UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

VANESSA LUCENA CAMARGO DE ALMEIDA

QUESTÕES NÃO-ROTINEIRAS:
A PRODUÇÃO ESCRITA DE ALUNOS DA GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Londrina
2009

VANESSA LUCENA CAMARGO DE ALMEIDA

QUESTÕES NÃO-ROTINEIRAS: A PRODUÇÃO ESCRITA DE ALUNOS DA GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.

Londrina
2009

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

A447q Almeida, Vanessa Lucena Camargo de.
Questões não-rotineiras : a produção escrita de alunos da graduação em matemática / Vanessa Lucena Camargo de Almeida. – Londrina, 2009.
144 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2009.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Produção escrita em matemática – Teses. 3. Matemática – Estudo e ensino – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDD 51:37.02

VANESSA LUCENA CAMARGO DE ALMEIDA

QUESTÕES NÃO-ROTINEIRAS:
A PRODUÇÃO ESCRITA DE ALUNOS DA GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Helena Noronha Cury
Centro Universitário Franciscano - UNIFRA

Profa. Dra.Vanderli Marino Melem
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 02 de Março de 2009.

Nunca é tarde para ser você...

AGRADECIMENTOS

Ao bom **Deus**, por me amar e proporcionar maravilhas em minha vida.

À linda família que tenho, por me oportunizar uma vida com muita fé, dignidade, humildade e expectativas. Em especial agradeço aos meus pais Francisco e Mariza, aos meus irmãos Polyana e Jean e ao meu noivo Julio Cezar.

À professora Regina Luzia Corio de Buriasco, por ter acreditado em mim, por ter me dado oportunidades e por ter-me feito pensar e repensar sobre assuntos que se tornaram essenciais para o meu profissionalismo.

À professora Vanderli Marino Melem, por continuar a contribuir com meus estudos.

À professora Helena Noronha Cury e à professora Angela Marta Pereira das Dores Savioli, pelas sugestões e contribuições.

Ao grupo GEPEMA, pelos estudos e discussões.

Aos meus amigos, em especial, Bruno, Edilaine e Cílio, pelas conversas, incentivos, conselhos e contribuições.

À CAPES, pela bolsa concedida, e ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

À Universidade Estadual de Londrina e aos alunos do curso de Matemática, pela credibilidade.

[...] o que é discernir?
Discernir é partir, é examinar, estudar,
olhar as coisas por outro lado.
Isso é o difícil da vida, porque
sempre achamos certo o nosso lado.
Discernir não é julgar pelas aparências.
Discernir é olhar de todos os ângulos possíveis com
todas as possibilidades.
(LÉO, 2006, p. 59-60)

ALMEIDA, Vanessa Lucena Camargo de. **Questões não - rotineiras**: a produção escrita de alunos da graduação em Matemática. 2009. 135f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

RESUMO

Tomando a avaliação como prática de investigação, este estudo analisa a produção escrita de alunos do Bacharelado e da Licenciatura em Matemática de uma universidade pública, em questões discursivas consideradas não-rotineiras nas aulas de Matemática. A abordagem é predominantemente qualitativa de cunho interpretativo, tendo por base as orientações presentes na Análise de Conteúdo, o que permitiu verificar como esses alunos lidam com esse tipo de questão no que diz respeito à interpretação e uso que fazem das informações contidas nos enunciados, às estratégias mais utilizadas e ao conhecimento de conteúdos matemáticos que apresentam ao resolverem as questões. Para tanto, considerou-se um processo de matematização envolvendo quatro fases: compreensão, estratégia, procedimento e resolução da questão. A investigação aponta como pontos relevantes que: a maioria dos alunos utiliza-se de estratégias tipo escolares nas resoluções das questões; os alunos lidam bem com os algoritmos envolvidos nas estratégias escolhidas; tanto os alunos de Licenciatura quanto os de Bacharelado apresentam registros escritos que indicam um processo de matematização semelhante.

Palavras-chave: Educação matemática. Avaliação como prática de investigação. Análise da produção escrita em matemática. Matematização.

ALMEIDA, Vanessa Lucena Camargo de. **Non-routine questions**: the written production of math undergraduate students. 2009. 135p. Dissertation (Master Degree in Science Teaching and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ABSTRACT

Considering evaluation an investigation practice, this study analyzes the written production of Math undergraduate students (Bachelor and Teaching Degrees) from a public university in non-routine discursive questions. The approach is predominantly qualitative and interpretative, based on the guidelines put forward by the Content Analysis to verify how these students deal with these types of questions in regards to their interpretation and use of the information in the statements, their most used strategies and to the math content knowledge they trigger in solving these questions.Thus a mathematization process involving four phases was considered: comprehension, strategy, procedure and question resolution. The investigation highlights the following relevant points: most students use school-type strategies to answer the questions; they deal quite well with the algorithms involved in the chosen strategies; and students working towards their Bachelor Degree or Teaching Degree showed written records that indicate a similar mathematization process.

Keywords: Mathematics education. Evaluation as an investigation practice. Mathematics written production analysis. Mathematization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 ALGUNS CAMINHOS PERCORRIDOS

Desde minha adolescência, acreditava que eu seria uma grande “estrela” de muito sucesso no basquete. Mas o tempo foi passando e, pelas experiências vividas, fui vendo que ser jogadora de basquete com grande sucesso estava longe[1] de se tornar realidade. Até que chegou o momento, quando estava por concluir o Ensino Médio, em que eu tive que fazer a primeira grande escolha da minha vida: continuar a buscar o sonho de ser uma “estrela” do basquete ou ingressar na vida acadêmica.

Passados alguns anos, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), no qual tive experiências boas e ruins. No primeiro ano do curso, tive um primeiro obstáculo, que foi o de recuperar uma nota 4,0 na disciplina de C*álculo com Geometria Analítica I*, obstáculo escolar e emocional, pois jamais tinha tirado uma nota tão baixa. Esse obstáculo fez com que quase desistisse do curso, pois acreditava ser impossível tal recuperação, e que essa nota baixa poderia ser um indício de que eu não tinha um “dom” para trabalhar na área, até porque muitas pessoas me diziam que o curso era difícil mesmo e que não era para “qualquer um”. Foi então que tive que fazer minha segunda grande escolha: ou acreditava que eu “daria conta” de continuar no curso, ou desistia dele. Com a ajuda dos meus pais, amigos e professores, os quais respeito e admiro muito, comecei a buscar caminhos para vencer o desafio de recuperar a nota. Isso fez com que eu passasse a acreditar mais em mim e, como conseqüência, por meio dos estudos, recuperei a nota. A superação desse primeiro obstáculo oportunizou-me uma visão diferente da Matemática que me foi apresentada no primeiro ano do curso. Nesse mesmo ano, consegui recuperar a nota e ainda ser chamada para ser monitora da disciplina de *Cálculo com Geometria Analítica I*, no curso de Licenciatura em Matemática.

Com muito esforço, conclui a Licenciatura em Matemática e já no ano seguinte cursei a Especialização em Estatística na UEL. Ao mesmo tempo fazia algumas disciplinas como aluna especial do programa de Mestrado em Ensino de

---

[1]Ser jogadora de basquete é uma ótima opção de profissão, que pode ser realizada juntamente com estudos (nível superior). Mas, naquele momento da minha vida, eu não tinha formada a idéia de ter uma outra profissão a não ser a de jogadora de basquete.

Ciências e Educação Matemática, na mesma instituição. Gostei de vivenciar experiências maravilhosas em ambas as áreas, mas também tive que fazer escolhas. Por participar do grupo GEPEMA[2], convivi com pessoas que, de certo modo, influenciaram na minha terceira grande escolha, que foi a de me dedicar a estudar Avaliação na área da Educação Matemática. E hoje, com esta dissertação, assim como fizeram as outras dez dissertações sobre avaliação já defendidas no grupo, quero deixar uma contribuição no intento de fazer com que, por meio da avaliação tomada como prática investigativa possa ter uma visão mais reflexiva sobre como alunos de um curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática lidam com a matemática.

[2]Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação.

2 INTRODUÇÃO

Este estudo faz parte de um projeto coletivo de pesquisa desenvolvido pelo GEPEMA, cujo foco de estudo é a análise da produção escrita em matemática, juntamente com a avaliação e o erro. Nesse grupo, já foram defendidas oito dissertações que analisaram a produção escrita em questões discursivas de matemática consideradas rotineiras[3]. Em 2006, iniciou-se um estudo sobre questões discursivas de matemática consideradas não-rotineiras[4], já com duas dissertações defendidas.

As pesquisas desenvolvidas pelos participantes do GEPEMA são apresentadas no quadro a seguir, com a intenção de situar esta investigação. Essas, realizadas a partir da análise da produção escrita de alunos tomando a avaliação como prática investigativa, constituem-se em apontamentos para o ensino e aprendizagem de matemática.

Autores	Títulos das Dissertações*	Origem das Questões	Propostas
SEGURA, Raquel de Oliveira (2005)	A produção escrita de professores em questões discursivas de matemática	AVA 2002	(p.6): - identificar as estratégias/procedimentos mais utilizados por professores da Educação Básica nas resoluções de questões discursivas; - identificar os acertos e os erros mais freqüentes, e a sua natureza, cometidos pelos professores; - identificar a forma como os professores utilizam as informações contidas nas questões.
NAGY-SILVA, Márcia Cristina (2005)	Do observável para oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática	AVA 2002	(p.7): - investigar os caminhos que os alunos da 4ª série do Ensino Fundamental escolhem para resolver problemas; - investigar os conhecimentos matemáticos que os alunos utilizam; - investigar os erros, e sua natureza, que os alunos cometem; - investigar como os alunos utilizam as informações contidas nos enunciados de questões abertas de matemática.
PEREGO, Sibéle Cristina (2005)	Questões abertas de matemática: um estudo de registros escritos	AVA 2002	(p.3): - verificar como os alunos da Licenciatura em Matemática lidam com questões discursivas; - investigar a escolha da estratégia para resolução, a interpretação e uso das informações contidas nos enunciados, a natureza dos erros cometidos, aos conhecimentos matemáticos que os alunos da Licenciatura mostram saber quando resolvem as questões propostas; - fazer um levantamento das estratégias mais utilizadas e dos erros mais freqüentes na busca de identificar a natureza desses erros.
PEREGO, Franciele (2006)	O que a produção escrita pode revelar? Uma análise de questões de matemática	AVA 2002	(p.4): - analisar o acerto, o erro e os caminhos percorridos por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental; - analisar a estratégia escolhida pelos alunos para resolver cada questão proposta;
ALVES, Rose Mary Fernandes (2006)	Uma análise da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões abertas de matemática	AVA 2002	(p.7) - compreender como os alunos do 3º ano do Ensino Médio utilizaram as informações contidas no enunciado das questões; - identificar os acertos e os erros mais freqüentes e sua natureza; - identificar as estratégias/procedimentos usados, o modo como a produção escrita dos alunos se configura, se esta apresenta marcas de conteúdo matemático compatível com o seu nível de escolaridade; - identificar indícios da presença do pensamento algébrico.
NEGRÃO de LIMA, Roseli Cristina (2006)	Avaliação em matemática: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas	AVA 2002	(p.10): - investigar a produção escrita de alunos de 4ª série do Ensino Fundamental na Prova de Questões Abertas de Matemática – AVA 2002; - verificar como os alunos lidam com as informações contidas no enunciado e a utilização que fazem delas ao resolver as questões; - inventariar os erros e os acertos mais freqüentes e sua natureza; - identificar as estratégias/procedimentos mais utilizados; -identificar os possíveis fatores intervenientes, a fim de compreender como os alunos demonstram e utilizam seus conhecimentos matemáticos.

[3]Questões que atualmente são muito freqüentes na sala de aula e no livro didático (BURIASCO, 1999).
[4]Questões que atualmente muito pouco ou quase nunca aparecem na sala de aula ou no livro didático (BURIASCO, 1999).

VIOLA dos SANTOS, João Ricardo (2007)	O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática	AVA 2002	(p.8): - investigar o modo como alunos da escola Básica lidam com a questão aberta; - investigar as interpretações que os alunos apresentaram das informações contidas em cada frase do enunciado; - investigar as estratégias elaboradas e os procedimentos utilizados, o pensamento e a linguagem algébrica; - investigar as características dos problemas que eles construíram a partir do enunciado da questão e os conteúdos escolares que eles mostram saber por meio de sua produção; - propõe o abandono da idéia de "erro" para adotar a de "maneiras de lidar".
DALTO, Jader Otavio (2007)	A produção escrita em matemática: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA 2002	AVA 2002	(p.7): - investigar as estratégias/procedimentos utilizados pelos alunos da 3ª série do Ensino Médio para resolver uma questão comum; - investigar se tais estratégias/procedimentos são os mesmos; - investigar que tipos de erros são encontrados e se esses erros são os mesmos, independente da série; - verificar se existe compatibilidade de marcas de conteúdo matemático na produção escrita encontrada.
CELESTE, Letícia Barcaro (2008)	Produção escrita de alunos do ensino fundamental em questões de matemática do PISA	PISA	(p.6): - conhecer como os estudantes do Ensino Fundamental lidam com as informações de um problema não rotineiro para construir uma solução no contexto ou na situação na qual esse problema foi apresentado; - evidenciar a relevância da avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação de modo a subsidiar tanto a prática do professor em sala de aula como a aprendizagem dos alunos; - mostrar uma visão de erro, para o qual não é dado valor positivo ou negativo.
SANTOS, Edilaine Regina dos (2008)	Estudo da produção escrita de estudantes do Ensino Médio em questões discursivas não rotineiras de matemática	PISA	(p.6): - analisar a produção escrita de estudantes do Ensino Médio em questões discursivas não rotineiras de matemática; - compreender como os estudantes lidam com questões rotineiras apresentadas em situação de avaliação.

Quadro 1 – Dissertações de mestrado já defendidas por alguns participantes do GEPEMA, sob a orientação da Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.

Assim, no contexto dos estudos já desenvolvidos no GEPEMA, esta investigação tem por objetivo analisar a produção escrita de alunos do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática de uma universidade pública do Estado do Paraná, com base nas estratégias e procedimentos apresentados nas resoluções de questões não-rotineiras, tomando a avaliação como prática de investigação. Para isso, utilizar-se-á uma prova composta por algumas questões do PISA[5] que foram utilizadas nas investigações de Celeste (2008) e Santos (2008), respectivamente, no Ensino Fundamental e Médio. Tentar-se-á estabelecer comparação entre alguns dos resultados obtidos nas investigações dessas autoras com alguns dos encontrados neste estudo.

Este trabalho será constituído de: introdução, que contém a apresentação do trabalho; revisão de literatura, na qual é apresentada a fundamentação teórica; investigação, em que são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento da pesquisa, descrição e análise da produção escrita encontrada; discussão dos resultados; considerações; referências; apêndices e anexos.

[5]Neste estudo, assim como no de Santos (2008) e Celeste (2008), optou-se por utilizar algumas questões do PISA unicamente pelo fato de serem consideradas não-rotineiras, já validadas, pois fazem parte de uma avaliação já realizada por países membros da OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) e por outros países participantes como o Brasil, Uruguai, Tailândia, Letônia, Federação Russa, etc. Mais informações sobre o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) podem ser encontradas nos sites: http://www.inep.gov.br/internacional/pisa/Novo/; http://www.oecd.org; http://www.pisa.oecd.org/

3 REVISÃO DE LITERATURA

3.1 AVALIAÇÃO COMO PROCESSO DE MEDIDA E COMO PRÁTICA DE INVESTIGAÇÃO

Em diversos momentos da minha vida escolar, e acredito que o mesmo acontece com muitas pessoas, falar em avaliação provocava, muitas das vezes, senão em todas, certa aflição. Mas por que falar em avaliação provoca alguma aflição? Talvez porque a idéia de julgamento sempre apareça associada à de avaliação.

No âmbito escolar, uma concepção de avaliação bastante adotada é a de medida. Segundo Vianna (1989, p.20), em relação à educação, nos estudos das diferenças individuais, avaliar é medir os resultados do rendimento escolar, e medir

> [...] é uma operação de quantificação, em que se atribuem valores numéricos, segundo critérios preestabelecidos, a características dos indivíduos, para estabelecer o quanto possuem das mesmas. O índice quantitativo, obtido por intermédio da medida, identifica o status do indivíduo face à característica.

Entretanto, apenas medir não é suficiente, pois, na avaliação escolar, uma "medida é um passo inicial, às vezes bastante importante, mas não é condição necessária, nem suficiente, para que a avaliação se efetue" (VIANNA, 1989, p.20). Ainda para esse autor, avaliar é emitir um julgamento de valor sobre uma característica focalizada, valor esse que pode basear-se parcialmente em dados quantitativos, mas não exclusivamente.

Nesse sentido, uma "medida pode levar à avaliação, que, entretanto, só se realiza quando são expressos julgamentos de valor" (VIANNA, 1989, p.20). Também para Barlow (2006, p.12), "avaliar é emitir um julgamento preciso ou não sobre uma realidade quantificável ou não depois de ter efetuado ou não uma medição". Contudo, a avaliação escolar ainda é tomada quase sempre como apenas um processo de medida.

Por conseguinte, tomar a avaliação escolar como um exato processo de medida seria um engano lamentável, pois apenas uma medida final do rendimento escolar não permite o entendimento do que é produzido pelo aluno, independente do erro ou do acerto cometido. Além disso, é inviável por meio dela acompanhar, de alguma forma, o processo de desenvolvimento do aluno. Libertar-se da tentação objetivista da avaliação, segundo Hadji (1994, p.108), pode

> [...] alimentar um diálogo permanente que permitirá ao aluno-aprendente co-gerir, de fato, as suas aprendizagens, com o professor-facilitador. Este deverá apoiá-lo com informações que o vão esclarecer, guiar, encorajar, e ajudá-lo a analisar a sua atividade, ao chamar-lhe a atenção para pontos fortes e debilidades e ao permitir-lhe ver o estado em que se encontra.

Levando-se em consideração as intenções, os objetivos, enfim, a ação como um todo do avaliador e, ainda, o outro (o sujeito avaliado ou que será avaliado), tomar-se-á neste trabalho a concepção de avaliação escolar como prática de investigação, pois se acredita que ela pode ser um meio pelo qual se pode acompanhar o desenvolvimento da aprendizagem.

A avaliação como prática de investigação permite ao professor

> [...] recolher indícios para atingir níveis de complexidade na interpretação de seus significados e incorporá-los como eventos relevantes para a dinâmica ensino/ aprendizagem. Um olhar processual, dinâmico, sobre o próprio caminhar, tomando-o como ponto de crivo pode ajudar na construção de conhecimento e ainda participar da mediação desse processo. (VIOLA DOS SANTOS, 2007, p.20)

Com essa perspectiva, a avaliação

> [...] vai sendo constituída como um processo que indaga os resultados apresentados, os trajetos percorridos, os percursos previstos, as relações estabelecidas entre pessoas, saberes, informações, fatos, contextos. (ESTEBAN, 2000, p.11)

Para que a avaliação tomada como prática investigativa se constitua, um dos caminhos que pode ser utilizado é o da análise da produção escrita.

Investigar os registros dos alunos nas provas escritas permite fazer inferências sobre o que os alunos mostram saber e sobre os caminhos que escolheram para resolver um problema. Nessa perspectiva, não se pode, em caso algum, contentar-se "apenas com o resultado final, pelo que é necessário recolher observações no decurso da elaboração das respostas ou conduzir um inquérito complementar após a realização da tarefa" (HADJI, 1994, p.123).

As interpretações que o professor faz dos registros dos alunos "são fundamentais para uma reflexão e tomada de decisão a fim de favorecer o desenvolvimento daquele que aprende" (NEGRÃO DE LIMA, 2006, p.26). Elas permitem ao professor identificar importantes informações sobre o processo de ensino e de aprendizagem. Além disso, as investigações que o professor faz dos registros "servem como base para conversas sobre a Matemática com os alunos" (PEREGO, 2005, p.83). Até porque, se os professores se dispuserem a conhecer

> [...] as ações realizadas pelos alunos ao resolverem as questões de matemática, poderão ampliar seu conhecimento e com isso oportunizar outros ambientes de aprendizagem para os alunos. (VIOLA DOS SANTOS, 2007, p.3).

Apesar de a avaliação nas escolas, quaisquer que sejam elas, estar ligada comumente à preocupação com os resultados finais, os quais, segundo Vianna (2002, p.77), "levam a situações irreversíveis sobre o desempenho, sem que os educadores considerem as várias implicações, inclusive sociais de um processo decisório muitas vezes fatal do ponto de vista educacional", este trabalho, da análise dos registros escritos, assim como os demais do GEPEMA, propõe uma alternativa para a avaliação, de modo que ela se torne uma "fonte de informações sobre compreensões manifestas dos diferentes conteúdos, estratégias e procedimentos nas mais diversas situações" (SEGURA, 2005, p.152).

3.2 Estratégias e Procedimentos nas Resoluções de Questões Não-Rotineiras

Nos primeiros estudos do GEPEMA (SEGURA, 2005; NAGY-SILVA, 2005; ALVES, 2006), a palavra *estratégia* foi tomada como se fosse sinônimo de *procedimento*: “A estratégia/ procedimento mais utilizado na resolução da questão 3 foi o de equacionar o problema” (SEGURA, 2005, p.153). No entanto, no desenvolvimento das análises e discussões dos trabalhos seguintes, houve necessidade de estabelecer alguma diferença entre elas. No quadro abaixo, são apresentadas algumas definições de *estratégia* e *procedimento* segundo alguns dicionários.

DICIONÁRIOS	AUTORES	DEFINIÇÕES	
		ESTRATÉGIA	PROCEDIMENTO
Sinônimos e antônimos da língua portuguesa	FERNANDES, Francisco (1990)	*Sinônimo*. Estratagema, tática, estratégica; habilidade, esperteza;	*Sinônimo*. Proceder, modos, comportamento, conduta. Processo.
Houaiss da língua portuguesa	HOUAISS, Antônio (2001)	Arte de coordenar a ação das forças militares políticas, econômicas e morais implicadas na condução de um conflito ou na preparação da defesa de uma nação ou comunidade de nações; arte de aplicar com eficácia os recursos de que se dispõe ou de explorar as condições favoráveis de que porventura se desfrute, visando ao alcance de determinados objetivos;	Ato de proceder. Modo de fazer (algo); técnica, processo, método.
Grande Dicionário Etimológico-prosódico da língua portuguesa: vocábulos, expressões da língua geral e científica, sinônimos, contribuições do Tupi-Guarani.	BUENO, Francisco da Silveira (1963)	Tática militar, ciência de bem comandar um exército.	Maneira de alguém pôr em prática seus atos, de efetuar alguma coisa, comportamento.
Psicologia[6]	DORON, Roland; PAROT, Françoise (2001)	Estratégias são atividades pelas quais o sujeito escolhe, organiza e administra suas ações, tendo em vista realizar uma tarefa ou atingir um objetivo.	Conjunto de regras que é necessário aplicar rigorosamente numa determinada situação. Fala-se também de *procedimento cognitivo* para designar, por exemplo, as operações de resolução de problemas. A noção de procedimento de cálculo remete à noção de algoritmo.

Quadro 2 – Algumas definições de estratégia e procedimento segundo dicionários.

[6] Neste dicionário são apresentados outros assuntos a respeito de estratégia e procedimento. No entanto, o presente trabalho não tem interesse, no momento, em estudar tais assuntos nem em aprofundar a pesquisa nas teorias voltadas para o estudo da psicologia.

Observando o **Quadro 2**, percebe-se que existem diferenças entre o significado de *estratégia* e *procedimento*. A estratégia pode ser tomada como a forma de abordar algo (escolha que o sujeito faz); e o procedimento, como a maneira de desenvolver efetivamente essa forma escolhida de abordagem (modo como o sujeito lida com a estratégia).

Em alguns problemas, a estratégia e o procedimento são facilmente reconhecíveis na resolução apresentada pelo aluno; porém, em outros, nem tanto. Numa das reuniões do GEPEMA, em uma discussão referente à descrição de um registro escrito de um aluno, essa dificuldade apareceu ao codificar a resolução da questão. Para alguns participantes do grupo, ela não deveria receber crédito algum, enquanto, que para outros, deveria receber crédito parcial. O problema em questão era constituído de uma tabela com dados numéricos referentes às distâncias percorridas por duas crianças, uma menina e um menino, num quarteirão. A pergunta era qual a quantidade de voltas dadas no quarteirão em certo instante. Em um dos registros escritos que estava sendo analisado pelos integrantes do GEPEMA, era apresentado apenas um símbolo de uma divisão e um número no dividendo. Ao analisar esse registro escrito, um dos integrantes considerou que, por apresentar o símbolo da divisão, o aluno teria resolvido parcialmente a questão, justificando que o registro escrito da divisão indicava que o aluno havia escolhido uma estratégia que resolveria o problema. Outro participante, ao analisar esse mesmo registro escrito, considerou que o fato de o aluno registrar o símbolo da divisão com apenas um número no dividendo não garantia a presença de uma estratégia que resolveria o problema, pois o número representado no dividendo não pertencia aos dados da tabela referentes à menina e sim ao menino. Para achar a solução dessa questão, era preciso que o aluno resolvesse uma divisão específica, não uma qualquer. Nesse caso, a estratégia não era apenas indicar uma divisão; era, sim, indicar a divisão específica pedida pelo problema, e o procedimento seria a forma como se efetua a divisão.

"Olhar" para as estratégias e procedimentos e identificá-los nos registros escritos dos alunos, tomando como instrumento de análise a prática investigativa, permite ao professor e ao aluno a busca de novas compreensões e conhecimentos sobre o processo de ensinar e aprender matemática. "A busca da construção dos conteúdos matemáticos partindo da problematização de determinada situação, a reflexão, a utilização do registro escrito dão ao professor ferramentas ‘mágicas’ de trabalho” (FIORENTINI; MIORIM; MARCHESI et al., 2001, p.141).

Nos últimos estudos desenvolvidos no GEPEMA, toma-se estratégia como a forma como o aluno aborda a questão, e o procedimento como o que ele realiza para efetivar a estratégia que escolheu. Essa diferença é considerada para analisar as diferentes compreensões que os alunos podem ter da utilização dos distintos conteúdos de matemática, manifestadas pela escolha da estratégia que utilizarão. Justifica-se também a distinção para analisar os procedimentos que os alunos utilizam no desenvolvimento da estratégia. Mediante a análise da produção escrita, é possível organizar, estruturar as estratégias e os procedimentos presentes nos registros escritos dos alunos, o que permite ao professor identificar indícios de se o aluno, frente a um problema, conseguiu fazer alguma matematização.

3.3 Processo de Matematização e Resolução de Problemas

É muito comum, na sala de aula, professores de Matemática que, após darem uma aula de um conteúdo, propõem para seus alunos problemas que envolvam situações do “cotidiano” com a intenção de facilitar a compreensão de um dado conceito matemático, ou então, de fazer com que percebam uma relação do conteúdo que aprendem com o “mundo real”. Relação essa, que muitas vezes, se mostra no momento em que o aluno questiona o professor sobre o porquê de estar aprendendo o tal conteúdo.

Parece que envolver situações do “cotidiano” é utilizado para conferir significado a muitos conteúdos a serem estudados. No entanto,

> [...] é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata. (BRASIL, 1998, p.23)

E ainda, na tentativa de professores tornarem a Matemática

> [...] menos abstrata ou incompreensível para os estudantes, é que os contextos em que os problemas são apresentados podem não fazer parte do “mundo” em que esses estudantes vivem, podem não ter sentido e não ser “reais” para eles. Esses problemas podem ser “reais”, muitas vezes, somente para quem os elaborou ou os propôs. (SANTOS, 2008, p.24)

Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2005), ao invés de iniciar as aulas com definições ou abstrações matemáticas para depois serem aplicadas mais tarde, um bom começo seria trabalhar com problemas de contexto[7] que podem ser matematizados. Segundo essa autora, esses problemas oferecem mais oportunidades para os alunos mostrarem o que sabem, desenvolvendo ferramentas e compreensão matemática.

De acordo com Rico (2004), o marco matemático do estudo do PISA/OCDE sustenta-se na crença de que matematizar deve ser um objetivo básico para os estudantes. Nessa afirmação, o que chama a atenção é o termo *matematizar* e o porquê de essa crença ser uma intenção básica para os estudantes.

O processo de matematização, segundo o autor, sustenta-se sobre tais atividades:

- identificar a matemática que pode ser útil ao problema;
- representar o problema de modo diferente;
- compreender a relação entre as linguagens natural, simbólica e formal;
- usar linguagem simbólica, formal e técnica e suas operações;
- encontrar regularidades, relações e padrões na situação considerada;
- reconhecer similaridade com outros problemas já conhecidos;
- traduzir o problema a um “modelo matemático”;
- refinar e ajustar os “modelos matemáticos”;
- combinar e integrar “modelos”;
- utilizar diferentes representações;
- utilizar ferramentas e recursos adequados;
- argumentar;
- generalizar.

[7]Na **seção 3.4**, será apresentada uma discussão de problemas de contexto.

Uma vez traduzido o problema a uma expressão matemática, o aluno pode dar continuidade a esse processo formulando questões nas quais utiliza conceitos e destrezas matemáticas (RICO, 2004). Por meio de um diagrama, o processo de matematização pode ser expresso da seguinte forma:

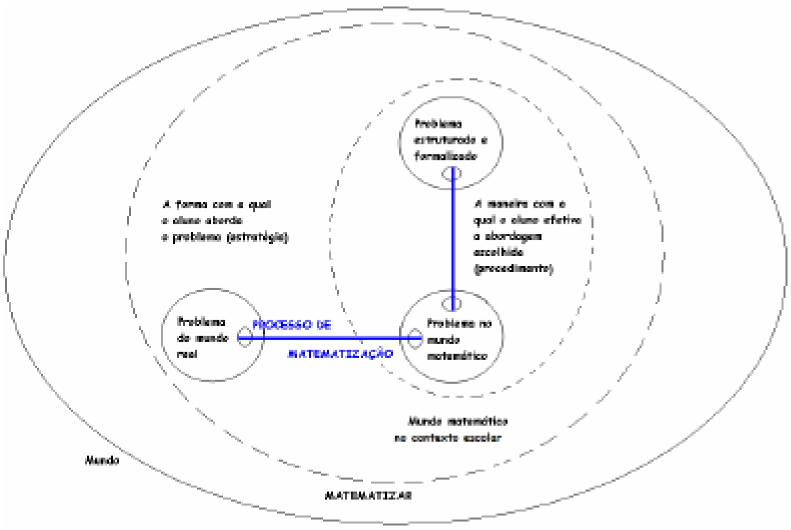


Figura 1 – Processo de matematização[8].

A caracterização do processo ou da atividade de matematização, segundo Rico (2004), pode ser explicitada em cinco fases: 1ª) começar com um problema situado na “realidade”; 2ª) organizar o problema de acordo com conceitos matemáticos; 3ª) fazer suposições sobre os dados do problema, generalizar e formalizar; 4ª) resolver o problema e 5ª) proporcionar sentido à solução matemática em termos da situação “real” inicial.

Segundo o mesmo autor, em termos gerais, esse processo se identifica com a estratégia de ensino da Resolução de Problemas. Essa estratégia, segundo Branca (1997), é uma expressão que pode ter vários significados; as três interpretações mais comuns são: Resolução de Problemas tomada como uma meta, como um processo e como uma habilidade básica.

Quando a Resolução de Problemas é tomada como uma meta, a razão principal está em aprender a resolver problemas para estudar Matemática

---

[8]Adaptação do diagrama apresentado em: RICO, R. L. Evaluación de competencias matemáticas: proyecto PISA/OCDE 2003. In**: Investigación en educación matemática**: Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.): La Coruña, 9-11 septiembre 2004 Actas… 2004

(BRANCA, 1997). Quando é tomada como uma habilidade básica, segundo Branca (1997, p.8), “somos forçados a considerar especificidades do conteúdo de problemas, tipos de problemas e métodos de solução”.

Um significado emergido da interpretação da Resolução de Problemas tomada como um processo é mais bem compreendido

> [...] através da diferença entre a resposta que estudantes dão a um problema e o procedimento ou as etapas que eles usam para chegar à resposta. O que é considerado importante nesta interpretação são os métodos, os procedimentos, as estratégias e as heurísticas que os alunos usam na resolução de problemas (BRANCA, 1997, p.5).

De acordo com Suydam (1997), a caracterização de um processo de Resolução de Problemas pode ser apresentada em quatro etapas:

- 1ª) compreensão do problema (o aluno produz um enunciado do problema, seja por escrito, oralmente ou por pensamento);
- 2ª) planejamento de como resolver o problema (analisar o problema; retirar informações; associar características relevantes com procedimentos promissores de solução; formular hipóteses);
- 3ª) resolver o problema (transformar o enunciado do problema em linguagem matemática; representações da situação-problema; solução provisória);
- 4ª) resolver o problema e a solução (confrontar a solução com o problema proposto; verificação da solução, se não, determinação de um método alternativo de solução ou de solução provisória).

A matematização é o processo, segundo Rico (2004), em que o aluno identifica a matemática que pode ser útil na resolução de um problema, executa a matemática identificada, e, por meio de operações e linguagens matemáticas (simbólica, formal, técnica), argumentações e generalizações, realiza ajustes no modelo (expressões, funções, etc.). Ao término dessas etapas, os alunos devem, segundo o mesmo autor, refletir sobre o processo de matematização para que possam explicá-lo, além de justificar e comunicar os resultados encontrados.

A Resolução de Problemas tomada como processo passa a ser uma estratégia de ensino que promoverá o desenvolvimento do processo de matematização. Sepúlveda e Ormachea (2007) recomendam que o professor de Matemática enfatize a Resolução de Problemas como uma estratégia de ensino, pois ela permitirá que os alunos desenvolvam suas destrezas para resolver problemas e apreciem, valorizem a riqueza e a variedade de recursos que oferece a Matemática. Em outras palavras, pode-se dizer que os alunos terão uma oportunidade maior de aprender a matematizar situações.

A atuação por meio do processo de matematização na Resolução de Problemas pode caracterizar "como os matemáticos fazem matemática, como as pessoas empregam a matemática numa variedade de profissões e trabalhos de maneira completa e competente" (RICO, 2004, p.5).

3.3.1 O Processo de Matematizar

Para melhor compreender o diagrama que representa o processo de matematização (**Figura 1**), apresentar-se-á um problema seguido de algumas respostas.

QUESTÃO: O tio Pedro trouxe um saco grande com bolinhas para nós três e disse: Distribuam-nas igualmente! Como poderíamos fazer isso?

Algumas respostas produzidas oralmente por alunos:

- "*Damos uma bolinha para cada menino, uma por vez. Se ficar 1 bolinha ou 2 as colocamos no saco*".
- "*Fazemos 3 filas de bolinhas. Se as 3 filas são iguais no comprimento, as dividimos bem*".
- "*Contamos as bolinhas 5 por vez. Cada menino obtém 5 bolinhas até que se tenham acabado*".

Fonte: DEKKER e QUERELLE (2002, p.7).

Os alunos participantes da pesquisa de Dekker e Querelle (2002) receberam esse problema[9], aqui tomado como sendo do mundo real. Inferiu-se que, após o recebimento do problema, os alunos apresentam indícios de um processo de

[9] Aqui nomeado como sendo o problema do "tio Pedro".

matematização. Na primeira fase do processo, que é a da compreensão do problema, os alunos produzem um enunciado oralmente. Na segunda, conhecida como a do planejamento da resolução do problema (a forma com a qual os alunos irão abordar o problema – estratégia), eles reconhecem e extraem a matemática implícita na situação. Neste caso, ao observar as respostas dos alunos, pode-se inferir que em todas elas a idéia de distribuir igualmente as bolinhas está explícita. Mas não é só a questão de tomar o conceito da divisão em partes iguais, há um interesse por parte dos alunos em descobrir a melhor forma de dividir igualmente as bolinhas para cada menino.

Na descoberta da melhor solução, os alunos passam para a terceira fase do processo de matematização. Nela, conhecida como a fase de resolver o problema, encontrar uma forma de transformar o problema em uma linguagem matemática (formal ou informal), os alunos trabalham com o problema no "mundo matemático no contexto escolar", ou seja, eles fazem suposições sobre os dados do problema, formalizando de acordo com a matemática aprendida na escola, por exemplo: "*Damos uma bolinha para cada menino, uma por vez. Se ficar 1 bolinha ou 2 as colocamos no saco*".

No "mundo matemático no contexto escolar", os alunos passam a efetivar a abordagem escolhida – procedimentos – para resolver o problema do "mundo real". Nesse mundo, verifica-se a quarta fase, que é a de escolher ferramentas matemáticas para resolver o problema e a verificação da solução.

Na quarta fase do processo de matematização, os alunos resolvem o problema, proporcionando sentido à solução matemática em termos da situação "real" inicial, confrontando-a com o problema proposto, verificando-a de forma a determinar um método alternativo de solução ou de solução provisória, caso a encontrada não corresponda ao problema, por exemplo: "*Fazemos 3 filas de bolinhas. Se as 3 filas são iguais no comprimento, as dividimos bem*" ou, então, "*Contamos as bolinhas 5 por vez. Cada menino obtém 5 bolinhas até que se tenham acabado*".

Passadas as últimas fases do processo de matematização, em um passo posterior na resolução de um problema, os alunos refletem, pensam sobre o processo completo de matematização e seus resultados. Eles interpretam os resultados com atitude crítica e validam o processo completo (RICO, 2004).

De forma simplificada, o processo de matematização envolve duas etapas: a escolha de uma estratégia que resolve o problema (primeira e segunda fases), seguida de um procedimento que a resolve (terceira e quarta fases).

Algumas das fases do processo de matematização são um tanto complexas de se verificar tendo apenas as respostas produzidas pelos alunos por meio da escrita ou de forma oral. Todavia, podem-se inferir, nos registros dos alunos, indícios das fases de desenvolvimento de um processo de matematização, como é o caso das respostas apresentadas pelos alunos ao resolverem o problema do “tio Pedro”.

Neste sentido, levando em consideração os assuntos relacionados ao processo de matematizar, a crença de que aprender a matematizar deve ou deveria ser um objetivo básico para os estudantes e, também, para os professores, é concebível. Com isso, uma pergunta que persiste nesta pesquisa é a de se os alunos de um curso de Matemática apresentam indícios do processo de matematização. Acredita-se que *n* fatores podem influenciar ou não esse processo, mas um deles, que este estudo tem interesse de analisar, é se o problema proposto oportuniza ao aluno esse processo.

Uma situação que também ocorre em sala de aula e que, usualmente, não seria levada em consideração pelo professor é a forma como o aluno lida com o contexto do problema. Por exemplo, na resolução de uma questão, é possível que um aluno apresente marcas de algum contexto (familiar, social, escolar) diferentes das apresentadas no enunciado da questão.

Para Rico (2004),

> [...] reconhece-se que trabalhar com questões que levam por si mesmas a um tratamento matemático, a escolha de métodos e representações matemáticas, freqüentemente depende das situações nas quais os problemas são apresentados. (RICO, 2004, p.5)

Nesse sentido, a situação ou o contexto do problema é um componente que permite aos alunos lidar com a matemática de maneira fundada (Rico, 2004). Por outro lado, nos estudos de Mack (1993), foi constatado que em algumas situações o contexto pode dificultar a resolução de um problema (*apud* VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005). O autor afirma que uma aluna se recusara a fazer um problema que envolvia uma fração de *pizza* por que, como não gostava desse prato, considerava difícil resolver o problema, mas que, se o problema envolvesse sorvete, seria mais fácil, pois ela gostava de sorvete. Esse exemplo mostra que é possível um contexto externo ao enunciado de uma tarefa influenciar sua resolução. Esse tipo de comportamento pode ser um reflexo do ambiente familiar e, por isso mesmo, externo ao enunciado da tarefa. Apesar de alguns contratempos que o contexto de um problema pode vir a apresentar, o professor pode tentar aproveitá-los de forma a conhecer[10] mais o seu aluno para que possa desenvolver um melhor trabalho.

Em sala de aula, saber avaliar e explorar os contextos envolvidos nos problemas e os modos como eles são abordados pode ajudar na articulação de "sujeitos e contextos diversos, confrontando os múltiplos conhecimentos que perpassam o saber, o fazer e o pensar de alunos, alunas, professores e professoras" (ESTEBAN, 2000, p.1).

Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2005), os contextos dos problemas podem referir-se à vida do dia-a-dia, a situações fantasiosas e ao próprio contexto matemático. A autora enfatiza que o importante do contexto do problema é que ele permita a matematização. Para ela, três tipos de contextos que podem oferecer oportunidades de matematização são: contextos de primeira ordem, segunda ordem e terceira ordem. Os de primeira ordem envolvem a tradução do problema, os de segunda ordem requerem dos estudantes manejarem diferentes representações de acordo com a situação específica, e os de terceira ordem envolvem contextos que permitem aos alunos descobrirem novos conceitos matemáticos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005).

De acordo com Dekker e Querelle (2002), há um modelo para a classificação de problemas conhecido como "Pirâmide de Jan de Lange". Essa pirâmide contém três níveis de competências (nível 1, nível 2 e nível 3) e quatro eixos curriculares da Matemática (álgebra, geometria, número e estatística). Segundo Dekker e Querelle (2002), a pirâmide indica a "quantidade de problemas e perguntas correspondentes a cada nível de competência que devem incluir-se em uma prova equilibrada ou balanceada" (p.5)[11]. Segundo os autores, inicialmente o modelo foi desenhado de forma triangular. Na Base do triângulo encontram-se os

[10]Um componente essencial para o estabelecimento de uma relação professor-aluno satisfatória.
[11]Não se pretende nesta pesquisa aprofundar os estudos sobre a "Pirâmide de Jan de Lange", mas apenas utilizar os níveis de competências nela apresentados.

problemas de resoluções mais fáceis, e na parte superior do triângulo, os problemas de resoluções mais difíceis. Após discutirem e analisarem melhor esse modelo triangular, Dekker e Querelle (2002), juntamente a outros docentes, chegaram à conclusão de que esse modelo não bastava para representar uma classificação de problemas segundo níveis de competências, pois, para alguns docentes, o fato de um problema ser considerado difícil não necessariamente teria que ser classificado como sendo de nível superior. E foi então que o triângulo se converteu em uma pirâmide. Segundo Dekker e Querelle (2002), a "terceira dimensão permite fazer uma distinção entre os problemas mais difíceis e mais fáceis dentro de um mesmo nível" (p.5).

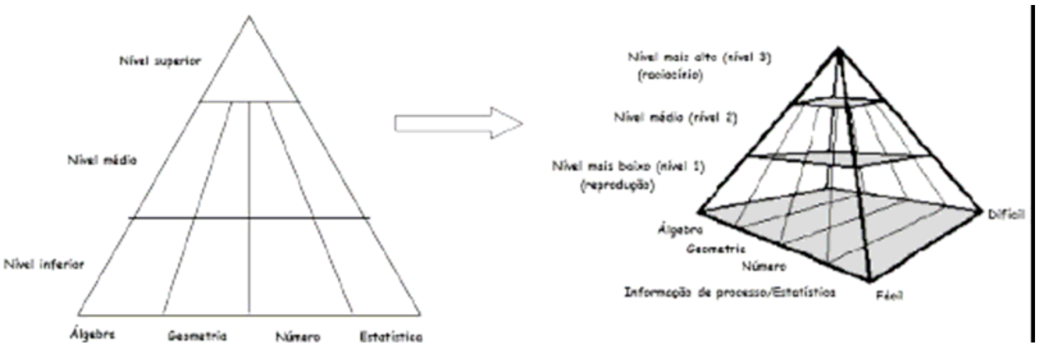


Figura 2 – "Pirâmide de Jan de Lange"[12].

Os problemas classificados nos níveis requerem do aluno:

- nível 1: freqüentemente o conhecimento de fatos, definições e procedimentos rotineiros memorizados e praticados em sala de aula;
- nível 2: escolha de estratégias e ferramentas matemáticas. Os problemas freqüentemente podem ser resolvidos de várias maneiras. Neste nível, os alunos começam a fazer ligações entre os diferentes campos da matemática (geometria, álgebra, estatística, etc.) distinguindo e relacionando definições, fazendo suposições, exemplos e provas. Além disso, não se espera que os alunos, eles mesmos, "modelem" a situação que lhes foi posta;

[12]Adaptação das figuras apresentadas em: DEKKER, T., QUERELLE, N. **Great Assessment Problems**. Utrecht. Freudenthal Institute. Traducción. Ma. Fernanda Gallego. GPDM. Bariloche. Río Negro, Argentina, 2002.

- nível 3: atitude crítica do aluno frente a sua resposta e reflexão acerca do processo de resolução. Este tipo de problema requer um raciocínio matemático; os alunos são capazes de criticar um “modelo matemático” e “remodelar” se for necessário, além de usar um “modelo matemático” para organizar uma situação “real”.

De uma forma simplificada, de acordo com Dekker e Querelle (2002), os problemas classificados no nível 1 requerem dos alunos conhecimento de fatos, definições matemáticas e procedimentos rotineiros trabalhados em sala de aula. Nos problemas classificados no nível 2, os alunos escolhem as estratégias e ferramentas matemáticas para resolvê-los; e, nos classificados no nível 3, os alunos reconhecem a matemática identificada no problema, escolhem ferramentas matemáticas que resolvem o problema, argumentam os resultados encontrados.

Para Dekker e Querelle (2002), para resolver os problemas classificados no nível 3, os alunos teriam que reconhecer e extrair a matemática implícita numa situação, escolher ferramentas matemáticas para resolver problemas, generalizar e comparar o conteúdo matemático proposto com outros problemas. Neste nível, segundo esses autores, os alunos trabalham com o pensar e raciocinar, com a comunicação, com a generalização, com estratégias e “modelos matemáticos”, com distinção de informação relevante de informação redundante, com argumentação matemática, com realização de suposições e estabelecimento de perguntas (Dekker; Querelle, 2002). Esse desenvolvimento todo que o aluno faz pode ser compreendido como um processo de matematização: o aluno está “matematizando” uma situação.

Observe, no **Quadro 3**, alguns exemplos referentes à classificação de problemas de acordo com os níveis de competências segundo a “Pirâmide de Jan de Lange”.

CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO OS NÍVEIS DE COMPETÊNCIAS	PROCESSO DE RESOLUÇÃO	EXEMPLOS DE ITENS
NÍVEL 1	Representações, procedimentos, conceitos e definições	- conhecimento de fatos e definições: traçar a representação gráfica para $y = 3x - 2$. - procedimentos rotineiros: resolver a equação $x^2 + 3x - 17 = 0$. - algoritmos padronizados: usar o teorema de Pitágoras para calcular o comprimento de um dos lados de um triângulo retângulo.
NÍVEL 2	Conexões e integração para resolver problemas	Com uma fotocopiadora, pode-se aumentar ou reduzir o tamanho de um desenho. Nathan usou a máquina para fazer uma cópia de um desenho, reduzindo seu tamanho em 60%. Não satisfeito com o resultado, pegou a cópia e fez uma nova redução de 140%. Ele pensou que agora teria as medidas originais de novo. Nathan está certo? Explique sua resposta.
NÍVEL 3	Matematização, pensamento e raciocínio matemático, percepção, generalização	- Matematizar situações: exemplo do "tio Pedro" (p. 27, deste trabalho). - Reconhecer e extrair a matemática implícita em uma situação: qual é a melhor oferta: 3 mercadorias por \$10 ou cada mercadoria por \$4 e um desconto de 15%? - escolher ferramentas matemáticas para resolver problemas: explique por que é seguro dizer que a parte branca de uma figura é maior que a parte sombreada da mesma figura. - comparar conteúdo matemático do problema com outros problemas contextuais: Pedro tem uma empresa de mudanças. Ele cobra \$10 por chamado e \$75 por hora. Seu amigo Nolan cobra \$25 por chamado e \$70 por hora. Por quantas horas de trabalho eles cobram a mesma quantidade de dinheiro?

Quadro 3 – Classificação de problemas segundo níveis de competências.

Fonte: DEKKER e QUERELLE (2002).

De acordo com Rico (2004), o PISA também apresenta uma classificação de problemas segundo níveis de competências:

CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO OS NÍVEIS DE COMPETÊNCIAS	PROCESSO DE RESOLUÇÃO	EXEMPLOS DE ITENS
NÍVEL 1	Reprodução, procedimentos rotineiros	- reprodução: calcular a media de 7, 12, 8, 14, 15 e 9.
NÍVEL 2	Conexões e integração para resolver problemas padrões	- conexão: Maria mora a 2 quilômetros do colégio, Martin, a 5. A que distância mora Maria de Martin?
NÍVEL 3	Raciocínio, argumentação, intuição e generalização para resolver problemas originais	- reflexão: Num certo país, o orçamento[13] é de 30 milhões de dólares para 1980. O orçamento total para esse ano é de 500 milhões de dólares. No ano seguinte, o orçamento é de 35 milhões de dólares, enquanto que o orçamento total é de 605 milhões de dólares. A inflação durante o período que cobre os dois orçamentos é de 110%. a) Solicita-se fazer uma exposição ante uma sociedade pacifista. Tente explicar qual orçamento tem diminuído nesse período. Explique como o faz. b) Solicita-se fazer uma exposição ante uma academia militar. Tente explicar qual orçamento tem aumentado nesse período. Justifique sua resposta.

[13]

Quadro 4 – Classificação de problemas segundo níveis de competências do PISA.
Fonte: RICO (2004).

Rico (2004) apresenta alguns exemplos indicadores de competências no que diz respeito a:

> - pensar e raciocinar: estabelecer as próprias questões matemáticas (quanto tem? Como encontrá-lo? Se é assim, ..., então? etc.); conhecer os tipos de respostas que oferecem as matemáticas a estas questões; distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definições, teoremas, conjeturas, hipóteses, exemplos, afirmações condicionadas); entender e utilizar os conceitos matemáticos em sua extensão e seus limites;
> - argumentar: conhecer o que são demonstrações matemáticas e como diferenciam de outros raciocínios matemáticos; dispor de sentido para a heurística (que pode, ou não, ocorrer, e por quê?); criar e expressar argumentos matemáticos;
> - comunicar: expressar-se numa variedade de caminhos, sobre temas de conteúdo matemático, de forma oral e também escrita;
> - modelar: traduzir a “realidade” a uma estrutura matemática;
> - resolver problemas: resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante a uma variedade de caminhos;
> - linguagem simbólica, formal e técnica e as operações: decodificar e interpretar a linguagem simbólica e formal e entender suas relações com a linguagem natural; lidar com enunciados e expressões que contenham símbolos e fórmulas; utilizar variáveis, resolver equações e compreender os cálculos.
> - ferramentas e recursos: implica utilizar os recursos e ferramentas familiares em contextos, modos e situações que são distintas do uso com as quais foram apresentadas (p.11-12).

[13]Tradução livre de “pressupuesto de defensa”.

Nos estudos de Dekker e Querelle (2002), os problemas classificados no nível 3 são considerados os mais difíceis, porque em geral se trata de problemas pouco familiares para os alunos. Os problemas classificados no nível 1 não são considerados necessariamente os mais fáceis, pois, de acordo com os autores, para um mesmo grupo de alunos, uma pergunta considerada mais difícil com um mesmo conteúdo matemático pode ser representada por um outro problema, e, ainda, dependendo do grupo de alunos (considerando a idade ou um outro momento do ano letivo), os problemas podem ser classificados no nível 2 (DEKKER; QUERELLE, 2002).

QUESTÃO 1: 237 - 46 =

QUESTÃO 2: Estou na página 46 do meu livro que tem 237 páginas no total. Quantas páginas me faltam ler?

Fonte: DEKKER e QUERELLE (2002, p.11).

Pode-se perceber que os enunciados das questões 1 e 2 são diferentes e o conteúdo matemático envolvido nelas é o mesmo (número). No entanto, a questão 2 envolve um contexto, o qual pode torná-la mais "difícil".

3.4 CONTEXTO

No ambiente escolar, uma das metas do ensino de Matemática é a de alfabetizar os alunos matematicamente para que os mesmos, além da compreensão matemática, usem-na numa variedade de situações (DEKKER; QUERELLE, 2002).

Muitas vezes, quando se deparam com problemas que surgem no mundo "real" ou mesmo no "mundo matemático escolar", os alunos sentem dificuldades em reconhecer e lidar com a matemática presente. Existem aqueles alunos em que a dificuldade mostra-se para a matemática em si, e não em fazer trabalhos práticos como os de um pedreiro. Isso mostra que a necessidade está não só em trabalhar com problemas puramente matemáticos, mas também em trabalhar com problemas que tenham uma ligação com o mundo "real" (DEKKER;

QUERELLE, 2002). Em outras palavras, dir-se-ia que os alunos teriam maiores oportunidades de matematizar situações: “há um problema ‘real’ no mundo ‘real’ que necessita ser resolvido; o primeiro passo é fazer um ‘modelo’ matemático da situação. Dessa forma, o problema é resolvido dentro de um ‘modelo’ com a ajuda de ferramentas matemáticas. Depois, os resultados são traduzidos ao mundo ‘real’ e ajustados de acordo a este” (DEKKER; QUERELLE, 2002, p.23).

Trabalhar com problemas em contextos na sala de aula pode ser útil:

> - para introduzir um novo tema ou um novo conceito em Matemática. Usando exemplos dentro de um contexto, o conteúdo matemático incluído se torna mais claro;
> - para praticar um novo conceito ou procedimento. Fazendo muitos problemas em contextos diferentes com o mesmo conteúdo matemático, os alunos aprendem como usar e aplicar este conteúdo;
> - para mostrar o poder da Matemática, compreendendo que distintos problemas em contexto estão baseados no mesmo conteúdo matemático;
> - para mostrar que o aluno domina o conteúdo matemático, usando um contexto não-familiar numa prova que está baseada no mesmo conteúdo matemático usado em aulas anteriores;
> - para envolver os alunos no problema. Usando situações da vida real, os alunos podem mostrar que são alfabetizados matematicamente e sabem como se usa a Matemática para resolver problemas práticos que surgem de situações da vida diária. (DEKKER; QUERELLE, 2002, p.23)

Além da importância de trabalhar com problemas em contexto, a relevância dele para resolver o problema é algo que deve ser questionado. Dekker e Querelle (2002), em seus estudos, classificam os contextos de acordo com os diferentes papéis que podem desempenhar em um problema e também em contexto virtual, matemático e artificial. Os autores abordam o contexto de ordem zero, de primeira ordem, de segunda ordem e de terceira ordem.

Considera-se de ordem zero o contexto que é irrelevante para o problema, ou seja, serve para disfarçar o problema matemático, por exemplo: “*Pelo vento a chuva cai com um ângulo de 48 graus. Próximo ao edifício foi encontrada uma mancha seca de 2 metros de largura. Usando esta informação, calcular a altura do edifício*” (DEKKER; QUERELLE, 2002, p.24). Este problema é considerado um mau exemplo, segundo os autores, pelo fato de não apresentar mais informações.

O contexto de primeira ordem encontra-se em problemas em que ele se torna necessário e relevante para resolvê-los, e quando se fazem juízos sobre a resposta, exemplo: "*Esperam-se 150 pais para uma reunião no colégio. Quatro cadeiras podem ser encontradas em cada mesa. Quantas mesas são necessárias? Mostre como encontrou a resposta*" (DEKKER; QUERELLE, 2002, p.25). O contexto desse problema se torna relevante, pois envolve uma situação escolar diária. Dekker e Querelle (2002) acrescentam, ainda, que esse problema é diferente do problema cujo enunciado pede somente para calcular "150:4".

O contexto de segunda ordem identifica-se com o de primeira; a diferença existente entre eles é que, no de segunda ordem, o contexto prioriza a matematização. Nos problemas cujo contexto é de segunda ordem, o aluno tem que encontrar a matemática necessária e escolher ferramentas matemáticas apropriadas para resolvê-los. Por exemplo: "*Uma escada de 3 metros de comprimento está colocada contra a parede, um metro desde a base à parede. Até que altura da parede a escada alcança?*" (DEKKER; QUERELLE, 2002, p.25). O contexto desse problema também se torna relevante, envolve uma situação da vida (escolar) diária dos alunos. Os alunos podem trabalhar neste problema com "o triângulo retângulo e com o conceito do Teorema de Pitágoras, mas, fazendo um desenho correto com a escala correta também chegarão a uma resposta que é suficientemente precisa neste caso" (DEKKER; QUERELLE, 2002, p.25).

O contexto de terceira ordem envolve problemas que permitirão a construção ou reinvenção de novos conceitos matemáticos (DEKKER; QUERELLE, 2002). Segundo os autores, os problemas que possuem esse contexto podem ser classificados no nível 1, nível 2 ou nível 3 de competências dependendo da familiaridade dos alunos com a situação envolvida pelo contexto. Por exemplo: "*a professora conta uma história sobre um transporte coletivo que conduz um número de pessoas. As pessoas sobem e descem do coletivo em diferentes paradas. Um aluno veste um boné de condutor e os outros sobem e descem do coletivo enquanto se apresenta um grande número de passageiros no coletivo. Depois, no papel, os alunos resolvem os problemas*" (DEKKER; QUERELLE, 2002, p.26). O exemplo do transporte coletivo pode ser trabalhado para introduzir, segundo os autores, o conceito de soma e resto.

Uma outra forma de classificar os contextos baseia-se na remissão aos contextos virtual, matemático ou artificial. "Um contexto virtual pode conter elementos que não são reais em si mesmos; porém, que surgem da realidade"

(DEKKER; QUERELLE, 2002, p.27). Os problemas que envolvem contextos artificiais decorrem, segundo os mesmos autores, da simplificação, idealização ou generalização de problemas reais que freqüentemente são complicados para usar um contexto matemático. "Quando se usa um contexto artificial, a situação para o problema em contexto é o mundo da fantasia" (DEKKER; QUERELLE, 2002, p.28).

Para eles, nos problemas de contexto artificial não se estiliza ou generaliza um contexto como em algumas vezes é feito.

No contexto matemático, "embora o conteúdo do problema seja tomado da Matemática mesmo, não é um problema despido[14]". (DEKKER; QUERELLE, 2002, p.28). Nos problemas de contexto matemático, a situação não é familiar; para os autores, o tema de um conteúdo matemático que foi ensinado é sempre aplicado a uma nova situação.

De acordo com Gave[15] (2004, p.9), as avaliações do PISA envolvem contextos que variam de acordo com a "distância dos mesmos em relação às vidas dos indivíduos: pessoal; trabalho e lazer; comunidade local e sociedade científica". O contexto pessoal está relacionado com as atividades diárias do aluno, o contexto educativo está relacionado com o ambiente escolar, o contexto do trabalho (ocupacional) está relacionado com o ambiente de trabalho, o contexto público ou da comunidade local está relacionado com a comunidade (anúncios ou documentos oficiais), e o contexto científico está relacionado com as análises tecnológicas ou situações específicas da Matemática (OCDE, 2007).

Muito se pode aprender e ensinar quando se realiza um trabalho de investigação da produção escrita dos alunos envolvendo problemas em diversos contextos. O que deve ser levado em consideração ao trabalhar com os problemas em geral são os termos (palavras, frases, vocabulários) e os desenhos (figuras, gráficos, diagramas) presentes no enunciado, pois eles podem favorecer ou não os alunos quando estes forem tentar resolvê-los, tentar matematizar.

[14] Problema despido sem contexto, 'sem texto'. É aquele em que os alunos necessitam praticar e habituarem-se a procedimentos rotineiros (DEKKER; QUERELLE, 2002).

[15] Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação. Maiores informações sobre o GAVE podem ser encontradas no site: http://www.gave.min-edu.pt/

4 A INVESTIGAÇÃO

Esta investigação tem por objetivo geral analisar a produção escrita de alunos do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná, com base nas estratégias e procedimentos apresentados nas resoluções de questões não-rotineiras, tomando a avaliação como prática de investigação. O mote principal que a norteia diz respeito ao processo de matematizar desses alunos.

Com relação ao ensino de matemática, alguns dos objetivos do Ensino Básico são:

> [...] - selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
> - resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
> - comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
> - sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 1998, p.48).

Neste estudo, buscar-se-á investigar os registros escritos produzidos por alunos ao resolverem questões de matemática básica (estudar as estratégias e procedimentos, processo de matematizar) para identificar a realização ou não de um processo de matematização. Para isso, analisar-se-á:

- a escolha da matemática que o aluno entendeu como sendo útil ao problema (a estratégia utilizada);
- a tradução do problema para uma forma de “modelo” matemático (expressões, equações, funções, etc);
- a utilização de ferramentas e recursos adequados para a resolução do problema;
- a argumentação quando apresentada.

Como os alunos que cursam Matemática possivelmente serão futuros professores, esta investigação buscará também identificar se as estratégias e procedimentos que utilizaram para resolver um problema são, também, utilizados por alunos do Ensino Básico para resolver o mesmo problema, e, com isso, investigar se há indícios ou não, nesses caminhos, da realização de um processo de matematização comum aos dois grupos. Estudar-se-á, então, alguns resultados apresentados nas pesquisas de Celeste (2008) e Santos (2008) referentes à análise das mesmas questões de matemáticas, resolvidas por alunos do Ensino Fundamental e Médio, respectivamente.

As questões investigadas tanto nesta pesquisa quanto na de Celeste (2008) e na de Santos (2008) fazem parte de uma mesma prova composta por 25 itens (distribuídos em 14 questões) advindos das aferições do PISA. Celeste (2008), em seu estudo, analisou cinco questões (*Lixo*, *Prova de Ciências*, *Assaltos*, *Opções* e *Apoio ao Presidente*) de um total de 14 questões, e Santos (2008) analisou 6 (*Prova de Ciências*, *Lixo*, *Notas de Prova*, *Apoio ao Presidente*, *Caminhando* e *Assaltos*).

Para esta investigação, das 14 questões que compõem a prova, foram analisadas quatro (*Lixo*, *Prova de Ciências*, *Assaltos e Apoio ao Presidente*). A escolha dessas quatro questões deu-se pelo fato de elas estarem presentes nas análises de Santos (2008) e Celeste (2008) e serem comuns a ambas as investigações.

A abordagem utilizada nesta pesquisa é predominantemente qualitativa de cunho interpretativo, tendo por base as orientações presentes na Análise de Conteúdo tomada como

> [...] o conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitem a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (BARDIN, 1977, p.42).

Para inferir sobre os conteúdos matemáticos presentes nos registros dos alunos, têm-se algumas etapas: obtenção da amostra, correção das provas, descrição detalhada dos registros escritos apresentados pelos alunos, análises da descrição dos registros e discussões das análises.

4.1 OBTENÇÃO DA AMOSTRA

Para a obtenção da amostra, buscou-se saber, inicialmente, a quantidade de alunos que cursaram a disciplina de *Cálculo com Geometria Analítica I*[16] do curso de Matemática nas suas duas habilitações – Bacharelado e Licenciatura, ao menos uma vez, no período de 2003 a 2007[17]. Segundo informação obtida na instituição (Universidade Estadual de Londrina – UEL), 149 alunos da Licenciatura e 81 do Bacharelado, num total de 230 alunos, haviam cursado nesse período a disciplina ao menos uma vez (alunos de todas as séries: 1ª série, 2ª série, 3ª série e 4ª série). A distribuição dos alunos era a seguinte:

HABILITAÇÃO	SÉRIE	NÚMERO DE ALUNOS	HABILITAÇÃO	SÉRIE	NÚMERO DE ALUNOS
Bacharelado	1ª.	42	Licenciatura	1ª.	61
	2ª.	19		2ª.	39
	3ª.	11		3ª.	37
	4ª.	09		4ª.	12

Quadro 5 – Distribuição do número de alunos por habilitação e por série.

Como esse é um número elevado para se fazer um estudo baseado na análise de registros escritos de alunos, numa prova contendo 25 itens distribuídos em 14 questões, o que demandaria um tempo maior do que o que era destinado para a realização da pesquisa, foi escolhido um segundo critério para definição do grupo de participantes. Assim, os alunos que tivessem sido aprovados na disciplina em tela, com média igual ou superior a 7,0[18] e que ainda estivessem freqüentando o curso, seriam convidados a participar do estudo. Dos 230 alunos estimados inicialmente, 52 atendiam ao segundo critério.

[16] Optou-se por utilizar a disciplina de Cálculo pelo fato de ter uma maior carga horária entre as disciplinas de conteúdo matemático (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2005).

[17] Foi escolhido o período de 2003 a 2007 para que pudessem participar alunos das quatro séries do curso.

[18] De acordo com o sistema de avaliação do aproveitamento escolar da Universidade Estadual de Londrina, um dos requisitos para que o aluno seja aprovado em alguma das atividades acadêmicas é obter média final igual ou superior a 6,0. Optou-se por utilizar a média final igual ou superior a 7,0 por considerar que, assim, o desempenho dos participantes poderia ser considerado como acima da média.

O instrumento de coleta utilizado neste estudo é uma prova[19] (Anexo C), que contém questões não-rotineiras já testadas e validadas, uma vez que fizeram parte de uma aferição internacional.

O convite aos graduandos para a realização da prova foi feito em todas as séries do curso, uma vez que os 52 alunos estavam distribuídos nas quatro séries do curso de Matemática nas duas habilitações, Bacharelado no período matutino e Licenciatura, no noturno. Todos os 52 alunos, no momento do convite, receberam uma carta-convite (Apêndice A), onde constava o dia, o local e hora a ser realizada a prova. Além disso, a carta informava ainda que os alunos que aceitassem participar do estudo deveriam resolver uma prova constituída de 14 questões envolvendo conteúdos de matemática básica (Ensino Fundamental e Médio); garantia também o total anonimato, ou seja, em hipótese alguma seria feita alguma referência aos seus nomes. Dos 52 alunos convidados para realizar essa prova, apenas 19 compareceram e a resolveram. Entretanto, das provas resolvidas pelos 19 alunos, somente 18 compõem a amostra deste estudo, colhida por conveniência, pois um aluno, que no momento da aferição ainda cursava a disciplina de *Cálculo com Geometria Analítica I*, obteve, no final do ano letivo, nota inferior a 7,0 na disciplina, o que contrariava o critério adotado.

Foi elaborado e seguido um roteiro para a aplicação da prova (Anexo A) e, antes do início de sua resolução, foram lidas as instruções que estavam contidas na folha de rosto do instrumento (Apêndice B). Os alunos foram informados que tinham duas horas para resolver todas as questões, além de responder a um questionário avaliativo (Anexo B) que se encontrava na última folha da prova.

4.2 Correção das Provas

Antes da correção, as provas[20] foram assim nomeadas: letra B ou L de acordo com a habilitação do curso (Bacharelado ou Licenciatura), seguida de um número, que corresponde à ordem alfabética da primeira letra do nome do aluno

---

[19] A prova foi a mesma utilizada por CELESTE (2008) e por SANTOS (2008).

[20] Neste trabalho, toda referência feita à prova ou às provas dos alunos diz respeito ao instrumento de avaliação utilizado.

comparado com os demais nomes. Por exemplo, a prova B1 corresponde ao aluno da habilitação Bacharelado em Matemática cuja inicial do nome corresponde à primeira letra em ordem alfabética comparado com os demais alunos do Bacharelado, e a prova L1 corresponde ao aluno da habilitação Licenciatura em Matemática (L) cuja inicial do nome corresponde à primeira letra em ordem alfabética comparado com os demais alunos da Licenciatura.

As 14 questões serão identificadas com uma numeração de 1 até 14 de acordo com a ordem em que se encontram distribuídas na prova. O quadro a seguir apresenta a identificação, o nome da questão e o número de itens que ela contém.

IDENTIFICAÇÃO	NOME DA QUESTÃO	NÚMERO DE ITENS DA QUESTÃO
Q1-1 Q1-2	*Bate-papo pela Internet*	2
Q2-1 Q2-2 Q2-3	*Taxa de Câmbio*	3
Q3	*Prova de Ciências*	1
Q4	*Estantes*	1
Q5	*Lixo*	1
Q6	*Opções*	1
Q7	*Notas de Prova*	1
Q8	*Apoio ao Presidente*	1
Q9-1 Q9-2	*Caminhando*	2
Q10-1 Q10-2 Q10-3	*Crescendo*	3
Q11	*Assaltos*	1
Q12-1 Q12-2	*Exportações*	2
Q13-1 Q13-2 Q13-3	*Torneio de Tênis de Mesa*	3
Q14-1 Q14-2 Q14-3	*Vôo Espacial*	3

Quadro 6 – Identificação, nomeação e número de itens das questões da prova.

A pontuação e correção das questões da prova dos alunos foram baseadas na codificação apresentada no *Manual Para Correção das Provas com Questões Abertas de Matemática da AVA 2002*. As questões cujas resoluções estavam totalmente corretas receberam o crédito completo representado pelo **código 2**. O crédito parcial, representado pelo **código 1**, foi dado às questões cujas resoluções estavam parcialmente corretas. O **código 0** (zero) foi utilizado para questões em que havia evidência de que o aluno havia realizado alguma tentativa de resolução, ainda que malsucedida (BURIASCO; CYRINO; SOARES, 2003). Recebia o **código 9** a questão que não continha indício algum de tentativa de resolução.

4.3 DESCRIÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS REGISTROS ESCRITOS CONTIDOS NAS QUESTÕES Q3, Q5, Q8 E Q11[21]

Nesta fase, foi feita uma leitura vertical e horizontal das resoluções dos alunos e, em seguida, uma descrição detalhada dos registros encontrados. A leitura 'horizontal' consistiu em estudar uma mesma questão em todas as provas, e, na leitura 'vertical', as provas eram estudadas individualmente como um todo, ou seja, todas as questões de uma mesma prova, de um mesmo aluno, com o objetivo de saber se "as situações equivocadas que ele apresentou na resolução de uma questão estavam também presentes em outra; se havia alguma forma de saber se esses equívocos eram causados, por exemplo, por alguma dificuldade que ele possuía ou por distração" (PEREGO, 2006).

A partir dos registros encontrados nas provas, será feita uma análise descritiva da produção escrita dos alunos participantes para conhecer como eles lidam com essas questões consideradas não-rotineiras. As estratégias e procedimentos expressos na resolução e as interpretações dos enunciados serão os indicadores dessa análise.

A tabela a seguir apresenta as porcentagens e as freqüências dos escores dos 18 alunos participantes em cada uma das questões que compuseram o instrumento de aferição utilizado.

---

[21]As descrições dos procedimentos das resoluções das questões em estudo encontram-se no Apêndice D.

Tabela 1 – Freqüências e porcentagens dos escores obtidos pelos 18 alunos nas questões da prova, segundo os códigos de correção.

QUESTÕES	CODIGOS					
	0 e 9[22]		1		2	
	f	%	f	%	f	%
Q1	3	16,67	7	38,89	8	44,44
Q2	0	0,00	4	22,22	14	77,78
Q3	4	22,22	1	5,56	13	72,22
Q4	1	5,56	2	11,11	15	83,33
Q5	4	22,22	0	0,00	14	77,78
Q6	1	5,56	1	5,56	16	88,88
Q7	5	27,78	4	22,22	9	50,00
Q8	4	22,22	2	11,11	12	66,67
Q9	0	0,00	11	61,11	7	38,89
Q10	1	5,56	10	55,55	7	38,89
Q11	3	16,67	7	38,89	8	44,44
Q12	3	16,67	3	16,67	12	66,66
Q13	3	16,67	9	50,00	6	33,33
Q14	6	33,33	12	66,67	0	0,00

22

Fonte: a autora.

A **Tabela 1** mostra que Q3, Q5, Q7, Q8 e Q14 foram questões nas quais os alunos participantes apresentaram um índice de erro superior a 20%.

Em relação à questão Q3, foi possível verificar que, dos 18 alunos participantes, 22,22% obtiveram nenhum crédito, ou seja, resolveram incorretamente a questão ou nem tentaram resolvê-la, 5,56% obtiveram crédito parcial, e 72,22% resolveram corretamente a questão, obtendo assim crédito completo. Sobre a questão Q5, foi possível observar que, dos 18 alunos participantes, 22,22% resolveram incorretamente a questão ou nem tentaram resolvê-la, nenhum aluno obteve crédito parcial, e 77,78% resolveram corretamente a questão. Quanto à questão Q14, verificou-se que, dos 18 alunos participantes, 33,33% resolveram incorretamente a questão ou nem tentaram resolvê-la, 66,67% obtiveram crédito parcial, e nenhum aluno resolveu corretamente a questão.

A quantidade de alunos que resolveram ou não os itens de cada questão está apresentada na **Tabela 2**.

[22]Quantitativamente os códigos 0 e 9 têm o mesmo significado, o aluno não acertou a questão.

Tabela 2 – Freqüências dos escores obtidos pelos 18 alunos nos itens das questões da prova, segundo os códigos de correção.

QUESTÕES		CÓDIGOS				Total
		0	9	1	2	
Q1	Q1-1	5	1	0	12	18
	Q1-2	3	3	4	8	18
Q2	Q2-1	0	0	3	15	18
	Q2-2	0	0	1	17	18
	Q2-3	1	1	0	16	18
Q3		4	0	1	13	18
Q4		1	0	2	15	18
Q5		2	2	0	14	18
Q6		1	0	1	16	18
Q7		3	2	4	9	18
Q8		4	0	2	12	18
Q9	Q9-1	0	0	0	18	18
	Q9-2	1	2	8	7	18
Q10	Q10-1	0	3	1	14	18
	Q10-2	0	1	3	14	18
	Q10-3	3	2	4	9	18
Q11		2	1	7	8	18
Q12	Q12-1	1	2	0	15	18
	Q12-2	3	2	1	12	18
Q13	Q13-1	4	2	4	8	18
	Q13-2	4	2	3	9	18
	Q13-3	4	5	0	9	18
Q14	Q14-1	3	6	7	2	18
	Q14-2	4	5	3	6	18
	Q14-3	6	9	0	3	18

Fonte: a autora.

Para apresentar discussões a respeito das informações obtidas por meio da **Tabela 1** e **Tabela 2**, juntamente com alguns resultados obtidos nos trabalhos de Santos (2008) e Celeste (2008), é preciso ter noção das informações quantitativas de alguns dados que foram obtidos, nos estudos feitos pelas autoras, das questões Q3 (“*Prova de Ciências*”), Q5 (“*Lixo*”), Q8 (“*Apoio ao Presidente*”), Q11 (“*Assaltos*”) no Ensino Básico.

Tabela 3 – Porcentagens dos escores obtidos pelos alunos do Ensino Fundamental (EF) e Ensino Médio (EM) nas questões Q3, Q5, Q8 e Q11 da prova, segundo os códigos de correção.

QUESTÕES	Q3		Q5		Q8		Q11	
CÓDIGOS	EF %	EM %	EF %	EM %	EF %	EM %	EF %	EM %
0	88,24	68,18	52,94	54,55	76,47	81,82	70,59	72,73
9	0,00	0,00	17,65	9,09	11,76	4,55	11,76	0,00
1	0,00	0,00	11,76	31,82	5,88	0,00	17,65	22,73
2	11,76	31,82	17,65	4,55	5,88	13,64	0,00	4,55
TOTAL DA AMOSTRA	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Fonte: CELESTE (2008); SANTOS (2008).

Observa-se, na **Tabela 3**, que, no Ensino Fundamental e Médio, a porcentagem de questões com codificação 0 é superior a 52% e a porcentagem com codificação 2, exceto a Q3 do EM, é inferior a 18%; mesmo assim, esse índice também apresenta uma porcentagem ínfima na codificação 2.

O Questionário Avaliativo que foi anexado na última página da prova se refere às impressões do aluno sobre a prova. Nesse questionário, foram apresentadas questões que buscam saber a opinião dos alunos sobre a facilidade da prova, a extensão (relativamente à quantidade de questões) e a suficiência do tempo dado para a realização**.**

A seguir, no **Quadro 7** e no **Quadro 8,** são apresentadas todas as respostas dadas pelos alunos participantes do Questionário Avaliativo.

PROVAS	PERGUNTAS SOBRE A PROVA					OBSERVAÇÕES DOS ALUNOS SOBRE AS QUESTÕES
	O que você achou dessa prova?	O que você achou do tamanho da prova?	Para você, o tempo foi:	Qual a questão que você achou mais fácil?	Qual a questão que você achou mais difícil?	
L1	Fácil	Longa	Suficiente	Q2	Q14-3	Q2: *porque era uma proporção (sua resolução)*; Q14-3: *porque estava cansada e não quis pensar como seria feita.*
L2	Difícil	Longa	Suficiente	Q11	Q13	Q11: *somente olhando a escala do gráfico conseguimos responder*; Q13: *porque eu não sei resolver.*
L3	Mediana	Adequada	Insuficiente	Q12-1	Q10-3	Q12-1: *pois é apenas interpretação do gráfico*; Q10-3: *pois dependendo dos alunos eles têm que ter uma noção intuitiva da derivada.*
L4	Mediana	Adequada	Suficiente	Q3	Q14	Q3: *porque todos nós fazemos e refazemos nossas médias o ano todo*; Q14: *por estar acostumada em fazer contas pequenas na mão.*
L5	Mediana	Longa	Suficiente	Q4	Q1	Q4: *pois na resolução dessa utilizei apenas divisões*; Q1: *acho complicado os fusos-horários.*
L6	[Não respondeu]	Muito longa	Faltou	Q1	Q9	Q1: *no meu ponto de vista foi a questão 1 (Bate-Papo). Porque as informações já estavam mas, era só observar a diferença de horários e aplicar no exercício*; Q9: *porque não consegui entender o que o exercício queria.*
L7	Mediana	Longa	Faltou	Q13	Q8	Q13: *talvez porque seja fácil de imaginar os acontecimentos*; Q8: *tive dificuldade em interpretar o que a questão pedia como resposta.*
L8	Mediana	Longa	Suficiente	Q6	Q14	Q6: *pois envolve um raciocínio simples e de poucas contas*; Q14: *pois envolve operações trabalhosas e exige um raciocínio preciso com relação ao objetivo do problema.*

Quadro 7 – Respostas dadas pelos alunos da Licenciatura em Matemática ao Questionário Avaliativo.

PROVAS	PERGUNTAS SOBRE A PROVA					OBSERVAÇÕES DOS ALUNOS SOBRE AS QUESTÕES
	O que você achou dessa prova?	O que você achou do tamanho da prova?	Para você, o tempo foi:	Qual a questão que você achou mais fácil?	Qual a questão que você achou mais difícil?	
B1	Mediana	Longa	Insuficiente	Q3	Q6	Q6: *não estava difícil, porém não consegui compreender bem o enunciado.*
B2	Mediana	Longa	Mais que o necessário	Q3	Q7	Q3: *foi a mais fácil, pois era só fazer a média aritmética das notas*; Q7: *das que eu consegui fazer foi a questão 7, pois para mim o professor parece estar certo, e não consigo encontrar argumento matemático para o grupo A.*
B3	Fácil	Longa	Suficiente	Q6	Q7	Q6: *pode-se fazer dedutivamente*; Q7: *difícil de analisar.*
B4	Mediana	Longa	Faltou	Q6	Q1-2	Q6: *porque era só ver as combinações que Rose poderia fazer*; Q1-2: *porque tinha que pensar mais para fazer. Obs: das questões que deu tempo de fazer.*
B5	Mediana	Longa	Suficiente	Q12-2	Q14-3	Q12-2: *pois foi só analisar o gráfico*; Q14-3: *pois relaciona vários conceitos.*
B6	Mediana	Adequada	Suficiente	[não respondeu]	*Questões de interpretação gráfica*	*Questões de interpretação gráfica, algumas, é mais capciosa para fazer. Mas desta prova nada impossível de se resolver.*
B7	Mediana	Longa	Suficiente	Q11	Q14	Q11: *pois basta apenas analizar atentamente o gráfico*; Q14: *muito longa e com algumas contas cansativas.*
B8	Mediana	Longa	Mais que o necessário	Q2	Q1-2	Q2: *pois era só usar regra de três e ver que quando divide por um nº maior o quociente diminui*; Q1-2: *não entendi o que estava sendo pedido.*
B9	Fácil	Muito longa	Suficiente	[não respondeu]	[não respondeu]	—
B10	Fácil	Adequada	Suficiente	Q13	Q1	Q13: *Em uma competição, o número de rodadas, para que todos os participantes joguem entre si ao menos uma vez, deve ser 1 a menos que o número de participantes. Isso requerido duas vezes*; Q1: *deve ter sido porque eu me atrapalhei ao tentar encontrar o horário adequado.*

Quadro 8 – Respostas dadas pelos alunos do Bacharelado em Matemática ao Questionário Avaliativo.

Do **Quadro 7** e do **Quadro 8,** observa-se que muitos dos alunos participantes deste estudo consideraram que a prova estava no nível médio de dificuldade. Na **Tabela 4**, a seguir, obtém-se um resumo de informações sobre como os alunos do curso de Matemática julgaram a prova, segundo o Questionário Avaliativo.

Tabela 4 – Distribuição quanto à percepção dos 18 alunos de um curso de Licenciatura (L) e Bacharelado (B) sobre a dificuldade da prova.

CURSO	QUESTÕES												TOTAL	
	Muito Fácil	%	Fácil	%	Mediana	%	Difícil	%	Muito difícil	%	Não respondeu	%	ALUNOS	%
L	0	0,0	1	5,6	5	27,8	1	5,6	0	0,0	1	5,6	8	44,4
B	0	0,0	3	16,7	7	38,9	0	0,0	0	0,0	0	0,0	10	55,6
TOTAL	0	0,0	4	22,2	12	66,7	1	5,6	0	0,0	1	5,6	18	100,0

Fonte: a autora.

Da **Tabela 4**, pode-se, também, observar que 22,2% dos alunos consideraram a prova fácil, 5,6% (um aluno) considerou a prova como sendo difícil, e 0% dos alunos apontou a prova como muito fácil ou muito difícil.

Baseado no modelo de classificação de problemas apresentado nos estudos de Dekker e Querelle (2002), Rico (2004) e documento do PISA (GAVE, 2004), o quadro a seguir apresenta uma classificação das questões da prova de Matemática segundo níveis de competência.

CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO OS NÍVEIS DE COMPETÊNCIAS	PROCESSO DE RESOLUÇÃO	QUESTÕES[23]
NÍVEL 1	Reprodução e procedimentos rotineiros, representações, conceitos e definições	"Prova de Ciências"; "Taxa de Câmbio"; "Caminhando"; "Crescendo"; "Exportações"; "Torneio de Tênis de Mesa";
NÍVEL 2	Conexões e integração para resolver problemas padrões	"Apoio ao Presidente"; "Assaltos"; "Estantes"; "Opções"; "Notas de Prova"; "Caminhando"; "Crescendo"; "Torneio de Tênis de Mesa"; "Bate-Papo pela Internet"; "Exportações"; "Vôo espacial";
NÍVEL 3	raciocínio, argumentação, intuição e generalização para resolver problemas originais, reflexão	"Lixo"; "Bate-Papo pela Internet"; "Taxa de Câmbio";

Quadro 9 – Classificação das questões da prova segundo níveis de competência.

[23]Diferentes itens de uma questão podem estar classificados em níveis diferentes.

Pelos apontamentos dos alunos da graduação sobre a dificuldade da prova, as questões estariam entre os níveis 2 e 3 de classificação. Das questões que serão analisadas nesta pesquisa, as questões Q5 (“Lixo”), Q8 (“Apoio ao Presidente”), Q11 (“Assaltos”) estão nos níveis 2 e 3 de classificação de acordo com o **Quadro 8**, enquanto que a questão Q3 (“Prova de Ciências”) encontra-se no nível 1.

Segundo Dekker e Querelle (2002), no nível 1, o processo de resolução dos itens requer do aluno o conhecimento de definições e procedimentos rotineiros, ou seja, a reprodução de cálculos praticados em sala de aula. No processo de resolução da questão Q3, é preciso que os alunos realizem um cálculo da média aritmética simples.

Já no nível 2 de classificação, os itens de matemática requerem dos alunos manejar tabelas, diagramas, gráficos e textos expressos de acordo com a situação especificada, escolhendo suas próprias ferramentas matemáticas para encontrar uma possível resposta correta. Nesse nível, segundo os mesmos autores, os alunos começam a fazer conexões entre os diferentes campos da Matemática como a Estatística e a Geometria. De acordo com o **Quadro 8**, as questões Q8 e Q11 pertencem ao nível 2. No processo de resolução da questão Q8, o aluno tem que justificar o item em relação à aleatoriedade dos dados, a seleção ao acaso. O processo de resolução da questão Q11 baseia-se na comunicação; isso, segundo Gave (2004, p.116), “exige que o aluno tenha sentido crítico face à apresentação tendenciosa de informação sob a forma de gráficos enganadores”.

A questão Q5 pertence ao nível 3 de classificação. Os itens que são classificados nesse nível, segundo Dekker e Querelle (2002), em geral são pouco familiares para os alunos, e uma das dificuldades apresentadas por estes ao resolverem esses tipos de itens é que nem sempre eles identificam com facilidade o conteúdo matemático. No processo de resolução dessa questão, é necessário que o aluno indique uma razão da variabilidade dos dados das categorias ou na grande variação dos dados.

Segundo GAVE (2004), as questões Q3, Q5, Q8 e Q11, apesar de estarem classificadas em níveis diferentes, possuem uma característica em comum.

A questão Q3 envolve noção de média aritmética; as questões Q5 e Q11, a tomada de posição face à forma como é apresentada a informação; e a questão Q8, a noção de amostra e de população. Em todas elas, há uma ligação com a Estatística.

Observa-se que, mesmo que uma questão seja do nível 2 ou 3 de classificação, ela pode apresentar características de um nível de classificação diferente, que é o caso das questões Q5 e Q11.

Uma análise importante realizada nas questões em estudo foi verificar se elas ofereceram oportunidades para os alunos matematizarem uma situação. Tais questões ou problemas que oportunizam um processo de matematização são referidos como problemas de contexto (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005).

Tanto nos estudos de Van den Heuvel-Panhuizen (2005), quanto nos de Dekker e Querelle (2002), o contexto do problema é que vai permitir um processo de matematização. Com isso, procurou-se investigar, nas questões Q3, Q5, Q8 e Q11, quais os tipos de contextos presentes nelas. Para isso, foram considerados quatro tipos de contextos: contexto de ordem zero, de primeira ordem, de segunda ordem e de terceira ordem. Ressalta-se que os contextos de ordem zero, segundo Dekker e Querelle (2002), não apresentam relevância, e, ainda, as informações presentes no enunciado dos problemas são incompletas. Possivelmente, os problemas cujos contextos são classificados em ordem zero dificultam um processo de matematização.

QUESTÕES	TIPOS DE CONTEXTO			
	CONTEXTO DE ORDEM ZERO	CONTEXTO DE PRIMEIRA ORDEM	CONTEXTO DE SEGUNDA ORDEM	CONTEXTO DE TERCEIRA ORDEM
	O contexto serve para disfarçar o problema matemático.	O contexto se torna necessário e relevante para: resolver o problema e fazer juízos sobre a resposta.	O contexto se torna necessário e relevante para: resolver o problema, criar um "modelo" matemático e fazer juízos sobre a resposta.	É um contexto que engloba as características dos contextos de primeira ordem e segunda ordem, e, ainda, é um contexto que serve para construção ou reinvenção de "novos" conceitos matemáticos.
Q3		Requer o conhecimento do conceito de média aritmética; O contexto é relevante (contexto escolar); É um problema que permite fazer juízos sobre a resposta.		
Q5				Requer o conhecimento do conceito de gráfico de barras; O contexto é relevante (contexto científico); O aluno constrói ou reinventa conceitos referentes à justificativa de o gráfico de barras não ser o mais apropriado (Ex: variabilidade dos dados para uma determinada categoria utilizando a idéia de relação biunívoca); É um problema que permite fazer juízos sobre a resposta.
Q8			O aluno escolhe ferramentas matemáticas apropriadas para resolver o problema (Ex: amostra selecionada ser maior, seleção da amostra ser aleatória); O contexto é relevante (contexto público); É um problema que permite fazer juízos sobre a resposta.	
Q11			O aluno escolhe ferramentas matemáticas apropriadas para resolver o problema (Ex: aumento relativo, aumento percentual, apenas uma pequena parte do gráfico é mostrada); O contexto é relevante (contexto público); É um problema que permite fazer juízos sobre a resposta.	

Quadro 10 – Análise interpretativa das questões da prova de matemática de acordo com os tipos de contextos.

Do **Quadro 10**, notou-se que todas as questões analisadas estão inseridas em contextos que possibilitam um processo de matematização. Nos estudos de Dekker e Querelle (2002), é no nível 3 de classificação de problemas que a possibilidade de matematizar situações ocorre, porém, os mesmos autores enfatizam que, dependendo do grupo de alunos, um problema que é classificado em um nível pode ser classificado em outro.

Assim, nesta pesquisa, por não se ter uma relação professor-aluno conhecida com o grupo de alunos envolvido no estudo, considerar-se-á que as questões Q3, Q5, Q8 e Q11 pertencem aos níveis de classificação de problemas apresentada no **Quadro 9** mesmo que, para algum aluno ou um grupo específico de alunos, elas possam ser classificadas em outros níveis de competências devido às destrezas dessas pessoas.

Utilizando-se da análise da produção escrita de alunos que cursam Matemática, a avaliação que este estudo realiza sobre essas produções vai se tornando, segundo Esteban (2000), um processo dinâmico sobre os caminhos e resultados apresentados e, também, sobre as relações estabelecidas entre pessoas. Um “olhar” geral desse processo dinâmico pode ser um ponto de crivo, como diz Viola dos Santos (2007), na construção de um conhecimento.

Na busca de algum conhecimento que se mostra nas produções escritas de alunos do Ensino Fundamental, Médio e Superior, faz-se, juntamente com a análise deste trabalho, uma investigação geral dos resultados apresentados nos estudos de Santos (2008) e Celeste (2008), na intenção de estabelecer alguma relação de conhecimento e aprendizagem apresentados pelos alunos.

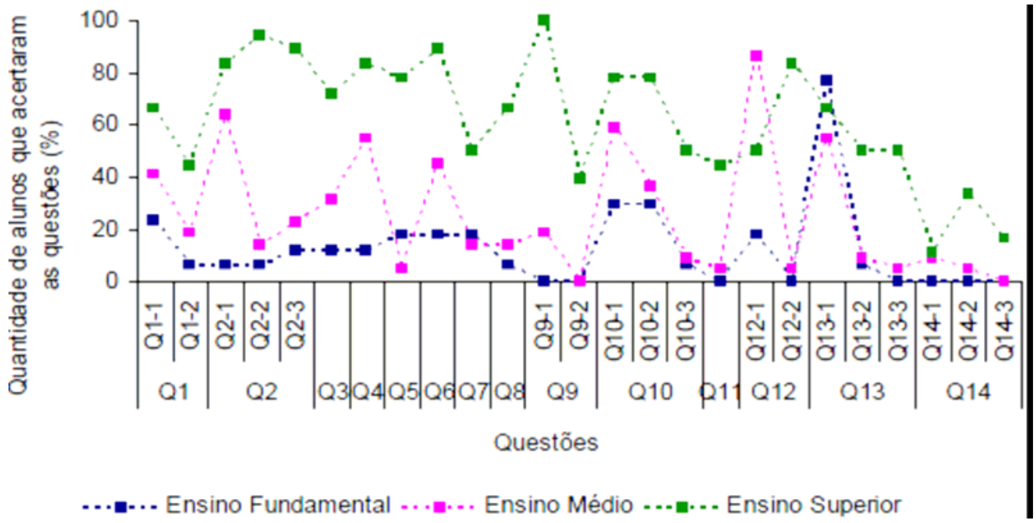


Gráfico 1[24] – Freqüência de acertos na prova de Matemática dos alunos do curso de Matemática e dos alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada neste estudo e nos estudos de Santos (2008) e Celeste (2008).

O **Gráfico 1** representa a freqüência dos acertos das questões da prova de Matemática (25 itens) dos alunos do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

Com exceção da questão Q12-1, os alunos do Ensino Superior se saíram melhor que os alunos do Ensino Médio. No geral, os alunos do Ensino Médio também se saíram melhor que os do Ensino Fundamental, com exceção nas questões Q5, Q7 e Q13-1, sendo que nesta última os alunos do Ensino Fundamental superaram até os alunos do Ensino Superior.

No **Gráfico 1**, observa-se que a questão Q14-1 foi a que menos os alunos, no geral, acertaram. A Q12-1 foi a questão em que os alunos do Ensino Médio obtiveram mais acertos do que o Ensino Superior, e a Q13-1 foi a questão em que os alunos do Ensino Fundamental acertaram mais do que os do Ensino Médio e do Superior.

Para melhor compreender o que está apresentado no **Gráfico 1**, foram feitas algumas análises descritivas das informações nele presentes (Apêndice C).

---

[24]Foi traçada uma linha pontilhada entre os pontos no intuito de apresentar uma melhor visualização do gráfico, e, portanto, uma melhor interpretação gráfica.

Observou-se nessas análises, com p << 0,001%[25], que há uma diferença significativa entre as proporções médias de acertos dos alunos do Ensino Fundamental, do Médio e do Superior. O comportamento das medidas descritivas em cada grupo de ensino pode ser visualizado por meio do gráfico tipo Box-plot (**Gráfico 2**).

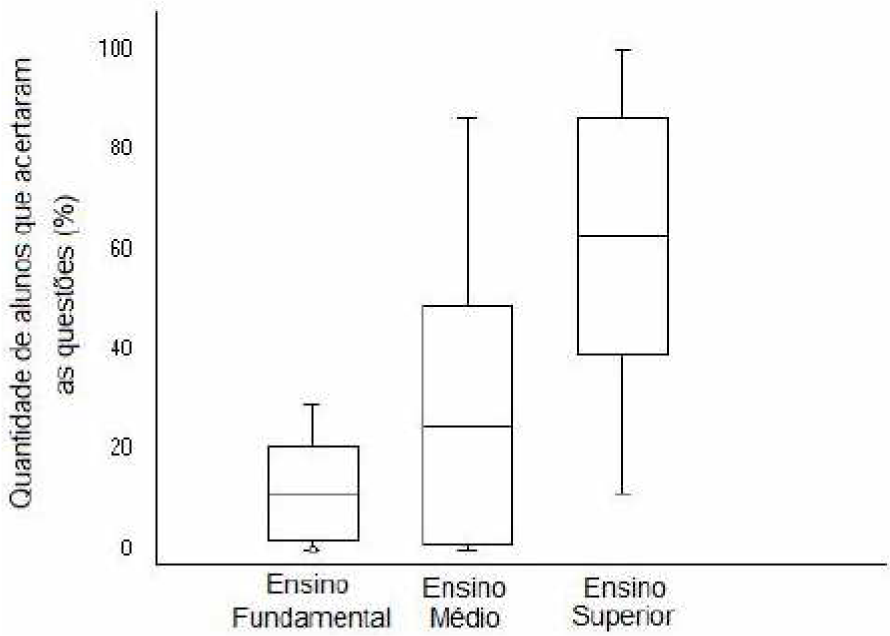


Gráfico 2 – Medidas descritivas da quantidade de acertos na prova de Matemática segundo grau de escolaridade.

Fonte: Dados obtidos na pesquisa realizada neste estudo e nos de Santos (2008) e Celeste (2008).

Pode-se notar no **Gráfico 2** que, para a amostra considerada, a prova de Matemática, caracterizada neste gráfico pelas medidas descritivas do número de acertos das questões em cada grau de escolaridade, apresentou ser mais complexa para os alunos do Ensino Fundamental, uma vez que o box-plot para esse grupo de alunos está bem abaixo dos outros dois. Nota-se também que o valor da média do grupo de alunos do Ensino Fundamental é inferior ao do grupo de alunos do Ensino Médio, e deste, inferior ao do Ensino Superior.

Para verificar se há diferença significativa entre as proporções médias de acertos dos alunos, foi aplicado o teste de Tukey[26]. Comparando estas

[25]Representa o p-valor, que é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula, sendo ela verdadeira.

[26]O teste de Tukey testa a existência de diferenças entre as proporções médias dos três grupos (BARBIN, 2003).Neste estudo, o teste de Tukey serviu como um complemento para a análise de variância, já que a mesma apontou a existência de uma diferença significativa entre as proporções médias dos alunos.

proporções médias pelo teste, verifica-se que a proporção média de acertos do Ensino Fundamental (12%) não difere significativamente da proporção média de acertos do Ensino Médio (24,9%) e ambas, por sua vez, diferem significativamente da proporção média de acertos do Ensino Superior (62,7%).

Ou seja, conclui-se que a proporção média de acertos do Ensino Superior foi significativamente superior às dos Ensinos Médio e Fundamental. Entre as proporções médias de acertos do Ensino Fundamental e do Médio, não houve diferença significativa (p-valor de 5%).

Com esse resultado, é possível supor que os alunos da graduação, mesmo acertando muito mais que os alunos do Ensino Básico, cometem erros similares.

Isso pode indicar que os futuros alunos dos futuros professores (alunos do curso de Matemática) irão aprender "o que os professores lhes ensinam, e que estes ensinam o que sabem" (BURIASCO, 1999, p.131). De acordo com Buriasco (1999, p.131), "na maioria dos casos, os alunos, embora com percentual de acerto inferior ao dos professores[27], conseguem resolver com mais facilidade as questões nas quais os professores também apresentam mais facilidade".

Essa situação de os alunos resolverem com facilidade problemas que o professor também resolve com facilidade e de resolverem com dificuldade problemas em que o professor também sente dificuldade, merece atenção. Tal situação pode estar ligada ao processo de matematizar desses professores (ou futuros professores, no caso dos alunos da graduação), que, provavelmente, influenciam ou influenciarão no processo de matematização de seus alunos.

A seguir, serão analisadas as produções escritas dos alunos que cursam Matemática, as quais são referentes às questões Q3, Q5, Q8 e Q11, procurando-se inferir sobre os processos de matematização dos mesmos. Dos resultados obtidos nas análises, será feita uma discussão juntamente com as análises realizadas nos estudos de Santos (2008) e Celeste (2008) para melhor compreender a situação de os alunos e os professores resolverem com as mesmas facilidades ou dificuldades os mesmos problemas.

---

[27]Os professores aos quais a autora remete correspondem nesta pesquisa aos futuros professores de Matemática (alunos de graduação).

4.3.1 Questão – “Prova de Ciências”

A questão inicial em tela é a denominada “Prova de Ciências” e, neste estudo, está sendo referenciada como questão Q3.

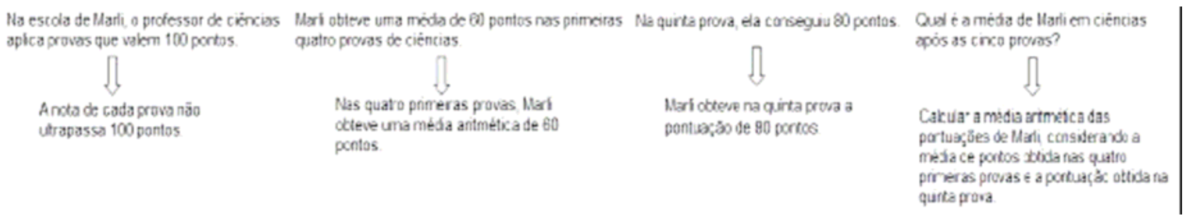
Questão Q3: *Na escola de Marli, o professor de ciências aplica provas que valem 100 pontos. Marli obteve uma média de 60 pontos nas primeiras quatro provas de ciências. Na quinta prova, ela conseguiu 80 pontos. Qual é a média de Marli em ciências após as cinco provas?*

Para resolver essa questão, é necessário utilizar o conceito de média aritmética, e, para aplicá-lo, é exigido do aluno apenas o uso das operações aritméticas. A média aritmética é uma medida de posição central cujo conceito é dado pela soma das observações dividida pelo número delas (BUSSAB; MORETTIN, 2002).

Este conceito, segundo Bussab e Morettin (2002), pode ser formalizado da seguinte maneira: $\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, sendo $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, n | valores que a variável X pode assumir, e $\overline{X}$ a média aritmética ou simplesmente média.

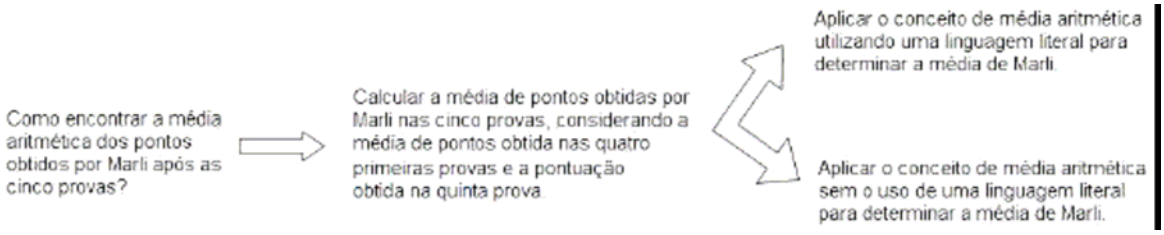
Procurou-se apresentar possibilidades de compreensão desse problema separando as informações que nele estão contidas, e, por meio de uma interpretação dos registros escritos dos alunos, estabelecer ligações que os alunos fizeram entre as informações contidas no enunciado. Com isso, objetivou-se identificar as fases de um processo de matematização:

1ª fase:



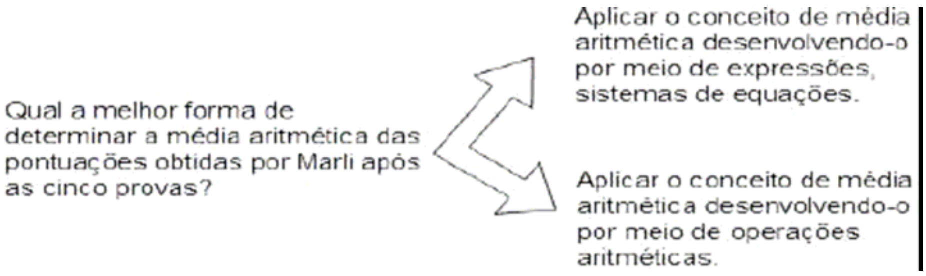
Nessa fase, nota-se que a identificação das informações presentes no enunciado do problema possibilita uma compreensão geral do problema.

2ª fase:



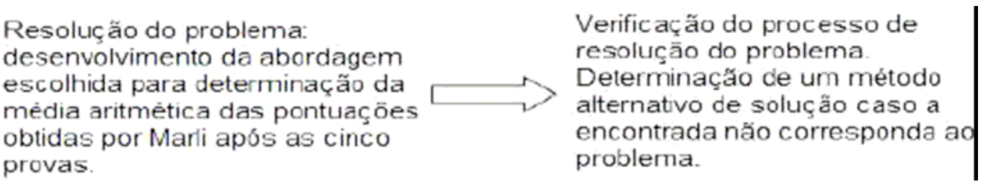
Nessa fase, após apreender uma compreensão do que o enunciado traz, faz-se um planejamento de como resolver o problema proposto, no caso, encontrar a média de Marli após as cinco provas de ciências. É o momento em que o aluno explora as informações que obteve ao compreender o problema mostrando, por meio de um registro escrito, e determina suas estratégias de resolução.

3ª fase:



Nessa fase, os alunos trabalham com o problema no "mundo matemático no contexto escolar", encontrando uma forma de transformar o problema em uma linguagem matemática (formal ou informal), formalizando de acordo com a matemática aprendida na escola. O aluno vai procurar, entre os conceitos matemáticos e estatísticos aprendidos na escola, uma melhor forma de determinar a média aritmética de Marli obtida após as cinco provas.

4ª fase:



Os alunos, no “mundo matemático escolar”, passam a efetivar os procedimentos escolhidos utilizando ferramentas matemáticas necessárias para resolver o problema (realizar operações aritméticas, propriedades do conceito de média aritmética).

No quadro abaixo, é apresentada uma análise interpretativa sobre os indícios de um processo de matematização[28] presente nos registros escritos dos alunos que cursam Matemática ao resolverem à questão Q3.

GRUPOS (G_i)(N)	PROCESSO DE MATEMATIZAÇÃO DA Q3			
	1ª fase (compreensão do problema)[29]	2ª fase (estratégia)	3ª fase (procedimento)	4ª fase (resolução do problema; validação do problema[30])
G_1(5)	Considera a média aritmética de pontos obtida por Marli nas quatro primeiras provas e a nota obtida na quinta prova.	Uso do conceito de média aritmética; utilização da média dos pontos obtida por Marli nas quatro primeiras provas; utilização de linguagem literal[31]. ($\overline{X}_{4provas} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$) e a pontuação da quinta prova (x_5).	Determinação da média aritmética das notas de Marli após as cinco provas mediante uma expressão matemática. ($\overline{X}_{5provas} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$)	Uma resolução do problema: $\overline{X}_{5provas} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$ $\overline{X}_{4provas} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = 60$ $x_1+x_2+x_3+x_4 = 240$ $x_5 = 80$ $\overline{X}_{provas} = \frac{240+x_5}{5} = \frac{240+80}{5} = 64$ Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema em algumas provas.
G_2(1)	Considera a média aritmética de pontos obtidos por Marli nas quatro primeiras provas e a nota obtida na quinta prova como uma média.	Uso do conceito de média aritmética; utilização da média dos pontos obtida por Marli nas quatro primeiras provas; utilização de uma linguagem literal, e, da pontuação da quinta prova. ($\overline{X}_{4provas} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$).	Determinação da média aritmética dos pontos obtidos por Marli após as cinco provas mediante o cálculo de uma divisão cujo numerador é representado pela adição dos pontos obtidos na quinta prova com a média de pontos obtidos nas quatro primeiras provas.	Uma resolução do problema: $\overline{X}_{5provas} = \frac{60+80}{2} = 70$ Não foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.
G_3(1)	Considera a média aritmética de pontos obtidos por Marli nas quatro primeiras provas e a nota obtida na quinta prova como uma média.	Uso do conceito de média aritmética; utilização da média dos pontos obtida por Marli nas provas; utilização de uma linguagem literal. ($\overline{X}_{4provas} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$); Não utilização de uma linguagem literal para representar a média aritmética da quinta nota. ($\overline{X}_{quinta\ nota} = \frac{80}{5}$).	Determinação da média aritmética dos pontos obtidos por Marli após cinco provas mediante o cálculo de uma adição representada pelo resultado da adição da média de pontos obtidos na quinta prova com a média de pontos obtidos nas quatro primeiras provas.	Uma resolução do problema: $\overline{X}_{5provas} = \overline{X}_{4provas} + \overline{X}_{quinta\ nota} =$ $= 60 + 16 = 76$ Não foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema na prova.
G_4(2)	Considera a média aritmética de pontos obtidos por Marli nas quatro primeiras provas e a nota obtida na quinta prova como uma média.	Uso do conceito de média aritmética; utilização da média dos pontos obtida por Marli nas provas; utilização de uma linguagem não literal. ($\overline{X}_{4\ provas} = 60; \overline{X}_{quinta\ prova} = 80$).	Determinação da média aritmética dos pontos de Marli após as cinco provas mediante o cálculo de uma divisão cujo numerador é representado pela adição do ponto obtido na quinta prova com a média dos pontos obtidos nas quatro primeiras provas ($80+60$).	Uma resolução do problema: $\overline{X}_{5provas} = \frac{60+80}{2} = 70$ Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.

29

3031

[28]Mostra-se neste estudo um processo de matematização dos alunos a partir das inferências feitas dos seus registros escritos. A intenção é de mostrar e discutir um possível processo por eles construído ao resolverem um problema.

[29]Uma possível compreensão que o aluno obteve ao ler o problema. As outras fases são conseqüências da primeira fase.

[30]Essa validação pode ser interpretada face à interpretação crítica que o aluno apresenta na resolução do problema (atitude crítica).

[31]Linguagem literal refere-se à utilização de letras no procedimento adotado pelo aluno para resolver a questão.

$G_5(2)$	Considera a média aritmética de pontos obtidos por Marli nas quatro primeiras provas e a nota obtida na quinta prova.	Uso do conceito de média aritmética; utilização dos pontos obtidos por Marli nas quatro primeiras provas e a pontuação obtida na quinta prova; utilização de uma linguagem não literal.	Determinação da média aritmética dos pontos de Marli após as cinco provas mediante o cálculo de uma divisão cujo numerador é representado pela adição dos pontos obtidos nas quatro primeiras provas com o ponto obtido na quinta prova $(60+60+60+60+80)$.	Uma resolução do problema: $\overline{X}_{5provas} = \frac{60+60+60+60+80}{5} = \frac{240+80}{5} = 64$ Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema nas provas.
$G_6(7)$	Considera a média aritmética de pontos obtidos por Marli nas quatro primeiras provas e a nota obtida na quinta prova.	Uso do conceito de média aritmética; utilização dos pontos obtidos por Marli nas quatro primeiras provas e a pontuação obtida na quinta prova; utilização de uma linguagem não literal.	Determinação da média aritmética dos pontos de Marli após as cinco provas mediante ao cálculo de uma divisão cujo numerador é representado por uma adição dos pontos obtidos nas quatro primeiras provas com o ponto obtido na quinta prova $[(60\cdot 4+80\cdot 1)$ ou $(60\cdot 4+80)]$.	Uma resolução do problema: $\overline{X}_{5provas} = \frac{60\cdot 4+80\cdot 1}{5} = \frac{240+80}{5} = 64$ Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema nas provas.

Quadro 11 – Análise interpretativa dos registros escritos de 18 alunos de um curso de Matemática referente à questão Q3.

No grupo G1, há cinco provas. Os alunos, para resolverem essa questão, escolhem como estratégia o conceito de média aritmética com a utilização de uma linguagem literal, considerando a média de pontos obtida por Marli nas quatro primeiras provas e a pontuação obtida na quinta prova. Para o procedimento da estratégia, utilizam expressões matemáticas seguidas de operações aritméticas. Em alguns registros escritos, foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema. Também se inferiu, em alguns registros escritos, indícios de algumas competências cognitivas como argumentação, comunicação e raciocínio matemático (RICO, 2004). Algumas resoluções da questão Q3:

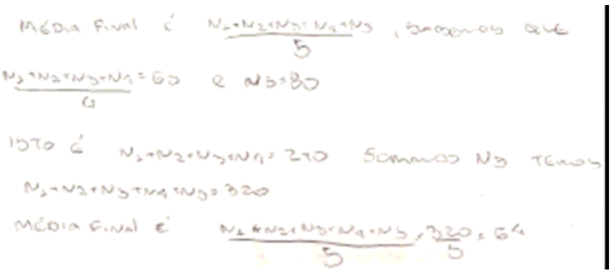


Figura 3 – Resolução da questão Q3, registro escrito do aluno B3.

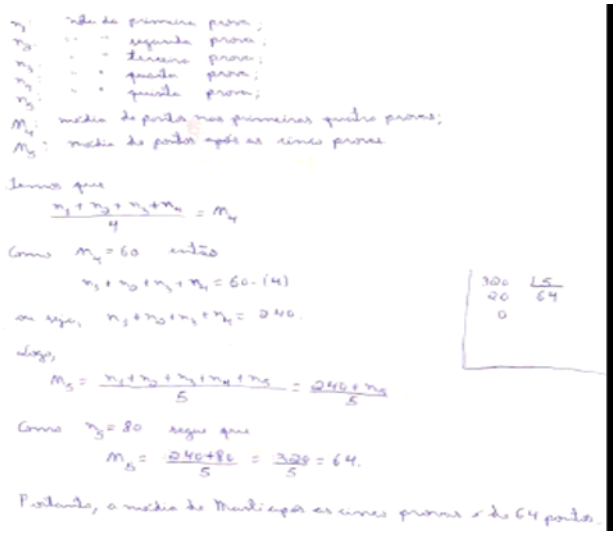


Figura 4 – Resolução da questão Q3, registro escrito do aluno L5.

Os alunos B3 e L5 apresentaram em seus registros escritos um indicativo de que as quantidades de pontos (ou notas) das quatro primeiras provas de Marli podem ser distintas. Parece que para esses alunos o conceito de média aritmética está bem compreendido. Em momento algum os alunos B3 e L5 desconsideram que as notas das quatro primeiras provas podem ser iguais, pois tomam n1, n2, n3 e n4 como sendo as notas de Marli em cada uma das quatro primeiras provas.

Pode-se também inferir, nas resoluções desses alunos, marcas do contexto escolar, por exemplo, a forma como o aluno aborda a questão pode estar ligada ao modo como o professor lida com um problema em sala de aula (se utiliza alguma linguagem matemática, alguma argumentação, se faz alguma generalização); possivelmente, ele resolve um problema por caminhos que vão definindo as situações envolvidas. Tanto na **Figura 3** quanto na **Figura 4** há presença forte de termos técnicos utilizados num desenvolvimento de uma demonstração matemática.

O grupo G2 é constituído de uma prova. O aluno, para resolver essa questão, escolhe como estratégia o conceito de média aritmética utilizando as médias dos pontos obtidas por Marli nas quatro primeiras provas e a média da quinta prova, com a utilização de uma linguagem literal, e, para o procedimento da estratégia, utiliza operações aritméticas. Não foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.

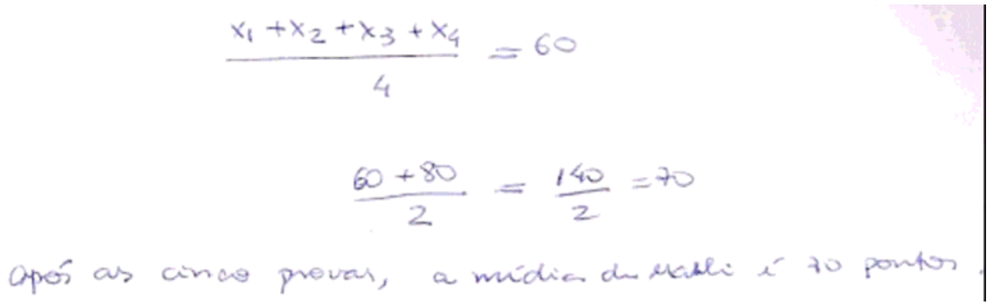


Figura 5 – Resolução da questão Q3, registro escrito do aluno B1.

Observa-se na **Figura 5** que o aluno B1 compreende o conceito de média aritmética; no entanto, ele considera que a quantidade de pontos obtidos na quinta prova corresponde a uma média. Pode-se inferir, no registro escrito desse aluno, que a compreensão que teve ao ler o enunciado do problema (1ª fase do processo de matematização) influenciou no desenvolvimento das demais fases.

O grupo G3 é composto por uma prova que apresenta uma resolução semelhante à da **Figura 5**. A diferença presente nas resoluções está em o aluno L2 considerar a quinta prova correspondente a cinco provas. Como no enunciado é apresentada a média de 60 pontos nas quatro primeiras provas de Marli, ele considerou a média aritmética das cinco provas como sendo 16 pontos (80 pontos distribuídos em cinco provas). Isso mostra que estratégias e procedimentos distintos de resolução de um mesmo problema surgem da compreensão que se tem do enunciado do problema.

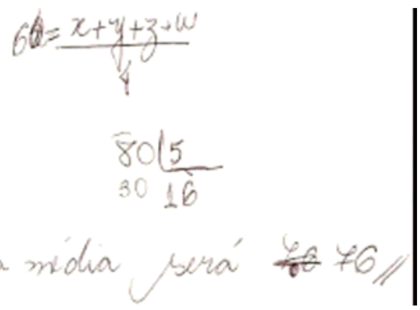
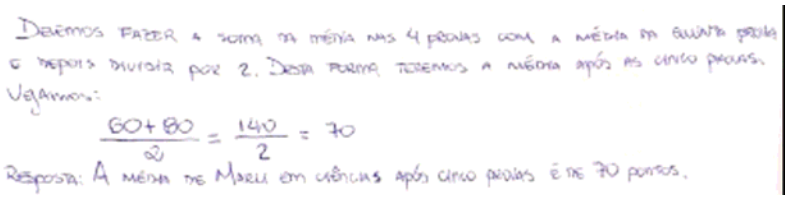


Figura 6 – Resolução da questão Q3, registro escrito do aluno L2.

O grupo G4 apresenta duas provas, nas quais se infere que os alunos compreendem que o cálculo da média de Marli após as cinco provas se procedia da seguinte forma: somar as notas obtidas nas quatro provas com a nota obtida na quinta prova e dividir por dois. O aluno L6 escreve: "*Devemos fazer a soma da média nas 4 provas com a média da quinta prova e depois dividir por 2*". Possivelmente, esses alunos apresentam marcas do contexto escolar, o que pode ter influenciado na escolha da estratégia para resolver o problema. Comumente, em muitas escolas, professores, para compor a média da disciplina ministrada em um bimestre, adicionam a nota do trabalho com a nota da prova e dividem a soma por dois. Apesar de fazer sentido a influência desse contexto na resolução dos alunos, não há dúvidas para esses alunos de que Marli fez cinco provas, e, portanto, para determinar a média final de Marli era preciso dividir a soma de todas as notas obtida nas cinco provas por cinco. Foi possível inferir uma interpretação crítica dos resultados por parte dos alunos, por meio do questionário avaliativo (**Quadro 7**).


DEVEMOS FAZER A SOMA DA MÉDIA NAS 4 PROVAS COM A MÉDIA DA QUINTA PROVA E DEPOIS DIVIDIR POR 2. DESTA FORMA TEREMOS A MÉDIA APÓS AS CINCO PROVAS. VEJAMOS:

$$\frac{60+80}{2} = \frac{140}{2} = 70$$

RESPOSTA: A MÉDIA DE MARLI EM CIÊNCIAS APÓS CINCO PROVAS É DE 70 PONTOS.

Figura 7 – Resolução da questão Q3, registro escrito do aluno L6.

Observa-se que o aluno L6 não apresenta dúvidas quanto ao conceito de média aritmética, assim como o aluno do grupo G2, pois o processo de matematização inferidos nos registros dos dois é semelhante.

Nos grupos G5 e G6, respectivamente, há duas e sete provas. Neles o problema foi compreendido considerando a média aritmética de pontos obtidos por Marli nas quatro primeiras provas e a nota obtida na quinta prova. Em ambos os grupos a estratégia utilizada pelos alunos foi a de usar o conceito de média aritmética, considerando a média de pontos obtidos por Marli nas quatro primeiras provas e a pontuação obtida na quinta prova, sem a utilização de uma linguagem literal.

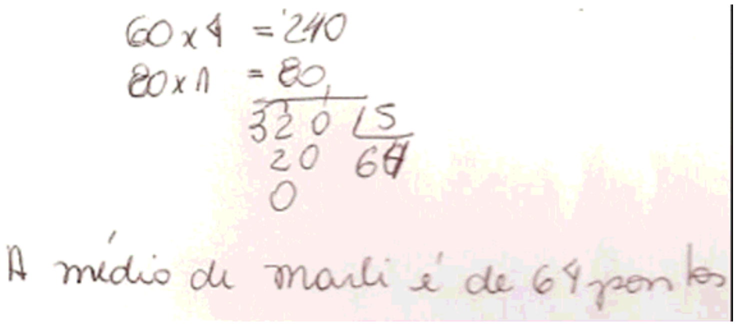


Figura 8 – Resolução da questão Q3, registro escrito do aluno B2 (G6)

Da **Figura 8**, infere-se que o aluno B2 compreendeu do enunciado da questão que a pontuação correspondente nas quatro primeiras provas de Marli equivalem a 240. Como o problema pede para determinar a média de Marli após as 5 provas, o aluno adicionou as pontuações referentes às cinco provas de Marli e, seguindo o conceito de média aritmética, dividiu o resultado dessa soma pela quantidade de provas somadas, obtendo a média de 64 pontos. Observa-se que a estratégia escolhida e o procedimento utilizado resolvem o problema independente de não mostrar passo a passo o caminho utilizado por meio de uma linguagem literal como é feito na **Figura 4**. No registro escrito da **Figura 8**, assim como no da **Figura 4**, é possível inferir que os alunos resolveram logicamente o problema considerando as propriedades e definições do conceito de média aritmética. Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema desses alunos, devido à forma como abordaram a estratégia utilizada.

No entanto, a forma como o aluno B2 desenvolveu a estratégia escolhida para a resolução do problema apresenta, em seus procedimentos, um processo considerado equivocado do ponto de vista da linguagem matemática. Observa-se que ele, do resultado de uma soma, utilizando a mesma estrutura da conta, realiza uma divisão, ou seja, o aluno realiza o seguinte processo: 240+80=320:5=64. Talvez, o aluno não se preocupe com a escrita, pois quer apenas dar uma resposta. Esse tipo de procedimento é muito comum de encontrar nos registros dos alunos do Ensino Básico e Superior. Percebeu-se nos registros escritos de muitos alunos do curso de Matemática uma não preocupação com a escrita matemática. A matemática não é apenas provida de raciocínio lógico. Ela também é provida de argumentação, comunicação, ferramentas, recursos, linguagem simbólica, formal e técnica.

Hoje em dia, observa-se nos estudos relacionados ao ensino de Matemática uma supervalorização da forma como o aluno pensa Matemática, esquecendo a forma como o aluno expressa a Matemática.

No grupo G5, o procedimento da resolução do problema é o mesmo utilizado no G6, mas a estratégia é diferente. Os alunos desse grupo compreenderam que as primeiras quatro provas de Marli possuíam cada uma 60 pontos, totalizando 240. Considerar que em cada prova a pontuação é sempre 60 pontos não é uma verdade, pois no problema não fica específico que todas elas têm o mesmo valor. Porém, o raciocínio é válido, já que as restrições no enunciado são impostas pela informação da média, sendo que não é necessário saber se os pontos obtidos nas quatro primeiras provam de Marli eram iguais ou não.

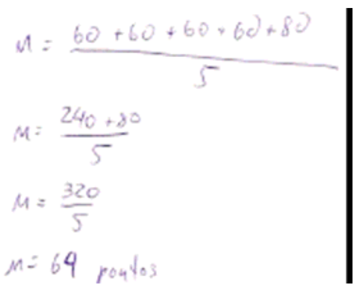


Figura 9 – Resolução da questão Q3, registro escrito do aluno B10 (G5)

Pelo **Quadro 8** observa-se que, ao resolver essa questão, o aluno B2 justifica que ela é a mais fácil, porque "*era só fazer a média aritmética das notas*", e o aluno L4 justifica que a questão Q3 é a mais fácil "*porque todos nós fazemos e refazemos nossas médias o ano todo*". Fica explícito na escrita desses alunos o reconhecimento de definições e procedimentos rotineiros praticados em sala de aula. Estas características identificadas nos registros escritos dos alunos pertencem ao nível 1 de competências do modelo de classificação de problemas da "Pirâmide de Jan de Lange".

Nas resoluções da questão Q3, verificou-se ainda que, de uma forma geral, pela maneira pela qual abordaram o problema, os alunos do curso de Licenciatura, comparados com os do curso do Bacharelado, apresentaram uma preocupação maior em justificar com mais clareza a produção escrita. Talvez essa preocupação esteja influenciada por algumas disciplinas pedagógicas do curso da

Licenciatura. Com isso, podem-se mais uma vez inferir marcas do contexto escolar nas resoluções desses alunos.

Nas inferências sobre os registros dos alunos do Ensino Fundamental, referentes à questão Q3 (“Prova de Ciências”), Celeste (2008) aponta a possibilidade de alguns alunos terem calculado a “média” como o total de pontos obtidos nas cinco provas, uma vez que, na escola que freqüentam, a média é a soma dos pontos obtidos nas diferentes tarefas do bimestre. Neste caso, os alunos não utilizaram o conceito de média aritmética, apenas se apoiaram nas experiências vivenciadas na escola para resolver a questão. Santos (2008), em sua análise sobre a produção escrita dos alunos do Ensino Médio, em relação a essa mesma questão, inferiu que os alunos podem ter relacionado a situação do contexto do problema com o contexto da escola, ou seja, calcularam a média de Marli da forma como são calculadas as médias deles mesmos no final do ano letivo. Também inferiu que alguns alunos acreditam que toda nota deva ser dividida por dois, pois, em muitas escolas, professores somam a nota do trabalho com a nota de prova e dividem por dois para compor a média da disciplina ministrada em um bimestre.

Analisando os registros de alguns alunos do curso de Matemática na mesma questão e, também, a resposta dada ao questionário avaliativo, podem-se fazer algumas inferências semelhantes às feitas por Santos (2008) e Celeste (2008). Percebeu-se em alguns registros escritos a mesma relação que os alunos fazem da situação do contexto do problema com o contexto da escola, inferida nas análises de Celeste (2008) e Santos (2008).

Uma outra inferência observada nos registros escritos dos alunos de Matemática, também observada na pesquisa de Santos (2008) e na de Celeste (2008) diz respeito ao processo de matematização. Em alguns registros escritos, foram observadas fases comuns desse processo. Nos estudos das autoras, alguns estudantes do Ensino Básico, assim como os de Matemática, compreenderam, por exemplo, que as pontuações obtidas por Marli nas quatro provas equivaliam cada uma a 60 pontos, e o cálculo da média era efetuado pela adição de todos os pontos obtidos por Marli nas cinco provas, dividindo o resultado dessa adição pela quantidade de provas realizadas.

Outro processo de matematização comum presente em registros escritos dos alunos do Ensino Médio e do Ensino Superior foi de os alunos compreenderem que a pontuação obtida por Marli na quinta prova corresponde a uma média de cinco provas. O cálculo da média de Marli após as cinco provas foi obtido pela soma da média de pontos obtida nas quatro primeiras provas (60 pontos) com a média de pontos obtida nas (supostas) cinco provas (80), dividindo o resultado dessa soma pelo número de médias obtidas (2).

4.3.2 Questão – "Lixo"

A questão denominada "Lixo", neste estudo, está sendo referenciada como questão Q5.

Questão Q5: *Para uma atividade escolar sobre o meio ambiente, os alunos coletaram informações sobre o tempo de decomposição de vários tipos de lixo que as pessoas jogam fora:*

Tipo de lixo	***Tempo de decomposição***
Casca de banana	*1 a 3 anos*
Casca de laranja	*1 a 3 anos*
Caixas de papelão	*0,5 ano*
Goma de mascar	*20 a 25 anos*
Jornais	*Alguns dias*
Copos de plástico	*Mais de 100 anos*

Um aluno pretende mostrar os resultados em um gráfico de barras.
Dê ***uma*** *justificativa para o fato de que o gráfico de barras não é o mais apropriado para apresentar estes dados.*

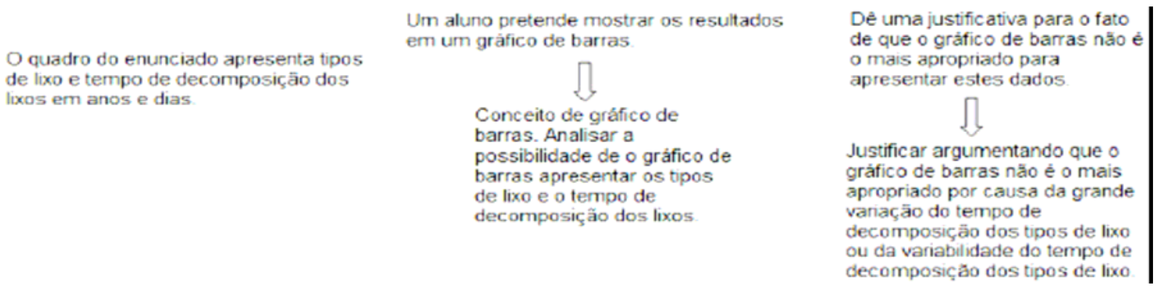
Para resolver essa questão é necessário ler e interpretar as informações disponibilizadas num quadro e, ainda, ter um conhecimento sobre gráfico de barras.

Em geral, o gráfico de barras é um tipo de gráfico em que os dados são apresentados com formas de retângulos dispostos na horizontal. No entanto, para alguns autores, como Magalhães e Lima (2005), um gráfico de barras apresenta os valores da variável no eixo das abscissas e as freqüências ou porcentagens no eixo das ordenadas, ou seja, os dados são representados com formas de retângulos dispostos na vertical. Como na literatura estatística é possível encontrar as duas definições, nesta pesquisa, serão aceitas as duas formas de representação de um gráfico de barras.

Segundo Magalhães e Lima (2005, p.13), "esse tipo de gráfico se adapta melhor às variáveis discretas ou qualitativas ordinais"[32]. A barra é desenhada para representar uma relação entre os valores do eixo das abscissas e os valores do eixo das ordenadas. Nessa relação, tem-se que para cada valor da variável no eixo das abscissas desenha-se uma barra com altura correspondendo a cada valor da variável no eixo das ordenadas.

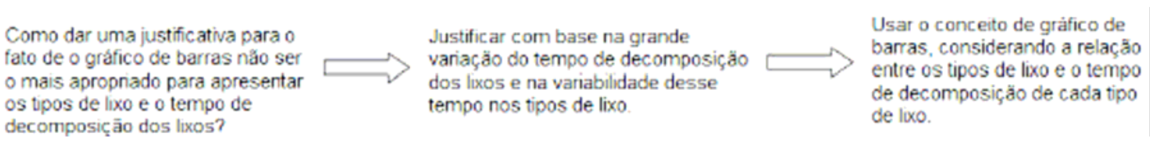
Para investigar os indícios das fases de um processo de matematização nos registros escritos dos alunos ao resolver essa questão, estabeleceu-se uma forma de identificar tais fases com base nas interpretações feitas nesses registros:

1ª fase:



Apresenta-se nessa fase uma compreensão geral do problema.

2ª fase:

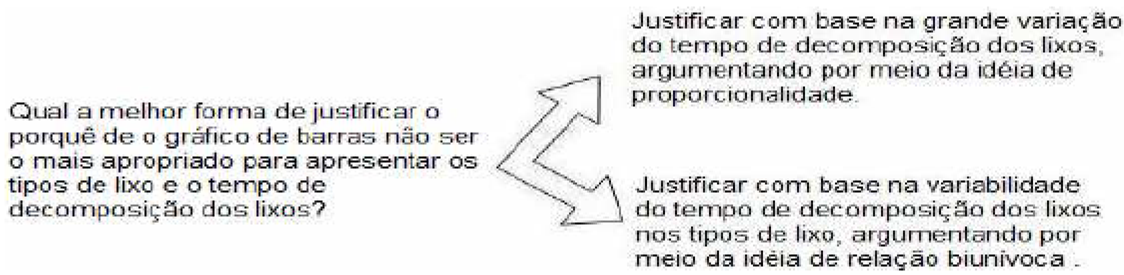


---

[32]"A variável é qualitativa quando os possíveis valores que assume representam atributos e/ou qualidades. Se tais variáveis têm uma ordenação natural, indicando intensidades crescentes de realização, então elas são classificadas como qualitativas ordinais" (MAGALHÃES; LIMA, 2005, p.6). "Grosso modo, variáveis quantitativas discretas podem ser vistas como resultantes de contagens, assumindo assim, em geral, valores inteiros. De maneira mais formal, o conjunto dos valores assumidos é finito ou enumerável" (MAGALHÃES; LIMA, 2005, p.6).

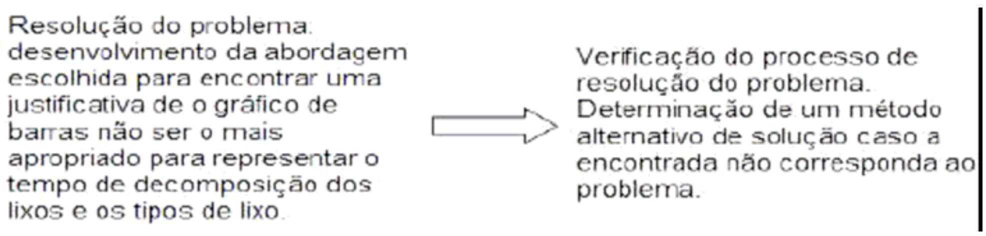
Nessa fase, apresenta-se uma maneira de considerar a(s) estratégia(s) de resolução do problema. Após ter uma compreensão do que o enunciado traz, faz-se um planejamento de como resolver o problema proposto, no caso, encontrar uma justificativa para o fato de o gráfico de barras não ser o mais apropriado para apresentar os dados. O aluno explora as informações que obteve ao compreender o problema mostrando, por meio de um registro escrito, suas estratégias de resolução.

3ª fase:



É a fase em que se apresenta o problema no "mundo matemático no contexto escolar", onde os alunos trabalham a questão, encontrando uma forma de transformar o problema em uma linguagem matemática (formal ou informal), formalizando de acordo com a matemática aprendida na escola (o aluno vai procurar, entre os conceitos matemáticos e estatísticos aprendidos na escola, uma melhor forma de encontrar uma justificativa para a não utilização do gráfico de barras).

4ª fase:



Nessa fase, os alunos, no "mundo matemático escolar", passam a efetivar os procedimentos escolhidos utilizando ferramentas matemáticas necessárias para resolver o problema (utilizar as propriedades de construção de um gráfico de barras; por exemplo, a relação biunívoca entre as variáveis envolvidas).

No quadro abaixo, é apresentada uma análise interpretativa sobre os indícios de um processo de matematização presente nos registros escritos dos alunos que cursam Matemática, ao resolverem a questão Q5.

GRUPOS (Gi)(N)	PROCESSO DE MATEMATIZAÇÃO DA Q5			
	1ª fase (compreensão do problema)	2ª fase (estratégia)	3ª fase (procedimento)	4ª fase (resolução do problema; validação do problema)
G_1(7)	Considera as informações sobre o tempo de decomposição dos tipos de lixos presentes no enunciado.	Dar uma justificativa baseada na variabilidade dos tempos de decomposição dos lixos.	Dar um exemplo do tempo de decomposição de um tipo de lixo para justificar a variabilidade dos tempos de decomposição do lixo.	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que o gráfico de barras não é o mais apropriado, pelo fato de o tempo de decomposição de alguns lixos apresentarem variação. Por causa disso, não é possível indicar no gráfico um tempo exato. Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema em um prova.
G_2(8)	Considera as informações sobre o tempo de decomposição dos tipos de lixos presentes no enunciado.	Dar uma justificativa baseada na grande variação de escala de alguns tipos de decomposição dos lixos.	Dar um exemplo do tempo de decomposição de um tipo de lixo para justificar a grande variação de escala para a construção de um gráfico de barras.	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que se no gráfico de barras a escala fosse utilizada para representar o tempo menor de decomposição do lixo, por exemplo, dos jornais, as barras que representariam o tempo maior de decomposição como os dos copos plásticos, teriam proporções muito grandes (gigantescas, imensas). Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.
G_3(1)	Considera as informações sobre o tempo de decomposição dos tipos de lixos presentes no enunciado.	Dar a justificativa baseada no fato de o tempo de decomposição de lixo estar em unidades distintas de tempo.	Argumentar sobre o tempo de decomposição de lixo estar em anos e dias.	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que o gráfico de barras não é apropriado, pois o tempo de composição está em anos e dias. Não foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.
G_4(2)	Não apresenta registro escrito algum. Não foi possível construir uma análise interpretativa para essas provas.			

Quadro 12 – Análise interpretativa dos registros escritos dos 18 alunos de um curso de Matemática referente à questão Q5.

No grupo G1, têm-se sete provas. Os alunos, para resolver o problema, consideram as informações sobre o tempo de decomposição dos tipos de lixo, tomando como estratégia uma justificativa baseada na variabilidade dos mesmos. Para o procedimento da estratégia, utilizam um exemplo referente ao tempo de decomposição do lixo para justificar que nesse período não é possível determinar um tempo exato ou fixo. Há, em alguns registros escritos, indícios de algumas competências cognitivas (argumentação, comunicação e raciocínio matemático) e de validação do processo de resolução (baseado na argumentação, atitude crítica do aluno em face de resolução).

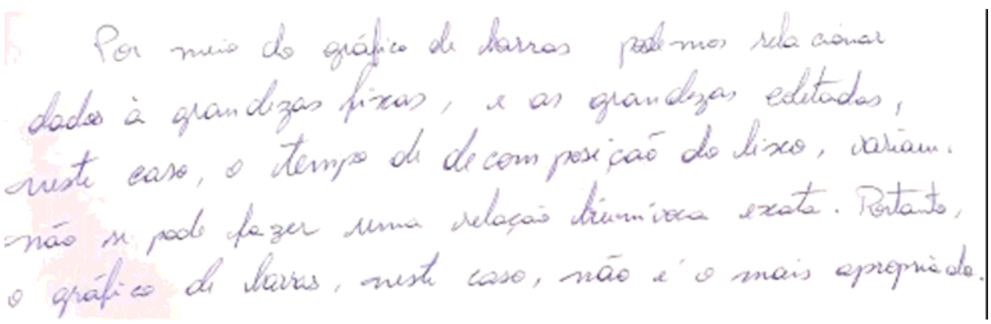

Por meio do gráfico de barras podemos relacionar dados à grandezas fixas, e as grandezas citadas, neste caso, o tempo de decomposição do lixo, variam. Não se pode fazer uma relação numérica exata. Portanto, o gráfico de barras, neste caso, não é o mais apropriado.

Figura 10 – Resolução da questão Q5, registro escrito do aluno L8.

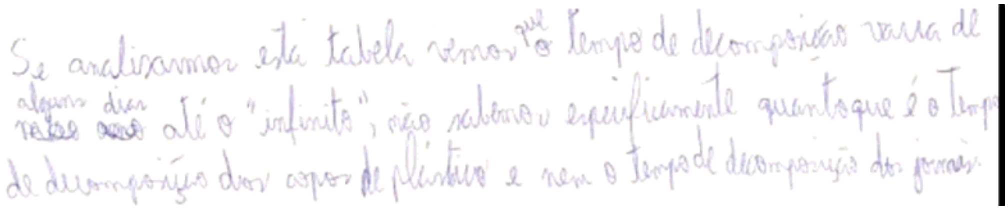

Se analisarmos esta tabela vemos que o tempo de decomposição varia de alguns dias até o "infinito", não sabemos especificamente quanto que é o tempo de decomposição dos copos de plástico e nem o tempo de decomposição dos jornais

Figura 11 – Resolução da questão Q5 registro escrito do aluno B5.

Os alunos L8 e B5 apresentaram, em seus registros escritos, ter noção de uma construção de um gráfico de barras.

O aluno L8 apresentou uma maior preocupação com a forma de escrita matemática (termos técnicos) ao justificar o porquê de o gráfico de barras não ser o mais apropriado para representar a situação dada no problema: "*... não se pode fazer uma relação biunívoca*...". Nota-se que o contexto do problema (contexto científico) foi relevante ao aluno, que, para apresentar uma justificativa, relaciona-a a uma situação específica da matemática, no caso, a idéia de função.

O aluno do B5 parece ter considerado que, para a construção de um gráfico de barras, é preciso considerar um tempo exato para colocar como dado: "... *não sabemos especificamente quanto que é o tempo de decomposição dos copos de plástico e nem o tempo de decomposição dos jornais*". No entanto, a relação de correspondência entre as variáveis (tipo de lixo e tempo de decomposição do lixo) não fica evidente como no registro escrito do aluno L8. Em ambas as produções escritas, a estratégia escolhida resolve o problema.

O aluno B1, também pertencente ao grupo, utiliza a estratégia com base na variabilidade dos dados, mas a forma como a abordou não resolve o problema. Para o aluno B1, o gráfico de barras não é o mais apropriado porque "*no eixo x não iremos ter 1 único parâmetro para se comparar com os outros*". Nota-se no registro escrito que uma relação de correspondência aparece, no entanto, não definida com clareza. Observa-se uma dificuldade em argumentar sua justificativa escolhida, não definindo em seus registros a que parâmetro se refere (o procedimento utilizado não foi suficiente). Neste caso, não foi possível construir uma interpretação do processo de resolução apresentado pelo aluno.

Um outro aluno pertencente ao grupo G1 apresenta, em seus registros, indícios de que sua justificava esteja baseada na variabilidade dos tempos de decomposição, argumentando que o gráfico de barras não é o mais apropriado porque no tipo de casca de banana o gráfico não irá começar no zero, mas, sim no número 1 e terminar no número 3.

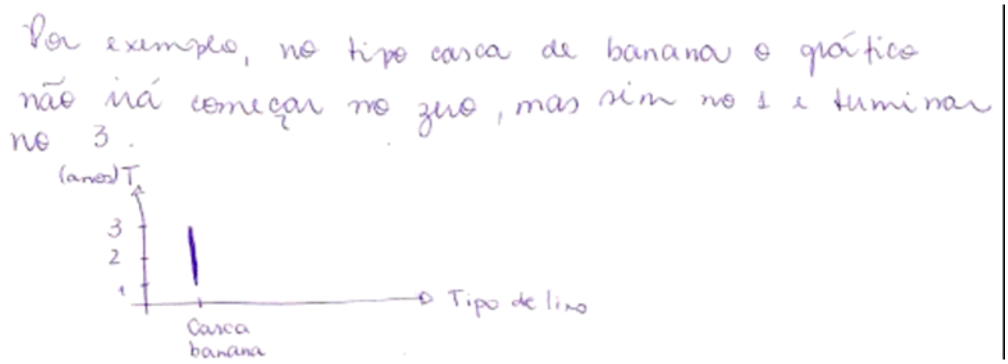


Figura 12 – Resolução da questão Q5, registro escrito do aluno B8.

O aluno B8 constrói um “gráfico de barras” para mostrar que não é possível apresentar alguns dados do problema, tomando como exemplo o tipo de lixo “casca de banana”. Observa-se que nesse registro escrito há indícios de uma validação do processo de resolução, o aluno considera a construção gráfica para justificar e comunicar a estratégia e o procedimento escolhido.

O grupo G2 apresenta oito provas, nas quais se infere que os alunos compreendem que a variação de escalas é muito grande para alguns tipos de decomposição de lixo. O aluno B4, por exemplo, justifica argumentando que o gráfico de barras não é o mais apropriado porque “*o tempo de decomposição dos jornais é de alguns dias enquanto que o tempo de decomposição dos copos plástico é mais de 100 anos o que é uma diferença muito grande para ser mostrado em um gráfico de barras*”. Esse aluno argumenta a dificuldade de visualização gráfica dos dados, possivelmente, apontando para a proporcionalidade das barras. Não há indícios nesse grupo referentes a alguma validação do processo de resolução, mas há, em alguns registros, indícios de algumas competências cognitivas (argumentação, comunicação e raciocínio matemático).

O grupo G3 apresenta uma prova. Nele, o aluno deu uma justificativa baseada no fato de o tempo de decomposição de lixo estar em unidades distintas de tempos. O aluno L5 justifica que o gráfico de barras não é o mais apropriado, pois “*o tempo de decomposição está em anos e em dias*”. Nota-se que o aluno não percebe os problemas quanto à grande variação dos dados referidos na questão nem quanto à variabilidade dos dados para uma dada categoria. É possível que esse aluno apresente dificuldades quanto à construção de gráficos, em específico, a de um gráfico de barras.

Com relação ao grupo G4, não foi possível construir uma análise interpretativa para essas provas. Os alunos não apresentaram registro escrito algum.

Observa-se que alguns registros escritos comentados anteriormente apresentam uma atitude crítica frente à resposta e reflexão acerca do processo de resolução. Essa é uma característica de problemas que são classificados no nível 3 de competências da "Pirâmide de Jan de Lange". Segundo Dekker e Querelle (2002), os alunos, diante desses tipos de problemas, são capazes de criticar um "modelo matemático", uma situação matemática e reinventá-los se necessário.

Nas inferências sobre os registros dos alunos do curso de Matemática, referentes à questão Q5 ("Lixo"), pela maneira com a qual a abordaram, os alunos do curso de Licenciatura, mais uma vez comparados com os do curso do Bacharelado, apresentaram uma preocupação maior em justificar com mais clareza a produção escrita. Para o ensino da Matemática, esse é um ponto muito favorável, pois trabalhar conjuntamente com o pensar, o racionar e o expressar matemática ajuda os alunos na construção, na compreensão e argumentação de conceitos matemáticos.

Sobre os registros dos alunos do Ensino Fundamental, em relação à mesma questão, Celeste (2008) aponta que alguns alunos compreendem o conceito de gráfico de barras. Algumas das justificativas utilizadas por eles para dizer o porquê de o gráfico não ser o mais apropriado para apresentar os dados são muito semelhantes com as utilizadas pelos alunos do curso de Matemática. Por exemplo, um aluno de sua amostra justifica argumentando que "*o gráfico ficaria desproporcional, não daria uma visão clara*" (CELESTE, 2008, p.32-33). O aluno B4 da amostra deste trabalho também justifica argumentando para a idéia da proporcionalidade das barras (muito grande ou muito pequeno).

Um outro aluno pertencente à amostra de Celeste (2008) também apresenta uma estratégia semelhante à de um aluno de Matemática. Ele justifica escrevendo "*porque no gráfico de barras não pode colocar igual aquele ali a banana 1 a 3 anos nos gráficos de barras é um ou três*" (CELESTE, 2008, p.32). Esse aluno apresenta em seus registros escritos indícios de que sua justificativa esteja baseada na variabilidade dos tempos de decomposição dos lixos, compreendendo que não se pode usar esse gráfico por causa do intervalo de tempo; é preciso ter um tempo exato para representar a barra. Nesse mesmo raciocínio, o aluno de Matemática (B8), utilizando um gráfico, argumenta que o gráfico de barras não é o mais apropriado porque no tipo de casca de banana o gráfico não irá começar no zero, mas, sim no número 1 e terminar no número 3. Ele, assim como o aluno do Ensino Fundamental, focaliza a argumentação no intervalo de tempo da decomposição.

Nas análises de Santos (2008), também se inferiu que, em alguns registros escritos de alunos do Ensino Médio, a estratégia utilizada para justificar o porquê de o gráfico de barras não ser o mais apropriado foram comuns aos do Ensino Fundamental e do Superior. Alguns de seus alunos basearam-se no fato de o tempo de decomposição de alguns lixos não ser definido precisamente. Outros remeteram ao fato de as barras ficarem em uma proporção de difícil visualização, como é o caso desse aluno: "*porque no jornal é apenas alguns dias diferente do copo de plástico que é mais de 100 anos, ficaria um pouco difícil a visualização desses dados*" (SANTOS, 2008, p.49).

Uma outra ocorrência observada tanto nos registros dos alunos de Matemática, quanto na pesquisa de Santos (2008) e de Celeste (2008), diz respeito ao processo de matematização. Em alguns registros foram observadas fases comuns desse processo. Foi possível inferir, a partir dos estudos das autoras, que os estudantes do Ensino Básico, assim como os de Matemática, interpretaram o enunciado compreendendo que, para dar uma justificativa de o gráfico de barras não ser o mais apropriado para apresentar os dados, era preciso ler e interpretar o quadro do enunciado, levando em consideração o intervalo de tempo de decomposição dos lixos. Alguns procedimentos de resolução também foram semelhantes. Inferiu-se, das análises de Santos (2008), Celeste (2008) e das análises deste estudo, que alguns desses alunos recorreram a conceitos matemáticos para dar argumentação à justificativa escolhida (proporcionalidade, função). Isso aponta que o problema Q5 em questão condiz com o nível de classificação ao qual se encontra (**Quadro 9**).

4.3.3 Questão - “Apoio ao Presidente”

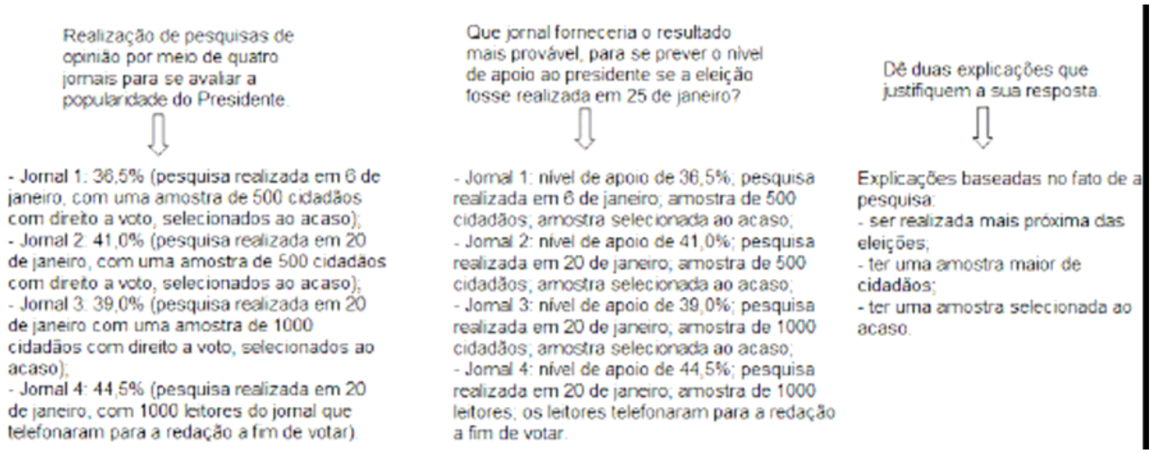
A questão denominada “Apoio ao Presidente”, neste estudo, está sendo referenciada como questão Q8.

Questão Q8: *Na Zedelândia, foram realizadas pesquisas de opinião para se avaliar a popularidade do Presidente, tendo em vista as próximas eleições. Quatro editores de jornais realizaram pesquisas independentes, em âmbito nacional. Os resultados das quatro pesquisas estão apresentados abaixo:*
Jornal 1: 36,5% (pesquisa realizada em 6 de janeiro, com uma amostra de 500 cidadãos com direito a voto, selecionados ao acaso);
Jornal 2: 41,0% (pesquisa realizada em 20 de janeiro, com uma amostra de 500 cidadãos com direito a voto, selecionados ao acaso);
Jornal 3: 39,0% (pesquisa realizada em 20 de janeiro com uma amostra de 1000 cidadãos com direito a voto, selecionados ao acaso);
Jornal 4: 44,5% (pesquisa realizada em 20 de janeiro, com 1000 leitores do jornal que telefonaram para a redação a fim de votar).
Que jornal forneceria o resultado mais provável, para se prever o nível de apoio ao presidente se a eleição fosse realizada em 25 de janeiro? Dê duas explicações que justifiquem a sua resposta.

Para resolver essa questão é necessário interpretar as informações disponibilizadas no enunciado e ter noção de alguns conceitos estatísticos como amostra, população, seleção ao acaso.

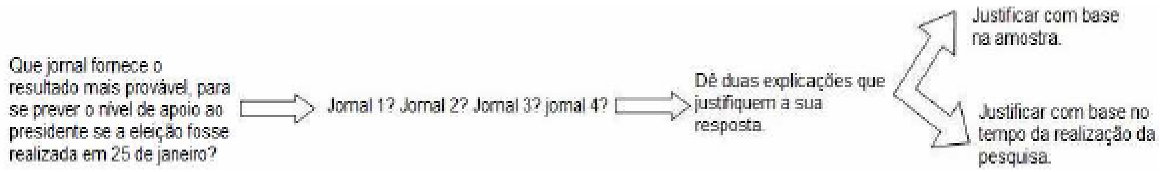
Por meio de uma interpretação dos registros escritos dos alunos, procurou-se apresentar possibilidades de uma compreensão do problema, estabelecendo algumas ligações com as interpretações do enunciado feitas pelos alunos, para que pudessem com isso tentar identificar as fases de um processo de matematização:

1ª fase:



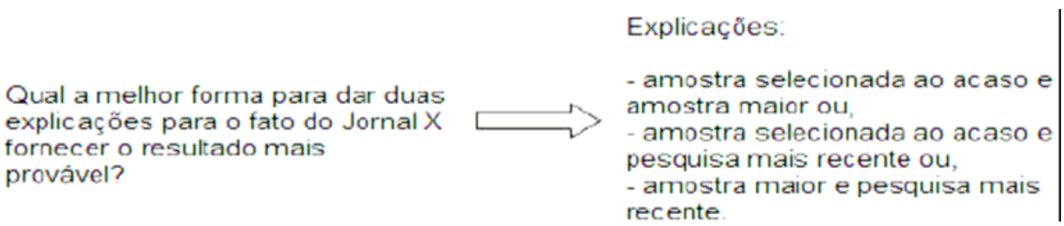
Nessa fase, nota-se que a identificação das informações presentes no enunciado do problema possibilita uma compreensão geral do problema.

2ª fase:



Nessa fase, após ter uma compreensão do que o enunciado traz, faz-se um planejamento de como resolver o problema proposto, que é o de determinar qual dos jornais fornece o resultado mais provável para se prever o nível de apoio ao presidente na data de 25 de janeiro. Além disso, pede-se dar duas explicações que justifiquem a escolha do jornal determinado. O aluno explora as informações que obteve ao compreender o problema mostrando e, por meio de um registro escrito, apresenta suas estratégias de resolução.

3ª fase:



Nessa fase, os alunos trabalham com o problema no “mundo matemático no contexto escolar”. No caso da questão Q8, eles irão buscar, entre os conceitos matemáticos e estatísticos aprendidos na escola, uma melhor forma de encontrar duas explicações para o fato de o jornal X ter sido o escolhido.

4ª fase:

Resolução do problema: desenvolvimento da abordagem escolhida. Dar duas explicações que justificam o Jornal X ser o que fornece o resultado de pesquisa mais provável , para se prever o nível de apoio ao presidente se a eleição fosse realizada em 25 de janeiro.

Verificação do processo de resolução do problema. Determinação de um método alternativo de solução caso a encontrada não corresponda ao problema.

Os alunos, no “mundo matemático escolar” passam a efetivar os procedimentos escolhidos utilizando ferramentas matemáticas necessárias para resolver o problema (usar conceitos básicos de estatística).

No quadro a seguir, é apresentada uma análise interpretativa sobre os indícios de um processo de matematização presente nos registros escritos dos alunos que cursam Matemática ao resolverem à questão Q8.

GRUPOS $(G_I)(N)$	PROCESSO DE MATEMATIZAÇÃO DA Q8			
	1ª fase (compreensão do problema)	2ª fase (estratégia)	3ª fase (procedimento)	4ª fase (resolução do problema; validação do problema)
$G_1(5)$	Considera as informações sobre as pesquisas de opinião para avaliar a popularidade do presidente presentes no enunciado.	Dar duas justificativas sobre o jornal fornecer o resultado mais provável: uma é baseada no fato de a pesquisa ser mais recente e a outra no fato de a amostra selecionada ser maior.	Comparar as informações constadas em cada jornal para poder escolher o jornal que fornece o resultado mais provável. 1ª justificativa (amostra ser maior): baseada no jornal que entrevistou mais cidadãos. 2ª justificativa (pesquisa mais recente): baseado nas pesquisas de opiniões feitas pelos jornais e considera a mais próxima da data das eleições.	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que o Jornal 3 fornece o resultado mais provável porque a pesquisa de opinião foi feita mais recente (dias antes da eleição) e o número de cidadãos com direito a voto é maior (alguns escrevem o número de cidadãos: “1000”). Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema de em algumas provas.
$G_2(2)$	Considera as informações sobre as pesquisas de opinião para avaliar a popularidade do presidente presentes no enunciado.	Dar duas justificativas sobre o jornal fornecer o resultado mais provável: uma é baseada no fato de a pesquisa ter uma amostra maior e a outra no fato de os participantes da amostra estarem a fim de votar.	Comparar as informações constadas em cada jornal para poder escolher o jornal que fornece o resultado mais provável. 1ª justificativa (amostra ser maior): baseada no jornal que entrevistou mais cidadãos. 2ª justificativa (eleitores a fim de votar): baseado nas pesquisas de opiniões feitas pelos jornais e considera aquela em que os eleitores telefonaram para a redação a fim de votar.	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que o Jornal 4 fornece o resultado mais provável porque a pesquisa de opinião foi feita com um número maior de cidadãos (1000 leitores) e com eleitores (leitores) que estavam a fim de votar. Foi possível construir alguma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.
$G_3(1)$	Considera as informações sobre as pesquisas de opinião para avaliar a popularidade do presidente presentes no enunciado.	Dar duas justificativas sobre o jornal fornecer o resultado mais provável: uma é baseada no fato de a pesquisa ser mais recente e a outra no fato de os participantes da amostra estarem a fim de votar.	Comparar as informações constadas em cada jornal para poder escolher o jornal que fornece o resultado mais provável. 1ª justificativa (pesquisa mais recente): baseado nas pesquisas de opiniões feitas pelos jornais e considera a mais próxima da data das eleições. 2ª justificativa (participantes a fim de votar): baseado nas pesquisas de opiniões feitas pelos jornais e considera aquela em que os votantes telefonaram para a redação a fim de votar.	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que o Jornal 4 fornece o resultado mais provável porque a pesquisa de opinião foi realizada mais próxima das eleições com 1000 leitores e com leitores que já tinham certeza de em qual candidato votar (estavam a fim de votar). Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.
$G_4(4)$	Considera as informações sobre as pesquisas de opinião para avaliar a	Dar duas justificativas sobre o jornal fornecer o resultado mais provável: uma é	Comparar as informações constadas em cada jornal para poder escolher o jornal que fornece o resultado mais provável.	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que o Jornal 3 fornece o

	popularidade do presidente presentes no enunciado.	baseada no fato de a pesquisa ter uma amostra maior e a outra no fato de os leitores terem sido selecionados ao acaso.	1ª justificativa (amostra ser maior): baseada no jornal que entrevistou mais cidadãos. 2ª justificativa (amostra selecionada ao acaso): baseada em eleitores selecionados ao acaso.	resultado mais provável porque o jornal entrevistou mais cidadãos e esses foram selecionados ao acaso. Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.
G_5 (3)	Considera as informações sobre as pesquisas de opinião para avaliar a popularidade do presidente presentes no enunciado.	Dar três justificativas sobre o jornal fornecer o resultado mais provável: uma é baseada no fato de a pesquisa ter uma amostra maior, outra no fato de os leitores terem sido selecionados ao acaso e outra no fato de a pesquisa ser mais recente.	Comparar as informações constadas em cada jornal para poder escolher o jornal que fornece o resultado mais provável. 1ª justificativa (amostra ser maior): baseada no jornal que entrevistou mais cidadãos. 2ª justificativa (amostra selecionada ao acaso): baseada em eleitores selecionados ao acaso. 3ª justificativa (pesquisa mais recente): baseado nas pesquisas de opiniões feitas pelos jornais e considera a mais próxima da data das eleições.	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que o Jornal 3 fornece o resultado mais provável porque o jornal possui uma amostra maior e de cidadãos escolhidos ao acaso, além de a pesquisa ter sido feita mais próxima da data da eleição. Não foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.
G_6 (1)	Considera as informações sobre as pesquisas de opinião para avaliar a popularidade do presidente presentes no enunciado.	Dar duas justificativas sobre o jornal fornecer o resultado mais provável: uma é baseada no fato de fato de os leitores terem sido selecionados ao acaso e a outra no fato de a pesquisa ser mais recente.	Comparar as informações constadas em cada jornal para poder escolher o jornal que fornece o resultado mais provável. 1ª justificativa (amostra selecionada ao acaso): baseada em eleitores selecionados ao acaso. 2ª justificativa (pesquisa mais recente): baseado nas pesquisas de opiniões feitas pelos jornais e considera a mais próxima da data das eleições.	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que o Jornal 3 fornece o resultado mais provável porque a pesquisa foi realizada mais perto da data da eleição, concluindo que os eleitores têm menos tempo para mudar de candidato, e a amostra escolhida possui pessoas de qualquer lugar (ao acaso), o que possibilita à pesquisa ser mais confiável. Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.
G_7 (2)	Considera as informações sobre as pesquisas de opinião para avaliar a popularidade do presidente presentes no enunciado.	Dar uma justificativa sobre o jornal fornecer o resultado mais provável baseada no número de cidadãos que apoiariam (não apóiam) o presidente (votariam ou não no presidente).	Justificativa: encontrar o número de cidadãos eleitores que apóiam e não apóiam o presidente para as pesquisas realizadas em cada jornal. Considerar os resultados (em %) da pesquisa de cada jornal. Multiplicar os resultados pelo número de cidadãos eleitores de cada jornal. Dividir por dois o resultado da multiplicação encontrado quando se tratar de 1000 eleitores (para se remeter a 500 cidadãos e comparar com os jornais que possuem essa quantidade de eleitores).	Uma resolução do problema: Para o Jornal 1: arma e efetua a multiplicação $(0{,}365\times 500)$ obtendo 182,500. Escreve: "De 500 cidadãos, 183 apóiam o presidente". Para o Jornal 2: arma e efetua a multiplicação $(0{,}41\times 500)$ obtendo 205. Escreve: "De 500 cidadãos, 205 apóiam o presidente". Para o Jornal 3: arma e efetua a multiplicação $(0{,}39\times 1000)$ obtendo 390,00. Divide $(\frac{390}{2})$ obtendo 195. Escreve: "500 cidadãos, 195,00 apóiam o presidente". Para o Jornal 4: arma e efetua a multiplicação $(0{,}445\times 1000)$ obtendo 445,00. Divide $(\frac{445}{2})$ obtendo 195. Escreve: "500 leitores, 223 apóiam o presidente". Responde que o Jornal 2 forneceria o resultado mais provável. Justifica a resposta: "Se em 6 de janeiro 183 cidadãos apoiavam o presidente. Se em 20 de janeiro 195 cidadãos apoiavam o presidente. Então em 25 de janeiro, o jornal que oferecia o resultado mais provável seria o J2". (Subtrai 183-195 obtendo 12; adiciona 195+12 obtendo 207). Não foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.

Quadro 13 – Análise interpretativa dos registros escritos dos 18 alunos de um curso de Matemática referente à questão Q8

No grupo G1, têm-se cinco provas. Os alunos, para resolver o problema, consideram as informações sobre as pesquisas de opinião apresentadas em cada jornal. A pesquisa foi realizada para avaliar a popularidade do presidente tendo em vista as próximas eleições. A estratégia escolhida pelo grupo foi escolher o jornal cuja pesquisa fosse mais recente, e a amostra, com maior número de cidadãos participantes. Assim, o jornal 3 foi o escolhido. Par o desenvolvimento da estratégia, abordam duas explicações para justificar a escolha desse jornal. A primeira, baseada no jornal que entrevistou mais cidadãos, e a segunda, baseada nas pesquisas de opiniões feitas pelos jornais, considerando a mais próxima da data de 25 de janeiro.

Das investigações feitas nos registros escritos dessas provas, infere-se que os alunos têm conhecimento de alguns conceitos estatísticos, como o de amostra. Nota-se também que em alguns registros há uma organização e estruturação das estratégias e dos procedimentos. Isso torna mais fácil identificar indícios de que o aluno, frente a um problema, conseguiu fazer alguma matematização. Ainda, foi possível inferir uma interpretação crítica por parte dos alunos ao justificar a escolha do jornal.

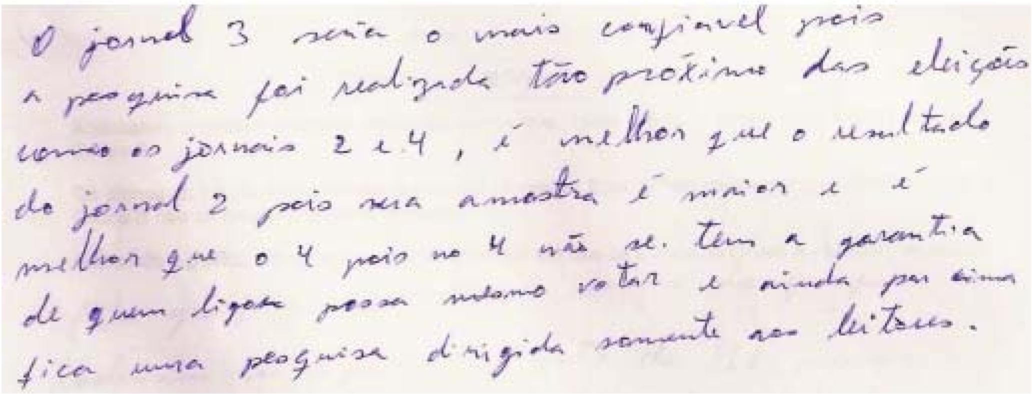

O jornal 3 seria o mais confiavel pois
a pesquisa foi realizada tão próximo das eleições
como os jornais 2 e 4, é melhor que o resultado
do jornal 2 pois sua amostra é maior e é
melhor que o 4 pois no 4 não se tem a garantia
de quem ligou possa mesmo votar e ainda por cima
fica uma pesquisa dirigida somente aos leitores.

Figura 13 – Resolução da questão Q8, registro escrito do aluno L3.

Por exemplo, na análise da produção escrita do aluno L3, assim como nas outras, foi possível construir um processo de matematização. A primeira fase do processo corresponde a uma compreensão que ele teve ao ler o enunciado do problema. Ele possivelmente compreendeu que, para determinar o jornal solicitado na questão, teria que considerar e analisar as informações correspondentes para cada jornal. Ao fazer isso, o aluno se encontra na segunda fase do processo. Ele começa a comparar as informações constadas em cada jornal e dar relevância ao contexto científico (o aluno faz análises da técnica utilizada pelos jornais para levantar a pesquisa), e encontra o jornal solicitado, no caso, Jornal 3. Nessas comparações, ele, já na terceira fase do processo, utiliza duas explicações para justificar a escolha do jornal: a pesquisa é mais recente e a amostra é maior. Para o desenvolvimento da estratégia abordada e o procedimento utilizado, o aluno, na quarta fase do processo, justifica argumentando que o Jornal 3 é o que fornece o resultado mais provável, ou melhor o mais confiável, porque a pesquisa foi realizada próxima das eleições. Argumenta que o Jornal 2 e 4, mesmo tendo realizado as pesquisas na mesma data do Jornal 3, não podem ser escolhidos porque o Jornal 2 tem uma amostra menor que a do jornal 3. No Jornal 4, não se tem a garantia de que quem ligou possa mesmo ter votado, além de a pesquisa ser destinada somente para leitores, portanto, não confiável. Observa-se que há indícios de uma validação do processo de resolução.

O grupo G2 apresenta duas provas, nas quais se infere que os alunos compreendem que o Jornal 4 fornece o resultado mais provável, baseados no fato de a pesquisa ter uma amostra maior e de ter uma amostra cujos participantes estavam a fim de votar.

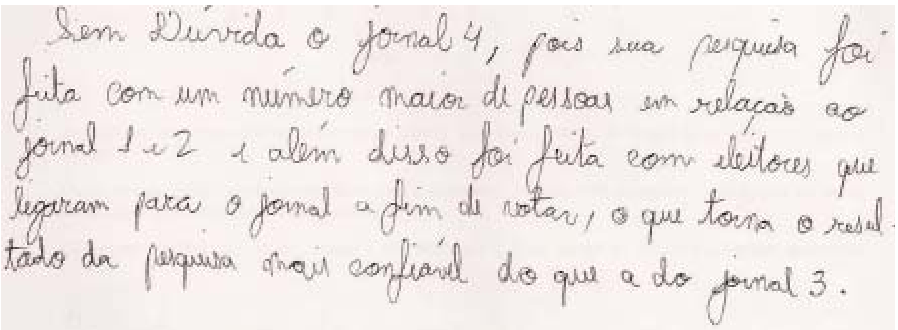

Sem Dúvida o jornal 4, pois sua pesquisa foi feita com um número maior de pessoas em relação ao jornal 1 e 2 e além disso foi feita com eleitores que ligaram para o jornal a fim de votar, o que torna o resultado da pesquisa mais confiável do que a do jornal 3.

Figura 14 – Resolução da questão Q8, registro escrito do aluno B7.

Foi possível acompanhar o processo de matematização do aluno B7, mesmo ele não optando pelo Jornal 3. O que diferencia a estratégia desse aluno da escolhida pelo grupo G1 é acreditar que a atitude dos eleitores em ligarem para o jornal e votarem torna a pesquisa mais confiável. Não leva em consideração o fato de o Jornal 4 destinar a sua pesquisa somente para leitores. Com isso, ele descarta a possibilidade de ser o Jornal 2 e 3. Nota-se que o procedimento utilizado foi o mesmo do grupo G1, o de comparar as informações constadas em cada jornal para poder escolher o Jornal que fornece o resultado mais provável. Mesmo a segunda justificativa escolhida pelo aluno não resolvendo o problema, ele, da forma como a aborda, apresenta indícios de uma validação do processo de resolução (resolução dele).

O grupo G3 consta de uma prova. A estratégia escolhida para escolher o Jornal 4 foi considerar a pesquisa realizada mais próxima das eleições e a amostra que era constada de participantes que ligaram na redação do jornal para votar. O procedimento foi o mesmo dos grupos anteriores: comparar as informações de cada jornal. O aluno justifica que, nos outros jornais, "*as pessoas foram escolhida ao acaso podendo responder qualquer coisa a pesquisa*". Nesse registro escrito, assim como no da prova B7, nota-se que o aluno não faz uma reflexão sobre seu argumento. Como ele acredita que a pesquisa do Jornal 4 se torna mais confiável pelo fato de as pessoas ligarem e votarem por conta própria, não percebe que isso também pode ser desfavorável para a pesquisa, não garantindo a confiabilidade dela. As pessoas podem não dizer a verdade quando ligam para a redação do jornal para votar, e, também, o jornal pode manipular as ligações. Houve indícios de uma validação do processo de resolução.

O grupo G4 apresenta quatro provas, nas quais se infere que os alunos compreendem que o Jornal 3 fornece o resultado mais provável, por causa de ter uma amostra maior e de ela ter sido selecionada ao acaso. O aluno B8 justifica argumentando que "*os eleitores foram selecionados ao acaso, que é melhor do que os que queriam votar, pois poderiam ter sido subornados ou mesmo porque não gostavam e queriam que o presidente se 'desse mal'*" e "*a amostra do jornal 3 foi maior*". Observa-se que esse aluno explica o porquê da escolha da seleção ao acaso. Isso mostra que, além de fazer uma reflexão sobre sua resposta, o aluno proporcionou um sentido à justificativa abordada, levando em consideração não só o contexto científico e, também, o contexto público (por exemplo, campanhas eleitorais). A forma como ele lida com o problema dá indícios de um processo de validação.

No grupo G5, têm-se três provas. Os alunos, para resolver o problema, consideram as informações sobre as pesquisas de cada jornal e escolhem que o Jornal 3 fornece o resultado mais provável, baseados no fato de a pesquisa ter uma amostra maior, de ter sido realizada mais próxima das eleições e de ser constituída de uma amostra que foi selecionada ao acaso. O aluno L4, pertencente a esse grupo, apresenta em seus registros escritos o estabelecimento de questionamentos para justificar a escolha do Jornal 3.

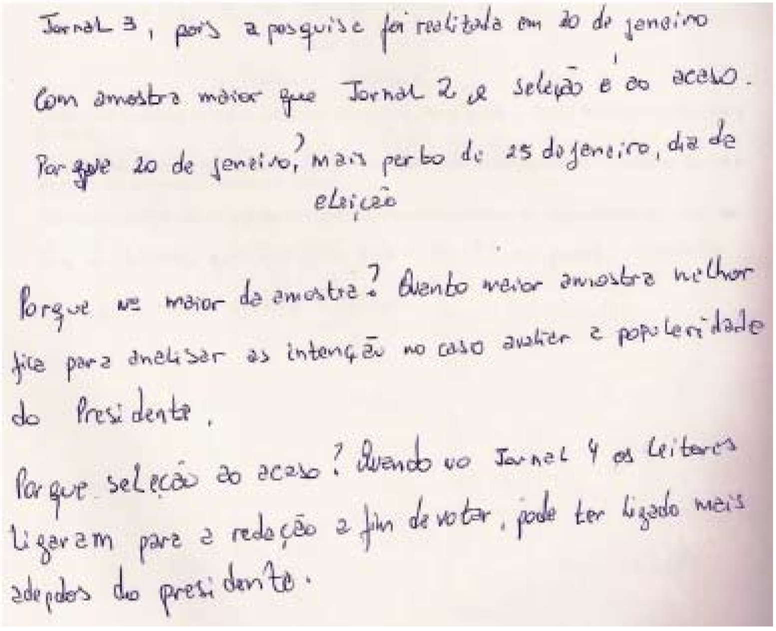

Jornal 3, pois a pesquisa foi realizada em 20 de janeiro
Com amostra maior que Jornal 2, a seleção é ao acaso.
Porque 20 de janeiro? mais perto do 25 de janeiro, dia de eleição
Porque no maior da amostra? Quanto maior amostra melhor fica para analisar as intenção no caso avaliar a populeridade do Presidente.
Porque seleção ao acaso? Quando no Jornal 4 os leitores ligaram para a redação a fim de votar, pode ter ligado mais adepdos do presidente.

Figura 15 – Resolução da questão Q8, registro escrito do aluno L4.

A atitude desse aluno pode mostrar influência de um contexto escolar. Professores, ao ensinar um conteúdo, por meio de uma tarefa, costumam utilizar indagações para dar possibilidades de os alunos refletirem sobre seus argumentos. Um encaminhamento para isso é o trabalho com a estratégia de ensino de Resolução de Problemas. Ela permite ao professor e ao aluno refletir sobre a resposta que dão a um problema e o procedimento ou as etapas que eles usam para chegar à resposta. Podem-se inferir indícios da validação do processo.

O grupo G6 contém uma prova. Nele, a estratégia escolhida para escolher o Jornal 3 foi considerar a pesquisa realizada mais próxima das eleições e a amostra ser selecionada ao acaso. O aluno L2 argumenta que o Jornal 3 foi o que forneceu o resultado mais provável, pois a pesquisa "*foi realizada mais perto da data eleição, portanto os eleitores têm menos tempo para mudar de candidato*" e as pessoas que votaram são de "*qualquer classe social, de qualquer lugar, isso possibilita que a pesquisa seja mais confiável, pessoas diferentes responderam a pesquisa*". Nota-se que este aluno, assim como alguns de outros grupos, faz uma reflexão sobre sua resposta, levando em consideração não só o contexto científico do problema e, também, o contexto público (por exemplo, campanhas eleitorais, pesquisas veiculadas na mídia). Podem-se inferir indícios da validação do processo.

O grupo G7 apresenta duas provas. Diferentemente dos grupos anteriores, os alunos pertencentes a esse grupo justificam a escolha do Jornal 2 baseada na quantidade de eleitores que votaria (ou apoiaria) o presidente. Observa o registro escrito do aluno L7.

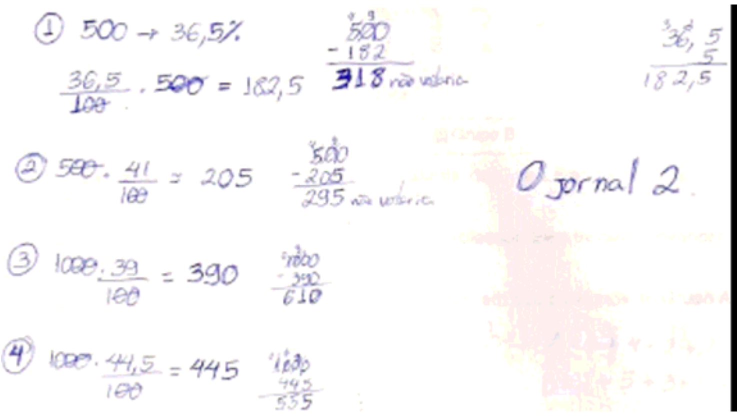


Figura 16 – Resolução da questão Q8, registro escrito do aluno L7.

O aluno L7, ao ler o enunciado, possivelmente compreende que, para escolher o jornal que forneceria o resultado mais provável, tem que determinar a quantidade de pessoas que votariam e não votariam no presidente utilizando os resultados em porcentagem encontrados em cada jornal. Talvez esse raciocínio tenha surgido por influência dos resultados apresentados em porcentagem. Dos cálculos que ele fez, teve-se: do Jornal 1, de uma amostra de 500 pessoas, obteve que 182 votariam no presidente e 318 que não votariam; do Jornal 2, de uma amostra de 500 pessoas, obteve que 205 votariam e 295 não votariam; do Jornal 3, de uma amostra de 1000 pessoas, obteve que 390 votariam e 610 não votariam; do Jornal 4, de uma amostra de 1000 pessoas, obteve que 445 votariam e 555 não votariam no presidente. Após os cálculos, escolhe o Jornal 2. Infere-se que, no registro escrito desse aluno, foi possível identificar uma estratégia e um procedimento. No entanto, não foi possível construir um sentindo lógico ao seu raciocínio. O aluno B1, também pertencente a este grupo, apresenta uma justificativa confusa de interpretação, escrevendo que o Jornal 2 forneceria o resultado mais provável "*se em 6 de janeiro 183 cidadãos apoiavam o presidente.*

Se em 20 de janeiro 195 cidadãos apoiavam o presidente. Então em 25 de janeiro, o jornal que oferecia o resultado mais provável seria o J2". Foi possível identificar indícios de um processo de matematização nos registros escritos desses alunos, mas não foi possível construir uma interpretação lógica para o desenvolvimento desse processo.

Nas inferências sobre os registros dos alunos do curso de Matemática, referentes à questão Q8 (“Apoio ao Presidente”), a maneira com a qual a abordaram, no geral, tanto os alunos do curso de Licenciatura quanto os do Bacharelado apresentaram justificativas satisfatórias para apresentar a escolha do jornal. Percebe-se que, no geral, os alunos têm algumas noções estatísticas de amostra, população, amostragem aleatória (seleção ao acaso) e noção de pesquisas estatísticas veiculadas pelas mídias.

Em seus registros escritos, foi possível determinar, por meio da estratégia e dos procedimentos escolhidos, indícios de um processo de matematização. Foi possível, em alguns registros, acompanhar e construir uma interpretação lógica do raciocínio usado para resolver o problema. Nos registros escritos cuja análise interpretativa foi difícil, percebeu-se que os alunos apontam dificuldades na interpretação de informações que envolvem conceitos estatísticos e no expressar do raciocínio utilizado para justificar o resultado encontrado.

Sobre os registros dos alunos do Ensino Fundamental, referentes à mesma questão, Celeste (2008) aponta que alguns alunos compreendem a estatística envolvida no problema e também de notícias veiculadas à mídia. Houve dois alunos da sua amostra que obtiveram a escolha do Jornal 3. Um deles apresenta as três possíveis justificativas (amostra ao acaso, pesquisa recente e quantidade maior de indivíduos na amostra). A maioria dos alunos elegeu como mais confiável o Jornal 4; alguns deles justificaram a escolha como os alunos de Matemática. Por exemplo, dois alunos do Ensino Fundamental “apresentaram como explicação o fato de os leitores terem telefonado para o jornal a fim de votar” (CELESTE, 2008, p.53). Um aluno optou pelo Jornal 2. Segundo a autora, ele “parece optar pelo jornal 2 porque é a segunda maior porcentagem (41,0%). Não optou pelo jornal 4 porque este diz que as pessoas ligaram a fim de votar e, para esse aluno, elas votariam em quem? Portanto, sua escolha foi o jornal 2” (CELESTE, 2008, p.55). Talvez os alunos L7 e B1 caminharam para esta interpretação ao escolherem também o Jornal 2.

Santos (2008), ao analisar um registro escrito de um aluno do Ensino Médio cuja escolha também foi o Jornal 2, infere que a opção desse aluno diz respeito ao fato de a amostra ser selecionada ao acaso e o resultado em porcentagem ser maior. Com relação à primeira justificativa, o aluno descarta a possibilidade de ser o Jornal 4 e, com a segunda, descarta as possibilidades de ser o Jornal 1 e 3. Observa-se que a forma como o aluno abordou a questão apresentou-se com mais clareza do que na resolução apresentadas pelos alunos L7 e B1.

A mesma autora também constatou em seus estudos que os alunos do Ensino Médio entendem da estatística envolvida no problema e fazem “uma relação do contexto do problema com as informações veiculadas por meios de comunicação tais como televisão e jornais” (SANTOS, 2008, p.69).

Assim como os alunos do Ensino Superior e Fundamental, houve alunos de sua amostra que optaram pelo Jornal 3, justificando a escolha por meio de explicações baseadas na data em que a pesquisa foi realizada (pesquisa mais recente), no tamanho da amostra e na seleção por acaso (amostra selecionada ao acaso). Outros alunos fizeram a opção pelo Jornal 4. As justificativas foram bem semelhantes às do Ensino Fundamental e Superior, baseadas no tamanho da amostra e no fato de as pessoas telefonarem para votar.

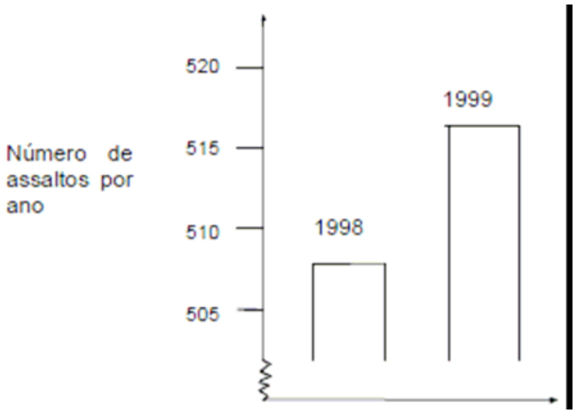
Nota-se, ainda, que em alguns registros escritos, alunos do Ensino Fundamental, Médio e Superior apresentam indícios de um mesmo processo de matematização.

4.3.4 Questão – “Assaltos”

A questão, em tela, denominada “Assaltos”, neste estudo, está sendo referenciada como questão Q11.

Questão Q11: *Um repórter de TV apresentou o gráfico abaixo e disse:*

— O gráfico mostra que, de 1998 para 1999, houve um grande aumento no número de assaltos.



Você considera que a afirmação do repórter é uma interpretação razoável do gráfico? Dê uma explicação que justifique a sua resposta.

Segundo o documento do PISA (Gave, 2004, p.116), a questão Q11 envolve

> [...] a tomada de posição face a uma afirmação baseada na leitura de um gráfico de barras. Este item exige que os alunos tenham “sentido crítico face à apresentação tendenciosa de informação sob a forma de gráficos enganadores” [...].

Magalhães e Lima (2005) afirmam, ainda, que ao utilizar recursos visuais na criação de um gráfico, é necessário cuidado, pois um gráfico tendencioso (a forma como são apresentados os dados) ou desproporcional em suas medidas “pode dar falsa impressão de desempenho e conduzir a conclusões equivocadas” (MAGALHÃES; LIMA, 2005, p.12).

Para investigar se os alunos do curso de Matemática observam esse aspecto enganador, tendencioso de um gráfico, por meio de uma interpretação dos registros escritos dos alunos, procurou-se apresentar possibilidades de uma compreensão do problema, estabelecendo algumas ligações com as interpretações do enunciado feitas pelos alunos, para que se pudesse com isso, tentar identificar as fases de um processo de matematização:

1ª fase:

Um repórter de TV apresentou um gráfico e disse:
— O gráfico mostra que, de 1998 para 1999, houve um grande aumento no número de assaltos.

⇩

Analisar a afirmação do repórter e o gráfico.

Você considera que a afirmação do repórter é uma interpretação razoável do gráfico?

⇩

Tomada de decisão frente à afirmação do repórter e frente à representação gráfica.

Dê uma explicação que justifique a sua resposta.

⇩

Explicação baseada na:
- quantidade de assaltos (tamanho relativo e percentual);
- visualização gráfica (dimensões gráficas);

Nessa fase, nota-se que a identificação das informações presentes no enunciado do problema possibilita uma compreensão geral do problema.

2ª fase:

De que forma considerar a afirmação do repórter? Afirmação razoável ou não razoável? ⇨ Justificar a afirmação em razoável ou não razoável com base na visualização gráfica. ⇨ Ler e interpretar o gráfico de barras que apresenta os dados (número de assaltos e ano).

Após ter uma compreensão do que o enunciado traz, faz-se um planejamento de como resolver o problema proposto, que é o de analisar a afirmação feita pelo repórter sobre o número de assaltos e encontrar uma explicação que justifique se a afirmação é uma interpretação razoável do gráfico. O aluno explora as informações que obteve ao compreender o problema mostrando, por meio de um registro escrito, suas estratégias de resolução.

3ª fase:

De que forma justificar a afirmação do repórter em sendo uma interpretação razoável ou não razoável do gráfico. ⇨ Argumentando sobre:

- o número de assaltos;
- a visualização gráfica (escala, dimensão gráfica, construção gráfica).

Nessa fase, os alunos trabalham com o problema no “mundo matemático no contexto escolar”. No caso da questão Q11, eles irão buscar, entre os conceitos matemáticos e estatísticos aprendidos na escola, uma melhor forma de dar uma explicação que justifique a afirmação em sendo razoável ou não.

4ª fase:

Resolução do problema: desenvolvimento da abordagem escolhida. Dar uma explicação que justifique a afirmação do repórter em sendo uma interpretação razoável ou não do gráfico. → Verificação do processo de resolução do problema. Determinação de um método alternativo de solução caso a encontrada não corresponda ao problema.

Os alunos, no "mundo matemático escolar", passam a efetivar os procedimentos escolhidos utilizando ferramentas matemáticas necessárias para resolver o problema (usar conceitos básicos de estatística).

No quadro a seguir, é apresentada uma análise interpretativa sobre os indícios de um processo de matematização presente nos registros escritos dos alunos que cursam Matemática.

GRUPOS (G_i)(N)	PROCESSO DE MATEMATIZAÇÃO DA Q11			
	1ª fase (compreensão do problema)	2ª fase (estratégia)	3ª fase (procedimento)	4ª fase (resolução do problema; validação do problema)
G_1(14)	Considera as informações presentes no enunciado (gráfico apresentado pelo repórter).	Dar uma justificativa baseada em termos relativos ou percentuais do número de assaltos.	Dar uma justificativa argumentando sobre: - quantidade de assaltos; ou, - visualização gráfica (escala dimensões gráficas).	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que a afirmação do repórter não é razoável porque: - o número de assaltos é aproximadamente de 8 assaltos (utiliza o gráfico para mostrar); ou, - a escala do gráfico causa a impressão de um grande aumento, mas não houve um grande aumento; ou, - o aumento de assaltos não passa de 3% no intervalo de 505 a 520; Foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema de uma prova.
G_2(1)	Considera as informações presentes no enunciado (gráfico apresentado pelo repórter).	Dar uma justificativa baseada no fato de uma parte do gráfico não ser apresentado.	Dar uma justificativa argumentando sobre a visualização gráfica.	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que a afirmação do repórter não é razoável porque pelo gráfico não se tem informação de onde começa e termina o número de assaltos. Não foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.
G_3(1)	Considera as informações presentes no enunciado (gráfico apresentado pelo repórter).	Dar uma justificativa baseada em termos relativos ao número de assaltos.	Dar uma justificativa argumentando sobre a visualização gráfica.	Uma resolução do problema: Justifica argumentando que a afirmação do repórter é razoável porque pelo gráfico o aumento que teve de 1998 até 1999 foi maior que o dobro de 1998. Não foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.
G_4(1)	Considera as informações presentes no enunciado (gráfico apresentado pelo repórter).	Dar uma justificativa baseada nas informações do crescimento populacional.	Dar uma justificativa argumentando da necessidade de analisar o crescimento populacional.	Uma resposta do problema: Justifica argumentando que para ter uma melhor interpretação da afirmação do repórter é preciso analisar o crescimento populacional. Não foi possível construir uma interpretação para o processo de validação na resolução do problema.
G_5(1)	Não apresenta registro escrito algum. Não foi possível construir uma análise interpretativa para essa prova.			

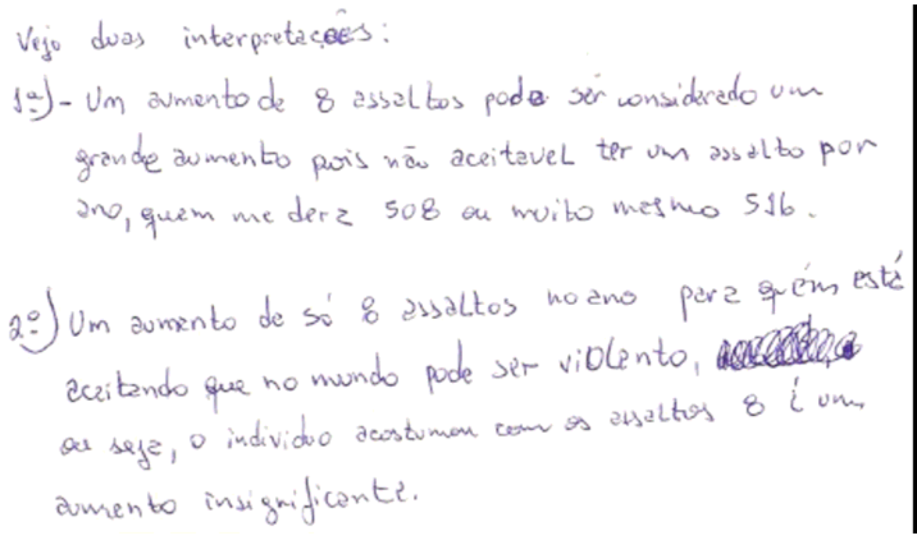
Quadro 14 – Análise interpretativa dos registros escritos dos 18 alunos de um curso de Matemática referente à questão Q11.

No grupo G1, têm-se 14 provas. Os alunos, para resolverem essa questão, consideram a afirmação do repórter e os dados apresentados pelo gráfico. Escolhem como estratégia dar uma justificativa baseada em termos relativos ou percentuais da quantidade de assaltos no ano de 1998 e 1999 e/ou com base na visualização gráfica. Para o procedimento da estratégia, dão uma justificativa argumentando que: a afirmação do repórter não é razoável por causa do número de assaltos não ter tido um grande aumento; o aumento de assaltos não passou de 3% no intervalo de 505 a 520; a escala do gráfico apenas causa a impressão de um grande aumento. Foi possível identificar alguns indícios nos registros escritos sobre validação do processo de resolução (alguns alunos demarcaram, no eixo vertical do gráfico, intervalos que apresentam um não grande aumento do número de assaltos, mostrando que a visualização das barras é muito tendenciosa, outros apresentaram em sua argumentação uma atitude crítica face à afirmação do repórter). Notou-se que o contexto (público) envolvido no problema foi relevante para a resolução dos alunos. Observem-se algumas análises dos registros escritos dos alunos:

O aluno L3 justifica que a afirmação do repórter não é razoável com base no tamanho das barras e do número de assaltos. Argumenta que o número de assaltos não teve um aumento grande como afirma o repórter, pois no intervalo de 505 a 520 o crescimento não alcança 3%. O aluno percebe que o gráfico apresenta os dados sob uma forma enganosa, ao apontar que o repórter "*deve ter olhado para a diferença do tamanho das barras e não para o valor numérico dos assaltos*", quando afirma que houve um grande aumento no número de assaltos.

O aluno B8 justifica que a afirmação do repórter não é razoável com base na escala em que é representado o número de assaltos no gráfico. Ele aponta que a escala do número de assaltos é grande e por causa disso o repórter teve "*a impressão errônea de que houve um grande aumento, quando na verdade o aumento foi de aproximadamente 8 assaltos*". Para referir ao número de 8 assaltos, o aluno demarca no eixo vertical do gráfico o intervalo de 508 a 516.

Na prova do aluno L7, a estratégia escolhida pelo aluno foi de fazer uma análise visual do gráfico para considerar a afirmação do repórter em sendo não razoável. Argumenta que "*visualmente o gráfico parece mostrar um grande aumento*". Nota-se que o aluno observa as barras do gráfico. Em seguida, escreve que ao "*olhar os dados (na vertical) nota-se que em quantidade não se tem um aumento tão grande como afirma o repórter*". O procedimento que utilizou para justificar a afirmação em não razoável foi o de olhar no eixo vertical do gráfico. Ele demarca no eixo vertical o intervalo de 508 a 517 aproximadamente.


Vejo duas interpretações:
1º) - Um aumento de 8 assaltos pode ser considerado um grande aumento pois não aceitavel ter um assalto por ano, quem me dera 508 ou muito mesmo 516.

2º) Um aumento de só 8 assaltos no ano para quem está aceitando que no mundo pode ser violento, ou seja, o individuo acostumou com os assaltos 8 é um aumento insignificante.

Figura 17 – Resolução da questão Q11, registro escrito do aluno L4.

O aluno L4 apresentou em seu registro escrito duas interpretações. Na primeira interpretação, o aluno considera um aumento de 8 assaltos. Ele utiliza um contexto social para argumentar tal consideração. Percebe-se a influência de um contexto social quando ele escreve "*não é aceitável ter um assalto por ano, quem me dera 508 ou muito menos 516*". Para esta primeira interpretação, pode-se inferir que este aluno tem dificuldades em interpretar os dados apresentados por um gráfico. Se recordar a análise feita da questão Q5 ("Lixo") o mesmo aluno não apresentou registro algum de resolução. Tal questão envolvia o conhecimento do conceito de um gráfico de barras. A segunda interpretação feita pelo aluno foi considerar que não é um grande aumento no número de 8 assaltos. Percebe-se que ele utilizou novamente de um contexto social para justificar sua interpretação. Nota-se tal influência do contexto quando escreve "*para quem está aceitando que no mundo pode ser violento*" e, para explicar, escreve "*o indivíduo acostumou com os assaltos 8 é um aumento insignificante*". O aluno L4 em momento algum questionou a forma tendenciosa do gráfico, talvez por que ele não tenha feito uma leitura e interpretação correta do mesmo.

O grupo G2 apresenta uma prova, na qual se infere que o aluno L1 compreende que o repórter não fez uma interpretação correta do gráfico, argumentando que pelo gráfico "*não temos dados de onde começa o número de assaltos por ano*". A estratégia utilizada pelo aluno foi de se basear na visualização gráfica. Ele desenvolve a estratégia argumentando no fato de uma parte do gráfico ser apresentada. Não foi possível construir uma análise interpretativa no registro escrito desse aluno com relação à validação da resposta encontrada.

No grupo G3, tem-se uma prova. Nele, o aluno B5 considera que a afirmação do repórter é uma interpretação razoável do gráfico. O aluno justifica argumentando que "o *aumento que teve de 1998 até 1999 foi maior que o dobro de 1998*". Nota-se no registro escrito deste aluno que ele não percebeu a apresentação tendenciosa do gráfico. A estratégia que escolheu se baseou nos tamanhos das barras e o procedimento foi de argumentar sobre o tamanho (dobro) das mesmas. Não foi possível inferir indícios de uma validação do processo para a resposta encontrada.

O grupo G4 apresenta-se com uma prova, na qual se infere que o aluno não utilizou as informações presentes no enunciado ou, se as utilizou, elas não foram suficientes para a tomada de decisão frente a uma afirmação baseada na leitura de um gráfico de barras. Para o aluno, é preciso analisar "*o crescimento populacional, para termos uma melhor interpretação*". Tal argumento não se faz necessário para dar uma explicação da afirmação do repórter ser uma interpretação razoável do gráfico.

Com relação ao G5, não foi possível construir uma análise interpretativa para a prova. O aluno não apresentou registro escrito algum.

No geral, os alunos que cursam Matemática se saíram bem ao resolver a questão Q11. Foi possível identificar um processo de matematização, as fases, em quase todos os registros. Em alguns casos, pôde-se também inferir um processo de validação da resposta encontrada.

Nas inferências sobre os registros dos alunos do curso de Matemática, referentes à questão Q11 ("Assaltos"), a maneira com a qual a abordaram, no geral, tanto os alunos do curso de Licenciatura quanto os do Bacharelado, apresentaram justificativas satisfatórias para apresentar uma explicação sobre a afirmação do repórter ser uma interpretação razoável do gráfico. Percebe-se que, no geral, os alunos compreenderam que a afirmação não era razoável por causa do gráfico tendencioso apresentado no enunciado. Com isso, pode-se concluir que a maioria dos alunos do curso de Matemática consegue interpretar o gráfico de barras.

Sobre os registros dos alunos do Ensino Fundamental, referentes à mesma questão, Celeste (2008) constatou que alguns alunos consideraram apenas as barras do gráfico para apresentar uma justificativa para a afirmação do repórter, desconsiderando os números. O aluno B5 utiliza a mesma estratégia abordada pelo aluno do Ensino Fundamental.

Também se inferiu, nos estudos de Celeste (2008), a influência de um contexto social em uma das provas analisadas. Um aluno se baseia no mundo atual para justificar o aumento do número de assaltos. “*Sim porque o mundo como está hoje pode haver mais*” (CELESTE, 2008, p.49). Se tomar uma parte do registro escrito do aluno L4, percebe-se semelhança na forma como abordou o problema, “*para quem está aceitando que no mundo pode ser violento, ou seja, o indivíduo acostumou com os assaltos 8 é um aumento insignificante*”. Observa-se que o aluno L4, assim como o aluno do Ensino Fundamental, acredita que nos dias de hoje 8 é um número muito pequeno de assaltos. Percebe-se que em ambas as produções escritas há influência de um contexto social.

Santos (2008), ao analisar os registros escritos de alunos do Ensino Médio, constatou que em alguns registros a atitude crítica dos alunos frente à afirmação do repórter foi de considerar como sendo não razoável. Um de seus alunos justificou que “o repórter se baseou apenas no tamanho das barras que, analisadas somente pelo tamanho, induzem o leitor a acreditar que o aumento de assaltos de um ano para o outro é muito grande” (SANTOS, 2008, p.96).

Inferiu-se também, nos estudos da mesma autora, que alguns alunos do Ensino Médio também interpretaram o gráfico visualizando as barras como foram analisadas pelo aluno B5 e pelo aluno do Ensino Fundamental. A justificativa se deu pelo tamanho das barras do gráfico. Os alunos mencionam que o número de assaltos praticamente dobrou ao comparar a barra do ano de 1998 com a de 1999.

Assim como o aluno L4 e o aluno da amostra de Celeste (2008), um aluno do Ensino Médio também se utilizou de um contexto social para justificar sua resposta. O aluno do Ensino Médio justifica argumentando que “*não é bem exatamente esse o nº de assaltos mas chega a mais ou menos isso. Por que o nível de assaltos realmente vem subindo nos últimos anos...*” (SANTOS, 2008, p.99).

Foi possível notar que em alguns registros escritos, os alunos do Ensino Fundamental, Médio e Superior apresentam indícios de um mesmo processo de matematização. Foram observadas algumas semelhanças na forma como abordam o problema, como desenvolve a abordagem escolhida (procedimento) e como refletem sobre o resultado encontrado. Também se notou semelhança na forma de expressar o raciocínio matemático por meio da escrita.

Pode-se inferir também que o contexto envolvido na questão Q11 (“Assaltos”) proporcionou aos alunos do curso de Matemática integrar conceitos matemáticos aos dos estatísticos e a outros contextos como o social, provocando o pensar e o raciocinar do aluno, a comunicação e argumentação.

5 A GUISA DE CONCLUSÃO

A proposta desta pesquisa em realizar uma análise interpretativa das produções escritas de alunos de um curso de Matemática sob a luz da avaliação como prática de investigação, mostrou resultados importantes sobre o processo de matematizar desses alunos. O “olhar” para as estratégias e os procedimentos e identificá-los nos registros escritos dos alunos, permitiu buscar alguma compreensão e conhecimento sobre a forma como os alunos lidam com problemas não-rotineiros de Matemática. Com isso, foi possível perceber o quanto tomar a avaliação como prática investigativa se torna importante para o ensino da Matemática, pois, torna viável acompanhar, de alguma forma, o processo de desenvolvimento de um aluno.

As interpretações feitas a partir da análise dos registros escritos desses alunos mostram que, para uma reflexão e tomada de decisão, ela se faz importante para o desenvolvimento do processo de ensinar e aprender.

As estratégias e os procedimentos foram tomados, aqui, como indicadores da análise dos registros escritos, pois por meio deles é que foi possível identificar indícios da matematização feita e inferir a forma como os alunos raciocinam, utilizam, argumentam e expressam a matemática.

O instrumento avaliativo que foi utilizado neste estudo envolveu 14 questões não-rotineiras públicas do PISA. Das 14 questões, apenas quatro foram analisadas. A justificativa da escolha dessas se deu pelo fato de elas serem comuns às pesquisas de Santos (2008) e Celeste (2008), as quais, por meio desses problemas, investigaram a produção escrita de alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Com isso, por meio de uma análise investigativa da produção escrita dos alunos, procurou-se conhecer os modos idiossincráticos de lidar dos alunos do Ensino Superior com essas questões e comparar com os modos de lidar dos alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Para a análise dos registros escritos dos alunos de um curso de Matemática, foram construídos grupos relacionados a um processo de matematização para as quatro questões. Nesse processo, foram consideradas as quatro fases (compreensão, estratégia, procedimento e resolução do problema). Na primeira fase, que diz respeito à compreensão do problema, os participantes produziram um enunciado próprio a partir da interpretação que fizeram do problema apresentado. Para a construção de uma interpretação desse enunciado, consideraram-se, neste estudo, indicativos da presença das informações do problema nos registros escritos. Na segunda fase que é sobre o planejamento de como resolver um problema, foi tomada a estratégia escolhida; na terceira fase, tomou-se o procedimento utilizado para resolver a questão, e, na quarta fase, para a construção de uma interpretação, foram consideradas as três primeiras fases, bem como algum processo de validação da resolução do problema apresentado. Em nenhum momento, esta pesquisa teve o interesse primordial de apontar os erros de estratégia e de procedimento, e, sim de investigar a forma (raciocínio lógico, abordagem, escrita) como os alunos lidam.

Um fator importante para investigar a forma como o aluno resolve um problema foi considerar o contexto que é envolvido no problema. Rico (2004) coloca que este é um componente que irá permitir aos alunos lidar com a Matemática de uma maneira mais fundada. Com isso, procurou-se explorar os contextos envolvidos nas quatro questões em estudo. Esse explorar dos contextos pode ajudar na articulação dos sujeitos em estudo, confrontando, segundo Esteban (2000), os múltiplos conhecimentos que perpassam o fazer e o pensar de alunos.

Utilizou-se de três tipos de contextos (**Quadro 10**): contextos de primeira ordem, segunda ordem e terceira ordem. Estes foram escolhidos, pois, segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2005), oferecem oportunidades de uma matematização. Além disso, considerou-se, também, uma classificação de problemas de acordo com os níveis de competências (baseada na "Pirâmide de Jan de Lange" e em alguns documentos do PISA) para saber as competências que eram exigidas dos alunos para resolver as questões.

A primeira questão analisada foi "Prova de Ciências" (Q3). Ela envolve um contexto de primeira ordem e, para resolvê-la, é exigido dos alunos o conhecimento de definições e procedimentos rotineiros, ou seja, a reprodução de cálculos praticados em sala de aula. Nas resoluções da questão Q3, verificou-se que, em alguns registros escritos, a maneira com a qual a abordaram, tanto os alunos do curso de Licenciatura quanto do Bacharelado apresentaram uma despreocupação com a escrita matemática. Atitude essa, considerada neste trabalho um tanto preocupante, pois não se considera que a Matemática seja provida de apenas raciocínio lógico, ela tem uma parte que é provida de argumentação, comunicação, recursos, linguagem simbólica, formal e técnica. O que se pode notar é que, comparados com os do curso do Bacharelado, os alunos da Licenciatura apresentaram uma preocupação maior em justificar com mais clareza a produção escrita. Talvez esta preocupação esteja influenciada por algumas disciplinas pedagógicas que o curso da Licenciatura oferece.

Ainda em relação à análise das produções escritas dos alunos sobre a questão Q3, ficou explícito na escrita desses alunos o reconhecimento de definições e procedimentos rotineiros praticados em sala de aula, e a relevância do contexto envolvido no problema, identificados por meio das análises das estratégias e procedimentos utilizados (**Quadro 11**). Notou-se que os alunos de Matemática, na grande maioria, não têm dificuldades quanto ao conceito de média aritmética, e, sim, quanto à compreensão do conceito abordado num contexto, muitas vezes, influenciada por um outro contexto externo.

Também foi possível construir uma interpretação para um processo de validação na resolução do problema por esses alunos, devido à forma como abordaram a estratégia utilizada e as respostas dadas por eles no questionário avaliativo.

Ao analisar os resultados do Ensino Fundamental e Médio sobre a questão Q3 e compará-los com os do Ensino Superior (alunos de um curso de Matemática), inferiu-se que em alguns registros escritos há fases comuns de um processo de matematização. Os estudantes do Ensino Fundamental e Médio, assim como os de Matemática, compreenderam, por exemplo, que as pontuações obtidas por Marli nas quatro provas equivaliam cada uma a 60 pontos e, o cálculo da média era efetuado pela adição de todos os pontos obtidos por Marli nas cinco provas, dividindo o resultado dessa adição pela quantidade de provas realizadas. Ou seja, as estratégias e os procedimentos de resolução, incluindo a forma de expressar matemática por meio da escrita, eram bem semelhantes em alguns registros, e em outros eram os mesmos.

A segunda questão a ser analisada foi “Lixo” (Q5). Esta envolve um contexto de terceira ordem, e, para resolvê-la, é exigido dos alunos manejarem tabelas, gráficos e textos expressos de acordo com a situação especificada, escolhendo suas próprias ferramentas matemáticas para encontrar uma possível resposta correta (baseada na variação e variabilidade dos dados). Nas resoluções da questão Q5, verificou-se que, em alguns registros escritos, a maneira com a qual a abordaram, os alunos do curso de Licenciatura, mais uma vez comparados com os do curso do Bacharelado, apresentaram uma preocupação maior em justificar com mais clareza a produção escrita.

Observou-se, também, que em alguns registros escritos relacionados à resolução da questão Q5, os alunos apresentaram uma atitude crítica frente a sua resposta e reflexão acerca de um processo de resolução. Os alunos, para justificarem o porquê de o gráfico de barras não ser o mais apropriado para a apresentação dos dados, recorreram aos conceitos e definições de conteúdos de Matemática e de Estatística. Em outros, observou-se que, por exemplo, a idéia de relação entre as variáveis estava presente no registro escrito, mas a forma como estava expressa por meio da escrita a prejudicava (caso do aluno B1). Mais uma vez, este estudo apontou para a necessidade de uma maior atenção na forma como o aluno expressa conceitos matemáticos.

Em alguns registros escritos, o processo de matematização dos alunos do curso de Matemática sobre a questão Q5 era semelhante aos do Ensino Fundamental e Médio. Inferiu-se que os alunos do Ensino Fundamental e Médio, assim como os da Matemática, interpretaram o enunciado compreendendo que, para dar uma justificativa de o gráfico de barras não ser o mais apropriado para apresentar os dados, era preciso ler e interpretar o quadro do enunciado, levando em consideração o intervalo de tempo de decomposição dos lixos, e, para os procedimentos de resolução, eles recorreram a conceitos matemáticos para dar argumentação à justificativa escolhida (Ex: proporcionalidade e função).

A terceira questão analisada foi “Apoio ao Presidente” (Q8). Ela envolve um contexto de segunda ordem, e, para resolvê-la, é exigido dos alunos interpretarem as informações disponibilizadas no enunciado e ter noção de alguns conceitos estatísticos como amostra, população, seleção ao acaso. No geral, percebeu-se que os alunos têm noções de alguns desses conceitos e noção de pesquisas estatísticas veiculadas à mídia.

Nos registros escritos, foi possível determinar, por meio das estratégias e dos procedimentos escolhidos, indícios de um processo de matematização. Foi possível, em alguns registros, acompanhar e construir uma interpretação do raciocínio usado para resolver o problema; em outros, não. Nos registros escritos cuja análise interpretativa foi difícil, percebeu-se que os alunos apresentam dificuldades na interpretação de informações que envolvem conceitos estatísticos e no expressar o raciocínio utilizado para justificar o resultado encontrado. Um encaminhamento para isso é o professor, tanto do nível superior quanto do nível básico, enfatizar também a escrita matemática.

Notou-se, ainda, que alguns alunos do Ensino Fundamental, Médio e Superior apresentaram indícios de um mesmo processo de matematização. Por exemplo, os alunos que elegeram a opção do Jornal 4 utilizaram justificativas baseadas no tamanho da amostra e no fato de as pessoas telefonarem para votar.

E, por fim, a quarta questão analisada, “Assaltos” (Q11). Ela envolve um contexto de segunda ordem, e, para resolvê-la, é exigido do aluno “um sentido crítico face à apresentação tendenciosa sob a forma de gráficos enganadores” (GAVE, 2004, p.116). Tanto os alunos do curso de Licenciatura quanto os do Bacharelado, apresentaram explicações satisfatórias sobre a afirmação do repórter (ser uma interpretação razoável do gráfico). Percebeu-se que, no geral, os alunos compreenderam que a afirmação não era razoável por causa do gráfico tendencioso apresentado no enunciado. Com isso, pode-se concluir que a maioria dos alunos do curso de Matemática conseguiu interpretar aquele gráfico de barras.

No geral, os alunos que cursam Matemática se saíram bem ao resolver essa questão. Foi possível identificar as fases de um processo de matematização em quase todos os registros escritos (no caso do aluno B9, não foi possível construir uma interpretação para todas as fases de um processo de matematização). Em alguns casos, pode-se também inferir um processo de validação da resposta encontrada (caso de alguns alunos pertencentes ao grupo G1, por exemplo).

Também foi possível notar que, em alguns registros escritos, os alunos do Ensino Fundamental, Médio e Superior apresentaram indícios de um mesmo processo de matematização. Observou-se algumas semelhanças na forma como abordaram o problema, como desenvolveram a abordagem escolhida (procedimento) e como refletiram sobre o resultado encontrado. Também se notou semelhança na forma de expressar o raciocínio matemático por meio da escrita.

Pode-se inferir que o contexto envolvido na questão Q11 (“Assaltos”) proporcionou, aos alunos de um curso de Matemática e aos do Ensino Básico, integrar conceitos matemáticos aos dos estatísticos e a outros contextos como o social, provocando o pensar e o racionar do aluno, a comunicação e argumentação.

Todas as questões que foram analisadas nesta pesquisa, Q3, Q5, Q8 e Q11, possuem uma característica comum ligada à Estatística. A questão Q3 envolve noção de média aritmética, as questões Q5 e Q11, a tomada de posição face à forma como é apresentada a informação, e a questão Q8, a noção de amostra e de população (GAVE, 2004).

O estudo relativo a noções de Estatísticas é apontado nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) desde o Ensino Fundamental tendo a finalidade

> [...] de fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem freqüentemente em seu dia-a-dia. Além disso, calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos (BRASIL, 1998, p.52).

Quanto aos conceitos estatísticos como média, mediana, moda, amostra, aleatoriedade, pode-se dizer que são fundamentais para explorar muitos contextos envolvidos nos problemas. Como sugestão de trabalho, tais conceitos, segundo Buriasco (1999, p.34), “devem ser vistos em diferentes enfoques, sempre que possível com indicações de suas possíveis extensões ou aplicações”.

Quantitativamente, a pesquisa mostrou que os alunos do Ensino Básico não se saíram bem como os alunos do Ensino Superior. Por meio de algumas análises descritivas das informações desses alunos quanto ao número de acertos das questões da prova, observou-se, com $p \ll 0,001\%$ (o símbolo “p” denominado p-valor, representa a probabilidade de rejeitar a hipótese nula, sendo ela verdadeira), que há uma diferença significativa entre as proporções médias de acertos dos alunos do Ensino Fundamental, do Médio e do Superior. Fazendo uma comparação entre elas por meio do teste de Tukey, verificou-se que a proporção média de acertos do Ensino Fundamental não difere significativamente da proporção média de acertos do Ensino Médio, mas ambas, por sua vez diferem significativamente da proporção média de acertos do Ensino Superior.

Analisando os registros escritos dos alunos de Matemática, e considerando alguns resultados referentes às análises do Ensino Fundamental e Médio, verificou-se que os alunos, no geral, apresentaram uma matematização, não necessariamente aquela pedida no problema, mas, sim, a compreendida por eles.

Em suma, nesta pesquisa, foi possível identificar e apresentar que, independente do acerto ou do erro, os alunos de um curso de Matemática ao matematizar ainda apresentam falhas na forma como utilizam conceitos matemáticos, estatísticos e como expressam o raciocínio matemático produzido.

Como os alunos avaliados neste estudo são graduandos de um curso de Matemática e, possivelmente, futuros professores, procurou-se também, comparar a produção escrita deles com a dos alunos do Ensino Fundamental e Médio. Essa comparação aponta a necessidade de um maior cuidado:

- que professores, futuros professores e alunos devem ter com a escrita matemática;
- na escolha dos problemas de contexto que comporão os instrumentos avaliativos, no que diz respeito às características de validade e fidedignidade

  de cada um, tendo em vista que, dependendo da intenção do avaliador, eles podem não favorecer a visualização do que o aluno mostra saber da matemática aprendida, ou, não oportunizar algum processo de matematização;
- na utilização da estratégia metodológica da Resolução de Problemas tomada com um processo, para que os alunos desenvolvam destrezas e valorizem a riqueza e a variedade de recursos da Matemática, possibilitando, assim, matematizar situações.

Sem esses cuidados, futuros professores poderão não dar a importância necessária ao processo de matematização de seus alunos e, ao fazer isso, perderão a oportunidade de, com eles, exercer uma prática investigativa que permite alguma regulação conjunta do processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALVES, R. M. F. **Uma Análise da Produção Escrita de Alunos do Ensino Médio em Questões Abertas de Matemática**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

BARBIN, D. **Planejamento e Análise Estatística de Experimentos Agronômicos**. Arapongas: Midas, 2003.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições, Tradução Luís Antero e Augusto Pinheiro. 1977.

BARLOW, M. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processos e habilidade básica. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.; tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997, p.4-12.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** - ensino de quinta à oitava série. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BURIASCO, R. L. C. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas dos alunos e professores. 1999. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Marília.

BURIASCO, R. L.C., CYRINO, M. C. de C. T, SOARES, M. T. C. **Manual para correção das provas com questões abertas de matemática**: AVA 2002. Curitiba: SEEDI/CAADI, 2003.

BUSSAB, W. de O., MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. São Paulo: Saraiva, 2002.

CELESTE, L. B. **A produção escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

DALTO, J. O. **A Produção Escrita em Matemática: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e**

à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

DEKKER, T., QUERELLE, N. **Great Assessment Problems**. Utrecht. Freudenthal Institute. Traducción. Ma. Fernanda Gallego. GPDM. Bariloche. Río Negro, Argentina, 2002.

ESTEBAN, M. T. **Avaliar**: ato tecido pelas imprecisões do cotidiano. In: 23ª Reunião Anual da ANPEd, 2000. Caxambu. CD-ROM – 2000. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/23/trabtit1.htm> Acesso: 14 jun. 2008.

ESTRATÉGIA. In: BUENO, Francisco da Silveira. **Grande dicionário Etimológico - prosódico da língua portuguesa:** vocábulos, expressões da língua geral e científica - sinônimos contribuições do Tupi-Guarani**.** São Paulo: Saraiva, 1963. p.1277.

ESTRATÉGIA. In: DORON, Roland; PAROT, Françoise. **Dicionário de Psicologia**. São Paulo: Ática, 2001. p.315.

ESTRATÉGIA. In: FERNANDES, Francisco. **Dicionário de sinônimos e antônimos da língua portuguesa.** São Paulo: Globo, 1990. p.424.

ESTRATÉGIA. In: HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. p.1262.

FIORENTINE, D., MIORIM, M. A., MARCHESI, A. et al. **Por de trás da porta, que matemática acontece?** São Paulo: Editora Graf. FE/Unicamp – Cempem, 2001.

GAVE. **Resultados do Estudo Internacional PISA 2003**. Lisboa, 2004. Disponível em:<http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=33efileName=relatorio_nacional_pisa2003.pdf>. Acesso: 30 nov. 08.

HADJI, Charles. **A avaliação, regras do jogo:** das intenções aos instrumentos*.* 4. ed. Portugal: Porto,1994.

LÉO, Pe. **Buscai as coisas do Alto**. 49 ed. São Paulo: Editora Canção Nova, 2006.

MAGALHÃES; M. N.; LIMA; A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: Acadêmica, 2005.

NAGY-SILVA, M. C. **Do Observável para o Oculto*:*** um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática. 2005 Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

NEGRÃO de LIMA, R. C. **Avaliação em Matemática:** análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

OCDE. **El programa PISA de la OCDE**: que és y para que sirve. Paris, 2007. Disponível em: <http://www.oecd.org/dataoecd/57/20/41479051.pdf >. Acesso: 2 dez. 08.

PEREGO, F. **O que a produção escrita pode revelar? Uma análise de questões de matemática**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

PEREGO, S. C. **Questões Abertas de Matemática:** um estudo de registros escritos. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

PROCEDIMENTO. In: BUENO, Francisco da Silveira. **Grande dicionário Etimológico-prosódico da língua portuguesa:** vocábulos, expressões da língua geral e científica-sinônimos contribuições do tupi-guarani**.** São Paulo: Saraiva, 1963. p.3198.

PROCEDIMENTO. In: DORON, Roland; PAROT, Françoise. **Dicionário de Psicologia**. São Paulo: Ática, 2001. p.613.

PROCEDIMENTO. In: FERNANDES, Francisco. **Dicionário de sinônimos e antônimos da língua portuguesa.** São Paulo: Globo, 1990. p.697.

PROCEDIMENTO. In: HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. p.2302.

RICO, R. L. Evaluación de competencias matemáticas: proyecto PISA/OCDE 2003. In: **Investigación en educación matemática: Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)**: La Coruña, 9-11 septiembre 2004 Actas… 2004

SANTOS, E. R. dos. **Estudo da Produção Escrita de Estudantes do Ensino Médio em Questões Discursivas Não Rotineiras de Matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SEGURA, R. de O. **Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões Discursivas de Matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SEPÚLVEDA, J. C.; ORMACHEA, C. del P. Resolución de problemas y contextos matemáticos. **Unión**, n. 12, p.27-39, dez. 2007.

SUYDAM, M. N. Desempenhando pistas a partir da pesquisa cobre resolução de problemas. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.; tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997, p.49-73.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. **RESOLUÇÃO CEPE nº 42/2005**: reformula o projeto político pedagógico do curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura, a ser implantado a partir do ano letivo de 2005. Disponível em: <http://www.uel.br/prograd/pp/index.htm> acesso em: 5 nov. 08.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. The role of contexto in assessment problemas in mathematics. **For the Learning Mathematics**, v.25, n. 2, Julho. 2005.

VIANNA, H. M. **Introdução à Avaliação Educacional**. São Paulo: IBRASA, 1989.

VIANNA, H. M. Questões de avaliação educacional. In: **AVALIAÇÃO: construindo o campo e a crítica**. FREITAS, L. C. de (org.). Florianópolis: Insular, 2002, p. 63-88.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Carta convite

Prezado(a) aluno(a)...

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento da pesquisa relativa à minha dissertação de mestrado no Programa de Pós - Graduação em Ensino e Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, você foi selecionado para compor uma amostra de estudantes do curso de Matemática. Para o desenvolvimento dessa pesquisa é de grande importância que você resolva uma prova contendo 14 questões envolvendo conteúdos de matemática básica (Ensino Fundamental e Médio). A prova será realizada no dia 19/11/2007 na sala de multimeios do CCE às 19h15. Garantido total anonimato, não será feita referência alguma a seu nome.

Atenciosamente,

Vanessa Lucena Camargo de Almeida.

Londrina, 08/11/2007.

APÊNDICE B – Folha de Identificação

Universidade Estadual de Londrina
Departamento de Matemática - CCE
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Área: Educação Matemática
Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação

Nome...

Data de nascimento:......../......../........

Sexo: ( ) feminino ( ) masculino

Aluno da
□ 1ª. série do Bacharelado em Matemática
□ 2ª. série do Bacharelado em Matemática
□ 3ª. série do Bacharelado em Matemática
□ 4ª. série do Bacharelado em Matemática
□ 1ª. série da Licenciatura em Matemática
□ 2ª. série da Licenciatura em Matemática
□ 3ª. série da Licenciatura em Matemática
□ 4ª. série da Licenciatura em Matemática

Telefone: Residencial ( )................... Celular ( )...................

E-mail:...

INSTRUÇÕES PARA O ALUNO

Leia cuidadosamente cada questão.
Use apenas caneta para resolver cada questão.
Resolva todas as questões da prova.
Você deve resolver todas as questões da forma mais completa possível, fazendo cálculos, desenhos, esquemas, ou explicando, com suas palavras o que fez para resolver a questão.
Não apague os cálculos, os esquemas, os desenhos que utilizar na resolução da questão.
Se perceber que resolveu algo errado, passe um traço por cima e resolva corretamente.
Confira as resoluções antes de entregar a prova.

Londrina, ... de........................de 2007.

APÊNDICE C – Algumas medidas descritivas

- Informações referentes à quantidade de acertos dos alunos nos 25 itens de matemática.

Tabela 1

Questões	Ensino Fundamental (%)	Ensino Médio (%)	Ensino Superior (%)
Q1-1	23,53	40,91	66,67
Q1-2	5,88	18,18	44,44
Q2-1	5,88	63,64	83,33
Q2-2	5,88	13,64	94,44
Q2-3	11,76	22,73	88,89
Q3	11,76	31,82	72,22
Q4	11,76	54,55	83,33
Q5	17,65	4,55	77,78
Q6	17,65	45,45	88,89
Q7	17,65	13,64	50,00
Q8	5,88	13,64	66,67
Q9-1	0,00	18,18	100,00
Q9-2	0,00	0,00	38,89
Q10-1	29,41	59,09	77,78
Q10-2	29,41	36,36	77,78
Q10-3	5,88	9,09	50,00
Q11	0,00	4,55	44,44
Q12-1	17,65	86,36	50,00
Q12-2	0,00	4,55	83,33
Q13-1	76,47	54,55	66,67
Q13-2	5,88	9,09	50,00
Q13-3	0,00	4,55	50,00
Q14-1	0,00	9,09	11,11
Q14-2	0,00	4,55	33,33
Q14-3	0,00	0,00	16,67

Tabela 2 – Resumo

	Contagem	*Soma*	*Mínimo*	*Máximo*	*Média*	*Desvio Padrão*	*Variância*
Ensino Fundamental	25	300	0	76,47	12	16,33	266,67
Ensino Médio	25	622,73	0	86,36	24,91	23,80	566,67
Ensino Superior	25	1566,67	11,11	100	62,67	23,76	564,61

Tabela 3

ANOVA						
Fonte da variação	*SQ*	*gl*	*MQ*	*F*	*valor-P*	*F crítico*
Entre grupos (EG)	34661,5856	2	17330,79278	37,19207517	8,05719E-12	3,1239074
Dentro dos grupos (DG)	33550,6173	72	465,9807956			
Total	68212,2028	74				

Da tabela ANOVA, com base na amostra deste estudo, tem-se que $F_{observado} = 37{,}19207517 > F_{tabelado}$, implicando na existência de pelo menos uma diferença significativa entre as proporções médias dos grupos (Ensino Fundamental, Médio e Superior). Desta forma usaremos um teste de comparações múltiplas (Teste Tukey) para encontrar tais diferenças significativas entre as proporções médias.

Hipóteses

H_o: $u_F = u_M = u_S$,

H_a: existe pelo menos uma diferença entre as proporções médias de acertos nas questões de matemática.

sendo u_F : a proporção média de acertos do Ensino Fundamental;

u_M : a proporção média de acertos do Ensino Médio;

u_S : a proporção média de acertos do Ensino Superior.

- Teste de Tukey (teste de comparação entre médias)

Procedimentos

Quadro das diferenças entre todas as proporções médias.

Δ	u_S	u_M	u_F
u_F = 12	50,67	12,91	=
u_M = 24,91	37,76	=	
u_S = 62,67	=		

Quadro 1 – Diferenças entre as proporções médias dos grupos

Comparar todas as diferenças encontradas no quadro anterior com a diferença mínima significativa de Tukey (DMS). Essa diferença é segundo Barbin (2003) o valor mínimo aceitável para não existir diferença entre as proporções médias de acertos nas questões de matemática. Para determinar essa diferença utilizou-se a seguinte expressão: $DMS = q \cdot \sqrt{\frac{QMDG}{r}}$, em que *q* é o valor tabelado da amplitude estudentizada (depende do número de grupos) e do número de graus de liberdade dentro dos grupos de resíduos ao nível alfa de significância (no caso, $\alpha = 5\%$), *QMDG* é o quadrado médio dentro dos grupos e r é o número de repetições.

Da **Tabela 2** (ANOVA) e da **Tabela 3** (RESUMO) e temos $q_{(3;72;5\%)} = 3{,}38$, *r = 25* e QMDR = 465,9807956 e, portanto, *DMS = 14, 6788801*.

Conclui-se que a proporção média de acertos do Ensino Superior foi significativamente superior as dos Ensinos Médio Fundamental. Entre as proporções médias de acertos dos Ensinos Fundamental e Médio não houve diferença significativa.

APÊNDICE D – Descrição dos procedimentos das resoluções das questões Q3, Q5, Q8 e Q11

PROVAS	PROCEDIMENTOS DAS RESOLUÇÕES DA QUESTÃO Q3
B1	Escreve a expressão $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=60\right)$. Arma a efetua a divisão de $\left(\frac{60+80}{2}\right)$ igualando a divisão de $\left(\frac{140}{2}\right)$ obtendo 70. Responde que a média é de 70 pontos.
B2	Efetua a multiplicação 60×4 obtendo 240 e efetua a multiplicação 80×1 obtendo 80. Adiciona $240+80$ obtendo 320. Divide $320\div5$ obtendo 64. Responde que a média é 64 pontos.
B3	Escreve: Média Final é. Arma a divisão $\left(\frac{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}{5}\right)$. Escreve: Sabemos que. Arma a expressão $\left(\frac{n_1+n_2+n_3+n_4}{4}=60\right)$ e escreve $n_5=80$. Escreve: Isto é. Arma a expressão $(n_1+n_2+n_3+n_4=240)$. Escreve: Somamos n_5 temos. Arma a expressão $(n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=320)$. Escreve: Média final é. Arma e efetua a expressão $\left(\frac{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}{5}\right)$ igualando a divisão de $\left(\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64.
B4	Escreve a expressão $\left(\frac{4x}{4}=60\right)$ e encontra $x=60$. Arma e efetua a divisão $\left(\frac{4\times60+80}{5}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{240+80}{5}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64. Responde que a média de Marli em ciências após as cinco provas é de 65 pontos.
B5	Escreve: 1 prova — 100 pontos. Escreve: $x=1^a\,prova$, $y=2^a\,prova$, $z=3^a\,prova$, $t=4^a\,prova$, $w=5^a\,prova$. Arma o sistema de equações $\begin{cases}\frac{x+y+z+t}{4}=60\,pontos & (1)\\ w=80\,pontos\end{cases}$. Escreve: Em (1) temos. Arma a expressão $x+y+z+t+w=240$. Escreve: Sento "b" a média após cinco provas, então. Arma e efetua a expressão $\left(\frac{x+y+z+t+w}{5}=b\right)$ obtendo a divisão de $\left(\frac{240+80}{5}=b\right)$ obtendo a divisão $\left(b=\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64. Responde que a média de Marli em ciências após as 5 provas são 64 pontos.
B6	Arma e efetua a divisão $\left(\frac{60+80}{2}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{140}{2}\right)$ obtendo 70.

	Responde que a média foi de 70 pontos.
B7	Arma e efetua a divisão de $\left(\frac{4 \cdot 60 + 80}{5}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{240+80}{5}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64. Responde que a média de Marli é de 64 pontos.
B8	Escreve: Como a média de 4 provas é 60, coloquemos que em cada prova ela tinha tirado 60, apenas para facilitar os cálculos. Assim, a nova média após a 5ª prova será. Arma e efetua a divisão $\left(\frac{60+60+60+60+80}{5}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64. Responde que Marli terá uma média de 64 pontos.
B9	Arma e efetua a divisão $\left(\frac{4 \times 60 + 80}{5}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64.
B10	Arma e efetua a divisão $\left(\frac{60+60+60+60+80}{5}\right)$ obtendo a divisão $\left(\frac{240+80}{5}\right)$ obtendo a divisão $\left(\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64. Responde $M = 64$ pontos.
L1	Arma e efetua a divisão $\left(\frac{60 \cdot 4 + 80 \cdot 1}{5}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{240+80}{5}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64. Responde que a média de Marli é de 64 pontos nas cinco provas.
L2	Arma a expressão $\left(60 = \frac{x+y+z+w}{4}\right)$. Arma e efetua a divisão $\left(\frac{80}{5}\right)$ obtendo quociente 16. Responde que sua média será 76.
L3	Escreve: Se Marli obteve uma média de 60 pontos nas 4 primeiras provas, é porque a soma das 4 primeiras provas é 240 que dividido por 4 da 60, a média. Para sabermos a média de Marli após as cinco provas, sabendo que ela tirou 80 na quinta prova, basta somarmos 80 a 240 e dividirmos por 5. Arma e efetua a divisão $\left(\frac{80+240}{5}\right)$ igualando a divisão de $\left(\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64. Responde que a média de Marli nas cinco provas é de 64 pontos.
L4	Efetua a adição de $240+80$ obtendo 320. Divide $320 \div 5$ obtendo 64. Responde que a média é 64 pontos.
L5	Escreve: n_1 =nota da primeira prova, n_2 =nota da segunda prova; n_3 =nota da terceira prova; n_4 =nota da quarta prova; n_5 =nota da quinta prova; M_4 =média de pontos nas primeiras quatro provas; M_5 =média de pontos após as cinco provas. Escreve: Temos que. Arma a expressão $\left(\frac{n_1+n_2+n_3+n_4}{4} = M_4\right)$. Escreve: Como $M_4 = 60$ então. Arma a expressão $(n_1+n_2+n_3+n_4 = 60 \cdot 4)$. Escreve: ou seja. Arma a expressão $(n_1+n_2+n_3+n_4 = 240)$. Escreve: Logo. Arma e efetua a expressão

	$\left(\frac{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}{5}\right)$ igualando a expressão $\left(\frac{240+n_5}{5}\right)$. Escreve: Como $n_5=80$ segue que. Arma e efetua a divisão $\left(\frac{240+80}{5}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64. Responde que a média de Marli após as cinco provas é de 64 pontos.
L6	Escreve: Devemos fazer a soma da média nas 4 provas com a média na quinta prova e depois dividir por 2. Desta forma teremos a média após as cinco provas. Arma e efetua a divisão $\left(\frac{60+80}{2}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{140}{2}\right)$ obtendo 70. Responde que a média de Marli em ciências após cinco provas é de 70 pontos.
L7	Arma e efetua a divisão $\left(\frac{60+80}{2}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{140}{2}\right)$ obtendo 70. Descarta a resolução anterior. Arma e efetua a expressão $\left(\frac{a+b+c+d}{4}=60\right)$ obtendo $(a+b+c+d=240)$. Arma e efetua a expressão $\left(\frac{a+b+c+d+80}{5}\right)$ igualando a divisão $\left(\frac{240+80}{5}\right)$ obtendo a divisão $\left(\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64. Responde que a média de Marli será igual a 64 pontos.
L8	Escreve: Se ela obteve 60 pontos nas quatro primeiras provas, subentende-se que $\left(60=\frac{S}{4}\right)\Rightarrow S=240$, em que S é a soma das 4 primeiras notas. Arma a expressão $(n_1+n_2+n_3+n_4=S=240)$. Escreve: A média após as cinco provas é dada da seguinte forma. Arma e efetua a expressão $\left(\frac{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}{5}\right)$ obtendo a divisão $\left(\frac{240+80}{5}\right)$ obtendo a divisão $\left(\frac{320}{5}\right)$ obtendo 64.

PROVAS	PROCEDIMENTOS DAS RESOLUÇÕES DA QUESTÃO Q5
B1	Escreve e responde: "O gráfico de barras não é o mais apropriado porque no eixo x não iremos ter 1 único parâmetro para se comparar com os outros. (~~Por~~)".
B2	Escreve e responde: "Por que existem dados muitos distantes um dos outros, onde o gráfico de barras não se adequa".
B3	Escreve e responde: "Pelo fato dos jornais terem alguns dias para se decompor e os copos plásticos terem mais de 100 anos".
B4	Escreve e responde: "O gráfico de barras não é o mais apropriado para apresentar estes dados porque o tempo de decomposição dos jornais é de alguns dias enquanto que o tempo de decomposição dos copos de plástico é mais de 100 anos o que é uma diferença muito grande para ser mostrado em um gráfico de barras".
B5	Escreve e responde: "Se analisarmos esta tabela vemos que o tempo de

	decomposição varia de alguns dias até o "infinito", não sabemos especificamente quanto que é o tempo de decomposição dos copos de plástico e nem o tempo de decomposição dos jornais".
B6	Escreve e responde: "Pelo tempo de decomposição da tabela apresentada, pois há tempo pequeno e muito grande".
B7	Escreve e responde: "A diferença de tempo de decomposição entre os elementos apresentados é muito grande, sendo assim, se ele usasse uma escala (~~pequena, por exemplo,~~) baseada em dias, a barra representada pelo jornal ficaria perfeita, porém seria impossível colocar uma barra referente aos copos plásticos ou à goma de mascar, pois o problema seria a barra dos jornais, que praticamente não apareceria. Sendo assim, não é recomendável utilizar o gráfico de barras nesta situação".
B8	Escreve e responde: "Por exemplo, no tipo casca de banana o gráfico não irá começar no zero, mas sim no 1 e terminar no 3". Registra o gráfico de barras e escreve no eixo das abscissas "T (anos)" indicando os valores da variável de 1 a 3, e no eixo das ordenadas escreve "tipo de lixo" indicando a variável "casca de banana". Desenha uma barra com altura correspondente ao intervalo de 1 a 3 do eixo das abscissas.
B9	Escreve e responde: "Porque quando fala que a decomposição é de 1 a 3 anos quer dizer que não tinha um tempo certo, assim consigo indicar em um gráfico como esse".
B10	Escreve e responde: "Se a escala utilizada fosse usada a favor do material com maior tempo de decomposição, as barras que indicam o tempo de decomposição dos jornais seriam minúsculas. Por outro lado, se a escala fosse usada para facilitar a visualização das menores barras, o gráfico tomaria proporções gigantescas".
L1	Escreve e responde: "O gráfico de barras não é o mais apropriado, porque não teria como representar o tempo de decomposição dos jornais e dos copos de plásticos, pois eles não apresentam um (~~único~~) valor exato".
L2	Escreve e responde: "O gráfico de barras não é o mais apropriado pois no quadro não temos um tempo fixo. Ficaria difícil representar mais de 100 anos com um gráfico de barras".
L3	Não apresenta registro escrito algum.
L4	Não apresenta registro escrito algum.
L5	Escreve e responde: "Não é apropriado pois o tempo de decomposição está em dias".
L6	Escreve e responde: "Porque ele não sabe o valor do tempo de decomposição do jornal, sendo que todas as informações devem estar na mesma escala para o gráfico ser entendido".
L7	Escreve e responde: "Não é apropriado pois o tempo não segue um proporção, ou uma constante, ele possui intervalos, o que dificulta construir o gráfico de barras".
L8	Escreve e responde: "Por meio do gráfico de barras podemos relacionar dados à grandezas fixas, e as grandezas coletadas, neste caso, o tempo de decomposição do lixo, variam. Não se pode fazer uma relação biunívoca exata. Portanto, o gráfico de barras, neste caso, não é o mais apropriado".

PROVAS	PROCEDIMENTOS DAS RESOLUÇÕES DA QUESTÃO Q8
B1	Escreve: J1). Arma e efetua a divisão $\left(\frac{36,5}{100}\right)$ obtendo $\left(36,5.10^{-2}=0,365\right)$ e a multiplicação $\left(500\times 0,365\right)$ obtendo 182,500. Arma incompletamente uma

	regra de três simples $\begin{pmatrix} 500 & — & 182,5 \\ 1 & — & \end{pmatrix}$. Escreve: De 500 cidadãos, 183 apóiam o presidente. Escreve: J2). Arma e efetua a multiplicação $(500 \times 0,41)$ obtendo 205,00. Justifica: De 500 cidadãos, 205 apóiam o presidente. Escreve: J3). Arma e efetua a multiplicação $(1000 \times 0,39)$ obtendo 390,00, e a divisão $(390 \div 2)$ obtendo 195. Justifica: 500 cidadãos, 195 apóiam o presidente. Escreve: J4). Arma e efetua a multiplicação $(1000 \times 0,445)$ obtendo 445,000 e a divisão $(445 \div 2)$ obtendo 222,5. Justifica: 500 leitores, 223 apóiam o presidente. Arma e efetua a subtração $(195 - 183)$ obtendo 12, a adição $(195 + 12)$ obtendo 207 e a divisão $(523 \div 3)$ obtendo 174. Anula com um "x" sobre a divisão $(523 \div 3)$. Justifica: Jornal 2 forneceria o resultado mais provável. Se em 6 de janeiro 183 cidadãos apoiavam o presidente. Se em 20 de janeiro 195 cidadãos apoiavam o presidente. Então em 25 de janeiro, o jornal que ofereceria o resultado mais provável é J2.
B2	Justifica: O jornal 3, 1º) os eleitores foram selecionados ao acaso; 2º) quanto maior a amostra, a pesquisa será mais heterogênea.
B3	Justifica: O jornal 3, pois é mais perto do dia 25, teve uma maior amostra, e selecionamos pessoas com direito de voto ao acaso, que diferente do jornal 4 não podemos afirmar que todos que ligaram tem direito de voto.
B4	Justifica: O jornal 4 que forneceria o resultado mais provável é o jornal 4, pois a pesquisa realizada em 20 de janeiro (que é a mais próxima das eleições) foi com 1000 eleitores do jornal que ligaram na redação a fim de votar, ou seja, quando eles ligaram na redação do jornal eles já tinham certeza de qual candidato votariam. Já nas outras pesquisas, as pessoas foram escolhidas ao acaso podendo responder qualquer coisas a pesquisa.
B5	Escreve: J1:. Escreve: 36.5% → 5000 cidadõas 6 janeiro. Escreve: J2. Justifica: O jornal 4 pois a porcentagem de votos é maior que as outras e os eleitores estavam a fim de votar.
B6	Justifica: O jornal 3, pois a pesquisa foi feita dias antes da eleição e o número de cidadãos é maior.
B7	Justifica: sem dúvida o jornal 4, pois sua pesquisa foi feita com um número maior de pessoas em relação ao jornal 1 e 2 e além disso foi feita com eleitores que ligaram para o jornal a fim de votar, o que torna o resultado da pesquisa mais confiável do que a do jornal 3.
B8	Escreve: Jornal 3. Justifica: 1- Os eleitores foram selecionados ao acaso, que é melhor do que os que queriam votar, pois poderiam ter sido subornados ou mesmo porque não gostavam e queriam que o presidente se "desse mal!. 2- A amostra do jornal 3 foi maior.
B9	Escreve e justifica: Jornal 3: quando trabalhamos com uma amostra aleatória e uma amostra maior probabilidade de estar mais próxima da verdade é maior.
B10	Justifica: O jornal 3, pois os cidadãos eram escolhidos ao acaso, por ter uma amostra maior e pela pesquisa ter sido mais próxima da data da eleição.
L1	Justifica: O jornal 3, porque ele entrevistou mais cidadãos e esses cidadãos foram selecionados ao acaso.
L2	Escreve: Jornal 3. Justifica: (1º) foi realizada mais perto da data da eleição, portanto os eleitores têm menos tempo para mudar de candidato. (2º) foram pessoas de qualquer classe social, de qualquer lugar, isso possibilita que a

	pesquisa seja mais confiável, ~~várias~~ pessoas diferentes responderam a pesquisa.
L3	Justifica: o jornal 3 seria o mais confiável pois a pesquisa foi realizada tão próximo das eleições como os jornais 2 e 4, é melhor que o resultado do jornal 2 pois sua amostra é maior e é melhor que o 4 pois no 4 não se tem a garantia de quem ligou possa mesmo votar e ainda por cima fica uma pesquisa dirigida somente aos leitores.
L4	Justifica: Jornal, pois a pesquisa foi realizada em 20 de janeiro com amostra maior que jornal 2 e seleção ao acaso. Escreve ainda: Porque 20 de janeiro? Mais perto de 25 de janeiro, dia da eleição. Por que número da amostra? Quanto maior amostra melhor fica analisar as intenções no caso avaliar a popularidade do presidente. Por que seleção ao acaso? Quando no jornal 4 os eleitores ligaram para a redação a fim de votar, pode ter ligado mais adeptos do presidente.
L5	Justifica: O jornal 3, pois a pesquisa possui uma amostra maior e por se tratar de uma pesquisa mais recente.
L6	Grifa as informações que considera mais relevantes no enunciado: "Quatro"; "500 cidadãos com direito a voto, selecionados ao acaso"; "41,0%"; "500 cidadãos com direito a voto, selecionados ao acaso"; "em 20 de janeiro"; "1000 cidadãos com direito a voto"; "20 de janeiro"; " 1000 eleitores do jornal que telefonaram para a redação a fim de votar". Escreve duas justificativas: 1ª justificativa: O Jornal 3 fornece o resultado mais provável por ter feito a pesquisa com um nº de 1000 pessoas com direito a voto que não tem nenhum vínculo com o jornal. 2ª justificativa: O Jornal 3 fez a pesquisa próxima nas eleições e isso conta muito
L7	Escreve: 500 → 36,5%. Efetua a divisão $\left(\frac{36,5}{100}\cdot 500\right)$ obtendo 182,5 e arma e efetua a subtração $(500-182)$ obtendo 318 não votaria. Efetua a divisão $\left(500\cdot\frac{41}{100}\right)$ obtendo 205 e arma e efetua a subtração $(500-205)$ obtendo 295 não votaria. Efetua a divisão $\left(1000\cdot\frac{39}{100}\right)$ obtendo 390 e arma e efetua a subtração $(1000-390)$ obtendo 610. Efetua a divisão $\left(1000\cdot\frac{44,5}{100}\right)$ obtendo 445 e arma e efetua a subtração $(1000-445)$ obtendo 555. Escreve: O Jornal 2.
L8	Justifica: O jornal 3, pelo fato de ter "selecionado" Um número de cidadãos com direito a voto maior que o jornal I e jornal II, e por sua pesquisa ser mais recente que a pesquisa do jornal 1. Além disso, quanto ao jornal 4, sua pesquisa foi realizada por telefone, o que não garante que os eleitores que opinaram são eleitores ativos. Reforça a resposta, sem dúvida a pesquisa do jornal 3 fica sendo a mais confiável.

PROVAS	PROCEDIMENTOS DAS RESOLUÇÕES DA QUESTÃO Q11
B1	Indica no eixo das ordenadas do gráfico: 508 e o 517. Escreve: Em um ano aumentou somente 9 assaltos, acredito que a interpretação da repórter não foi razoável.
B2	Indica no eixo das ordenadas do gráfico, valores entre o intervalo 505-510 e 515-520 por meio de duas retas saindo das colunas que representam o ano

	de 1998 e o ano de 1999. Justifica: Não, pois o aumento não foi tão considerável.
B3	Justifica: Pelo gráfico não houve um grande aumento nos números de assaltos, foi cerca de 10 assaltos a mais.
B4	Indica no eixo das ordenadas do gráfico, valores entre o intervalo 505-510 e 515-520 por meio de duas retas saindo das colunas que representam o ano de 1998 e o ano de 1999. Justifica: Não, pois ele afirma que houve um grande aumento, e como o gráfico é de um ano a quantidade de assaltos é considerada pequena.
B5	Justifica: Sim, pois o aumento que teve de 1998 até 1999 foi maior que o dobro de 1998.
B6	Indica no eixo das ordenadas do gráfico, os valores 500 e 516, respectivamente, entre o intervalo 505-510 e 515-520 por meio de duas retas saindo das colunas que representam o ano de 1998 e o ano de 1999. Justifica: Não, pois teve um aumento mais não grande, a escala do gráfico que pode titubear, muitas vezes, a interpretação.
B7	Justifica: Com certeza não. O gráfico causa impressão de grande almento devido a escala na qual foi construído, porém, se analizá-lo corretamente, percebe-se que o aumento não foi muito grande.
B8	Justifica: Não, como a escala do número de assaltos é grande, temos a impressão errônea de que houve um grande aumento, quando na verdade o aumento foi de aproximadamente 8 assaltos. (508 para 516).
B9	Justifica: Precisamos analizar o crescimento populacional para termos uma melhor interpretação.
B10	Justifica: Apesar de a diferença, no gráfico, ser grande apenas ~~visivelmente~~ visualmente, a interpretação do repórter não é razoável, pois a diferença real é muito pequena em relação ao número total de assaltos. Escreve: a) repórter? Não era político? b) aumentar número de assaltos não é uma coisa boa, nem mesmo um aumento minúsculo.
L1	Justifica: Não é uma interpretação correta, pois pelo gráfico não temos dados de onde começa o número de assaltos por ano.
L2	Indica no eixo das ordenadas do gráfico, valores entre o intervalo 505-510 e 515-520 por meio de duas retas saindo das colunas que representam o ano de 1998 e o ano de 1999. Justifica: Se não prestarmos atenção na escala que o gráfico usa a impressão será que ~~não aumentou~~ o aumento muito de um ano para o outro, mas olhando a escala vemos que o aumento não foi nem de 20 assaltos.
L3	Justifica: Não. O repórter deve ter olhado para a diferença do tamanho das barras e não para o valor numérico dos assaltos que na pior das hipóteses se tivesse crescido de 505 para 520 esse crescimento não seria nem mesmo 3%. Não é um valor tão grande assim como ele, o repórter afirma.
L4	Grifa no enunciado “grande aumento”. Escreve: Vejo duas interpretações:. Justifica: 1ª) Um aumento de 87 assaltos pode ser considerado grande aumento pois não aceitável ter um assalto por ano, quem me dera 508 ou muito mesmo 516. 2ª) Um aumento de só 8 assaltos no ano para quem está aceitando que o mundo pode ser violento, ou seja, o indivíduo acostumou com os assaltos 8 é um aumento insignificante.
L5	Justifica: Não, pois não é um grande aumento. ~~algo, com o número de assaltos, ultrapassar~~. No ano de 1998 o número de assaltos está entre 505 e 510. No ano de 1999 o número de assaltos está entre 515 e 520. Portanto não é um grande aumento se compararmos o ano de 1999 com o ano de 1998.
L6	Não apresenta registro escrito algum.
L7	Indica no eixo das ordenadas do gráfico, valores entre o intervalo 505-510 e

	515-520 por meio de duas retas saindo das colunas que representam o ano de 1998 e o ano de 1999. No intervalo 510-515 escreve o número 5 indicando por meio de colchetes uma variação. Justifica: Visualmente o gráfico parece mostrar um grande aumento, mas são olhar os dados (na vertical) nota-se que em quantidade não se têm um aumento tão grande como afirma o repórter.
L8	Justifica: Não. O repórter se baseou nas dimensões do gráfico sem considerar a escala de suas grandezas. Veja que de 1998 para 1999, o número de assaltos aumentou muito pouco. Pelo gráfico, deduzimos que o aumento não chegou nem a dez. 10 casos a mais em um ano não pode ser considerado um grande aumento, considerando que a pesquisa seja âmbito nacional.

ANEXOS

ANEXO A – Roteiro de aplicação da prova

ROTEIRO PARA APLICAÇÃO

As instruções para os alunos **em destaque** estão e devem ser lidas para os mesmos.

Recomenda-se que se chegue à escola no mínimo 30min antes da aplicação. Esse tempo deverá ser suficiente para:

- verificar se a sala está preparada adequadamente para a aplicação;
- disponibilizar um relógio para que seja possível a visualização do horário;
- levar o material para a sala da aplicação. Todo o material deverá ficar sobre a mesa do aplicador antes da chegada dos alunos.

Enquanto os alunos forem entrando, designe o lugar em que eles devem sentar.

Faça a conferência dos alunos que irão realizar a prova. Confira também se todos os alunos possuem caneta esferográfica. Caso algum aluno não tenha, entregue-lhe uma.

Antes de distribuir a prova diga:

> Não abram a prova antes que eu os autorize.

Depois que todos tiverem a prova e a caneta, acompanhe o preenchimento da folha de rosto com os alunos. Em seguida, leia alto e pausadamente as instruções contidas na mesma.

Estão previstas duas horas e quinze minutos para a realização da prova (quinze minutos para a leitura do material e duas horas para a prova). Diga aos alunos:

Vocês têm duas horas para resolver a prova.
Quem terminar a prova antes das duas horas previstas pode revisar a prova e permanecer sentado em seu lugar até o término da primeira hora.
Não se esqueçam de escrever a resposta depois de resolver cada questão.
Ao terminarem a prova respondam o questionário que se encontra na última página.

Pergunte aos alunos:

Vocês têm alguma dúvida?

Marque na lousa o horário em que será iniciada a prova e o horário de término da mesma.

Só é permitida a entrada de alunos até no máximo 15 min após o início da prova.

Durante a aplicação nenhum aluno deve deixar a sala salvo aqueles que passarem mal ou que precisarem deixar a sala temporariamente. Se isto ocorrer, o material deve ser recolhido; o horário de saída e de volta, o motivo da saída e o local para onde foi devem ser anotados na folha de rosto da prova do referido aluno pelo aplicador.

Qualquer circunstância incomum também deve ser registrada na folha de rosto da prova (se for de um aluno) e/ou no relatório. Anote na folha de rosto da prova o código:

- 1 – se o aluno esteve presente durante toda a sessão;
- 2 – se o aluno não esteve presente em toda a sessão

Ao terminar o tempo diga:

Agora vou recolher as provas. Por favor, fiquem sentados até que eu recolha todas as provas.

Depois de recolhidas todas as provas diga:

Muitíssimo obrigada por colaborarem para o desenvolvimento dessa investigação.

Autorize a saída dos alunos.

ANEXO B – Questionário Avaliativo: impressões da prova

1. O que você achou dessa prova? (A) Muito fácil.

(B) Fácil.

(C) Mediana.

(D) Difícil.

(E) Muito difícil.

O que você achou do tamanho da prova?

(A) Muito longa.

(B) Longa.

(C) Adequada.

(D) Curta.

(E) Muito curta.

Para você, o tempo foi

(A) mais que o necessário para fazer a prova.

(B) suficiente para fazer a prova.

(C) faltou tempo para fazer a prova.

Qual a questão que você achou mais fácil? Por que?

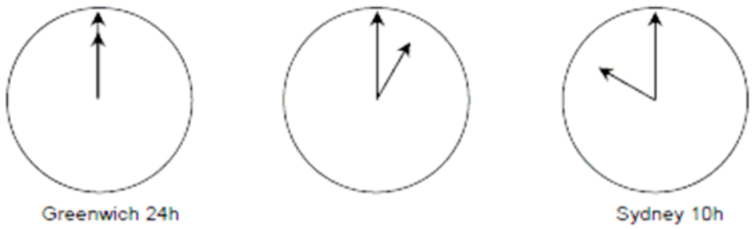
Qual a questão que você achou mais difícil? Por que?

ANEXO C – A prova

1) BATE-PAPO PELA INTERNET

Mark (de Sydney, na Austrália) e Hans (de Berlim, na Alemanha) comunicam-se com freqüência por meio de uma "sala de bate-papo" da Internet. Eles precisam conectar-se à Internet, ao mesmo tempo, para poderem bater papo.

Para determinar um horário apropriado para bater papo, Mark consultou uma tabela de fusos horários do mundo e encontrou o seguinte:



Questão 1: BATE-PAPO PELA INTERNET

Que horas são em Berlim quando são 19 horas em Sydney?

Questão 2: BATE-PAPO PELA INTERNET

Mark e Hans não podem bater papo das 9h às 16h30 de seus horários locais respectivos, porque eles devem ir para a escola. Além disso, não poderão bater papo entre 23h e 7h porque estarão dormindo.

Qual seria um bom horário para Mark e Hans baterem papo? Escreva os horários locais na tabela abaixo.

Local	Horário
Sydney	
Berlim	

2) TAXA DE CAMBIO

Mei-Ling, de Singapura, estava preparando-se para uma viagem de 3 meses à África do Sul como aluna de intercâmbio. Ela precisava trocar alguns dólares de Singapura (SGD) por *rands* sul-africanos (ZAR).

Questão 1: TAXA DE CÂMBIO

Mei - Ling descobriu que a taxa de câmbio entre o dólar de Singapura e o *rand* sul-africano era:

1 SGD = 4,2 ZAR

Mei - Ling trocou 3000 dólares de Singapura por *rands* sul-africanos a esta taxa de câmbio. Quantos *rands* sul-africanos Mei-Ling recebeu?

Questão 2: TAXA DE CÂMBIO

Ao retornar a Singapura após 3 meses, Mei - Ling ainda tinha 3 900 ZAR. Ela trocou novamente por dólares de Singapura, observando que a taxa de câmbio tinha mudado para:

1 SGD = 4,0 ZAR

Quantos dólares de Singapura Mei-Ling recebeu?

Questão 3: TAXA DE CÂMBIO

Durante estes 3 meses, a taxa de câmbio mudou de 4,2 para 4,0 ZAR por SGD.

Foi vantajoso para Mei-Ling que a taxa de câmbio atual fosse de 4,0 ZAR em vez de 4,2 ZAR, quando ela trocou seus *rands* sul-africanos por dólares de Singapura? Dê uma explicação que justifique a sua resposta.

3) PROVAS DE CIÊNCIAS

Questão 1: PROVAS DE CIÊNCIAS

Na escola de Marli, o professor de ciências aplica provas que valem 100 pontos. Marli obteve uma média de 60 pontos nas primeiras quatro provas de ciências. Na quinta prova, ela conseguiu 80 pontos.

Qual é a média de Marli em ciências após as cinco provas?

4) ESTANTES

Questão 1: ESTANTES

Para construir uma estante completa, um marceneiro precisa do seguinte material:

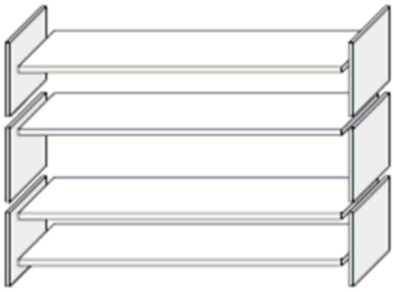
4 pranchas grandes de madeira,

6 pranchas pequenas de madeira,

12 braçadeiras pequenas,

2 braçadeiras grandes e

14 parafusos.



O marceneiro possui em estoque 26 pranchas grandes de madeiras, 33 pranchas pequenas de madeira, 200 braçadeiras pequenas, 20 braçadeiras grandes e 510 parafusos. Quantas estantes completas o marceneiro poderá fazer?

5) LIXO

Questão 1: LIXO

Para uma atividade escolar sobre o meio ambiente, os alunos coletaram informações sobre o tempo de decomposição de vários tipos de lixo que as pessoas jogam fora:

Tipo de lixo	**Tempo de decomposição**
Casca de banana	1 a 3 anos
Casca de laranja	1a 3 anos
Caixas de papelão	0,5 ano
Goma de mascar	20 a 25 anos
Jornais	Alguns dias
Copos de plástico	Mais de 100 anos

Um aluno pretende mostrar os resultados em um gráfico de barras.

Dê **uma** justificativa para o fato de que o gráfico de barras não é o mais apropriado para apresentar estes dados.

6) OPÇÕES

Questão 1: OPÇÕES

Em uma pizzaria, você pode pedir uma pizza básica com duas coberturas: queijo e tomate. Você pode igualmente compor sua própria pizza com as seguintes coberturas **extras**: azeitonas, presunto, cogumelos e salame.

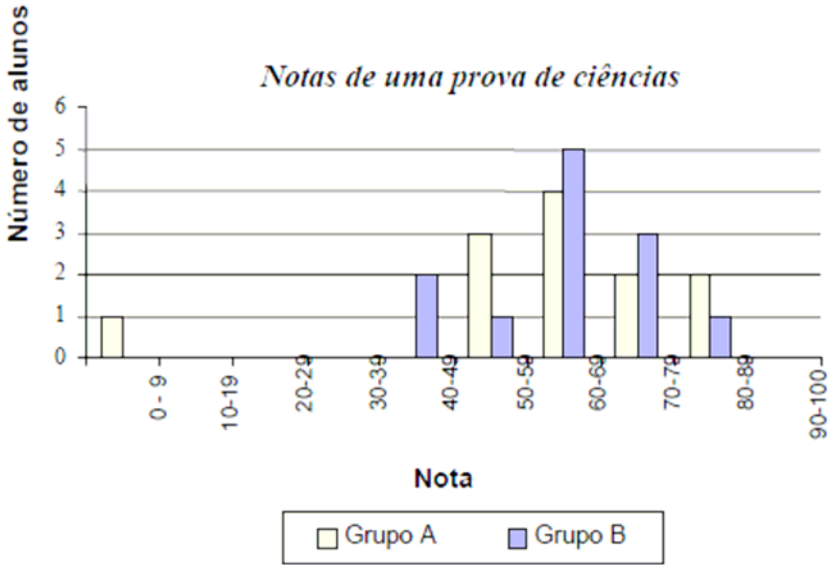
Rose quer pedir uma pizza com duas coberturas **extras** diferentes.

A partir de quantas combinações diferentes Rose pode escolher?

7) NOTAS DE PROVA

Questão 1: NOTAS DE PROVA

O gráfico abaixo mostra os resultados de uma prova de ciências de dois grupos denominados Grupo A e Grupo B.



A nota média para o Grupo A é de 62,0 e para o Grupo B é de 64,5. Os alunos são aprovados nesta prova quando tiram nota 50 ou acima.

Analisando o gráfico acima, o professor afirma que, nesta prova, o Grupo B foi melhor do que o Grupo A.

Os alunos do Grupo A não concordam com o professor. Eles tentam convencer o professor de que o Grupo B não foi necessariamente o melhor.

Utilizando o gráfico, dê um argumento matemático em que os alunos do Grupo A poderiam se apoiar.

8) APOIO AO PRESIDENTE

Questão 1: APOIO AO PRESIDENTE

Na Zedelândia, foram realizadas pesquisas de opinião para se avaliar a popularidade do Presidente, tendo em vista as próximas eleições. Quatro editores de jornais realizaram pesquisas independentes, em âmbito nacional. Os resultados das quatro pesquisas estão apresentados abaixo:

Jornal 1: 36,5% (pesquisa realizada em 6 de janeiro, com uma amostra de 500 cidadãos com direito a voto, selecionados ao acaso);

Jornal 2: 41,0% (pesquisa realizada em 20 de janeiro, com uma amostra de 500 cidadãos com direito a voto, selecionados ao acaso);

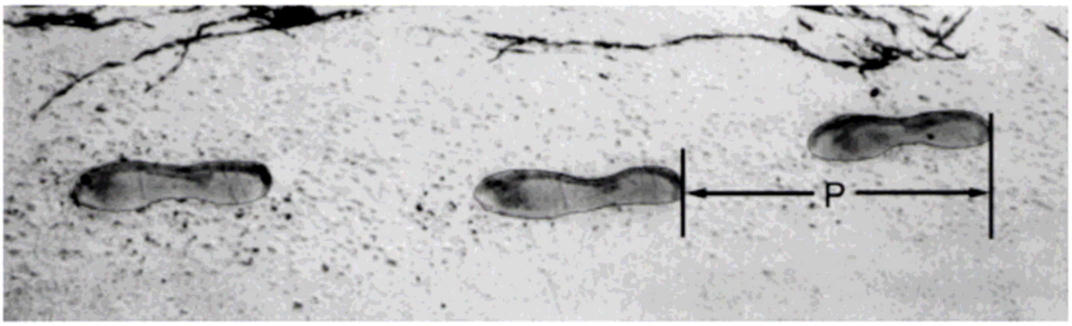
Jornal 3: 39,0% (pesquisa realizada em 20 de janeiro com uma amostra de 1000 cidadãos com direito a voto, selecionados ao acaso);

Jornal 4: 44,5% (pesquisa realizada em 20 de janeiro, com 1000 leitores do jornal que telefonaram para a redação a fim de votar).

Que jornal forneceria o resultado mais provável, para se prever o nível de apoio ao presidente se a eleição fosse realizada em 25 de janeiro? Dê duas explicações que justifiquem a sua resposta.

9)CAMINHANDO

A figura mostra as pegadas de um homem caminhando.



O

comprimento do passo P é a distância entre a parte posterior de duas pegadas consecutivas. Para homens, a fórmula $\frac{n}{P} = 140$ dá uma relação aproximada entre *n* e *P*, onde

n = número de passos por minuto, e

P = comprimento do passo em metros.

Questão 1: CAMINHANDO

Se a fórmula se aplica ao caminhar de Heitor e ele anda 70 passos por minuto, qual é o comprimento do passo de Heitor? Mostre como você resolveu.

Questão 2: CAMINHANDO

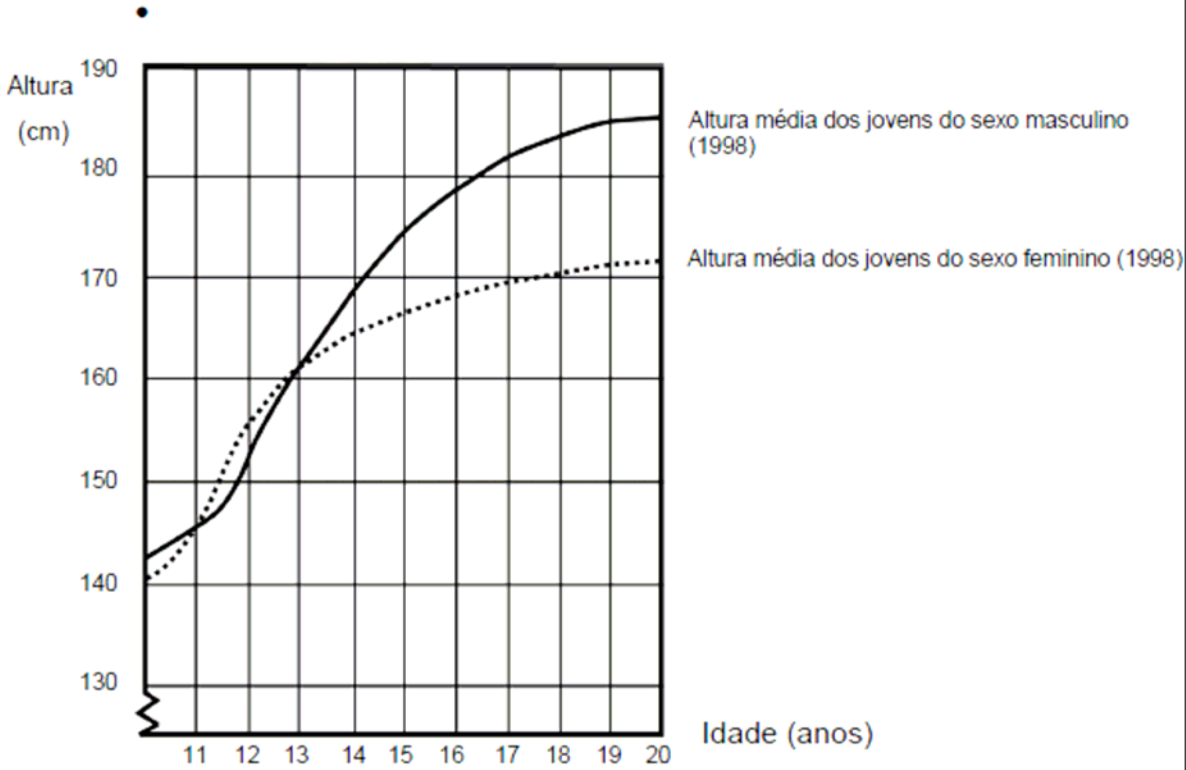
Bernardo sabe que o comprimento de seu passo é de 0,80 m. A fórmula se aplica ao caminhar de Bernardo.

Calcule a velocidade do caminhar de Bernardo em metros por minuto e em quilômetros por hora. Mostre como você resolveu.

10) CRESCENDO

OS JOVENS ESTÃO FICANDO MAIS ALTOS

A altura média dos jovens dos sexos masculino e feminino na Holanda, em 1998, encontra-se representada no gráfico abaixo.



Questão 1: CRESCENDO

Desde 1980, a altura média das mulheres de 20 anos aumentou em 2,3 cm, chegando a aproximadamente 170,6 cm. Qual era a altura média das mulheres de 20 anos de idade em 1980?

Questão 2: CRESCENDO

De acordo com esse gráfico, durante qual período de sua vida, em média, as meninas são mais altas do que os meninos de sua idade?

Questão 3: CRESCENDO

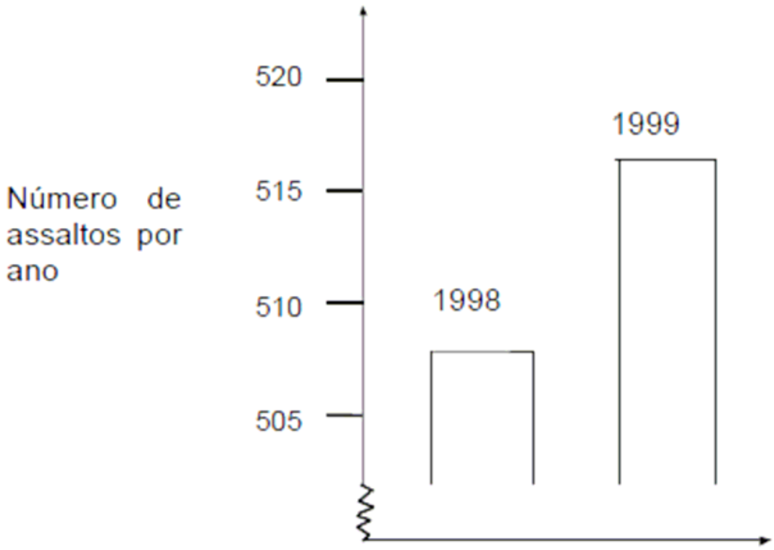
Explique como o gráfico permite concluir que, em média, a taxa de crescimento das meninas é mais lenta depois dos 12 anos de idade.

11) ASSALTOS

Questão 1: ASSALTOS

Um repórter de TV apresentou o gráfico abaixo e disse:

— O gráfico mostra que, de 1998 para 1999, houve um grande aumento no número de assaltos.

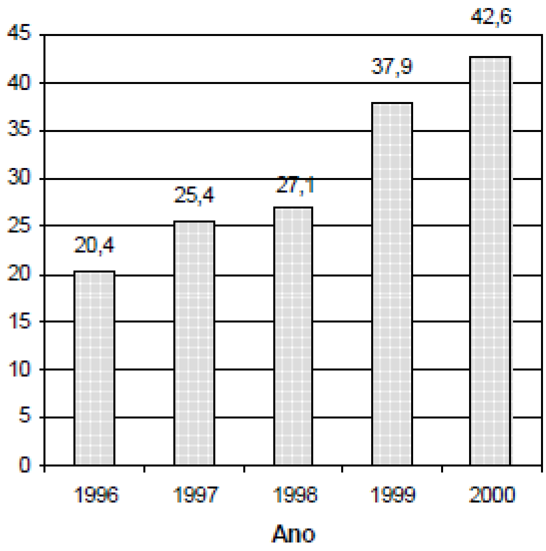


Você considera que a afirmação do repórter é uma interpretação razoável do gráfico? Dê uma explicação que justifique a sua resposta.

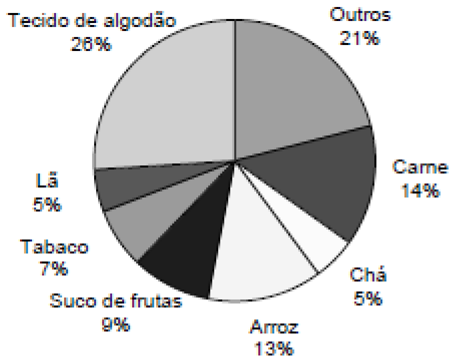
12) EXPORTAÇÕES

Os gráficos abaixo fornecem informações relacionadas às exportações da Zedelândia, um país que utiliza o zed como sua moeda corrente.

Total das exportações anuais da Zedelândia em milhões de zeds, 1996-2000



Distribuição das exportações da Zedelândia em 2000



Questão 1: EXPORTAÇÕES

Qual foi o valor total (em milhões de zeds) das exportações de Zedelândia em 1998?

Questão 2: EXPORTAÇÕES

Qual foi o valor total das exportações de suco de frutas de Zedelândia em 2000?

13) TORNEIO DE TÊNIS DE MESA

Questão 1: TORNEIO DE TÊNIS DE MESA

Tiago, Rui, Beto e Dirceu formaram uma equipe de treinamento em um clube de tênis de mesa. Cada jogador joga uma vez contra cada um dos outros jogadores. Eles reservaram duas mesas para o treinamento.

Complete a tabela dos jogos apresentada abaixo escrevendo os nomes dos jogadores que disputarão cada partida.

	Mesa de treinamento 1	Mesa de treinamento 2
1ª rodada	Tiago - Rui	Beto – Dirceu
2ª rodada	.... -	.... - ....
3ª rodada	.... -	.... - ....

Questão 2: TORNEIO DE TÊNIS DE MESA

Hélio faz parte de uma equipe de treino de seis pessoas. Eles reservaram o número máximo de mesas que podem ser utilizadas simultaneamente pela sua equipe.

Se todos jogarem entre si uma vez, quantas mesas utilizarão? Quantas partidas serão disputadas ao todo? Quantas rodadas serão necessárias? Anote suas respostas na tabela abaixo.

Número de mesas:	
Número de partidas:	
Número de rodadas:	

Questão 3: TORNEIO DE TÊNIS DE MESA

Dezesseis pessoas participam do torneio de tênis de um clube. O clube de tênis de mesa possui mesas suficientes disponíveis.

Determine o número mínimo de **rodadas** se todos os concorrentes jogarem uns contra os outros uma vez.

14) VÔO ESPACIAL

A estação espacial Mir permaneceu em órbita por 15 anos e deu cerca de 86.500 vezes em torno da Terra durante o tempo em que esteve no espaço.

A permanência mais longa de um astronauta na Mir foi de aproximadamente 680 dias.

Questão 1: VÔO ESPACIAL

Aproximadamente quantas vezes este astronauta voou ao redor da Terra?

Questão 2: VÔO ESPACIAL

O peso total da Mir era 143 000kg. Quando a Mir retornou à Terra, cerca de 80% da estação queimou-se na atmosfera. O restante quebrou-se em aproximadamente 1500 pedaços e caiu no Oceano Pacífico.

Qual é o peso médio dos pedaços que caíram no Oceano Pacífico?

Questão 3: VÔO ESPACIAL

A Mir girou ao redor da Terra a uma altura de aproximadamente 400 quilômetros. O diâmetro da Terra mede cerca de 12 700 km e sua circunferência, cerca de 40000km ($\pi \times 12700$) .

Dê uma estimativa da distância total que a Mir percorreu durante as 86 500 revoluções realizadas enquanto estava em órbita. Arredonde sua resposta para a dezena de milhão mais próxima.