



Centro de Tecnologia e Urbanismo
Departamento de Engenharia Elétrica

Bruno Felipe Costa

Diretividade em Conjuntos Volumétricos de Antenas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Londrina, PR
2020



Bruno Felipe Costa

Diretividade em Conjuntos Volumétricos de Antenas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Eletrônicos
Especialidade: Sistemas de Telecomunicações

Orientador:
Prof. Dr. Taufik Abrão

Londrina, PR
2020

Ficha Catalográfica

Felipe Costa, Bruno

Diretividade em Conjuntos Volumétricos de Antenas. Londrina, PR, 2020. 85 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina, PR. Departamento de Engenharia Elétrica

1 Engenharia Elétrica. 2. Engenharia de Microondas. 3. Rede de Antenas. 4. Diretividade. I. Universidade Estadual de Londrina. Departamento de Engenharia Elétrica. Departamento de Engenharia Elétrica . II. Título.

Bruno Felipe Costa

Diretividade em Conjuntos Volumétricos de Antenas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Eletrônicos
Especialidade: Sistemas de Telecomunicações

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Taufik Abrão
Depto. de Engenharia Elétrica - UEL
Universidade Estadual de Londrina
Orientador

Prof. Dr. José Carlos Marinello
Depto. de Engenharia Elétrica - UEL
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Luiz Cezar Trintinalia
Depto. de Engenharia de Telecomunicações e Controle (PTC), Escola Politécnica.
Universidade de São Paulo

1 de abril de 2020

Resumo

Na primeira parte desta dissertação é proposto uma aproximação para a expressão de forma fechada da diretividade para um conjunto volumétrico arbitrário de antenas, utilizando a expressão de fator de elemento do dipolo de meia onda dado por: $\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}\right)$ e uma expressão de de diretividade de forma fechada e generalizada para um fator de elemento do tipo $\sin^u(\theta) \cos^v(\theta)$, com $u, v \in \mathbb{Z}^+$. Variações desta expressão para diferentes valores de v e u são analisadas a partir das perspectivas analíticas e numéricas. As expressões encontradas neste trabalho foram validadas por resultados numéricos, considerando cenários com configurações distintas.

Na segunda parte desta dissertação, o problema do aprimoramento da diretividade proporcionada por uma rede de antenas, é considerado neste trabalho. Para isto, uma nova formulação para o problema de diretividade de conjuntos volumétricos de antenas é proposta utilizando um fator de elemento geral dado por $\sin^u \theta \cos^v \theta$. Para resolver o problema de otimização associado, a configuração omnidirecional ($\sin \theta$) foi selecionada, devido à simplicidade no tratamento analítico. Apenas as coordenadas 3D dos elementos de antenas foram consideradas como parâmetros a serem otimizados. Um novo conceito que descreve convenientemente a diretividade para o conjunto uniforme planar (UPA – *uniform planar array*), denominado conjunto uniforme planar ótimo (OUPA – *optimal uniform planar array*), é introduzido tendo em vista a obtenção de uma solução quase-ótima de baixa complexidade para o problema da otimização da diretividade não-convexa. Para ilustrar a eficácia do método proposto, resultados de diretividade foram comparados com a técnica de otimização heurística genética (GA – *genetic algorithm*). Sendo assim, resultados numéricos comparativos para diretividade foram obtidos considerando redes com um número de elementos antenas reduzido, $N = [4, 5, \dots, 9]$. Os valores de diretividade alcançados com a solução OUPA resultaram semelhantes aos obtidos com a técnica GA, bem como ganhos de ~ 3 dBi em comparação com técnicas de *beamforming* convencionais utilizando o vetor de direção para o conjunto uniforme linear (ULA – *uniform linear array*) e conjunto uniforme circular (UCA – *uniform circular array*). A técnica OUPA proposta demonstrou efetividade e eficácia também em cenários *massive* MIMO, alcançando ganhos que superam 30 dBi.

Palavras-Chave: Diretividade, Redes de Antenas Volumétricas, Conjunto Uniforme Planar Ótimo (OUPA), Fator de Conjunto, Fator de Elemento, Forma Fechada, Otimização, Algoritmo Genético (GA), Sistemas de Comunicação Quinta-geração (5G).

Abstract

In the first part of this dissertation, an approximation of a closed-form directivity expression is proposed for an arbitrary volumetric array of antennas using the half-wave dipole element factor expression $\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}\right)$ and a closed-expression for a generalized element factor of type $\sin^u(\theta) \cos^v(\theta)$, with $u, v \in \mathbb{Z}^+$. Variations of this expression for different values of v and u are analyzed from the analytical and numerical perspectives. The expressions found in this work has been validated by numerical results, considering distinct configuration scenarios.

In the second part of this dissertation the problem of directivity enhancement. A new formulation on the volumetric array directivity problem is proposed using the rectangular coordinates to describe each antenna element, and the desired angle in spherical coordinates (θ_0, ϕ_0) , with a general element pattern given by $\sin^u \theta \cos^v \theta$. To solve the associated optimization problem, the omnidirectional setting ($\sin \theta$) has been selected due to simplicity in analytical handling. Only the 3D coordinates of the antenna elements were considered as parameters to be optimized; In addition, generalized scenarios, *i.e.*, $\forall u, v \neq 0$, can be easily implemented considering a similar formulation. A new concept that conveniently describes the directivity for the planar uniform array (UPA), called the optimal planar uniform array (OUPA), is introduced with a view to obtaining a near-optimal low complexity solution to the problem of non-convex directivity optimization. This solution is found using the successive evaluation and validation (SEV) method proposed here to expeditiously solve the directivity problem in volumetric antenna networks. To illustrate the effectiveness of the proposed method, directivity results were compared with the genetic heuristic optimization technique (GA - it genetic algorithm). Thus, comparative numerical results for directivity were obtained considering networks with a reduced number of antenna elements, $N = [4, 5, \dots 9]$. The directivity values achieved with the OUPA solution were similar to those obtained with the GA technique, as well as gains of ~ 3 dBi compared to conventional beamforming techniques using the steering vector for the linear uniform array (ULA - it uniform linear array) and circular uniform array (UCA - it uniform circular array). For a larger number of antennas, featuring large-scale MIMO scenarios (M-MIMO), two parameter initialization strategies have been proposed, which improve the heuristic method. called GA - it marginal and GA - it stall; Both methods were compared with OUPA in terms of directivity gain versus computational time. The proposed OUPA technique has demonstrated effectiveness and effectiveness also in MIMO scenarios, achieving gains that exceed 30 dBi.

Keywords: Directivity, 3D Antenna Array, Optimal Uniform Planar Array (OUPA), Array Factor, Element Factor, Closed-form, Optimization, Genetic Algorithm (GA), 5G.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas

Convenções e Lista de Símbolos

1	Introdução	1
1.1	Contribuição e Organização da Dissertação	4
2	Expressão para a Diretividade na Forma Fechada	6
2.1	Diagrama de Irradiação de uma Rede	6
2.2	Expressão da Diretividade de Forma Fechada para uma Rede Vo- lumétrica de Antena	8
2.2.1	Resolução da Integral Λ	10
2.2.2	Resolução da integral Ξ	10
2.3	Dipolo de Meia Onda	16
2.4	Expressão da Diretividade para Dipolos de Meia Onda	18
2.5	Validação	23
2.5.1	Cenários	23
2.5.2	Resultados Numéricos	27
2.6	Conclusões	30
3	Problema de Otimização da Diretividade	31
3.1	Cenário Omnidirecional	33
3.1.1	Reescrevendo o Problema de Forma Simplificada	36

3.2	Conclusões	37
4	Geometrias para Redes de Antenas	39
4.1	Otimização da Posição dos Elementos de uma Rede Uniforme Planar	41
4.2	Matriz de Transformação	44
4.2.1	Avaliação e Validação Sucessiva (SEV)	46
4.2.2	Rede Uniforme Planar Ótimo (OUPA)	47
4.2.3	Exemplo Numérico	48
4.3	Conclusões	51
5	Resultados Numéricos	52
5.1	Rede Uniforme Planar Ótimo (OUPA)	52
5.2	Diretividade e Área para Diferentes Configurações $N_1 \times N_2$	53
5.3	Algoritmo Genético (GA)	55
5.4	OUPA \times Método GA em Redes Complexas	60
5.5	Resultados Numéricos de Diretividade	61
5.6	Conclusões	64
6	Conclusões	66
6.1	Conclusões - Diretividade Forma Fechada	66
6.2	Conclusões - Otimização da Diretividade de Conjunto de Antenas Omnidirecionais	66
	Apêndice A – Trabalhos Desenvolvidos	68
A.1	Expressão da Diretividade em forma fechada para uma Rede Vo- lumétrica Arbitrário de Antenas	69
A.2	Otimização da Diretividade para uma Rede Volumétrica de Ante- nas Omnidirecionais	76
	Referências	83

Lista de Figuras

2.1	Nomenclatura e representação geométrica para a rede de antenas utilizando-se o sistema de coordenadas esféricas. Fonte: [Elaborada pelo Autor]	7
2.2	Diagrama de irradiação do dipolo de meia onda.	16
2.3	Diagrama de irradiação para $\phi = 0$ e a representação física do dipolo de meia onda.	17
2.4	Diagrama de irradiação do dipolo de meia onda e sua aproximação $\sin \theta$	17
2.5	Módulo do erro entre o diagrama de irradiação de meia onda e sua aproximação senoidal.	18
2.6	Plataforma <i>4nec2</i> : (a) Disposição geométrica das antenas; (b) Diretividade para $\theta_0 = 101,44^\circ$	28
2.7	Diretividade para diferentes valores de ϕ_0 e $\theta_0 = 45^\circ$	29
2.8	Módulo do Erro em escala linear entre as diretividades obtidas em (2.44) e (2.61) e a plataforma <i>4nec2</i>	29
3.1	Aprimoramento da diretividade através de interferências construtivas e destrutivas oriundas de elementos com baixa diretividade.	31
3.2	Duas configurações para o vetor \mathbf{p}_n : (a) todos os elementos da rede de antena estão posicionados no mesmo plano; (b) os elementos foram alocados em dois planos-solução paralelos.	35
4.1	Diferentes configurações planares com $N = 16$ elementos de antenas no plano desejado definido por $\theta_0 = \phi_0 = \pi/4$	40
4.2	Diretividade <i>versus</i> a distância mínima para diferentes redes geométricas com $N = 16$ elementos.	41
4.3	Comparação entre UPA e UHPA em termos de diretividade e área normalizada, ambas configuradas com valores ótimos de d_{\min}	42

4.4	Disposição dos elementos da UPA e classificação para $N_1 \times N_2$ antenas.	43
4.5	Valores de \mathcal{G} para diferentes valores de d_{\min} em diferentes configurações de $N_1 \times N_2$	46
4.6	UPA genérica com 4 elementos de antena.	48
4.7	Valores da função \mathcal{G} para diferente valores de distância mínima além disso o valor ótimo está em destaque.	51
5.1	Comparação entre Diretividade e Área normalizada para diferentes valores de $N = N_1 \times N_2$	53
5.2	Diretividade <i>versus</i> d_{\min} para $N = 36$ elementos de antenas e suas possíveis configurações de $N_1 \times N_2$	54
5.3	Comparação entre Diretividade e Área para diferente configurações $N_1 \times N_2$ com o mesmo número de antena.	55
5.4	Solução encontrada pelo GA para cada posição de elemento de antena e sua respectiva projeção no plano- xy para $N = 6, 7$ e 8	57
5.5	A evolução da posição dos elementos de antena e a distribuição de (x_{mn}, y_{mn}) ao longo das gerações do GA para $N = 8$	57
5.6	Diretividade e o valor da função objetivo ao longo das gerações do GA para $N = 6, 7$ e 8 . Por comparação a ULA foi introduzida em a) e o limite inferior foi adicionado em b).	59
5.7	Comparação de Diretividade e Tempo de simulação entre OUPA, GA- <i>marginal</i> e GA- <i>stall</i> com o aumento de N	62

Lista de Tabelas

2.1	Configuração dos Parâmetros utilizados nas Simulações Numéricas.	23
2.2	Valores de diretividade em redes de antenas com $N = 10$ utilizando (2.44) e integração numérica.	27
2.3	Valores de diretividade em redes de antenas com $N = 10$ utilizando (2.61) e integração numérica.	30
4.1	Valores adotados nesta seção.	39
5.1	Configuração dos Parâmetros de Simulação para o problema da Maximização da Diretividade	52
5.2	Configuração da Simulação	56
5.3	Parâmetro alterados no GA- <i>marginal</i>	60
5.4	Comparação de Diretividade para pequenos valores de N	61
5.5	Configuração dos Parâmetros	63

Lista de Abreviaturas

- 1-D** Unidimensional (*One-Dimensional*)
- 3-D** Tridimensional (*Three-Dimensional*)
- 5G** Quinta Geração de Telefonia Móvel (*Fifth Generation*)
- AF** Fator de Conjunto (*Array Factor*)
- AoA** Ângulo de Chegada (*Angle of Arrive*)
- AoD** Ângulo de Partida (*Angle of Departure*)
- BS** Estação Base (*Base Station*)
- EF** Fator de Elemento (*Element Factor*)
- GA** Algoritmo Genético (*Genetic Algorithm*)
- mDE** Evolução Diferencial Memética (*Memetic Differential Evolution*)
- MIMO** Múltiplas Entrada e Múltiplas Saídas (*Multiple-Input Multiple-Output*)
- M-MIMO** MIMO massivo (*massive MIMO*)
- MOO** Otimização Multi-Objetivo (*Multi Objective Optimization*)
- MSE** Erro Quadrático Médio (*Mean Squared Error*)
- MVPA** Algoritmo do Jogador Mais Valioso (*Most Valuable Player Algorithm*)
- NSGA-II** Algoritmo Genético de Ordenação Não Dominado II (*Nondominated Sorting Genetic Algorithm II*)
- OF** Função Objetivo (*Objective Function*)
- OUPA** Rede Uniforme Planar Ótimo (*Optimal Uniform Planar Array*)
- RTT** Retículo de Triângulos Regulares (*Rectangular Triangular Tiling*)
- SEV** Avaliação e Validação Sucessiva (*Successive Evaluation and Validation*)
- UCA** Rede Uniforme Circular (*Uniform Circular Array*)

UHPA Rede Uniforme Planar Hexagonal (*Uniform Hexagonal Planar Array*)

ULA Rede Uniforme Linear (*Uniform Linear Array*)

UPA Rede Uniforme Planar (*Uniform Planar Array*)

VAA Rede de Antenas Virtuais (*Virtual Array Antennas*)

Convenções e Lista de Símbolos

Na notação das fórmulas, as seguintes convenções foram utilizadas:

- letras maiúsculas em negrito expressam matrizes, exemplo: \mathbf{P} e \mathbf{R}_v ;
- letras minúsculas em negrito representam vetores, exemplo: \mathbf{p} e $\boldsymbol{\alpha}$;
- letras em itálico indicam escalares, exemplo: λ e θ ;
- $\Gamma(\cdot)$ é a função gama de Euler;
- $J_0(\cdot)$ é a Função de Bessel de primeira espécie.
- $\mathcal{B}(\cdot)$ é a Função Beta.
- \mathbb{Z}^+ representa o conjunto dos números inteiros e positivos.
- $v_1 \bullet v_2$ representa o produto escalar entre os vetores v_1 e v_2 .

Principais símbolos utilizados ao longo deste trabalho, por ordem de aparição:

Símbolo	Descrição
θ	Ângulo de Elevação em coordenadas esféricas
ϕ	Ângulo de Azimute em coordenadas esféricas
Υ	Padrão de Radiação
Υ_e	Fator de Elemento
u, v	Expoentes do Fator de Elemento generalizado
Υ_a	Fator de Array
N	Numero total de antenas
A_n	Amplitude de cada Elemento de Antena
α_n	Fase de cada Elemento de Antena
k	Número de Onda da portadora
λ	Comprimento de Onda da portadora
α_r	Vetor Unitário de um ponto de observação
\mathbf{p}_n	Vetor de Posição de cada elemento de Antena

continua...

Símbolo	Descrição
x_n	Coordenada do eixo x de \mathbf{p}_n
y_n	Coordenada do eixo y de \mathbf{p}_n
z_n	Coordenada do eixo z de \mathbf{p}_n
\mathbf{P}	Matriz de Posição dos elementos de antena.
\mathcal{D}	Diretividade
\mathbf{p}_{\max}	Vetor que define os limites geométricos
f_1	Função do Numerador da Diretividade Geral
f_2	Função do Denominador da Diretividade Geral
f_1°	Função Numerador da Diretividade Omnidirecional
f_2°	Função Denominador da Diretividade Omnidirecional
d_{mn}	Distância Euclideana entre os elementos de antenas
\mathcal{G}	OF do principal problema de otimização
\mathcal{F}	Função cuja soma representa \mathcal{G}
$\mathcal{G}_{\text{Bound}}^N$	Valor limite de \mathcal{G} para um dado N
d_{\min}	Distância mínima entre os elementos de antenas
N_1	Número de antenas na Vertical na UPA.
N_2	Número de antenas na Horizontal na UPA.
\mathbf{R}_v	Matriz de Rotação para o plano de interesse.
\mathbf{P}_{xy}	Matriz de Posição desejada no plano- xy
c	Valor incremental utilizado no procedimento SEV
n_{vars}	Número de variáveis do procedimento GA
c_f	Fração de <i>Crossover</i>
g_{\max}	Número Máximo de gerações.
M_{Gaussian}	Função de Mutação Gaussiana
p_{size}	Tamanho da População do GA

- Palavras em *itálico* são usadas para designar expressões em língua inglesa que não foram traduzidas.

1 Introdução

Diferentes tipos de redes de antenas são considerados nos estudos de transmissão em sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*multiple-input multiple-output* - MIMO). Dada a sua capacidade de fornecer feixes diretivos com altos ganhos de antena, como visto em (ABOUDA; HAGGMAN, 2006), os efeitos de diferentes geometrias das redes de antenas, incluindo rede uniforme linear (*Uniform Regular Array* - ULA), rede uniforme circular (*Uniform Circular Array* - UCA), e rede uniforme planar (*Uniform Planar Array* - UPA) têm sido investigados em diferentes cenários e tipos de canal MIMO.

As redes de antenas podem oferecer muitas vantagens em flexibilidade e escalabilidade em relação às antenas convencionais. Tal fato está relacionado à capacidade de reconfiguração e adaptabilidade do diagrama da rede de antenas. Essas características permitem uma ampla gama de aplicações, incluindo: comunicações por radar, comunicações via satélite, comunicações sem fio, radioastronomia, sensoriamento remoto, estimativa de direção de chegada (*Angle of Departure* - DoA), entre outras.

Além disso, redes com grandes quantidades de antenas têm sido estudadas para diversas aplicações. Cenário este que possibilita alcançar a condição MIMO de larga escala (*Massive MIMO* - M-MIMO), configuração que se mostra adequada para se atingir elevadas eficiências espectral e energética. De fato, a tecnologia M-MIMO foi identificada como uma das tecnologias promissoras para atender os requisitos de rede 5G (AGIWAL; SAXENA, 2016) uma vez que proporciona uma melhoria considerável da diretividade e ganhos de antena em comparação com o MIMO convencional.

O uso de uma estação rádio-base (*Base Station* - BS) com uma grande quantidade de antenas pode atender um amplo número de usuários simultaneamente, economizando os escassos recursos de frequência, tempo de transmissão e energia (MBEUTCHA W. FAN; PEDERSEN, 2016). Verifica-se que com o aumento do número de antenas em uma BS, a capacidade da rede é substancialmente melhorada em cenários multiusuários. Além de proporcionar melhorias relacionada à taxa

de transferência, à confiabilidade de *links*, ao desempenho de eficiência espectral e de transmissão de energia, enquanto garante um processamento de sinal mais simples.

Configurações multidimensionais (3-D e 2-D) de elementos de antena são adequadas para M-MIMO uma vez que configurações unidimensional (1-D redes lineares) para sistemas de comunicação com um grande número de antenas acabariam ocupando um espaço significativo, além de apresentarem restrições de área efetiva (*aperture array*) (ADNAN; ALAM, 2017).

O aprimoramento da diretividade da rede de antenas é desejável dado que o incremento nos valores de diretividade da rede contribui para a melhoria da eficiência energética do sistema de comunicação, sendo a intensidade do sinal aumentada nos ângulos desejados. Comumente, o diagrama de radiação de um único elemento fornece pequenos valores de diretividade. Entretanto, redes de antenas produzem ganhos na diretividade sem aumentar o tamanho dos elementos de forma individual. Este ganho pode ser gerado através do controle e otimização de algumas características da rede, incluindo o número de elementos da rede, o espaçamento entre os elementos de antenas, os coeficientes de excitação, a fase relativa, a configuração geométrica das redes em geral (linear, circular, elíptica etc) e o fator de elemento de cada antena (BALANIS, 2012).

No entanto, a expressão analítica para a diretividade de tais redes de antenas não pode ser facilmente encontrada. Em (NUTTALL; CRAY, 2001) foram obtidas aproximações para a diretividade de redes de antenas lineares, abertura planar e volumétrica, sendo necessário a aplicação de métodos numéricos para tais cálculos. O custo computacional associado aumenta com a dimensão da geometria da matriz e o número de elementos da rede. Sendo assim, nas últimas décadas, várias tentativas foram feitas para obter e avaliar a diretividade analiticamente. Expressões de diretividade de forma fechada foram propostas em (HAUPT, 2010) para redes lineares equipadas com elementos de antena isotrópica. Expressão para a diretividade em redes de antenas lineares simétricas com elementos do tipo dipolo curto foi proposta em (WERNER; WERNER, 1999). Além disso, em (SINGARAJU, 1975) foram analisadas redes de antenas circulares e elípticas, formando um anel único, equipadas com elementos isotrópicos, enquanto que redes retangulares e planares com escalonamento progressivo foram tratadas recentemente em (BHATTACHARYYA, 2010). Além disso, uma expressão analítica e generalizada de diretividade para redes de antenas planares foi proposta em (DAS D. MANDAL; GHOSHAL, 2013b) e (DAS D. MANDAL; GHOSHAL, 2013a). Mais recentemente, uma expressão generalizada para diretividade em antenas volumétricas usando

séries infinitas foi apresentada (DAS D. MANDAL; KAR, 2017).

Dada a dificuldade de se encontrar a expressão analítica exata para a diretividade em redes de antenas generalizadas, a sua otimização continua sendo um tópico pouco estudado, especialmente nos casos em que a posição do elemento da antena é considerada como uma variável. De fato, a escolha da posição dos elementos de antena como um parâmetro a ser otimizado pode ser justificada pelo conceito de virtualização de rede, em que elementos de antenas cooperam entre si formando um arranjo de antenas virtual (*Virtual Array Antenna - VAA*), geralmente com melhor desempenho em termos de diretividade que o arranjo físico regular de antenas pode propiciar.

Trabalhos recentes têm lidado com o *design* de antenas lineares esparsas, por exemplo, o algoritmo determinístico proposto em (ANGELETTI; TOSO, 2014), em que a diretividade é maximizada. Em (ANGELETTI; RUGGERINI, 2014) os autores projetaram uma rede de antenas espaçadas regularmente no formato circular planar, na qual as posições e dimensões dos elementos são otimizadas conjuntamente. Já em (BOUCHEKARA A. ORLANDI; PAULIS, 2018) uma série de antenas circulares são analisadas em termos de níveis máximos de lóbulos laterais (*Side Lobe Level - SLL*), sendo aplicada uma abordagem metaheurística denominada Algoritmo de Jogador mais Valioso (*Most Valuable Player Algorithm - MVPA*) na melhoria da diretividade. Por sua vez, os autores em (DIAO; WARNICK, 2017) investigaram a minização do SLL concomitante à maximização da eficiência de abertura diretamente aplicável a redes de antenas aperiódicas. Já a abordagem Otimização Multiobjetivo (*Multi-Objective Optimization - MOO*) é utilizada no trabalho (GOUDOS K. A. GOTSIS; SAHALOS, 2036) a fim de projetar eficientemente uma rede altamente diretiva a partir de subconjuntos de redes de antena lineares. Os autores empregaram o algoritmo heurístico baseado em Evolução Diferencial Memética (*Memetic Differential Evolution - mDE*) para auxiliar na otimização da diretividade da rede de antenas resultante.

Seguindo a mesma direção de pesquisa, os autores em (JAYAPRAKASAM S. K. ABDUL RAHIM; YUSOF, 2014; JAYAPRAKASAM S. K. ABDUL RAHIM; ETENG, 2017) utilizaram métodos multiobjetivo-metaheurísticos visando otimizar o padrão de feixe a partir do projeto de um *beamforming* de forma colaborativa. O algoritmo heurístico Genético de Ordenação Não Dominante II (*Nondominated Sorting Genetic Algorithm II - NSGA-II*), foi utilizado para este fim. Existem muitos outros trabalhos que estudaram soluções MOO e/ou metaheurísticas para o aperfeiçoamento da diretividade em redes de antenas, tais como (REDDY R. B. KUMAR; GANGWAR, 2018), (REZAGHOLI; MOHAJERI, 2016), (SALEEM M. M. AHMED; AH-

MED, 2016), (SWAIN; MANGARAJ, 2016) e (YANG; KIANG, 2015).

Arranjos de redes esféricas são examinados em (KUMAR C. KUMAR; SRINIVASAN, 2017). Um padrão de radiação ideal é gerado usando um arranjo esférico em fases, enquanto que em (HUANG; CHEN, 2016) é proposta uma técnica baseada em mudanças no subespaço com o objetivo de melhorar a diretividade de uma UCA omnidirecional. Além disso, uma abordagem interessante para obter o melhor conjunto de feixes diretivos foi proposta em (TRUCCO; CROCCO, 2014), implantando o conceito de maximização da diretividade generalizada. Este conceito é baseado no padrão de potência média do feixe, que é crucial na avaliação e otimização do desempenho de matrizes de diretividade sujeitas a imperfeições de matriz e incompatibilidade de sensor.

1.1 Contribuição e Organização da Dissertação

Neste trabalho de Dissertação de Mestrado, uma nova expressão generalizada para a diretividade em redes de antenas, considerando padrão de elemento generalizado, bem como o emprego de redes volumétricas e arbitrárias, é obtida analiticamente e extensivamente corroborada via exemplos e análise numérica. Em seguida, é realizada a formulação de um problema de otimização para maximização de diretividade baseada na nova expressão encontrada. A novidade desta formulação consiste em assumir que as coordenadas de posição de cada elemento de antena sejam as variáveis de otimização no espaço de busca dado pelo paralelepípedo centrado na origem e limitado por $[x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}]$. Em seguida, o problema é simplificado para o cenário omnidirecional, com uma interpretação geométrica restrita a uma equação no plano dependente da direção desejada (θ_0, ϕ_0) para a obtenção da posição ótima de cada elemento de antena. Propõe-se ainda um novo método baseado na geometria de uma rede uniforme planar (UPA), o qual resulta em uma solução expedita. Mais especificamente, a técnica proposta consiste em alocar as antenas no plano de interesse, e a partir das propriedades geométricas da UPA é desenvolvido um sub-problema de otimização para encontrar a distância mínima ótima entre os elementos das antenas d_{\min} , que assim produza os maiores ganhos possíveis na diretividade. Este método é denominado Rede Uniforme Planar Ótimo (*Optimal Uniform Planar Array* - OUPA).

Finalmente, tendo em vista demonstrar a eficiência e eficácia do método proposto, recorreu-se ao método baseado na otimização heurística genética (*Genetic Algorithm* - GA) para resolver paralelamente o problema do aprimoramento de diretividade em redes volumétricas. Ambos as técnicas demonstraram melhorias

significativas nos ganhos de diretividade no ângulo de partida desejado (AoD), quando comparados com redes de antenas geométricas convencionais (ULA e UCA) e possivelmente também para cenários mais complexos ($\forall u, v$, não avaliados sistematicamente).

Este texto de Dissertação está organizado em seis capítulos. Além deste capítulo introdutório, o restante do texto está estruturado da seguinte maneira:

- **Capítulo 2:** Trata de forma geral os princípios básicos de padrão de radiação e diretividade para uma rede genérica de antenas. A partir dessas definições as novas expressões propostas para a diretividade são detalhadamente deduzidas e então uma etapa de validação numérica extensiva utilizando cenários de aplicação de interesse é realizada, a fim de corroborar a consistência das expressões analíticas proposta.
- **Capítulo 3:** Neste capítulo é formalmente formulado o problema de otimização para a diretividade em redes de antenas generalizados. No entanto, por razões de simplicidade, o cenário omnidirecional é adotado e suas respectivas simplificações e interpretações geométricas são desenvolvidas. Além disso é proposto o novo método OUPA, capaz de gerar soluções expeditas para o problema de otimização em questão.
- **Capítulo 4:** Neste capítulo é apresentado a descrição e aplicação do algoritmo heurístico GA e suas configurações de parâmetros iniciais para o problema de diretividade em redes de antenas volumétricas. Além disso são apresentados os resultados numéricos comparados considerando as duas metodologias, em termos de diretividade e tempo computacional.
- **Capítulo 5:** Neste capítulo, as considerações finais e conclusões relativas ao trabalho de Dissertação realizado são apresentadas .

2 Expressão para a Diretividade na Forma Fechada

Desenvolve-se neste Capítulo a expressão para a diretividade generalizada na sua forma analítica. A validade da nova expressão é corroborada numericamente considerando distintos valores para os expoentes $v, u \in \{0; 1\}$ e $N = 10$ elementos de antenas distribuídos no espaço 3-D.

2.1 Diagrama de Irradiação de uma Rede

Com o objetivo de facilitar a representação dos diagramas de irradiação, podendo levar a simplificações das expressões analíticas associadas à diretividade, o sistema de coordenadas selecionado neste trabalho foi o esférico, definido da seguinte forma, Fig. 2.1:

Elemento de antena : Antena •

ângulo de azimute : $\phi \in [0; 2\pi]$

ângulo de elevação : $\theta \in [0; \pi]$

$$x_n = f(\phi, \theta) = \sin \theta \cos \phi$$

$$y_n = g(\phi, \theta) = \sin \theta \sin \phi$$

$$z_n = h(\phi, \theta) = \cos \theta$$

O campo total de uma rede de antenas pode ser encontrada pelo *princípio da multiplicação de padrão*, que afirma: "O padrão de irradiação de uma rede de N elementos de antena idênticos é igual ao produto do diagrama de irradiação de um elemento ($\Upsilon_e(\theta, \phi)$) com o diagrama da rede ($\Upsilon_a(\theta, \phi)$) formado por antenas isotrópicas cada qual localizada no centro de fase da fonte individual" (ULABY, 1997). Portanto, podemos escrever o diagrama de irradiação de uma rede de antenas como sendo:

$$\Upsilon(\theta, \phi) = \Upsilon_e(\theta, \phi)\Upsilon_a(\theta, \phi) \quad (2.1)$$

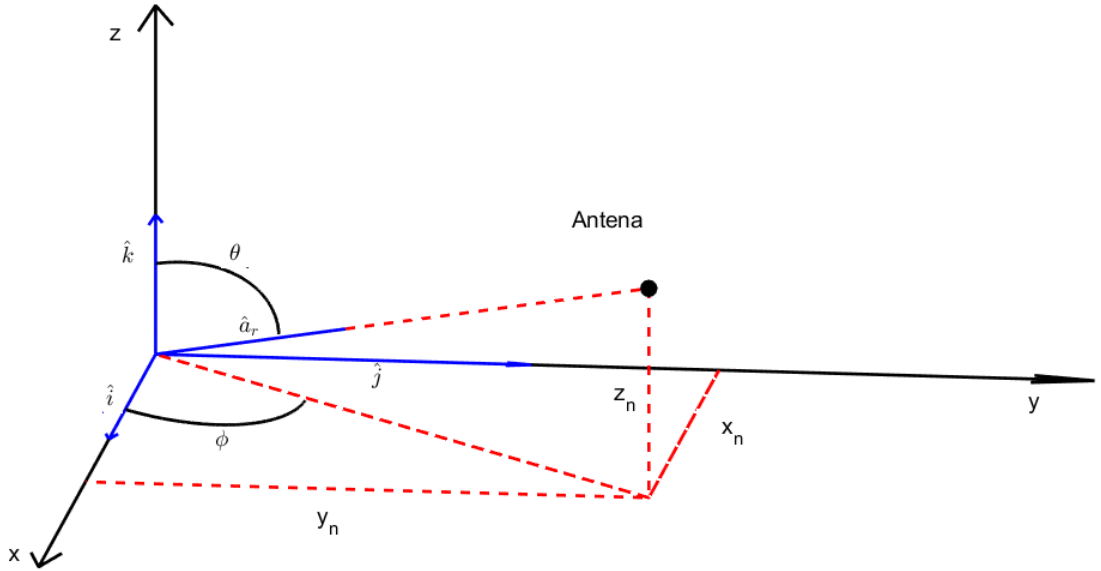


Figura 2.1: Nomenclatura e representação geométrica para a rede de antenas utilizando-se o sistema de coordenadas esféricas. Fonte: [Elaborada pelo Autor]

O Fator de Elemento (*Element Factor* - EF), também conhecido como padrão do elemento, é o diagrama de irradiação de um elemento de antena (ponto ●, Fig. 2.1), sendo que o modelo escolhido para essa representação deve assemelhar-se a uma antena real. Ao serem utilizadas coordenadas esféricas, o EF pode ser descrito utilizando funções trigonométricas, utilizando as variáveis ϕ e θ . Considerando isso, neste trabalho será analisado inicialmente o fator de elemento generalizado dado por:

$$\Upsilon_e(\theta) = \sin^u \theta \cos^v \theta, \quad (2.2)$$

e posteriormente analisado o caso especial do dipolo de meia-onda, o qual ao ser expresso na forma exata não pode ser representado por (2.2). De fato, mesmo não sendo possível representar o dipolo de meia-onda de forma exata para diferentes combinações de valores inteiros de u e v , ainda assim são possíveis as representações de diversas antenas. Neste trabalho de dissertação, a expressão generalizada para a diretividade, considerando diferentes valores de u e v , será investigada sistematicamente.

O Fator de Conjunto (*Array Factor* - AF) quantifica o efeito de combinação dos elementos de irradiação na rede, considerando o fator de elemento como sendo isotrópico ($\Upsilon_e = 1$). Este fator é impactado pelos valores de posição, fase e amplitude relativos de cada antena, podendo ser escrito como:

$$\Upsilon_a(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^N A_n e^{j(\alpha_n + k \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{a}_r)}, \quad (2.3)$$

em que N é o número de elementos da rede de antenas, A_n é a amplitude relativa

do n -ésimo elemento, α_n é a fase relativa do n -ésimo elemento, k é o número de onda da portadora, o qual possui uma relação direta com o a frequência (f) da portadora e portanto inversa com o comprimento de onda (λ):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} \quad (2.4)$$

sendo c a velocidade da luz; ademais, o operador \bullet representa o produto escalar dos vetores, o parâmetro \mathbf{a}_r é o vetor unitário de um ponto de observação em coordenadas esféricas, definido por:

$$\mathbf{a}_r = \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{j} + \cos(\theta) \hat{k} \quad (2.5)$$

e por fim, \mathbf{p}_n é o vetor de posição do n -ésimo elemento que é dado por:

$$\mathbf{p}_n = x_n \hat{i} + y_n \hat{j} + z_n \hat{k} \quad (2.6)$$

desta forma, podemos definir o conjunto das posições de todos os N elementos da rede de antenas de acordo com a matriz abaixo:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Em que a matriz \mathbf{P} ($N \times 3$) representa a localização de todos os elementos da rede de antenas no espaço 3-D.

2.2 Expressão da Diretividade de Forma Fechada para uma Rede Volumétrica de Antena

Quando uma antena não irradia sua potência de forma isotrópica, *i.e.*, igualmente em todas as direções, conclui-se que ela possui diretividade. O que pode ser desejável dependendo da aplicação, como por exemplo em cenários em que é desejável irradiar potência em certas direções em detrimento de outras¹. Em uma rede de antenas, a diretividade resulta das interferências construtivas e destrutivas dos radiadores, *i.e.*, dos elementos que compõe a rede de antenas.

A diretividade determina a razão entre a densidade de potência irradiada em uma designada direção (θ_0, ϕ_0) pela intensidade média de irradiação em todas as

¹Evitando a interferência de múltiplo acesso entre usuários devido às distintas localizações geográficas dos receptores.

direções, sendo escrita como:

$$\mathcal{D}(\theta_0, \phi_0) = \frac{|\Upsilon(\theta_0, \phi_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\Upsilon(\theta, \phi)|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi} \quad (2.8)$$

O numerador da expressão da diretividade é bem definido para um ângulo desejado (θ_0, ϕ_0) utilizando (2.1). Portanto, o desafio em encontrar a expressão da diretividade na forma fechada consiste em resolver a integral dupla em (2.8):

$$\mathcal{T} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\Upsilon(\theta, \phi)|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (2.9)$$

A intensidade de irradiação pode ser escrita considerando (2.2) e utilizando (2.3), (2.5) e (2.6):

$$|\Upsilon(\theta, \phi)|^2 = \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) \left[\sum_{n=1}^N A_n^2 + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos[\Omega_{nm}(\theta, \phi, n, m)] \right] \quad (2.10)$$

em que:

$$\Omega_{nm}(\theta, \phi, n, m) = [x_{nm} \sin \theta \cos \phi + y_{nm} \sin \theta \sin \phi + z_{nm} \cos \theta] + \alpha_{nm}, \quad (2.11)$$

e

$$x_{mn} = k(x_n - x_m), \quad y_{mn} = k(y_n - y_m), \quad (2.12)$$

$$z_{mn} = k(z_n - z_m), \quad \alpha_{mn} = (\alpha_n - \alpha_m). \quad (2.13)$$

Portanto, a primeira integral em (2.9) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\Upsilon(\theta, \phi)|^2 d\phi \quad (2.14) \\ &= \frac{1}{4\pi} \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^N A_n^2 d\phi}_{\Lambda} + 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos[\Omega_{mn}(\theta, \phi, n, m)] d\phi}_{\Xi} \right] \end{aligned}$$

As duas integrais em (2.14) serão resolvidas nas próximas subseções.

2.2.1 Resolução da Integral Λ

O resultado da Integral Λ pode ser encontrado de forma imediata, sendo dado por:

$$\Lambda = \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \sum_{n=1}^N A_n^2 \quad (2.15)$$

2.2.2 Resolução da integral Ξ

Para auxiliar na resolução dessa integral vamos definir as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} a_{mn} &= x_{mn} \sin \theta; \\ b_{mn} &= y_{mn} \sin \theta; \\ c_{mn} &= z_{mn} \cos \theta + \alpha_{mn}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dessa forma, a integral pode ser reescrita como:

$$\Xi = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \int_0^{2\pi} \cos(a_{mn} \cos \phi + b_{mn} \sin \phi + c_{mn}) d\phi \quad (2.17)$$

Esta integral possui uma solução conhecida; utilizando-se a plataforma Wolfram (WOLFRAM, 2020), foi encontrado que:

$$\Xi = 4\pi \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(c_{mn}) J_0 \left(\sqrt{a_{mn}^2 + b_{mn}^2} \right) \quad (2.18)$$

considerando $\sqrt{a_{mn}^2 + b_{mn}^2} \in \mathbb{R}$ e $J_0(\cdot)$ a Função de Bessel de primeira espécie. Substituindo os valores de a_{mn} , b_{mn} e c_{mn} , obtém-se:

$$\Xi = 4\pi \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(z_{mn} \cos \theta + \alpha_{mn}) J_0 \left(\sin \theta \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2} \right) \quad (2.19)$$

para $\sin \theta \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2} \in \mathbb{R}$.

Portanto, sendo o termo $\sin \theta$ sempre real, para que (2.19) seja válida, é necessário que a restrição a seguir seja respeitada:

$$\sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2} = k \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Assim, dado que o termo acima é real, pelo fato de que x_n , y_n , x_m e y_m são coordenadas das posições dos elementos de antenas da rede, k é o número de onda, eq. (2.4), sendo também real, pode-se concluir que (2.19) é válida.

Finalmente, a expressão (2.14) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{1}{2} \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) [\Lambda + \Xi] \\ &= \frac{1}{2} \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) \left[\sum_{n=1}^N A_n^2 + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(z_{mn} \cos \theta + \alpha_{mn}) J_0(\gamma_{mn}) \right],\end{aligned}\quad (2.21)$$

sendo $\gamma_{mn} = \sin \theta \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2}$. Desta forma, a diretividade pode ser escrita como:

$$\mathcal{D}(\theta_0, \phi_0) = \frac{|\Upsilon(\theta_0, \phi_0)|^2}{\mathcal{T}} = \frac{|\Upsilon(\theta_0, \phi_0)|^2}{\int_0^\pi \mathcal{F} \sin(\theta) d\theta}.\quad (2.22)$$

A partir do resultado em (2.21), a integral em (2.22) pode ser reescrita como uma soma de integrais:

$$\mathcal{T} = \int_0^\pi \mathcal{F} \sin(\theta) d\theta = \zeta + \xi\quad (2.23)$$

Em que:

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_0^\pi \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) \sin \theta d\theta \\ \xi &= \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \int_0^\pi \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) \cos(z_{mn} \cos \theta + \alpha_{mn}) J_0(\gamma_{mn}) \sin \theta d\theta\end{aligned}\quad (2.24)$$

A resolução da integral ζ foi encontrada utilizando a plataforma de desenvolvimento da Wolfram (WOLFRAM, 2020), resultando em:

$$\zeta = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^N A_n^2 [(-1)^{2v} + 1] \cdot \mathcal{B}\left(u + 1, v + \frac{1}{2}\right),\quad (2.25)$$

sendo $\mathcal{B}(\cdot)$ a função Beta.

O resultado acima é válido e real para $u > -1$ e $v > -\frac{1}{2}$, de forma que $u \in \mathbb{R}$ e $v = \frac{q}{2}$, para $q \in \mathbb{Z}$.

Focando agora na integral ξ , podemos definir $\beta = \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2}$ e utilizar a seguinte substituição trigonométrica:

$$\cos(\theta) = x\quad (2.26)$$

O que implica em:

$$-\sin \theta d\theta = dx, \quad (2.27)$$

$$\sin(\theta) = \sqrt{1 - x^2}. \quad (2.28)$$

Essas alterações modificam os intervalos da integral da seguinte maneira:

$$\theta = 0 \rightarrow x = \cos(0) = 1, \quad (2.29)$$

$$\theta = \pi \rightarrow x = \cos(\pi) = -1. \quad (2.30)$$

Utilizando essas substituições em ξ , temos que:

$$\xi = \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \int_1^{-1} x^{2v} (1 - x^2)^u \cos(z_{mn}x + \alpha_{mn}) J_0\left(\beta\sqrt{1 - x^2}\right) dx. \quad (2.31)$$

Empregando a expansão da soma de arcos do cosseno, a expressão pode ser reescrita como:

$$\xi = \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m [\cos(\alpha_{mn})\rho_1 + \sin(\alpha_{mn})\rho_2], \quad (2.32)$$

em que

$$\rho_1 = \int_{-1}^1 x^{2v} (1 - x^2)^u \cos(z_{mn}x) J_0\left(\beta\sqrt{1 - x^2}\right) dx, \quad (2.33)$$

$$\rho_2 = \int_{-1}^1 x^{2v} (1 - x^2)^u \sin(z_{mn}x) J_0\left(\beta\sqrt{1 - x^2}\right) dx. \quad (2.34)$$

Assumindo $v \in \mathbb{Z}$, podemos analisar a paridade dos termos que compõem as funções, que são argumento da integral da seguinte forma:

$$\underbrace{x^{2v}}_{\text{par}} \underbrace{(1 - x^2)^u}_{\text{par}} \underbrace{\cos(z_{mn}x)}_{\text{par}} \underbrace{J_0\left(\beta\sqrt{1 - x^2}\right)}_{\text{par}} \rightarrow \text{Função par} \quad (2.35)$$

$$\underbrace{x^{2v}}_{\text{par}} \underbrace{(1 - x^2)^u}_{\text{par}} \underbrace{\sin(z_{mn}x)}_{\text{ímpar}} \underbrace{J_0\left(\beta\sqrt{1 - x^2}\right)}_{\text{par}} \rightarrow \text{Função Ímpar}$$

Portanto, para o intervalo simétrico da integral (2.34), podemos concluir que $\rho_2 = 0$. Já para a integral ρ_1 , que possui o mesmo intervalo, conclui-se que o seu valor será o dobro da mesma integral avaliada apenas no intervalo positivo.

Desta forma, podemos escrever que:

$$\xi = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) \int_0^1 x^{2v} (1-x^2)^u \cos(z_{mn}x) J_0(\beta\sqrt{1-x^2}) dx \quad (2.36)$$

Além disso, considerando $u \in \mathbb{Z}$, podemos reescrever (2.60) utilizando o binômio de Newton como:

$$\xi = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N \sum_{\kappa=0}^u (-1)^{(u+\kappa)} A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(\alpha_{mn}) \int_0^1 x^{2(v+u-\kappa)} \cos(z_{mn}x) J_0(\beta\sqrt{1-x^2}) dx \quad (2.37)$$

Para resolver a integral (2.37) considere a seguinte integral, encontrada em (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014):

$$\int_0^a \cos(cx) J_0(b\sqrt{a^2-x^2}) dx = \frac{\sin(a\sqrt{b^2+c^2})}{\sqrt{b^2+c^2}}, \quad (2.38)$$

para $b \geq 0$.

Agora, considerando $a = 1$, podemos escrever que:

$$\frac{\partial^{2v}}{\partial c^{2v}} \left[\int_0^1 \cos(cx) J_0(b\sqrt{1-x^2}) dx \right] = (-1)^v \int_0^1 x^{2v} \cos(cx) J_0(b\sqrt{1-x^2}) dx \quad (2.39)$$

Substituindo (2.38) em (2.39) pode-se obter que:

$$\int_0^1 x^{2v} \cos(cx) J_0(b\sqrt{1-x^2}) dx = (-1)^v \frac{\partial^{2v}}{\partial c^{2v}} \left[\frac{\sin(\sqrt{b^2+c^2})}{\sqrt{b^2+c^2}} \right] \quad (2.40)$$

Portanto, utilizando o resultado acima, (2.37) a expressão pode ser reescrita como:

$$\xi = 2 (-1)^{(v+2u)} \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N \sum_{\kappa=0}^u A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(\alpha_{mn}) \frac{\partial^{2(v+u-\kappa)}}{\partial z_{mn}^{2(v+u-\kappa)}} \left[\frac{\sin(\sqrt{\beta^2+z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2+z_{mn}^2}} \right] \quad (2.41)$$

Para $\beta \geq 0$, temos que $\beta = \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2}$, o que de fato é sempre positivo e real. Validando, portanto, a equação acima.

Por fim, considerando a simplificação na expressão ζ gerada pelo fato de

$v \in \mathbb{Z}$, o valor de \mathcal{T} dado em (2.23) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N A_n^2 \mathcal{B} \left(u + 1, v + \frac{1}{2} \right) + \\ & 2 (-1)^{(v+2u)} \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N \sum_{\kappa=0}^u A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(\alpha_{mn}) \frac{\partial^{2(v+u-\kappa)}}{\partial z_{mn}^{2(v+u-\kappa)}} \left[\frac{\sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Em que:

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2}, \\ u &> -1, \quad v > -\frac{1}{2}, \quad \text{e } u, v \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (2.43)$$

As restrições em relação a u e v podem ser facilmente definidas como $u, v \in \mathbb{Z}^+$.

Com este último resultado, podemos finalmente escrever a expressão da diretividade de uma rede volumétrica de antenas em (2.44), a qual representa uma nova expressão analítica generalizada para a diretividade de redes de antenas.

Dado que a expressão de diretividade proposta não utiliza nenhuma aproximação, espera-se que o resultado encontrado seja exato. Além disso, tal expressão não requer a estimação e integração numérica da superfície do padrão de irradiação. Portanto, o esforço computacional e consumo de tempo para o cálculo da expressão são mitigados.

$$\mathcal{D}(\theta_0, \phi_0) = \frac{\sin^{2u}(\theta_0) \cos^{2v}(\theta_0) \left[\sum_{n=1}^N A_n^2 + \sum_{\substack{n=2 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos[\Omega_{xyz}(\theta_0, \phi_0, n, m)] \right]}{\frac{1}{4} \sum_{n=1}^N A_n^2 \mathcal{B}(u+1, v+\frac{1}{2}) + 2(-1)^{(v+2u)} \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N \sum_{\kappa=0}^u A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(\alpha_{mn}) \frac{\partial^{2(v+u-\kappa)}}{\partial z_{mn}^{2(v+u-\kappa)}} \left[\frac{\sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right]} \quad (2.44)$$

Em que:

$$\Omega_{mn}(\theta_0, \phi_0, n, m) = k[(x_n - x_m) \sin \theta_0 \cos \phi_0 + (y_n - y_m) \sin \theta_0 \sin \phi_0 + (z_n - z_m) \cos \theta_0] + (\alpha_n - \alpha_m)$$

$$\beta = k\sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2};$$

$$z_{mn} = k(z_n - z_m);$$

$$v, u \in \mathbb{Z}^+$$

2.3 Dipolo de Meia Onda

O dipolo de meia onda consiste em dois condutores com comprimento de um quarto de onda cada um, dispostos lado a lado. Portanto, o comprimento total de ponta-a-ponta do condutor como um todo é dado por $L = \lambda/2$.

O diagrama de irradiação deste condutor, em campo distante, pode ser aproximado pelo diagrama do *dipolo curto* (dipolo cujo comprimento é muito menor que $\lambda/2$), neste caso a expressão seria reduzida a $\Upsilon_e(\theta) = \sin(\theta)$. No entanto, vale a pena salientar que a semelhança ocorre apenas no diagrama de irradiação e não em outras características, como por exemplo a impedância de entrada.

A expressão exata do diagrama de irradiação de um dipolo de meia onda é dado por (SILVER, 1949):

$$\Upsilon_e(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}. \quad (2.45)$$

Na Fig. 2.2 é ilustrado o diagrama, no qual pode-se observar semelhança a um toroide. Assim, dada sua semelhança geométrica ao toroide, por questão de simplicidade, fica mais fácil percebermos que podemos considerar a aproximação do *dipolo curto* para o diagrama de irradiação deste condutor, cuja expressão é dada por $\sin(\theta)$.

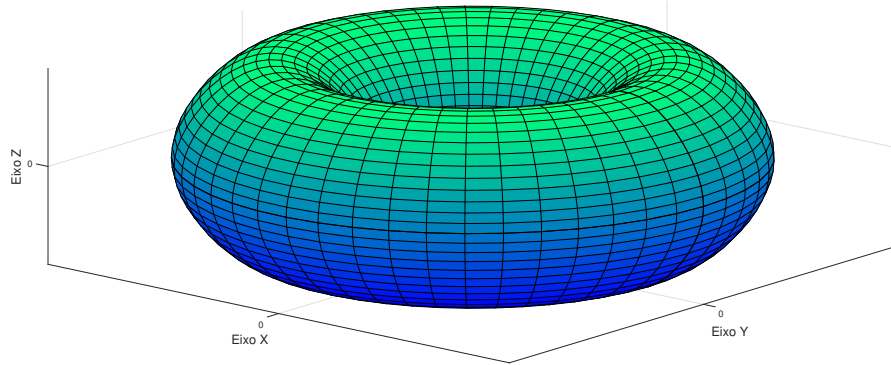


Figura 2.2: Diagrama de irradiação do dipolo de meia onda.

A seguir, utilizando a plataforma de simulação *4nec2* (4NEC2, 2020), é mostrado um corte do diagrama acima para $\phi = 0$, e foi adicionado em vermelho a representação física do dipolo que gera a irradiação.

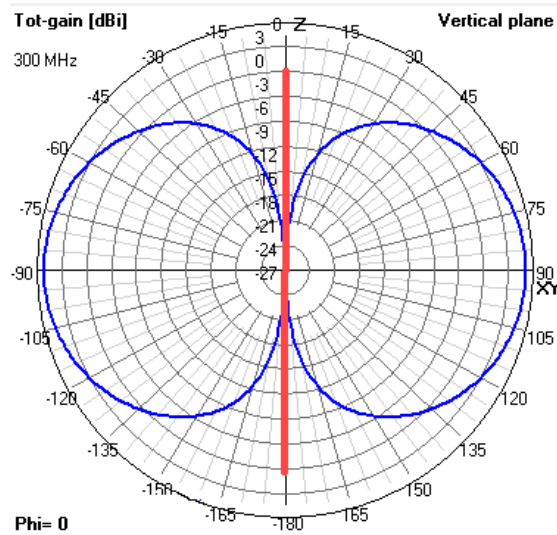


Figura 2.3: Diagrama de irradiação para $\phi = 0$ e a representação física do dipolo de meia onda.

Para fins de corroboração, na Fig. 2.4 é possível visualizar a semelhança entre o a intensidade do campo irradiado em uma direção preferencial de forma exata (2.45) e sua aproximação senoidal para o dipolo de meia onda, além disso, em preto é possível verificar a disposição física do dipolo:

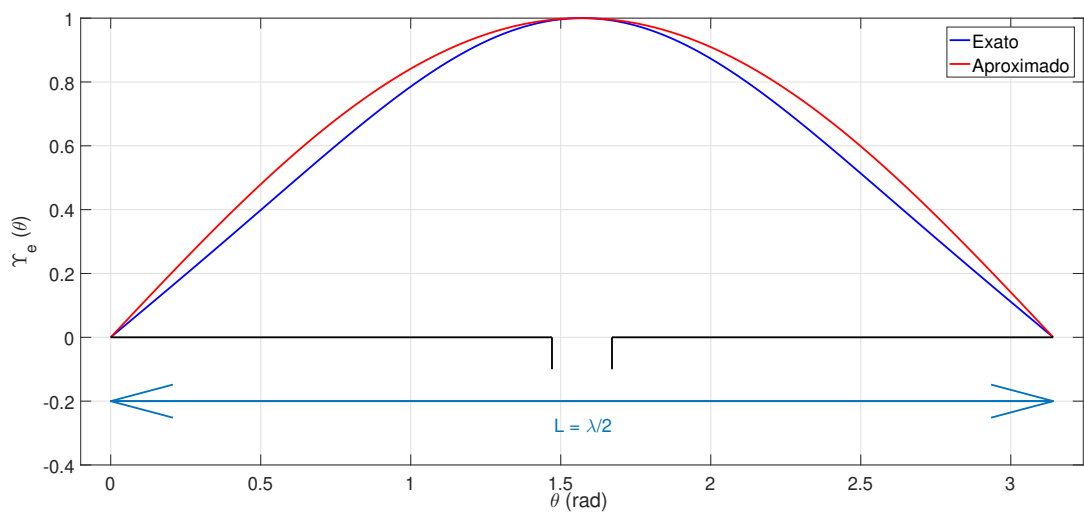


Figura 2.4: Diagrama de irradiação do dipolo de meia onda e sua aproximação $\sin \theta$.

O módulo do erro entre os dois diagrama de irradiação acima é mostrado na figura abaixo:

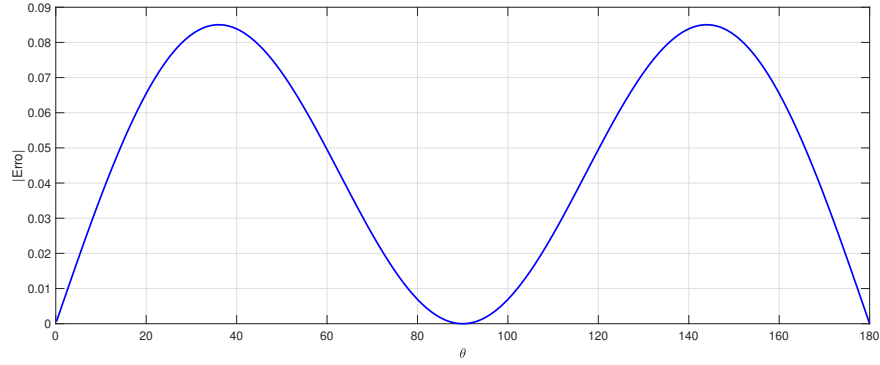


Figura 2.5: Módulo do erro entre o diagrama de irradiação de meia onda e sua aproximação senoidal.

Para a figura acima o erro máximo encontrado foi de:

$$\varepsilon_{max} = 0.0850 \quad (2.46)$$

Portanto, podemos concluir que essa aproximação possui uma boa acurácia em termos de diagrama de irradiação.

2.4 Expressão da Diretividade para Dipolos de Meia Onda

Apesar da expressão $\sin(\theta)$ ser uma boa aproximação para o diagrama de irradiação do dipolo de meia onda, nesta seção será deduzida a expressão da diretividade de forma fechada para uma rede volumétrica de dipolos de meia onda, com o intuito de encontrar uma nova expressão exata para essa configuração particular de antenas.

Como o fator de elemento em (2.45) não depende do ângulo ϕ , assim como (2.2), o desenvolvimento utilizado na dedução anterior pode ser parcialmente aproveitado. Portanto, o novo valor de \mathcal{F} é facilmente encontrado utilizando (2.21), sendo necessário modificar apenas o termo introduzido pelo novo fator de elemento, resultando:

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{2 \sin^2 \theta} \left[\sum_{n=1}^N A_n^2 + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(z_{mn} \cos \theta + \alpha_{mn}) J_0(\gamma_{mn}) \right]. \quad (2.47)$$

Desta forma, para encontrar a expressão da diretividade, como mostrado em (2.22), deve-se calcular a integral definida abaixo, a qual pode ser dividida na

soma de duas integrais:

$$\mathcal{T}_1 = \int_0^{\pi} \mathcal{F}_1 \sin(\theta) d\theta = \zeta_1 + \xi_1, \quad (2.48)$$

em que:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \sin \theta d\theta, \\ \xi_1 &= \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \cos(z_{mn} \cos \theta + \alpha_{mn}) J_0(\gamma_{mn}) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (2.49)$$

A resolução da integral ζ_1 foi encontrada utilizando a plataforma de desenvolvimento da Wolfram (WOLFRAM, 2020), resultando em:

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} (-\text{Ci}(2\pi) + \gamma^* + \ln 2\pi) \approx 1,21883, \quad (2.50)$$

sendo que $\text{Ci}(\cdot)$ é a função Cosseno Integral e γ^* é a constante de Euler-Mascheroni.

Para a resolução de ξ_1 , é definido novamente $\beta = \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2}$; portanto utiliza-se a mesma substituição trigonométrica proposta em (2.26), o que resulta em:

$$\xi_1 = \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \int_1^{-1} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos(z_{mn} x + \alpha_{mn}) J_0(\beta \sqrt{1-x^2})}{1-x^2} dx. \quad (2.51)$$

Empregando a expansão da soma de arcos do cosseno, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\xi_1 = \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m [\cos(\alpha_{mn}) \rho_3 + \sin(\alpha_{mn}) \rho_4], \quad (2.52)$$

$$\rho_3 = \int_{-1}^1 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos(z_{mn} x) J_0(\beta \sqrt{1-x^2})}{1-x^2} dx, \quad (2.53)$$

$$\rho_4 = \int_{-1}^1 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin(z_{mn} x) J_0(\beta \sqrt{1-x^2})}{1-x^2} dx. \quad (2.54)$$

As paridades dos termos que compõem os argumentos da integrais podem ser analisadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}_{\text{par}} \underbrace{(1-x^2)^{-1}}_{\text{par}} \underbrace{\cos(z_{mn}x)}_{\text{par}} \underbrace{J_0(\beta\sqrt{1-x^2})}_{\text{par}} \rightarrow \text{Função par}, \\
& \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}_{\text{par}} \underbrace{(1-x^2)^{-1}}_{\text{par}} \underbrace{\sin(z_{mn}x)}_{\text{ímpar}} \underbrace{J_0(\beta\sqrt{1-x^2})}_{\text{par}} \rightarrow \text{Função Ímpar}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Portanto, para o intervalo simétrico da integral (2.54), podemos concluir que $\rho_4 = 0$. Já para a integral ρ_3 , que possui o mesmo intervalo, conclui-se que o seu valor será o dobro da mesma integral avaliada apenas no intervalo positivo. Desta forma, pode-se escrever que:

$$\xi_1 = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) \int_0^1 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos(z_{mn}x) J_0(\beta\sqrt{1-x^2})}{1-x^2} dx, \tag{2.56}$$

A multiplicação de cossenos em (2.56), pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
& \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos(z_{mn}x) = \\
& \frac{1}{4} \left[\underbrace{\cos(z_{mn}x)}_{c_1} + \underbrace{\cos(z_{mn}x)}_{c_2} + \underbrace{\cos((z_{mn}-\pi)x)}_{c_3} + \underbrace{\cos((z_{mn}+\pi)x)}_{c_4} \right] \\
& = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \cos(c_k x)
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Portanto, (2.56) pode ser reescrita como:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) \sum_{k=1}^4 \int_0^1 \frac{\cos(c_k x) J_0(\beta\sqrt{1-x^2})}{1-x^2} dx. \tag{2.58}$$

Infelizmente, apesar das simplificações adotadas, não foi possível resolver a integral acima e portanto não foi possível encontrar sua expressão exata, no entanto, uma aproximação é possível ao considerar uma raiz quadrada no denominador da expressão, utilizando o resultado apresentado em (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014), temos que:

$$\int_0^a \frac{\cos(cx) J_\nu(b\sqrt{a^2-x^2})}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} J_{\frac{\nu}{2}} \left[\frac{a}{2}(\sqrt{b^2+c^2}+c) \right] J_{\frac{\nu}{2}} \left[\frac{a}{2}(\sqrt{b^2+c^2}-c) \right], \tag{2.59}$$

Assim, a partir deste resultado, podemos aproximar (2.58) como:

$$\xi_1 \approx \frac{\pi}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) \sum_{k=1}^4 J_0 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{\beta^2 + c_k^2} + c_k) \right] J_0 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{\beta^2 + c_k^2} - c_k) \right]. \quad (2.60)$$

A acurácia da expressão acima será analisada na próxima sessão.

Portanto, podemos escrever a aproximação da expressão para a diretividade com uma rede de dipolos de meia onda é como sendo (2.61).

$$\mathcal{D}(\theta_0, \phi_0) \approx \frac{\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} \cos \theta_0)}{\sin^2 \theta_0} \left[\sum_{n=1}^N A_n^2 + \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos[\Omega_{xyz}(\theta_0, \phi_0, n, m)] \right]}{\frac{1}{2} (-\text{Ci}(2\pi) + \gamma^* + \ln 2\pi) + \frac{\pi}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) \sum_{k=1}^4 J_0 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{\beta^2 + c_k^2} + c_k) \right] J_0 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{\beta^2 + c_k^2} - c_k) \right]}$$

(2.61)

com as seguintes definições:

$$\Omega_{mn}(\theta_0, \phi_0, n, m) = k [(x_n - x_m) \sin \theta_0 \cos \phi_0 + (y_n - y_m) \sin \theta_0 \sin \phi_0 + (z_n - z_m) \cos \theta_0] + (\alpha_n - \alpha_m);$$

$$\beta = k \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - r_m)^2};$$

$$z_{mn} = k(z_n - z_m);$$

$$c_1 = z_{mn};$$

$$c_2 = z_{mn};$$

$$c_3 = z_{mn} - \pi;$$

$$c_4 = z_{mn} + \pi.$$

2.5 Validação

A validação das expressões de diretividade proposta em (2.44) e (2.61) foi conduzida através de uma extensiva análise comparativa com integração numérica e utilizando-se um cenário de interesse prático.

2.5.1 Cenários

Todas as simulações e resultados seguem os parâmetros descritos na Tabela 2.1, que representa o mesmo cenário utilizado em (DAS D. MANDAL; KAR, 2017, Tab. I, Set 2). A direção escolhida (ângulos de azimute e elevação) para avaliar a diretividade foi $\theta_0 = 101.44^\circ$ e $\phi_0 = 267.75^\circ$, que representam a direção que maximiza a diretividade para fontes isotrópicas ($u = 0 | v = 0$) e os ângulos escolhidos para avaliar a expressão em (DAS D. MANDAL; KAR, 2017).

A diretividade foi calculada para diferentes valores de EF utilizando (2.44), além da comparação do resultado de diretividade obtido por integração numérica. No primeiro cenário, com fontes isotrópicas, é possível realizar a comparação e corroboração com os resultados encontrados em (DAS D. MANDAL; KAR, 2017).

Tabela 2.1: Configuração dos Parâmetros utilizados nas Simulações Numéricas.

Elemento	Localização do Elemento	Excitação Numérica	
n	$[x_n, y_n, z_n] \cdot \lambda$	A_n (normalizado)	α_n (graus)
1	[0.00, 0.00, 0.00]	0.84	-4.28
2	[2.71, 1.22, 1.06]	0.93	-121.36
3	[1.03, 4.77, 4.40]	0.13	-58.39
4	[5.31, 3.61, 2.45]	0.94	74.06
5	[0.52, 2.25, 1.71]	0.60	-112.04
6	[4.37, 3.07, 2.52]	0.10	169.73
7	[4.59, 2.51, 0.98]	0.29	-59.63
8	[4.84, 0.88, 1.16]	0.56	143.29
9	[0.92, 1.70, 5.21]	0.99	-94.67
10	[2.50, 1.12, 5.28]	1.00	124.53

λ : comprimento de onda da portadora

Os elementos dos fatores considerados incluem quatro configurações:

$$\Upsilon_e(\theta) = \sin^u(\theta) \cos^v(\theta) \equiv \begin{cases} 1 & v = 0 | u = 0 \\ \sin(\theta) & v = 0 | u = 1 \\ \cos(\theta) & v = 1 | u = 0 \\ \sin(\theta) \cos(\theta) & v = 1 | u = 1 \end{cases} \quad (2.62)$$

A expressão em forma fechada da diretividade pode ser descrita em termos de \mathcal{T} , dada em (2.20).

A seguir, para cada configuração (v, u) , apresenta-se a expressão para \mathcal{T} e respectivo valor de diretividade em [dBi] alcançada.

1. Diretividade para $v = 0 \mid u = 0$. Para tais valores de expoentes, o valor de \mathcal{T} é dado por:

$$\mathcal{T}_1 = \sum_{n=1}^N A_n^2 + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) \frac{\sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \quad (2.63)$$

2. Diretividade para $v = 1 \mid u = 0$. Para estes valores de expoentes, o valor de \mathcal{T} é dado por:

$$\mathcal{T}_2 = \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{3} - 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) \left[\frac{(\beta^2 - 2z_{mn}^2) \cos(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^2} - \frac{((\beta^2 - 2)z_{mn}^2 + \beta^2 + z_{mn}^4) \sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^{5/2}} \right] \quad (2.64)$$

3. Diretividade para $v = 0 \mid u = 1$. Para tais valores de expoentes, o valor de \mathcal{T} é dado por:

$$\mathcal{T}_3 = \sum_{n=1}^N \frac{2A_n^2}{3} + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{nm}) [\Psi_1 + \Psi_2] \quad (2.65)$$

Em que

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \left[\frac{(\beta^6 - (z_{mn}^2 - 2)) - \beta^4(4z_{mn}^4 + 27z_{mn}^2 + 9) - \beta^2 z_{mn}^2(5z_{mn}^4 + 15z_{mn}^2 - 72) - 2z_{mn}^4(z_{mn}^4 - 7z_{mn}^2 + 12) \sin \sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^{\frac{9}{2}}} \right] \\ \Psi_2 &= \left[\frac{(\beta^6 + 3\beta^4(2z_{mn}^2 + 3) - \beta^2 z_{mn}^2(z_{mn}^2 + 72) - 6z_{mn}^4(z_{mn}^2 - 4)) \cos \sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^4} \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

4. *Diretividade para $v = 1$ | $u = 1$.* Quando os expoentes v e u crescem, a complexidade da expressão da diretividade cresce de forma substancial, como mostrado abaixo:

$$\mathcal{T}_4 = \sum_{n=1}^N \frac{2A_n^2}{15} + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{nm}) [\Psi_3 + \Psi_4] \quad (2.67)$$

Em que:

$$\begin{aligned} \Psi_3 = \sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}) & \left[\frac{-3\beta^{10} + \beta^8(z_{mn}^4 - 24z_{mn}^2 - 81) + \beta^6(5z_{mn}^6 + 114z_{mn}^4 + 1611z_{mn}^2 + 225)}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^{13/2}} + \frac{2z_{mn}^6(z_{mn}^6 - 21z_{mn}^4 + 192z_{mn}^2 - 360)}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^{13/2}} \right] \\ & + \left[\frac{3\beta^4 z_{mn}^2 (3z_{mn}^6 + 82z_{mn}^4 - 292z_{mn}^2 - 1350) + \beta^2 z_{mn}^4 (7z_{mn}^6 + 69z_{mn}^4 - 2184z_{mn}^2 + 5400)}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^{13/2}} \right] \\ \Psi_4 = \cos(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}) & \left[\frac{6\beta^8(z_{mn}^2 - 1) + \beta^6(29z_{mn}^4 + 336z_{mn}^2 + 225) + 6\beta^4 z_{mn}^2 (5z_{mn}^4 - 71z_{mn}^2 - 675)}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^6} \right. \\ & \left. - \frac{3\beta^2 z_{mn}^4 (z_{mn}^4 + 208z_{mn}^2 - 1800) + 2z_{mn}^6 (5z_{mn}^4 - 72z_{mn}^2 + 360)}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^6} \right] \quad (2.68) \end{aligned}$$

2.5.2 Resultados Numéricos

2.5.2.1 Fator de Elemento: $\sin^u \theta \cos^v \theta$

Usando o cenário descrito na Tabela 2.1, a diretividade foi calculada utilizando a expressão fechada e então comparada com a integração numérica; todos os cálculos foram realizados a partir da plataforma de simulação matemática MATLAB (R2016a). Para o procedimento de integração numérica e métodos iterativos foram admitidos erros relativos de tolerância na faixa de 10^{-6} .

A Tabela 2.3 mostra os resultados alcançados, com diferenças entre a integração numérica e o resultado obtido a partir da expressão analítica de diretividade proposta na ordem de $\{10^{-13}; 10^{-12}\}$. Os resultados indicaram uma excelente concordância, corroborando a eficácia e eficiência da expressão analítica proposta neste trabalho.

Tabela 2.2: Valores de diretividade em redes de antenas com $N = 10$ utilizando (2.44) e integração numérica.

Expoentes	Diretividade	Integração Numérica	Erro
$v = 0 \mid u = 0$	7.75 dBi	7.75 dBi	1.77×10^{-12}
$v = 1 \mid u = 0$	5.68 dBi	5.68 dBi	5.80×10^{-13}
$v = 0 \mid u = 1$	9.18 dBi	9.18 dBi	2.97×10^{-12}
$v = 1 \mid u = 1$	2.38 dBi	2.38 dBi	5.65×10^{-13}

2.5.2.2 Fator de Elemento: Dipolo de meia onda

Para auxiliar na validação numérica do cenário em que as antenas possuem fator de elemento igual ao dipolo de meia onda, foi utilizado a plataforma *4nec2*, trata-se de uma ferramenta para gerar, visualizar, otimizar e verificar estruturas geométricas de antenas além de calcular os padrões de radiação de campo próximo e distante para diferentes tipos de antenas, esta plataforma é gratuita e está disponível em <https://www.qsl.net/4nec2/>.

Um cenário interessante para validar a plataforma é justamente o abordado anteriormente, quando foi considerado $v = 0$ e $u = 1$, pois para este cenário o fator de elemento se reduz a $\Upsilon(\theta) = \sin \theta$, que é considerado uma aproximação para o dipolo curto, cujo comprimento é muito menor que $\frac{\lambda}{2}$, e pode ser considerada também uma boa aproximação para o dipolo de meia de onda, em termos de diagrama de irradiação e consequentemente diretividade, porém vale salientar que outras características podem variar drasticamente, como por exemplo a impedância de entrada, Z_{in} .

Para a simulação do *4nec2* no cenário descrito na Tabela 2.1 foi considerada uma divisão de cada antenas em 9 seções e a excitação complexa foi posicionada na 5 seção, portanto no meio do dipolo, em termos de diretividade foi considerado $\theta_0 = 101.44^\circ$ e ϕ_0 foi variado com passos de 1° . A Figura 2.6 ilustra o procedimento descrito acima, utilizando o *4nec2* (4NEC2, 2020), onde é possível também ver a geometria do conjunto de antenas.

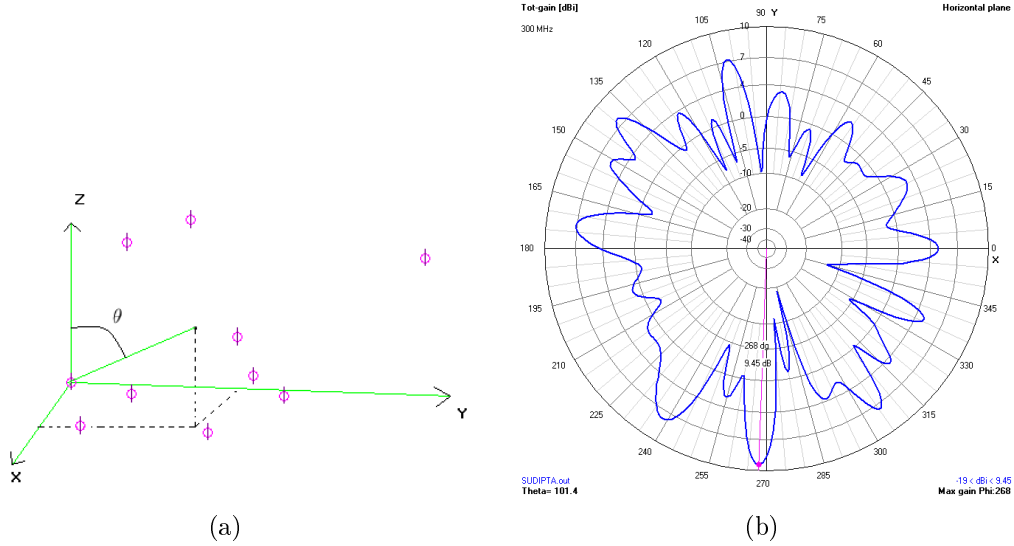


Figura 2.6: Plataforma *4nec2*: (a) Disposição geométrica das antenas; (b) Diretividade para $\theta_0 = 101,44^\circ$.

É possível perceber que em $\phi_0 = 268^\circ$ foi encontrada uma diretividade de 9.45 dBi o que é muito próximo do valor encontrado na seção anterior, utilizando a aproximação $\sin \theta$, de 9.18 dBi, essa diferença é esperada em razão da aproximação do valor de ϕ e também do acoplamento mútuo, que está sendo considerado apenas na plataforma.

Para investigar melhor a relação entre as aproximações do dipolo de meia onda foram realizadas simulações utilizando o cenário descrito na Tabela 2.1 comparando a eq. (2.44) para $u = 0$ e $v = 1$, eq. (2.61) e a plataforma *4nec2*. A Figura 2.7 ilustra os valores de diretividade encontrados para as três abordagens mencionadas considerando variação em ϕ_0 e $\theta_0 = 45^\circ$ fixo.

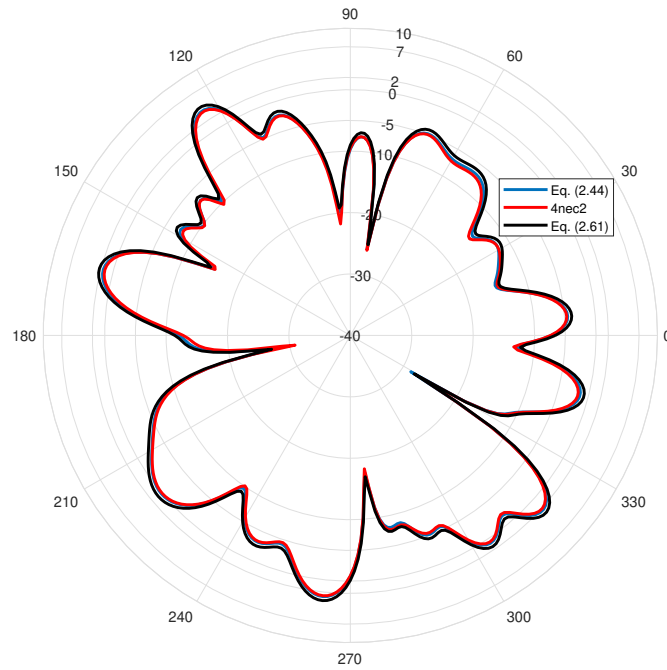


Figura 2.7: Diretividade para diferentes valores de ϕ_0 e $\theta_0 = 45^\circ$

Podemos observar na Fig. 2.7 que ambas as aproximações derivadas deste trabalho, Eq. (2.44) e Eq. (2.61) são muito próximas dos valores encontrados utilizando-se a plataforma de simulação *4nec2*, sendo difícil distinguir sua diferença nesta escala. Com objetivo de visualizar essa diferença melhor, foi calculado o erro entre as duas aproximações, usando (2.44) e (2.61), com relação ao *4nec2* em módulo e em escalar linear: a Fig. 2.8 ilustra essa comparação.

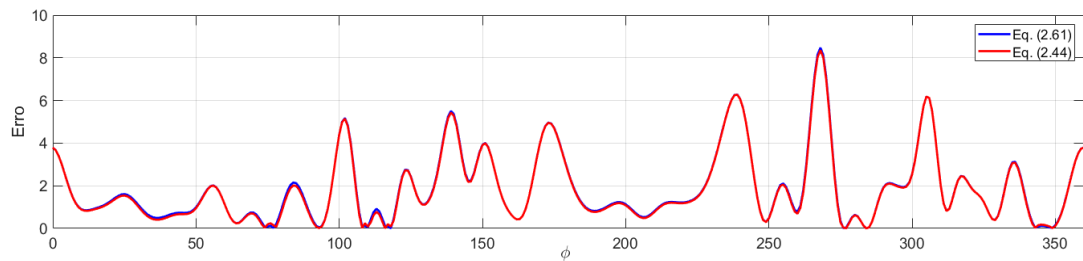


Figura 2.8: Módulo do Erro em escala linear entre as diretividades obtidas em (2.44) e (2.61) e a plataforma *4nec2*.

Podemos observar que apesar do formato dos erros serem parecidos existe uma diferença significativa em suas amplitudes, a diretividade calculada pela (2.61) demonstrou ser mais próxima da calculada pela plataforma *4nec2*.

A seguir será realizada a comparação da expressão (2.61) e sua integração numérica, novamente no cenário descrito na Tabela 2.1. Todos os cálculos foram realizados a partir da plataforma de simulação matemática MATLAB (R2016a). Para o procedimento de integração numérica e os métodos iterativos foram admitidos erros relativos na faixa de 10^{-6} .

Tabela 2.3: Valores de diretividade em redes de antenas com $N = 10$ utilizando (2.61) e integração numérica.

Direção	Diretividade	Integração Numérica	Erro
$\phi_0 = 45^\circ$ $\theta_0 = 45^\circ$	-9.60 dBi	-9.60 dBi	0.27×10^{-4}
$\phi_0 = 225^\circ$ $\theta_0 = 45^\circ$	-1.02 dBi	-1.02 dBi	0.27×10^{-4}
$\phi_0 = 315^\circ$ $\theta_0 = 45^\circ$	1.45 dBi	1.45 dBi	0.27×10^{-4}
$\phi_0 = 45^\circ$ $\theta_0 = 90^\circ$	-4.26 dBi	-4.26 dBi	0.27×10^{-4}
$\phi_0 = 45^\circ$ $\theta_0 = 135^\circ$	-36.46 dBi	-36.46 dBi	0.27×10^{-4}

Como esperado, os valores de diretividade se mostraram muito próximos para todas as combinações de θ_0 e ϕ_0 , além disso o erro se manteve igual, o que também é esperado dado que a aproximação foi realizada na integral que independe da variação da direção escolhida.

2.6 Conclusões

Neste Capítulo foram apresentados conceitos básicos sobre o padrão de irradiação em redes de antenas, bem como utilizando esses conceitos foram deduzidas duas expressões de diretividade para fatores de elementos distintos: $\sin^u(\theta) \cos^v(\theta)$ e $\frac{\cos \frac{\pi}{2} \cos \theta}{\sin \theta}$. O primeiro fator de elemento é caracterizado por ser generalizado, pois para diferentes valores de u e v é possível descrever uma variedade de diagrama de irradiações. O segundo fator é a expressão exata para o fator de elemento omnidirecional, cuja importância é enorme, devido a sua simplicidade de aplicação, i.e., por ser o diagrama de irradiação do dipolo de meia onda. A expressão encontrada para o dipolo de meia onda é uma aproximação; no entanto, foi demonstrado que ela possui uma boa acurácia. Por fim, nas últimas subseções deste Capítulo realizou-se a validação numérica das expressões utilizando o mesmo cenário escolhido em (DAS D. MANDAL; KAR, 2017, Tab. I, Set 2). Os resultados encontrados mostraram-se muito próximo aos obtidos via integração numérica e com a plataforma *4nec2*, ratificando assim as expressões analíticas deduzidas neste trabalho.

3 Problema de Otimização da Diretividade

Neste capítulo será tratado o problema de otimização de diretividade de uma rede de antenas. Para isto iniciaremos analisando a Fig. 3.1, que ilustra o conceito geral de melhoramento da diretividade utilizando uma rede de elementos com baixa diretividade.

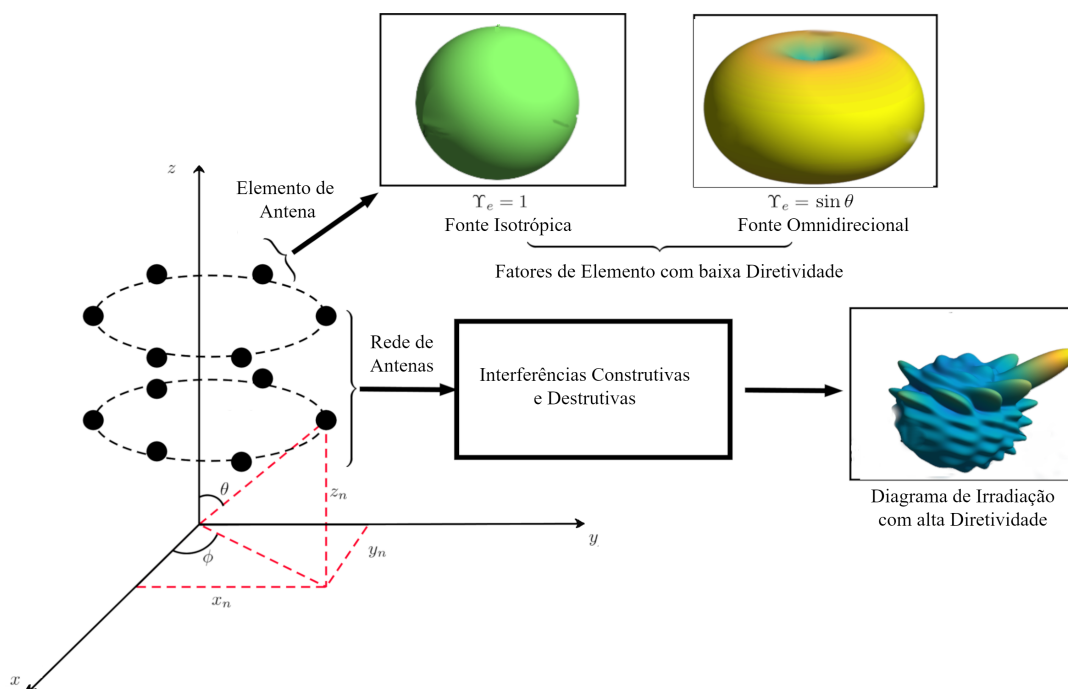


Figura 3.1: Aprimoramento da diretividade através de interferências construtivas e destrutivas oriundas de elementos com baixa diretividade.

Fonte: Elaborada pelo autor

Notem que os diagramas de irradiação de baixa diretividade para cada elemento esquematizados na Fig. 3.1 podem ser combinados de modo que ocorram interferências construtivas e destrutivas. Caso essas combinações sejam adequadas, o resultado é um diagrama de irradiação altamente diretivo. Essas interferências podem ser guiadas, através do posicionamento e/ou da alteração da fase de cada elemento de antena, para assim melhorar a diretividade global da rede

de antenas na direção de interesse.

Assim, dada uma direção desejada (θ_0, ϕ_0) e uma rede de antenas composta por N elementos, o problema de otimização associado consiste na busca dos valores de parâmetros a serem utilizados nesta configuração que resultem na maximização da diretividade no AoD.

Iremos começar a análise deduzindo o problema de otimização geral e posteriormente será assumido fase nula e amplitude unitária, para cada elemento de antena. Com esta simplificação, o problema será focado em encontrar a configuração geométrica que maximiza a diretividade, dado uma direção de interesse (AoD).

Baseado na expressão de diretividade dada em (2.44), podemos escrever o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{P}}{\text{maximizar}} && \mathcal{D}(\theta_0, \phi_0) \\ & \text{sujeito a} && x_n \leq x_{\max} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, N \\ & && y_n \leq y_{\max} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \\ & && z_n \leq z_{\max} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (3.1)$$

A restrição de desigualdade em (3.1) define um paralelepípedo 3-D centrado na origem e limitado por $\mathbf{p}_{\max} = [x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}]$. Além disso, a função custo em (3.1) pode ser reescrita, utilizando as seguintes funções auxiliares:

$$\mathcal{D}(\theta_0, \phi_0) = \frac{f_1}{f_2} \quad (3.2)$$

em que

$$f_1 = \sin^{2u}(\theta_0) \cos^{2v}(\theta_0) \left[\sum_{n=1}^N A_n^2 + \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos[\Omega_{xyz}(\theta_0, \phi_0, n, m)] \right] \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} f_2 = & \left| \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N A_n^2 \mathcal{B}(u+1, v+\frac{1}{2}) \quad + \right. \\ & \left. 2(-1)^{(v+2u)} \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N \sum_{\kappa=0}^u A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(\alpha_{mn}) \frac{\partial^{2(v+u-\kappa)}}{\partial z_{mn}^{2(v+u-\kappa)}} \left[\frac{\sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right] \right| \quad (3.4) \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reescrever o problema de otimização como sendo:

$$\begin{aligned}
& \underset{P}{\text{minimizar}} && \frac{f_2}{f_1} \\
& \text{sujeito a} && x_n \leq x_{\max} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, N \\
& && y_n \leq y_{\max} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \\
& && z_n \leq z_{\max} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Portanto, o maior objetivo deste problema pode ser reinterpretado como minimizar f_2 , enquanto simultaneamente f_1 é maximizado, ambos sujeitos aos limites da configuração espacial.

3.1 Cenário Omnidirecional

O cenário isotrópico é a configuração mais simples de ser analisada, em que a potência irradiada é dispersada de forma simétrica e igual em todas as direções, resultando em um fator de elemento igual a uma esfera ($\Upsilon_e = 1$). No entanto, esse tipo de fonte é hipotética e representa uma simplificação do problema, que reduz significativamente as possibilidades de aplicações. Já a potência irradiada no cenário omnidirecional não é igual em todas as direções, mas também é dispersa de forma simétrica, criando assim um padrão de radiação no formato de um Toróide 3-D, que pode ser descrito em coordenadas esféricas como $\Upsilon(\theta) = \sin \theta$, sendo portanto independente do valor do ângulo de azimute, ϕ .

Neste trabalho foi selecionado o cenário omnidirecional, devido a sua expressão concisa que resulta em uma expressão de diretividade com complexidade administrável, e também por ser um fator de elemento mais realista, aumentando suas aplicações. A escolha desta configuração é basicamente para manter uma certa simplicidade na expressão da diretividade, e posteriormente outros cenários poderem ser expeditamente desenvolvidos e analisados.

Para modelar o cenário omnidirecional, considerando o elemento de fator descrito em (2.2), deve-se escolher $u = 1$ e $v = 0$. Tal condição simplifica as funções auxiliares da seguinte maneira:

$$f_1^o = \sin^2(\theta_0) \sum_{m,n=1}^N A_n A_m \xi_{mn} \cos[\Omega_{mn}] \tag{3.6}$$

e

$$f_2^o = \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{3} - 2 \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) \left[\frac{\partial^2}{\partial z_{mn}^2} \left[\frac{\sin(d_{mn})}{d_{mn}} \right] + \frac{\sin(d_{mn})}{d_{mn}} \right] \quad (3.7)$$

nas quais foram adotadas as seguintes simplificações de notação:

$$\begin{aligned} \Omega_{mn} &= \Omega_{xyz}(\theta_0, \phi_0, n, m) \\ \xi_{mn} &= \begin{cases} \frac{1}{2} & m \neq n \\ \frac{1}{\cos[\Omega_{mn}]} & m = n \end{cases} \\ d_{mn} &= \sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Em que:

$$\begin{aligned} \Omega_{mn} &= k [x_{mn} \sin \theta_0 \cos \phi_0 + y_{mn} \sin \theta_0 \sin \phi_0 + z_{mn} \cos \theta_0] + \alpha_{mn} \\ \beta &= k \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2}; \\ z_{mn} &= k z_{mn}; \end{aligned}$$

Genericamente, d_{mn} representa a distância Euclidiana entre o m -ésimo e n -ésimo elemento de antena no espaço tridimensional ponderada pelo numero de onda k , dado que substituindo o valor de β e z_{mn} pode-se encontrar:

$$d_{mn} = k \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2 + z_{mn}^2}. \quad (3.9)$$

Uma vez que nas aplicações o valor de k é constante, constata-se que d_{mn} possui uma relação direta com a distância Euclideana.

Em (3.1), há interesse em maximizar f_1^o enquanto minimizamos f_2^o . Para este propósito, analisando (3.6), é possível observar que para maximizar f_1^o , considerando as amplitudes (A_n) constantes, basta maximizar o termo $\cos[\Omega_{mn}]$, *i.e.*, quando o argumento da função cosseno for igual a valores múltiplos inteiros e pares de π . Portanto:

$$\Omega_{mn} = c_1 \pi, \quad \text{para } \frac{c_1}{2} \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

Usando as definições dadas em (2.44), e satisfazendo a condição acima, temos para Ω_{mn} :

$$k (x_{nm} \sin \theta_0 \cos \phi_0 + y_{nm} \sin \theta_0 \sin \phi_0 + z_{nm} \cos \theta_0) = c_1 \pi - (\alpha_n - \alpha_m) \quad (3.11)$$

A equação acima pode ser interpretada como a equação do plano que contém todos os vetores de diferença de posições ($\mathbf{p}_{mn} = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m$). Para maximizar f_1^o

a condição (3.11) deve ser respeitada, *i.e.*, é necessário que todos os vetores de posição (\mathbf{p}_n) estejam alocados no mesmo plano que os vetores-diferença devem pertencer, dado que qualquer outra configuração irá violar a condição. Além disso, dado que a constante c_1 não é única e que para cada valor dela temos a equação de um plano paralelo distinto, podemos concluir que a solução, para satisfazer (3.11), é dada por um conjunto de infinitos planos paralelos.

No entanto, a alocação dos \mathbf{p}_n nos planos paralelos, que são soluções de (3.11), irá respeitar a condição individualmente, porém não irá respeitar (3.11) como um todo, dado que necessariamente, alguns vetores de diferença não iriam pertencer aos planos descritos em (3.11). Considere o exemplo da Fig. 3.2. Na Fig. 3.2 (a) todos os elementos foram alocados no mesmo plano $\Omega_{mn} = 0$ e conseqüentemente todos os seus vetores-diferença também estão alocados no mesmo plano solução. Já na Fig.3.2 (b) os elementos foram alocados em dois planos-solução paralelos ($\Omega_{mn} = 0$ e $\Omega_{mn} = \pi$), e mesmo que cada elemento individualmente pertença a um plano-solução, vetores diferenças que violam a condição (3.11) são introduzidos (representados pela seta vermelha). Logo, é necessário escolher um dos possíveis planos-solução e alocar todos os elementos nele para satisfazer (3.11) integralmente.

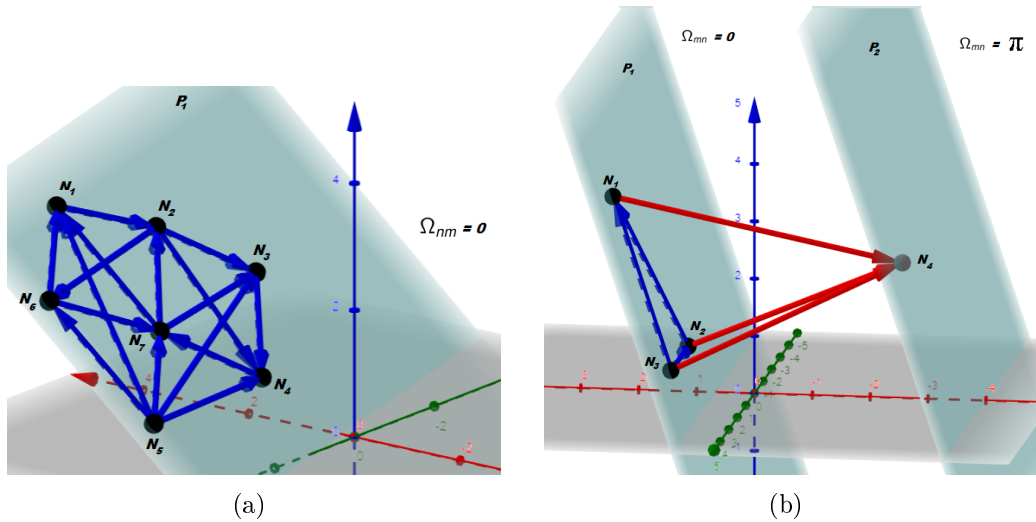


Figura 3.2: Duas configurações para o vetor \mathbf{p}_n : (a) todos os elementos da rede de antena estão posicionados no mesmo plano; (b) os elementos foram alocados em dois planos-solução paralelos.

Portanto, a condição para maximizar f_1^o foi encontrada. Em contrapartida, minimizar f_2^o resulta em um processo mais complexo, devido ao fato de que no problema de otimização em (3.5) faz-se necessário minimizar a soma de todos os termos do lado direito da equação (3.7), ao invés de minimizar cada termo. Sendo assim, o problema de otimização pode ser escrito em uma versão alternativa como

sendo:

$$\underset{\mathbf{P}}{\text{maximizar}} \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N A_n A_m \underbrace{\left[\frac{\partial^2}{\partial z_{mn}^2} \left[\frac{\sin(d_{mn})}{d_{mn}} \right] + \frac{\sin(d_{mn})}{d_{mn}} \right]}_{\varpi} \quad (3.12)$$

Além disso, a soma destacada em (3.12) pode ser reescrita como:

$$\varpi = \frac{(\beta^2 - 2z_{mn}^2) \cos d_{mn}}{d_{mn}^4} - \frac{[\beta^4 + \beta^2(z_{mn}^2 - 1) + 2z_{mn}^2] \sin d_{mn}}{d_{mn}^5} \quad (3.13)$$

que depende somente de x_{mn} , y_{mn} e z_{mn} , que por sua vez estão relacionados a β e d_{mn} através das restrições (2.44) e (3.8), respectivamente.

Percebe-se que nesta formulação de maximização da diretividade, a escolha do cenário omnidirecional possui influência apenas em (3.13). Portanto, para a escolha de outros cenários, *i.e.*, valores diferentes de u, v , a única alteração da função objetivo (OF) deverá ocorrer em (3.12), equação na qual o número de termos e a ordem das derivadas são dependentes dos valores de $u, v \in \mathbb{Z}^+$.

3.1.1 Reescrevendo o Problema de Forma Simplificada

Uma das mais importantes restrições resultantes do problema de otimização da diretividade é dada pela equação (3.11), no qual o valor de c_1 deve ser par e inteiro. Sendo assim, com o objetivo de simplificar a análise, foi adotado $c_1 = 0$, e considerado todas as fases nulas, para a n -ésima e m -ésima antena temos que:

$$\begin{aligned} k (\sin \theta_0 \cos \phi_0 x_n + \sin \theta_0 \sin \phi_0 y_n + \cos \theta_0 z_n) &= 0 \\ k (\sin \theta_0 \cos \phi_0 x_m + \sin \theta_0 \sin \phi_0 y_m + \cos \theta_0 z_m) &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ao subtrair essas duas expressões obtemos:

$$\sin \theta_0 \cos \phi_0 x_{nm} + \sin \theta_0 \sin \phi_0 y_{nm} + \cos \theta_0 z_{nm} = 0 \quad (3.15)$$

A equação acima pode ser reescrita como:

$$\mathbf{d}_{nm} \bullet \mathbf{a}_r |_{\theta=\theta_0, \phi=\phi_0} = 0 \quad (3.16)$$

Ou seja, as antenas para satisfazer esta condição devem ser posicionadas no plano ortogonal a θ_0 e ϕ_0 . Outra relação que temos desta equação é dada por:

$$z_{nm} = -\tan \theta_0 (\cos \phi_0 x_{nm} + \sin \phi_0 y_{nm}) \quad (3.17)$$

Note-se que em (3.17) os limites dos valores z_{mn} estão implícitos, possuindo uma dependência de x_{\max} , y_{\max} e da direção desejada (θ_0, ϕ_0) .

Incorporando a restrição (3.17) em (3.13), temos um problema de otimização simplificado:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}, \mathbf{y}}{\text{minimizar}} \quad \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= - \sum_{\substack{n=1 \\ m=2 \\ n < m}}^N \mathcal{F}(x_{mn}, y_{mn}) \\ \text{sujeito a} \quad |x_{mn}| &\leq x_{\max} \\ |y_{mn}| &\leq y_{\max} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (3.18)$$

sendo a função objetivo definida por (3.13), substituindo $\beta^2 = \frac{d_{mn}^2}{k} - z_{mn}^2$:

$$\mathcal{F}(x_{mn}, y_{mn}) = \frac{[(d_{mn}^2 - 3k)z_{mn}^2 + d_{mn}^2] \sin d_{mn}}{kd_{mn}^5} - \frac{(d_{mn}^2 - 3kz_{mn}^2) \cos d_{mn}}{kd_{mn}^4} \quad (3.19)$$

A solução de (3.18) nos dá as coordenadas ótimas de x_n e y_n , $\forall n$ que possam ser usadas para encontrar os valores ótimos de z_n através de (3.17). A função \mathcal{G} pode ser reescrita utilizando a definição em (3.7), implicando na seguinte relação:

$$f_2^{\circ} = \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{3} + 2\mathcal{G} \quad (3.20)$$

Como f_2° representa a integral do denominador em (2.8), para o cenário omnidirecional, esse valor é positivo. Portanto, a função \mathcal{G} tem um limite inferior para cada valor de N , dado por:

$$\mathcal{G}_{\text{bound}}^N = - \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{6} \quad (3.21)$$

Analisando a expressão (3.17), para a condição em que $\theta_0 = \phi_0 = 0$, encontraremos que $z_{mn} = 0$. Substituindo isto em (3.19) iremos encontrar uma projeção gerada pelas curvas de nível a qual representa um lugar geométrico similar a um conjunto de círculos. Isto pode ser interpretado de forma geométrica, implicando que as distâncias Euclidianas ao serem iguais entre as antenas, resultam no mesmo valor de \mathcal{F} . Portanto, as melhores soluções para o problema de otimização ocorrerão quando a maior quantidade de distâncias Euclidianas forem iguais, e simultaneamente os elementos (x_{mn}, y_{mn}) , responsáveis pelas distâncias, resultarem em valores pequenos de \mathcal{F} .

3.2 Conclusões

Neste Capítulo foi discutido o problema da diretividade de forma geral sob a perspectiva da otimização, utilizando o fator de elemento dado por $\sin^u(\theta) \cos^v(\theta)$,

cuja única restrição é espacial. Tendo sido realizada a delimitação através de um paralelepípedo 3-D centrado na origem e limitado por \mathbf{p}_{\max} . Em seguida, assumindo o cenário omnidirecional, aproximado por $\sin(\theta)$, o problema de otimização foi reescrito, e então a partir de análises das expressões foi possível concluir que o posicionamento dos elementos de antenas no plano definido por (3.17) contribui para o aprimoramento da diretividade.

Utilizando esta característica o problema foi simplificado para encontrar os componentes do plano xy e o eixo z , que é escrito em função de x e y com o auxílio de (3.17).

4 Geometrias para Redes de Antenas

Neste Capítulo diferentes geometrias para redes de antenas são consideradas tendo em vista melhorias na diretividade. Todas as estruturas selecionadas são planares, objetivando assim, preservar a restrição (3.17). Além disso, os seguintes parâmetros foram empregados para a análise numérica:

Tabela 4.1: Valores adotados nesta seção.

Parâmetro	Valor
Número de antenas (N)	16
Comprimento de Onda (λ)	1
Direção Desejada (θ_0, ϕ_0)	$(\pi/4, \pi/4)$

Para o desenvolvimento da análise neste Capítulo foram escolhidos as seguintes redes geométricas: Rede Uniforme Planar (UPA), Rede Uniforme Circular (UCA) e Rede Uniforme de Hexágonos Planares (UHPA). Suas geometrias estão ilustradas na Fig. 4.1, sendo a distância mínima entre os elementos de antena evidenciada pelas setas vermelhas, justamente o primeiro parâmetro a ser considerado na presente análise. Para isto, a Fig. 4.2 exhibe os valores de diretividade em função dos valores da distância entre elementos de antenas vizinhos, d_{\min} .

Claramente, as geometrias planar regular e hexagonal mantiveram um desempenho superior em termos de diretividade quando comparadas com a circular; os valores ótimos de d_{\min} para as duas estruturas são próximos e significativamente menores que a circular. Portanto, para este cenário/aplicação, a UCA resultou valores de diretividade modestos em comparação com a UPA e UHPA, portanto será suprimida na continuação desta análise.

Ademais, os resultados na Fig. 4.2 demonstram a importância da escolha adequada de d_{\min} quando o objetivo é explorar ao máximo o potencial da melhoria de diretividade da rede de antenas. No entanto, a área ocupada pela rede de antenas é também importante, dado que antenas compactas são muito mais versáteis. Apesar do valor de d_{\min} ser menor para a UPA, não necessariamente a

área ocupada será menor que a da UHPA.

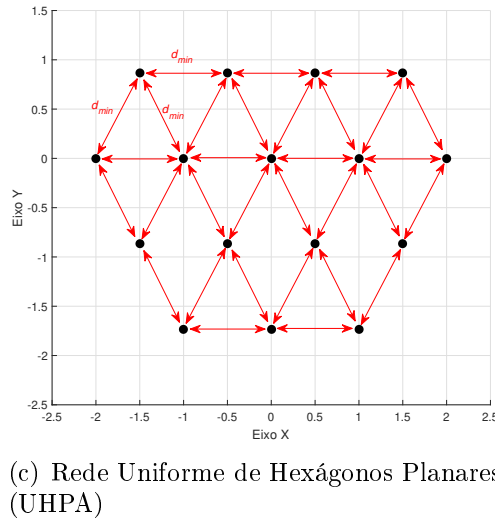
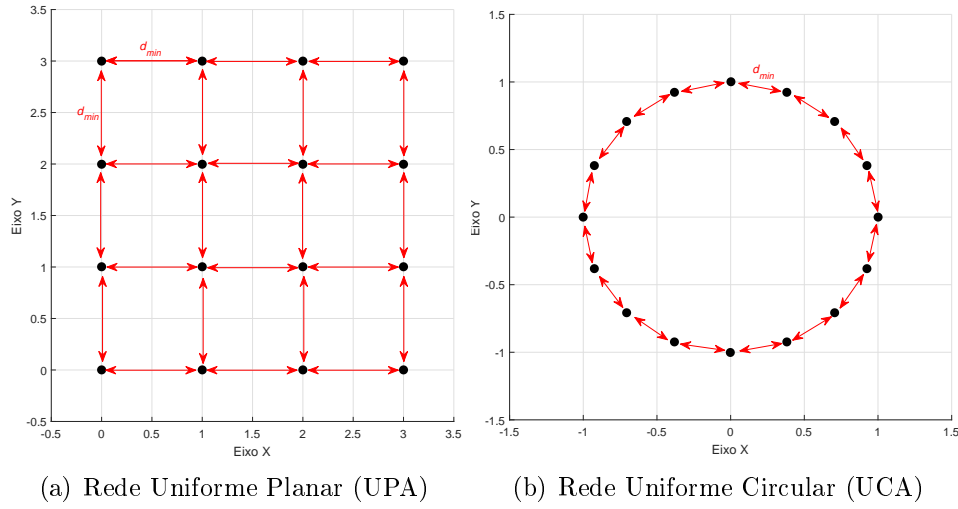


Figura 4.1: Diferentes configurações planares com $N = 16$ elementos de antenas no plano desejado definido por $\theta_0 = \phi_0 = \pi/4$.

Para investigar as duas estruturas de redes de antenas planares, inicialmente, compara-se na Fig. 4.3 a diretividade e a área normalizada dada pela envoltória convexa da rede de antenas em função do número de antenas, e selecionando apenas o valor ótimo de d_{\min} para cada configuração.

É notável nos dois gráficos a semelhança no desempenho das duas estruturas, tanto em termos de diretividade (Fig. 4.3 (a)) quanto em área normalizada (Fig. 4.3 (b)), para valores diferentes de N . A área ocupada pela envoltória convexa para pequenos números de antenas é muito próxima; no entanto, para uma grande quantidade de antenas, a UPA demonstrou ter uma vantagem em relação à área, requerendo uma região convexa menor. Portanto, podemos conjecturar que as duas estruturas possuem um desempenho muito próximo em termos de diretividade, e para um número maior de antenas, a UPA irá ocupar uma área

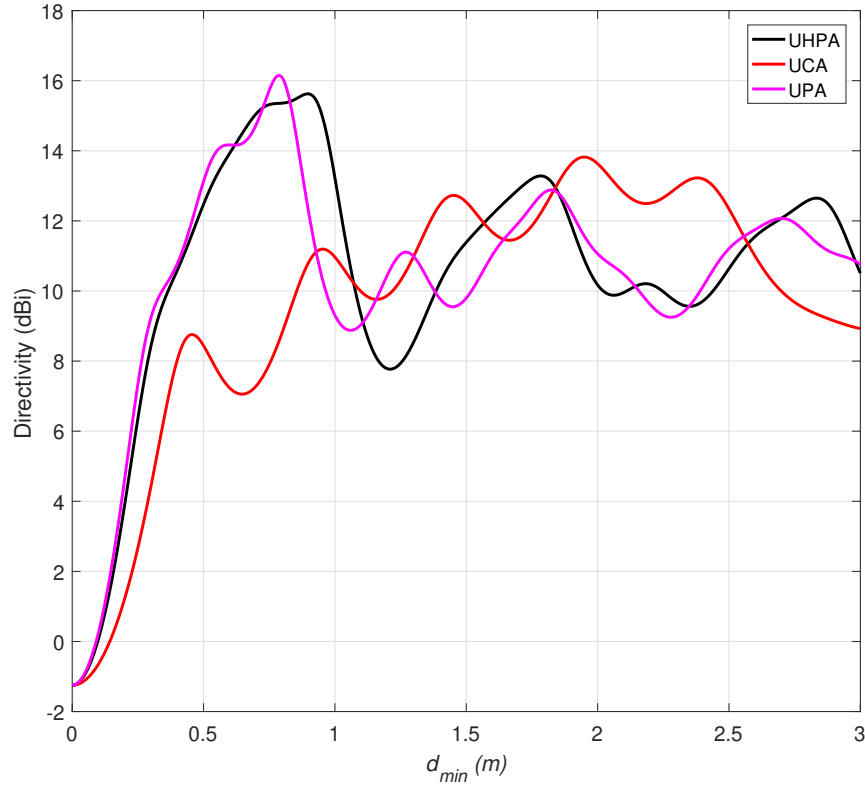


Figura 4.2: Diretividade *versus* a distância mínima para diferentes redes geométricas com $N = 16$ elementos.

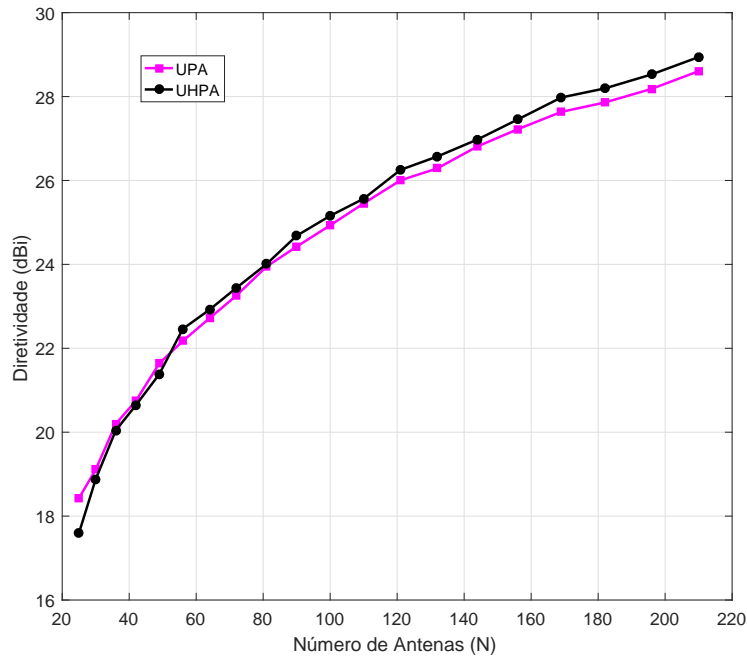
menor que a UHPA.

Assim, dada a similaridade de desempenho da UPA e UHPA, em termos da diretividade da rede, a escolha de uma das estruturas planares uniformes não resultará em grande perda de desempenho. Dada a compacidade e facilidade de descrição analítica da posição dos elementos em coordenadas retangulares, a estrutura selecionada para implementação do método proposto será a UPA.

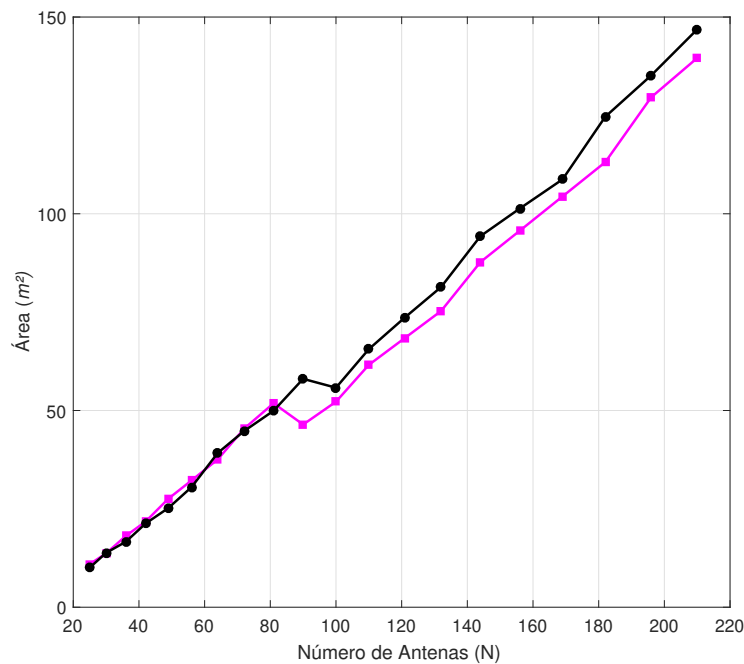
4.1 Otimização da Posição dos Elementos de uma Rede Uniforme Planar

Esta seção descreve o método proposto para a obtenção de alta diretividade, utilizando a configuração geométrica dada pela Rede Uniforme Planar (UPA). Este método encontra uma solução de alta qualidade para o problema de otimização proposto em (3.18), necessitando de baixos esforços computacionais considerando-se a alta complexidade da operação de busca de uma solução neste *locus* geométrico.

Utilizando os parâmetros número de onda (k), direção desejada (θ_0, ϕ_0) e o número de antenas utilizado (N), o método proposto procura encontrar a melhor



(a) Desempenho da diretividade *versus* o aumento do número de antenas N .



(b) Valor da área *vs.* aumento do número de antenas (N).

Figura 4.3: Comparação entre UPA e UHPA em termos de diretividade e área normalizada, ambas configuradas com valores ótimos de d_{\min} .

configuração de UPA no plano de interesse, definido por (3.17), com o objetivo de alcançar um ganho notável na diretividade na direção desejada. Note-se que o parâmetro mais importante a ser definido para atingir este objetivo é o d_{\min} . A seguir, descreve-se o procedimento para se encontrar o parâmetro d_{\min} para uma UPA genérica.

Inicialmente, para facilitar o nosso modelo, podemos considerar que o posi-

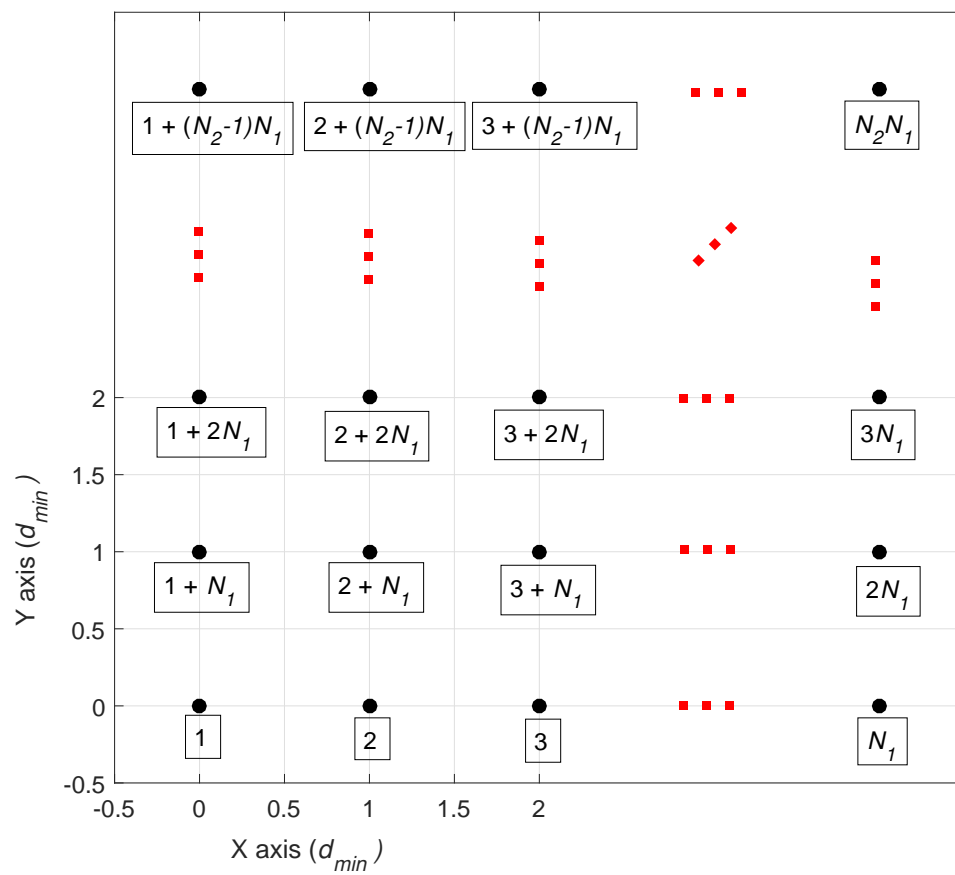


Figura 4.4: Disposição dos elementos da UPA e classificação para $N_1 \times N_2$ antenas.

cionamento das antenas será no plano- xy , considerando uma UPA com $N_1 \times N_2$ elementos de antenas regularmente distribuídos, como na Fig. 4.4. Através desta distribuição de antenas podemos definir a distância entre dois elementos genéricos, *i.e.*, d_{mn} para $m \neq n$, que configura um parâmetro importante para o uso de (3.19) e pode ser formulada como:

$$d_{mn} = \begin{cases} \frac{|m-n|d_{\min}}{N_1} & \text{se } \psi_1 = 0 \\ |m-n|d_{\min} & \text{se } \psi_2 = 0 \\ d_{\min} \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} & \text{c.c} \end{cases} \quad (4.1)$$

em que

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \text{mod}(m-1, N_1) - \text{mod}(n-1, N_1) \\ \psi_2 &= \left\lfloor \frac{m-1}{N_1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{N_1} \right\rfloor \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para alocar as antenas no plano de interesse sem alterar as distâncias, é possível utilizar uma matriz de rotação, que será descrita na próxima seção:

4.2 Matriz de Transformação

A matriz de transformação responsável pela rotação dos pontos em coordenadas retangulares do plano- xy (p_2) para o plano (p_1), descrito pela equação (3.11) na qual é encontrada a posição final para os elementos da rede de antenas, é detalhada a seguir.

Inicialmente, observe que os dois planos mencionados apresentam as seguintes definições:

$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow x \sin \theta_0 \cos \phi_0 + y \sin \theta_0 \sin \phi_0 + z \cos \theta_0 = 0 \\ p_2 &\rightarrow z = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Assim, faz-se necessário primeiramente encontrar o ângulo (γ) entre estes 2 planos. Sendo que, os vetores normais dos dois planos podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \sin \theta_0 \cos \phi_0 \hat{i} + \sin \theta_0 \sin \phi_0 \hat{j} + \cos \theta_0 \hat{k} \\ \mathbf{n}_2 &= \hat{k} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Portanto, o ângulo γ é dado por:

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2} \quad (4.5)$$

Substituindo (4.4) em (4.5) nós temos:

$$\cos \gamma = \frac{\cos \theta_0}{1 \cdot 1} \rightarrow \gamma = \arccos(\cos \theta_0) = \theta_0 \quad (4.6)$$

Utilizando este ângulo, os pontos no plano- xy podem ser transladados para (3.11) pela rotação do ângulo $\gamma = \theta_0$ em um eixo definido pelo vetor unitário, contido em (3.11). Em (SZYMANSKI, 1989) a matriz de transformação que rotaciona o ângulo θ_0 sobre um eixo definido por um vetor unitário $\mathbf{v} = l \hat{i} + m \hat{j} + n \hat{k}$ é dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} ll\mu_{\theta_0} + \cos \theta_0 & ml\mu_{\theta_0} - n \sin \theta_0 & nl\mu_{\theta_0} + m \sin \theta_0 \\ lm\mu_{\theta_0} + n \sin \theta_0 & mm\mu_{\theta_0} + \cos \theta_0 & nm\mu_{\theta_0} - l \sin \theta_0 \\ ln\mu_{\theta_0} - m \sin \theta_0 & mn\mu_{\theta_0} + l \sin \theta_0 & nn\mu_{\theta_0} + \cos \theta_0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

em que $\mu_{\theta_0} = (1 - \cos \theta_0)$.

Utilizando este resultado e um vetor unitário contido em (3.17), pode-se escrever a matriz de transformação, sendo um dos vetores unitários descrito por:

$$\mathbf{v} = \sin \phi_0 \hat{i} - \cos \phi_0 \hat{j} \quad (4.8)$$

Portanto, podemos escrever a matriz de rotação como:

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} \sin^2 \phi_0 \mu_{\theta_0} + \cos \theta_0 & -\cos \phi_0 \sin \phi_0 \mu_{\theta_0} & -\cos \phi_0 \sin \theta_0 \\ -\sin \phi_0 \cos \phi_0 \mu_{\theta_0} & \cos^2 \phi_0 \mu_{\theta_0} + \cos \theta_0 & -\sin \phi_0 \sin \theta_0 \\ \cos \phi_0 \sin \theta_0 & \sin \phi_0 \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

No caso de $\theta_0 = 0$ percebe-se que a restrição (3.17) se torna o plano- xy e a matriz de rotação se torna identidade.

A matriz de posição da rede na direção desejada pode ser expressa como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{R}_v \quad (4.10)$$

A variável z_{mn} , que consiste na combinação da última coluna de \mathbf{P} pode ser descrita como:

$$z_{mn} = -(\psi_1 \cos \phi_0 \sin \gamma + \psi_2 \sin \phi_0 \sin \gamma) \quad (4.11)$$

Agora, com os parâmetros d_{mn} e z_{mn} disponíveis, a função custo do problema

de otimização em (3.18) pode ser descrita de forma analítica, o que resulta em uma função não convexa de uma variável. Portanto, neste momento, o problema de otimização da diretividade pode ser resolvido usando método adequado de otimização. Note que encontrar o ótimo global desta função é análogo a encontrar a UPA ótima a ser alocada no plano de interesse, e possivelmente, dado a vantagem de alocar as antenas nesse plano, a melhor UPA possível em termos de diretividade.

4.2.1 Avaliação e Validação Sucessiva (SEV)

Com os valores de d_{mn} e z_{mn} , a função objetivo do problema (3.18) para a UPA pode ser escrita, e portanto surge a necessidade de encontrar o valor ótimo para d_{\min} que aumente significativamente ou maximize a diretividade. Com base nos resultados numéricos, foi concluído que o primeiro mínimo local da função objetivo em (3.18) também é o mínimo global. Considerando $k = 1 \text{ rad/m}$, destaca-se na Fig. 4.5 os valores de \mathcal{G}_{\min} para diferentes valores de N_1 e N_2 , corroborando nossa conclusão.

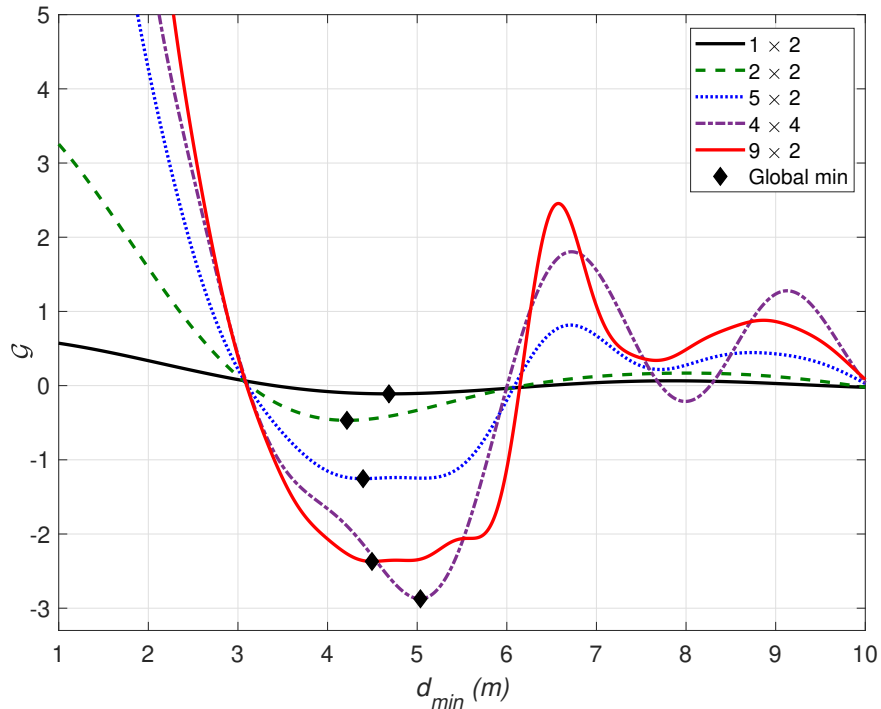


Figura 4.5: Valores de \mathcal{G} para diferentes valores de d_{\min} em diferentes configurações de $N_1 \times N_2$.

Como citado anteriormente, para diferentes configurações de $N_1 \times N_2$ o primeiro mínimo local é também o mínimo global; portanto, para melhor aproveitar as vantagens deste aspecto, foi implementado o método de busca local denominado Avaliação e Validação Sucessiva (*Successive Evaluation and Validation* –

SEV), o qual basicamente avalia sucessivamente a função no ponto $d_0 = c$, com pequenos incrementos ($c \rightarrow 0^+$); assim, a função custo é incrementada e avaliada sucessivamente para $d_i = d_{i-1} + c$.

O processo de validação acontece com a comparação dos valores de \mathcal{G} . No caso do incremento em d_i resultar em decréscimo na função objetivo ($\mathcal{G}_{n+1} - \mathcal{G}_n < 0$), o processo de incrementação, avaliação e a validação é repetido; caso contrário (*i.e.*, $\mathcal{G}_{n+1} - \mathcal{G}_n > 0$) o ponto d_n é o ótimo global, utilizando um valor adequado para c e infelizmente com esse método não é possível mensurar a precisão da solução.

O pseudocódigo para o método SEV é apresentado no Algoritmo 1.

Algorithm 1 Método de Avaliação e Validação Sucessiva (SEV)

```

1: Entrada:  $0 < c \ll 1$ 
2:  $n = 0$ 
3:  $d_n = (n + 1)c$ 
4:  $\mathcal{G}_n = - \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N \mathcal{F}(d_n)$  : use (3.18), (4.1), (4.11) com  $d_n = d_{\min}$ 
5: while  $\mathcal{G}_{n+1} - \mathcal{G}_n \leq 0$  do
6:    $n = n + 1$ 
7: end while
8:  $d_{\min} = d_n$ 
9: Saída:  $d_{\min}$ 

```

O processo de busca deste algoritmo é singelo, tendo como único parâmetro de entrada c , o qual, como já mencionado, deve assumir pequenos valores $0 < c \ll 1$, implicando em um número elevado de iterações para se obter boa precisão da solução. Por outro lado, caso c assumia valores mais elevados, porém ainda $c < 1$, o número de iterações e o valor da precisão serão reduzidos notavelmente. Contudo, dependendo do quão próximo de 1 este valor é, o primeiro mínimo local poderá ser inadvertidamente ultrapassado, ignorando assim a solução ótima. Resumindo, o valor do incremento na faixa $0 < c \ll 1$ deve ser cuidadosamente selecionado objetivando encontrar um bom compromisso entre precisão e complexidade.

4.2.2 Rede Uniforme Planar Ótimo (OUPA)

A técnica que aloca uma rede uniforme planar (UPA) de antenas omnidirecionais em um plano específico, descrito por (3.17), utiliza o método SEV para selecionar o valor ótimo de d_{\min} , será chamada de Rede Uniforme Planar Ótimo (*Optimal Uniform Planar Array* - OUPA) daqui em diante neste trabalho.

Deste método, resulta uma solução sub-ótima, dado que a solução ótima seria

uma combinação dentro do mesmo plano com uma configuração diferente da UPA. Esta solução resultante do método proposto apresenta significativo aumento na diretividade, utilizando um baixo custo computacional e um número reduzido de parâmetros de entrada, i.e, frequência da portadora (f), direção de irradiação preferencial (θ_0, ϕ_0) e a composição geométrica da UPA, definida por $N_1 \times N_2$ elementos.

O pseudocódigo para a técnica OUPA é mostrado no Algoritmo 2.

Algorithm 2 Rede Uniforme Planar Ótimo (OUPA)

- 1: **Entrada:** $f/k, \theta_0, \phi_0, N_1, N_2$
 - 2: Calcular todos os possíveis valores de d_{mn} utilizando (4.1).
 - 3: Calcular todos os possíveis valores de z_{mn} utilizando (4.11).
 - 4: A expressão analítica de \mathcal{G} é encontrado ao substituir os valores de d_{mn} e z_{mn} em (3.18)
 - 5: O método SEV é empregado e d_{\min} é determinado.
 - 6: Com o valor de d_{\min} a matriz de posição (\mathbf{P}_{xy}) é definida.
 - 7: A posição final no plano desejado é encontrada por: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{xy}\mathbf{R}_v$
 - 8: **Saída:** \mathbf{P}
-

4.2.3 Exemplo Numérico

Um exemplo numérico é desenvolvido nesta subseção, objetivando ilustrar o método de posicionamento dos elementos de antenas proposto para uma rede planar.

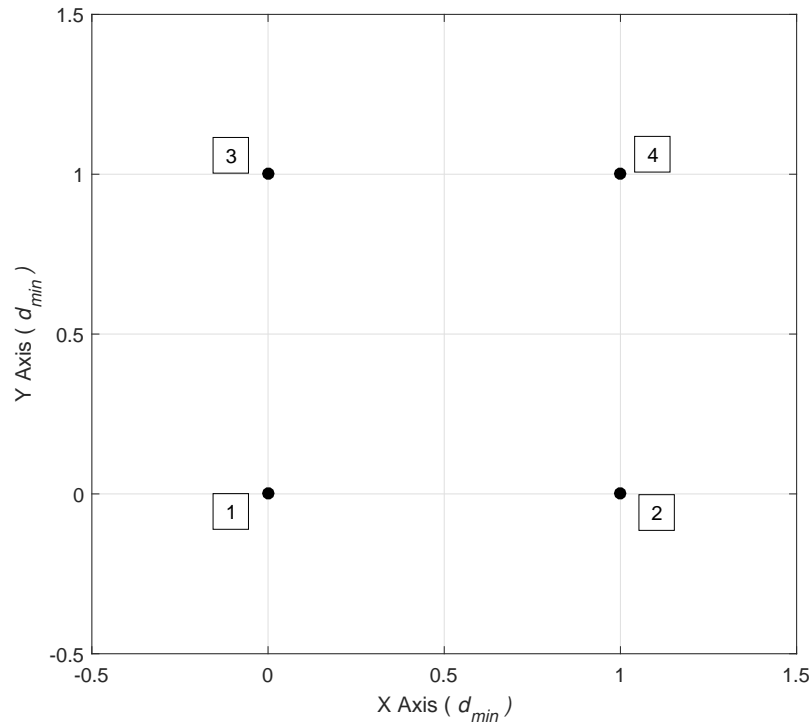


Figura 4.6: UPA genérica com 4 elementos de antena.

Vamos considerar um cenário numérico com $k = 1 \text{ rad}/m$, $\phi_0 = \theta_0 = \pi/4$ e utilizar uma UPA com 4 elementos, como ilustrado na Fig. 4.6. A matriz de posição deste rede de antenas no plano- xy pode ser descrito como:

$$\mathbf{P}_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{\min} & 0 & 0 \\ 0 & d_{\min} & 0 \\ d_{\min} & d_{\min} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

A distância entre os elementos podem ser expressadas como:

$$\begin{aligned} d_{12} &= d_{\min} & d_{23} &= \sqrt{2}d_{\min} \\ d_{13} &= d_{\min} & d_{24} &= d_{\min} \\ d_{14} &= \sqrt{2}d_{\min} & d_{34} &= d_{\min} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Substituindo os valores de (ϕ_0, θ_0) em (4.9) e (4.10) nós podemos escrever que:

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Portanto, a matriz de posição de uma rede de elementos no plano desejado pode ser escrita como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{xy}\mathbf{R}_v = d_{\min} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Conseqüentemente, todos os possíveis valores de z_{mn} são dados por:

$$\begin{aligned} z_{12} &= \frac{d_{\min}}{2} & z_{23} &= 0 \\ z_{13} &= \frac{d_{\min}}{2} & z_{24} &= \frac{d_{\min}}{2} \\ z_{14} &= d_{\min} & z_{34} &= \frac{d_{\min}}{2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Além disso, a função objetivo em (3.18) resulta em:

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^4 \mathcal{F}(x_{mn}, y_{mn}) \quad (4.17)$$

Portanto,

$$\mathcal{G} = - \left[\begin{aligned} &\mathcal{F}(x_{12}, y_{12}) + \mathcal{F}(x_{13}, y_{13}) + \mathcal{F}(x_{14}, y_{14}) \\ &+ \mathcal{F}(x_{23}, y_{23}) + \mathcal{F}(x_{24}, y_{24}) + \mathcal{F}(x_{34}, y_{34}) \end{aligned} \right] \quad (4.18)$$

Finalmente, usando a definição de \mathcal{F} em (3.19), podemos reescrever esta expressão como sendo:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{4d_{\min}^3} \left[\begin{aligned} &8(d_{\min}^2 + 1) \sin d_{\min} - 8d_{\min} \cos d_{\min} \\ &+ \sqrt{2}(2d_{\min}^2 + 1) \sin \sqrt{2}d_{\min} - 2d_{\min} \cos \sqrt{2}d_{\min} \end{aligned} \right] \quad (4.19)$$

Perceba que temos uma função \mathcal{G} não convexa de uma variável, como ilustrado em Fig. 4.7. Portanto, empregando o método SEV com $c = 10^{-3}$, a distância ótima encontrada foi $d_{\min} = 4.2303 \text{ m}$, que também está evidenciada na Fig. 4.7.

Finalmente, com o valor de d_{\min} a posição final dos 4 elementos de antenas no plano de interesse é determinado usando (4.15):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3.6108 & -0.6195 & -2.1151 \\ -0.6195 & 3.6108 & -2.1151 \\ 2.9913 & 2.9913 & -4.2303 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

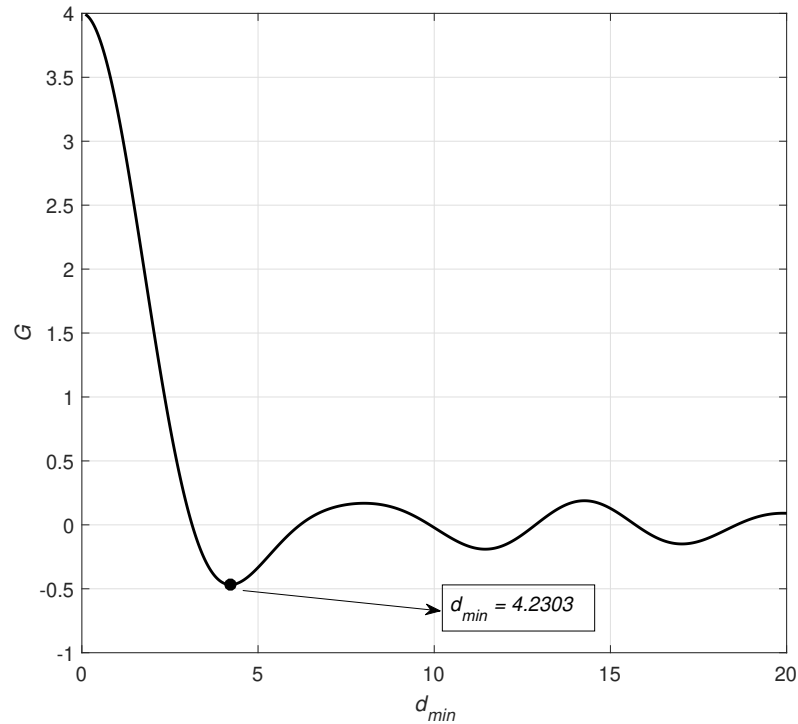


Figura 4.7: Valores da função \mathcal{G} para diferente valores de distância mínima além disso o valor ótimo está em destaque.

4.3 Conclusões

Neste Capítulo, desenvolveu-se uma abordagem de solução para o problema de otimização da diretividade. Inicialmente, com intuito de encontrar a melhor geometria de rede em termos de diretividade, foram comparadas as seguintes estruturas: UPA, UCA e UHPA. Tendo logo na primeira comparação a demonstração de que a rede circular apresenta um desempenho inferior, e por isso foi descartada das discussões e análises subsequentes. Já a comparação entre a UPA e UHPA mostrou que ambas possuem um desempenho muito próximo, tanto em termos de diretividade quanto de área ocupada. Deste modo, para facilitar a construção da solução para o problema da maximização da diretividade, a estrutura UPA foi selecionada.

Com a geometria definida surge a necessidade de encontrar o espaçamento ótimo entre os elementos da rede planar uniforme (UPA), para assim explorar ao máximo o seu potencial. Portanto, o método denominado de Rede Uniforme Planar Ótima (OUPA) foi introduzido, aplicando-se o método de busca local, intitulado Avaliação e Validação Sucessiva (SEV) para a obtenção do espaçamento ótimo entre os elementos da rede. Desta forma encontra-se o espaçamento ótimo d_{min} e retorna-se a posição 3D dos elementos das antenas, formando uma UPA no plano desejado para o problema da maximização da diretividade em $(\theta_0, \phi_0,)$.

5 Resultados Numéricos

Neste Capítulo são explorados e analisados os resultados numéricos obtidos a partir da aplicação da técnica OUPA. Além disso, o método heurístico baseado no algoritmo genético (GA) é selecionado para resolver o problema de otimização da diretividade de modo expedito. A metodologia permite que os desempenhos das duas soluções sejam comparadas.

Os principais parâmetros utilizados no problema da diretividade, assumindo cenário omnidirecional, estão descritos na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Configuração dos Parâmetros de Simulação para o problema da Maximização da Diretividade

Parâmetros	Valores Adotados
Direção Desejada	$(\theta_0, \phi_0) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$
Amplitude dos Elementos	$A_n = 1$ para todo n .
Fase dos Elementos	$\alpha_n = 0$ para todo n .
Cenário Omnidirecional	$u = 0$ e $v = 1$
Frequência / Número de Onda	5 GHz / $k \approx 104.8 \text{ m}^{-1}$
Incremento método SEV	$c = 10^{-3}$
OUPA – elementos de antena: $N = N_1 \times N_2$	
# elementos na Vertical	$N_1 = [2, 3, 4, \dots 50]$
# elementos na Horizontal	$N_2 = [2, 3, 4, \dots 10]$

5.1 Rede Uniforme Planar Ótimo (OUPA)

O desempenho da rede uniforme planar ótima (OUPA) é avaliado nesta seção. Através de simulações, para diferentes valores de N_1 e N_2 , para cada configuração, o valor de d_{\min} será otimizado utilizando a técnica SEV e a relação entre área e diretividade será analisada. O objetivo é entender qual é o impacto da área no valor da diretividade, e quantificar o custo, em termos de área, para alcançar altos valores de diretividade.

Na Fig. 5.1 os valores da diretividade e área estão ilustrados para diversos

valores de combinação entre N_1 e N_2 . Como esperado, com o aumento do número de antenas, a diretividade e área também aumentaram de forma proporcional. Ao contrário da diretividade, o aumento da área da rede de antenas não é desejável; portanto, estes dois parâmetros são concorrentes no processo de otimização.

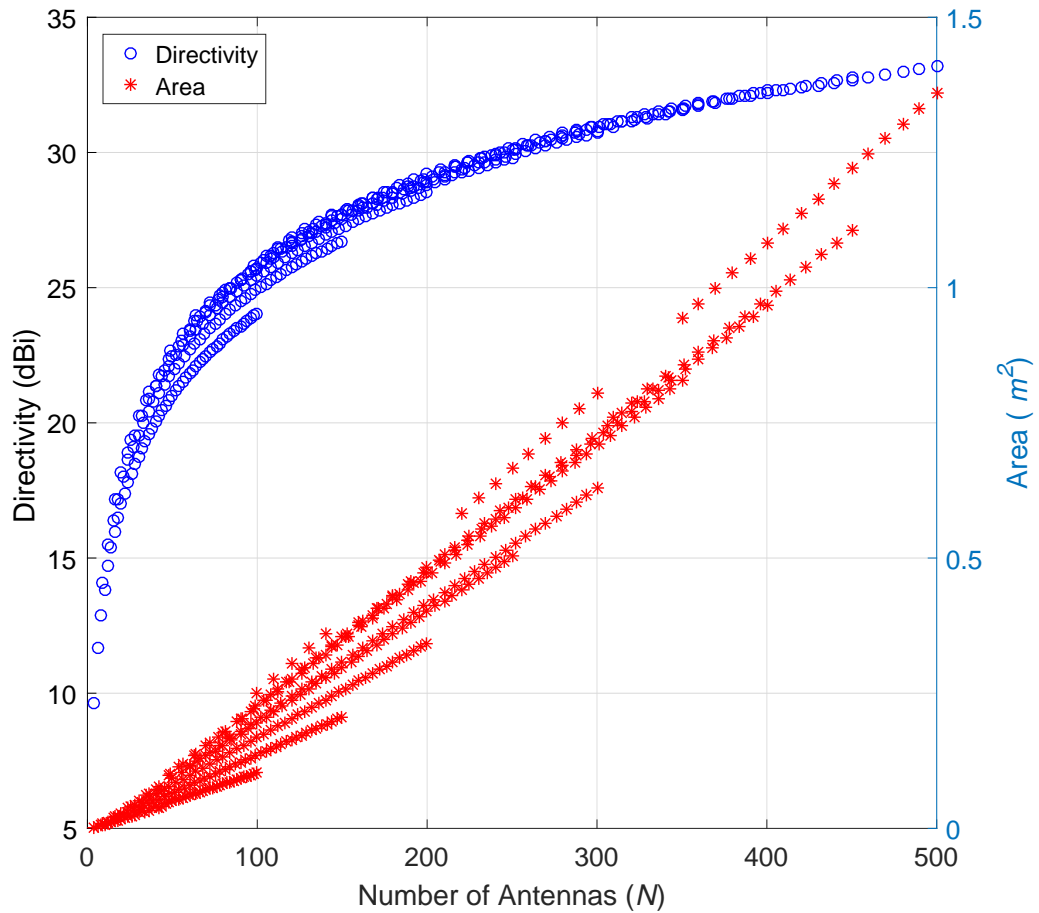


Figura 5.1: Comparação entre Diretividade e Área normalizada para diferentes valores de $N = N_1 \times N_2$.

5.2 Diretividade e Área para Diferentes Configurações $N_1 \times N_2$

Devido a N_1 e N_2 serem números inteiros, a realização da rede de antenas planar para um dado número de antenas N tem seu aspecto construtivo restrito, dado que esta quantidade precisa ser descrita como uma multiplicação ($N_1 \times N_2 = N$). Além disso, a maioria das análises na atual literatura foca na configuração quadrada ($N_1 = N_2$) para redes uniforme planar (UPA). Estendendo o cenário, neste trabalho, também serão analisadas situações de áreas retangulares ($N_1 \neq N_2$).

Com objetivo de verificar o impacto da escolha de $N_1 \times N_2$ na diretividade de estruturas planares, para um total de $N = 36$ elementos de antenas, calculou-se o valor da diretividade com a variação de d_{\min} , conforme ilustrado na Fig. 5.2.

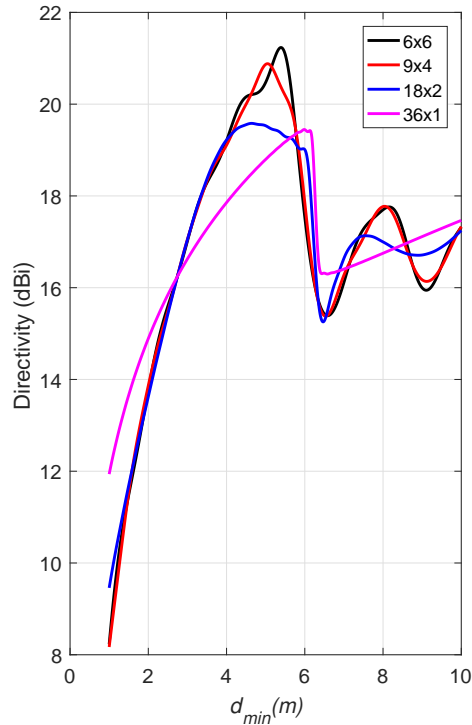


Figura 5.2: Diretividade *versus* d_{\min} para $N = 36$ elementos de antenas e suas possíveis configurações de $N_1 \times N_2$.

Observe que a variação de d_{\min} causa um impacto no valor da diretividade, sendo possível inferir ainda, através desses resultados numéricos, que o melhor desempenho ocorre para $N_1 = N_2 = 6$. De fato, o decréscimo da diferença entre N_1 e N_2 resulta em melhores valores de diretividade máxima atingível, i.e, em redes planares, a diretividade será máxima para a condição $\min |N_1 - N_2|$, ou seja, quando a área for maior.

Ampliando a análise do impacto de N_1 e N_2 sobre a diretividade, analisa-se a seguir o efeito das diferentes configurações $N_1 \times N_2$ sobre a diretividade-área, tomando como base quatro estruturas planares factíveis, com $N = [36; 48; 60; 72]$.

A Fig. 5.3 mostra a diretividade e sua respectiva área normalizada utilizada para cada configuração de $N_1 \times N_2$. Nesta simulação é considerado ($k = 1 \text{ m}^{-1}$) e todas as possíveis combinações N_1 e N_2 para cada N . Estes valores são comparados para diferentes configurações, sendo cada coluna representando o mesmo número de antenas, com os respectivos marcadores indicando uma específica combinação de $N_1 \times N_2$.

Como preconizado pela Fig. 5.2, a menor diferença entre N_1 e N_2 resulta

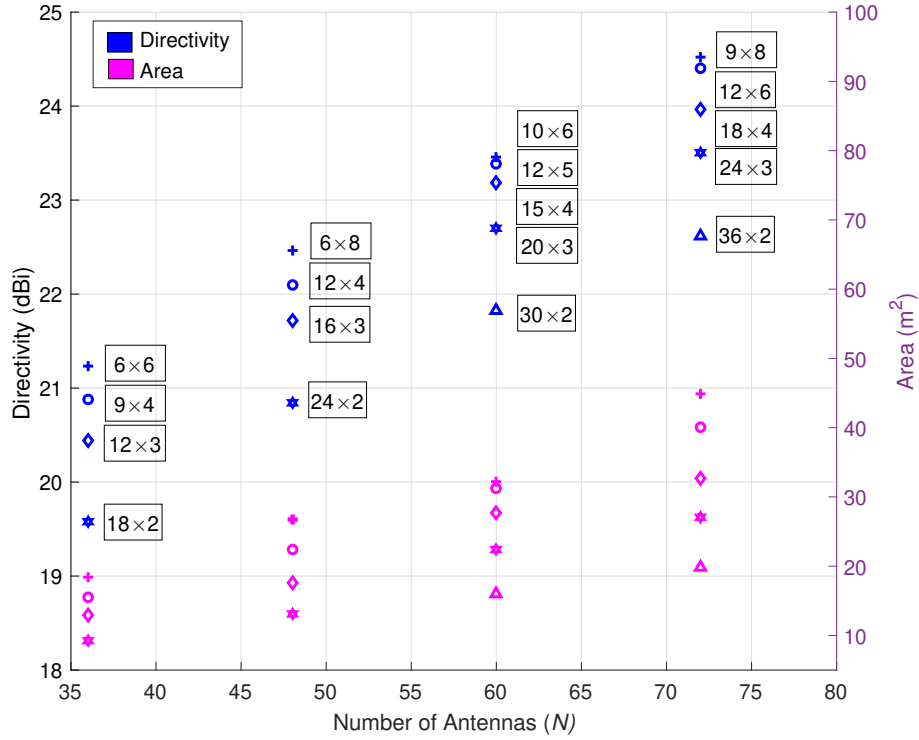


Figura 5.3: Comparação entre Diretividade e Área para diferentes configurações $N_1 \times N_2$ com o mesmo número de antena.

em valores de diretividade mais elevados. No entanto, a área ocupada pela UPA também é aumentada.

Dado que o foco deste trabalho é o melhoramento da diretividade, e objetivando o aproveitamento dessa característica, daqui em diante, adotar-se-á N_1 e N_2 em estruturas UPA com valores próximos; portanto, a escolha deste parâmetro deverá respeitar a seguinte restrição:

$$|N_1 - N_2| = \begin{cases} 0 & \text{UPA quadrada} \\ 1 & \text{UPA retangular} \end{cases} \quad (5.1)$$

5.3 Algoritmo Genético (GA)

Nesta seção o Algoritmo Genético (*Genetic Algorithm* – GA) é empregado para resolver o problema de otimização da diretividade em redes de antenas. O GA será aplicado a partir da descrição do problema simplificado, realizando a sua busca de forma geral, não necessariamente em uma região regular, porém dentro do plano de interesse z_{nm} , definido por (3.17). O pseudocódigo do GA, utilizado para encontrar a solução que trouxe melhoria à diretividade, é apresentada no Algoritmo 3.

Algorithm 3 GA como Otimizador de Diretividade

```

1: Entradas:  $n_{\text{vars}}, c_f, g_{\text{max}}, M_{\text{Gaussian}}, p_{\text{size}}$ 
2:  $\text{População} \leftarrow \text{IniciarPopula\c{c}\~{a}o}(p_{\text{size}}, n_{\text{vars}})$ 
3:  $\mathbf{S} = \mathcal{G}(\text{Popula\c{c}\~{a}o})$ 
4:  $\mathbf{s}_{\text{best}} \leftarrow \mathbf{s}$  que resulte no menor valor de  $\mathcal{G}(\mathbf{s})$ 
5: while #número da geração <  $g_{\text{max}}$  do
6:    $\text{Pais} \leftarrow \text{SelecionarPais}(\text{Popula\c{c}\~{a}o}, p_{\text{size}})$ 
7:    $\text{Filhos} \leftarrow \emptyset$ 
8:   for  $[\text{Pais}_1, \text{Pais}_2] \in \text{Pais}$  do
9:      $[\text{Filhos}_1, \text{Filhos}_2] \leftarrow \text{Crossover}(\text{Pais}_1, \text{Pais}_2, c_f)$ 
10:     $\text{Filhos} \leftarrow M_{\text{Gaussian}}(\text{Filho}_1)$ 
11:     $\text{Filhos} \leftarrow M_{\text{Gaussian}}(\text{Filho}_2)$ 
12:   end for
13:    $\mathbf{S} = \mathcal{G}(\text{Filhos})$ 
14:    $\mathbf{s}_{\text{best}} \leftarrow \mathbf{s}$  que resulte no menor valor de  $\mathcal{G}(\mathbf{s})$ 
15:    $\text{Popula\c{c}\~{a}o} \leftarrow \text{Substituir}(\text{Popula\c{c}\~{a}o}, \text{Filhos})$ 
16: end while
17: Saída:  $\mathbf{s}_{\text{best}}$ 

```

As simulações nesta seção foram realizadas utilizando os parâmetros da Tabela 5.2

Tabela 5.2: Configuração da Simulação

Parâmetros	Valores Adotados
Número de Onda/ Comprimento de Onda	$k = 1 \text{ m}^{-1} / \lambda = 2\pi \text{ m}$
# elementos de antena	$N \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Limites do posicionamento	$[x_{\text{max}}, y_{\text{max}}, z_{\text{max}}] = [5, 5, z_{\text{max}}]$
Função Objetivo (OF)	Eq. (3.18)
Número de variáveis, (n_{vars})	$2N$
Otimização heurística GA	
Fração de <i>Crossover</i> (c_f)	0.7
Max. # Gerações (g_{max})	40
Mutação (M_{Gaussian})	Gaussiana
População Inicial	Factível e Aleatória
Tamanho da População (p_{size})	$200N$
Espaço de Busca	$[0, x_{\text{max}}]; [0, y_{\text{max}}]$

Após a simulação com os parâmetros acima, foram encontradas as seguintes soluções:

A Fig. 5.4 ilustra a solução do problema (3.18) encontrada pelo GA. Quando a solução é visualizada no espaço tridimensional é possível observar o plano que restringe a solução e como ela tende alcançar o maior número possível de distâncias Euclidianas iguais. No entanto, quando analisa-se a projeção da solução no plano- xy é possível verificar o impacto introduzido pelos termos z_{nm} , definido em (3.17).

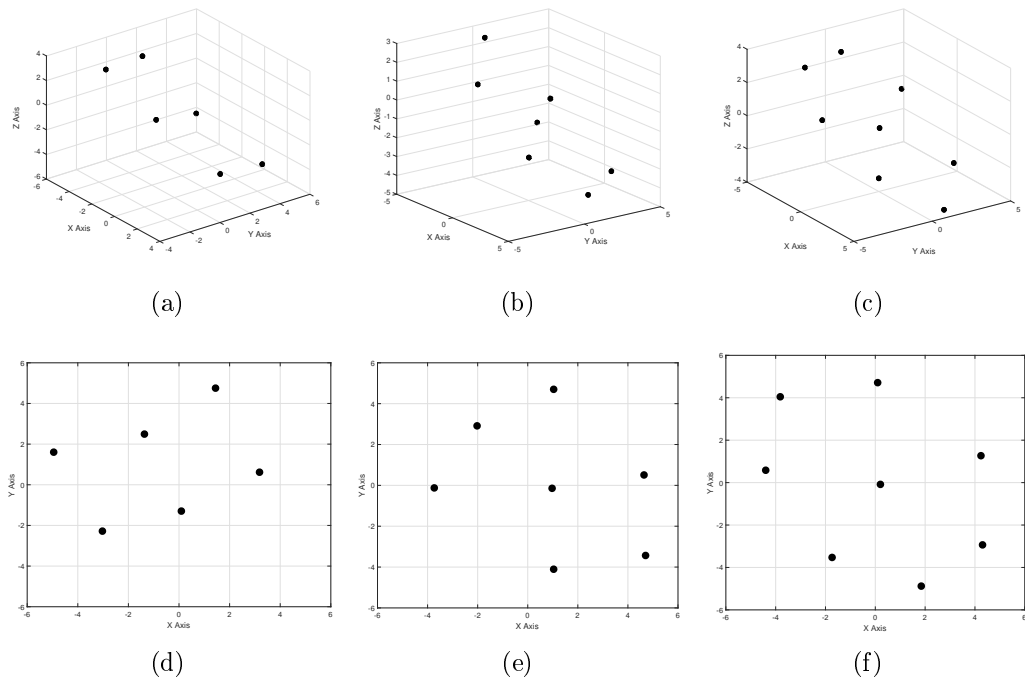


Figura 5.4: Solução encontrada pelo GA para cada posição de elemento de antena e sua respectiva projeção no plano- xy para $N = 6, 7$ e 8 .

A evolução da solução encontrada para $N = 8$ é ilustrada ao longo de gerações na Fig. 5.5.

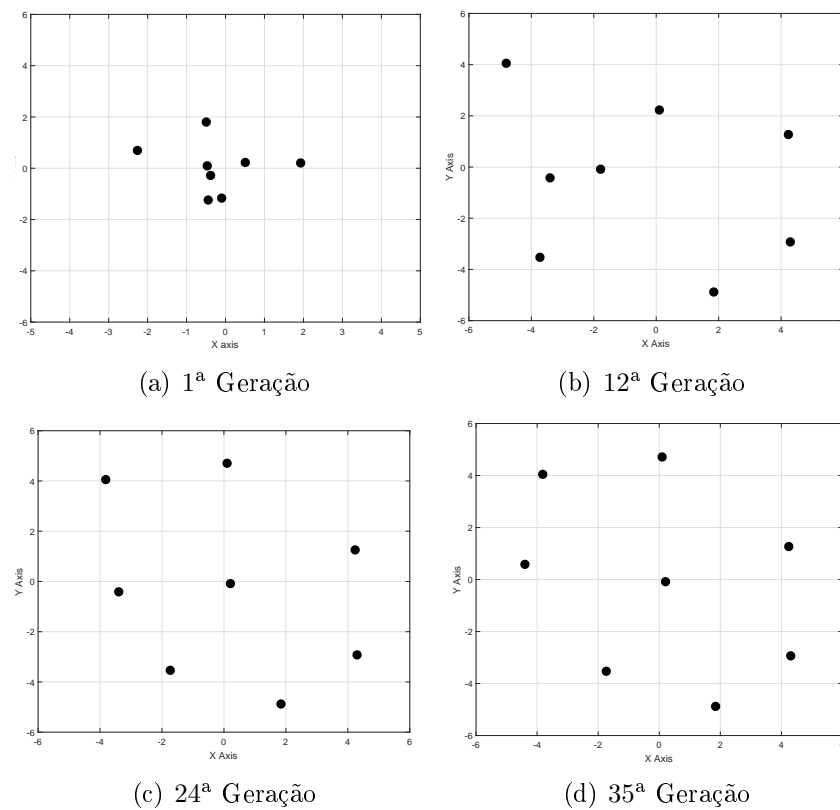


Figura 5.5: A evolução da posição dos elementos de antena e a distribuição de (x_{mn}, y_{mn}) ao longo das gerações do GA para $N = 8$.

Os gráficos da Fig. 5.5 ilustram o posicionamento das coordenadas (x, y)

encontradas pela solução GA, nestas figuras é possível verificar a evolução das posições ao longo das gerações. Esta solução converge para uma figura geométrica que parece estar contida em um Retículo de Triângulos Regulares (*Regular Triangular Tiling* - RTT). Um dos principais motivos para essa convergência não ser exata é dada pelo impacto introduzido por z_{mn} , definido em (3.17).

Para $\theta_0 = \phi_0 = 0$, a solução será um conjunto de pontos alocados em uma RTT, este tipo de configuração possui simetria e também limita os possíveis valores das distâncias em um conjunto discreto. Sendo assim, para melhor aproveitar esse caso particular, é viável otimizar um conjunto de pontos dentro de um RTT.

Os valores de diretividade encontrados nessa seção serão comparados com dois vetores de *beamforming* de estruturas clássicas, a ULA e a UCA. O aumento de diretividade utilizando os vetores de direção consiste em alterar a fase de cada elemento de antena com o objetivo de maximizar o fator de conjunto (AF) em (2.3). Essas fases são escolhidas de acordo com a posição, que são bem definidas nessas estruturas.

Para a ULA e UCA os elementos dos vetores de direção são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\alpha_n^{\text{ULA}} &= -dn \cos \theta_0 \\ \alpha_n^{\text{UCA}} &= -r \sin \gamma_n \sin \theta_0 \cos \phi_0 - r \cos \gamma_n \sin \theta_0 \sin \phi_0\end{aligned}\tag{5.2}$$

Em que $\gamma_n = \frac{(n-1)2\pi}{N}$, e d é a distância entre cada elemento. Nesta formulação, r é o raio do círculo que contém todos os pontos do UCA. Além disso, este raio é considerado de forma que a mínima distância entre os elementos seja igual a $\frac{\lambda}{2}$, em que λ é o comprimento de onda da portadora.

Uma comparação do desempenho para redes de antenas com $N = 6, 7$ e 8 , em termos de diretividade e valor da função objetivo \mathcal{G} , utilizando os vetores de direção e a solução GA, é apresentada na Fig. 5.6. Para o GA, a solução é mostrada ao longo das gerações. É perceptível o grande aumento de desempenho nas primeiras gerações do GA, sendo capaz de superar a configuração ULA para $N = 6, 7$ e 8 , já após a primeira geração. A convergência do algoritmo é observável com a estacionalidade da diretividade (e função custo) ao longo das gerações, a qual ocorre em $g^* = 21, 20$ e 35 gerações, para $N = 6, 7$ e 8 antenas, respectivamente.

A soma de todos os valores das coordenadas de diferença (x_{mn}, y_{mn}) corresponde a função objetivo em (3.18). Observe-se que na Fig. 5.6.b o valor corres-

pondente decai monotonicamente ao longo das gerações do GA. Além disso, os limites inferiores foram adicionados para comparação. Tais limites foram calculados utilizando (3.21) e seus valores são dados por $\mathcal{G}_{\text{bound}}^6 = -\frac{1}{2}$, $\mathcal{G}_{\text{bound}}^7 = -\frac{7}{12}$ e $\mathcal{G}_{\text{bound}}^8 = -\frac{2}{3}$. Uma outra forma de avaliar o desempenho do GA consiste em calcular o *gap* entre o valor de \mathcal{G} encontrado e seu respectivo limite inferior, definido como:

$$\Delta\mathcal{G}^* = \mathcal{G}_{\text{bound}}^N - \mathcal{G}^* \quad (5.3)$$

em que \mathcal{G}^* é o valor da função objetivo encontrado pelo GA após a convergência.

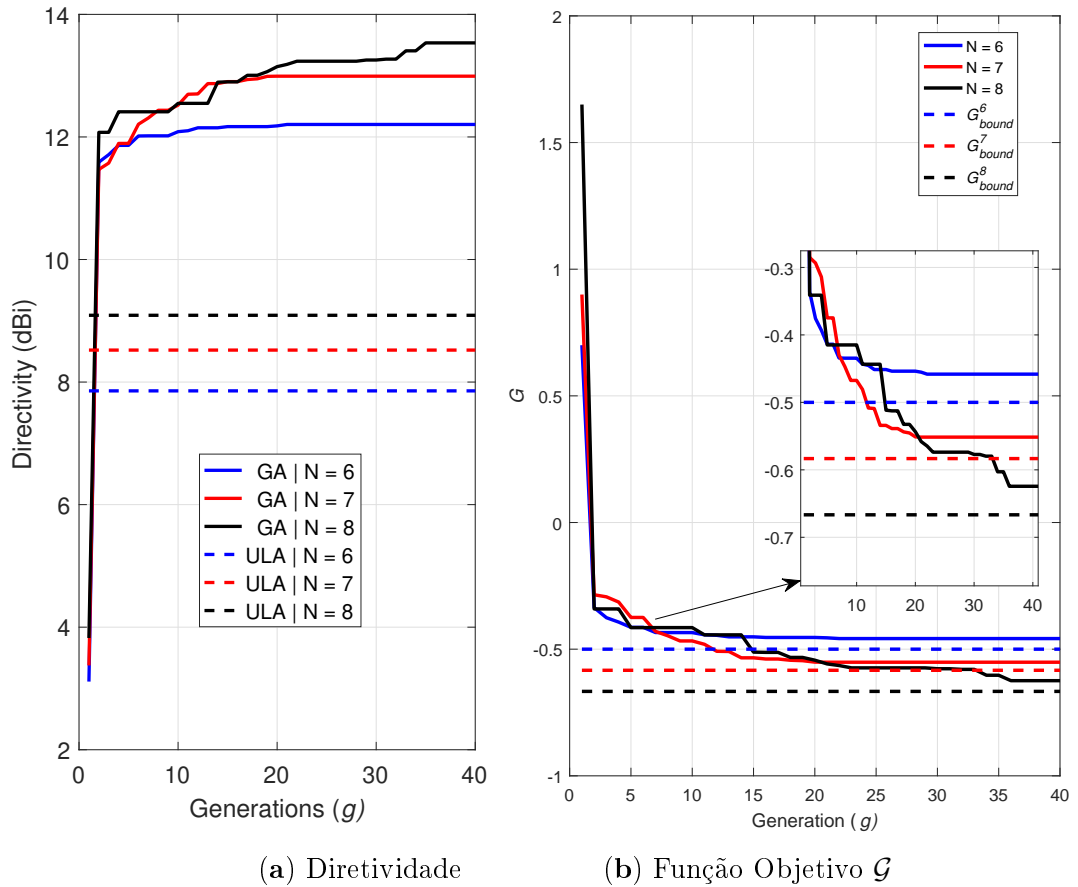


Figura 5.6: Diretividade e o valor da função objetivo ao longo das gerações do GA para $N = 6, 7$ e 8 . Por comparação a ULA foi introduzida em a) e o limite inferior foi adicionado em b).

Aplicando (5.3) nos valores encontrados pelo GA conforme Fig. 5.6.b, obtêm-se os seguintes *gaps* de optimalidade do algoritmo GA para o problema de diretividade:

<i>Gap</i>	# Elementos de antenas		
	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$
$\Delta\mathcal{G}^*$	0.0418	0.0318	0.0423

O *gap* indica a proximidade da solução com a melhor solução possível. Sendo

assim, podemos concluir que para $N = 7$ o desempenho do GA foi melhor nessas simulações.

5.4 OUPA \times Método GA em Redes Complexas

A partir da utilização da configuração descrita na seção anterior, o GA demonstrou dificuldade para encontrar a solução ótima com o aumento do número de antenas. De fato, nas simulações, o GA não foi capaz de encontrar um desempenho melhor que o OUPA, em um tempo factível, em termos de diretividade para $N > 12$ (não mostrado na seção anterior), mesmo incluindo a restrição planar no espaço de busca, o que diminui significativamente a complexidade. Com o objetivo de utilizar o GA como um método de comparação tendo em vista validar o método OUPA proposto em cenários mais complexos, foram propostas alterações nos parâmetros de inicialização do método de otimização GA, para auxiliar o algoritmo genético a superar o OUPA em um tempo administrável. Esta nova configuração será denominada como GA com ganho de diretividade marginal (em relação ao OUPA), *GA-marginal*. As principais alterações na inicialização são descritas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Parâmetro alterados no *GA-marginal*

Parâmetros	Alteração
População Inicial	adição do valor próximo a uma solução local
Mutação (M_{Uniform})	Uniforme
Tamanho da População (p_{size})	$8N^2$
Limites de Posicionamentos	$[x_{\text{max}}, y_{\text{max}}] = [2p_{\text{max}}, 2p_{\text{max}}]$
Max. # Gerações (g_{max})	Ilimitado
Critério de Parada	Superar o OUPA (<i>marginal</i>)
Taxa de Mutação	Determinado durante a simulação
Fração de <i>Crossover</i> (c_f)	Determinado durante a simulação

Na População inicial do algoritmo foi introduzido um valor próximo a uma solução local, consistindo na solução OUPA com uma pequena distorção, esta perturbação é necessária para prevenir que a busca fique presa na solução local. Já a função de mutação foi alterada de Gaussiana para Uniforme, onde cada indivíduo selecionado possui uma probabilidade uniforme de sofrer uma mutação. O tamanho da população foi expandido de forma considerável para aumentar a probabilidade de encontrar uma solução melhor, mesmo que eventualmente impingisse lentidão na convergência. Enquanto os limites de posicionamentos foram alterados considerando a solução encontrada pelo OUPA, sendo que os novos valores consistem no dobro de p_{max} , que trata do valor máximo do vetor \mathbf{x}

ou \mathbf{y} dado pela solução OUPA. O novo critério de parada foi alterado de forma que o GA-*marginal* deva superar o OUPA em termos de diretividade, tornando assim o g_{\max} ilimitado. Já a taxa de mutação e a fração de *crossover* agora são determinadas em uma pré-simulação, onde a combinação dos dois valores é avaliada conjuntamente a partir de 100 gerações, e então, a combinação que alcançar o melhor valor de diretividade é selecionado. O intervalo de variação dos dois valores usados neste contexto são iguais; trata-se de porcentagens múltiplas de 10%.

A ideia geral dessas alterações é facilitar que o método GA proporcione uma melhoria marginal na solução encontrada pela OUPA, em um tempo viável. A dificuldade computacional, em termos de tempo de simulação, vista no método GA é alta quando comparada ao método OUPA. Sendo assim, o empenho necessário para superar o desempenho do método proposto em tais condições, irá indicar a vantagem de utilizar a solução expedita dada pelo método OUPA.

No entanto, limitar a técnica GA para superar o OUPA de forma marginal não dará uma perspectiva sobre o quanto de ganho na diretividade é possível ser alcançado utilizando a técnica GA, e também qual seria o custo computacional para alcançar essa melhoria. Assim, com objetivo de entender melhor essas relações, uma segunda alteração nos parâmetros de entrada é proposta, alterando apenas o critério de parada, o qual consiste agora em atingir o número de 100 gerações consecutivas sem alterações no valor da diretividade. Esta nova alteração no GA será denominada GA-*stall* e sua complexidade será avaliada em termos de tempo computacional.

5.5 Resultados Numéricos de Diretividade

A Tabela 5.4 expõe os valores de diretividade encontrados pelo método OUPA, GA-*marginal*, GA-*stall* e os dois métodos clássicos (ULA e UCA) utilizando o vetor de direção para determinar a fase de cada elemento.

Tabela 5.4: Comparação de Diretividade para pequenos valores de N

N	6	7	8	9
OUPA	11.70 dBi	n.a.	12.91 dBi	14.12 dBi
GA-<i>marginal</i>	11.81 dBi	n.a.	13.19 dBi	14.12 dBi
GA-<i>stall</i>	12.35 dBi	n.a.	13.49 dBi	14.5 dBi
UCA	7.96 dBi	8.09 dBi	8.73 dBi	9.17 dBi
ULA	9.17 dBi	9.82 dBi	10.38 dBi	10.88 dBi

É possível verificar que na Tabela 5.4 os três métodos propostos neste trabalho

(OUPA, GA-*marginal* e GA-*stall*) resultaram em desempenhos significativamente superiores aos métodos convencionais (ULA e UCA). Como esperado, o GA-*marginal* teve um desempenho levemente superior ao OUPA. Já o GA-*stall* obteve o melhor desempenho para todas as configurações de N avaliadas numericamente, porém não muito distante dos desempenhos alcançados pela OUPA e GA-*stall*.

Com o objetivo de explorar todo o potencial da estrutura OUPA, a condição mencionada em (5.1) é assumida e as combinações de N_1 e N_2 terão como limite o valor 6. Desta forma, as combinações que serão simuladas a seguir serão:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 2 \times 2 & 2 \times 3 & 3 \times 3 & \\
 N_1 \times N_2 \rightarrow & 3 \times 4 & 4 \times 4 & 4 \times 5 & \\
 & 5 \times 5 & 5 \times 6 & 6 \times 6 &
 \end{array} \quad (5.4)$$

A Fig. 5.7 exibe os valores de diretividade e tempo de simulação para o OUPA *versus* as duas configurações de otimização utilizando o GA (GA-*marginal* e GA-*stall*), com o aumento do número total de antenas até $N = 36$.

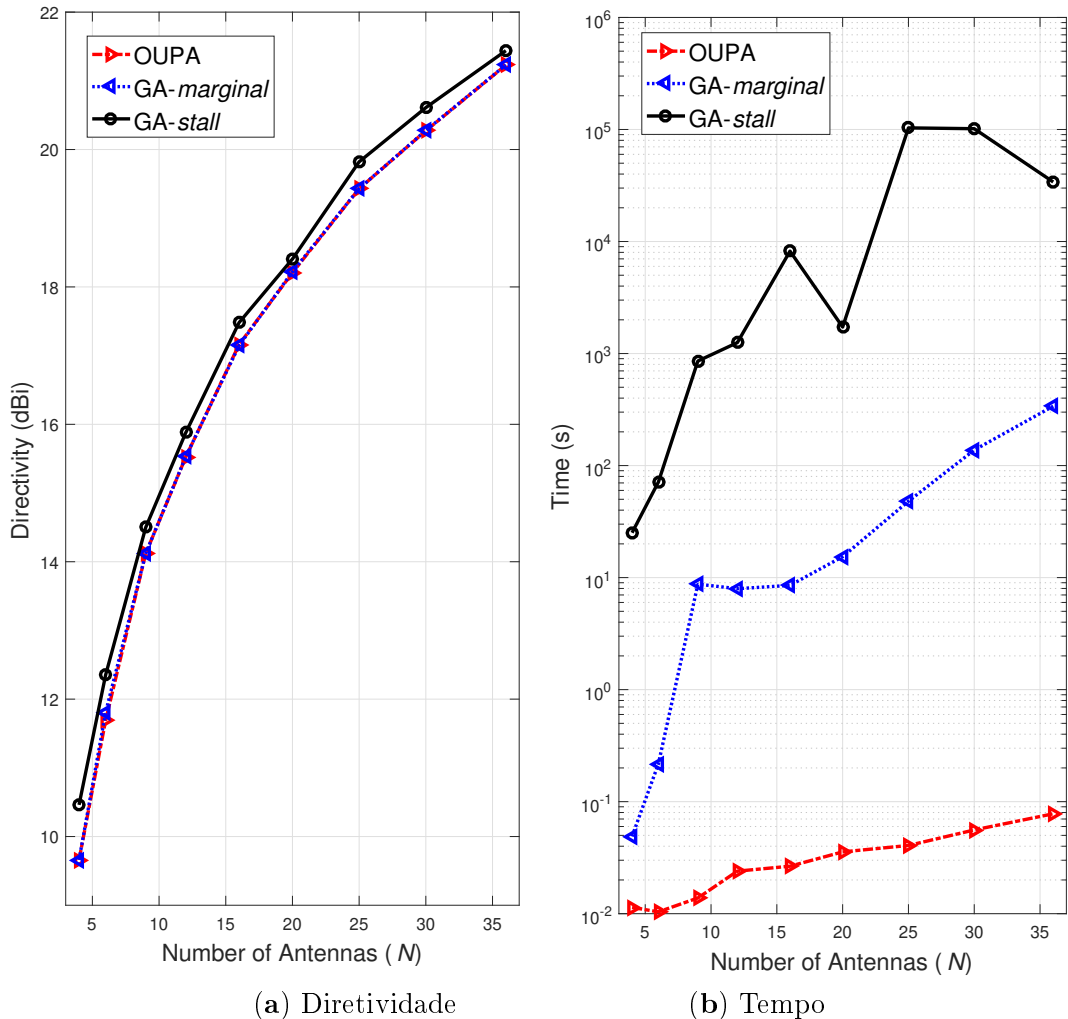


Figura 5.7: Comparação de Diretividade e Tempo de simulação entre OUPA, GA-*marginal* e GA-*stall* com o aumento de N .

A técnica OUPA proposta neste trabalho, mesmo com bem menos complexidade¹, foi capaz de atingir um desempenho muito próximo das duas técnicas baseadas no GA. Como esperado, o GA-*marginal* foi capaz de superar o desempenho do OUPA marginalmente; no entanto, o tempo gasto pelo método heurístico foi muito superior, configurando um compromisso desempenho-complexidade inadequado. Por sua vez, o GA-*stall* foi capaz de atingir uma melhoria considerável em relação ao OUPA ($\sim 0,2$ dBi); entretanto, o tempo consumido para obter essa solução foi proibitivamente elevado. Pode-se portanto conjecturar que melhorias, com intuito de superar a solução OUPA, são alcançadas ao custo de uma imensa complexidade computacional adicional.

Tanto o GA-*marginal* quanto o GA-*stall* requerem ainda a otimização da taxa de *crossover* (c_f) e a taxa de mutação (m_r). Na Tabela 5.5 são mostradas as combinações de valores avaliadas que maximizaram a diretividade para cada configuração mostrada na Fig. 5.7.

Tabela 5.5: Configuração dos Parâmetros

N	4	6	9	12	16	20	25	30	36
c_f (%)	80	40	10	90	40	80	80	60	80
m_r (%)	100	20	10	10	10	70	10	10	20

Podemos observar que para a maioria das configurações a porcentagem do valor da fração de *crossover* foi elevada e a taxa de mutação foi pequena. Essa combinação levou a uma população que teve várias alterações ao longo das gerações; entretanto, os valores de m_r ao permanecerem reduzidos puderam ser interpretados como uma forma de garantir uma melhoria no entorno da solução. Percebe-se ainda que ao selecionar um valor alto de m_r , para $N = 20$, o tempo de simulação do GA-*stall* resultou significativamente pequeno. No entanto, houve apenas um modesto aumento de desempenho da diretividade quando comparado ao OUPA e GA-*marginal*.

A configuração distinta encontrada para $N = 4$ pode ser explicada pela simplicidade desta configuração geométrica. Portanto, o fato da solução passar por uma evolução bastante instável não a preveniu de encontrar uma solução de alta qualidade.

¹Redução da ordem de $10^{3,5}$ e 10^6 no tempo computacional em relação ao GA-*marginal* e GA-*stall*, respectivamente, para as configurações da rede da Fig. 5.7.

5.6 Conclusões

Neste Capítulo foram analisados comparativamente os resultados numéricos referentes à técnica proposta neste trabalho: Rede Uniforme Planar Ótima (OUPA) versus Algoritmo Genético (GA), o qual foi introduzido nesta parte final do trabalho como uma técnica de comparação tendo em vista confirmar a eficiência e eficácia do método proposto.

A análise numérica de OUPA com $N_1 \times N_2$ antenas, demonstrou que com o aumento da diretividade, inevitavelmente há um incremento na área utilizada. Além disso, o aumento do número de antenas não necessariamente resulta em um incremento da diretividade e área, como foi verificado que a escolha de N_1 e N_2 possui um impacto maior nessas grandezas. Se a diferença entre N_1 e N_2 for pequena ou nula, o valor da diretividade será elevado e essa estrutura irá ocupar uma área maior. Caso a diferença seja grande o inverso acontece, a diretividade será reduzida e uma área menor será ocupada. Como neste trabalho o foco é o aprimoramento da diretividade, foi determinado que essa a diferença entre N_1 e N_2 na estrutura planar deva ser menor ou igual a 1.

Os resultados com a aplicação do método GA mostraram como a técnica heurística é capaz de resolver o problema com grande vantagem em termos da qualidade da solução (valores de diretividade), quando comparada à ULA. Observou-se também que para um número pequeno de antenas o resultado final tende a uma estrutura regular. No entanto, para um número maior de antenas, a técnica evolucionária se mostrou ineficiente em encontrar uma solução promissora em um tempo moderado.

Com o objetivo de superar esse impedimento foram propostos dois conjuntos de alterações nos parâmetros de entrada do algoritmo, denominados *GA-marginal* e *GA-stall*.

Os resultados numéricos encontrados, ao implementar a técnica OUPA proposta e as variações do algoritmo genético *GA-marginal* e *GA-stall*, em diferentes cenários de simulações foi constatado um aumento expressivo na diretividade, principalmente quando comparado com outros métodos convencionais da literatura (UCA e ULA).

A complexidade computacional das técnicas introduzidas foram analisadas pelo tempo de simulação computacional, sendo constatado que a OUPA demonstrou um desempenho muito superior do que as técnicas heurísticas, atingindo uma redução do tempo computacional da ordem de $10^{3,5}$ e 10^6 em relação ao

GA-*marginal* e GA-*stall*, respectivamente, para configurações de rede com até $N = 36$ antenas.

6 Conclusões

6.1 Conclusões - Diretividade Forma Fechada

Este trabalho propõe uma nova expressão para diretividade, que é uma aproximação da forma fechada para um conjunto volumétrico de antenas considerando um padrão de irradiação do tipo dipolo de meia onda. Os parâmetros utilizados nessa expressão possuem relação com: a posição espacial em coordenadas retangulares de cada elemento de antena, os coeficientes de magnitude e fase de todos elementos, e os ângulos de interesse (θ_0, ϕ_0) . A expressão proposta é apropriada para determinar diretividade utilizando menos esforço computacional e tempo, dado que a expressão derivada é exata.

Considerando um fator de elemento generalista da forma $\sin^u(\theta) \cos^v(\theta)$, a expressão da diretividade foi novamente encontrada, agora também em função dos expoentes u e v do fator de elemento. Para a expressão encontrada, u, v precisam ser valores inteiros e positivos; no entanto, essa restrição não afeta a generalidade do fator de elemento, dado que a superposição de termos do tipo $\sin^u(\theta) \cos^v(\theta)$ na análise de Fourier sempre ocorre para a condição de expoentes inteiros e positivos.

Os resultados numéricos para diferentes valores de u, v , que resultam em fatores de elemento distintos, demonstraram um desempenho muito próximo entre a diretividade calculada pela expressão proposta e pela integração numérica, considerando uma variedade de valores de u e v .

6.2 Conclusões - Otimização da Diretividade de Conjunto de Antenas Omnidirecionais

Este trabalho propõe uma nova maneira de maximizar a diretividade de um conjunto volumétrico de antenas omnidirecionais, utilizando a nova expressão de diretividade generalista encontrada na primeira parte da dissertação, dado que

essa expressão possui uma boa aproximação do cenário omnidirecional e possui uma complexidade menor quando comparada com a expressão exata. Essa nova técnica utiliza a estrutura de Conjunto Uniforme Planar (UPA) confinada em um plano específico com a distância mínima entre os elementos de antenas otimizadas pela aplicação do procedimento de Avaliação e Validação Sucessiva (SEV). Esta técnica foi denominada Conjunto Uniforme Planar Ótimo (OUPA). Além disso, o método evolutivo heurístico do algoritmo genético é aplicado com o objetivo de servir como comparação, sendo que para números maiores de antenas foram sugeridas duas alterações nos parâmetros iniciais deste modo, denominados *GA-marginal* e *GA-stall*.

A complexidade computacional foi analisada através do tempo de simulação, e a OUPA demonstrou um desempenho muito superior do que as técnicas heurísticas. Além disso, a técnica OUPA se demonstrou promissora para cenários M-MIMO, alcançando a marca de 30 dBi de diretividade para uma UPA com $N = 240 = 15 \times 16$ antenas.

Apêndice A – Trabalhos Desenvolvidos

Neste Apêndice são apresentados os trabalhos desenvolvidos desde o início do Mestrado Acadêmico. O primeiro trabalho trata-se de um artigo submetido e publicado na revista *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, este *communication paper* desenvolve, a partir das definições matemáticas, uma nova expressão em forma fechada para a diretividade de uma forma genérica. O segundo trabalho foi publicado na categoria artigo de conferência, cujo foco consiste da otimização da diretividade, a partir da expressão encontrada no trabalho anterior, através do algoritmo genético para o cenário omnidirecional.

A seguir são apresentados os dois trabalhos formatados, na ordem temporal em que foram desenvolvidos.

A.1 Expressão da Diretividade em forma fechada para uma Rede Volumétrica Arbitrário de Antenas

Título: *Closed-Form Directivity Expression for Arbitrary Volumetric Antennas Arrays*

Autores: Bruno Felipe Costa and Taufik Abrão;

Categoria: *Communication Paper*

Publicação: Aceito (2018)

Revista: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*.

Resumo das Contribuições: A principal contribuição deste trabalho é apresentação da expressão da diretividade em forma fechada para uma rede volumétrica arbitrário de antenas apresentada na Seção III, Equação (15).

Communication

Closed-Form Directivity Expression for Arbitrary Volumetric Antenna Arrays

Bruno Felipe Costa and Taufik Abrão^{IB}

Abstract—It is proposed a closed-form expression of directivity for an arbitrary volumetric antenna arrays using a general element pattern expression of type $\sin^u(\theta)\cos^v(\theta)$, with $v > -(1/2)$ and $u > -1$, and $u, v \in \mathbb{Z}$. Variations of this expression for different values of v and u are analyzed from the analytical and numerical perspectives. The parameters found in the closed-form expression are related to the order v and u of the element patterns, the rectangular spatial coordinate of each antenna element, the magnitude and phase excitation coefficients (complex excitation) of all elements, and the desired angle in spherical coordinates (θ_0, ϕ_0) . The expression found in this communication has been validated by numerical results, considering distinct configuration scenarios.

Index Terms—Antenna, array factor, closed form, directivity, element factor (EF).

I. INTRODUCTION

Different types of antenna arrays have been considered in the transmission of multiple-input multiple-output (MIMO) systems given their capacity to provide directive beams with high antenna gains. In [1], the effects of different antenna array geometries, such as uniform linear, uniform circular, uniform rectangular, and uniform cubic arrays, are investigated in different MIMO channel configurations. Moreover, large-scale antenna arrays have been studied for a variety of applications; for instance, with the increase of the number of antennas, the massive MIMO (M-MIMO) condition can be attained, which is a promising solution to deal with the actual high-data-rate trend scenarios. Indeed, the M-MIMO technology has been identified as one of the promising technologies to achieve 5G network requirements [2] since a massive number of antennas at the base station (BS) provides a considerable improvement on the directivity and antenna gains compared with conventional MIMO systems. Deploying a BS with a large number of antennas can serve a large number of users at the same time and frequency, saving the scarce time–frequency resources [3]. By increasing the number of BS antennas, the network capacity is improved substantially in multi-user scenarios, as well as throughput, link reliability, spectral, and transmit-energy efficiency performance while guaranteeing simpler signal processing.

It can be verified that the 3-D configuration of antenna elements (volumetric arrays) have become suitable for M-MIMO instead of 1-D configuration (linear arrays) due to the constraint in array aperture [4]. However, directivity expression for such arrays is not

easily found. High directive arrays provide substantial energy efficiency gains, since the intensity of the signal is increased in the desired angles. Commonly, the radiation pattern of a single element is relatively large, providing small values of directivity. Antenna arrays produce gains in the directivity without increasing the size of single elements. Usually, the general array properties can be controlled and optimized by adjusting the number of elements, the antenna spacing between them, excitation coefficients, phase of each element, the geometrical configuration of the overall arrays (linear, circular, elliptical, and so on), as well as the relative pattern of the individual elements [5].

In [6], approximations for linear, planar, and volumetric aperture and arrays directivity are derived, and numerical methods are applicable for such computations; however, the associated computational cost increases with the array geometry dimension and the number of elements. Hence, in the last decades, several attempts have been made to evaluate directivity analytically. Closed-form expressions of directivity have been proposed in [7] for linear arrays equipped with isotropic antenna elements, while symmetric linear antenna arrays with short dipole and isotropic element patterns directivity were discussed in [8]. Moreover, [9] analyzes single ring circular and elliptical arrays equipped with isotropic elements, while rectangular planar arrays with progressive phasing are treated in [10]. Generalized expressions for the directivity of planar arrays have been investigated in [11] and [12]. Recently, a generalized expression of directivity for volumetric antennas using infinite series was presented in [13].

Contribution: In this communication, a new and generalized expression for the directivity considering also a generalized element pattern and using arbitrary volumetric arrays is derived and corroborated by a numerical analysis.

This communication is organized as follows. Section II describes the radiation pattern of an antenna array considering generalized element factors (EFs) of type $\sin^u(\theta)\cos^v(\theta)$. In Section III, a closed-form expression for volumetric antenna array directivity is derived using generalized element patterns. The found expressions for the directivity are validated by numerical analysis in Section IV, considering different scenarios of interest. Main conclusions are offered in Section V.

II. RADIATION PATTERN OF AN ANTENNA ARRAY

The total field of an array according to pattern multiplication principle can be formed by multiplying the field of a single element ($\Upsilon_e(\theta, \phi)$) and the array factor ($\Upsilon_a(\theta, \phi)$) by the selected direction. Hence, the radiation pattern of an antenna array can be written as

$$\Upsilon(\theta, \phi) = \Upsilon_e(\theta, \phi)\Upsilon_a(\theta, \phi). \quad (1)$$

The EF, also known as element pattern, is the radiation pattern of a single-element antenna; the model selected must resemble the pattern of a real antenna. Using spherical coordinates, the resulted EF expression is periodic in both θ and ϕ -planes. Therefore, the radiated power of an arbitrary real antenna can be approximated using the

Manuscript received May 8, 2018; revised July 18, 2018; accepted August 22, 2018. Date of publication September 10, 2018; date of current version November 30, 2018. This work was supported in part by the National Council for Scientific and Technological Development (CNPq) of Brazil under Grant 304066/2015-0, in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Brazil (scholarship), and in part by the Londrina State University, Paraná State Government (UEL). (Corresponding author: Taufik Abrão.)

The authors are with the Electrical Engineering Department, Londrina State University, Parana 86057-970, Brazil (e-mail: bruno.uel.felipe@gmail.com; taufik@uel.br).

Color versions of one or more of the figures in this communication are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TAP.2018.2869243

0018-926X © 2018 IEEE. Personal use is permitted, but republication/redistribution requires IEEE permission. See http://www.ieee.org/publications_standards/publications/rights/index.html for more information.

Fourier analysis, which results in a linear combination of powers of cosines and sines. Hence, in this communication, the EFs will be considered as

$$\Upsilon_e(\theta) = \sin^u(\theta) \cos^v(\theta). \quad (2)$$

Indeed, we aim to find a generalized directivity expression considering different values of exponents u and v .

The array factor quantifies the effect of combining radiating elements in an array without considering the specific radiation pattern taken into account; this factor has a dependence in terms of position, relative phase, and relative amplitude of each antenna element and can be written as

$$\Upsilon_a(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^N A_n e^{j(\alpha_n + k \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{a}_r)} \quad (3)$$

where N is the number of elements, A_n is the relative amplitude of the n th element, α_n is the relative phase of the n th element, \mathbf{r}_n is the position vector of the n th element, k is the wavenumber, and \mathbf{a}_r is the unit vector of observation point in spherical coordinates, given by

$$\mathbf{a}_r = \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{j} + \cos(\theta) \hat{k} \quad (4)$$

The position vector utilized, in this communication, is given by

$$\mathbf{r}_n = r_{x_n} \hat{i} + r_{y_n} \hat{j} + r_{z_n} \hat{k}. \quad (5)$$

The array factor can be interpreted as the radiation pattern by replacing the actual elements by the isotropic (point) sources, i.e., $\Upsilon_e(\theta, \phi) = 1$.

III. CLOSED-FORM EXPRESSION FOR THE VOLUMETRIC ARRAY DIRECTIVITY

When the antenna does not radiate power isotropically, i.e., equally in all directions, the resulted directivity can be desirable depending on the application, irradiating more signal power in specific directions. This feature is the result of constructive and destructive interference from radiators, i.e., the elements of an antenna array.

The directivity determination evaluates the power density in a designated direction to the average power density of irradiation in all directions. Antenna directivity can be expressed as the ratio between the radiation intensity in the desired angle (θ_0, ϕ_0) and the sum of the radiation intensity in all the other directions

$$D(\theta_0, \phi_0) = \frac{|\Upsilon(\theta_0, \phi_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\Upsilon(\theta, \phi)|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}. \quad (6)$$

The numerator of (6) is well-defined for a desired angle (θ_0, ϕ_0) using (1); hence, solving the normalization integral of the denominator of (6), a closed-form expression for the directivity can be obtained

$$\mathcal{T} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\Upsilon(\theta, \phi)|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (7)$$

The radiation intensity can be written considering (2) and using (3)–(5) as

$$|\Upsilon(\theta, \phi)|^2 = \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) \left[\sum_{n=1}^N A_n^2 + 2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \cos[\Omega_{xyz}(\theta, \phi, n, m)] \right] \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} \Omega_{xyz}(\theta, \phi, n, m) = & k[(r_{x_n} - r_{x_m}) \sin \theta \cos \phi \\ & + (r_{y_n} - r_{y_m}) \sin \theta \sin \phi + (r_{z_n} - r_{z_m}) \cos \theta] \\ & + (\alpha_n - \alpha_m) \end{aligned} \quad (9)$$

in which we can rewrite as

$$\Omega_{xyz}(\theta, \phi, n, m) = k(x_{mn} \sin \theta \cos \phi + y_{mn} \sin \theta \sin \phi + z_{mn} \cos \theta) + \alpha_{mn} \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} x_{mn} = & k(r_{x_n} - r_{x_m}); & y_{mn} = & k(r_{y_n} - r_{y_m}) \\ z_{mn} = & k(r_{z_n} - r_{z_m}); & \alpha_{mn} = & \alpha_n - \alpha_m. \end{aligned} \quad (11)$$

Therefore, the first integral in (7) can be expressed as

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\Upsilon(\theta, \phi)|^2 d\phi = \frac{1}{4\pi} \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) \times \left[\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^N A_n^2 d\phi + 2 \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \cos[\Omega_{xyz}(\theta, \phi, n, m)] d\phi \right]. \quad (12)$$

These two integrals are calculated in Appendix A, resulting

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) \left[\sum_{n=1}^N A_n^2 + 2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N J_0(\gamma_{mn}) A_n A_m \cos(z_{mn} \cos \theta + \alpha_{mn}) \right] \quad (13)$$

where $\gamma_{mn} = \sin \theta \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2}$, and $J_0(\cdot)$ is the Bessel function of the first kind. Hence, the directivity becomes

$$D(\theta_0, \phi_0) = \frac{|\Upsilon(\theta_0, \phi_0)|^2}{\mathcal{T}} = \frac{|\Upsilon(\theta_0, \phi_0)|^2}{\int_0^\pi \mathcal{F} \sin(\theta) d\theta}. \quad (14)$$

Solving the integral in (14) (see Appendix B), the directivity for an arbitrary volumetric antenna array results in (15), which represents a new analytical closed-form generalized expression for the antenna array directivity.

Since the proposed directivity expression does not use any approximation, the result found is expected to be exact. Moreover, such an expression does not need to estimate the pattern and integrate over the entire beam area; therefore, computational efforts and time consumption are mitigated.

IV. VALIDATION

The validation of the proposed directivity closed-form expression in (15) was conducted through extensive numerical integration and analysis. In the sequel, the closed-form directivity is evaluated considering illustrative scenarios of interest.

A. Scenarios

All simulations and results follow the parameter setup described in Table I, which is the same utilized in [13, Table I, Set 2]. The direction selected to evaluate the directivity was $\theta_0 = 101.44^\circ$ and $\phi_0 = 267.75^\circ$, which is the angle that maximizes the directivity for

TABLE I
 PARAMETER SETUP USED IN THE NUMERICAL SIMULATIONS

Element Location	Complex Excitation	
$[r_{x_n}, r_{y_n}, r_{z_n}] \cdot \lambda$	A_n (normalized)	α_n (degree)
[0.00, 0.00, 0.00]	0.84	-4.28
[2.71, 1.22, 1.06]	0.93	-121.36
[1.03, 4.77, 4.40]	0.13	-58.39
[5.31, 3.61, 2.45]	0.94	74.06
[0.52, 2.25, 1.71]	0.60	-112.04
[4.37, 3.07, 2.52]	0.10	169.73
[4.59, 2.51, 0.98]	0.29	-59.63
[4.84, 0.88, 1.16]	0.56	143.29
[0.92, 1.70, 5.21]	0.99	-94.67
[2.50, 1.12, 5.28]	1.00	124.53

λ : carrier wavelength

omnidirectional sources ($u = 0|v = 0$). The directivity was calculated for different values of EF using (15), as shown at the bottom of this page, and compared with numerical integration. Adopting omnidirectional sources, it is possible to compare and corroborate the results obtained with those in [13].

The EFs considered include four configurations

$$\Upsilon_e(\theta) = \sin^u(\theta) \cos^v(\theta) \equiv \begin{cases} 1 & v = 0|u = 0 \\ \sin(\theta) & v = 0|u = 1 \\ \cos(\theta) & v = 1|u = 0 \\ \sin(\theta) \cos(\theta) & v = 1|u = 1. \end{cases} \quad (16)$$

The closed-form expression of directivity in terms of \mathcal{T} , as in (14), for the four cases of (16), is discussed in the sequel.

- 1) *Directivity for $v = 0|u = 0$* : For such values of exponents, the normalization integral, using (15), results

$$\mathcal{T}_1 = \sum_{n=1}^N A_n^2 + 2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) \frac{\sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}}. \quad (17)$$

- 2) *Directivity for $v = 1|u = 0$* : For these values of exponents, the normalization integral is obtained as (18), as shown at the top of the next page.
- 3) *Directivity for $v = 0|u = 1$* : The normalization integral results as in (19), as shown at the top of the next page.
- 4) *Directivity for $v = 1|u = 1$* : When the exponents v and u grow, the directivity expression results increasingly complex, as depicted in (20), as shown at the top of the next page, for the case $v = 1$ and $u = 1$.

B. Numerical Results

Using the scenario described in Table I, the directivity was computed using the closed-form expression and then compared with

TABLE II

VALUES OF DIRECTIVITY USING (15) AND NUMERICAL INTEGRATION

Exponents	Directivity	Numerical Integration	Error
$v = 0 u = 0$	7.75 dBi	7.75 dBi	1.77×10^{-12}
$v = 1 u = 0$	5.68 dBi	5.68 dBi	5.80×10^{-13}
$v = 0 u = 1$	9.18 dBi	9.18 dBi	2.97×10^{-12}
$v = 1 u = 1$	2.38 dBi	2.38 dBi	5.65×10^{-13}

numerical integration; all computations have been carried out with MATLAB (R2016a). For a numerical integration procedure, iterative method with 10^{-6} relative error tolerance has been adopted. Table II depicts the differences in the range of $\{10^{-13}; 10^{-12}\}$ attained when directivity is calculated by the expressions proposed herein and compared with the numerical integration results.

V. CONCLUSION

This communication proposes a new directivity closed-form expression for arbitrary volumetric antenna arrays considering generic antenna element patterns. The parameters used in this closed-form expression are related to the order v and u of the element patterns, the rectangular spatial coordinate of each antenna element, the magnitude and phase excitation coefficients (complex excitation) of all elements, and the desired angles (θ_0, ϕ_0) . The proposed expression is appropriate to determine the directivity of antenna arrays even under the effect of mutual coupling, using less computational resources and time, due to the fact that the derived expression is exact. Notice that exponents u, v must lie in the following regions: $v > -\frac{1}{2}$ and $u > -1$, for $u, v \in \mathbb{Z}$; however, these restrictions do not affect the generality of the element pattern, given that the superposition of terms $\sin^u(\theta) \cos^v(\theta)$, formed by the Fourier analysis, is denoted by integer exponents.

Numerical results for different element patterns (v, u exponents) have demonstrated an excellent directivity compliance when comparing attained values calculated by the expressions proposed herein with the numerical integration results, considering a wide range of permitted values of exponents v and u .

APPENDIX A INTEGRALS IN \mathcal{F}

The two integrals in (12) can be expressed as the sum of the following integrals weighted by $\frac{\sin^{2u} \theta \cos^{2v} \theta}{4\pi}$.

A. First Integral Λ

The solution of the first integral Λ is straightforward, resulting

$$\Lambda = \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \sum_{n=1}^N A_n^2. \quad (21)$$

$$\mathcal{D}(\theta_0, \phi_0) = \frac{\sin^{2u}(\theta_0) \cos^{2v}(\theta_0) \left[\sum_{n=1}^N A_n^2 + \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \cos[\Omega_{xyz}(\theta_0, \phi_0, n, m)] \right]}{\sum_{n=1}^N A_n^2 \left[\frac{1}{8}((-1)^{2v} + 1) \mathcal{B}(u+1, v+\frac{1}{2}) \right] + 2(-1)^{(v+2u)} \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N \sum_{\kappa=0}^u A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(\alpha_{mn}) \frac{\partial^{2(v+u-\kappa)}}{\partial z_{mn}^{2(v+u-\kappa)}} \left[\frac{\sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right]}$$

where: $\Omega_{xyz}(\theta_0, \phi_0, n, m) = k[(r_{x_n} - r_{x_m}) \sin \theta_0 \cos \phi_0 + (r_{y_n} - r_{y_m}) \sin \theta_0 \sin \phi_0 + (r_{z_n} - r_{z_m}) \cos \theta_0] + (\alpha_n - \alpha_m)$
 $\beta = k\sqrt{(r_{x_n} - r_{x_m})^2 + (r_{y_n} - r_{y_m})^2}$; $z_{mn} = k(r_{z_n} - r_{z_m})$; $u > -1$; $v > -\frac{1}{2}$; and $v, u \in \mathbb{Z}$ (15)

$$\mathcal{T}_2 = \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{3} - 2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) \left[\frac{(\beta^2 - 2z_{mn}^2) \cos(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^2} - \frac{((\beta^2 - 2)z_{mn}^2 + \beta^2 + z_{mn}^4) \sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^{5/2}} \right] \quad (18)$$

$$\mathcal{T}_3 = \sum_{n=1}^N \frac{2A_n^2}{3} + 2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) [\Psi_1 + \Psi_2], \quad \text{where}$$

$$\Psi_1 = \left[\frac{(\beta^6 (- (z_{mn}^2 - 2)) - \beta^4 (4z_{mn}^4 + 27z_{mn}^2 + 9) - \beta^2 z_{mn}^2 (5z_{mn}^4 + 15z_{mn}^2 - 72) - 2z_{mn}^4 (z_{mn}^4 - 7z_{mn}^2 + 12)) \sin \sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^{9/2}} \right]$$

$$\Psi_2 = \left[\frac{(\beta^6 + 3\beta^4 (2z_{mn}^2 + 3) - \beta^2 z_{mn}^2 (z_{mn}^2 + 72) - 6z_{mn}^4 (z_{mn}^2 - 4)) \cos \sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^4} \right] \quad (19)$$

$$\mathcal{T}_4 = \sum_{n=1}^N \frac{2A_n^2}{15} + 2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) [\Psi_3 + \Psi_4], \quad \text{where}$$

$$\Psi_3 = \sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}) \left[\frac{-3\beta^{10} + \beta^8 (z_{mn}^4 - 24z_{mn}^2 - 81) + \beta^6 (5z_{mn}^6 + 114z_{mn}^4 + 1611z_{mn}^2 + 225)}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^{13/2}} \right. \\ \left. + \frac{3\beta^4 z_{mn}^2 (3z_{mn}^6 + 82z_{mn}^4 - 292z_{mn}^2 - 1350) + \beta^2 z_{mn}^4 (7z_{mn}^6 + 69z_{mn}^4 - 2184z_{mn}^2 + 5400)}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^{13/2}} \right. \\ \left. + \frac{2z_{mn}^6 (z_{mn}^6 - 21z_{mn}^4 + 192z_{mn}^2 - 360)}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^{13/2}} \right]$$

$$\Psi_4 = \cos(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}) \left[\frac{6\beta^8 (z_{mn}^2 - 1) + \beta^6 (29z_{mn}^4 + 336z_{mn}^2 + 225) + 6\beta^4 z_{mn}^2 (5z_{mn}^4 - 71z_{mn}^2 - 675)}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^6} \right. \\ \left. - \frac{3\beta^2 z_{mn}^4 (z_{mn}^4 + 208z_{mn}^2 - 1800) + 2z_{mn}^6 (5z_{mn}^4 - 72z_{mn}^2 + 360)}{(\beta^2 + z_{mn}^2)^6} \right] \quad (20)$$

B. Second Integral Ξ

Defining

$$\begin{aligned} a_{mn} &= x_{mn} \sin \theta; & b_{mn} &= y_{mn} \sin \theta \\ c_{mn} &= z_{mn} \cos \theta + a_{mn} \end{aligned} \quad (22)$$

the second integral becomes

$$\begin{aligned} \Xi &= 2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \int_0^{2\pi} \cos(a \cos \phi + b \sin \phi + c) d\phi \\ &= 4\pi \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \cos(c_{mn}) J_0(\sqrt{a_{mn}^2 + b_{mn}^2}) \end{aligned} \quad (23)$$

for $\sqrt{a_{mn}^2 + b_{mn}^2} \in \mathbb{R}$ and $J_0(\cdot)$ is the Bessel function of the first kind. Substituting the values of a_{mn} , b_{mn} , and c_{mn} , we have

$$\Xi = 4\pi \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \cos(z_{mn} \cos \theta + a_{mn}) \times J_0(\sin \theta \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2}). \quad (24)$$

For $\sin \theta \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2} \in \mathbb{R}$, the term $\sin \theta$ is always real; therefore, one can evaluate the following equality:

$$\sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2} = k \sqrt{(r_{x_n} - r_{x_m})^2 + (r_{y_n} - r_{y_m})^2} \quad (25)$$

which is always real, because r_{x_n} , r_{y_n} , r_{x_m} , and r_{y_m} are the coordinates of the position of the antenna array and k is the number of wave, also real; therefore, (24) holds.

C. \mathcal{F} Expression

Finally, one can express the integral \mathcal{F} in (12) as

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2} \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) [\Lambda + \Xi] \\ &= \frac{1}{2} \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) \left[\sum_{n=1}^N A_n^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \cos(z_{mn} \cos \theta + a_{mn}) \right. \\ &\quad \left. \times J_0(\sin \theta \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2}) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

APPENDIX B
 INTEGRAL IN \mathcal{T}

Using the result of (26), the integral in the denominator of (14) can be expressed as the sum of the following integrals:

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2 \int_0^\pi \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) \sin \theta d\theta \\ \xi &= \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \int_0^\pi \sin^{2u}(\theta) \cos^{2v}(\theta) \cos(z_{mn} \cos \theta + \alpha_{mn}) \\ &\quad \times J_0(\sin \theta \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2}) \sin \theta d\theta.\end{aligned}\quad (27)$$

 A. ζ Integral

The integral ζ can be calculated as

$$\zeta = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^N A_n^2 [(-1)^{2v} + 1] \cdot \mathcal{B}\left(u + 1, v + \frac{1}{2}\right) \quad (28)$$

where $\mathcal{B}(\cdot)$ is the Beta function; the above-mentioned result is valid and real for $u > -1$ and $v > -\frac{1}{2}$, such that $u \in \mathbb{R}$ and $v = \frac{q}{2}$, for $q \in \mathbb{Z}$.

 B. The ξ Integral

To solve ξ , we can define $\beta = \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2}$ and use the following trigonometric substitution:

$$\cos(\theta) = x \rightarrow \begin{cases} -\sin \theta d\theta = dx \\ \sin(\theta) = \sqrt{1-x^2}. \end{cases} \quad (29)$$

The integral interval changes accordingly

$$\cos(\theta) = x \rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow x = \cos(0) = 1 \\ \theta = \pi \rightarrow x = \cos(\pi) = -1. \end{cases} \quad (30)$$

Changing the integration order, we can write the integral as

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \int_1^{-1} x^{2v} (1-x^2)^u \cos(z_{mn}x + \alpha_{mn}) \\ &\quad \times J_0(\beta \sqrt{1-x^2}) dx.\end{aligned}\quad (31)$$

Using trigonometric relations, we can rewrite the expression as

$$\xi = \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m [\cos(\alpha_{mn}) \rho_1 + \sin(\alpha_{mn}) \rho_2] \quad (32)$$

where

$$\rho_1 = \int_{-1}^1 x^{2v} (1-x^2)^u \cos(z_{mn}x) J_0(\beta \sqrt{1-x^2}) dx \quad (33)$$

$$\rho_2 = \int_{-1}^1 x^{2v} (1-x^2)^u \sin(z_{mn}x) J_0(\beta \sqrt{1-x^2}) dx. \quad (34)$$

Assuming $v \in \mathbb{Z}$, we can analyze the parity of integral argument functions

$$\begin{aligned}\underbrace{x^{2v}}_{\text{even}} \underbrace{(1-x^2)^u}_{\text{even}} \underbrace{\cos(z_{mn}x)}_{\text{even}} \underbrace{J_0(\beta \sqrt{1-x^2})}_{\text{even}} &\rightarrow \text{even function} \\ \underbrace{x^{2v}}_{\text{even}} \underbrace{(1-x^2)^u}_{\text{even}} \underbrace{\sin(z_{mn}x)}_{\text{odd}} \underbrace{J_0(\beta \sqrt{1-x^2})}_{\text{even}} &\rightarrow \text{odd function.}\end{aligned}\quad (35)$$

Therefore, for this symmetric interval, we can conclude that $\rho_2 = 0$ and ρ_1 is doubled for the positive interval, and thus, we can write

$$\begin{aligned}\xi &= 2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N A_n A_m \cos(\alpha_{mn}) \int_0^1 x^{2v} (1-x^2)^u \cos(z_{mn}x) \\ &\quad \times J_0(\beta \sqrt{1-x^2}) dx.\end{aligned}\quad (36)$$

Indeed, considering $u \in \mathbb{Z}$, we can rewrite (36) using the binomial coefficient expansion as

$$\begin{aligned}\xi &= 2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N \sum_{\kappa=0}^u (-1)^{(u+\kappa)} A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(\alpha_{mn}) \\ &\quad \times \int_0^1 x^{2(v+u-\kappa)} \cos(z_{mn}x) J_0(\beta \sqrt{1-x^2}) dx.\end{aligned}\quad (37)$$

To solve the above-mentioned integral, we need to transform the following integral [14]:

$$\int_0^a \cos(cx) J_0(b \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \frac{\sin(a \sqrt{b^2 + c^2})}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad (38)$$

for $b \geq 0$. Now, considering $a = 1$, it is straightforward to write

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2v}}{\partial c^{2v}} \left[\int_0^1 \cos(cx) J_0(b \sqrt{1-x^2}) dx \right] \\ = (-1)^v \int_0^1 x^{2v} \cos(cx) J_0(b \sqrt{1-x^2}) dx.\end{aligned}\quad (39)$$

Substituting (38) into (39), one can write

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{2v} \cos(cx) J_0(b \sqrt{1-x^2}) dx \\ = (-1)^v \frac{\partial^{2v}}{\partial c^{2v}} \left[\frac{\sin(\sqrt{b^2 + c^2})}{\sqrt{b^2 + c^2}} \right].\end{aligned}\quad (40)$$

Therefore, using the above-mentioned result, (37) can be written as

$$\begin{aligned}\xi &= 2(-1)^{(v+2u)} \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N \sum_{\kappa=0}^u A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(\alpha_{mn}) \\ &\quad \times \frac{\partial^{2(v+u-\kappa)}}{\partial z_{mn}^{2(v+u-\kappa)}} \left[\frac{\sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right] \text{ for } \beta \geq 0\end{aligned}\quad (41)$$

we have $\beta = \sqrt{(x_{mn})^2 + (y_{mn})^2}$, which is always positive because x_{mn} and y_{mn} are real, and therefore, we can write

$$\begin{aligned}\xi &= 2(-1)^{(v+2u)} \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N \sum_{\kappa=0}^u A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(\alpha_{mn}) \\ &\quad \times \frac{\partial^{2(v+u-\kappa)}}{\partial z_{mn}^{2(v+u-\kappa)}} \left[\frac{\sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right].\end{aligned}\quad (42)$$

C. \mathcal{T} Expression

Finally, the \mathcal{T} integral in (7) and (14) can be expressed as

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{2}[\zeta + \xi] = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^N A_n^2 \left[((-1)^{2v} + 1) \mathcal{B} \left(u + 1, v + \frac{1}{2} \right) \right] \\ & + 2(-1)^{(v+2u)} \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N \sum_{\kappa=0}^u A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(a_{mn}) \\ & \times \frac{\partial^{2(v+u-\kappa)}}{\partial z_{mn}^{2(v+u-\kappa)}} \left[\frac{\sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right] \end{aligned} \quad (43)$$

where

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2} \\ u &> -1, \quad v > -\frac{1}{2}, \quad \text{and } u, v \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (44)$$

REFERENCES

- [1] A. A. Abouda, H. M. El-Sallabi, and S. G. Häggman, "Effect of antenna array geometry and ULA azimuthal orientation on MIMO channel properties in urban city street grid," *Prog. Electromagn. Res.*, vol. 64, pp. 257–278, 2006, doi: [10.2528/PIER06050801](https://doi.org/10.2528/PIER06050801).
- [2] M. Agiwal, A. Roy, and N. Saxena, "Next generation 5G wireless networks: A comprehensive survey," *IEEE Commun. Surveys Tuts.*, vol. 18, no. 3, pp. 1617–1655, 3rd Quart., 2016.
- [3] M. Mbeutcha, W. Fan, J. Hejlsbæk, and G. F. Pedersen, "Evaluation of massive MIMO systems using time-reversal beamforming technique," in *Proc. IEEE 27th Annu. Int. Symp. Pers., Indoor, Mobile Radio Commun. (PIMRC)*, Sep. 2016, pp. 1–6.
- [4] N. H. M. Adnan, I. M. Rafiqul, and A. H. M. Z. Alam, "Effects of inter element spacing on large antenna array characteristics," in *Proc. IEEE 4th Int. Conf. Smart Instrum., Meas. Appl. (ICSIMA)*, Nov. 2017, pp. 1–5.
- [5] C. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2012.
- [6] A. H. Nuttall and B. A. Cray, "Approximations to directivity for linear, planar, and volumetric apertures and arrays," *IEEE J. Ocean. Eng.*, vol. 26, no. 3, pp. 383–398, Jul. 2001.
- [7] R. L. Haupt, *Antenna Arrays: A Computational Approach*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2010.
- [8] D. H. Werner, D. Mulyantini, and P. L. Werner, "Closed-form representation for directivity of nonuniformly spaced linear arrays with arbitrary element patterns," *Electron. Lett.*, vol. 35, no. 25, pp. 2155–2157, Dec. 1999.
- [9] B. K. Singaraju, "Theory and applications of antenna arrays," *Proc. IEEE*, vol. 63, no. 7, p. 1086, Jul. 1975.
- [10] A. K. Bhattacharyya, *Phased Array Antennas: Floquet Analysis, Synthesis, BFNs, and Active Array Systems*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2010.
- [11] S. Das, D. Mandal, R. Kar, and S. P. Ghoshal, "A generalized closed form expression of directivity of arbitrary planar antenna arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 61, no. 7, pp. 3909–3911, Jul. 2013.
- [12] S. Das, D. Mandal, R. Kar, and S. P. Ghoshal, "A generalized expression of directivity for planar antenna arrays," in *Proc. Annu. IEEE India Conf. (INDICON)*, Dec. 2013, pp. 1–3.
- [13] S. Das, D. Mandal, S. P. Ghoshal, and R. Kar, "Generalization of directivity expressions for antenna arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 65, no. 2, pp. 915–919, Feb. 2017.
- [14] I. Gradshteyn, A. Jeffrey, and I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. New York, NY, USA: Academic, 1996.

A.2 Otimização da Diretividade para uma Rede Volumétrica de Antenas Omnidirecionais

Título: *Directivity Optimization in Omnidirectional Volumetric Antennas Arrays*

Autores: Bruno Felipe Costa and Taufik Abrão;

Categoria: *Conference Paper*;

Publicação: 2019;

Congresso: *IEEE Wireless Communications and Networking Conference 2019 - WCNC 2019*

Resumo das Contribuições: As principais contribuições deste trabalho são: a formulação matemática para o problema de otimização da diretividade descrita na seção III, a interpretação geométrica dada pela escolha do cenário omnidirecional na Seção III A e a implementação da técnica do algoritmo genético para a resolução do problema para um número pequeno de antenas na seção IV.

Directivity Optimization in Omnidirectional Volumetric Antenna Arrays

Bruno Felipe Costa, Taufik Abrão

Department of Electrical Engineering, Londrina State University, Londrina, Brazil,
bruno.uel.felipe@gmail.com taufik@uel.br

Abstract—Directivity pattern is a paramount performance measure in antenna array configurations. Applications such as heterogeneous MIMO wireless cellular communication can greatly benefit in exploring antenna directivity improvement. The problem of directivity optimization, which leads to a highly increasing in directivity gain on a certain desired angle of arrive/departure (AoA/AoD), is considered in this work. A new formulation on the volumetric array directivity problem is proposed using the rectangular coordinates to describe each antenna element, and the desired angle in spherical coordinates (θ_0, ϕ_0) , with a general element pattern given by $\sin^u \theta \cos^v \theta$. To solve the associated optimization problem, the omnidirectional $(\cos \theta)$ configuration was selected; besides, generalized scenarios, i.e. $\forall u, v \neq 0$, can easily be considered deploying a similar formulation. A well-defined genetic algorithm (GA) was selected to expeditiously solve the resultant non-convex optimization problem. Numerical results comparing achieved directivity for $N = 6, 7$ and 8 antenna-elements demonstrate gains of ~ 5 dB compared to the regular beamforming technique, using steering vector for uniform linear arrays (ULA) and uniform circular arrays (UCA).

I. INTRODUCTION

Array antennas can provide many advantages in flexibility and scalability with respect to conventional antennas. This is related to the capacity of array pattern reconfiguration and adaptability. This characteristics enables a wide range of applications including radar communications, satellite communications, wireless communications, radio-astronomy, remote sensing, direction of arrival (DoA) estimation, and so on. Optimal designed arrays are used to obtain high directivity pattern. This is very important to increase the array performance.

Recent works have dealt with the design of linear sparse array antennas. For instance, in [2] the authors designed a planar circular sparse array antennas where the positions and dimensions of the radiators are jointly optimized. In [3] an optimal circular antenna arrays for maximum sidelobe levels (SLLs) reduction was investigated using a metaheuristic approach called player algorithm. The authors in [4] investigated an optimization of sidelobe level and aperture efficiency for aperiodic array antennas. Multiobjective optimization (MOO) is used in the paper [5] in order to efficiently and effectively design subarrays in linear antenna array. The optimization was done using a *memetic differential evolution* (mDE) algorithm. Following the same research direction, the authors in [6], [7] used MOO and metaheuristic methods aiming to optimize the beampattern in collaborative array beamforming design. The well-known heuristic algorithm namely *nondominated*

sorting genetic algorithm II (NSGA-II) has been used for this purpose. There are many other works that studied MOO and/or metaheuristics solutions, such as [8], [9], [10], [11] and [12]. In [13], optimal radiation pattern is generated using a spherical phased array, while in [14], a technique based on changes in the subspace aiming to improve the directivity of the omnidirectional UCA is proposed. Moreover, an interesting approach to obtain the optimum directive beamformer has been proposed in [15], by deploying the concept of generalized directivity maximization; the concept of directivity is based on the mean beam power pattern, which is crucial in assessing and optimizing the performance of directivity arrays subjected to array imperfections and sensor mismatch.

The contributions of this work are threefold: **a)** formulation of an optimization problem for directivity maximization based on the formula obtained in our previous result [1], the novelty of this design is brought by the optimization of each antenna-element position bounded by volumetric constrain on the search space, which is given by a parallelepiped with central point at the origin and all the points bounded by $[x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}]$; **b)** a geometric interpretation for the solution in case of omnidirectional scenarios, more specifically, this interpretation results in restraining the position of each antenna-element to a plane equation dependent of the desired angles (θ_0, ϕ_0) ; **c)** a solution obtained by the use of evolutionary heuristic optimization approach, more specifically, the genetic algorithm (GA), resulting in a highly improvement of the directivity gains on the desired angle of departure (DoD), when compared with conventional geometric designs, even when aided by another techniques, such as the UCA enhanced proposed in [14] and the improved ULA design [15], and possibly efficient also for more complex scenarios ($\forall u, v$).

The remainder of the paper is organized as follows. In Section II, the new concept of directivity optimization via position antenna-element placement is discussed; also in this section, the system model and radiation pattern description are developed, including directivity expression. In Section III, we formulate the directivity optimization problem, with special attention on the optimization problem for the omnidirectional case; besides, geometric interpretation is deployed and then the problem is recast in a simplified way, while the GA is devised as an effective optimization method. Numerical results using GA to support our finding and a detailed discussion are developed in Section IV. Concluding remarks are pointed out in Section V.

II. ANTENNA ARRAY: RADIATION PATTERN AND DIRECTIVITY

A. Radiation Pattern of an Antenna Array

An antenna array is a grouping of N antennas, whose geometry can assume many different forms, such as, uniform linear, uniform circular, uniform rectangular, non-uniform grouping, and so forth; moreover, all element in the array work jointly for increasing the directivity of the arrangement. The total field of an antenna array is obtained by multiplying the field of a single element $\Upsilon_e(\theta, \phi)$ and the array factor $\Upsilon_a(\theta, \phi)$; this is called the radiation pattern of an antenna array and can be written as:

$$\Upsilon(\theta, \phi) = \Upsilon_e(\theta, \phi)\Upsilon_a(\theta, \phi) \quad (1)$$

The element factor (EF) is the radiation pattern of a single-element antenna and the model must resemble the pattern of a real antenna. Using spherical coordinates the EF is periodic in θ and ϕ angles. Thus, the radiated power of an arbitrary antenna can be described using Fourier analysis, i.e. can be written using a linear combination of powers of cosine and sine functions. Considering this, the element factor can be written:

$$\Upsilon_e(\theta) = \sin^u(\theta) \cos^v(\theta) \quad (2)$$

The array factor describes a combination of radiating elements in an array without consider the element radiation pattern. This factor has a dependency in terms of position, relative phase and relative amplitude of each antenna element and is given by:

$$\Upsilon_a(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^N A_n e^{j(\alpha_n + k\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{a}_p)} \quad (3)$$

where N is the number of antenna elements, A_n is the relative amplitude of n -th antenna element, α_n is the relative phase of n -th antenna element, \mathbf{p}_n is the position vector of n -th antenna element; k is the wave number, and \mathbf{a}_p is the unit vector of observation point in spherical coordinates, given by:

$$\mathbf{a}_p = \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{j} + \cos(\theta) \hat{k} \quad (4)$$

The position vector can be written as a combination of the elements in the 3-D cartesian axis:

$$\mathbf{p}_n = x_n \hat{i} + y_n \hat{j} + z_n \hat{k} \quad (5)$$

Thus, the array factor can be interpreted as the radiation pattern by replacing the actual elements by the isotropic (point) sources, i.e., $\Upsilon_e(\theta, \phi) = 1$.

In this work, we will consider the position of each antenna element of the array as the variable to be optimized, which can be mathematically defined by the matrix:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_N]^T \quad (6)$$

where the position vector \mathbf{p}_n defines the localization of the n th antenna element in the 3-D space.

B. Directivity for Arbitrary Volumetric Antenna Arrays

For non isotropic antennas, the directivity is the level of irradiation signal power in a specific direction in detriment of others. This is specially important for some applications, such as beamforming in massive MIMO 5G wireless communications.

Antenna directivity can be written as the ratio between the radiation intensity in a desired angle and the sum of the radiation intensity in all the others direction:

$$\mathcal{D}(\theta_0, \phi_0) = \frac{|\Upsilon(\theta_0, \phi_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\Upsilon(\theta, \phi)|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi} \quad (7)$$

where $|\Upsilon(\theta_0, \phi_0)|^2$ is the radiation intensity. Besides, for an arbitrary array with the general element pattern ($\cos^u \theta \sin^v \theta$, $\forall u, v$), the directivity expression can be defined as in Eq. (8), where:

- \mathbf{p}_n : position vector of n -th antenna element;
- α_n : phase of n -th antenna element;
- A_n : amplitude of n -th antenna element;
- θ_0 : desired elevation angle, where directivity is evaluated;
- ϕ_0 : desired azimuth angle, where directivity is evaluated;
- k : wave number of the transmission.

III. DIRECTIVITY OPTIMIZATION PROBLEM

Given a desired angle of departure (θ_0, ϕ_0) and an antenna array composed by N elements, we are looking for the parameter values of an array configuration that result in the directivity maximization in the AoD.

We start the analysis not including the phase and the amplitude of each antenna; hence, we will solve the proposed problem in order to obtain one geometric configuration for each desired angle. For common applications, the desired direction changes regularly, which becomes a problem, given that changes in the positions of antennas is physically impossible. However, in this formulation, the phase element was not taken into consideration, which leaves space to adopt virtualization techniques, which highly depends on the phase elements and will be subject to analysis in our future research.

Based on the directivity expression provide in Eq. (8), one can state the following optimization problem:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{P}}{\text{maximize}} \quad \mathcal{D}(\theta_0, \phi_0) \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{p}_n \preceq \mathbf{p}_{\max} \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (9)$$

where the inequality $\mathbf{p}_n \preceq \mathbf{p}_{\max}$ defines the 3-D parallelepiped volume bounded by $[x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}]$. Besides, the cost function in (8) can be rewritten, using the following auxiliary functions:

$$\mathcal{D} = \frac{f_1}{f_2} \quad (10)$$

$$\mathcal{D} = \frac{\sin^{2u}(\theta_0) \cos^{2v}(\theta_0) \sum_{m,n=1}^N A_n A_m \xi_{mn} \cos[\Omega_{mn}]}{\sum_{n=1}^N A_n^2 \left[\frac{1}{8}((-1)^{2v} + 1) \mathcal{B}(u+1, v + \frac{1}{2}) \right] + 2(-1)^{(v+2u)} \sum_{\substack{n,m=1 \\ m \neq n \\ n > m}}^N \sum_{\kappa=0}^u A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(\alpha_{mn}) \frac{\partial^{2(v+u-\kappa)}}{\partial z_{mn}^{2(v+u-\kappa)}} \left[\frac{\sin(k\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{k\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right]}$$

where $\Omega_{mn} = \Omega(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_m, \alpha_n, \alpha_m, \theta_0, \phi_0) = k[x_{nm} \sin \theta_0 \cos \phi_0 + y_{nm} \sin \theta_0 \sin \phi_0 + z_{nm} \cos \theta_0] + \alpha_{nm}$
 $\mathbf{p}_n = x_n \hat{i} + y_n \hat{j} + z_n \hat{k}$, $\beta = \sqrt{x_{nm}^2 + y_{nm}^2}$, $x_{nm} = (x_n - x_m)$, $y_{nm} = (y_n - y_m)$, $z_{nm} = (z_n - z_m)$
 $\xi_{mn} = \begin{cases} 1 & m \neq n \\ \frac{1}{2 \cos[\Omega_{mn}]} & m = n \end{cases}$, $\Re\{v\} > -\frac{1}{2}$, $\Re\{u\} > -1$, $\alpha_{mn} = (\alpha_n - \alpha_m)$.

where

$$f_1 = \sin^{2u}(\theta_0) \cos^{2v}(\theta_0) \sum_{m,n=1}^N A_n A_m \xi_{mn} \cos[\Omega_{mn}] \quad (11)$$

$$f_2 = \left[\sum_{n=1}^N A_n^2 \left[\frac{((-1)^{2v} + 1) \Gamma(u+1) \Gamma(v + \frac{1}{2})}{8 \Gamma(u+v + \frac{3}{2})} \right] + \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^N \sum_{\kappa=0}^u (-1)^{(u+v+\kappa)} A_n A_m \binom{u}{\kappa} \cos(\alpha_{mn}) \frac{\partial^{2(v+u-\kappa)}}{\partial z_{mn}^{2(v+u-\kappa)}} \times \left[\frac{\sin(k\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{k\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right] \right] \quad (12)$$

Hence, one can recast the optimization problem as:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{P}}{\text{minimize}} && \frac{f_2}{f_1} \\ & \text{subject to} && \mathbf{p}_n \preceq \mathbf{p}_{\max} \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (13)$$

Therefore, the main objective of this problem can be reinterpreted as to minimize $f_2(\mathbf{P})$ while simultaneously maximize $f_1(\mathbf{P})$ subject to the bounds in the space configuration, given for example by the 2-norm.

A. Omnidirectional Scenario

The omnidirectional scenario is a simple configuration, but with several interesting applications in many fields, comparing with the isotropic configuration. The omnidirectional radiated power is scattered symmetrically but not equally in all directions, creating a 3-D torus radiation pattern. The choice of the omnidirectional scenario is essentially because the directivity expression remains simple for an initial analysis, and thereafter, more specific and particularly interesting scenarios can be expeditiously developed and analyzed.

For the omnidirectional scenario, one must set $u = 0$ and $v = 1$, simplifying the auxiliary functions:

$$f_1^o = \cos^2(\theta_0) \sum_{m,n=1}^N A_n A_m \xi_{mn} \cos[\Omega_{mn}] \quad (14)$$

$$f_2^o = \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{6} - 2 \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^N A_n A_m \frac{\partial^2}{\partial z_{mn}^2} \left[\frac{\sin(k\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{k\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right] \quad (15)$$

where we can define:

$$d_{mn} = k\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2} \quad (16)$$

Generically, d_{mn} represents the Euclidean distance between the m -th and n -th antenna element in the 3-D space, given by $d_{mn} = k\sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2 + z_{mn}^2}$.

Particularly, from the optimization problem (9), we are interested in maximizing f_1^o while minimize f_2^o . For this purpose, we can verify in Eq. (14) that the only way to ensure these conditions consists in maximizing the term $\cos[\Omega_{mn}]$, *i.e.* when the argument of cosine function assumes a constant value that is a even multiple of π , therefore:

$$\Omega_{mn} = c_1 \pi, \quad \text{for } \frac{c_1}{2} \in \mathbb{Z} \quad (17)$$

Using the definitions in (8), and satisfying the condition above, for Ω_{mn} we have:

$$\begin{aligned} & x_{nm} \sin \theta_0 \cos \phi_0 + y_{nm} \sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ & + z_{nm} \cos \theta_0 = \frac{c_1 \pi - (\alpha_n - \alpha_m)}{k} \end{aligned} \quad (18)$$

Eq. (18) can be interpreted as the plane equation containing all the vectors of position difference ($\mathbf{p}_{mn} = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m$), to fulfill entirely this condition it is necessary all vectors be restrained in the same plane of the differences position vectors, since the constant c_1 is not unique and for each value we have a different plane, the solution of this condition is given by infinite parallel planes. However, the combination of position vectors in those parallel planes do not fulfill the condition, given that the difference vector for points in different parallel planes will resulted in a difference vector in another plane. Therefore, the constant c_1 must remain a single value throughout of the solution.

However, minimizing f_2^o results in a more complicated task, given that from directivity problem in (7), it is required to minimize the summation of all terms on the right hand side of eq. (15), instead of minimize each terms. Hence, the original

optimization problem in (9) can be recast in an alternative version as:

$$\underset{\mathbf{P}}{\text{minimize}} \quad \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^N A_n A_m \frac{\partial^2}{\partial z_{mn}^2} \left[\frac{\sin(\sqrt{k\beta^2 + z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right] \quad (19)$$

Besides, the second derivative in (19) can be re-written as:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{mn}^2} \left[\frac{\sin(\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2})}{\sqrt{\beta^2 + z_{mn}^2}} \right] = \frac{(\beta^2 - 2z_{mn}^2) \cos d_{mn}}{d_{mn}^4} - \frac{[(\beta^2 - 2)z_{mn}^2 + \beta^2 + z_{mn}^4] \sin d_{mn}}{d_{mn}^5} \quad (20)$$

which is function of the x_{mn} , y_{mn} and z_{mn} , and related to β and d_{mn} through the constraints in eq. (8) and (16), respectively. Notice that in this formulation, the omnidirectional configuration has influence only in (20); therefore, for another scenarios, i.e., different values of $u, v \neq 0$, the only change will be the constraints in (19), where the order and number of derivatives will be dependent on the values of $u, v \in \mathbb{Z}_+$.

B. Recasting the Simplified Omnidirectional Problem

The restraints resulted by the omnidirectional scenario is given by eq. (18), while the values of c_1 can be chosen arbitrarily; hence, to simplify we can select $c_1 = 0$. Furthermore, considering all the phases null, for the n -th and m -th antennas results:

$$\begin{aligned} \sin \theta_0 \cos \phi_0 x_n + \sin \theta_0 \sin \phi_0 y_n + \cos \theta_0 z_n &= 0 \\ \sin \theta_0 \cos \phi_0 x_m + \sin \theta_0 \sin \phi_0 y_m + \cos \theta_0 z_m &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Subtracting both previous expressions, results:

$$\sin \theta_0 \cos \phi_0 x_{nm} + \sin \theta_0 \sin \phi_0 y_{nm} + \cos \theta_0 z_{nm} = 0 \quad (22)$$

We can re-write the previous equality as:

$$z_{nm} = \tan \theta_0 (\cos \phi_0 x_{nm} + \sin \phi_0 y_{nm}) \quad (23)$$

The restriction (23) can be incorporated into (20), resulting finally in the following simplified optimization problem:

$$\underset{\mathbf{x}, \mathbf{y}}{\text{minimize}} \quad \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^N \mathcal{F}(x_{mn}, y_{mn}) \quad (24)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{aligned} |x_{mn}| &\leq x_{\max} \\ |y_{mn}| &\leq y_{\max} \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned}$$

with objective function (OF) defined by:

$$\mathcal{F}(x_{mn}, y_{mn}) = \frac{((\beta^2 - 2)z_{mn}^2 + \beta^2 + z_{mn}^4) \sin d_{mn}}{d_{mn}^5} - \frac{(\beta^2 - 2z_{mn}^2) \cos d_{mn}}{d_{mn}^4} \quad (25)$$

The bound of z_{mn} is implicit, having dependency on x_{\max} , y_{\max} , and on the desired angle of departure (θ_0, ϕ_0). The solution of (24) give us the optimal coordinates x_n and y_n , $\forall n$ which can be used to find the optimal z_n , $\forall n = 1, \dots, N$ coordinate using (23).

Indeed, analyzing (23), for a condition where $\theta_0 = \phi_0 = 0$, the generated projection contours represent a set of circles. This implies that the Euclidean distances between the antennas being equal results in the same value of \mathcal{F} . Therefore, the improved solutions for this case will be defined where a major part of all possible Euclidean distances are equal and simultaneously such value results in a minimum value of \mathcal{F} . However, for a case where $\theta_0 \neq \phi_0 \neq 0$ implies in distortion in the projection contour, generating regions similar to ellipse curves, as depicted in each plot of Fig. 1. Physically, such configuration results in different Euclidean distances, i.e., differences between antennas coordinates. A special case occurs when $\theta_0 = \pi/2$, when is generated the larger distortion compared to the other azimuth angles, due to (23). Finally, when $\phi_0 \neq 0$ occurs a rotation of the surface and the contour projection, respectively, this rotation is independent of the value of θ_0 .

IV. NUMERICAL RESULTS

The numerical results discussed in this section was obtained using the heuristic GA optimization approach; the main parameters for the omni-directional directivity optimization scenario, as well as the adopted parameters for the GA are summarized in Table I, all computations have been carried out with MATLAB (R2016a).

TABLE I
SIMULATION SETUP

Parameter	Adopted Values
Wave Number Wavelength	$k = 1 \mid \lambda = 2\pi$
Angle of Departure	$(\theta_0, \phi_0) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$
Element Amplitude	$A_n = 1$
Element Phase	$\alpha_n = 0$
Omnidirectional Scenario	$u = 0$ and $v = 1$
# antenna-elements	$N \in \{6, 7, 8\}$
Elements placement bounds	$[x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}] = [5, 5, z_{\max}]$
GA Parameters	
Objective function	eq. (25)
Number of Variables, (n_{vars})	$2N$
Crossover Fraction (c_f)	0.8
Max Number Gen. (g_{\max})	$200N$
Mutation (M_{Gaussian})	Gaussian
Population Size (p_{size})	200
Population Type	Double Vector
Search space	$[0, x_{\max}]$; $[0, y_{\max}]$

Fig. 2 depicts the solution of problem (24) found by the GA. When the solution is visualized in the 3-D plots it is possible to observe the plane that restrain the solution and how the found solutions strive to achieve a major number of equal Euclidean distances. However, when analyzing the projection of the solution in the xy -plane it is possible to verify the distortion introduced by the term z_{nm} , eq. (23).

In Table II the values of directivity found by the GA solution are compared with two classical steering vector beamforming, the *uniform circular array* (UCA) and the *uniform linear array* (ULA), as well as an improved directivity method for the omnidirectional UCA proposed in [14] and ULA in [15].

The directivity using steering vector consists in changing the phase of each antenna-element aiming to minimize the array factor in (3), depending on the position of each element

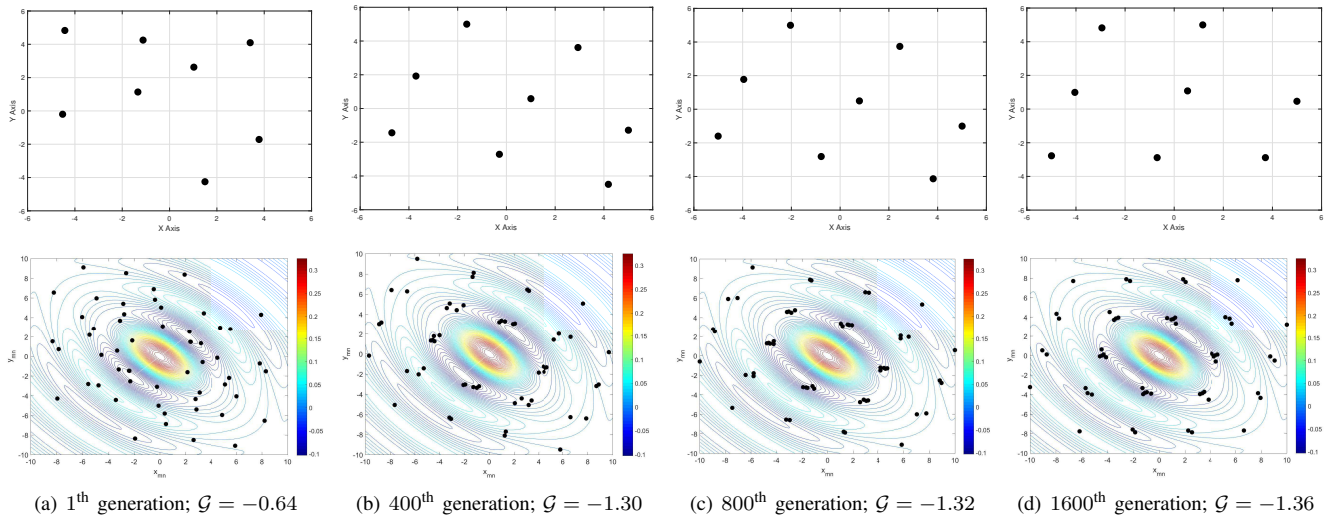


Fig. 1. The evolution of Antenna Element Position and the distribution of (x_{mn}, y_{mn}) through GA generations for $N = 8$.

in a well defined geometric structure. For the ULA and UCA the steering vector is given, respectively, by:

$$\begin{aligned} \alpha_n^{\text{ULA}} &= -dn \cos \theta_0 \hat{k} \\ \alpha_n^{\text{UCA}} &= -r \sin \gamma_n \sin \theta_0 \cos \phi_0 \hat{i} - r \cos \gamma_n \sin \theta_0 \sin \phi_0 \hat{j} \end{aligned} \quad (26)$$

where: $\gamma_n = \frac{(n-1)2\pi}{N}$, and d is the distance between each element. In this formulation, r is the ratio of the circle that contain all the points of the UCA. Besides, this ratio was considered in a way that the minimal distance between the antennas element was defined as $\frac{\lambda}{2}$, where λ is signal carrier wavelength.

The last two columns in Table II show the directivity found in [14] and [15], respectively. In [14], a technique based on changes in the subspace for the omnidirectional UCA directivity is developed; for $N = 8$. Besides, in [15] the directivity is enhanced based on the mean beam power pattern proposed using a ULA and is useful to evaluate the array directivity subjected to imperfections and mismatch. The directivity values found in both approaches still are substantially less (~ 2 dBi and ~ 4 dBi, respectively) than that achieved with proposed optimization method explored herein, although the directivity results in [15] are conditioned to statistical errors.

TABLE II
DIRECTIVITY COMPARISON

N	GA	UCA	ULA	UCA [14]	ULA [15]
6	10.19 dBi	7.96 dBi	7.78 dBi	—	—
7	11.25 dBi	8.09 dBi	8.45 dBi	—	—
8	12.69 dBi	8.73 dBi	9.03 dBi	12.00 dBi	10.00 dBi

The superior plots on Fig. 1 depicts the placement of the coordinates (x, y) found by the GA solution and the inferior plots are the distribution of the coordinates points (x_{mn}, y_{mn}) , i.e., all possible differences between the correspondent coordinates (x, y) ; in the contour plot of \mathcal{F} the numbers of points on the plot is given for the combinations of all possible difference and is expressed by $N_{\text{points}} = N(N - 1)$. Notice

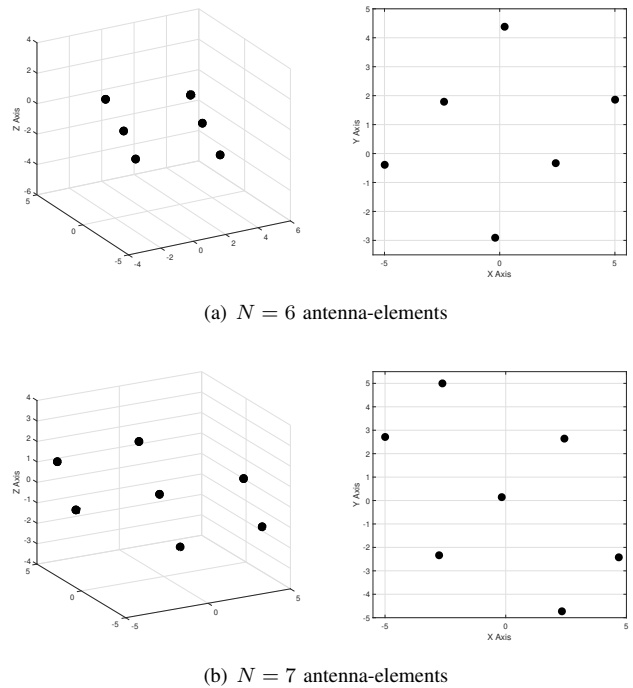


Fig. 2. The GA solution for the element-antenna position and their respective projection onto the xy -plane for $N = 6$ and 7 antenna-elements.

that the solutions found by the GA result in a reasonable arrangement of these coordinates points. Indeed, in Fig. 1, it is possible to observe the evolution of the coordinates points (x_{mn}, y_{mn}) at the contour plot of \mathcal{F} , this evolution leads to an arrangement where all the values allocated is concentrated in regions of small values, given the range of all the possible values. Furthermore, in Fig. 1 is also available the evolution of the antenna-element positions in the projection on xy -plane.

The selection of the coordinates points (x_{mn}, y_{mn}) can not be performed freely; given that these points represent the set of all possible coordinate differences. Therefore, these

coordinates result in Euclidean distances constraints, which in some cases can not be physically feasible; hence, the obvious solution consisting in allocating all points in the same minimum of \mathcal{F} is not possible due to the implication that all Euclidean distances must be the same; hence, this condition is not possible to achieve, or even approximated when N increases. Indeed, with the modification of position in one element of antenna implies in the allocation of $N - 1$ points, on the plot of Fig. 1, hence, the allocation of these points must be solved simultaneously as a whole.

This solution presented in Fig. 1 converges to a geometric figure similar to the points on a *regular triangular tiling* (RTT); the only reason for the convergence not be exactly is given by z_{mn} in eq. (23), hence, for $\theta_0 = \phi_0 = 0$, the solution will be given by a set of points allocated on a RTT. This arrangement presents symmetry which imposes that all possible values of distance are reduced reasonable by increasing the repetitions of these values, hence, the coordinate points (x_{mn}, y_{mn}) can be distributed exploiting this properties, selecting the possible values to correspond to small values of \mathcal{F} and using the repetition to allocate more points in the smallest values.

The convergence of the solution presented in Fig 1 can be observed by the distribution of the difference points (x_{mn}, y_{mn}) , which through the evolution of the GA generations, a symmetry on the antennas positions is introduced, creating then clusters of these difference points. Moreover, these clusters are allocated in the smallest regions of \mathcal{F} ; hence, for the optimal solution it is expected that these clusters tend to converge to a point, reducing even more the number of possible distance, and hence converging the solution for the antenna position to a RTT configuration. Moreover, the sum of all the coordinates points (x_{mn}, y_{mn}) corresponds to the objective function (\mathcal{G}) in eq. (24) and decreases accordingly from $\mathcal{G} = -0.64$ to $\mathcal{G} = -1.36$ when GA run from 1th to the 1600th generation. It is noticeable that in the lasts generations the reduction of \mathcal{G} is substantially small; this is observable in Fig. 1, where the formation of the clusters is apparent on the 400th generation and so forth. Hence, it is possible to consider reducing the maximum number of generations (g_{\max}), aiming finding a solution with a better trade-off between computational complexity and performance enhancement.

V. CONCLUSIONS

This works proposes a new approach to maximize the directivity of an omnidirectional volumetric antenna array, using the new directivity expression found in the previously work combined to evolutionary heuristic GA approach to solve a modified yet non-convex optimization problem. An optimization problem focused on the position of each antenna element was proposed. After the geometric interpretation, the problem was simplified and the directivity objective function in the GA optimization context has been formulated and solved for practical number of antenna-elements N . Moreover, an interesting conclusion is that solutions are constrained by a plane space as a function of the desired elevation and

azimuth angles (θ_0, ϕ_0) , respectively), while the best configuration for the antenna elements position on this plane remains converges to a geometric figure similar to the points on a *regular triangular tiling* (RTT) that are strongly affected by the desired elevation angle (θ_0) . Numerical results deploying simple GA for different values of number of antenna-elements have demonstrated excellent directivity values when compared with the well-known regular UCA and ULA antenna arrays arrangements, as well as recent literature result for the specific case of $N = 8$.

REFERENCES

- [1] B. F. Costa and T. Abrão, "Closed-Form Directivity Expression for Arbitrary Volumetric Antenna Arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2018, pp.1–6, 2018. DOI:10.1109/TAP.2018.2869243
- [2] P. Angeletti, G. Toso and G. Ruggerini, "Array Antennas With Jointly Optimized Elements Positions and Dimensions Part II: Planar Circular Arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 62, pp. 1627–1639, April 2014.
- [3] H. R. E. Bouchekara, A. Orlandi, M. Al-Qdah and F. de Paulis, "Most Valuable Player Algorithm for Circular Antenna Arrays Optimization to Maximum Sidelobe Levels Reduction," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 60, pp. 1655–1661, December 2018.
- [4] J. Diao, J. W. Kunzler and K. F. Warnick, "Sidelobe Level and Aperture Efficiency Optimization for Tiled Aperiodic Array Antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 65, pp. 7083–7090, December 2017.
- [5] S. K. Goudos, K. A. Gotsis, K. Siakavara, E. E. Vafiadis and J. N. Sahalos, "A Multi-Objective Approach to Subarrayed Linear Antenna Arrays Design Based on Memetic Differential Evolution," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, pp. 3042–3052, June 2013.
- [6] S. Jayaprakasam, S. K. Abdul Rahim, C. Y. Leow and M. F. Mohd Yusof, "Beampattern optimization in distributed beamforming using multiobjective and metaheuristic method," 2014 IEEE Symposium on Wireless Technology and Applications (ISWTA), pp. 86–91, September 2014.
- [7] S. Jayaprakasam, S. K. Abdul Rahim, C. Y. Leow, T. O. Ting and A. A. Eteng, "Multiobjective Beampattern Optimization in Collaborative Beamforming via NSGA-II With Selective Distance," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 65, pp. 2348–2357, May 2017.
- [8] K. Y. Reddy, R. B. Kumar, M. Jijenth, V. S. Gangwar, K. K. Suman and R. K. Gangwar, "An expeditious synthesis of thinned planar antenna array by exploitation of multi-objective optimization technique," 2018 3rd International Conference on Microwave and Photonics (ICMAP), pp. 1–2, February 2018.
- [9] A. Rezagholi and F. Mohajeri, "Directivity optimization of fractal antenna arrays using PSO algorithm," 2016 24th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE), pp. 1224–1228, May 2016.
- [10] S. S. Saleem, M. M. Ahmed, U. Rafique and U. F. Ahmed, "Optimization of Linear Antenna Array for Low SLL and High Directivity," 2016 19th International Multi-Topic Conference (INMIC), pp. 1–6, December 2016.
- [11] P. Swain, S. K. Mohanty and B. B. Mangaraj, "Linear Dipole Antenna Array design and optimization using Gravitational Search Algorithm," 2016 2nd International Conference on Advances in Electrical, Electronics, Information, Communication and Bio-Informatics (AEEICB), pp. 514–518, February 2016.
- [12] S. Yang and J. Kiang, "Optimization of Sparse Linear Arrays Using Harmony Search Algorithms," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, pp. 4732–4738, November 2015.
- [13] B. Pavan Kumar, C. Kumar, V. Senthil Kumar and V. V. Srinivasan, "Optimal Radiation Pattern of the Element for a Spherical Phased Array With Hemispherical Scan Capability," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 16, pp. 2780–2782, 2017.
- [14] G. Huang, J. Benesty and J. Chen, "Subspace Superdirective Beamforming with Uniform Circular Microphone Arrays" 2016 IEEE International Workshop on Acoustic Signal Enhancement (IWAENC), Xi'an, 2016, pp. 1-5.
- [15] A. Trucco and M. Crocco, "Design of an Optimum Superdirective Beamformer Through Generalized Directivity Maximization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, pp. 6118–6129, Dec. 2014.

Referências

- 4NEC2. *NEC based antenna modeler and optimizer, free software*. 2020. Disponível em: <[https://https://www.qsl.net/4nec2/](https://www.qsl.net/4nec2/)>.
- ABOUDA, H. M. E.-S. A. A.; HAGGMAN, S. G. Effect of antenna array geometry and ula azimuthal orientation on mimo channel properties in urban city street grid. *Progress In Electromagnetics Research*, v. 64, p. 257–278, 2006.
- ADNAN, I. M. R. N. H. M.; ALAM, A. H. M. Z. Effects of inter element spacing on large antenna array characteristics. *2017 IEEE 4th International Conference on Smart Instrumentation, Measurement and Application (ICSIMA)*, p. 1–5, 2017.
- AGIWAL, A. R. M.; SAXENA, N. Next generation 5g wireless networks: A comprehensive survey. *IEEE Communications Surveys Tutorials*, v. 18, p. 1617–1655, 2016.
- ANGELETTI, G. T. P.; RUGGERINI, G. Array antennas with jointly optimized elements positions and dimensions part ii: Planar circular arrays. ' *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 62, p. 1627–1639, 2014.
- ANGELETTI, P.; TOSO, G. Array antennas with jointly optimized elements positions and dimensions part i: Linear arrays. ' *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 62, p. 1619–1626, 2014.
- BALANIS, C. *Antenna Theory: Analysis and Design*. [S.l.]: Wiley, 2012.
- BHATTACHARYYA, A. K. *Phased Array Antennas: Floquet Analysis, Synthesis, BFNs, and Active Array Systems*. [S.l.]: Wiley, 2010.
- BOUCHEKARA A. ORLANDI, M. A.-Q. H. R. E.; PAULIS, F. de. Most valuable player algorithm for circular antenna arrays optimization to maximum sidelobe levels reduction. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, v. 60, p. 1655–1661, 2018.
- DAS D. MANDAL, R. K. S.; GHOSHAL, S. P. 'a generalized expression of directivity for planar antenna arrays. *2013 Annual IEEE India Conference (INDICON)*, p. 1–3, 2013.
- DAS D. MANDAL, R. K. S.; GHOSHAL, S. P. A generalized closed form expression of directivity of arbitrary planar antenna arrays. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 61, p. 3909–3911, 2013.
- DAS D. MANDAL, S. P. G. S.; KAR, R. Generalization of directivity expressions for antenna arrays. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 65, p. 915–919, 2017.

- DIAO, J. W. K. J.; WARNICK, K. F. Sidelobe level and aperture efficiency optimization for tiled aperiodic array antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 65, p. 7083–7090, 2017.
- GOUDOS K. A. GOTSIS, K. S.-E. E. V. S. K.; SAHALOS, J. N. A multi-objective approach to subarrayed linear antenna arrays design based on memetic differential evolution. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 61, p. 3042–3052, 2013.
- GRADSHTEYN, I.; RYZHIK, I. *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier Science, 2014. ISBN 9781483265643. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=F7jiBQAAQBAJ>>.
- HAUPT, R. L. *Antenna Arrays: A Computational Approach*. [S.l.]: Wiley, 2010.
- HUANG, J. B. G.; CHEN, J. Subspace superdirective beamforming with uniform circular microphone arrays. *2016 IEEE International Workshop on Acoustic Signal Enhancement (IWAENC)*, p. 1–5, 2016.
- JAYAPRAKASAM S. K. ABDUL RAHIM, C. Y. L. S.; YUSOF, M. F. M. Beam pattern optimization in distributed beamforming using multiobjective and metaheuristic method. *2014 IEEE Symposium on Wireless Technology and Applications (ISWTA)*, 2014.
- JAYAPRAKASAM S. K. ABDUL RAHIM, C. Y. L. T. O. T. S.; ETENG, A. A. N multiobjective beam pattern optimization in collaborative beamforming via nsga-ii with selective distance. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 65, p. 2348–2357, 2017.
- KUMAR C. KUMAR, V. S. K. B. P.; SRINIVASAN, V. V. Optimal radiation pattern of the element for a spherical phased array with hemispherical scan capability. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, v. 16, p. 2780–2782, 2017.
- MBEUTCHA W. FAN, J. H. M.; PEDERSEN, G. F. Evaluation of massive mimo systems using time-reversal beamforming technique. *2016 IEEE 27th Annual International Symposium on Personal, Indoor, and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, p. 1–6, 2016.
- NUTTALL, A. H.; CRAY, B. A. Approximations to directivity for linear, planar, and volumetric apertures and arrays. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 26, p. 383–398, 2001.
- REDDY R. B. KUMAR, M. J. V. S. G. K. K. S. K. Y.; GANGWAR, R. K. An expeditious synthesis of thinned planar antenna array by exploitation of multi-objective optimization technique. *2018 3rd International Conference on Microwave and Photonics (ICMAP)*, p. 1–2, 2018.
- REZAGHOLI, A.; MOHAJERI, F. Directivity optimization of fractal antenna arrays using pso algorithm. *24th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE)*, p. 1224–1228, 2016.
- SALEEM M. M. AHMED, U. R. S. S.; AHMED, U. F. Optimization of linear antenna array for low sll and high directivity. *2016 19th International Multi-Topic Conference (INMIC)*, p. 1–6, 2016.

- SILVER, S. *Microwave Antenna Theory and Design*. Edited by S. Silver, Etc. McGraw-Hill Book Company, 1949. ([Massachusetts Institute of Technology. Radiation Laboratory Series. no. 12.]). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Fi42MwEACAAJ>>.
- SINGARAJU, B. K. Theory and applications of antenna arrays. *Proceedings of the IEEE*, v. 63, p. 1086–1086, 1975.
- SWAIN, S. K. M. P.; MANGARAJ, B. B. Linear dipole antenna array design and optimization using gravitational search algorithm. *2016 2nd International Conference on Advances in Electrical, Electronics, Information, Communication and Bio-Informatics (AEEICB)*, p. 514–518, 2016.
- SZYMANSKI, J. E. *Basic Mathematics for Electronic Engineers: Models and Applications*. [S.l.]: Taylor Francis, 1989.
- TRUCCO, A.; CROCCO, M. Design of an optimum superdirective beamformer through generalized directivity maximization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 62, p. 6118–6129, 2014.
- ULABY, F. T. *Fundamentals of Applied Electromagnetics*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1997. ISBN 0-13-577388-1.
- WERNER, D. M. D. H.; WERNER, P. L. Closed-form representation for directivity of nonuniformly spaced linear arrays with arbitrary element patterns. *Electronics Letters*, v. 35, p. 2155–2157, 1999.
- WOLFRAM. *Plataforma de Desenvolvimento da Wolfram, Versao 11.3*. 2020. Disponível em: <<https://www.wolframalpha.com/>>.
- YANG, S.; KIANG, J. Optimization of sparse linear arrays using harmony search algorithms. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 63, p. 4732–4738, 2015.