à geometria. O professor pesquisador estará exercendo o papel de questionadora, ainda não será o momento de responder a nenhuma dessa perguntas ou outras que porventura possam surgir no decorrer do questionamento. Lembrando que os alunos que concordarem com a filmagem/gravação não terão seus nomes revelados, e, para tanto, o professor pesquisador na descrição do trabalho se referirá por A1, A2 e assim sucessivamente.

Possíveis perguntas:

1. O que é geometria para você?
2. O que você sabe sobre geometria?
3. Você já ouviu falar em Euclides?
4. Você já ouviu falar em construção geométrica?
5. O que você entende por construção geométrica?
6. O que é uma demonstração?
7. Você já ouviu falar em geometria demonstrativa? Sabe o que é?

ETAPA 2 – O professor pesquisador retoma o questionamento apresentado na aula anterior e agora, com o auxílio de um globo mostrará onde Euclides viveu, em que época, mostrará imagens de Euclides, falará da importância dos *Elementos* para a matemática, e também responderá às referidas indagações dos alunos.

Aqui será o momento de apresentar ao aluno um breve histórico sobre a geometria, a geometria grega/geometria euclidiana, sobre Euclides, sobre *Os Elementos*, importância dessa obra e sobre o conteúdo dessa obra.

ETAPA 3 – O professor pesquisador fará alguns questionamentos aos alunos, como:

1. O que é um triângulo equilátero?
2. O que você entende por construir?

Respondidos esses questionamentos, entregará aos alunos uma folha de sulfite com a *Proposição I* de Euclides: “Construir um triângulo equilátero, dado um de seus lados”. E pedirá que coloquem seus nomes e que expliquem passo a passo como provar que isso é verdade. Essa explicação pode ser com a utilização de desenho(s), por palavras, com a utilização do material geométrico, ou seja, aqui é o momento em que o aluno descreverá como pensou.

Em um segundo momento desta aula, será entregue aos alunos outra folha de sulfite com a mesma proposição, porém, agora o professor pesquisador poderá induzir os alunos na construção, com a utilização de régua e compasso. Para tanto, o professor pesquisador deverá ter material suficiente para disponibilizar a todos os alunos que precisarem.

Da mesma maneira, os alunos descreverão passo a passo o que realizaram.

ETAPA 4 – Esta aula iniciará com a retomada do que foi realizado nas aulas anteriores. A partir daí, o professor pesquisador entregará aos alunos uma folha de sulfite com a *Proposição I* de Euclides e com a demonstração seguida por ele. Tomaremos como referência o livro traduzido por Irineu Bicudo (2009). No verso desta folha, constarão todas as definições, postulados e noções comuns utilizadas por Euclides para a referida demonstração.

Na sequência, os alunos serão indagados com as possíveis questões:

1. Que relação existe entre esses passos e a demonstração de Euclides?
2. Como Euclides fez e como você pensou?
3. Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma de Euclides?
4. Onde você pensou usando a forma de Euclides?
5. Como você pensou usando a forma de Euclides?

Assim, nossa intenção será averiguar que receptividade teve a forma clássica.

APÊNDICE B

PRIMEIRA ATIVIDADE ENTREGUE AOS PARTICIPANTES.

Nome: ____ Data: ___/___/___

Construir um triângulo equilátero dado um de seus lados.

APÊNDICE C

SEGUNDA ATIVIDADE ENTREGUE AOS PARTICIPANTES.

Nome: ____ Data: ___/___/___

Construir um triângulo equilátero dado um de seus lados.

APÊNDICE D

TERCEIRA ATIVIDADE ENTREGUE AOS PARTICIPANTES.

Nome: ____ Data: ___/___/___

PROPOSIÇÃO I – ***Construir um triângulo equilátero dado um de seus lados.***

Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero.

Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB.

E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.

Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB.

Portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo eqüilátero; o que era preciso fazer.

A PROVA DA PRIMEIRA PROPOSIÇÃO DE EUCLIDES

Para a demonstração da *Proposição I* de Euclides (EUCLIDES, 2009), necessitaremos de alguns passos que aqui, para melhor comodidade trataremos da seguinte forma: *definições* (**D**), *postulados* (**P**) e *noções comuns* (**N**). São eles:

D1. Ponto é aquilo de que nada é parte.

D3. E extremidades de uma linha são pontos.

D2. E linha é comprimento sem largura.

D4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.

D13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.

D14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.

D15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha (que é chamada circunferência), em relação à qual todas as retas que a encontram (até a circunferência do círculo), a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.

D16. E o ponto é chamado centro do círculo.

D20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.

N1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.

P1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

P3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
Nome: ____ Data: ___/___/___

LEGAL QUE VOCÊ ESTÁ PARTICIPANDO COMIGO DESTE TRABALHO! OBRIGADA!

SEI QUE VOCÊ É CAPAZ DE RESPONDER A ESTAS QUESTÕES. ENTÃO, VAMOS LÁ!

1. Você entendeu a demonstração de Euclides?
2. O que você acha desse método de Euclides?

3. Você vê alguma relação entre o que você fez e a forma de Euclides?
4. Onde e como você pensou usando a forma de Euclides?
5. Você consegue ler e compreender o que Euclides fez?
6. Esta demonstração de Euclides faz algum sentido para você?

APÊNDICE E

AUTORIZAÇÃO – (concedida pelo diretor da escola)

EU, ____, DIRETOR(A) do Colégio____ __, da cidade de Londrina – PR, AUTORIZO a aluna EDELAINE CRISTINA DE ANDRADE, regularmente matriculada no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina – UEL, a utilizar, parcial ou integralmente, anotações, gravações em áudio ou vídeo, de falas ou imagens de alunos deste colégio, para fins de pesquisa relacionada ao mestrado, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que os nomes dos envolvidos não serão citados em hipótese alguma.

NOME DO DIRETOR(A):____

RG:____

DATA:____

TELEFONE: ____

E-MAIL: ____

ASS.:____

ORIENTADORA: MARINEZ MENEGHELLO PASSOS

ASS.:____

APÊNDICE F

AUTORIZAÇÃO – (para alunos maiores de idade)

AUTORIZO a aluna EDELAINE CRISTINA DE ANDRADE, regularmente matriculada no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar, parcial ou integralmente, anotações, gravações em áudio ou vídeo, de minhas falas ou imagem, para fins de pesquisa relacionada ao mestrado, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que seja garantido o meu anonimato no relato da pesquisa.

NOME:_______________________________________

RG:____

DATA:____

TELEFONE: ___________________________________

E-MAIL: _____________________________________

ASS.:____

ORIENTADORA: MARINEZ MENEGHELLO PASSOS.

ASS.:____

APÊNDICE G

AUTORIZAÇÃO – (para alunos menores de idade)

AUTORIZO a aluna EDELAINE CRISTINA DE ANDRADE, regularmente matriculada no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina – UEL, a utilizar, parcial ou integralmente, anotações, gravações em áudio ou vídeo, das falas ou imagem do menor ______________________________________, para fins de pesquisa relacionada ao mestrado, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que seja garantido o meu anonimato no relato da pesquisa.

NOME DO PAI OU
RESPONSÁVEL:____

RG:____

DATA:____

TELEFONE: ____

E-MAIL: ____

ASS.:____

ORIENTADORA: MARINEZ MENEGHELLO PASSOS.

ASS.:____

APÊNDICE H

ACOMODAÇÃO DA PRIMEIRA PERGUNTA INVESTIGATIVA.

Categoria: 1.1 – Remissão a Euclides	
Subcategoria: 1.1.1 – Remissão a Euclides em relação à construção em específico	
Código da unidade	**Unidade**
A1	Sim, porque além de demonstrar ele também explica.
A3	Sim. Euclides demonstrou muito bem a formação do triângulo equilátero.
A7	Sim, eu entendi porque ele demonstra como usar os círculos, os pontos, as letras.
A22	Sim, pois ele mostra passo a passo o que ele fez para formar um triângulo equilátero e provou que todos os lados são iguais.
A23	Eu entendi a demonstração de Euclides descrita. Por um lado A por outro lado que o equilátero e coisas iguais a mesma coisa entre si. Por exemplo: em circunferência temos a linha reta e os três lados iguais, formando um triângulo equilátero. (Transcrevemos como o aluno indicou, porém não conseguimos interpretar o exemplo por ele citado.)
A27	Sim, eu entendi que a forma que ele fez é mais fácil para construir a figura.
Subcategoria: 1.1.2 – Remissão à pessoa de Euclides	
Código da unidade	**Unidade**
A5	Sim, porque ele teve que estudar muito para demonstrar como se monta o triângulo equilátero.
A8	Bom, Euclides foi um verdadeiro mestre da matemática com se fala, o pai da matemática.
A12	Eu entendi que Euclides naquela época ele era inteligente para saber tantas coisas e escrever um livro muito bom e fácil de entender.
Categoria 1.2 – Remissão ao professor pesquisador	
Código da unidade	**Unidade**
A4	Sim, porque a professora explicou muito bem como fazer.
A11	Sim. Porque a professora [...] nos explicou o método de que é pegar o todo dado de A a B fazer dois círculos com a ponta seca do compasso em cada um dos centros, o centro C fica entre os dois círculos. Eu fiz duas linhas, uma do centro C ao centro A e outra do centro C ao centro B, aí temos um triângulo equilátero.
Categoria 1.3 – Remissão ao método utilizado pelo aluno no desenvolvimento da atividade	
Código da unidade	**Unidade**
A2	Sim, lendo e observando a imagem.
A10	Sim, olhando o desenho do triângulo e as letras quando lemos a demonstração fica fácil de entender.
A15	Eu entendi que AB é para construir um triângulo equilátero.
A19	Na folha não, no quadro sim. (Interpretamos que o depoente tenha se referido à construção realizada na lousa pelo pesquisador, e quando diz “na folha” é porque está se referindo à demonstração euclidiana.)
Categoria 1.4 – Dados quantitativos, ou seja, alunos que disseram apenas “sim” ao questionamento	
A6	Sim.
A13	Sim.
A18	Sim.
A24	Sim.
A25	Sim.
A26	Sim.

APÊNDICE I

ACOMODAÇÃO DA SEGUNDA PERGUNTA INVESTIGATIVA.

Categoria: 2.1 – Remissão ao método ser bem explicado, fácil, bom e/ou interessante	
Código da unidade	**Unidade**
A1	Eu acho que é bem explicado e fácil de fazer.
A2	A demonstração é bem grande de fazer, mas foi a forma mais fácil que eu aprendi, eu nunca pensei em fazer um triângulo assim.
A3	Acho um método simples de compreender, Euclides justifica todos os detalhes corretamente.
A4	Eu acho um pouco mais fácil.
A5	Achei muito interessante porque ele deu uma demonstração de como se faz o triângulo equilátero.
A6	Mais fácil e longo, deixa mais claro para entender. (Se é "mais claro para entender" supõe-se o fato de estar bem explicado.)
A7	Eu acho que esse método é muito interessante porque com as medidas, os pontos, as letras, os círculos com a régua pode se construir um triângulo equilátero perfeito.
A11	Eu acho bom que é um método que não tem tanto trabalho para fazer um triângulo equilátero e é mais prático, também é bom aprender coisas novas.
A12	É um método muito bom, fácil de entender.
A18	Mais fácil do que o normal.
A22	O método é bem fácil de executar e ele é bem explicativo para podermos entender melhor, mas, porém, para que tudo saia correto, temos que seguir exatamente o que Euclides fala.
A23	Muito bom.
A25	Interessante. Muito bom para quem tá começando aprender.
A26	Muito bom, pois é mais fácil o triângulo equilátero. (Percebemos que o aluno esteja se referindo a ser fácil a construção do triângulo equilátero.)
A27	Bom, eu acho que ele fez bem de ter criado esse método, mas tem pessoas que não compreendem esse método porque ele pode nos confundir.
Categoria 2.2 – Remissão ao método não ser tão fácil (DIFÍCIL)	
Código da unidade	**Unidade**
A10	Um pouco complicado de entender, mas temos menos chances de errar nas medidas.
Categoria 2.3 – Remissão à importância da matemática	
Código da unidade	**Unidade**
A8	Demonstra a importância da matemática.
Categoria 2.4 – Remissão à novidade na aprendizagem	
Código da unidade	**Unidade**
A2	A demonstração é bem grande de fazer, mas foi a forma mais fácil que eu aprendi, eu nunca pensei em fazer um triângulo assim.
A11	Eu acho bom que é um método que não tem tanto trabalho para fazer um triângulo equilátero e é mais prático, também é bom aprender coisas novas.
A13	Um método de Euclides é uma coisa diferente, não tinha ouvido falar de Euclides.
A19	Diferente, mas inteligente. (Compreendemos que esse "diferente" refere-se à novidade.)
Categoria 2.5 – Remissão à incoerência quanto à pergunta	
Código da unidade	**Unidade**
A15	Eu acho que um lado com centro A, e por outro lado, com a distância AB.
A24	Eu acho que esse método que ele foi criado para possamos o demonstrativo de como podemos criar os triângulos e quadrados e as outras formas etc.

APÊNDICE J

ACOMODAÇÃO DA TERCEIRA PERGUNTA INVESTIGATIVA.

Categoria: 3.1 – Existe relação entre as duas formas	
Subcategoria: 3.1.1 – Existe relação entre as duas formas referindo-se a Euclides	
Código da unidade	**Unidade**
A3	Sim. Porque Euclides usou a mesma forma que eu usei, as mesmas letras etc.
A5	Sim, porque usando a forma de Euclides eu construí o triângulo equilátero com muita facilidade, confesso que se não tivesse o ponto A e o ponto B não seria tão fácil não.
A6	Sim, a forma de Euclides dá na mesma do que fazer um triângulo. É mais fácil usando o compasso fica mais fácil nas medidas.
A18	Não muito, sei que nós dois fizemos o triângulo de forma diferente. (Interpretamos que, quando o depoente diz “não muito” subentende-se que existe relação, talvez não de forma tão nítida, mas existe, por este motivo, inserimos este depoimento nesta categoria.)
A22	Sim, pois como ele eu usei de formas geométricas circulares para conseguir fazer o triângulo equilátero corretamente. (Quando o depoente falou “ele” evidenciamos que tenha se referindo a Euclides.)
A23	Ah, mas ou menos, porque eu fiz do meu jeito e imaginei, ele fez com uma boa explicação. (Quando o depoente fala “mais ou menos” compreendemos que de uma forma ou outra, exista relação entre o que ele fez anteriormente e a demonstração apresentada por Euclides.)
Subcategoria: 3.1.2 – Existe relação entre as duas formas referindo-se aos pontos	
Código da unidade	**Unidade**
A1	Porque a única coisa que tem de semelhança é a ligação de A, B, C.
A3	Sim. Porque Euclides usou a mesma forma que eu usei, as mesmas letras etc.
A5	Sim, porque usando a forma de Euclides eu construí o triângulo equilátero com muita facilidade, confesso que se não tivesse o ponto A e B não seria tão fácil não.
A7	A relação que eu vejo é que eu usei a forma e desenhei um triângulo equilátero e usei as mesmas medidas e as letras etc.
A11	Sim, eu fiz praticamente igual, mas não fiz os círculos de centro C.
A24	A relação foi com a distância entre AB e os círculos e a medida.
A26	Na verdade não muito, pois o que eu fiz foi o que eu entendi no ligamento dos pontos para formar o triângulo equilátero.
A27	Sim, porque ele dá todas as letras que nós usamos, ou seja, ele dá o primeiro ponto AB depois CDE.
Subcategoria: 3.1.3 – Existe relação entre as duas formas referindo-se ao uso do material geométrico	
Código da unidade	**Unidade**
A6	Sim, a forma de Euclides dá na mesma do que fazer um triângulo. É mais fácil usando o compasso, fica mais fácil nas medidas.
Subcategoria: 3.1.4 – Existe relação entre as duas formas e refere-se à teoria e prática	
Código da unidade	**Unidade**
A10	Tudo, a única diferença é que a figura está na prática e a demonstração está na teoria.
Subcategoria: 3.1.5 – Existe relação, porém não é apresenta de forma clara pelos	

depoentes	
Código da unidade	**Unidade**
A8	Sim e não sou só eu mais meus colegas, você bom todos porque a matemática está no dia a dia. (Nesta fala não conseguimos ter clareza do que o depoente quis dizer.)
A13	Sim, um pouquinho.
Categoria 3.2 – Remissão a não existir relação entre as duas formas	
Código da unidade	**Unidade**
A2	Não, utilizei apenas a régua.
A12	Pelo menos eu não vi nenhuma relação.
A19	Não, porque só usei a régua.
A25	Pelo menos eu não vi nenhuma relação.
Categoria: 3.3 – Dados quantitativos, ou seja, alunos que foram sucintos em suas respostas	
Código da unidade	**Unidade**
A4	Sim.
A15	Não.

APÊNDICE K

ACOMODAÇÃO DA QUARTA PERGUNTA INVESTIGATIVA.

Categoria: 4.1 – Remissão aos pontos	
Código da unidade	**Unidade**
A1	Somente dá ligação e junção entre A, B, C.
A2	Somente nas ligações A, B, C.
A4	Por um lado A eu fiz e B um círculo que ia ser o centro entre A e B.
A5	Com os pontos dados eu pensei: ligando os pontos construirei o meu triângulo equilátero.
A7	Eu usei a forma de Euclides para construir um triângulo equilátero com as mesmas medidas, as letras e círculos e pontos foi assim que eu pensei usando a forma. (Quando o aluno menciona a palavra "forma", entendemos que está se referindo aos "passos" seguidos na demonstração euclidiana.)
A8	Bom, aqui mesmo na escola. Bom, aprendi um pouco mais, você tem que pegar primeiro A e depois B para fazer o triângulo equilátero.
A11	Pegar a linha dada de A a B no centro A com a ponta seca do compasso eu faço um círculo e no centro B eu faço um circulo também. Temos o ponto BCD e ACE que são os círculos, o centro C se fizermos uma risca até o centro A fazemos outro lado do triângulo e C a B fazemos outro lado do triângulo.
A19	O jeito do círculo usando o compasso.
A27	Eu pensei em usar a fórmula quando ele nos dá o ponto AB e depois é só usar a cabeça e fazer os círculo e usar as outras letras CDE. (Quando o aluno menciona a palavra "fórmula", entendemos que está se referindo aos "passos" seguidos na demonstração euclidiana.)
Categoria 4.2 – Remissão à explicação na lousa pelo professor pesquisador	
Código da unidade	**Unidade**
A18	Na sala com a [...], não pensei muito como ele foi ela quem me ensinou a pensar assim. (Evidenciamos que "ele" refere-se a Euclides.)
A23	Ah, imaginei e pensei da forma que você explicou no quadro da forma mais clara. (Quando o depoente diz "quadro" está se referindo à lousa.)
Categoria 4.3 – Remissão ao modo realizado por Euclides	
Código da unidade	**Unidade**
A3	Pensei e vi que Euclides usa o mesmo método que eu.
A6	Eu nunca pensei em fazer isso como Euclides explicou, do jeito que ele explicou parece ter ficado mais claro, mais fácil de fazer, eu nunca pensei em fazer o que Euclides explicou até hoje.
A7	Eu usei a forma de Euclides para construir um triângulo equilátero com as mesmas medidas, as letras e círculos e pontos foi assim que eu pensei usando a forma. (Quando o aluno menciona a palavra "forma", entendemos que está se referindo aos "passos" seguidos na demonstração euclidiana.)
A10	Eu só usei a forma de Euclides em aula, eu achei que como ele explica tudo é bem detalhado, lendo com um pouco de paciência e atenção fica fácil de entender.
A22	Em basicamente tudo, pois usei desta fórmula para fazer o triângulo equilátero. (Quando o aluno menciona a palavra "fórmula", entendemos que está se referindo aos "passos"

	seguidos na demonstração euclidiana.)
Categoria: 4.4 – Remissão a Euclides juntamente com a explicação do professor pesquisador em aula	
Código da unidade	**Unidade**
A13	Na sala com a ajuda da professora e conhecendo mais sobre Euclides.
Categoria 4.5 – Remissão à incoerência quanto à pergunta	
Código da unidade	**Unidade**
A12	De nenhum jeito.
A15	Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
A24	Nos trabalhos da escola quando medimos algo.
A25	Em desenhos, trabalhos escolares, fazer alguma montagem etc.
A26	Na formação do triângulo equilátero.

APÊNDICE L

ACOMODAÇÃO DA QUINTA PERGUNTA INVESTIGATIVA.

Categoria: 5.1 – Compreensão	
Subcategoria: 5.1.1 – Existe compreensão	
Código da unidade	**Unidade**
A7	De 100% eu pude compreender 80.
A23	Sim, claro.
A26	Sim.
Subcategoria: 5.1.2 – Existe compreensão, mas os depoentes não a apresentam de forma clara	
Código da unidade	**Unidade**
A1	Mais ou menos.
A4	Mais ou menos.
A5	Posso até entender mais prefiro deixar para ele (Euclides) mesmo.
A11	Mais ou menos.
A12	Mais ou menos.
A18	Mais ou menos.
A19	Mais ou menos.
Subcategoria: 5.1.3 – Remissão à compreensão após a aula dada pelo professor pesquisador	
Código da unidade	**Unidade**
A2	Sim, observando a imagem sim. (Quando o aluno se refere à “imagem”, percebemos que ele está associando a demonstração às aulas que o pesquisador ministrou anteriormente a esta atividade.)
A8	Um pouco mais, aprendi muita coisa.
A13	Não conseguiria, mas depois da aula sim.
Subcategoria: 5.1.4 – Existe compreensão e existe a remissão a Euclides	
Código da unidade	**Unidade**
A15	Consigo sim, ele (Euclides) fez que A, até AB conseguiu formar um triângulo equilátero.
A24	Sim, se ler bem vou conseguir entender, ver a demonstração dele (Euclides), porque lendo vai se imaginando as figuras.
Categoria 5.2 – Existe dificuldade	
Subcategoria: 5.2.1 – Remissão à construção na lousa feito pelo professor pesquisador	
Código da unidade	**Unidade**
A22	Somente com a escrita ficou meio complicado, mas com o desenho é mais fácil de compreender.
Subcategoria: 5.2.2 – Remissão a ter dificuldade, mas existe compreensão	
Código da unidade	**Unidade**
A3	Apesar de ter tido dificuldades, compreendi o que Euclides fez.
A6	Sim, mas ele coloca aquelas letras confunde um pouco a cabeça, mas consegui compreender o que ele fez.
A10	Sim, tenho um pouco de dificuldade, mas consigo entender.
A27	No começo não consegui compreender, mas depois que eu li agora sim eu compreendi.
Categoria 5.3 - Remissão a não existir compreensão	
Código da unidade	**Unidade**
A25	Não.

APÊNDICE M

ACOMODAÇÃO DA SEXTA PERGUNTA INVESTIGATIVA.

Categoria: 6.1 – Existe interpretação quanto ao método da demonstração de Euclides	
Subcategoria: 6.1.1 – Remissão ao pesquisador	
Código da unidade	**Unidade**
A27	Sim, pelos pontos que ele se refere e pelo que a professora falou a gente consegue ligar os pontos depois que nós fizemos o desenho eu consegui interpretar melhor a fórmula de Euclides.
Subcategoria: 6.1.2 – Remissão à construção geométrica	
Código da unidade	**Unidade**
A1	Porque ensina que tudo é possível até uma fórmula de uma figura geométrica. (Quando o aluno menciona a palavra “fórmula”, entendemos que está se referindo aos “passos” seguidos na demonstração euclidiana.)
A3	Sim. Porque sua escrita estava muito compreensível com o triângulo equilátero.
A5	Faz. Como se fosse os pontos dados e sendo medindo as laterais com a mesma medida, com certeza terei meu triângulo equilátero.
A7	Sim, porque com as medidas perfeitas você pode construir muitas coisas. Ex: casa, prédio, escola etc.
A8	Faz sentido para mim, que é bem mais fácil do que ficar medindo.
A22	Com o desenho é bem mais fácil, pois a explicação é meio confusa.
A25	Sim. A demonstração ajuda a desenvolver melhor um triângulo equilátero sem ficar se batendo com nenhuma dúvida.
A26	Fez, pois ficou mais fácil de fazer o triângulo.
A27	Sim, pelos pontos que ele se refere e pelo que a professora falou a gente consegue ligar os pontos depois que nós fizemos o desenho eu consegui interpretar melhor a fórmula de Euclides. (Quando o aluno menciona a palavra “fórmula”, entendemos que está se referindo aos “passos” seguidos na demonstração euclidiana.)
Subcategoria: 6.1.3 – Remissão a Euclides	
Código da unidade	**Unidade**
A10	Sim, ele explica todos os passos que usamos para construir um triângulo equilátero, que nos dias de hoje com todo nosso desenvolvimento é fácil de compreender, mas no tempo que ele viveu são necessários todos os detalhes para tentar compreender.
A11	Sim, ele fez um método que não precisamos ficar medindo cada dado para ficar da mesma medida.
A19	Sim porque ele provou que todos os lados são iguais.
A27	Sim, pelos pontos que ele se refere e pelo que a professora falou a gente consegue ligar os pontos depois que nós fizemos o desenho eu consegui interpretar melhor a fórmula de Euclides.
Subcategoria: 6.1.4 – Remissão à aprendizagem de outros conteúdos não especificados pelo depoente	
Código da unidade	**Unidade**
A23	Muito, entendi e aprendi várias coisas.
Subcategoria: 6.1.5 – Existe interpretação da demonstração de Euclides e esta torna as coisas mais “fáceis” para o depoente	

Código da unidade	Unidade
A4	Sim, um jeito de fazer mais fácil.
A12	Sim, porque fica mais fácil de fazer as coisas e eu vou precisar no futuro.
A18	Sim, deixa as coisas mais fáceis.
Subcategoria: 6.1.6 – Existe interpretação quanto ao método da demonstração de Euclides e o depoente acredita que utilizará as informações em sua vida escolar	
Código da unidade	**Unidade**
A12	Sim, porque fica mais fácil de fazer as coisas e eu vou precisar no futuro.
A15	Faz sentido sim, porque mais para frente vou usar sim.
Categoria: 6.2 – A demonstração não se apresenta de forma clara para o depoente	
Código da unidade	**Unidade**
A6	Um pouco, é meio estranho ter que usar um compasso para fazer um triângulo.
Categoria: 6.3 – Dados quantitativos	
Código da unidade	**Unidade**
A2	Sim.
A13	Sim, todo.
A24	Sim.

APÊNDICE N

TRANSCRIÇÃO – (intervenções realizadas no contexto didático da primeira etapa)

PP[23]**:** Quando falei para vocês que eu ia desenvolver o trabalho sobre uma parte da matemática, esta parte é a geometria. Alguém aqui sabe me dizer o que é geometria? Q1.1[24]

1[25] – A14: não.

2 – A10: figuras geométricas.

PP: O que mais? O que é geometria?

3 – A1: matemática das figuras geométricas, ângulos e lados.

4 – A4: retângulo. Círculo

5 – A14: retângulo. Quadrado.

6 – A14: como é aquele negócio difícil de falar?

PP: paralelepípedo

7 – A17: área do triângulo.

8 – A11: estuda esse negócio de raio, cúbicos.

9 – A4: Metro quadrado.

PP: Será que metro quadrado é na geometria?

10 – A14: raiz quadrada.

PP: O que a gente usa na geometria? Q2.1[26]

11 – A11: o que cabe dentro do local.

PP: Como assim?

12– A11: raiz cúbica. Nós pegamos uma caixa d'água e vê o que cabe dentro dela. Por exemplo, uma caixa d'água a gente vê quantos litros cabe dentro dela.

PP: A capacidade. O que é a geometria ali?

13 – A11: é o raio que nós utilizamos nos metros para saber quanto que cabe ali de litro de água.

PP: A caixa d'água é uma forma geométrica? Q3.1

14 – A14: claro que sim, é quadrada, retangular.

15 – A14: professora, você sabe de tudo por que você fica perguntando para nós?

PP: Porque eu quero justamente saber o que vocês sabem. Esse é o meu trabalho.

---

[23] A palavra "professor pesquisador" foi por nós abreviada por PP.

[24] Essa codificação refere-se a: Q – Questão; 1 – primeira questão; 1 – primeira etapa.

[25] Esses números que vão de 1 a 79 neste APÊNDICE, e de 80 a 102 no APÊNDICE seguinte, referem-se à numeração da linha.

[26] Essa codificação refere-se a: Q – Questão; 2 – segunda questão; 1 – primeira etapa. E assim, sucessivamente para as demais questões.

PP: Bom... vocês me falaram o que é a geometria. Alguns de vocês falaram o que acha que é a geometria. Então, se vocês falaram o que acham que é a geometria, lógico que já ouviram falar de geometria. Onde que já ouviram falar de geometria? Q4.1

16 – A14: na aula de matemática.

17 – A1: na escola

18 – A5: na sala de aula

19 – A20: em artes.

PP: Ó... o Raí falou uma outra área que usa geometria, que é na arte.

20 – A14: na geografia também.

21 – A13: na música.

PP: A A13 falou que é na música. Na música usa geometria?

22 – A20: Nas linhas, nas notas, nas partituras, nas claves, nos sustenidos, nos pontos.

23 – A14: Na geografia para construir mapas.

24 – A9: na física.

25 – A4: na química.

26 – A14: na geografia.

PP: Onde mais a gente já ouviu falar que tenha a geometria? Q5.1

27 – A14: na bandeira do Brasil.

28 – A4: na construção.

PP: Opa... na construção. Então, se na construção eu uso geometria, o que tem aqui onde vocês estão sentados? É uma construção?

29 – A2: na cadeira.

30 – A14: uma sala de aula.

PP: Uma sala de aula. Tem construção?

PP: Tem geometria?

31 – A4: a televisão tem.

PP: Estamos vendo que tem geometria em várias coisas.

32 – A14: na janela também.

33 – A4: na lâmpada.

34 – A10: tem geometria em um monte de lugar, a gente não faz ideia.

PP: Olha só, a A10 falou que tem geometria em vários lugares. É verdade?

PP: Mas agora, vou perguntar uma coisa: e construção geométrica? Já ouviram falar? Essas palavras: construção geométrica. Já ouviram falar nisso? Construção geométrica. Já ouviram falar? Q6.1

35 – A5: ué... desenhar um quadrado.

PP: Como?

36 – A5: como se fôssemos construir um quadrado ou um triângulo.

37 – A10: tudo o que construímos com a geometria.

PP: Olha só o que a A10 falou. Tudo o que a gente constrói com a geometria. Que mais é construção geométrica?

38 – A20: na música, no traço da partitura.

39 – A14: em todos os lugares.

40 – A11: na construção de casa.

PP: Como assim?

41 – A11: na construção de casa é uma construção geométrica.

42 – A4: na régua.

PP: A régua é uma construção geométrica?

43 – A14: no esquadro.

44 – A14: no compasso.

45 – A4: no apontador.

46 – A14: naquele outro assim que eu esqueci ... ó ... que é tipo uma bola no meio.

PP: Transferidor.

47 – A4: em várias coisas.

48 – A16: círculo. Globo.

49 – A2: nos desenhos.

PP: A2 mostre seu desenho. Tem geometria, tem construção geométrica nos desenhos? (não houve resposta para esta indagação e os participantes ficaram em silêncio).

PP: Agora vou perguntar mais uma coisa para vocês: Quem é Euclides? Já ouviram falar de Euclides? Q7.1

50 – A14: Euclides da Cunha?

PP: Existe também Euclides da Cunha, mas não é esse não. É Euclides da matemática.

51 – A20: já. Mas não lembro.

PP: Onde A20 você já ouviu falar de Euclides?

52 – A20: no colégio que eu estudava antes eu ouvi falar, mas eu não lembro mais.

PP: Existe e o matemático, o geômetra Euclides. Certo. Daí eu queria saber se já ouviram falar de Euclides.

PP: Ninguém mais ouviu falar de Euclides. (neste momento houve um silêncio)

PP: Agora mais uma pergunta. Alguém já ouviu falar em demonstração? Q8.1

53 – A5: já

PP: Quem? O que você falou que era uma demonstração? (o professor pesquisador pediu que repetisse, pois o participante tinha falado em um tom baixo).

54 – A15: demonstrar roupa.

PP: O que mais é uma demonstração?

55 – A5: o trabalho.

56 – A10: você demonstra serviço no trabalho.

PP: A A10 falou que demonstra o serviço. O A5 falou que demonstra o trabalho. O que mais a gente demonstra?

57 – A4: demonstra competência.

58 – A14: demonstra qualidade, competência.

PP: O que é uma demonstração? Na matemática, existe uma demonstração? Q9.1

59 – A14: lógico que existe. Demonstra uma pessoa maravilhosa, bonita.

PP: Existe? O quê?

60 – A22: Primeiro vem o exemplo. Geralmente quando você vai aprender alguma coisa, primeiro vem um exemplo para depois para ver os exercícios para você fazer.

PP: Sim. Isso é uma demonstração? Como assim o exemplo?

61 – A22: primeiro o exemplo para depois te ensinar a fazer.

PP: Primeiro o exemplo para depois te mostrar como se faz? Muito bem.

62 – A20: não.

PP: Não. Então você poderia nos dizer como seria?

63 – A20: o exemplo já é uma demonstração.

PP: Como assim?

64 – A20: não. Ela disse que o exemplo é... depois vem a demonstração.

65 – A22: não. O exemplo é a demonstração.

66 – A20: então... isso que eu estou falando. O exemplo já é a demonstração.

67 – A20: não. Você não falou isso.

68 – A22: falei sim.

PP: Então, o que mais é uma demonstração?

69 – A22: na construção você faz o projeto, desenha tudo, passa para o computador em 3D para poder demonstrar para depois construir. Faz todo o desenho para ver como vai fazer para depois ir lá construir, aí constrói.

PP: O que mais? Ninguém mais?

70 – A3: demonstrar uma peça de teatro.

PP: demonstrar uma peça de teatro? O que mais é uma demonstração?

71 – A22: um desfile a pessoa está demonstrando a roupa.

72 – A19: uma propaganda.

PP: Como assim na propaganda?

73 – A10: mostra o que você quer vender, na propaganda da televisão.

74 – A19: demonstrando para vender.

75 – A10: demonstrando uma pessoa bonita.

76 – A14: uma pessoa maravilhosa, bonita.

PP: Mas, o que é uma demonstração matemática? Q10.1

77 – A5: contas.

78 – A20: o exemplo de uma conta. Tipo... mais... quando eu era pequeno eu não sabia conta de mais, aí me ensinaram. Tipo 1 + 1 é 2. Daí eu aprendi. Foi uma demonstração.

PP: Será que a pessoa só ficar falando para você 1 + 1 = 2, 1 + 1 é 2 ou ela usou alguma coisa? Ela fez alguma coisa diferente, usou algo para te demonstrar?

79 – A20: a professora pegou 2 lápis e ela fez esse lápis mais esse lápis é igual a 2 lápis.

PP: Aí ela te demonstrou? A20: é

PP: O meu objetivo era justamente saber o que vocês pensavam o que vocês achavam.

APÊNDICE O

TRANSCRIÇÃO – (intervenções realizadas no contexto didático da segunda etapa)

PP: Vamos ver o que discutimos na aula de anterior e quem não veio ontem, preste atenção um pouquinho. O que falamos ontem vocês lembram? A21: Falamos sobre a geometria.

PP: E, o que é geometria, alguém lembra? Q11.2[27]

80[28] – A1: figuras geométricas.

81 – A21: figuras geométricas. É tudo, em tudo que vemos tem geometria.

82 – A10: onde usamos a geometria. Uma construção geométrica.

PP: O que é uma construção geométrica lembra que falamos isso? Q12.2[29]

83 – A11: é construir uma figura geométrica.

PP: Construir uma figura geométrica. Para construir uma figura geométrica, nós precisamos de algum material?

84 – A1: régua.

85 – A11: precisamos de algum material geométrico.

PP: Régua, compasso, o que mais?

86 – A1: precisamos de régua, compasso, transferidor, aquela régua triangular.

87 – A5: esquadro.

PP: Nós falamos de Euclides. Quem é Euclides, lembram o que falamos? Q13 .2

88 – A10: foi ele quem iniciou a geometria.

PP: Isso, o que mais. Alguém mais pode ajudar? O que mais nós falamos de Euclides ontem?

89 – A11: ele nasceu em um país e viveu em outro.

90 – A11: não se sabe quando e onde ele morreu.

91 – A5: ele escreveu vários livros.

92 – A10: ele escreveu aquele livro.

PP: Isso. Foi ele quem escreveu o livro Os Elementos. Hoje eu trouxe o livro novamente para mostrar pra quem não viu o livro ontem. Lógico que não era essa capa, não esse material, nem nessa língua. Foi escrito em outra língua, ele escreveu em grego. Do grego tiveram várias outras traduções. Na [...] (universidade da cidade) tem a versão em inglês. Essa aqui que estou mostrando a vocês é uma tradução. Este livro teve várias outras traduções. Esta tradução em português foi lançada no final do ano passado. Euclides escreveu os 13 livros, e aqui tem esses 13 livros de Euclides.

---

[27] Essa codificação refere-se a: Q – Questão; 11 – décima primeira questão; 2 – segunda etapa.
[28] Esses números que vão de 80 a 102 referem-se à numeração da linha.
[29] Essa codificação refere-se a: Q – Questão; 12 – décima segunda questão; 2 – segunda etapa. E assim, sucessivamente, para as demais questões.

PP: O que mais falamos de Euclides ontem?

93 – A21: ele fez a matemática por causa das marcações de terra, por causa das enchentes do Rio Nilo.

PP: A geometria surgiu com a necessidade de marcar as terras com as enchentes do Rio Nilo. O que mais?

94 – A22: ele viveu aproximadamente 300 a.C.

PP: Isso mesmo, muito bem. A matemática ajudou a gravar uma data.

PP: O que mais? O que mais falamos ontem? (ninguém mais se manifestou).

PP: Bem, agora vou fazer outra pergunta: O que é um triângulo equilátero? Q14.2

95 – A1: tem 3 lados.

96 – A21: tem todos os ângulos iguais.

97 – A22: os ângulos são iguais.

PP: Triângulo equilátero é o triângulo que tem todos os lados iguais (o professor pesquisador representou na lousa o triângulo equilátero e mostrou a classificação dos triângulos quanto ao seu lado).

PP: Quem me diz qual será a medida de cada um desses ângulos? Q15.2

98 – A22: 120^o

99 – A17: 180^o

PP: 180 cada lado?

100 – A17: 180^o é a soma dos três lados.

101 – A22: não. 90^o cada lado.

102 – A5: Não é 60^o? Porque são três vezes para dar 180^o.

PP: Então. Mas, qual das duas alternativas está correta? Qual das duas eu vou utilizar? A primeira ideia ou a segunda? (neste momento, o professor pesquisador explicou e representou na lousa o valor dos ângulos internos dos triângulos e a soma dos ângulos de uma circunferência).