



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

Centro de Tecnologia e Urbanismo  
Departamento de Engenharia Elétrica

Ricardo Tadashi Kobayashi

**Detecção, Alocação de Potência e  
Sensoriamento Espectral em Sistemas  
de Comunicação**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
da Universidade Estadual de Londrina  
para obtenção do Título de Mestre em  
Engenharia Elétrica.



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

Ricardo Tadashi Kobayashi

## Detecção, Alocação de Potência e Sensoriamento Espectral em Sistemas de Comunicação

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área: Sistemas de Telecomunicações

Orientador:

Prof. Dr. Taufik Abrão

Londrina, PR  
2016

## Ficha Catalográfica

Kobayashi, Ricardo Tadashi

Detecção, Alocação de Potência e Sensoriamento Espectral em Sistemas de Comunicação. Londrina, PR, 2016. 131 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina, PR. Departamento de Engenharia Elétrica

1.Sistemas com Múltiplas Antenas. 2.MIMO de Larga escala. 3.Diversidade Espacial. 4.Sensoriamento espectral. 5.Estimativa de canais. Departamento de Engenharia Elétrica

Ricardo Tadashi Kobayashi

# Detecção, Alocação de Potência e Sensoriamento Espectral em Sistemas de Comunicação

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área: Sistemas de Telecomunicações

## Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Bruno Augusto Angélico  
Departamento de Telecomunicações e Controle  
Universidade de São Paulo

---

Prof. Dr. Fábio Renan Durand  
Departamento Acadêmico de Elétrica  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Prof. Dr. Taufik Abrão  
Depto. de Engenharia Elétrica  
Universidade Estadual de Londrina  
Orientador

9 de outubro de 2016

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, em especial aos meus pais, pelo apoio e compreensão que tive durante toda minha vida.

Ofereço meus sinceros agradecimentos a todos os professores com quem tive o privilégio de trabalhar e aprender até este ponto da minha formação. Agradecimentos especiais ao professor Taufik Abrão por me orientar exaustivamente durante os últimos anos.

Gostaria de agradecer a todos meus colegas de mestrado pelas inúmeras e improdutivas horas de trabalho. Em especial: Aislan Gabriel Hernandez, Angel Esteban Labrador Rivas, Diego de Freitas Marinho, João Lucas Negrão, Karina Yamashita, Lucas da Silva Dia e Lucas dos Santos Claudino.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro concedido para o desenvolvimento da pesquisa realizada ao longo deste trabalho. Também gostaria de agradecer à Universidade Estadual de Londrina pelo suporte e estrutura dos quais usufruí ao longo dos últimos anos.

Por fim, agradeço a todos que colaboraram de forma direta ou indireta para o desenvolvimento deste trabalho.

# Resumo

Ao longo deste trabalho, temas vinculados a sistemas com múltiplas antenas (MIMO - *Multiple-Input Multiple-Output*) e ao sensoriamento espectral em rádios cognitivos são abordados com o intuito de associá-los a um contexto contemporâneo em telecomunicações. Inicialmente, o desempenho de uma série de detectores MIMO é avaliado para o *uplink* considerando-se canais correlacionados, provenientes da alta densidade de antenas advinda de sistemas MIMO de larga escala. Sob tal cenário, alguns detectores MIMO, como o detector MMSE combinado ao cancelamento sucessivo de interferência ordenado (MMSE-OSIC), podem operar de forma bastante peculiar. O detector MMSE-OSIC apresentou um comportamento inesperado e negativo proveniente da decomposição QR ordenada, que rendeu um estudo estatístico de tal decomposição almejando-se sanar as anomalias do detector afetado. Outro assunto abrangido neste trabalho foi a distribuição de potência ótima em sistemas MIMO operando sob a técnica *eigen-beamforming*. Em especial, o problema de alocação de potência para a BER ótima foi solucionado através das condições de KKT e da função W de Lambert, evitando-se o uso de métodos numéricos como os métodos da barreira ou da penalidade. Adicionalmente, foi estudado os efeitos do assincronismo em sistemas MIMO massivo, dada a tendência dos sistemas de telecomunicação operarem em frequências cada vez mais elevadas (dezenas de GHz no contexto 5G). Neste contexto, verificou-se os efeitos do assincronismo no treinamento de canal, quer seja sobre o erro das estimativas, quer seja no desempenho final dos sistemas MIMO, dado o uso de sequências clássicas de treinamento como as de Walsh-Hadamard, Gold e Quaternária. Por fim, este trabalho também lida com o sensoriamento espectral multi-banda através de um esquema proposto baseado no produto de *wavelets*. Neste contexto, deu-se ênfase ao estudo e análise do sensoriamento de sinais OFDM realizado pelo método proposto.

# Abstract

Throughout this work, some topics related to multiple antenna systems (MIMO - Multiple-Input Multiple-Output) and spectral sensing in cognitive radios are addressed in order to link them to other modern telecommunication topics. Initially, the performance of a series of MIMO detectors is analysed for the uplink transmission considering correlated channels, a consequence of the high antenna density in massive MIMO systems. Under such a scenario, some MIMO detectors, like the MMSE aided by the Successive-Interference-Cancellation (OSIC) technique, can operate in a quite peculiar way. The MMSE-OSIC detector presented an unexpected and negative behavior due to the sorted QR decomposition, bringing the opportunity for a statistic study on this decomposition, aiming to solve the anomalies on the affected detector. Another subject discussed in this work was the optimal power allocation used in MIMO systems operating under the eigen-beamforming transmission. Particularly, the minimum BER power allocation was solved through the KKT conditions and the Lambert W function, which avoided the use of numerical methods such as the barrier or the penalty methods. Additionally, it was studied the effects of asynchronism in massive MIMO systems, as telecommunication systems operate in ever increasing frequencies. In this context, an analysis of the effects the asynchronism is proceeded, regarding the errors of channel estimates and the end performance, given the usage of classical sequences such as Walsh-Hadamard, Gold and Quaternary. Finally, this work also deals with the multi-band spectral sensing through a proposed scheme based on the product of wavelets. In this context, the focus lied on the analysis of the spectrum sensing of OFDM signals performed by the proposed method.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Estrutura do Trabalho . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Detecção MIMO</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução a Sistemas MIMO . . . . .	5
2.1.1	Modelagem do Canal . . . . .	7
2.1.2	Modos de Transmissão . . . . .	9
2.2	Detectores Ótimos . . . . .	10
2.2.1	Detector de Máxima Verossimilhança . . . . .	10
2.2.2	Decodificador Esférico . . . . .	11
2.3	Equalizadores Lineares . . . . .	13
2.3.1	<i>Zero-Forcing</i> . . . . .	14
2.3.2	<i>Minimum Mean-Squared-Error</i> . . . . .	14
2.4	Cancelamento Sucessivo de Interferência . . . . .	15
2.4.1	Detector V-BLAST . . . . .	15
2.4.2	Cancelamento Sucessivo de Interferência . . . . .	17
2.4.3	Cancelamento Sucessivo de Interferência Ordenado . . . . .	18
2.5	Lista de Chase . . . . .	20
2.6	Redução Treliça . . . . .	22
2.6.1	Equalização Linear LR . . . . .	25
2.6.2	Detecção LR com OSIC . . . . .	26
2.6.3	Detecção LR com CL . . . . .	27
2.7	Análise do Desempenho . . . . .	28



2.8	Análise de Complexidade . . . . .	31
2.8.1	Complexidade do Algoritmo LLL . . . . .	32
2.8.2	Complexidade dos Detectores MIMO . . . . .	32
2.8.3	Impacto do Modelo Real para a Complexidade Computacional . . . . .	36
2.9	Conclusões . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Análise Numérica da Decomposição QR</b>	<b>38</b>
3.1	Decomposição QR via Método Modificado de Gram-Schmidt (GS-QRD) . . . . .	39
3.1.1	Notação Matricial Para a Decomposição QR . . . . .	40
3.2	Análise Numérica . . . . .	41
3.3	Resultados Numéricos . . . . .	43
3.4	Conclusões . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Detecção MMSE-OSIC em Canais Altamente Correlacionados</b>	<b>46</b>
4.1	Modelo de Sistema . . . . .	47
4.2	MMSE-OSIC via SQRD em Canais Correlacionados . . . . .	48
4.2.1	Decomposição QR via Gram-Schmidt . . . . .	48
4.2.2	Atualização de Normas no Algoritmo SQRD . . . . .	49
4.3	Resultados Numéricos . . . . .	51
4.3.1	Análise da Estabilidade da SQRD . . . . .	51
4.3.2	Análise do Desempenho . . . . .	52
4.3.3	Análise da Complexidade . . . . .	55
4.4	Conclusões . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Estimativas de Canais MIMO com Treinamento Assíncrono</b>	<b>57</b>
5.1	Modelo de Sistema . . . . .	58
5.1.1	<i>Uplink</i> : Transmissão de Pilotos . . . . .	59
5.1.2	Processamento da ERB . . . . .	59

5.1.3	<i>Downlink</i> : Transmissão de Dados . . . . .	61
5.2	Erro para Estimativas de Canal . . . . .	61
5.2.1	Correlação entre Canais . . . . .	63
5.3	Sequências de Treinamento . . . . .	64
5.3.1	Função de Correlação Circular Cruzada . . . . .	64
5.3.2	Tipos de Sequências Piloto . . . . .	65
5.4	Resultados Numéricos . . . . .	66
5.4.1	CCC das Sequências Piloto . . . . .	67
5.4.2	Erro de Estimativa de Canal . . . . .	68
5.4.3	BER e Capacidade Total para o <i>Downlink</i> . . . . .	70
5.5	Conclusões . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Alocação de Potência em Sistemas MIMO com <i>Eigen-beamforming</i></b> <b>74</b>	
6.1	Modelo de Sistema . . . . .	74
6.1.1	<i>Eigen-beamforming</i> . . . . .	75
6.1.2	SNR Pós-Detecção . . . . .	76
6.1.3	BER . . . . .	76
6.1.4	Capacidade . . . . .	76
6.2	Alocação Ótima de Potência para BER Mínima . . . . .	77
6.2.1	Formulação do Problema . . . . .	77
6.2.2	Convexidade do Problema . . . . .	78
6.2.3	Condições de KKT e a Solução Ótima para o Problema . . . . .	79
6.2.4	Solução Através da Função W de Lambert . . . . .	79
6.3	Alocação Ótima de Potência para Capacidade Máxima . . . . .	80
6.3.1	Formulação do Problema . . . . .	81
6.3.2	Convexidade do Problema . . . . .	81
6.3.3	Condições de KKT e a Solução Ótima para o Problema . . . . .	82
6.4	Resultados Numéricos . . . . .	82

6.4.1	Capacidade para as Distribuições WFD e MBD . . . . .	85
6.5	Conclusões . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Sensoriamento Espectral Multi-Banda</b>	<b>87</b>
7.1	A Ideia Básica . . . . .	89
7.2	Modelo de sistema . . . . .	90
7.3	Método de sensoriamento Multibanda Proposto . . . . .	91
7.3.1	Estimação da PSD . . . . .	92
7.3.2	Filtragem . . . . .	93
7.3.3	Detecção de Transições I . . . . .	93
7.3.4	Detecção de Transições II . . . . .	94
7.3.5	Classificação das Transições . . . . .	94
7.3.6	Correção de Erros . . . . .	95
7.3.7	Geração da Máscara Espectral . . . . .	95
7.4	Sensoriamento de Sinais OFDM . . . . .	95
7.4.1	Filtragem . . . . .	96
7.4.2	Detecção de Transições I . . . . .	97
7.4.3	Detecção de Transições II . . . . .	97
7.4.4	Classificação das Transições . . . . .	98
7.4.5	Geração da Máscara Espectral . . . . .	98
7.4.6	Exemplo Numérico . . . . .	98
7.5	Resultados Numéricos . . . . .	101
7.5.1	Sensoriamento para $N_p = 1$ . . . . .	101
7.5.2	Sensoriamento para $N_p = 4$ . . . . .	106
7.6	Conclusões . . . . .	107
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>108</b>
8.1	Disseminações . . . . .	109
8.2	Trabalhos Futuros . . . . .	111

<b>Apêndice A - Quantização de símbolos QAM no Domínio LR</b>	<b>120</b>
A.1 Quantização de símbolos QAM . . . . .	120
A.2 Quantização de símbolos QAM no Domínio LR . . . . .	122
<b>Apêndice B - Transformação de Variáveis Aleatórias</b>	<b>123</b>
B.1 Transformação $Y = \sqrt{X}$ . . . . .	123
B.2 Transformação $Y = X^2$ . . . . .	123
B.3 Transformação $Y =  X $ . . . . .	124
B.4 Transformação $Y = CX$ . . . . .	124
<b>Apêndice C - Função geradora de Momento de uma Variável <math> X </math></b>	<b>125</b>
<b>Apêndice D - Exemplo: Formação de <math>U^{(\ell)}</math></b>	<b>126</b>
<b>Apêndice E - Esperança do Máximo</b>	<b>127</b>
<b>Apêndice F - PDF da Norma de um Vetor Gaussiano</b>	<b>128</b>
<b>Apêndice G - PDF do Produto Interno de Dois Vetores Gaussianos</b>	<b>130</b>

# Lista de Figuras

2.1	Sistema MIMO. . . . .	7
2.2	Sistema MIMO operando no modo de transmissão V-BLAST. . . . .	10
2.3	Diagrama de blocos para a CL (KOBAYASHI; CIRIACO; ABRÃO, 2015). . . . .	21
2.4	Regiões de decisão para diferentes detectores (WUBBEN et al., 2004). . . . .	23
2.5	BER para o Arranjo A. . . . .	30
2.6	BER para o Arranjo B. . . . .	30
2.7	BER para o Arranjo C. . . . .	31
2.8	Complexidade do algoritmo LLL em função de número de antenas de transmissão e do índice de correlação espacial (KOBAYASHI; CIRIACO; ABRÃO, 2015). . . . .	33
2.9	Complexidade de detectores lineares; 16-QAM e $E_b/N_0 = 22 [dB]$ (KOBAYASHI; CIRIACO; ABRÃO, 2015). . . . .	35
3.1	Esperança de $\mathbf{U}^{(\ell)}$ em função da iteração $\ell$ do algoritmo QR, considerando-se decomposições de matrizes de tamanho $N = K = \{60, 100, 200\}$ . . . . .	44
4.1	Transmissão MIMO para o <i>uplink</i> , considerando $K$ usuários equipados com $N_K$ e uma ERB com $N$ antenas. . . . .	47
4.2	Esperança do <i>condition number</i> de cada iteração da SQRD original e de sua versão modificada. . . . .	52
4.3	BER para os cenários A, B, C. . . . .	54
4.4	Complexidade computacional para os detectores MMSE-SIC, MMSE-OSIC e MMSE-OSIC (modificado) com $K' = 400$ e um número variável de antenas na ERB . . . . .	55
5.1	Alocação temporal para um tempo de coerência de $10T$ . . . . .	59
5.2	Transmissão <i>uplink</i> , considerando que $j$ é o índice dos <i>time-slots</i> , $\mathbf{H}^T = [\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_K]$ e $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_K]$ . . . . .	60

5.3	Histograma da CCC, $c_{ij}(\xi)$ , para a família Walsh-Hadamard-64 . . . . .	67
5.4	Histograma da CCC, $c_{ij}(\xi)$ , para a família Gold-63 . . . . .	68
5.5	Histograma da CCC, $c_{ij}(\xi)$ , para a família Quaternária-63 . . . . .	68
5.6	MSE das estimativas de canal em função do assincronismo percentual $\xi$ para as sequências de treinamento Walsh-Hadamard, Gold e Quaternária ( $N = 300$ , $K = 40$ , $p_r = 13$ dB) . . . . .	69
5.7	BER para o <i>downlink</i> , com símbolos 16-QAM pré-codificados via ZF, considerando-se $\xi = 0.125$ , $K = 40$ , $p_r = 5$ dB e $p_f = 10$ dB. . . . .	71
5.8	Capacidade total no <i>downlink</i> com $\xi = 0.125$ , $K = 40$ , $p_r = 5$ dB e $p_f = 10$ dB. . . . .	72
5.9	Perda de capacidade (em porcentagem) devido ao assincronismo, $K = 40$ , $p_r = 5$ dB, $p_f = 10$ dB . . . . .	72
6.1	BER para um sistema com $K = 6$ e $N = 8$ e distribuições de potência do tipo MBD, WPD, EPD . . . . .	84
6.2	Capacidade total do sistema com $K = 6$ e $N = 8$ e distribuições de potência do tipo MBD, WPD, EPD . . . . .	84
6.3	Capacidade total do sistema com $K = 100$ e $N = 100$ e distribuições de potência do tipo WPD e EPD . . . . .	86
7.1	Exemplo, estimativa da máscara espectral. . . . .	91
7.2	Diagrama de blocos do método proposto. . . . .	92
7.3	PSD exata e aproximada do sinal OFDM. . . . .	99
7.4	PSD filtrada exata e aproximada da PSD o sinal OFDM. . . . .	99
7.5	Sinal $\mathcal{W}'_0(f)$ considerando a PSD aproximada e exata do sinal OFDM.100	
7.6	Sinal $E_1(f)$ considerando a PSD aproximada e exata do sinal OFDM.100	
7.7	PSD estimada do sinal recebido pelo sensor espectral. . . . .	102
7.8	PSD estimada e filtrada pelos $J = 3$ ramos, i.e, $\mathcal{W}_i(f)$ . . . . .	102
7.9	Derivada das PSDs filtradas $\mathcal{W}'_i(f)$ . . . . .	103
7.10	Sinal $\hat{E}_1(f)$ , onde picos representam transições espectrais. . . . .	103
7.11	Derivada do sinal $\hat{E}_1(f)$ . . . . .	104
7.12	Sinal $\hat{E}_2(f)$ , i.e, raízes de $\hat{E}'_1(f)$ . . . . .	104

7.13	Sinal $\hat{E}_3(f) = \hat{E}_1(f) \cdot \hat{E}_2(f)$ . . . . .	105
7.14	Sinal $\hat{E}_4(f)$ , gerado após o decisor abrupto, como descrito na eq. (7.17). . . . .	105
7.15	Máscara espectral e PSD do sinal sem ruído. . . . .	106
7.16	Máscara espectral estimada para um sistema OFDM com $N_u = 4$ PUs. . . . .	106
A.1	Constelação 16-QAM e sua versão normalizada (MILFORD; SANDELL, 2011) . . . . .	121
F.1	pdf de $\ \mathbf{x}\ ^2$ e de sua aproximação Gaussiana. . . . .	128
F.2	pdf de $\ \mathbf{x}\ _2^2$ e de sua aproximação Gaussiana. . . . .	129
G.1	PDF da multiplicação de duas variáveis gaussianas. . . . .	131
G.2	PDF experimental de Z e sua aproximação Gaussiana. . . . .	131

# Lista de Tabelas

2.1	Complexidade computacional de detectores MIMO. . . . .	34
2.2	Comparativo do número de flops consumidos para realizar algumas operações matriciais considerando o modelo real e o complexo ( $N = K$ ) . . . . .	36
5.1	Principais características para sequências de espalhamento clássicas. $r, n \in \mathbb{N}$ and $\xi \in \mathbb{Z}$ . . . . .	66
6.1	Valores singulares de uma matriz de canal descorrelacionada ( $6 \times 6$ , $\rho = 0$ ) e uma matriz de canal correlacionada ( $6 \times 6$ , $\rho = 0.9$ ) . . .	85
7.1	Parâmetros para o sensoriamento espectral. . . . .	101



# Lista de Abreviaturas e Siglas

<b>4G</b>	Quarta geração de telefonia móvel
<b>5G</b>	Quinta geração de telefonia móvel
<b>AWGN</b>	<i>Additive White Gaussian Noise</i> , Ruído Aditivo Gaussiano Branco
<b>BER</b>	<i>Bit-Error-Rate</i> , Taxa de Erro de Bit
<b>CL</b>	<i>Chase-list</i> , Lista de Chase
<b>CSI</b>	<i>Channel-State-Information</i> , Informação do Estado do Canal
<b>D2D</b>	<i>Device-to-Device</i> , Dispositivo para Dispositivo
<b>ERB</b>	Estação rádio base
<b>EPD</b>	<i>Equal Power Distribution</i>
<b>i.i.d.</b>	independente e igualmente distribuído
<b>IoT</b>	<i>Internet-of-Things</i> , Internet das Coisas
<b>LD</b>	<i>Linear Detection</i> , Detecção Linear
<b>KKT</b>	Karush-Khun-Tucker
<b>LLL</b>	Lenstra-Lenstra-Lovász
<b>LTE-A</b>	<i>Long-Term-Evolution Advanced</i>
<b>LR</b>	<i>Lattice-Reduction</i> , Redução Treliça

<b>MIMO</b>	<i>Multiple-Input Multiple-Output,</i> Múltiplas-Entradas Múltiplas-Saídas
<b>MF</b>	<i>Matched-Filter,</i>
<b>ML</b>	<i>Maximum-Likelihood,</i> Máxima Verossimilhança
<b>MMSE</b>	<i>Minimum-Mean-Squared-Error,</i> Mínimo Erro Quadrático Médio
<b>MSE</b>	<i>Mean-Squared-Error,</i> Erro Quadrático Médio
<b>MBD</b>	<i>Min-BER Distribution</i>
<b>OFDM</b>	<i>Orthogonal Frequency-Division Multiplexing,</i> Multiplexação por Divisão de Frequência Ortogonal
<b>OSIC</b>	<i>Ordered-Successive-Interference-Cancellation,</i> Cancelamento Sucessivo de Interferência Ordenado
<b>PDP</b>	<i>Power Delay Profile,</i> Perfil de Atraso de Potência
<b>PSD</b>	<i>Power Spectrum Density,</i> Densidade Espectral de Potência
<b>PU</b>	<i>Primary User,</i> Usuário Primário
<b>QAM</b>	<i>Quadrature-Amplitude-Modulation,</i> Modulação em Amplitude e Quadratura
<b>QoS</b>	<i>Quality of Service</i>
<b>SAR</b>	<i>Specific Absorption Rate,</i>
<b>SD</b>	<i>Sphere-Decoder,</i> Decodificador Esférico
<b>SIC</b>	<i>Successive-Interference-Cancellation,</i> Cancelamento Sucessivo de Interferência

<b>SM</b>	<i>Spatial-Modulation,</i> Modulação Espacial
<b>SNR</b>	<i>Signal-to-Noise Ratio,</i> Relação Sinal Ruído
<b>SQRD</b>	<i>Sorted QR Decomposition,</i> Decomposição QR Ordenada
<b>s.t.</b>	<i>subject to,</i> sujeito a
<b>SU</b>	<i>Primário User,</i> Usuário Secundário
<b>SVD</b>	<i>Singular Value Decomposition,</i> Decomposição em Valores Singulares
<b>STBC</b>	<i>Space-Time-Block-Code</i>
<b>TDD</b>	<i>time-duplex-division</i>
<b>TM</b>	Terminal Móvel
<b>v.a.</b>	variável aleatória
<b>V-BLAST</b>	<i>Vertical-Bell-Laboratories-Layered-Space-Time</i>
<b>WFD</b>	<i>Water-Filling Distribution</i>
<b>ZF</b>	<i>Zero-Forcing</i>

# Convenções e Notações

As seguintes notações matemáticas foram adotadas neste trabalho:

- Letras minúsculas em negrito denotam vetores coluna, a menos que haja alguma indicação;
- Letras maiúsculas em negrito denotam matrizes;
- $(\cdot)^T$ : operador de transposição;
- $(\cdot)^*$ : operador de conjugação;
- $(\cdot)^H$ : operador hermitiano (transposição e conjugação);
- $(\cdot)^{-1}$ : inversão de uma matriz quadrada;
- $(\cdot)^\dagger$ : pseudoinversa de uma matriz;
- $\det(\cdot)$ : determinante de uma matriz quadrada;
- $\|\cdot\|_n$ : norma- $n$ ;
- $\kappa[\cdot]$ : *condition number* de uma matriz;
- $\text{tr}(\cdot)$ : operador traço;
- $\text{diag}(\cdot)$ : operador de diagonalização;
- $\text{vec}(\cdot)$ : vetorização de uma matriz;
- $\lfloor \cdot \rfloor$ : operador inteiro mais próximo;
- $\lceil \cdot \rceil$ : operador inteiro superior mais próximo;
- $\lfloor \cdot \rfloor$ : operador inteiro inferior mais próximo;
- $\mathbf{I}_K$ : matriz identidade de ordem  $K$ ;
- $\mathbf{0}_{N \times K}$ : matriz de tamanho  $N \times K$  formada exclusivamente por zeros;
- $\mathbf{1}_{N \times K}$ : matriz de tamanho  $N \times K$  formada exclusivamente por uns;

- $\mathcal{CN}(\mu, \sigma^2)$ : variável aleatória Gaussiana circular e complexa com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ ;
- $\mathcal{O}(\cdot)$ : ordem da complexidade de uma operação ou algoritmo;
- $\mathcal{Q}(\cdot)$ : processo de quantização de um símbolo modulado;
- $\mathcal{Q}(\cdot)_{LR}$ : processo de quantização no domínio LR;
- $\mathbb{E}[\cdot]$ : operador esperança estatística;
- $\mathbb{C}$ : conjunto dos números complexos;
- $\mathbb{N}$ : conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Z}$ : conjunto dos números inteiros;
- $\in$ : pertence ao conjunto;
- $W(x)$ : Função W de Lambert;
- $\delta(x)$ : Função Delta de Dirac;
- $u(x)$ : Função degrau unitário;
- $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$ ;
- $\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-z^2) dz$ ;
- $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ ,  $\frac{df(x)}{dx}$ ,  $f'(x)$ : derivada da função  $f(x)$  em relação à variável  $x$ .

# Lista de Símbolos

Apresenta-se na sequência uma lista dos principais símbolos usados ao longo deste trabalho. Apesar dos símbolos terem, em sua maioria, seu significado inalterado ao longo dos capítulos, existem algumas exceções. Portanto, apresenta-se abaixo uma lista de símbolos organizada por capítulos, e por ordem de aparição, a fim de evitar a indução de equívocos.

## Capítulo 2

Símbolo	Definição
$\mathbf{x}$	Vetor de sinais recebidos
$\mathbf{H}$	Matriz de canal de um sistema MIMO
$\mathbf{s}$	Vetor de sinais transmitidos
$\mathbf{n}$	Ruído aditivo no receptor
$N$	Número de antenas de recepção
$K$	Número de antenas de transmissão
$M$	Ordem de modulação do sistema
$\mathbf{R}_{tx}, \mathbf{R}_{rx}$	Matriz de correlação espacial vista pelo transmissor e receptor, respectivamente
$\rho_{tx}, \rho_{rx}$	Índice de correlação espacial na transmissão e recepção
$\tilde{\mathbf{s}}$	Vetor de símbolos estimados
$\hat{\mathbf{s}}$	Vetor de símbolos estimados e quantizados
$\mathbf{Q}, \mathbf{R}$	Componentes ortogonal da e triangular da decomposição QR da matriz de canal $\mathbf{H}$
$\mathbf{c}$	Vetor de dimensão $a$ contendo
$\mathbf{W}_{ZF}, \mathbf{W}_{MMSE}$	Matriz de equalização ZF e MMSE
$E_s$	Energia média dos símbolos enviados
$N_0$	Densidade espectral de ruído para uma banda unitária
$\underline{\mathbf{x}}$	Versão estendida do vetor de sinais recebidos $\mathbf{x}$
$\underline{\mathbf{H}}$	Matriz de canal de estendida
$\mathbf{\Pi}$	Matriz de permutação para detecção ordenada
$\tilde{\mathbf{H}}$	Matriz de canal no domínio LR

$\mathbf{T}$	Matriz unimodular gerada do algoritmo LLL
$\mathbf{z}$	Vetor de símbolos transmitidos no domínio LR
$\tilde{\mathbf{z}}$	Vetor de símbolos estimados no domínio LR
$\hat{\mathbf{z}}$	Vetor de símbolos estimados e quantizados no domínio LR
$\sigma$	Parâmetro que controla a qualidade da matriz $\tilde{\mathbf{H}}$ ao longo do algoritmo LLL
$\beta'$	Variável utilizada na quantização de símbolos no domínio LR
$\tilde{\mathbf{H}}$	Versão estendida da matriz de canal no domínio LR
$\underline{\mathbf{T}}$	Versão estendida da matriz $\mathbf{T}$
$\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{R}}$	Componente ortogonal da decomposição triangular superior da QR da matriz de canal no domínio LR

---

## Capítulo 3

Símbolo	Definição
$\mathbf{A}$	Matriz quadrada a ser decomposta pela decomposição QR
$N$	Dimensão da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{Q}$	Componente ortogonal da decomposição QR da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{R}$	Matriz triangular superior gerada na decomposição QR da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{U}^{(\ell)}$	Matriz que caracteriza a $\ell$ -ésima iteração da decomposição QR via Gram-Schmidt
$\mathbf{Q}^{(\ell)}$	Matriz $\mathbf{Q}$ para a $\ell$ -ésima iteração da decomposição QR via Gram-Schmidt
$\mathbf{R}^{(\ell)}$	Matriz $\mathbf{R}$ para a $\ell$ -ésima iteração da decomposição QR via Gram-Schmidt
$p_{\ell j}$	Produto interno da $\ell$ -ésima e $j$ -ésima coluna de $\mathbf{Q}^{(\ell)}$
$\sigma^2$	Variância dos elementos da matriz $\mathbf{A}$
$M_{p_{1j}}$	Função geradora de momento da variável $p_{1j}$

---

## Capítulo 4

Símbolo	Definição
$N$	Número de antenas na ERB (recepção)
$K'$	Número total de antenas de transmissão
$K$	Número de MTs

$N_K$	Número de antenas em cada MT
$M$	Ordem de modulação do sistema
$\mathbf{x}$	Vetor de sinais recebidos na ERB
$\mathbf{H}$	Matriz de canal de um sistema MIMO
$\mathbf{s}$	Vetor de sinais transmitidos pelos TMs
$\mathbf{n}$	Ruído aditivo na ERB
$\mathbf{H}_i$	Matriz de canal entre a ERB e o $i$ -ésimo TM
$\mathbf{s}_i$	Vetor de sinais transmitidos pelo $i$ -ésimo usuário
$\underline{\mathbf{H}}$	Matriz de canal de estendida
$\mathbf{\Pi}$	Matriz de permutação para detecção ordenada
$E_s$	Energia média dos símbolos enviados
$N_0$	Densidade espectral de ruído para uma banda unitária
$f_{OSIC}$	Complexidade computacional da detecção MMSE-OSIC
$f_{OSIC-ILL}$	Complexidade computacional da detecção MMSE-OSIC modificada

---

## Capítulo 5

Símbolo	Definição
$K$	Número de MTs
$N$	Número de antenas da ERB
$L_p$	Comprimento do piloto
$L_d$	Número de símbolos enviados no <i>downlink</i>
$T$	Período de símbolo do sistema
$\mathbf{Y}$	Matriz contendo os sinais recebidos na ERB durante o treinamento de canal ( <i>uplink</i> )
$p_r$	Potência de transmissão no canal reverso ( <i>uplink</i> )
$\mathbf{H}^T$	Matriz de canal para o ( <i>uplink</i> )
$\Phi_u$	Matriz de pilotos enviados pelos TMs
$\mathbf{V}$	Matriz de ruídos na ERB durante o envio dos pilotos
$\Psi$	Matriz usada na estimação linear do canal
$\hat{\mathbf{H}}^T$	Matriz de canal estimada para o ( <i>uplink</i> )
$\Phi_r$	Matriz de referência de pilotos presente na ERB
$\Psi_{LR}$	Matriz usada na estimação linear do canal usando o método <i>Least-Squares</i>
$\Lambda_{MF}$	Matriz de pré-codificação MF
$\Lambda_{ZF}$	Matriz de pré-codificação ZF



$\gamma_{MF}$	Variável de controle de potência para a pré-codificação MF
$\gamma_{ZF}$	Variável de controle de potência para a pré-codificação ZF
$p_f$	Potência de transmissão no canal direto ( <i>downlink</i> )
<b>H</b>	Matriz de canal para o ( <i>downlink</i> )
<b>S</b>	Matriz de símbolos enviados da ERB para os TMs
<b>W</b>	Matriz de ruídos presente nos TMs
$MSE_h$	Erro teórico para as estimativas de canal
<b>C</b>	Matriz de correlação circular cruzada das sequências piloto
$\xi$	Assincronismo percentual relativo ao período de símbolo

---

## Capítulo 6

Símbolo	Definição
<b>x</b>	Vetor de sinais recebidos
<b>H</b>	Matriz de canal do sistema MIMO
<b>P</b>	Matriz de controle de potência para os símbolos a serem transmitidos
<b><math>\Lambda</math></b>	Matriz de pré-codificação
<b>s</b>	Vetor de símbolos transmitidos
<b>n</b>	Ruído aditivo no receptor
$N$	Número de antenas de recepção do sistema
$K$	Número de antenas de transmissão do sistema
<b>U, <math>\Sigma</math>, <math>V^H</math></b>	Componentes matriciais de uma decomposição SVD
$\rho_i$	SNR pós-deteção da $i$ -ésima transmissão do sistema operando sob o <i>eigen-beamforming</i>
$M$	Ordem de modulação do sistema
$M$	Ordem de modulação do sistema
$p_T$	Potência total disponível no transmissor
$Pe_i$	Taxa de erro de bit para a transmissão da $i$ -ésima antenas.
$K_A$	Número de antenas ativas.
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange

---

## Capítulo 7

Símbolo	Definição
<b>x</b>	Sinal a ser sensoriado

$\mathbf{s}_i$	Sinal transmitido pelo $i$ -ésimo usuário primário
$N_p$	Número de usuários primários
$\mathbf{n}$	Ruído aditivo presente no sensor espectral
$\hat{P}_x$	PSD estimada do sinal $x$ através do método de Welch
$f_s$	Frequência de amostragem
$\mathcal{W}_i$	Sinal filtrado no $i$ -ésimo ramo do método proposto
$J$	Número de ramos de filtragem presentes no sensor espectral proposto
$\phi_i$	Resposta impulsiva filtro do $i$ -ésimo ramo do método proposto
$\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3, \hat{E}_4,$	Sinais ao longo do processo do método de sensoriamento proposto
$\hat{M}(f),$	Máscara espectral estimada

---

# 1 Introdução

Sem dúvidas, os serviços de telecomunicações tornaram-se um bem econômico e social imprescindível na atualidade, promovendo fortes mudanças na forma com que o homem interage com o mundo a sua volta. Sendo um ótimo meio para o entretenimento e prestação de serviços, as telecomunicações atingiram um estado de onipresença no cenário atual, oferecendo comodidade, segurança e lazer aos seus usuários. Um exemplo disso é o número de usuários da telefonia móvel: estima-se que 67% da população mundial será adepta de tal serviço até 2019, ou seja, aproximadamente 5 bilhões de usuários (STATISTA, 2016). Logo, a perspectiva de negócios bilionários encontra-se no horizonte das telecomunicações.

A explosão da demanda por serviços ligados a telecomunicações deve-se majoritariamente à chegada dos sistemas de telecomunicações de quinta-geração, doravante denominados 5G, da internet das coisas (IoT, *Internet of Things*) e da internet tátil, os quais impõe elevados requisitos se comparados aos sistemas atuais, sistemas de geração (4G). De acordo com a visão de (DOCOMO, 2010), o 5G tem como meta oferecer taxas de transmissões cem vezes maiores que o 4G, além de atender simultaneamente um número cem vezes maior de conexões, sob latências da ordem de milissegundos e com potências operacionais reduzidas. Por outro lado, o advento da IoT massificará o número dispositivos do cotidiano integrados à *internet* (exemplo eletrodomésticos, *gadgets*), exigindo um número elevadíssimo de conexões simultâneas. Alavancada por aplicações como a realidade virtual e realidade aumentada, a internet tátil exige latências em torno de 1 ms para aprimorar a experiência sensorial do usuário (FETTWEIS, 2014). De modo análogo, o nível de tolerância a atraso tornar-se-á mais exigente em sistemas *smart grid* (EROL-KANTARCI; MOUFTAH, 2015) e comunicação *device-to-device* (D2D), em torno de 100  $\mu s$  a 700  $\mu s$ .

Apesar da grande importância dos serviços listados anteriormente, seus elevados requisitos impoem grandes obstáculos a sua viabilidade. Desta forma, os atuais sistemas de comunicação não são capazes de atender tais requisitos, sendo necessária uma considerável evolução, que por sua vez requer mudanças na ar-

quietura e na filosofia de operação de tais sistemas. Classicamente, oferecer altas taxas de dados a um número elevado de usuários requer altas quantidades de espectro e energia, porém ambos são recursos limitados e escassos. No entanto, há uma crescente preocupação na redução da irradiação eletromagnética, dados seus possíveis danos ao organismo humano (LIN, 2016), o que restringe ainda mais as potências irradiadas por dispositivos sem fio. Especificamente, recomenda-se que, para uma exposição eletromagnética prolongada, a taxa de absorção eletromagnética específica (SAR, *Specific Absorption Rate*) não exceda 80 mW/kg (IEEE..., 2006). Em contrapartida, sistemas contemporâneos, como o 4G, estipulam picos de potência de transmissão de 20 W para estações rádio base (ERBs) e 100 mW dispositivos móveis (3GPP, 2016). Apesar de não haver um consenso a respeito dos malefícios da exposição prolongada de ondas eletromagnéticas em seres humanos (MICHELOZZI ALESSANDRA CAPON; PERUCCI, 2002), tais orientações de seguranças devem ser seguidas, exigindo sistemas que operem com menores potências de transmissão. Outra preocupação é o crescente consumo de energia das ERBs, que pode resultar em altos custos de operação, encarecendo o custo de manutenção do serviço móvel. Quanto à política de realocação de espectro, tal prática tem se mostrado inviável dado o grande esforço burocrático e tempo despendido para obter uma pequena quantidade de espectro na faixa de micro-ondas, e.g., a realocação de bandas de TV aberta (700 MHz) para telefonia móvel 4G no Brasil (ANATEL, 2014). Portanto, nota-se que os futuros serviços das telecomunicações não podem ser atendidos através de soluções triviais como aumento de banda e/ou energia, dada uma série de restrições.

Com os altos requisitos de QoS (*Quality of Service*) e escassez de recursos destes novos serviços, nota-se a necessidade de novas estratégias para o sucesso das próximas gerações de telefonia móvel (STAPLE; WERBACH, 2004). Sumariamente, o uso eficaz dos recursos (energia e espectro) combinadas a algumas mudanças no acesso ao meio são estratégias candidatas a alavancar os serviços de próxima geração. Em particular, pode-se destacar a otimização convexa em conjunção com o conceito de rádio cognitivo como uma poderosa ferramenta para obter o máximo potencial de um sistema de comunicação sem fio. Neste contexto, os rádios cognitivos devem sensoriar o meio em que se encontram para gerenciar recursos disponíveis de maneira otimizada (HAYKIN, 2005). Por outro lado, sistemas com múltiplas antenas (MIMO, *Multiple-Input Multiple Output*) possuem um grande potencial a ser explorado, por apresentar inúmeras vantagens quanto ao seu desempenho, confiabilidade e/ou eficiência espectral e energética em sistemas sem fio. Adicionalmente, cogita-se a quebra da hierarquia da ERB nos

sistemas de próxima geração, permitindo a comunicação entre terminais móveis sem o intermédio da ERB (BOCCARDI et al., 2014), e.g., tecnologia D2D. Logo, a quebra de tal paradigma oferece um maior dinamismo no acesso ao meio, possibilitando incorporar conceitos de rádio cognitivo para uma operação inteligente do sistema como um todo.

## 1.1 Estrutura do Trabalho

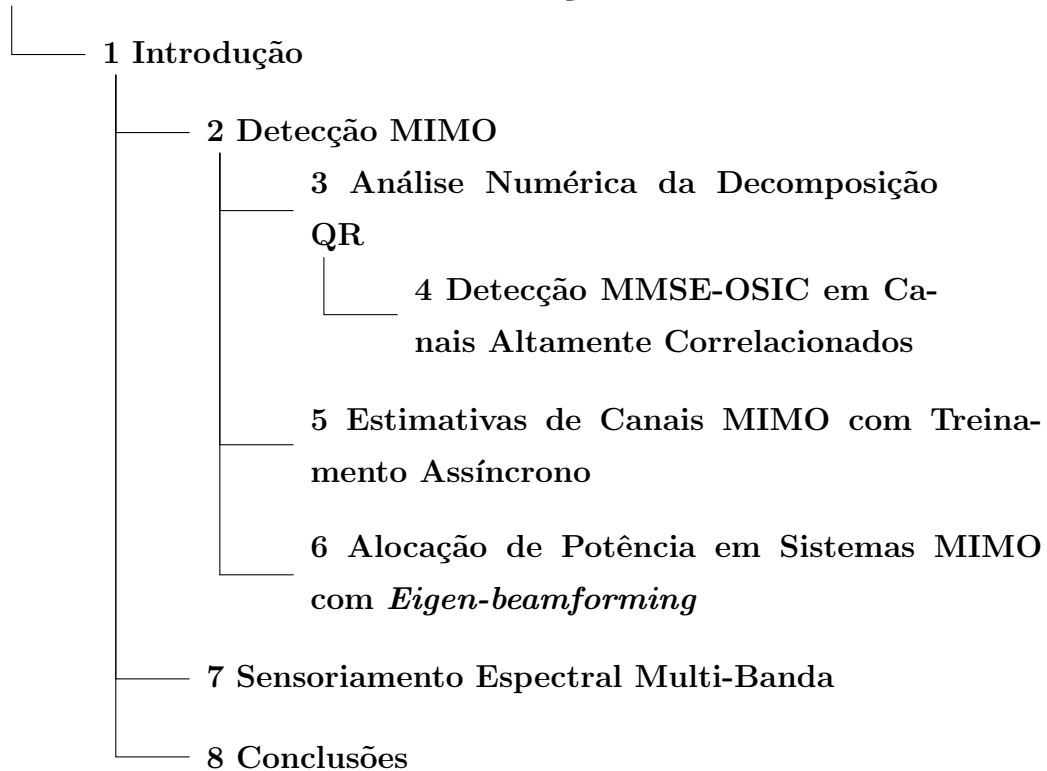
Dada sua relevância a temas contemporâneos, como o 5G, este trabalho faz um estudo de sistemas de comunicação dotados de múltiplas antenas, bem como aborda técnicas de sensoriamento espectral de rádios cognitivos. A seguir, são apresentados os temas abordados em cada capítulo desta Dissertação de Mestrado:

- No Capítulo 2, uma vasta gama de detectores MIMO é estudada de forma compreensiva e detalhada, dando ênfase à análise de desempenho e complexidade de sistemas MIMO operando em cenários que impõe correlações espaciais variadas. Em particular, constatou-se que detectores auxiliados pela técnica de cancelamento sucessivo de interferência ordenado (OSIC, *Ordered-Successive-Interference-Cancellation*) deixam de operar corretamente sob elevados valores de correlação espacial.
- Baseado nas deficiências de uma classe específica de detectores, o Capítulo 3 desenvolve uma análise concisa sobre a decomposição QR, responsável por limitar o desempenho tais detectores em cenários com correlações espaciais mais severas. O estudo abordado neste capítulo é feito de forma estatística com o uso de operações matriciais, as quais permitiram analisar a sensibilidade decomposição QR.
- Através das investigações do Capítulo 4, constatou-se que a decomposição QR pode apresentar problemas relacionados à estabilidade numérica, podendo não garantir a ortogonalidade de uma das suas componentes. Com tal diagnóstico, foi possível resolver o comportamento atípico dos detectores OSIC operando em canais espacialmente correlacionados.
- Dada a tendência de sistemas a operarem em frequências cada vez mais altas, problemas de sincronismo, tanto no tempo quanto na frequência podem emergir. Logo o Capítulo 5 apresentará um estudo da estimação de canais MIMO auxiliado por sequências piloto temporalmente dessincronizadas.

- No Capítulo 6, será apresentado e resolvido o problema de alocação ótima de potência para atingir a mínima taxa de erro em sistemas de comunicação MIMO operando sob o esquema de transmissão *eigen-beamforming*, no qual os canais MIMO são totalmente paralelizados. Para isso, o problema será modelado na forma padrão, sendo resolvido com o auxílio de técnicas de otimização convexa, mais especificamente, os multiplicadores de Lagrange.
- No Capítulo 7 é proposto um esquema de sensoriamento espectral multi-banda para rádios cognitivos. A topologia proposta baseia-se em um banco de filtros, que remonta um transformada *wavelet*. Em particular, a análise do sensor proposto será feita considerando sinais do tipo OFDM, a qual consistem em uma técnica padrão em sistemas modernos de comunicação.
- Por fim, o Capítulo 8 oferece conclusões do trabalho Dissertação, bem como uma perspectiva de continuidade para esta investigação.

O diagrama abaixo apresenta a divisão hierárquica do texto.

## Detecção, Alocação de Potência e Sensoriamento Espectral em Sistemas de Comunicação



## 2 Detecção MIMO

O processo de detecção é uma etapa de suma importância em sistemas MIMO, pois o canal nestes sistemas altera consideravelmente o sinal transmitido, exigindo métodos mais sofisticados para a reconstrução da mensagem. Além disso, um entendimento mais aprofundado do funcionamento de detectores MIMO é imprescindível para o projeto de sistemas com múltiplas antenas, pois diferentes detectores apresentam desempenhos e custos computacionais distintos. Portanto, deve-se selecionar o detector que melhor atenda os requisitos do sistema, dadas suas limitações. Caso o sistema seja intolerante a altas taxas de erro, necessita-se de um detector com um bom desempenho, que exige um maior processamento. Por outro lado, o tempo gasto no processamento da detecção não deve ser prolongado, pois deve-se respeitar o tempo de coerência do canal além de minimizar ao máximo o tempo de latência. Neste contexto, operações usadas na detecção em sistemas MIMO um número considerável de antenas pode levar até 30% do tempo de coerência do canal (SHEPARD et al., 2012), reduzindo consideravelmente o tempo efetivo para a transmissão de dados.

Neste capítulo, será feita uma breve introdução sobre sistemas MIMO, seguida por um estudo detalhado da detecção MIMO em sistemas operando no modo V-BLAST (*Vertical Bell Laboratories Layered Space-Time*), incluindo detectores ótimos e lineares, além de um conjunto de técnicas opcionais a serem incorporadas à detecção com o intuito de aprimorá-la. Após apresentar esta vasta gama de detectores, estes serão testados em termos de desempenho (BER) e complexidade computacional a fim de caracterizá-los. Tal abordagem torna-se importante para a escolha do tipo de detecção a ser adotado, pois deve-se obter a máxima eficiência, dadas a capacidade de processamento e limitações do sistema.

### 2.1 Introdução a Sistemas MIMO

Apesar de ser uma tecnologia razoavelmente moderna, sistemas com múltiplas antenas foram aplicados em diferentes ocasiões ao longo do século passado (HAMP-

TON, 2013). Em torno de 1905, o físico alemão Karl Braun múltiplas antenas para focalizar ondas eletromagnéticas em determinadas direções. Já durante a 2<sup>a</sup> guerra mundial, múltiplas antenas foram utilizadas para aprimorar o funcionamento de radares. Outra aplicação de múltiplas antenas se deu em transmissões de rádio AM (*amplitude-modulation*), permitindo a transmissão terrestre para o dia e a transmissão celeste para o período noturno sem a necessidade de se alterar o ângulo de elevação das antenas. Mais recentemente, em (WOLNIANSKY et al., 1998) foi apresentado o protótipo V-BLAST, comprovando a viabilidade de sistemas MIMO, alavancando a pesquisa em torno do tema. Já hoje em dia, os consolidados padrões Wi-Fi 802.11 e LTE-A (*Long-Term-Evolution Advanced*) incorporam sistemas MIMO ao seu funcionamento. Para os próximos anos, espera-se a incorporação de sistemas MIMO de larga escala (RUSEK et al., 2013) no 5G (BOCCARDI et al., 2014), tornando o tema importantíssimo.

Antes de começar esta discussão, algumas considerações devem ser feitas. Primeiramente, será apresentada a transmissão de dados em um sistema MIMO ponto a ponto, ou seja, todas as antenas da transmissão estão concentradas no mesmo local, assim com todas as antenas de recepção. Por conveniência, os sinais serão tratados em banda base em sua forma geométrica, usando a modulação QAM (*Quadrature-Amplitude-Modulation*) com codificação Gray. Além disso, será considerado inicialmente o modelo de banda estreita com banda unitária no domínio da frequência, mas tal modelo pode ser estendido facilmente para sistemas multi-portadoras como o OFDM.

A Figura 2.1 apresenta um esquemático representando a transmissão de um sistema MIMO ponto a ponto. Nele, os dados fornecidos ao transmissor devem ser processados antes de serem transmitidos. Nesta etapa, os dados de entrada são modulados, podendo ser codificados, pré-codificados e multiplexados em diversas subportadoras, sendo por fim distribuídos ao longo das  $K$  antenas no lado transmissor. Ao ser transmitido, os sinais de cada antena percorrem diversos caminhos<sup>1</sup> até chegarem às  $N$  antenas de recepção. Já no receptor, a mensagem é reconstruída mediante ao sinal desvanecido e corrompido pelo ruído aditivo. Felizmente, pode-se sintetizar de forma compacta e elegante a transmissão MIMO descrita anteriormente fazendo o uso da notação matricial:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  agrupa os sinais recebidos em cada uma das  $N$  antenas receptoras;  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times K}$  é a matriz do canal, cujos elementos descrevem o ganho e o desvio de

<sup>1</sup>De fato, existem  $NK$  caminhos diretos distintos entre o transmissor e o receptor



fase de cada canal estabelecido entre cada par de antena transmissora e receptora;  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^K$  representa os sinais transmitidos em cada uma das antenas transmissoras; e  $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^N$  é o ruído aditivo branco, cujos elementos seguem uma distribuição Gaussiana circular complexa, i.e.,  $n_i \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$ , sendo  $N_0$  a densidade espectral de potência do ruído aditivo.

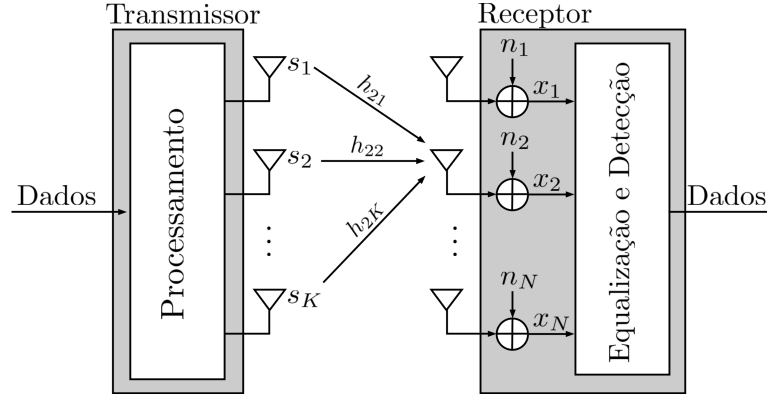


Figura 2.1: Sistema MIMO.

### 2.1.1 Modelagem do Canal

A modelagem do canal será mantida simples, porém, suficientemente adequada aos tipos de sistemas a serem abordados. Em particular, faz-se o uso de um canal MIMO com desvanecimento Rayleigh, sujeito à correlação espacial entre antenas. O desvanecimento Rayleigh é modelado de forma estatística usando variáveis aleatórias que seguem uma distribuição Gaussiana circular complexa de média nula e variância unitária, ou seja,  $h_{ij} \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ , cuja magnitude é representada por uma variável aleatória do tipo Rayleigh, enquanto a fase é representada por uma variável uniforme (CHO JAEKON KIM, 2013). Vale lembrar que o modelo de desvanecimento Rayleigh é válido para ambientes que proporcionam muitas reflexões eletromagnéticas, ou seja, ambientes altamente urbanizados ou com diversos obstáculos (MOLISCH, 2005). Logo, não existe um percurso dominante para o sinal, isto é, ele não apresenta linha de visada.

Como o espaço destinado à acomodação das antenas de um sistema sem fio é muitas vezes limitado, a correlação entre antenas surge como um agravante em sistemas MIMO, principalmente em sistemas MIMO de larga escala. À medida que a distância entre as antenas de transmissão ou recepção diminui, os canais entre antenas adjacentes possuem características cada vez mais semelhantes. No geral, pode-se dizer que canais começam a apresentar correlações significativas quando a distância entre antenas é inferior meio comprimento de onda (GOLDSMITH, 2005). Com canais cada vez mais correlacionados, perde-se diversidade

espacial e, conseqüentemente, desempenho em sistemas MIMO.

Algumas alternativas para contornar o problema da correlação entre as antenas podem ser elencadas. A primeira e a mais simples delas é aumentar o espaçamento entre elas, porém isso implica numa menor densidade de antenas. Outra alternativa, citada anteriormente, seria o uso de ondas milimétricas, que reduziria o tamanho das antenas, permitindo um maior distanciamento entre as antenas. Por fim, pode-se usar técnicas que sejam capazes de lidar com a correlação espacial entre antenas, como é o caso da redução treliça (WÜBBEN et al., 2004).

Para modelar a correlação entre antenas, considera-se

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{tx}^{1/2} \mathbf{H}' \mathbf{R}_{rx}^{1/2}, \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{H}'$  é o canal correlacionado;  $\mathbf{H}$  é o canal MIMO descorrelacionado;  $\mathbf{R}_{tx}$  é a matriz de correlação vista pelo transmissor;  $\mathbf{R}_{rx}$  é a matriz de correlação vista pelo receptor.

Em particular, quando as antenas estão dispostas de forma linear uniforme, as matrizes de correlação vista pelo transmissor e receptor tornam-se, respectivamente

$$\mathbf{R}_{tx} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{tx} & \rho_{tx}^4 & \cdots & \rho_{tx}^{(K-1)^2} \\ \rho_{tx} & 1 & \rho_{tx} & \ddots & \vdots \\ \rho_{tx}^4 & \rho_{tx} & 1 & \cdots & \rho_{tx}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \rho_{tx} \\ \rho_{tx}^{(K-1)^2} & \cdots & \rho_{tx}^4 & \rho_{tx} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

e

$$\mathbf{R}_{rx} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{rx} & \rho_{rx}^4 & \cdots & \rho_{rx}^{(N-1)^2} \\ \rho_{rx} & 1 & \rho_{rx} & \ddots & \vdots \\ \rho_{rx}^4 & \rho_{rx} & 1 & \cdots & \rho_{rx}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \rho_{rx} \\ \rho_{rx}^{(N-1)^2} & \cdots & \rho_{rx}^4 & \rho_{rx} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde  $\rho_{tx}$  e  $\rho_{rx}$  são os índices de correlação do transmissor e receptor, restritas ao intervalo  $[0, 1]$ .

A partir da eq. (2.2), constata-se que a geração do canal correlacionado implica na combinação de coeficiente de canais vizinhos, ponderados de acordo com a distância física das antenas. Logo, os canais tornam-se mutuamente acoplados e dependentes, e caso  $\rho_{tx}$  ou  $\rho_{rx}$  assumam valores muito elevados, os coeficientes de canal tornarão-se muito semelhantes, levando à perda de diversidade espacial

e do desempenho de um sistema MIMO.

Note que o canal adotado é suficientemente adequado para o contexto do trabalho. Para modelos mais sofisticados, recomenda-se a leitura dos seguintes trabalhos: (GOLDSMITH, 2005; SILVA, 2004; CHO JAEKON KIM, 2013).

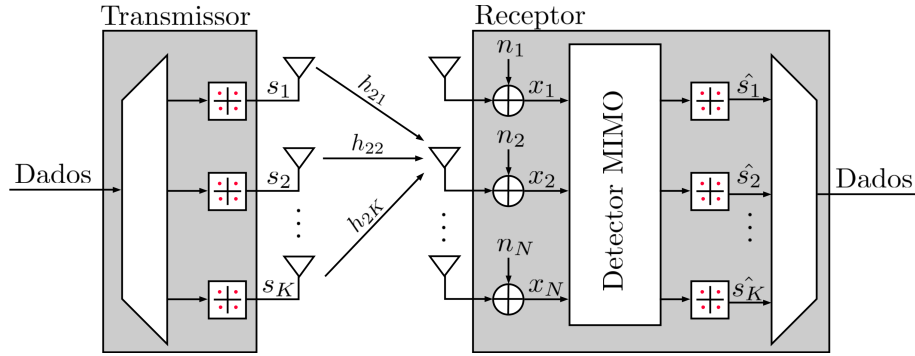
## 2.1.2 Modos de Transmissão

O modelo apresentado na Figura 2.1 e na eq. (2.1) foi apresentado de forma genérica, não especificando o modo de transmissão do sistema. Os modos de transmissões mais clássicos são o V-BLAST (WOLNIANSKY et al., 1998) e o Alamouti (ALAMOUTI, 1998), o mais famoso dos códigos STBC (*Space-Time-Block-Codes*). No esquema de transmissão V-BLAST, cada antena transmite um símbolo modulado distinto, aumentando a taxa de transmissão, pois  $K$  símbolos são transmitidos de forma paralela. Diferentemente do V-BLAST, os STBCs exploram tanto a diversidade espacial quanto a temporal, sendo capazes de aumentar a robustez da transmissão inserindo redundância espaço-temporal, não permitindo maiores taxas de transmissões encontradas no V-BLAST. Existem ainda outras variantes que combinam o STBC ao V-BLAST, além da modulação espacial (MESLEH et al., 2008), que aumenta a constelação de símbolos ao ativar somente uma antena. Apesar de existirem diversos modos de transmissão, vale a pena ressaltar que, o ganho de diversidade e multiplexagem operam em sentidos opostos, não sendo possível melhorar um sem afetar o outro. De fato, o compromisso ganho de multiplexagem e diversidade de qualquer modo de transmissão MIMO está mapeado e limitado à curva DMT (*Diversity-Multiplexing Tradeoff*), como demonstrado em (TSE; VISWANATH; ZHENG, 2004).

### 2.1.2.1 Modo de Transmissão V-BLAST

Com o intuito de facilitar a exposição do tema, este capítulo não assumirá nenhuma pré-equalização ou codificação, além de adotar o modo de transmissão V-BLAST. Desta forma, os dados de entrada serão convertidos de serial para paralelo e modulados, formando o vetor  $\mathbf{s}$ , composto por símbolos  $M$ -QAM<sup>2</sup>. Feita a transmissão, o receptor buscará reconstruir o sinal tendo como base a coleção de sinais recebidos por suas  $N$  antenas, isto é,  $\mathbf{x}$ . O processo que acaba de ser explicado é ilustrado na Figura 2.2.

<sup>2</sup>Os símbolos de uma constelação  $M$ -QAM pertencem ao conjunto  $\mathbb{S} = \{a + jb \mid a, b \in [-\sqrt{M} + 1; \sqrt{M} - 1]\}$



**Figura 2.2:** Sistema MIMO operando no modo de transmissão V-BLAST.

Vale notar que o uso do esquema V-BLAST da forma a ser tratado neste capítulo é de particular interesse para a comunicação no *uplink* de sistemas MIMO celular, tomando-se o transmissor como um ou mais terminais móveis (TMs) e o receptor como uma ERB com  $N$  antenas. A grande vantagem desta configuração é a concentração do processamento na ERB, dotada de maiores capacidades de processamento. Portanto, o processo de reconstrução, ou seja, detecção dos sinais enviados à ERB é de suma importância para a comunicação em sistemas MIMO. Desta forma, alguns dos principais detectores MIMO são apresentados na sequência.

## 2.2 Detectores Ótimos

Esta seção apresentará detectores MIMO capazes de atingir o desempenho ótimo, dentre eles o detector de máxima verossimilhança e o decodificador esférico. Mesmo apresentando complexidades computacionais proibitivas, tais detectores devem ser estudados de forma apropriada por serem referência de desempenho.

### 2.2.1 Detector de Máxima Verossimilhança

Apesar de sua altíssima complexidade, o detector de máxima verossimilhança proporciona a BER ótima em sistemas MIMO. A detecção ML é feita através de uma busca exaustiva pelo conjunto de símbolos que mais se aproxima da mensagem original tendo como base o sinal recebido (BAI; CHOI, 2012). Para um sistema operando no modo V-BLAST e com modulação  $M$ -QAM, o número de combinações de símbolos é  $M^K$ . Por exemplo, um sistema com  $K = 8$  antenas usando uma modulação 16-QAM possui mais de 4 bilhões de possíveis vetores  $\mathbf{s}$  a serem transmitidos. Caso fosse possível testar cada vetor candidato em 1 ns, a detecção ML ainda assim levaria 4 s para ser finalizada, o que é absolutamente intolerável para fins práticos.

Seja  $\mathbb{S}^K$  o conjunto de possíveis candidatos para o vetor  $\mathbf{s}$ , o detector ML pode ser descrito como

$$\tilde{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s} \in \mathbb{S}^K}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|_2^2. \quad (2.5)$$

O procedimento descrito matematicamente na eq. (2.5) encontra-se sistematizado no Algoritmo 2.1. Note que tal algoritmo requer não só a matriz do canal, mas também todos os pontos da constelação QAM, os quais devem estar contidos no vetor  $\mathbf{c}$ . Os candidatos são indexados de 0 a  $M^K - 1$ , cujo valor é convertido para uma base  $M$ -ária representada por  $K$  elementos, nos quais são alocados os símbolos QAM

---

**Algoritmo 2.1** Detector ML.

---

```

1: function  $\hat{\mathbf{s}} = \text{ML}(\mathbf{x}, \mathbf{H}, \mathbf{c})$ 
2:    $K =$  número de colunas de  $\mathbf{H}$ 
3:    $M =$  dimensão de  $\mathbf{c}$ 
4:    $\mathbf{s} = \mathbf{0}_K$  % Vetor candidato a solução
5:    $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0}_K$  % Solução estimada
6:    $\epsilon = \infty$ 
7:   for  $i = 0$  to  $M^K - 1$  do
8:      $\ell = i$ 
9:     for  $j = 1$  to  $n_T$  do % Geração do  $i$ -ésimo vetor candidato
10:       $k = \text{mod}(\ell, M)$ 
11:       $\ell := \lfloor \frac{\ell}{M} \rfloor$ 
12:       $s_j = c_{k+1}$ 
13:     end for
14:     if  $\|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|_2^2 < \epsilon$  then % Teste ML
15:        $\epsilon = \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|_2^2$ 
16:        $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}$ 
17:     end if
18:   end for
19: end function

```

---

### 2.2.2 Decodificador Esférico

A fim de reduzir a complexidade do detector ML, o detector esférico procura apenas por candidatos contidos em uma hipersfera de raio  $d$ , ou seja,

$$d^2 > \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|_2^2, \quad (2.6)$$

que, obviamente, depende da SNR do sinal. Caso o raio  $d$  seja muito grande, a complexidade aproxima-se do detector ML. Por outro lado, se o raio de busca for

pequeno, corre-se o risco de não encontrar candidato algum na esfera de busca (HASSIBI; VIKALO, 2005).

Uma forma de otimizar a busca é reescrever a transmissão MIMO usando a decomposição QR da matriz do canal. A decomposição QR representa a matriz original através de uma matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$  e uma matriz triangular superior  $\mathbf{R}$ . Multiplicando-se a eq. (2.1) por  $\mathbf{Q}^H$  pode-se obter o sistema linear

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{Q}^H \mathbf{x} \\ &= \mathbf{Q}^H (\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{Q}^H (\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{s} + \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{R}\mathbf{s} + \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como  $\mathbf{Q}$  é uma matriz ortogonal<sup>3</sup>, as estatísticas do ruído permanecem inalteradas, não havendo a amplificação do ruído. Além disso, o fato da matriz  $\mathbf{R}$  ser triangular superior permite testar os símbolos de cada antena com mais independência. Desta forma, deve-se buscar o símbolo  $\mathbf{s} \in \mathbb{S}^K$  que satisfaça

$$d^2 > \|\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{s}\|_2^2. \tag{2.8}$$

Considerando que

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_K \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

é possível reescrever a eq. (2.8) como

$$\begin{aligned} d^2 &> \sum_{i=1}^K |y_i - \mathbf{r}_i \mathbf{s}|^2 \\ &> \sum_{i=1}^K \left| y_i - \sum_{j=i}^K r_{ij} s_j \right|^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Note que o teste da eq. (2.10) permite uma busca em árvore indo da última à primeira antena. Caso um determinado candidato  $s_j$  viole a eq. (2.10), ignora-se o ramo ligado a tal possibilidade, o que reduz consideravelmente a complexidade do SD. Após os candidatos presentes na hipersfera de raio  $d$  serem testados, o vetor candidato detentor da menor norma descrita na eq. (2.10) será a solução do problema.

O Algoritmo 2.2 sumariza o processo do SD no contexto MIMO. Neste caso,

---

<sup>3</sup> $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{I}_K$

optou-se por uma abordagem que usa uma sub-rotina aninhada recursiva para a detecção dos símbolos, conferindo ao algoritmo uma descrição elegante e eficiente. Vale notar que as variáveis em ciano correspondem a variáveis globais da função.

---

**Algoritmo 2.2** Detector SD, baseado e modificado de (GUO, 2006).

---

```

1: function  $\hat{\mathbf{s}} = \text{SD}(\mathbf{x}, \mathbf{H}, \mathbf{c}, d)$ 
2:    $K =$  número de colunas de  $\mathbf{H}$ 
3:    $M =$  dimensão de  $\mathbf{c}$ 
4:    $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0}_K$  % Solução estimada
5:    $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}] = \text{QR}(\mathbf{H})$ 
6:    $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^H \mathbf{x}$  % (2.7)
7:    $\text{SDC}(\mathbf{0}_K, 0, K)$ 
8:   procedure  $\text{SDC}(\mathbf{s}, \epsilon_0, \ell)$  % Sub-rotina aninhada recursiva
9:     for  $i = 1$  to  $M$  do
10:        $s_\ell = c_i$ 
11:        $\epsilon = \epsilon_0 + |y_\ell - \mathbf{r}_\ell \mathbf{s}|^2$  % Eq. (2.10)
12:       if  $\epsilon < d$  then % O atual candidato está dentro do raio de busca?
13:         if  $\ell \neq 1$  then
14:            $\text{SDC}(\mathbf{s}, \epsilon, \ell - 1)$  % Recursão: detecção da próxima antena
15:         else
16:            $d = \epsilon$ 
17:            $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}$ 
18:         end if
19:       end if
20:     end for
21:   end procedure
22: end function

```

---

## 2.3 Equalizadores Lineares

Nesta seção, serão apresentados os equalizadores ZF e MMSE, os quais servem de base para outros inúmeros detectores. Combinando tais equalizadores a outras técnicas, forma-se uma nova gama de detectores sub-ótimos que, em alguns casos, aproximam-se do desempenho ótimo a um custo computacional substancialmente inferior.

### 2.3.1 Zero-Forcing

O ZF é uma técnica de equalização bastante conhecida e simples, consistindo basicamente em remover por completo a interferência entre diferentes canais. Neste sentido, pode-se usar a matriz pseudoinversa de Moore-Penrose para a detecção dos símbolos (KÜHN, 2006) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{s}} &= \mathbf{H}^\dagger \mathbf{x} \\ &= \mathbf{s} + \mathbf{H}^\dagger \mathbf{n}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Logo, a matriz de equalização do canal é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\text{ZF}} &= \mathbf{H}^\dagger \\ &= (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Apesar de apresentar uma complexidade relativamente baixa, caso  $\mathbf{H}$  seja má condicionada, a matriz de equalização ZF promoverá a amplificação do ruído aditivo:

$$\|\mathbf{H}^\dagger \mathbf{n}\|_2^2 > \|\mathbf{n}\|_2^2,\tag{2.13}$$

deteriorando o desempenho do sistema.

### 2.3.2 Minimum Mean-Squared-Error

Ao considerar as estatísticas do ruído e do sinal, o detector MMSE é capaz de mitigar o impacto do ruído, melhorando o desempenho do sistema que o empregam. Nesta abordagem, considera-se o problema de minimização do erro quadrático médio dos símbolos transmitidos (SZCZECINSKI; MASSICOTTE, 2005).

$$\mathbf{W}_{\text{MMSE}} = \underset{\mathbf{W}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}[\|\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{x}\|_2^2].\tag{2.14}$$

Resolvendo a eq. (2.14), a matriz de equalização do problema torna-se:

$$\mathbf{W}_{\text{MMSE}} = \left( \mathbf{H}^H \mathbf{H} + \frac{N_0}{E_s} \mathbf{I}_K \right)^{-1} \mathbf{H}^H,\tag{2.15}$$

e portanto a detecção oferecida pelo MMSE é dada por

$$\tilde{\mathbf{s}} = \left( \mathbf{H}^H \mathbf{H} + \frac{N_0}{E_s} \mathbf{I}_K \right)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{x}.\tag{2.16}$$

Uma característica interessante do MMSE é o fato de sua solução se aproximar ao ZF para altas SNRs, já que  $N_0/E_s \rightarrow 0$ . Logo, ambas as abordagens de equalização assemelham-se em altas SNRs.



Diferentemente do ZF, a equalização MMSE não remove totalmente a interferência entre antenas, ou seja,

$$\mathbf{W}_{\text{MMSE}}\mathbf{H} \neq \mathbf{I}_K. \quad (2.17)$$

No entanto, por diminuir o erro quadrático médio, a equalização MMSE tende a amplificar o ruído de forma mais branda que a equalização ZF.

Outra alternativa para a solução MMSE é resolver o problema usando o modelo estendido (BAI et al., 2014), desta forma

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}} &= \underline{\mathbf{H}}^\dagger \underline{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{s} + \underline{\mathbf{H}}^\dagger \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde as matriz do canal e o sinal recebido estendidos são dados receptivamente por

$$\underline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \sqrt{\frac{N_0}{E_S}} \mathbf{I}_K \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0}_{K \times 1} \end{bmatrix}.$$

Embora o uso do modelo estendido apresente uma complexidade computacional maior, tal modelo é necessário para o uso cancelamento sucessivo de interferência, apresentado na sequência. Além disso, recomenda-se o uso desta abordagem em detectores que utilizam a redução treliça, como sugerido em (WUBBEN et al., 2004).

## 2.4 Cancelamento Sucessivo de Interferência

Esta seção tratará do cancelamento sucessivo de interferência (SIC, *successive interference cancellation*) considerando abordagens ordenadas e não ordenadas. Inicialmente, será apresentada a abordagem SIC ordenado usando V-BLAST (WOLNIANSKY et al., 1998) dado sua importância histórica. Além disso, abordagens que tiram proveito da decomposição QR também serão discutidas considerando ou não o ordenamento.

### 2.4.1 Detector V-BLAST

Um dos primeiros detectores a empregarem o cancelamento sucessivo de interferência ordenado foi a técnica V-BLAST, proposta em (WOLNIANSKY et al., 1998). Apesar de ter desempenho superior às técnicas ZF e MMSE, o V-BLAST apresenta uma complexidade consideravelmente maior. De fato, o V-BLAST promove o SIC tendo como base os equalizadores ZF e MMSE.

Inicialmente, a técnica V-BLAST calcula a matriz de equalização ZF ou MMSE. Neste caso, considera-se que a matriz de equalização é composta por  $K$  vetores linha, i.e.,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_K \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

A ordem da detecção dos símbolos parte dos menores valores de  $\|\mathbf{w}_{k_i}\|_2$  aos maiores. Desta forma, o  $k_i$ -ésimo símbolo detectado é

$$\tilde{s}_{k_i} = \mathbf{w}_{k_i} \mathbf{x}. \quad (2.20)$$

Após passar pelo quantizador, remove-se a interferência do  $k$ -ésimo símbolo

$$\mathbf{x} := \mathbf{x} - \hat{s}_{k_i} \mathbf{h}_{k_i}. \quad (2.21)$$

como a interferência do  $k_i$ -ésimo símbolo foi eliminada, a  $k_i$ -ésima coluna de  $\mathbf{H}$  torna-se desnecessária para a detecção, logo ela é zerada. Como a matriz do canal foi alterada, a matriz de equalização deve ser recalculada. Os procedimentos descritos anteriormente são repetidos até que todos os símbolos sejam detectados, cujo procedimento é detalhado no Algoritmo 2.3.

Note que, o Algoritmo 2.3 usa a equalização ZF, i.e., a pseudoinversa da matriz do canal. Para aplicar a equalização MMSE, pode-se utilizar a matriz de equalização apresentada na eq. (2.17) ou utilizar a abordagem estendida.

O maior ponto fraco do detector V-BLAST reside em sua elevada complexidade, proveniente da necessidade de atualizar a matriz de equalização no cancelamento de interferência de cada símbolo. Considerando  $N = K$ , pode-se concluir que a complexidade do V-BLAST é  $\mathcal{O}(K^4)$  (ELSHOKRY, 2010) pois as operações matriciais descritas no Algoritmo 2.3 são  $\mathcal{O}(K^3)$  e devem ser repetidas  $K$  vezes. Comparado a outros detectores lineares, cuja complexidade é  $\mathcal{O}(K^3)$ , verifica-se que o ganho de desempenho do V-BLAST é atingido a um alto custo computacional.

---

**Algoritmo 2.3** Detector ZF-BLAST (WOLNIANSKY et al., 1998).

---

```

1: function  $\hat{\mathbf{s}} = \text{ZF-V-BLAST}(\mathbf{x}, \mathbf{H})$ 
2:    $K =$  número de colunas de  $\mathbf{H}$ 
3:    $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0}_K$ 
4:    $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{0}_K$ 
5:   for  $i = 1$  to  $K$  do
6:      $\mathbf{W} = \mathbf{H}^\dagger$                                      % Usar a eq. (2.17) para o MMSE-BLAST
7:      $k_i = \underset{j \notin \{k_{i-1}, k_{i-2}, \dots\}}{\text{argmin}} \|\mathbf{w}_j\|_2^2$ 
8:      $\tilde{\mathbf{s}}_{k_i} = \mathbf{w}_{k_i} \mathbf{x}$ 
9:      $\hat{\mathbf{s}}_{k_i} = \mathcal{Q}(\tilde{\mathbf{s}}_{k_i})$ 
10:     $\mathbf{x} := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{s}}_{k_i} \mathbf{h}_{k_i}$ 
11:    zere  $k_i$ -ésima coluna de  $\mathbf{H}$ 
12:   end for
13: end function

```

---

### 2.4.2 Cancelamento Sucessivo de Interferência

Uma alternativa para se obter o cancelamento sucessivo de interferência faz o uso da decomposição QR. Inicialmente, aplica-se a decomposição QR na matriz do canal  $\mathbf{H}$  para o ZF, ou usa-se o sistema estendido no caso MMSE. Feito isso, o sistema original é convertido em um sistema triangular superior, como procedido na eq. (2.7). Resolve-se, então, o sistema linear da última antena à primeira, removendo a interferência de cada camada (BAI; CHOI, 2012)

$$\tilde{\mathbf{s}}_i = \begin{cases} \frac{y_i}{r_{ii}}, & i = K \\ \frac{1}{r_{ii}} \left( y_i - \sum_{j=i+1}^K r_{ij} \hat{\mathbf{s}}_j \right), & i = K-1, \dots, 2, 1. \end{cases} \quad (2.22)$$

Vale ressaltar que é fundamental que o símbolo detectado passe pelo quantizador antes que a interferência seja removida da próxima antena. Caso não se proceda desta forma, o cancelamento de interferência não será feito corretamente, afetando o desempenho desta técnica.

O Algoritmo 2.4 descreve o procedimento completo do SIC usando a equalização ZF. Caso opte-se pela equalização MMSE, basta usar o sistema estendido, conforme o destacado ao longo do algoritmo.

**Algoritmo 2.4** Detector ZF-SIC.

---

```

1: function  $\hat{\mathbf{s}} = \text{ZF-SIC}(\mathbf{x}, \mathbf{H})$ 
2:    $K =$  número de colunas de  $\mathbf{H}$ 
3:    $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0}_K$ 
4:    $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{0}_K$ 
5:    $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}] = \text{QRD}(\mathbf{H})$            % Para o MMSE:  $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}] = \text{QRD}(\mathbf{H})$ 
6:    $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^H \mathbf{x}$                    % Para o MMSE:  $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^H \mathbf{x}$ 
7:    $\tilde{s}_K = \frac{y_K}{r_{KK}}$ 
8:    $\hat{s}_K = \mathcal{Q}(\tilde{s}_K)$ 
9:   for  $i = K - 1$  to 1 do
10:     $\tilde{s}_i = y_i$ 
11:    for  $j = i + 1$  to  $K$  do
12:       $\tilde{s}_i = \tilde{s}_i - r_{ij} \hat{s}_j$            % Cancelamento de Interferência
13:    end for
14:     $\tilde{s}_i = \frac{\tilde{s}_i}{r_{ii}}$ 
15:     $\hat{s}_i = \mathcal{Q}(\tilde{s}_i)$ 
16:  end for
17: end function

```

---

**2.4.3 Cancelamento Sucessivo de Interferência Ordenado**

A técnica SIC pode ser melhorada adotando-se uma ordem adequada na detecção dos símbolos (WÜBBEN et al., 2001; BÖHNKE et al., 2003), a qual evita a propagação de erro durante o cancelamento de interferência, aprimorando o desempenho da detecção. O V-BLAST é uma alternativa para promover o cancelamento sucessivo de interferência ordenado, no entanto sua complexidade é um obstáculo, como foi discutido na Seção 2.4.1. Outra alternativa é utilizar a decomposição QR ordenada, a qual ordena os canais de forma com que os símbolos de cada antena sejam detectados do mais forte ao mais fraco. Desta forma, mitiga-se o efeito da propagação de erros ao longo das antenas, pois os símbolos mais fortes são detectados primeiro.

Neste trabalho, a detecção SIC auxiliado pela decomposição QR ordenada será referenciado pela sigla OSIC para diferenciá-lo do V-BLAST, dado que ambos operam de formas distintas, apesar de respeitarem o mesmo princípio.

Na decomposição QR ordenada, apresentada no Algoritmo 2.5, a relação

$$\mathbf{H}\mathbf{\Pi} = \mathbf{QR} \quad (2.23)$$

é estabelecida, onde  $\mathbf{\Pi}$  é uma matriz de permutação. O Algoritmo 2.5 baseia-se

no método de ortonormalização de Gram-Schmidt, e de fato, se as linhas 11 e 12 forem ignoradas, a ordenação não é feita. Portanto, a carga computacional adicional imposta pela ordenação é praticamente desprezível.

---

**Algoritmo 2.5** Decomposição QR Ordenada (WÜBBEN et al., 2003).

---

```

1: function [Q, R, Π] = SQRD(H)                                % Abordagem Gram-Schmidt
2:    $K$  = número de colunas de G
3:    $N$  = número de linhas de G
4:   Q = H
5:   Π = I $K$ 
6:   R = 0 $KK$ 
7:   for  $i = 1$  to  $K$  do
8:      $e_i = \|\mathbf{q}_i\|^2$ 
9:   end for
10:  for  $i = 1$  to  $K$  do
11:     $k = \underset{j=i \text{ to } K}{\text{argmin}} e_j$ 
12:    Troque as colunas  $i$  e  $k$  nas matrizes Q, R, Π, e.
13:     $r_{ii} = \sqrt{e_i}$ 
14:     $\mathbf{q}_i := \mathbf{q}_i / r_{ii}$ 
15:    for  $j = i + 1$  to  $K$  do
16:       $r_{ij} = \mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_j$ 
17:       $\mathbf{q}_j := \mathbf{q}_j - r_{ij} \mathbf{q}_i$ 
18:       $e_j := e_j - |r_{ij}|^2$ 
19:    end for
20:  end for
21: end function

```

---

Após a decomposição QR ordenada, pode-se proceder o SIC de forma convencional, sem se preocupar com o ordenamento, pois este está implícito na decomposição. Após a detecção de todos os símbolos, basta reordená-los

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{\Pi} \hat{\mathbf{s}}. \quad (2.24)$$

O Algoritmo 2.6 apresenta uma função capaz de realizar a detecção OSIC. Apesar da introdução do ordenamento, é possível verificar uma grande semelhança com o Algoritmo 2.4, sendo as únicas diferenças a decomposição QR ordenada e o reordenamento ao fim do processo de detecção. Novamente, as modificações necessárias para combinar o MMSE com OSIC estão dispostas nos comentários ao longo do Algoritmo 2.6.

**Algoritmo 2.6** Detector ZF-OSIC.

---

```

1: function  $\hat{\mathbf{s}} = \text{ZF-OSIC}(\mathbf{x}, \mathbf{H})$ 
2:    $K = \text{número de colunas de } \mathbf{H}$ 
3:    $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0}_K$ 
4:    $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{0}_K$ 
5:    $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{\Pi}] = \text{SQRD}(\mathbf{H})$            % Para o MMSE:  $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{\Pi}] = \text{SQRD}(\underline{\mathbf{H}})$ 
6:    $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^H \mathbf{x}$                        % Para o MMSE:  $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^H \underline{\mathbf{x}}$ 
7:    $\tilde{s}_K = \frac{y_K}{r_{KK}}$ 
8:    $\hat{s}_K = \mathcal{Q}(\tilde{s}_K)$ 
9:   for  $i = K - 1$  to 1 do
10:     $\tilde{s}_i = y_i$ 
11:    for  $j = i + 1$  to  $K$  do
12:       $\tilde{s}_i := \tilde{s}_i - r_{ij} \hat{s}_j$            % Cancelamento de Interferência
13:    end for
14:     $\tilde{s}_i = \frac{\tilde{s}_i}{r_{ii}}$ 
15:     $\hat{s}_i := \mathcal{Q}(\tilde{s}_i)$ 
16:  end for
17:   $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{\Pi} \hat{\mathbf{s}}$ 
18: end function

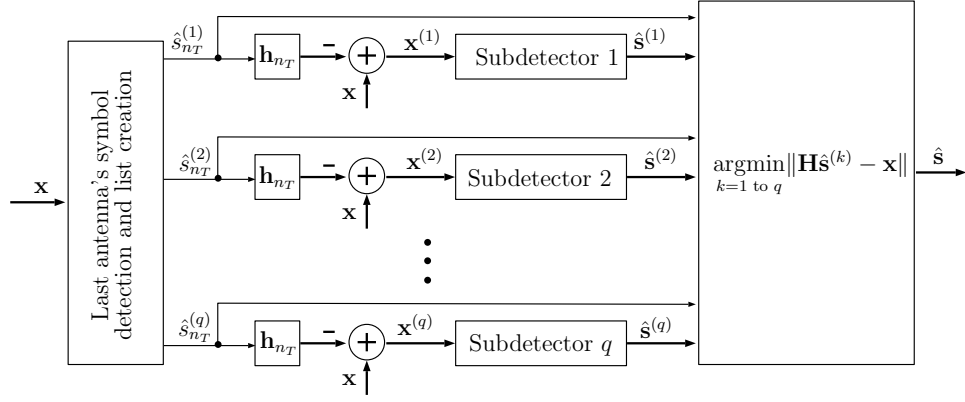
```

---

## 2.5 Lista de Chase

Melhorias no desempenho de detectores MIMO podem ser obtidas, a um custo computacional razoável, através da lista de Chase (CL, *Chase list*). A chave para se obter tais melhorias vem da repetição da detecção de um determinado símbolo (WATERS; BARRY, 2005, 2008). A Figura 2.3 ilustra de forma genérica o funcionamento de um detector MIMO assistido pela CL. Sumariamente, escolhe-se os  $q$  melhores símbolos candidatos<sup>4</sup> para uma determinada antena. Feito isso, a interferência de cada candidato é removida para então serem detectados os símbolos restantes. Após todos os vetores candidatos serem encontrados, aquele que melhor remonta as características do sinal recebido é tomado como solução.

<sup>4</sup> $q$  é limitado a  $M$ , já que os candidatos devem fazer parte do alfabeto  $M$ -QAM



**Figura 2.3:** Diagrama de blocos para a CL (KOBAYASHI; CIRIACO; ABRÃO, 2015).

Para elaborar de forma mais clara o funcionamento do detector, considere que são tomados os símbolos candidatos da última antena. Primeiramente, o símbolo da última antena é estimado, i.e.,  $\tilde{s}_K$ . Feito isso, o vetor que contém todos os símbolos da modulação em uso ( $\mathbf{c}$ ) é ordenado de acordo com a proximidade de  $\tilde{s}_K$ . Dos  $M$  candidatos contidos em  $\mathbf{c}$ , somente  $q$  serão testados, ou seja,

$$\tilde{s}_K \in \{c_1, c_2, \dots, c_q\}. \quad (2.25)$$

Assim, remove-se a interferência do  $i$ -ésimo<sup>5</sup> candidato

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x} - c_i \mathbf{h}_K, \quad (2.26)$$

detecta-se o vetor de símbolos associado ao candidato  $c_i$ , isto é,  $\hat{\mathbf{s}}^{(i)}$ . Por fim, escolhe-se o vetor candidato mais próximo ao vetor de sinais recebidos

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{i \in \{1, 2, \dots, q\}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}^{(i)}\|_2^2, \quad (2.27)$$

tomando-o como solução para o problema.

Devido ao funcionamento da CL, recomenda-se que seu uso seja feito em conjunto com o OSIC. Através dessa combinação, a propagação de erros do OSIC seria mitigada ainda mais, pois além de se começar a detecção pelo símbolo mais forte, tal procedimento é repetido. Partindo deste detalhe, o Algoritmo 2.7 descreve um detector ZF combinados às técnicas CL e OSIC. Vale lembrar que é possível obter outras variantes de tal detecção, as quais podem utilizar o MMSE ou até mesmo desconsiderar o uso do ordenamento.

<sup>5</sup> $i \in \{1, 2, \dots, q\}$

---

**Algoritmo 2.7** Detector ZF assistido pelas técnicas CL e OSIC.
 

---

```

1: function  $\hat{\mathbf{s}} = \text{CL-ZF-OSIC}(\mathbf{x}, \mathbf{H}, \mathbf{c})$ 
2:    $K = \text{número de colunas de } \mathbf{H}$ 
3:    $\epsilon = \infty$ 
4:    $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{\Pi}] = \text{SQR}(\mathbf{H})$ 
5:    $\mathbf{y} := \mathbf{Q}^H \mathbf{x}$ 
6:    $\tilde{s}_K = \frac{y_K}{r_{KK}}$ 
7:   Ordene crescentemente  $\mathbf{c}$  de forma a minimizar  $|c_i - \tilde{s}_K|$ 
8:   for  $i = 1$  to  $q$  do
9:      $\hat{s}_K^{(i)} = c_i$ 
10:    for  $j = K - 1$  to  $1$  do                                     % Subdetector SIC
11:       $\tilde{s}_j^{(i)} = y_j$ 
12:      for  $k = j + 1$  to  $K$  do                                     % Cancelamento de interferência
13:         $\tilde{s}_j^{(i)} := \tilde{s}_j^{(i)} - r_{jk} \hat{s}_k$ 
14:      end for
15:       $\tilde{s}_j^{(i)} := \frac{\tilde{s}_j^{(i)}}{r_{jj}}$ 
16:       $\hat{s}_j^{(i)} = \mathcal{Q}(\tilde{s}_j^{(i)})$ 
17:    end for
18:    if  $\|\mathbf{x} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}^{(i)}\|_2^2 < \epsilon$  then                                     % Escolha do melhor vetor candidato
19:       $\epsilon := \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}^{(i)}\|_2^2$ 
20:       $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}^{(i)}$ 
21:    end if
22:  end for
23:   $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{\Pi}\hat{\mathbf{s}}$ 
24: end function

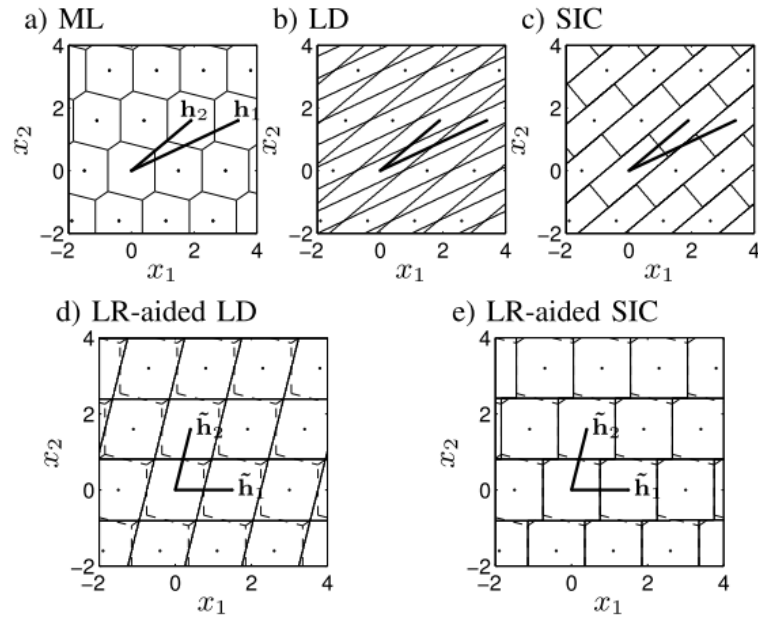
```

---

## 2.6 Redução Treliça

Caso um canal apresente forte correlação espacial ou até mesmo uma forte componente de linha de visada, a matriz do canal torna-se má condicionada, afetando o funcionamento de qualquer detector MIMO. Uma matriz de canal má condicionada causa o estreitamento das regiões de decisão dos símbolos, deixando a detecção vulnerável até mesmo a pequenas quantidades de ruído. Em (WUBBEN et al., 2004), um comparativo entre as regiões de decisão é feito de forma qualitativa, como ilustrado na Figura 2.4. Nesta figura, nota-se que enquanto técnicas lineares (LD, *Linear Detection*) possuem regiões de decisão bastante estreitas, enquanto outras técnicas como o ML ou SIC possuem regiões mais largas, proporcionando uma detecção mais confiável.





**Figura 2.4:** Regiões de decisão para diferentes detectores (WUBBEN et al., 2004).

A redução treliça (LR, *Lattice-Reduction*) pode ser feita de forma eficiente usando o algoritmo LLL, proposto por Lenstra-Lenstra-Lovász em (LENSTRA; LENSTRA; LOVÁSZ, 1982). No entanto, para o contexto deste trabalho, recomenda-se o uso do Algoritmo 2.8 para promover a LR complexa, que é conhecida por ser mais robusta para a detecção MIMO, além de apresentar uma menor complexidade computacional (MA; ZHANG, 2008).

**Algoritmo 2.8** Algoritmo LLL complexo (MA; ZHANG, 2008)

---

```

1: function  $[\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{T}] = \text{LLL}(\mathbf{H})$ 
2:    $\delta = 0,75$ 
3:    $K = \text{número de colunas de } \mathbf{H}$ 
4:    $\mathbf{R} = \mathbf{I}_K$ 
5:    $[\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{R}}] = \text{QR}(\mathbf{H})$  %  $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{R}}$ 
6:    $k = 2$ 
7:   while  $k \leq K$  do
8:     for  $n = k - 1$  to  $1$  do
9:        $u = \left\lfloor \frac{\tilde{\mathbf{R}}(n, k)}{\tilde{\mathbf{R}}(n, n)} \right\rfloor$ 
10:      if  $u \neq 0$  then
11:         $\tilde{\mathbf{R}}(1:n, k) := \tilde{\mathbf{R}}(1:n, k) - \tilde{\mathbf{R}}(1:n, n)u$ 
12:         $\mathbf{T}(:, k) := \mathbf{T}(:, k) - u\mathbf{T}(:, n)$ 
13:      end if
14:    end for
15:    if  $\delta \left| \tilde{\mathbf{R}}(k-1, k-1) \right|^2 > \left| \tilde{\mathbf{R}}(k, k) \right|^2 + \left| \tilde{\mathbf{R}}(k-1, k) \right|^2$  then
16:       $a = \frac{\tilde{\mathbf{R}}(k-1, k-1)}{\|\tilde{\mathbf{R}}(k-1:k, k-1)\|_2}$ 
17:       $b = \frac{\tilde{\mathbf{R}}(k, k-1)}{\|\tilde{\mathbf{R}}(k-1:k, k-1)\|_2}$ 
18:       $\Theta = \begin{bmatrix} a^* & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ 
19:       $\tilde{\mathbf{R}}(k-1:k, k-1:K) := \Theta \tilde{\mathbf{R}}(k-1:k, k-1:K)$ 
20:       $\tilde{\mathbf{Q}}(:, k-1:k) := \tilde{\mathbf{Q}}(:, k-1:k) \Theta^H$ 
21:       $k = \max(k-1, 2)$ 
22:    else
23:       $k = k + 1$ 
24:    end if
25:  end while
26: end function

```

---

No contexto da detecção, o algoritmo LLL busca representar a matriz do canal num domínio reduzido

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{T}, \quad (2.28)$$

onde  $\tilde{\mathbf{H}}$  é uma base mais próxima à ortogonalidade, enquanto  $\mathbf{T}$  é uma matriz unimodular, ou seja,

$$\begin{cases} \mathbf{T} \in \mathbb{Z}^{N \times K} + j\mathbb{Z}^{N \times K} \\ \det(\mathbf{T}) = \pm 1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Como a matriz  $\tilde{\mathbf{H}}$  possui um condicionamento numérico superior, as regiões de

decisão tornam-se maiores, permitindo ganhos de desempenho na detecção do sinal. Desta forma, pode-se reescrever a equação da transmissão MIMO no domínio LR da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \\ &= (\mathbf{HT})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{s}) + \mathbf{n} \\ &= \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{z} + \mathbf{n}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Através deste novo sistema, pode-se detectar os símbolos no domínio LR usando as equalizações ZF ou MMSE, opcionalmente combinadas às técnicas CL, SIC ou OSIC. No entanto, é de suma importante quantizar adequadamente os símbolos no domínio reduzido, ou seja,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} &= \mathcal{Q}_{LR}(\tilde{\mathbf{z}}) \\ &= \left\lfloor \frac{\tilde{\mathbf{z}}' - \beta' \mathbf{T}^{-1} \mathbf{1}_{1 \times K}}{2} \right\rfloor + \beta' \mathbf{T}^{-1} \mathbf{1}_{1 \times K},\end{aligned}\tag{2.31}$$

onde  $\mathbf{1}_{1 \times K}$  é um vetor coluna com  $K$  elementos e  $\beta'$  assume valores 1 ou  $1 + j$  para modulações PAM e QAM, respectivamente

### 2.6.1 Equalização Linear LR

Como previsto anteriormente, a equalização no domínio LR pode ser feita da mesma forma em que se procedeu na Seção 2.3, salvo a quantização. Assim, para o caso do ZF combinado à LR, tem-se a solução

$$\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{H}}^\dagger \mathbf{x}.\tag{2.32}$$

Quanto ao uso do MMSE, recomenda-se o uso do sistema estendido por proporcionar um melhor desempenho (WÜBBEN et al., 2004). Assim, exige-se que o LLL seja executado sobre a matriz de canal estendida, i.e.,

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{HT}.\tag{2.33}$$

Então, a solução MMSE no domínio LR é dada por

$$\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{H}}^\dagger \mathbf{x}\tag{2.34}$$

Feita a equalização MMSE dos símbolos no domínio LR, deve-se quantizá-los no mesmo domínio através da eq. (2.31), para posteriormente retorná-los ao domínio original

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{z}}.\tag{2.35}$$

### 2.6.2 Detecção LR com OSIC

A fim de realizar uma detecção assistida pelas técnicas LR e OSIC é necessário tomar algumas medidas. Primeiramente, é necessário alterar a decomposição QR do Algoritmo 2.8 (linha 5) para a decomposição QR ordenada descrita no Algoritmo 2.5. Desta forma, ambos os algoritmos garantem

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{T} \\ \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{\Pi} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{R}} \end{cases} \quad (2.36)$$

Com isso, pode-se reescrever a detecção dos símbolos no domínio LR como um sistema triangular superior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{Q}}^H \mathbf{x} \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}^H (\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{z} + \mathbf{n}) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}^H (\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{n}) \\ &= \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{n} \\ &= \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{z}' + \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.37)$$

A partir deste ponto, procede-se com a detecção SIC, descrita na Seção 2.4.2. Por fim, os símbolos no domínio LR são quantizados, reordenados e convertidos para o domínio original

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{\Pi}\mathbf{T}\hat{\mathbf{z}}'. \quad (2.38)$$

O procedimento descrito anteriormente vale para a equalização ZF e é sintetizado pelo Algoritmo 2.9. Novamente, pode-se optar pela equalização MMSE, a qual requer o uso do sistema estendido. Além disso, pode-se omitir o ordenamento, realizando-se uma decomposição QR convencional.

---

**Algoritmo 2.9** Detector ZF combinado ao OSIC e LR (LR-ZF-OSIC).

---

```

1: function  $\hat{\mathbf{s}} = \text{LR-ZF-OSIC}(\mathbf{x}, \mathbf{H})$ 
2:    $K = \text{número de colunas de } \mathbf{H}$ 
3:    $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}_K$ 
4:    $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}_K$ 
5:    $[\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{\Pi}] = \text{LLL}(\mathbf{H})$ 
6:    $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{Q}}^H \mathbf{x}$ 
7:    $\tilde{z}_K = \frac{y_K}{\tilde{r}_{KK}}$ 
8:    $\hat{z}_K = \mathcal{Q}_{LR}(\tilde{z}_K)$ 
9:   for  $i = K - 1$  to  $1$  do
10:      $\tilde{z}_i = y_i$ 
11:     for  $j = i + 1$  to  $K$  do
12:        $\tilde{z}_i := \tilde{s}_i - \tilde{r}_{ij} \hat{z}_j$ 
13:     end for
14:      $\tilde{z}_i := \frac{\tilde{z}_i}{\tilde{r}_{ii}}$ 
15:      $\hat{z}_i = \mathcal{Q}_{LR}(\tilde{z}_i)$ 
16:   end for
17:    $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{\Pi T} \hat{\mathbf{z}}$            % Reordenamento e conversão para o domínio original
18: end function

```

---

### 2.6.3 Detecção LR com CL

Para aplicar a CL combinada à LR, será usada a estrutura do SIC de maneira similar a proposta em (BAI; CHOI, 2012). Do desenvolvimento da eq. (2.7), obteve-se

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (2.39)$$

que pode ser subdividida em blocos matriciais da forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{0}_{1 \times K-1} & r_{NK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ s_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ n_N \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Logo, observa-se que

$$\tilde{s}_K = \frac{y_K}{r_{KK}}, \quad (2.41)$$

do qual cria-se a lista dos  $q$  candidatos mais prováveis ao símbolo  $\hat{s}_K$ , que são armazenados em  $\mathbf{c}$ . Após o  $i$ -ésimo candidato ser quantizado, remove-se sua interferência, chegando-se ao sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(i)} &= \mathbf{y}_1 - c_i \mathbf{R}_2 \\ &= \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_1^{(i)} + \mathbf{n}_1. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Assim, pode-se resolver obter os demais símbolos ( $\mathbf{s}_1^{(i)}$ ) usando a LR, para posteriormente ser escolhido o melhor vetor candidato que será tomado como solução.

## 2.7 Análise do Desempenho

Nesta seção, o desempenho dos detectores discutidos ao longo das seções anteriores será comparada em termos da BER média. O sistema a ser testado considera a transmissão de dados de um TM com  $K$  antenas para uma ERB com  $N$  antenas, i.e., transmissão *uplink*. Para uma comparação justa entre sistemas MIMO de diferentes dimensões e diferentes ordens de modulação, a SNR será normalizada em função dos números de bits, além da potência da transmissão ser dividida uniformemente entre as  $K$  antenas. O desempenho de cada detector selecionado será avaliada considerando um sistema em que três modulações e arranjos de antenas:

- Arranjo A: modulação 64-QAM,  $N = 4 \times K = 4$ ;
- Arranjo B: modulação 16-QAM,  $N = 8 \times K = 8$ ;
- Arranjo C: modulação 4-QAM,  $N = 20 \times K = 20$ ;

que garantem que o esforço computacional imposto pela SD não seja proibitivo. Além disso, considerou-se que as antenas de transmissão e recepção possuem um arranjo linear uniforme, resultando em uma correlação espacial modelada na Seção 2.1.1. Assim, foram selecionados três cenários de correlação espacial:

- a) correlação espacial nula  $\rho = \rho_{tx} = \rho_{rx} = 0$ ;
- b) correlação espacial mediana  $\rho = \rho_{tx} = \rho_{rx} = 0,5$ ;
- c) correlação espacial elevada  $\rho = \rho_{tx} = \rho_{rx} = 0,9$ .

Por fim, para simplificar a análise considerou-se o conhecimento perfeito do canal no receptor, ou seja, o conteúdo de  $\mathbf{H}$  está disponível no receptor.

A Figura 2.5 ilustra a BER para o primeiro Arranjo A. Em baixa SNR, os nove detectores analisados apresentaram praticamente o mesmo desempenho. No entanto, nota-se que tanto o SD quanto os detectores LR podem atingir a diversidade total<sup>6</sup>. O destaque vai para os detectores LR que atingem um excelente

<sup>6</sup>Para checar se um sistema atinge a diversidade total, é verificado se, em alta SNR, há uma queda de  $2^N$  na BER para um aumento de 3dB na SNR (BIGLIERI, 2007).

desempenho, apresentando um *gap* muito estreito em relação ao SD, além de terem uma curva de BER paralela ao SD.

Ainda em relação ao Arranjo A, nota-se que os equalizadores ZF e MMSE apresentam desempenhos semelhantes em baixa e média correlação espacial. No entanto, o MMSE acaba apresentando um desempenho superior sob altas correlações espaciais, pois a adição do termo  $N_0/E_s \mathbf{I}_K$  da solução MMSE evita a inversão de uma matriz certamente deficiente em termos de ortogonalidade. Além disso, ao agregar técnicas de ordenamento e LR foi possível obter ganhos substanciais de desempenho.

Quanto à correlação entre antenas, a queda de desempenho é evidente à medida que a correlação entre antenas aumenta. Em cenários com altas correlações espaciais, detectores não assistidos pela LR necessitam uma alta SNR para operarem com taxas de erro baixas. Tal requerimento de SNR torna-se preocupante em sistemas MIMO, colocando em risco a eficiência energética de tais sistemas. De fato, somente o SD e os detectores baseados na LR foram capazes de atingir um bom desempenho sem requerer altas SNRs.

Vale lembrar que nessa topologia de transmissão, *uplink*, a ERB realiza praticamente todo o processamento. Logo, é vantajoso um sistema operar com uma SNR menor e um detector com um desempenho melhor, pois os TMs possuem um poder de processamento e uma bateria limitada.

À medida que o número de antenas aumenta, a superioridade da SD em termos de desempenho torna-se evidente, como é mostrado na Figura 2.6. Neste arranjo, os detectores apresentaram desempenhos mais variados, sendo a combinação do MMSE com ordenamento, LR e CL o detector que mais se aproximou do desempenho ótimo.

Vale notar que para maiores arranjos, como o C, a BER do sistema apresenta uma tendência diferente, como pode ser observado na Figura 2.7. Nota-se que a equalização ZF torna-se ineficiente em baixa e média correlação espacial, exigindo altas SNRs para operar com taxas de erro aceitáveis. Além disso, nota-se ainda que o ZF deixa de operar corretamente em altas correlações espaciais ( $\rho = 0.9$ ). Também foi observado que a técnica OSIC torna-se ineficiente com muitas antenas e altas correlações espaciais, onde observa-se a inversão da tendência da BER em altas SNRs. Nestes casos, o uso do OSIC descrito em 2.4.3 não é recomendável já que ao abandonar o ordenamento, a tendência da BER é restaurada, como mostra a curva da BER do detector CL-LR-MMSE SIC. Por fim, apesar do detector SD apresentar evidente superioridade, sua complexidade torna-se elevada dado

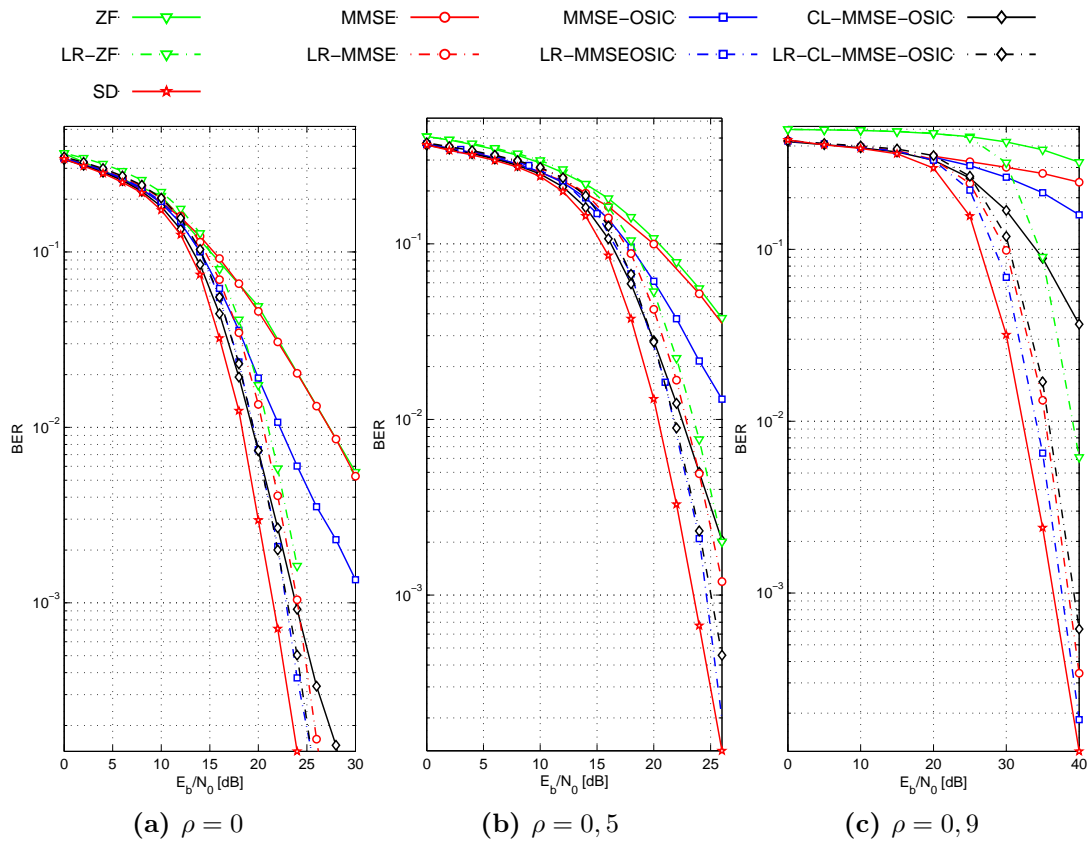


Figura 2.5: BER para o Arranjo A.

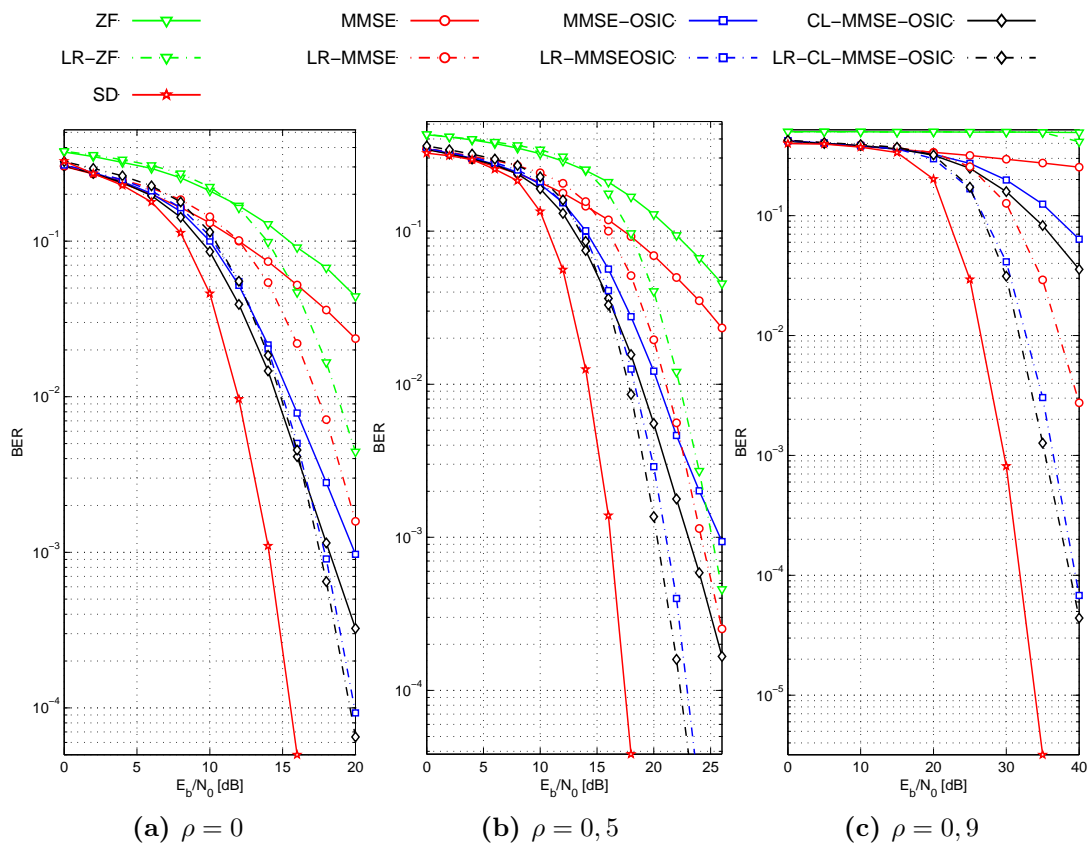


Figura 2.6: BER para o Arranjo B.



o número de antenas e a alta correlação espacial, que faz tal detector percorrer mais ramos ao longo de sua busca.

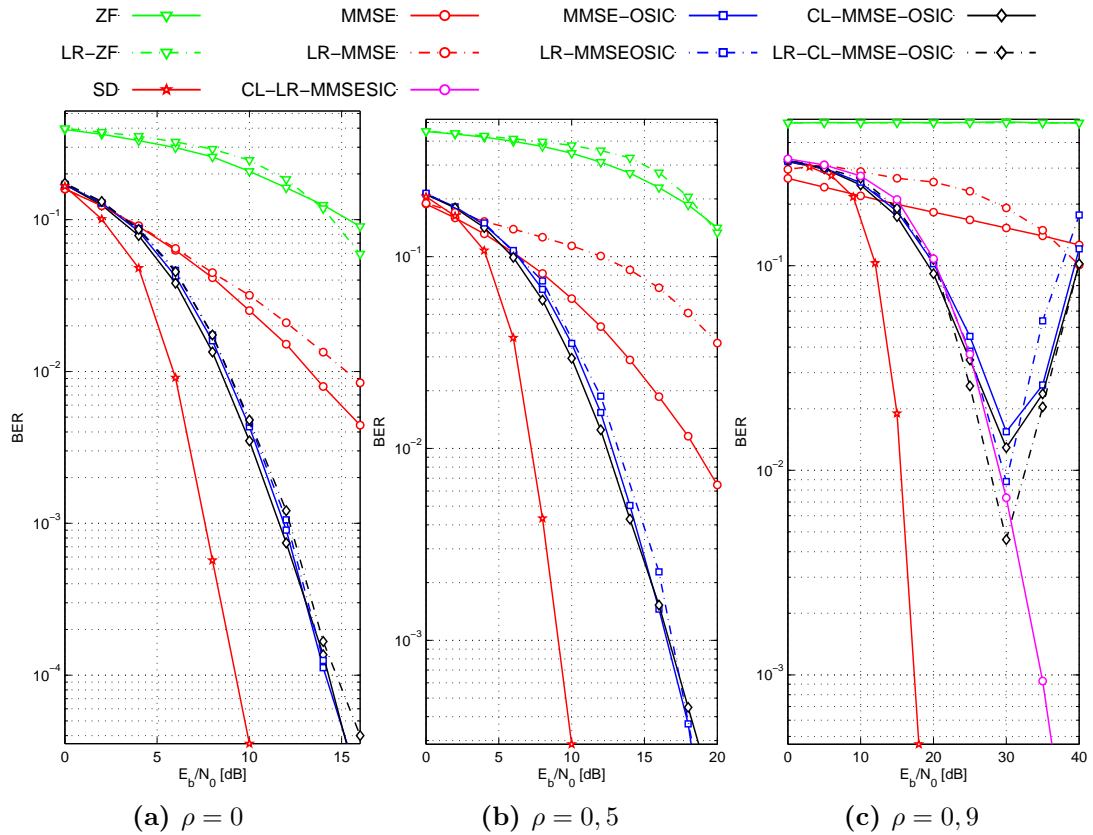


Figura 2.7: BER para o Arranjo C.

## 2.8 Análise de Complexidade

É extremamente importante analisar a complexidade computacional dos detectores MIMO estudados ao longo deste capítulo, pois a mobilidade dos TMs impõe restrições nas suas capacidades de processamento e consumo de energia. Ao combinar a análise da BER e da complexidade, é possível estabelecer uma comparação justa, em termos de aplicabilidade, dos diversos detectores MIMO apresentados neste trabalho.

Partindo deste ponto de vista, esta seção oferece um comparativo da complexidade dos detectores discutidos neste capítulo. A complexidade total foi medida em termos de flops (*floating point operations*) necessários para completar a detecção de um vetor de símbolos ( $\mathbf{s}$ ) transmitidos no modo V-BLAST. Como considerou-se operações complexas, consumindo três flops para uma soma complexa e seis para produtos complexos (WÜBBEN et al., 2003). Além disso, foram adotadas as contagens de flops para operações matriciais encontradas em

(WÜBBEN et al., 2003; GOLUB; LOAN, 1996). Em específico, a complexidade do SD foi baseada no estudo realizado em (JALDEN; OTTERSTEN, 2005)

### 2.8.1 Complexidade do Algoritmo LLL

Apesar de prover um bom desempenho, detectores LR podem exigir uma maior complexidade caso a matriz de canal seja má condicionada. Ao longo das simulações, notou-se que a complexidade do algoritmo LLL depende tanto da dimensão da matriz quanto de seu condicionamento numérico, influenciado, por exemplo, pelo índice de correlação espacial. A dependência entre a complexidade e a dimensão das matrizes é óbvia, pois o LLL deve operar sob um número maior de elementos. Por outro lado, o índice de correlação pode levar uma matriz a singularidade, dificultando o trabalho do LLL ao encontrar um base com melhores propriedades ortogonais, o que aumenta a complexidade do algoritmo.

Infelizmente, a complexidade do LLL não pode ser mensurada facilmente dado o grande número de variáveis envolvidas no processo. No entanto, sabe-se que a complexidade do LLL é da ordem  $\mathcal{O}(K^3 \log K)$  (LING; HOWGRAVE-GRAHAM, 2007). A fim de encontrar uma expressão mais fidedigna, a complexidade do LLL foi determinada de forma numérica através de um ajuste de curvas. Para isso, mediu-se a complexidade média do LLL para 500 realizações de canal, considerando-se diferentes dimensões matriciais e diferentes índices de correlação espacial. De posse de tais dados, procedeu-se com o ajuste de curva para encontrar uma expressão apropriada para representar a complexidade do LLL.

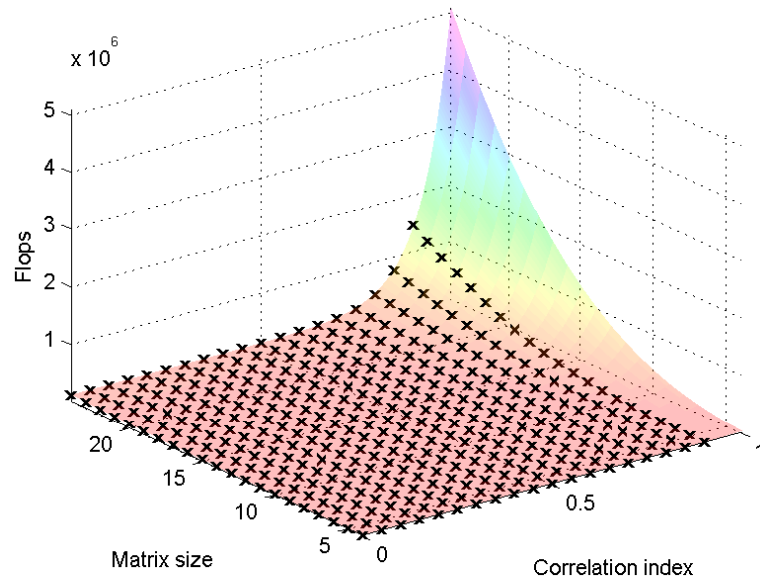
Ao longo dos testes, a curva que mais se assemelhou à complexidade do LLL é dada por

$$f_{\text{LLL}}(K, \rho) = (ae^{b\rho} + c)K^3, \quad (2.43)$$

onde  $a = 5.018 \times 10^{-4}$ ,  $b = 13.48$  e  $c = 8.396$ . Para ilustrar o ajuste, a Figura 2.8 apresenta o ajuste e os dados coletados (representados pelos marcadores '+'). Nota-se ainda em tal figura que o custo computacional aumenta substancialmente para arranjos maiores de antenas e valores correlação médio a alto ( $\rho > 0.5$ ).

### 2.8.2 Complexidade dos Detectores MIMO

A complexidade de diversos detectores foi analisada devido ao grande número de possíveis combinações entre diferentes técnicas. A Tabela 2.1 elenca a complexidade das possíveis combinações de detecção abordadas neste capítulo. Vale notar que a complexidade do ML foi apresentada como referência, pois apesar de



**Figura 2.8:** Complexidade do algoritmo LLL em função de número de antenas de transmissão e do índice de correlação espacial (KOBAYASHI; CIRIACO; ABRÃO, 2015).

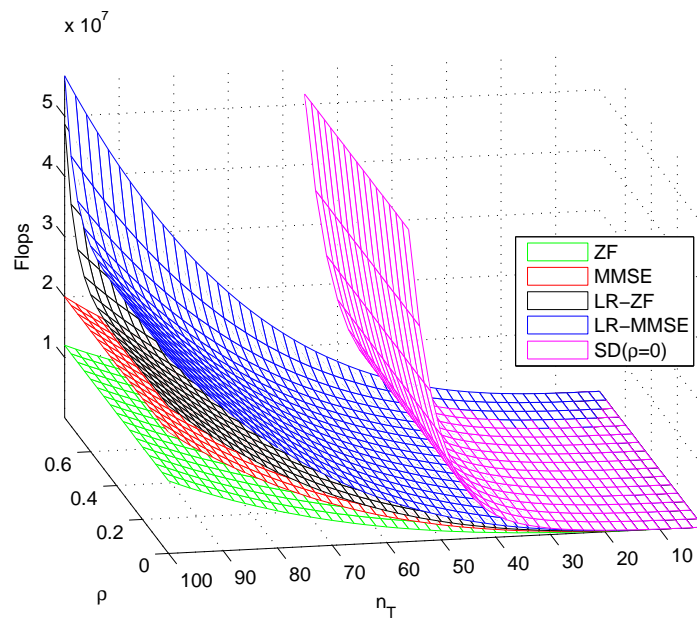
atingir o desempenho ótimo, sua complexidade torna-o proibitivo.

A Figura 2.9 apresenta a complexidade computacional dos detectores estudados neste capítulo, subdivididos em a) detectores lineares e b) detectores com OSIC. Vale notar que o SD pode apresentar complexidade razoáveis, mas somente em regime de alta SNR, baixas ordens de modulação e com um número limitado de antenas. Nota-se que, por usar a decomposição QR, os detectores OSIC possuem uma complexidade inferior aos detectores que utilizam a pseudoinversa. Isso se deve ao fato da pseudoinversa requerer três produtos e uma inversão matricial, tornando-se mais complexa do que a decomposição QR.

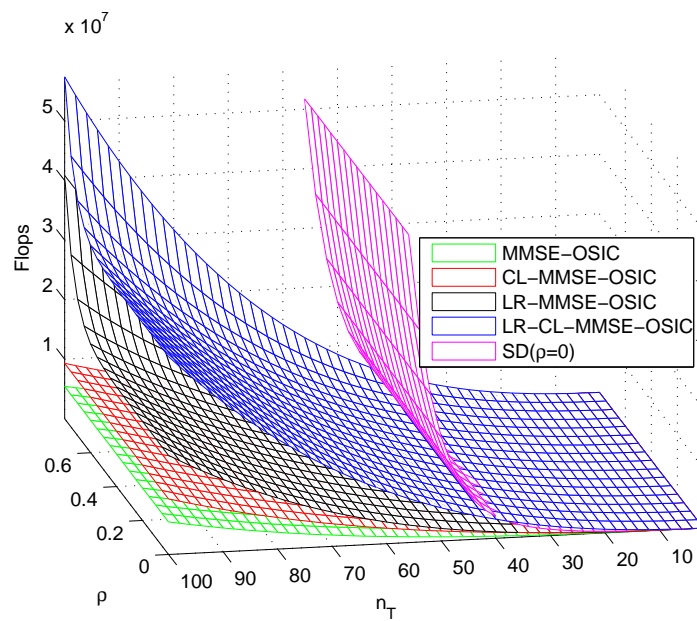
Através da Tabela 2.1 e das Figuras 2.9, 2.5, 2.6 e 2.7, nota-se que os detectores SIC podem oferecer um bom desempenho a um custo computacional relativamente baixo. Além disso, o ordenamento é recomendável, já que requer somente  $2K^2 - 2K$  flops (WÜBBEN et al., 2003) e oferece um considerável ganho de desempenho. O custo computacional da CL pode ser baixo, caso  $q$  seja razoavelmente inferior ao número de antenas de transmissão. Obviamente, o ganho de desempenho da CL será mais modesto caso  $q$  seja muito baixo. Já os detectores auxiliados pela LR apresentaram uma complexidade razoavelmente baixa sob correlações espaciais moderadas, sendo capazes de oferecer máxima diversidade, fazendo desta classe de detectores a mais promissora neste estudo. Por fim, o ML apresenta o desempenho ótimo, mas uma complexidade elevadíssima, enquanto o SD pode ser competitivo em termos de complexidade somente em altas SNRs e em arranjos de baixa ordem de modulação e baixo número de antenas.

Tabela 2.1: Complexidade computacional de detectores MIMO.

Detector	Número de Flops
ZF	$4K^3 + 8NK^2 - K^2 + 3NK - N + K$
ZF-SIC	$4NK^2 + 15NK/2 + 3K^2/2$
ZF-OSIC	$4NK^2 + 15NK/2 + 7K^2/2 - 2K$
CL-ZF-OSIC	$4NK^2 + (4q + 15/2)NK + 4N^2 + (2q + 3)K^2/2 + (2q - 1)N + (9q - 3)K/2 + 5M/2$
LR-ZF	$8K^3 + 8NK^2 + 7K^2 + 3NK - N + 5K + f_{\text{LLL}}(K, \rho)$
LR-ZF-OSIC	$4K^3 + 12K^2 + 4NK + 11K/2 + f_{\text{LLL}}$
CL-LR-MMSE-OSIC	$4K^3/3 + 4NK^2 + (4q - 9/2)K^2 + (8q + 15/2)NK + 2qN(7/2 - 3q/2)K/2 + +5M/2 + f_{\text{LLL}}(K - 1, \rho)$
MMSE	$12K^3 + 8NK^2 + 2K^2 + 3NK - N$
MMSE-SIC	$4K^3/3 + 4NK^2 + 16K^2/3 + 6KN + 22K/3$
MMSE-OSIC	$4K^3/3 + 4NK^2 + 19K^2/3 + 6KN + 16K/3$
CL-MMSE-OSIC	$4K^3/3 + 4NK^2 + (2q + 13/3)K^2 + (4q + 6)KN + 2qN + (9q/2 + 25/6)K + 5M/2$
LR-MMSE	$16K^3 + 8NK^2 + 10K^2 + 3NK - N + 4K + f_{\text{LLL}}$
LR-MMSE-OSIC	$4K^3 + 16K^2 + 4NK + 11K/2 + f_{\text{LLL}}(K, \rho)$
CL-LR-MMSE-OSIC	$16K^3/3 + 4NK^2 + (10q - 11/3)K^2 + (8q + 6)NK + 2qN + (55/6 - 37q/2)K + 5M/2 + f_{\text{LLL}}(K - 1, \rho)$
ML	$(4NK + 2N)M^K$
SD (JALDEN; OTTERSTEN, 2005)	$4K^3 + 7K^2 - K/2 + (2K + 2)^{M^K} - 1/M - 1$ , onde $\eta = 1/2 [c^2(M^2 - 1)/6N_0 + 1]^{-1}$ e $c^2 = \mathbb{E} [\ \mathbf{h}_i\ ^2]$ , $\forall i \in [1, K]$



(a) Complexidade de detectores lineares, abordagem pseudoinversa)



(b) Complexidade de detectores lineares OSIC, abordagem QR

**Figura 2.9:** Complexidade de detectores lineares; 16-QAM e  $E_b/N_0 = 22 [dB]$  (KOBAYASHI; CIRIACO; ABRÃO, 2015).

### 2.8.3 Impacto do Modelo Real para a Complexidade Computacional

A eq. (2.1), que define a transmissão MIMO pode ser reescrita usando somente valores reais

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{H}_r \mathbf{s}_r, \quad (2.44)$$

onde a matriz do canal real é dada por

$$\mathbf{H}_r = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{H}) & -\Im(\mathbf{H}) \\ \Im(\mathbf{H}) & \Re(\mathbf{H}) \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

além do sinal recebido e do vetor de símbolos serem representados, respectivamente, por

$$\mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{x}) \\ \Im(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_r = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{s}) \\ \Im(\mathbf{s}) \end{bmatrix}.$$

Através desta modificação, o novo sistema apresenta uma dimensão duas vezes maior, mas envolve somente valores reais, i.e.,  $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$ ,  $\mathbf{s}_r \in \mathbb{R}^{2K \times 1}$  e  $\mathbf{H}_r \in \mathbb{R}^{2N \times 2K}$ .

**Tabela 2.2:** Comparativo do número de flops consumidos para realizar algumas operações matriciais considerando o modelo real e o complexo ( $N = K$ )

Operação	Somas reais	Produtos reais	Número total de flops
$\mathbf{H}_r \mathbf{s}_r$	$4K^2 - 2K$	$4K^2$	$8K^2 - 2K$
$\mathbf{H} \mathbf{s}$	$2K^2 - 2K$	$4K^2$	$6K^2 - 2K$
$\mathbf{H}_r^T \mathbf{H}_r$	$8K^3 - 4K^2$	$8K^3$	$16K^3 - 4K^2$
$\mathbf{H}^H \mathbf{H}$	$2K^3 - 2K^2$	$4K^3$	$6K^3 - 2K^2$

Apesar do modelo real ser consideravelmente difundido na literatura, seu uso pode levar a uma maior complexidade computacional. Embora operações sobre os reais sejam menos complexas, o sistema real envolve o dobro de variáveis. De acordo com (GAN; LING; MOW, 2009; MA; ZHANG, 2008), a complexidade computacional do algoritmo LLL complexo é aproximadamente a metade da versão real, considerando-se os mesmos parâmetros. Por outro lado, há casos em que a abordagem real apresenta vantagens. Em (FISCHER; WINDPASSINGER, 2003), demonstrou-se que o uso do modelo real traz pequenos ganhos de desempenho na detecção MIMO, pois as componentes em fase e quadratura são detectadas independentemente, conferindo uma maior confiabilidade ao processo de detecção. Entretanto, o ganho marginal de desempenho não justifica o uso do sistema real dado o aumento da complexidade.

## 2.9 Conclusões

Ao longo deste capítulo mostrou-se que as técnicas de ordenamento e redução treliça são ferramentas bastante úteis. Apesar da redução treliça apresentar um desempenho quase ótimo, além de operar com diversidade total, seu custo ainda é elevado em altas correlações espaciais. Em relação à CL, observou-se que ela agrega mais desempenho em diferentes configurações e sob diversos índices de correlação, porém tal técnica não é capaz de atingir a diversidade máxima. Como as técnicas LR e OSIC são capazes de proporcionar um desempenho quase ótimo em alguns casos, resta uma pequena margem para melhorias provenientes da CL. Além disso, a detecção MIMO assistida por técnicas LR apresenta uma complexidade crescente em cenários de alta correlação espacial, resultado da dificuldade do algoritmo LLL encontrar uma base quase ortonormal a partir de uma matriz praticamente singular.

Um ponto curioso a se destacar é que detectores que incorporam a técnica OSIC são incapazes de operar sob altas correlações e arranjos de antenas razoavelmente altos. Para o sistema  $20 \times 20$  com uma correlação espacial elevada ( $\rho = 0.9$ ), o detector MMSE-OSIC apresentou um desempenho inferior em altas SNRs, que é um comportamento um tanto quanto inesperado. Desta perspectiva, tal comportamento observado no detector MMSE-OSIC, nestas dadas circunstâncias será explorado ao longo dos próximos capítulos.

Por fim, através da análise de complexidade e desempenho dos diversos, conclui-se que os detectores assistidos pela técnica LR e OSIC apresentam o melhor balanço entre desempenho e complexidade. No entanto, vale notar que a técnica OSIC deve ser usada com cautela, dada sua ineficácia em cenários de correlação espacial mais severos, sendo que tal comportamento será tema central dos próximos capítulos.

### 3 Análise Numérica da Decomposição QR

Como visto ao longo da Seção 2.7 a decomposição QR é uma ferramenta poderosa e versátil para a análise e o processamento de sinais. A aplicação dessa decomposição vai de problemas lineares, tais como problemas de mínimo quadrado, a detectores MIMO mais sofisticados. Ainda assim, a computação da decomposição QR é um assunto de interesse para sistemas de telecomunicações, pois há uma demanda por algoritmos mais rápido e/ou de natureza distribuída (AWASTHI et al., 2014; LAI et al., 2009; KIM, 2014). Algoritmos otimizados são altamente requisitados no contexto atual, que exige uma redução da complexidade computacional e da latência, dada a massificação dos sistemas de telecomunicações. Por outro lado, algoritmos de natureza distribuída favorecem cenários multi-usuário, onde o processamento da informação pode ser dividido simultaneamente entre diversos usuários.

Em particular, a decomposição QR tem uma vasta aplicabilidade na detecção MIMO, como visto no capítulo anterior. Para algoritmos de busca como o SD (ZIMMERMANN; RAVE; FETTWEIS, 2004; PEER; MURIN; DABORA, 2014), a busca K-Best (MONDAL; SALAMA; ALI, 2008; HAN; CUI; TELLAMBURA, 2012) e QR-ML (NAGATOMI; HIGUCHI; KAWAI, 2009; KIM; MOON; LEE, 2010) a decomposição QR transforma sistemas lineares na forma triangular, facilitando a busca pela solução ótima. Em relação à detecção linear, a decomposição QR possibilita uma estrutura capaz de realizar o cancelamento sucessivo de interferência, removendo a interferência em cada etapa da detecção, o que melhora o desempenho geral do sistema.

Apesar de suas características, a decomposição QR apresenta alguns pontos negativos. Dependendo da abordagem usada na implementação da decomposição QR, problemas de estabilidade numérica podem emergir. Por exemplo, usar o método de Gram-Shimidt para decompor uma matriz com *rank* deficiente não garante a ortogonalidade de  $\mathbf{Q}$  devido ao arredondamento inerente computadores



(DANIEL et al., 1976; BJÖRCK, 1994). Outros métodos podem apresentar um desempenho e acurácia superior (GANDER, 1980), porém o custo computacional é aumentado. Além disso, tais métodos são incapazes de realizar a decomposição QR de forma ordenada, impedindo seu uso em técnicas OSIC.

Neste capítulo, a decomposição QR e suas características serão estudadas de forma sistemática, dada as deficiências da abordagem Gram-Schmidt. Para isso, a decomposição QR será descrita de forma matricial, seguida de uma análise estatística e numérica para demonstrar que tal abordagem pode vir a apresentar problemas de estabilidade numérica, caso a matriz a ser decomposta possua características numéricas indesejáveis.

### 3.1 Decomposição QR via Método Modificado de Gram-Schmidt (GS-QRD)

Numa decomposição QR, uma matriz  $\mathbf{A}$ , como visto previamente, é decomposta em uma matriz ortonormal e uma matriz triangular superior, isto é,

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{QR} \\ \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{I}_N \\ r_{ij} = 0, i > j \end{cases} . \quad (3.1)$$

Para realizar tal decomposição, existem basicamente três métodos: através de reflexões de Householder (COX; HIGHAM, 1998), rotações de Givens (AWASTHI et al., 2014) ou através do método de Gram-Schmidt (BÖHNKE et al., 2003). O último, no entanto, é popular no contexto de detecção MIMO por sua simplicidade além da capacidade de se obter uma decomposição ordenada.

O Algoritmo 3.1 apresenta a decomposição QR feita usando o método de Gram-Schmidt modificado. Diferentemente do processo de ortonormalização de base clássico, o Algoritmo 3.1 normaliza os vetores (colunas de  $\mathbf{Q}$ ) antes de remover as componentes projetadas numa dada direção.

---

**Algoritmo 3.1** GS-QRD (GANDER, 1980).
 

---

```

1: function [Q, R] = QRD(A)                                % Abordagem Gram-Schmidt
2:   K = número de colunas de A
3:   R = 0KK
4:   Q = A
5:   for i = 1 to K do
6:     ei = ||qi||2
7:   end for
8:   for i = 1 to K do
9:     rii = √ei
10:    qi = qi/rii                                       % Normalização da i-ésima coluna de Q
11:    for j = i + 1 : K do
12:      rij = qiHqj
13:      qj = qj - rijqi % Remoção da componente qi projetada na direção qj
14:      ej := ej - |rij|2
15:    end for
16:  end for
17: end function

```

---

### 3.1.1 Notação Matricial Para a Decomposição QR

A GS-QRD pode ser escrita como um produtório matricial, onde cada produto representa uma iteração do algoritmo<sup>1</sup>.

$$\begin{cases} \mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{A} \\ \mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{I}_N \\ \mathbf{Q}^{(\ell)} = \mathbf{Q}^{(\ell-1)}\mathbf{U}^{(\ell)} \\ \mathbf{R}^{(\ell)} = (\mathbf{U}^{(\ell)})^{-1}\mathbf{R}^{(\ell-1)} \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde os sobrescritos  $(\ell)$  denotam a  $\ell$ -ésima iteração e os elementos  $\mathbf{U}^{(\ell)}$  são formados da seguintes forma:

$$u_{ij}^{(\ell)} = \begin{cases} 1/p_{\ell\ell}, & \ell = i = j \\ -p_{\ell j}/p_{\ell\ell}, & \ell = i < j \\ 1, & \ell \neq i = j \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde  $p_{\ell\ell} = \mathbf{q}_\ell^{(\ell)H}\mathbf{q}_\ell^{(\ell)}$  e  $p_{\ell j} = \mathbf{q}_\ell^{(\ell)H}\mathbf{q}_j^{(\ell)}$ . A partir da composição de  $\mathbf{U}^{(\ell)}$ , pode-se observar que:

---

<sup>1</sup>Referir-se ao Apêndice D para um exemplo  $4 \times 4$  das matrizes  $\mathbf{U}^{(\ell)}$

- i. a diagonal principal de  $\mathbf{U}^{(\ell)}$  é composta por 1, com exceção do elemento  $u_{\ell\ell}^{(\ell)}$ ;
- ii. a equação (3.2) descreve o Algoritmo 3.1;
- iii.  $\mathbf{U}^{(\ell)}$  possui inversa  $(\mathbf{U}^{(\ell)})^{-1}$  que é triangular superior.

Enquanto a GS-QRD obtém a decomposição QR através de uma série de produto de matrizes triangulares, os outros métodos (Householder e Givens) computam tal decomposição como o produto de matrizes ortogonais (GANDER, 1980). Portanto, pode-se inferir que as decomposições QR de Householder e Givens apresentam uma estabilidade numérica superior, pois as bases vetoriais são somente rotacionada e não escalonadas. Como  $\mathbf{U}^{(\ell)}$  é claramente não ortonormal na GS-QRD, instabilidades numérica podem emergir.

## 3.2 Análise Numérica

A motivação por trás de escrever a GS-QRD numa notação matricial é facilitar a análise numérica da estabilidade desta decomposição. Neste processo, assume-se que a matriz  $\mathbf{A}$  a ser decomposta é formada por elementos gaussianos complexos de média nula e variância unitária, i.e.,  $a_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , que é o caso predominante no contexto da detecção MIMO (MOLISCH, 2005).

Para analisar a estabilidade da GS-QRD, a esperança do *condition number* de  $\mathbf{U}^{(\ell)}$  será calculada, quantificando ortogonalidade de cada iteração da decomposição. O *condition number* é definido como

$$\mathbb{E} [\kappa(\mathbf{U}^{(\ell)})] = \mathbb{E} \left[ \|\mathbf{U}^{(\ell)}\|_1 \left\| (\mathbf{U}^{(\ell)})^{-1} \right\|_1 \right], \quad (3.4)$$

sendo o uso da norma-1 uma escolha deliberada por facilitar a análise estatística do problema. Em tal métrica  $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$ , sendo que o valor unitário ocorre somente em matrizes ortogonais. Logo, quanto menor o valor de  $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$ , melhor será o condicionamento da matriz.

Considerando a estrutura da matriz  $\mathbf{U}^{(1)}$ <sup>2</sup>, i.e., a primeira iteração, observa-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\kappa(\mathbf{U}^{(1)})] &= \mathbb{E} \left[ \left( 1 + \max_{j>1} \left| \frac{p_{1j}}{p_{11}} \right| \right) |p_{11}| \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ |p_{11}| + \max_{j>1} |p_{1j}| \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

<sup>2</sup>Consultar o Apêndice D para maiores detalhes

Como  $|p_{11}|$  é a norma de um vetor com elementos gaussianos independentes e identicamente distribuídos, de acordo com o Apêndice F,  $|p_{11}| \sim \mathcal{N}(\sigma\sqrt{N}, \sigma^2/2)$ . Além disso, devido à normalização<sup>3</sup>, os elementos de  $\mathbf{q}_1^{(1)}$  possuem uma variância  $1/N$ , enquanto os elementos de  $\mathbf{q}_j^{(1)}$  possuem uma variância de  $\sigma^2$ . Como  $p_{1j} = \mathbf{q}^{(1)H} \mathbf{q}^{(j)}$ , segundo o Apêndice G,  $p_{1j} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2)$ . Seguindo as considerações anteriores e usando a aproximação do Apêndice E, a eq. (3.5) torna-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\kappa(\mathbf{U}^{(1)})] &= \sqrt{N\sigma^2} + \mathbb{E} \left[ \max_{j>1} |p_{1j}| \right] \\ &\leq \sqrt{N\sigma^2} + \inf_{s>1} \frac{1}{s} \log |(N-1)M_{|p_{1j}|}(s)|, \end{aligned} \quad (3.6)$$

que depende da função geradora de momento da variável  $|p_{1j}|$ .

Para o problema de minimização da eq. (3.6), verifica-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \max_{j>1} |p_{1j}| \right] &\leq \inf_{s>1} \frac{1}{s} \log |(N-1)M_{|p_{1j}|}(s)| \\ &\leq \inf_{s>1} \frac{1}{s} \log \left| (N-1) \exp\left(\frac{\sigma^2 s^2}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{\sigma s}{\sqrt{2}}\right) \right| \\ &\leq \inf_{s>1} \frac{1}{s} \log \left| 2(N-1) \exp\left(\frac{\sigma^2 s^2}{2}\right) \right|, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde a função geradora de momento de  $M_{|p_{1j}|}$  pode ser encontrada no Apêndice C. Note que em (3.7) considera-se a desigualdade  $\operatorname{erfc}(x) \leq 2$ , que possibilita uma solução fechada para o problema.

Considere agora a função

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{1}{s} \log \left| 2(N-1) \exp\left(\frac{\sigma^2 s^2}{2}\right) \right| \\ &= \frac{\log |2(N-1)|}{s} + \frac{\sigma^2 s}{2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

cujas duas primeiras derivadas são

$$\Phi'(s) = -\frac{\log |2(N-1)|}{s^2} + \frac{\sigma^2}{2} \quad (3.9)$$

e

$$\Phi''(s) = \frac{2 \log |2(N-1)|}{s^3}. \quad (3.10)$$

Para o domínio apresentado em (3.7) ( $s > 1$ ), o problema é convexo, garantindo a unicidade da solução. Portanto, o problema definido na eq. (3.7) resume-se a

$$\mathbb{E} \left[ \max_{j>1} |p_{1j}| \right] \leq \min_{s>1} \frac{\log |2(N-1)|}{s} + \frac{\sigma^2 s}{2}. \quad (3.11)$$

---

<sup>3</sup>Linha 7 do Algoritmo 3.1

Igualando a eq. (3.9) a zero, encontra-se o ponto de mínimo da eq. (3.7)

$$s^* = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2} \log |2(N-1)|}, \quad (3.12)$$

logo

$$\mathbb{E} [\kappa(\mathbf{U}^{(1)})] \leq \sqrt{N\sigma^2} + \Phi \left( \sqrt{\frac{2}{\sigma^2} \log |2(N-1)|} \right). \quad (3.13)$$

Resolvendo a eq. (3.4) para as demais iterações, isto é,  $\ell > 1$ , observa-se uma tendência que leva à expressão geral

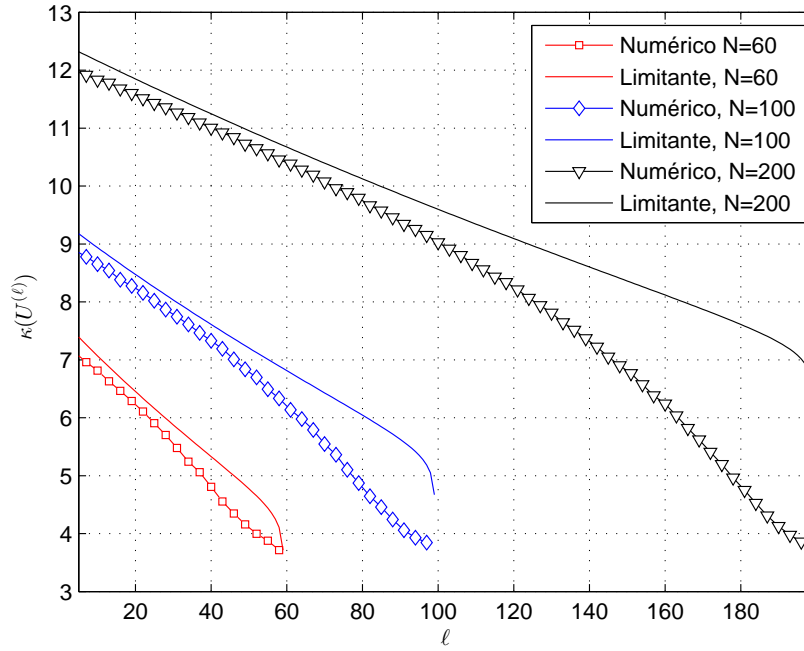
$$\mathbb{E} [\kappa(\mathbf{U}^{(\ell)})] \leq \sqrt{N\sigma^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\ell-1}} + \Phi \left( \sqrt{\frac{2}{\sigma^2 (1 - 1/N)^{\ell-1}} \log |2(N-\ell)|} \right). \quad (3.14)$$

Neste ponto, vale lembrar que a expressão (3.14) trata-se de um limitante superior para a esperança do *condition number* de cada iteração do GS-QRD de uma matriz Gaussiana, não se tratando de uma expressão exata. Também vale destacar que, tal solução é fruto de sucessivas aproximações e considerações, usadas para se obter uma expressão fechada para o parâmetro estudado. Além disso, o uso do Teorema Central do Limite foi necessário em algumas etapas, que requer matrizes de dimensões suficientemente elevadas para que o teorema, e consequentemente, o limitante sejam válidos.

### 3.3 Resultados Numéricos

A Figura 4.2 ilustra o valor experimental, obtido via simulação, e o limitante superior proposto em (3.14) para  $\mathbb{E} [\kappa(\mathbf{U}^{(\ell)})]$  para matrizes  $60 \times 60$ ,  $100 \times 100$  e  $200 \times 200$  com elementos Gaussianos i.i.d. com média zero e variância unitária. Como pôde ser observado,  $\mathbb{E} [\kappa(\mathbf{U}^{(\ell)})]$  assume valores razoavelmente baixos para as últimas iterações da GS-QRD, pois  $\mathbf{U}^{(\ell)}$  torna-se cada vez mais semelhante a uma matriz identidade. Nota-se também que a estabilidade da GS-QRD é afetada pelo tamanho da matriz a ser decomposta, pois neste caso,  $\mathbb{E} [\kappa(\mathbf{U}^{(\ell)})] \gg 1$ . Logo, a decomposição de matrizes de maiores dimensões pode trazer problemas numéricos caso elas tenham, por exemplo, elementos altamente correlacionados.

Comparando as curvas de mesma ordem da Figura 3.1, observa-se que o limitante superior, derivado de forma analítica em (3.14), apresenta um distanciamento razoável da curva real. A acurácia de tal limitante foi afetada pelas diversas simplificações que almejavam a obtenção de uma solução analítica. Neste sentido, especula-se que os seguintes fatores afetaram a qualidade do limitante



**Figura 3.1:** Esperança de  $\mathbf{U}^{(\ell)}$  em função da iteração  $\ell$  do algoritmo QR, considerando-se decomposições de matrizes de tamanho  $N = K = \{60, 100, 200\}$ .

- Inexistência de uma fórmula analítica e exata para a esperança do máximo de um conjunto de variáveis aleatórias;
- Uso do limitante do Apêndice E;
- Considerou-se que  $\text{erfc}(x) \leq 2$  para a solução do problema;
- Múltiplas recorrências do Teorema Central do Limite;
- Simplificações na variância das variáveis aleatórias ao longo das iterações do algoritmo.

## 3.4 Conclusões

A estabilidade numérica da GS-QRD foi estudada de forma analítica ao longo deste capítulo. Ao estudar tal propriedade, a GS-QRD foi reescrita como uma série de produtos matriciais de  $\mathbf{U}^{(\ell)}$ . Assim, observou-se que cada iteração, ou seja, cada produto de  $\mathbf{U}^{(\ell)}$ , pode perturbar a estabilidade da decomposição, podendo, em casos extremos, não garantir a ortogonalidade das colunas da matriz  $\mathbf{Q}$ . No geral, busca-se baixos valores para  $\kappa(\mathbf{U}^{(\ell)})$ , mas a GS-QRD mostrou-se propensa a problemas numéricos. Com o auxílio de diversas operações matriciais, manipulações de variáveis aleatórias e da solução de um problema de minimização, derivou-se um limitante para o *condition number* de  $\mathbf{U}^{(\ell)}$ . Embora, tal limitante

não seja extremamente fiel ao valor real, confirmou-se a hipótese dos problemas numéricos causados, por exemplo, na detecção OSIC em sistemas com dezenas de antenas operando sob alta correlação<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Referir-se à Seção 2.7

## 4 Detecção MMSE-OSIC em Canais Altamente Correlacionados

Ao longo do Capítulo 2 observou-se a deficiência da técnica de detecção OSIC, a qual se mostrou incapaz de operar em sistemas MIMO equipados com um número grande de antenas fortemente correlacionadas. No contexto deste trabalho, a técnica OSIC é baseada na decomposição QR ordenada via Gram-Schmidt, a qual nem sempre é capaz de obter uma componente matricial ortogonal. Neste sentido, a análise feita ao longo do Capítulo 3 mostrou que a decomposição QR feita pelo método de Gram-Schmidt pode apresentar problemas de instabilidade numérica, podendo criar obstáculos para a operação correta do detector MMSE-OSIC.

Em sistemas MIMO operando sob alta correlação espacial e com um número razoavelmente grande de antenas, o detector MMSE-OSIC mostrou-se ineficiente, como pode ser observado na Figura 2.7. Em tal cenário, observou-se uma inversão da derivada da curva da BER, que é um comportamento inconsistente, o qual impede tal detector a ser aplicado em sistemas MIMO de larga escala dotados operando sob forte correlação espacial.

Neste capítulo, a decomposição QR via Gram-Schmidt será estudada visando alterá-la, mitigando seu efeito negativo no detector MMSE-OSIC operando em cenários de alta correlação espacial e com um número elevado de antenas. Para isso, tal decomposição QR será analisada novamente para posteriormente serem testadas possíveis alterações. Aproveitando o cenário onde a operação do detector MMSE-OSIC foi afetada, os resultados numéricos contemplam sistemas MIMO de larga escala, que compreendem um grande número de antenas e uma correlação espacial razoavelmente alta.

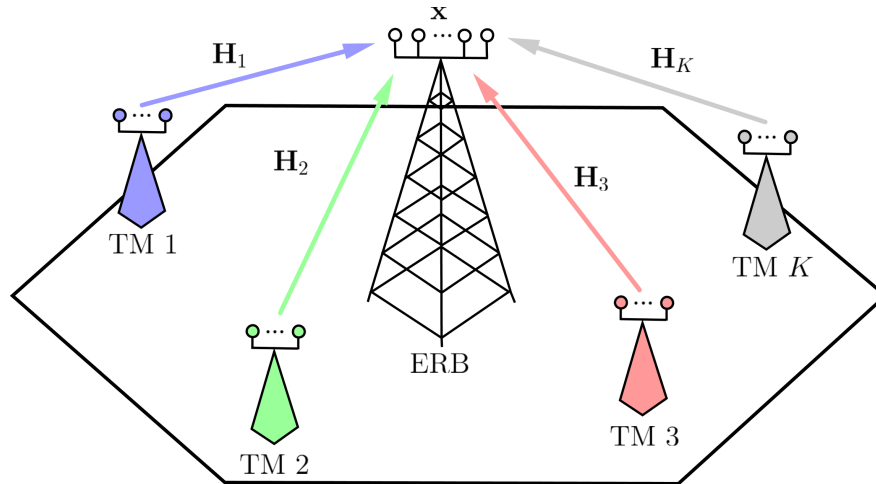


## 4.1 Modelo de Sistema

Diferentemente dos capítulos anteriores, este capítulo fará algumas alterações no modelo de sistema. O sistema em questão opera no modo V-BLAST sem pré-codificação, dando-se foco à detecção *uplink*. Logo, a ERB consiste num elemento receptor com  $N$  antenas, que recebe o sinal de  $K$  usuários equipados com  $N_K$  antenas, como mostra a Figura 4.1. Portanto, o sistema pode ser descrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \\ &= [\mathbf{H}_1 \ \mathbf{H}_2 \ \cdots \ \mathbf{H}_K] \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_K \end{bmatrix} + \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  é o sinal recebido na ERB;  $\mathbf{H}_i \in \mathbb{C}^{N \times N_K}$  é o canal do  $i$ -ésimo usuário;  $\mathbf{s}_i \in \mathbb{C}^{N_K}$  é o vetor de símbolos do  $i$ -ésimo usuário e  $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^N$  é o ruído aditivo do receptor. Vale notar que tal descrição nada mais é que um sistema MIMO com  $N$  antenas de recepção e  $K' = KN_K$  antenas de transmissão.



**Figura 4.1:** Transmissão MIMO para o *uplink*, considerando  $K$  usuários equipados com  $N_K$  e uma ERB com  $N$  antenas.

Quanto ao canal, este capítulo considera o conhecimento perfeito de  $\mathbf{H}$  no receptor, simplificando a análise e operação do sistema. Além disso, torna-se necessário considerar a correlação espacial como modelado na Seção 2.1.1. Como os usuários estão fisicamente separados, a correlação espacial surge somente em antenas do mesmo terminal móvel, fazendo com que o canal seja modelado como

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{\text{BS}}^{1/2} \mathbf{G} [\mathbf{R}_{\text{MT}} \otimes \mathbf{I}_K]^{1/2}, \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{R}_{\text{BS}}$  e  $\mathbf{R}_{\text{MT}}$  são as matrizes de correlação da ERB e do terminal móvel,

respectivamente<sup>1</sup>;  $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{N \times K'}$  é matriz do canal Rayleigh descorrelacionado,  $g_{ij} \sim \mathcal{CN}(0, 1)$  e  $\otimes$  é o produto de Kronecker, responsável por gerar correlação espacial ao longo das antenas que povoam um dado terminal móvel.

Como a transmissão é feita no *uplink* sem pré-codificação e o receptor tem conhecimento perfeito do canal, os símbolos podem ser recuperados por qualquer técnica de detecção apresentada no Capítulo 2. Em especial, a reconstrução da informação será feita pelo detector MMSE-OSIC, almejando-se corrigir suas deficiências de operação em canais MIMO com alta correlação espacial e número elevado de antenas.

## 4.2 MMSE-OSIC via SQRD em Canais Correlacionados

Como apresentado na Seção 2.7, em uma transmissão MIMO com um número razoável de antenas altamente correlacionadas, o detector MMSE-OSIC via SQRD deixa de operar corretamente, atingindo altas taxas de erro em altas SNRs. Nesta particular situação, à medida que a SNR do sinal cresce, a matriz de canal estendida, definida por

$$\underline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \sqrt{\frac{N_0}{E_s}} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

tende à forma

$$\underline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

a qual a condição de *full rank* da matriz  $\underline{\mathbf{H}}$  em casos onde a matriz  $\mathbf{H}$  apresenta correlação espacial. Esta condição agrava o funcionamento do detector MMSE-OSIC, já que ele baseia-se no processo de ortonormalização de Gram-Schmidt. Com isso, problemas de ortonormalidade podem emergir, causando anomalias na operação do MMSE-OSIC.

### 4.2.1 Decomposição QR via Gram-Schmidt

Antes de proceder, vale relembrar como é feita a decomposição QR utilizando do método de Gram-Schmidt. Por conveniência ao leitor, o algoritmo de tal decomposição é apresentado novamente no Algoritmo 4.1. Nesta abordagem de decomposição QR, a norma-2 de cada coluna é calculada previamente, sendo atualizado ao longo do algoritmo. O processo de ortonormalização ordenado

---

<sup>1</sup>Referir-se a Seção 2.1.1

requer que as colunas de menor norma<sup>2</sup> sejam trocadas para as primeiras posições, pois a detecção é procedida da antena com o canal mais forte (última posição) até a primeira. Após encontrar o  $i$ -ésimo canal mais com menor potência, normaliza-se a coluna  $i$  (linha 14), removendo sua componente das outras colunas (linha 17). Na sequência, recalcula-se a norma das colunas cuja componente da  $i$ -ésima coluna foi removida. Tal processo é repetido até que todas a matriz  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  seja determinadas.

---

**Algoritmo 4.1** SQRD, método de Gram-Schmidt.

---

```

1: function [ $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{\Pi}$ ] = SQRD( $\mathbf{H}$ )                                % Abordagem Gram-Schmidt
2:    $K'$  = número de colunas de  $\mathbf{G}$ 
3:    $N$  = número de linhas de  $\mathbf{G}$ 
4:    $\mathbf{Q} = \mathbf{H}$ 
5:    $\mathbf{\Pi} = \mathbf{I}_{K'}$ 
6:    $\mathbf{R} = \mathbf{0}_{K'K'}$ 
7:   for  $i = 1$  to  $K'$  do
8:      $e_i = \|\mathbf{q}_i\|_2^2$ 
9:   end for
10:  for  $i = 1$  to  $K'$  do
11:     $k = \operatorname{argmin}_{j=i \text{ to } K'} e_j$ 
12:    Troque as colunas  $i$  e  $k$  nas matrizes  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{\Pi}$ ,  $\mathbf{e}$  e nas  $N + i - 1$  primeiras
    linhas de  $\mathbf{Q}$ .
13:     $r_{ii} = \sqrt{e_i}$ 
14:     $\mathbf{q}_i := \mathbf{q}_i / r_{ii}$                                 % Normalização do comprimento do vetor  $\mathbf{q}_i$ 
15:    for  $j = i + 1$  to  $K'$  do
16:       $r_{ij} = \mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_j$                                 % Projeção de  $\mathbf{q}_i$  na direção de  $\mathbf{q}_j$ 
17:       $\mathbf{q}_j := \mathbf{q}_j - r_{ij} \mathbf{q}_i$                         % Remoção da projeção da componente  $\mathbf{q}_i$ 
                                                                % da componente  $\mathbf{q}_j$ 
18:       $e_j := e_j - |r_{ij}|^2$                                 % Atualização da norma de  $\mathbf{q}_j$ 
19:    end for
20:  end for
21: end function

```

---

O Algoritmo 4.1 retorna uma matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$ , uma matriz triangular superior  $\mathbf{R}$  e uma matriz de permutação  $\mathbf{\Pi}$ , responsável pelo ordenamento da detecção. De posse de tais matrizes, a detecção MMSE-OSIC pode ser realizada, como instrui a Seção 2.4.3.

### 4.2.2 Atualização de Normas no Algoritmo SQRD

Esta seção mostrará que a inoperabilidade da detecção MMSE-OSIC é causada pela estratégia de cálculo das normas de  $\mathbf{Q}$  do Algoritmo 4.1. Diagnosticado o problema, sua solução é imediata. Logo, torna-se possível testá-la numericamente em canais altamente correlacionados e com um número elevado de antenas,

---

<sup>2</sup>Canais que apresentam um maior desvanecimento

cenário no qual o MMSE-OSIC é incapaz de operar satisfatoriamente em alta SNR.

Inicialmente, vale destacar que a norma das colunas de  $\mathbf{Q}$  são calculadas inicialmente na linha 8 do Algoritmo 4.1. Obviamente, tais normas devem ser recalculadas ao longo do algoritmo na linha 18, pois as bases <sup>3</sup> são alteradas a cada iteração, cuja estratégia traz eficiência computacional. Para a atualização das normas considera-se o cálculo da linha 17 além do fato de  $\mathbf{q}_i$  estar normalizado (linha 14):

$$\begin{aligned}
e_j &:= (\mathbf{q}_j - r_{ij}\mathbf{q}_i)^H (\mathbf{q}_j - r_{ij}\mathbf{q}_i) \\
&:= e_j - (r_{ij}\mathbf{q}_j^H\mathbf{q}_i + r_{ij}^*\mathbf{q}_i^H\mathbf{q}_j) + \mathbf{q}_i^H\mathbf{q}_i |r_{ij}|^2 \\
&:= e_j - r_{ij}r_{ij}^* \left( \frac{1}{r_{ij}^*}\mathbf{q}_j^H\mathbf{q}_i + \frac{1}{r_{ij}}\mathbf{q}_i^H\mathbf{q}_j \right) + \mathbf{q}_i^H\mathbf{q}_i |r_{ij}|^2 \\
&:= e_j - |r_{ij}|^2 (1 + 1) + \mathbf{q}_i^H\mathbf{q}_i |r_{ij}|^2 \\
&:= e_j + |r_{ij}|^2 (\mathbf{q}_i^H\mathbf{q}_i - 2) \\
&:= e_j - |r_{ij}|^2.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

No entanto, mostrou-se no capítulo anterior que o Algoritmo 4.1 pode ser incapaz de promover a ortonormalização de forma adequada caso  $\mathbf{H}$  tenha uma dimensão elevada ou possua uma elevada correlação espacial, ou seja, se as colunas de  $\mathbf{H}$  forem muito semelhantes. Logo, dado a instabilidade numérica do algoritmo, a condição  $\mathbf{q}_i^H\mathbf{q}_i = 1$  passa a ser desrespeitada nas iterações finais da decomposição. Consequentemente, a matriz  $\mathbf{Q}$  pode não atingir a ortogonalidade. Apesar de  $\mathbf{R}$  ainda permanecer triangular sob tais circunstâncias, seus elementos serão incorretos, dado que tal matriz depende das normas das colunas  $\mathbf{Q}$  (linha 13). Com tais inconsistências, pode-se concluir que MMSE-OSIC certamente falhará, pois os requisitos da decomposição QR não são atendidos.

Para sanar as deficiências do Algoritmo 2.5 em canais correlacionados deve-se adotar uma estratégia alternativa para a atualização de norma

$$e_j := e_j - |r_{ij}|^2, \tag{4.6}$$

feita na linha 18, dando-se preferência para o cálculo realizado por

$$e_j := e_j + |r_{ij}|^2 (\mathbf{q}_i^H\mathbf{q}_i - 2). \tag{4.7}$$

Alternativamente, pode-se simplesmente abandonar a estratégia de atualização de norma, ou seja,

$$e_j = \|\mathbf{q}_j\|_2^2, \tag{4.8}$$

---

<sup>3</sup>colunas de  $\mathbf{Q}$

que acaba sendo a abordagem correta mais eficiente. De fato, a abordagem da eq. (4.8) é marginalmente mais eficiente do que a eq. (4.7), pois economiza-se dois produtos e uma soma complexa. Desta forma, pode-se reescrever o algoritmo da SQRD como mostra o Algoritmo 4.2.

---

**Algoritmo 4.2** SQRD modificado, método de Gram-Schmidt.

---

```

1: function [Q, R, Π] = SQRD(H)                                % Abordagem Gram-Schmidt
2:    $K'$  = número de colunas de G
3:    $N$  = número de linhas de G
4:   Q = H
5:   Π = I $_{K'}$ 
6:   R = 0 $_{K'K'}$ 
7:   for  $i = 1$  to  $K'$  do
8:      $k = \operatorname{argmin}_{j=i \text{ to } K'} \|\mathbf{q}_j\|^2$ 
9:     Troque as colunas  $i$  e  $k$  nas matrizes R, Π, e nas  $N + i - 1$  primeiras
linhas de Q.
10:     $r_{ii} = \|\mathbf{q}_i\|_2$ 
11:     $\mathbf{q}_i := \mathbf{q}_i / r_{ii}$                                 % Normalização do comprimento do vetor  $\mathbf{q}_i$ 
12:    for  $j = i + 1$  to  $K'$  do
13:       $r_{ij} = \mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_j$                                 % Projeção de  $\mathbf{q}_i$  na direção de  $\mathbf{q}_j$ 
14:       $\mathbf{q}_j := \mathbf{q}_j - r_{ij} \mathbf{q}_i$                         % Remoção da projeção da componente  $\mathbf{q}_i$ 
                                                                % da componente  $\mathbf{q}_j$ 
15:    end for
16:  end for
17: end function

```

---

## 4.3 Resultados Numéricos

Esta seção apresentará alguns resultados numéricos para dar suporte às afirmações feitas ao longo deste capítulo. Inicialmente, demonstra-se o comportamento da SQRD original e modificada em termos de estabilidade numérica. Na sequência, o desempenho em termos de BER e uma análise da complexidade da detecção MMES-OSIC em sistemas MIMO sob alta correlação são apresentados.

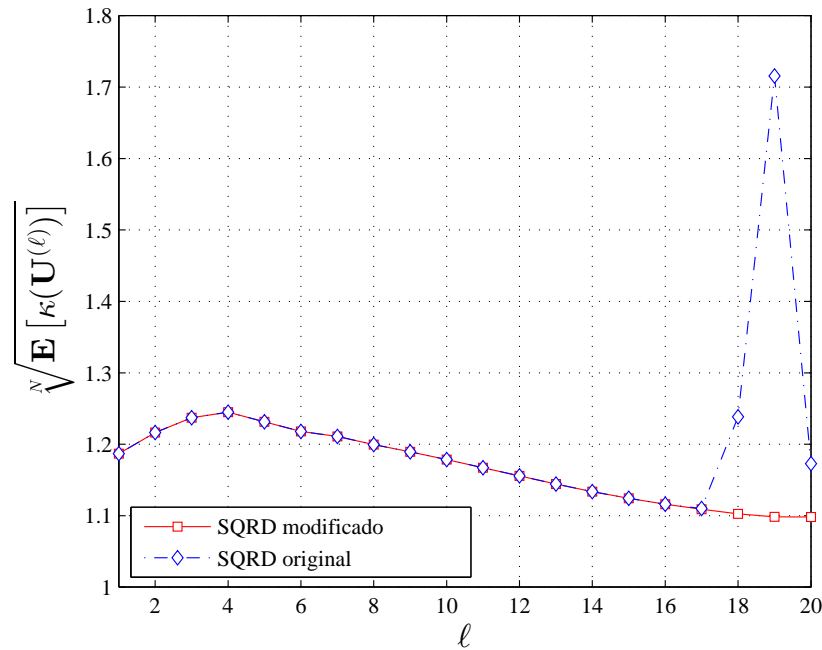
### 4.3.1 Análise da Estabilidade da SQRD

Assim como o Capítulo 3, essa seção usará o *condition number*, eq. (3.4), para avaliar a estabilidade numérica da SQRD. No entanto, esta seção avalia de forma numérica a versão ordenada, enquanto o capítulo anterior avalia a decomposição sem o ordenamento. Relembrando o capítulo anterior, a estabilidade numérica ligada a cada iteração da decomposição QR será feita avaliando

$$\mathbb{E} [\kappa (\mathbf{U}^{(\ell)})]^{1/N}, \quad (4.9)$$

sendo  $\mathbf{U}^{(\ell)}$  uma matriz que denota a  $\ell$ -ésima iteração da SQRD<sup>4</sup>. Além disso, a operação  $(\cdot)^{1/N}$  foi adotada com o intuito de uniformizar os valores do *condition number*. Além disso, para a análise, serão decompostas matrizes de canal estendidas de dimensão  $20 \times 20$ , considerando-se  $K = 1$ ,  $N_K = 20$ ,  $N = 20$ ,  $\frac{E_s}{N_0} = 35$  e altas correlações espaciais ( $\rho = 0,9$ ).

A Figura 4.2 apresenta o *condition number* médio das matrizes  $\mathbf{U}^{(\ell)}$ , ou simplesmente a sensibilidade da SQRD a matrizes numericamente má condicionadas, considerando o Algoritmo 4.1 com e sem as alterações propostas na seção anterior. Nota-se nesta figura que, o Algoritmo 4.1 torna-se instável em suas últimas iterações, fazendo com que a decomposição QR seja feita de forma incorreta, i.e., a matriz  $\mathbf{Q}$  não atinge a ortogonalidade e  $\mathbf{R}$  apresenta valores errôneos. No entanto, através da singela proposta de recálculo de norma, feita na Seção 4.2.2, foi possível restabelecer a estabilidade numérica do algoritmo para canais altamente correlacionados.



**Figura 4.2:** Esperança do *condition number* de cada iteração da SQRD original e de sua versão modificada.

### 4.3.2 Análise do Desempenho

A fim de comprovar a eficácia da solução encontrada neste capítulo, o desempenho de detectores da classe OSIC será comparado em termos de BER. Especificamente, serão comparadas três técnicas de detecção que levam em conta

<sup>4</sup>Quanto maior o valor de  $\mathbf{E}[\kappa(\mathbf{U}^{(\ell)})]^{1/N}$ , mais sensível a decomposição se torna a canais correlacionados, podendo levar a problemas de instabilidade numérica

a ordenação: o MMSE-BLAST, o MMSE-OSIC original e o MMSE-SIC com as alterações sugeridas neste capítulo. Adicionalmente, os detectores ZF e SD também serão apresentados, quando possível, como referenciais de desempenho. Além disso, serão considerados canais Rayleigh correlacionados, símbolos 4-QAM não codificados em três cenários diferentes:

- Cenário A:  $N = 20$  antenas na ERB,  $K = 1$  um TM equipados com  $N_K = 20$  antenas, sob baixa correlação espacial  $\rho = 0,2$ ;
- Cenário B:  $N = 20$  antenas na ERB,  $K = 1$  um TM equipados com  $N_K = 20$  antenas, sob alta correlação espacial  $\rho = 0,9$ ;
- Cenário C:  $N = 4000$  antenas na ERB,  $K = 20$  um TMs equipados com  $N_K = 10$  antenas, sob alta correlação espacial  $\rho = 0,9$ ,

além do conhecimento perfeito do canal no receptor (ERB).

Para o cenário A, o desempenho de todos os detectores apresentados na Figura 4.3a está dentro da normalidade. As três abordagens do MMSE apresentaram praticamente o mesmo desempenho, dado que a condição numérica da matriz pode ser considerada boa, dada a baixa correlação espacial. Quanto aos detectores de referência, observa-se um resultado típico: o ZF apresenta a BER mais alta ao menor custo computacional, enquanto o SD apresenta o melhor desempenho, apesar de sua complexidade elevada.

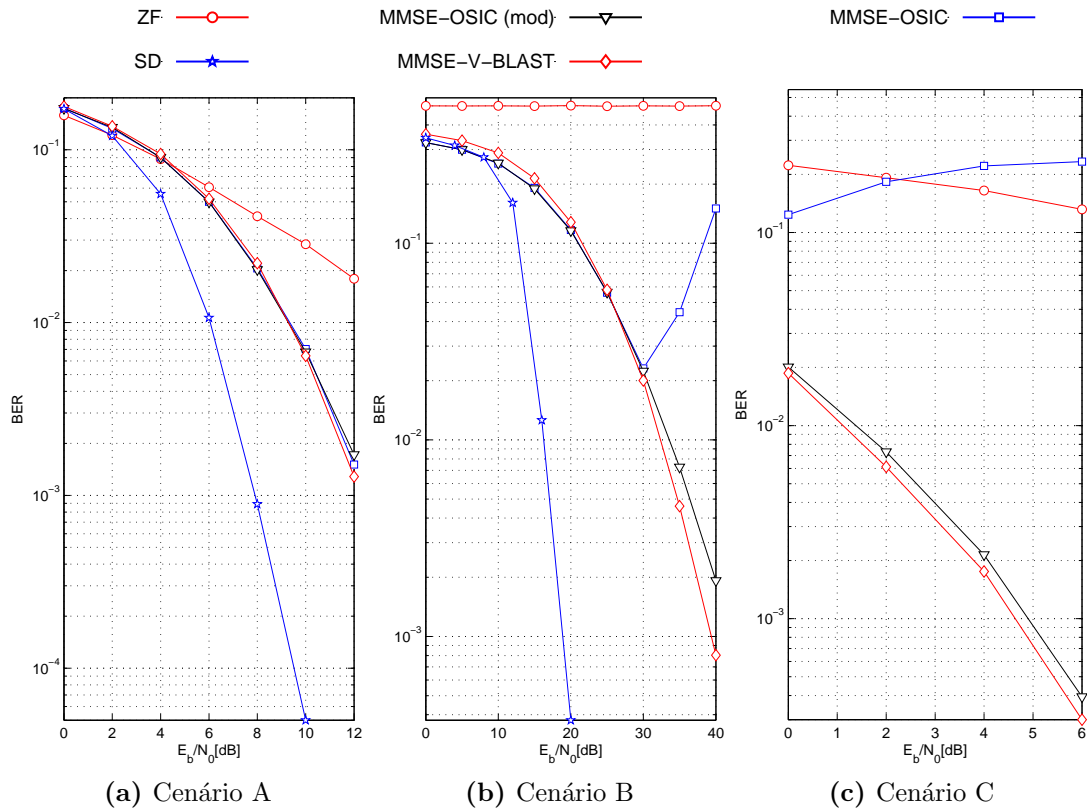
Para o cenário B<sup>5</sup>, nota-se que o uso das alterações propostas na Seção 4.2.2 foram capazes de reverter o baixo desempenho do detector MMSE-OSIC em altas SNR. Nota-se ainda que o MMSE-V-BLAST ainda é marginalmente superior a outras abordagens do tipo SIC. No entanto, a complexidade do MMSE-V-BLAST<sup>6</sup> não justifica seu uso em sistemas MIMO de larga escala, dado que outras abordagens de cancelamento de interferência ordenado são menos complexas<sup>7</sup>. Quanto aos demais detectores, o ZF opera de forma insatisfatória enquanto o SD atinge um bom desempenho, exigindo uma potência consideravelmente inferior aos outros detectores (dezenas de dBs).

A Figura 4.3c mostra o desempenho de alguns detectores MIMO operando no cenário C, isto é, um número elevado de antenas sujeitas a uma alta correlação espacial, cenário típico de um sistema MIMO de larga escala. Novamente, observa-se que as alterações propostas neste capítulo renderam ao detector MMSE-OSIC

<sup>5</sup>O mesmo cenário onde emergiram os problemas relacionados à detecção MMSE-OSIC, e.g., Figura 2.7

<sup>6</sup> $\mathcal{O}(n^4)$

<sup>7</sup>No geral,  $\mathcal{O}(n^3)$



**Figura 4.3:** BER para os cenários A, B, C.

um funcionamento correto. Por outro lado, o uso da SQRD sem as alterações levou o sistema a altas taxas de erro. O MMSE-V-BLAST apresentou um desempenho superior ao MMSE-OSIC modificado, sendo contraindicado devido a sua complexidade em sistemas com um número elevado de antenas. Além disso, o ZF apresentou um desempenho baixo para a faixa de SNR coberta pela figura e o desempenho do SD não foi simulado por exigir um tempo computacional elevadíssimo. Por fim, vale notar que um aumento no número de antenas pode melhorar consideravelmente o desempenho do sistema. Neste contexto, os detectores avaliados nesta seção foram capazes de atingir taxas de erro da ordem de  $10^{-3}$  mesmo com SNRs baixas, altas correlações e um número maior de terminais a serem servidos.

Através dos resultados apresentados nesta seção, foi possível constatar a efetividade da solução proposta em canais sem fio altamente correlacionados. Ao adotar singelas modificações, foi possível reverter o baixo desempenho de detectores OSIC sob altas correlações e SNRs, tornando tais detectores robustos, até mesmo para grandes arranjos de antenas.



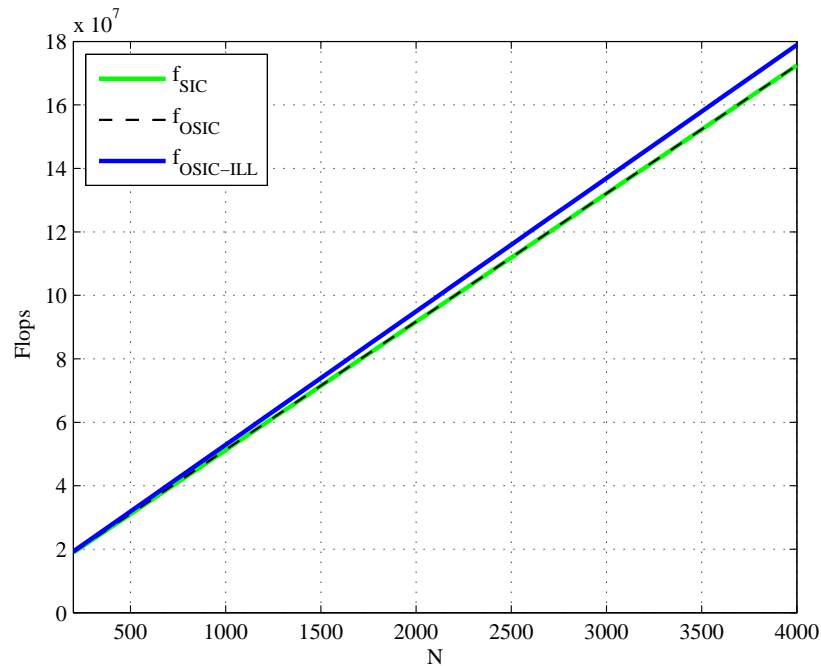
### 4.3.3 Análise da Complexidade

Nesta seção, serão feitas algumas observações em torno da complexidade do detector MMSE-OSIC. Ao longo deste trabalho, foi demonstrado que as normas de  $\mathbf{Q}$  devem ser recalculadas pela eq. (4.8), em casos de alta correlação espacial. Logo, a nova estratégia recalcula a norma de forma convencional, o que adiciona o cálculo de  $K'$  normas, que exigem o produto de  $N + K'$  variáveis e a soma de  $N + K' - 1$ . Com isso, a complexidade do detector modificado torna-se

$$f_{\text{OSIC-ILL}} = f_{\text{OSIC}} + K' [4(N + K') - 1] \quad (4.10)$$

onde  $f_{\text{OSIC}}$  é a complexidade do detector MMSE-OSIC, que pode ser encontrado na Tabela 2.1.

Com o intuito de demonstrar o consumo adicional gerado pela modificação, a Figura 4.4 ilustra a complexidade dos detectores MMSE-SIC, MMSE-OSIC e MMSE-OSIC modificado, considerando-se  $K' = 400$  e um número variável de antenas na ERB. Nota-se em tal figura que a ordenação em si apresenta uma complexidade negligenciável. Por outro lado, as alterações propostas neste capítulo adicionam 6% a mais de complexidade ao detector. Apesar da nova complexidade ser superior, as operações adicionais são indispensáveis caso o detector MMSE-OSIC opere com matrizes numericamente má condicionadas.



**Figura 4.4:** Complexidade computacional para os detectores MMSE-SIC, MMSE-OSIC e MMSE-OSIC (modificado) com  $K' = 400$  e um número variável de antenas na ERB

## 4.4 Conclusões

Este capítulo cobriu diferentes aspectos relacionados a técnica OSIC combinada à equalização MMSE num contexto MIMO de larga escala. Tendo discutido o funcionamento e as dificuldades operacionais do detector MMSE-OSIC, foi diagnosticado e solucionado o problema que torna tal detecção inutilizável em cenários de alta correlação espacial. Especificamente, através de modificações no cálculo de normas ao longo do algoritmo SQRD, solucionou-se os problemas ligados a detecção MMSE-OSIC como visto ao longo dos resultados numéricos. Apesar da solução proposta impor uma carga computacional adicional, ela torna-se imprescindível em casos de alta correlação espacial combinadas a alta SNR e um número elevado de antenas. Mesmo assim, tal complexidade adicional ainda é razoável, pois é inferior à complexidade do restante do algoritmo.

## 5 Estimativas de Canais MIMO com Treinamento Assíncrono

Apesar de sistemas MIMO de larga escala serem um tema promissor, ainda existem alguns obstáculos a serem transpostos. Um deles é a contaminação de pilotos, causada pela interferência inter-celular devido ao reuso de pilotos em células adjacentes na fase de treinamento de canal (RUSEK et al., 2013). Tal interferência acaba causando estimativas de canal imprecisas, limitando drasticamente o desempenho de sistemas MIMO. Este tipo de problema é particular de sistemas que obtém estimativas de canal através de sequências pilotos (BIGUESH; GERSHMAN, 2006; BAI et al., 2014). Desta forma, métodos de estimação cega<sup>1</sup>, e.g., (SHIN; HEATH; POWERS, 2007), são uma possível alternativa, apesar de oferecerem estimativas de canal pobres. Outra abordagem trata a contaminação através de pré-codificadores (JOSE et al., 2011; ASHIKHMINE; MARZETTA, 2012); porém tais técnicas ainda são consideradas insipientes em termos práticos.

Seguindo a tendência do 5G e a busca por taxas da ordem de gigabits por segundo, sistemas MIMO podem vir a operar na faixa de ondas milimétricas (BOCCARDI et al., 2014), cujo espectro ainda é abundante, possibilitando o uso de bandas da ordem de GHz. Tal sinergia pode ser facilmente observada já que sistemas MIMO mitigam as perdas de percurso em altas frequências, enquanto a operação em ondas milimétricas possibilitam uma maior densidade de antenas em um TM ou na ERB. Tais constatações são apresentadas em (ROH et al., 2014) através de análises teóricas e medidas experimentais feitas a partir de um protótipo. Desta forma, sistemas de comunicação tendem a operar em frequências cada vez maiores, tornando-os mais sensíveis ao sincronismo temporal e em frequência (ZHOU; KARSILAYAN; SERPEDIN, 2007). De fato, alguns padrões como o 802.11ad e 802.15.3c operam em frequências em torno de 60 GHz, sendo sua sincronização um tópico de pesquisa recorrente (LIU et al., 2015).

---

<sup>1</sup>Métodos que não dependem da transmissão de pilotos

Dada a importância da estimação de canais, especialmente em sistemas MIMO de larga escala, somada as suas tendências de operarem em altas frequências, este capítulo explora o treinamento de canais auxiliado por sequências piloto não sincronizadas entre os TMs e a ERB.

## 5.1 Modelo de Sistema

Assim como no Capítulo 4, este capítulo considera um sistema MIMO multi-usuário (MU-MIMO) com  $K$  MTs equipados com uma única antena e servidos por uma ERB com  $N$  antenas. Neste caso, considerou-se também a reciprocidade de canal tanto para o *uplink* quanto para o *downlink*, tornando-se possível explorar o modo de transmissão TDD (*time-duplex-division*). Em tal modo, transmite-se as sequências pilotos e os dados em intervalos de tempo distintos, porém ocupando a mesma banda. Além disso, o CSI é obtido com o auxílio de pilotos enviados no *uplink*. Por outro lado, a transmissão de dados para os usuários é feita com o uso de técnicas de pré-codificação. Em particular, a transmissão de dados para o *uplink* será ignorada por não se tratar do foco desta parte do trabalho. Adicionalmente, considera-se que os terminais móveis são distribuídos em diferentes pontos da célula, logo, a transmissão síncrona de pilotos para a ERB torna-se inviável (SPENCER et al., 2004).

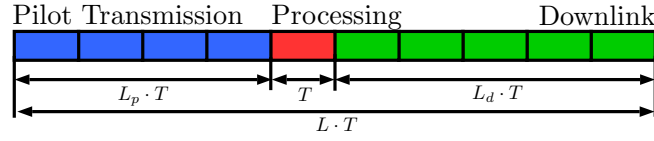
Inicialmente, cada usuário envia seu próprio piloto<sup>2</sup> para a ERB. Após isso, a ERB estima a matriz de canal baseado nos pilotos recebidos, sendo possível calcular a matriz de pré-codificação para a transmissão *downlink*. Por fim, a mensagem da ERB para os TMs móveis é procedida, terminando o ciclo de transmissão. Vale a pena ressaltar que estes três passos devem ser executados num intervalo inferior ao tempo de coerência do canal, ou seja, o intervalo de tempo em que o canal permanece praticamente inalterado. Note também que, como técnicas de pré-codificação são empregadas, um simples re-escalamento seguido pela demodulação é suficiente para reconstruir a mensagem.

Como o modo TDD é utilizado, a transmissão de pilotos e de dados deve ser feita em intervalos diferentes. Desta forma, considera-se a transmissão de pilotos de comprimento  $L_p$  no *uplink*, além de  $L_d$  símbolos no *downlink*, sendo o período de símbolo denotado por  $T$ . Baseado em alocações como as de (ASHIKHMIN; MARZETTA, 2012; MARZETTA, 2006), a Figura 5.1 exemplifica uma alocação de dados e pilotos, considerando que o tempo de coerência do canal é de  $L = 10$  símbolos. Portanto, pode-se deduzir que 40% do tempo é dedicado a transmissão

---

<sup>2</sup>conhecido a priori na ERB

de pilotos, 10% do tempo é reservado ao processamento<sup>3</sup> e 50% do tempo é dedicado a transmissão de dados, similar à alocação adotada em (ASHIKHMIN; MARZETTA, 2012).



**Figura 5.1:** Alocação temporal para um tempo de coerência de  $10T$

Sumariamente, a operação do sistema é dividida em: transmissão de pilotos, processamento na ERB e transmissão de dados no *downlink*, os quais serão tratados nas próximas subseções.

### 5.1.1 Uplink: Transmissão de Pilotos

Como destacado anteriormente, as estimativas de canais são obtidas baseadas em pilotos que devem ser transmitidos com uma periodicidade mínima de um intervalo de coerência. A transmissão dos pilotos é esquematizada na Figura 5.2, onde o  $k$ -ésimo usuário envia sua própria sequência piloto  $\phi_{u(k,j)}$  durante  $L_p$  períodos de símbolo. Pode-se notar que os pilotos devem ser ortogonais, pois eles são combinados na ERB, precisando ser desacoplados para obter as estimativas de canal.

A fim de simplificar o processo de estimação de canal, a transmissão de pilotos é descrita da seguinte forma compacta

$$\mathbf{Y} = \sqrt{p_r} \mathbf{H}^T \mathbf{\Phi}_u + \mathbf{V}, \quad (5.1)$$

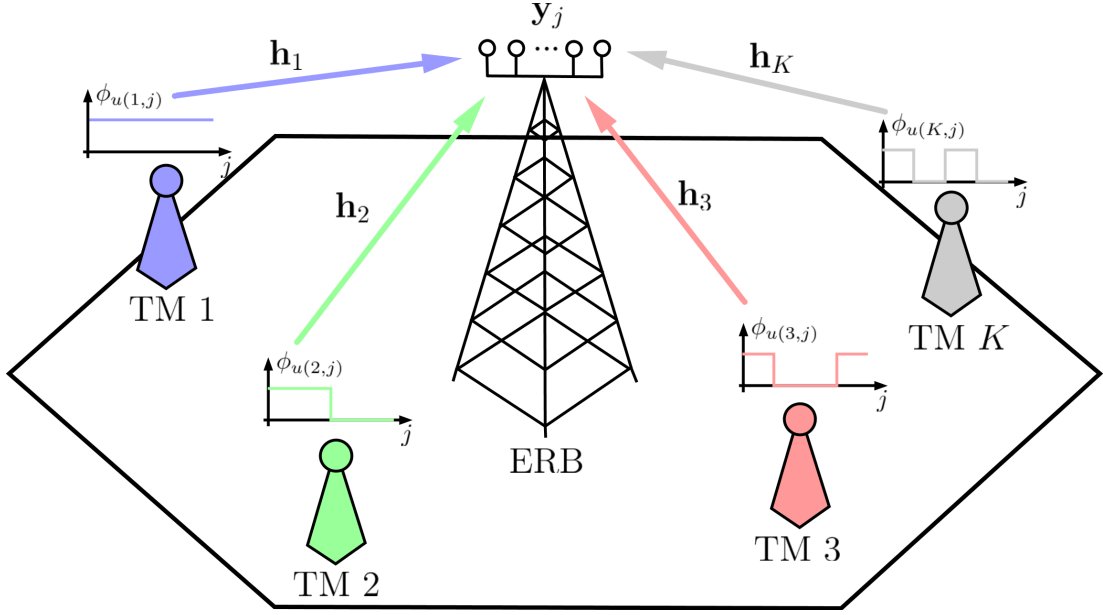
onde  $p_r$  é a SNR no canal reverso (*uplink*);  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{N \times L_p}$  é o conjunto de pilotos distorcidos pelo canal e recebidos pelas  $N$  antenas de transmissão durante  $L_p$  períodos de símbolo;  $\mathbf{H}^T \in \mathbb{C}^{N \times K}$  é a matriz de canal para o *uplink*, com  $h_{ij} \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ ;  $\mathbf{\Phi}_u \in \mathbb{C}^{K \times L_p}$  é a matriz de pilotos enviados pelos TMs<sup>4</sup>; e  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N \times L_p}$  é o ruído AWGN com potência unitária, i.e.  $v_{ij} \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ .

### 5.1.2 Processamento da ERB

Após receber as sequências piloto, a ERB deve estimar o canal para calcular a matriz de pré-codificação. Especificamente, considera-se que as estimativas de

<sup>3</sup>estimação do canal e cálculo da matriz de pré-codificação

<sup>4</sup> $\phi_{u(k,j)}$  é o piloto do  $k$ -ésimo usuário, com duração de  $L_p$  períodos de símbolo, i.e.,  $1 \leq j \leq L_p$ .



**Figura 5.2:** Transmissão *uplink*, considerando que  $j$  é o índice dos *time-slots*,  $\mathbf{H}^T = [\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_K]$  e  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_K]$

canal são obtidas de forma linear, ou seja,

$$\hat{\mathbf{H}}^T = \frac{1}{\sqrt{p_r}} \mathbf{Y} \mathbf{\Psi}, \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{\Psi}$  é a matriz responsável por desacoplar os pilotos e gerar as estimativas do canal MIMO. Como o sincronismo entre a ERB e os TMs não é garantido, a matriz  $\mathbf{\Psi}$  é baseada em um piloto de referência presente na ERB que, por sua vez, é uma versão temporalmente deslocada de  $\mathbf{\Phi}_u$ . Por exemplo, usando a métrica dos mínimos quadrados (LS, *Least-Squares*), a matriz responsável pelo desacoplamento dos canais pode ser escrita como (BIGUESH; GERSHMAN, 2006)

$$\mathbf{\Psi}_{\text{LS}} = \mathbf{\Phi}_r^\dagger. \quad (5.3)$$

Além disso, se a matriz de pilotos é ortogonal,  $\mathbf{\Phi}_r \mathbf{\Phi}_r^H = L_p \mathbf{I}_K$  a solução LS resume-se a

$$\mathbf{\Psi}_{\text{LS}} = \frac{1}{L_p} \mathbf{\Phi}_r^H. \quad (5.4)$$

Com a aquisição das estimativas do canal, a ERB procede com o cálculo da matriz de pré-codificação e com a transmissão de dados no *downlink*. Neste sentido, duas técnicas populares são o filtro casado (MF, *Matched-Filter*) e o ZF (YANG; MARZETTA, 2013). A matriz de pré-codificação do MF é descrita por

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{MF}} = \sqrt{\gamma_{\text{MF}}} \hat{\mathbf{H}}^H, \quad (5.5)$$

tratando-se da opção mais simples possível, apesar de depender da ortogonalidade

assintótica (RUSEK et al., 2013),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{H}\mathbf{H}^H = N\mathbf{I}_K, \quad (5.6)$$

obtida somente quando  $N \gg K$ . Por outro lado, a pré-codificação ZF é dado por

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{ZF}} = \sqrt{\gamma_{\text{ZF}}}\hat{\mathbf{H}}^H \left( \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H \right)^{-1}. \quad (5.7)$$

Apesar de não depender da ortogonalidade assintótica, o ZF é mais complexo, podendo amplificar o ruído em caso de canais mal condicionados dada a inversão matricial. Vale também mencionar que  $\gamma_{\text{MF}} = 1/\text{tr} \left( \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H \right)$  e  $\gamma_{\text{ZF}} = 1/\text{tr} \left[ \left( \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^H \right)^{-1} \right]$  são constantes de normalização de potência.

### 5.1.3 Downlink: Transmissão de Dados

Com as estimativas de canal e, conseqüentemente, a matriz de pré-codificação, procede-se com a transmissão de dados no *downlink*

$$\mathbf{X} = \sqrt{p_f}\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{W}, \quad (5.8)$$

onde  $p_f$  é a SNR para o *downlink*;  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{K \times L_d}$  são os sinais recebidos em todos os  $K$  TMs;  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{K \times N}$  é o canal para o *downlink*, assumindo o princípio da reciprocidade;  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{C}^{N \times K}$  é a matriz de pré-codificação; e  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{K \times L_d}$  é o ruído AWGN com potência unitária, isto é,  $w_i \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ .

Como técnicas de pré-codificação são utilizadas no *downlink*, os TMs precisam somente re-escalonar e demodular o sinal recebido para reconstruir a mensagem enviada. Desta forma, a mensagem estimada nos TMs usando o ZF é dada por

$$\hat{\mathbf{S}}_{\text{ZF}} = \frac{1}{\sqrt{p_f\gamma_{\text{ZF}}}}\mathbf{X}, \quad (5.9)$$

enquanto para o MF a reconstrução é feita da seguinte forma.

$$\hat{\mathbf{S}}_{\text{MF}} = \frac{1}{\sqrt{p_f\gamma_{\text{MF}}}}\mathbf{X}. \quad (5.10)$$

## 5.2 Erro para Estimativas de Canal

Esta seção avaliará de forma analítica o erro quadrático médio (MSE, *Mean-Squared-Error*) das estimativas de canal sujeito a anomalias de transmissão como assincronismo e falhas nas antenas. De acordo com a eq. (5.1) e (5.2), as estima-

tivas de canal podem ser escritas como

$$\widehat{\mathbf{H}}^T = \mathbf{H}^T \mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{p_r}} \mathbf{V} \Psi, \quad (5.11)$$

onde  $\mathbf{R} = \Phi_u \Psi$ . Nota-se facilmente que  $\mathbf{R}$  denota a quantidade de interferência entre os pilotos, onde  $r_{ij}$  é a interferência cruzada entre os pilotos dos usuários  $i$  e  $j$ . Portanto, caso  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_K$ , pode-se afirmar que uma transmissão de pilotos síncrono foi atingida, prevenindo-se erros adicionais, à parte do ruído aditivo. No entanto, vale salientar que, tal comportamento também pode ser observada em sistemas *quasi-synchronous* CDMA (QS-CDMA) (KURAMOTO; ABRÃO; JESZENSKY, 2005), que pode ser afetado pela interferência própria e a interferência de múltiplo acesso

Considerando que o erro de estimativas do canal é dado por

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{H} &= \widehat{\mathbf{H}} - \mathbf{H} \\ &= (\mathbf{R}^T - \mathbf{I}_K) \mathbf{H} + (\mathbf{V} \Psi)^T / \sqrt{p_r}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

sua norma é escrita como

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{H}\|_F^2 &= \text{tr} [(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}_K)^H (\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) \mathbf{H} \mathbf{H}^H] \\ &\quad + 1/\sqrt{p_r} \text{tr} [\mathbf{H} \mathbf{V}^* \Psi^* (\mathbf{R}^T - \mathbf{I}_K)] \\ &\quad + 1/\sqrt{p_r} \text{tr} [\mathbf{V}^T \mathbf{H}^H (\mathbf{R}^T - \mathbf{I}_K)^H \Psi^T] \\ &\quad + 1/p_r \text{tr} [(\Psi \Psi^H)^T (\mathbf{V}^H \mathbf{V})^T]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

A fim de avaliar o MSE do canal estimado a esperança do erro deve ser considerada. Como as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{V}$  são matrizes distribuídas de forma independente,

$$\mathbb{E} [\mathbf{H}^H \mathbf{V}] = \mathbb{E} [\mathbf{V}^H \mathbf{H}] = \mathbf{0}. \quad (5.14)$$

Além disso, temos que  $\mathbb{E} [\mathbf{H} \mathbf{H}^H] = N \mathbf{I}_K$  e  $\mathbb{E} [(\mathbf{V}^H \mathbf{V})^T] = N \mathbf{I}_{L_p}$ . Portanto, pode-se chegar ao resultado

$$\mathbb{E} [\|\Delta \mathbf{H}\|_F^2] = N \left[ \mathbb{E} [\|\mathbf{R} - \mathbf{I}_K\|_F^2] + \frac{1}{p_r} \|\Psi\|_F^2 \right]. \quad (5.15)$$

Normalizando o resultado anterior levando em conta o número de elementos da matriz  $\mathbf{H}$ , o erro médio nas estimativas de canal é dado por

$$\text{MSE}_h = \frac{1}{K} \left( \mathbb{E} [\|\mathbf{R} - \mathbf{I}_K\|_F^2] + \frac{1}{p_r} \|\Psi\|_F^2 \right), \quad (5.16)$$

ou seja, o erro médio de cada elemento da matriz  $\mathbf{H}$ . Obviamente, tal métrica é preferível e conveniente, dadas as diferentes dimensões que as matrizes de canal



podem assumir.

Caso seqüências ortogonais sejam utilizadas e a transmissão de pilotos não sofra nenhum tipo de anomalia:  $\|\Psi\|_F^2 = K/L_p$  e  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_K$ , logo o MSE do canal torna-se

$$\text{MSE}_h^{\text{sync}} = \frac{1}{L_p p_r}, \quad (5.17)$$

cujo erro é introduzido exclusivamente pelo ruído aditivo. De fato, os resultados presentes na eq. (5.17) conferem com aqueles encontrados em (BIGUESH; GERSHMAN, 2006), os quais são um caso particular da expressão (5.16). Com isso, a eq. (5.16) trata-se de uma fórmula mais genérica para calcular o erro de estimativas de canal MIMO, pois tal fórmula é válida para qualquer método de estimação linear, além de poder incorporar problemas na transmissão de pilotos, que podem ser aplicados no contexto MIMO de larga escala.

### 5.2.1 Correlação entre Canais

Caso anomalias na transmissão de pilotos ocorra, erros nas estimativas de canal são certamente esperados. No entanto, desvios não são os únicos erros nas estimativas de canal, já que a correlação espacial pode estar presente em tais estimativas. A fim de demonstrar este comportamento, uma análise da eq. (5.2) é procedida, considerando, por simplicidade, a ausência do ruído. Neste caso,

$$\widehat{\mathbf{H}}^T = \frac{1}{\sqrt{p_r}} \mathbf{Y} \Psi = \mathbf{H}^T \Phi_u \Psi = \mathbf{H}^T \mathbf{R}. \quad (5.18)$$

Para o caso de um treinamento de canal perfeito, espera-se que  $\mathbf{R}$  tenda a uma matriz identidade, mas à medida que o assincronismo toma forma, a matriz  $\mathbf{R}$  desvia-se cada vez mais da forma diagonal. Portanto, pode-se observar que cada elemento de  $\widehat{\mathbf{H}}$  é escrito como

$$\widehat{h}_{ij} = \sum_{\ell=1}^K h_{\ell j} r_{\ell i}, \quad (5.19)$$

levando à correlação espacial<sup>5</sup>, já que a estimativa de um dado canal depende dos ganhos dos canais adjacentes. Tal comportamento exige atenção em sistemas MIMO e MIMO de larga escala, pois o Capítulo 2 demonstrou os malefícios da correlação espacial.

Desta forma, pode-se concluir que o primeiro termo da eq. (5.16) denota o erro introduzido pelo assincronismo, que acaba gerando correlação espacial, enquanto

<sup>5</sup>Note que  $r_{\ell i}$  pode ser considerado um índice de correlação espacial, assim como aquele modelado em (2.3)

o segundo termo corresponde à parcela de erro causado pelo ruído térmico, ou seja,

$$\text{MSE}_h = \underbrace{\frac{1}{K} \mathbb{E} [\|\mathbf{R} - \mathbf{I}_K\|_F^2]}_{\text{Erro do assincronismo e correlação}} + \underbrace{\frac{1}{K p_r} \|\Psi\|_F^2}_{\text{Erro do ruído térmico}}. \quad (5.20)$$

## 5.3 Sequências de Treinamento

Esta subseção discute brevemente sequências de treinamento apropriadas para o treinamento do canal, além de introduzir a correlação circular cruzada (CCC), uma métrica muito importante para determinar a qualidade de uma sequência, a qual será utilizada na análise dos resultados numéricos.

### 5.3.1 Função de Correlação Circular Cruzada

Considere que o  $i$ -ésimo piloto de referência<sup>6</sup> seja representado por

$$a_i(t) = \sum_{k=0}^{L_p-1} \phi_{r(i,k+1)} \text{rect}\left(\frac{t - kT}{T}\right), \quad 1 \leq i \leq K \quad (5.21)$$

onde  $\text{rect}(t/T)$  é um pulso retangular de amplitude unitária, ativo no intervalo  $0 < t < T$ , sendo  $\phi_{r(i,k+1)}$  os valores assumidos pelo piloto do  $i$ -ésimo usuário. Por simplicidade, considera-se  $a_k(t)$  periódico de período  $L_p T$ , i.e.,  $a_k(t) = a_k(t + nL_p T)$ . Apesar de assumir a hipótese simplificadora da periodicidade de  $a_k(t)$ , é importante destacar que somente um período de  $a_k(t)$  é enviado em um intervalo de coerência, como mostrado na Figura 5.1. Com o efeito do assincronismo na transmissão de pilotos no *uplink*, nota-se que o piloto enviado pelo  $i$ -ésimo TM é escrito como

$$b_i(t) = a_i(t - \xi T), \quad (5.22)$$

onde  $\xi$  é o assincronismo percentual em relação a um período de símbolo.

Considerando a eq. (5.22), define-se a correlação circular cruzada entre o  $i$ -ésimo piloto de referência e o piloto enviado ao  $j$ -ésimo usuário como

$$c_{ij}(\xi) \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T a_i(t) a_j^*(t - \xi T) dt, \quad (5.23)$$

podendo ser organizado na matriz  $\mathbf{C}(\xi)$ .

Uma análise mais cuidadosa revela que tanto  $\mathbf{C}(\xi)$  e  $\mathbf{R}$  descrevem o quão distinguíveis são os pilotos, dado um atraso de  $\xi T$ . Idealmente, ambas as matrizes

<sup>6</sup>Disponível na ERB

devem ser ortogonais para melhorar o desempenho da estimação, pois isso permite que diferentes canais sejam completamente desacoplados. Portanto, um conjunto de pilotos bem projetado deve apresentar baixos valores de  $c_{ij}(\xi)$  para  $i \neq j$ .

### 5.3.2 Tipos de Sequências Piloto

O projeto de um conjunto de sequências ( $\Phi_r$ ) é um projeto clássico em sistemas CDMA, o qual foi vastamente explorado em décadas passadas. Portanto, oferece-se na sequência, uma breve contextualização em torno de sequências clássicas como Walsh-Hadamard, Gold, Kasami e Quaternária, as quais possuem propriedades de auto-correlação e correlação cruzada bem definidas.

Diferentemente das demais sequências a serem abordadas, a família Walsh-Hadamard constitui uma família ortogonal, logo  $\mathbf{C}(0) = L_p \mathbf{I}_{L_p}$ . No entanto, quando assincronismo está presente,  $c_{ij}(\xi)$  pode assumir uma vasta faixa de valores, limitando o desempenho deste tipo de sequência. Em relação à geração da família Walsh-Hadamard, ela pode ser construída de forma recursiva a partir de uma matriz semente específica (HORADAM, 2007).

Em particular, as sequências de Gold e Kasami podem ser geradas combinando um par preferencial de sequências de máximo comprimento (MARTINEZ, 1997), que por sua vez são geradas por uma rede de  $r$  registradores de deslocamento. Embora estas famílias de sequências não constituam conjuntos ortogonais, tais sequências ainda apresentam um bom desempenho, isto é, baixos valores de correlação cruzada fora de fase ( $\xi \neq 0$ ).

Similar a sequências de máximo comprimento, sequências Quaternárias (KUMAR et al., 1996) também podem ser geradas através de  $r$  registradores de deslocamento. No entanto, ao assumir valores complexos, as sequências Quaternárias são capazes de atingir uma família com valores relativamente baixos.

A Tabela 5.1 sintetiza as principais características das sequências apresentadas anteriormente. Especificamente, destaca-se o comprimento das sequências ( $L_p$ ), o número de sequências disponíveis ( $\mathcal{M}$ ) numa família de comprimento  $L_p$  e os possíveis valores de CCC,  $c_{ij}(\xi)$ , para valores inteiros de  $\xi$ . Vale notar que os valores de autocorrelação em fase foram omitidos, dado que invariavelmente:  $c_{ii}(0) = L_p$ .

Apesar da Tabela 5.1 apresentar valores de de CCC somente para valores inteiros de  $\xi$ , pode-se lançar mão da interpolação para obter a CCC para qualquer valor fracionário de  $\xi$  (SCHULZE; LUEDERS, 2005).

**Tabela 5.1:** Principais características para sequências de espalhamento clássicas.  $r, n \in \mathbb{N}$  and  $\xi \in \mathbb{Z}$ 

Família	Comprimento da Sequência, $L_p$	Número de Sequências, $M$	Valores de CCC, $c_{ij}(\xi)$
Walsh-Hadamard (HORADAM, 2007)	$2^n$ $12 \cdot 2^n$ $20 \cdot 2^n$	$M = L_p$	$[-L_p, L_p]$
Gold ( $r$ -ímpar) (GOLD, 1968)	$2^r - 1$	$2^r + 1$	$-1$ $-1 \pm 2^{\frac{r+1}{2}}$
Gold ( $r$ -par) (GOLD, 1968)	$2^r - 1$	$2^r + 1$	$-1$ $-1 \pm 2^{\frac{r+2}{2}}$
Kasami ( $r$ -par) (KASAMI; LIN; PETERSON, 1968)	$2^r - 1$	$2^{\frac{r}{2}}$	$-1$ $-1 \pm 2^{\frac{r}{2}}$
Quaternária ( $r$ -ímpar) (KUMAR et al., 1996)	$2^r - 1$	$2^r + 1$	$-1$ $-1 \pm 2^{\frac{r-1}{2}}$ $-1 \pm \iota 2^{\frac{r-1}{2}}$
Quaternária ( $r$ -par) (KUMAR et al., 1996)	$2^r - 1$	$2^r + 1$	$-1$ $-1 \pm 2^{\frac{r}{2}}$ $-1 \pm \iota 2^{\frac{r}{2}}$

## 5.4 Resultados Numéricos

Nesta seção, os resultados numéricos serão apresentados a fim de validar a teoria, além de analisar o impacto do assincronismo na transmissão de pilotos quanto à qualidade das estimativas de canal e ao desempenho em termos de BER e capacidade em sistemas MU-MIMO de larga escala. Inicialmente, algumas características da CCC são apresentadas para embasar análises subseqüentes. Em seguida, a expressão para os erros de estimativa de canal é analisada numericamente. Por fim, o desempenho do sistema é avaliado em termos de BER e capacidade total sob estimativas imperfeitas de canal, provenientes de pilotos não-sincronizados.

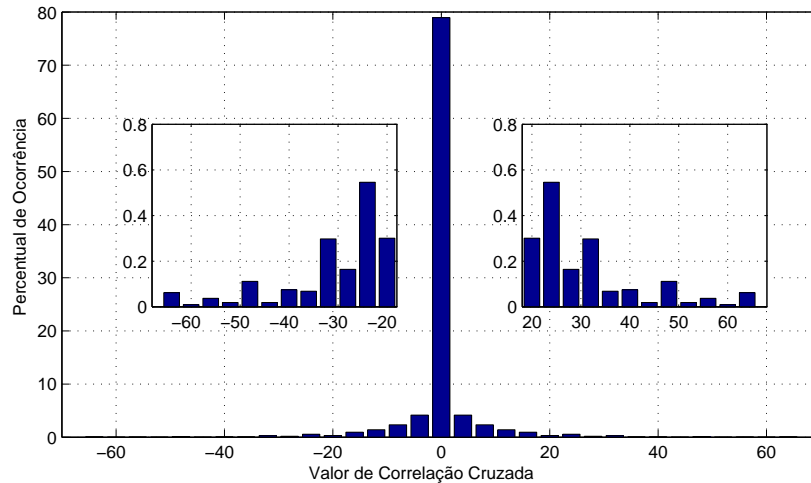
Em particular, considerou-se o método LS para a estimação de canal e a pré-codificação ZF para a transmissão de dados no *downlink*, a qual não depende da ortogonalidade assintótica. Também foram consideradas as sequências Walsh-Hadamard, Gold e Quaternária como piloto, desconsiderando-se o reuso de pilotos. Com o intuito de verificar a influência da transmissão imperfeita de pilotos, o assincronismo entre a ERB e os TMs foi considerado. Tal comportamento foi modelado sobre-amostrando o sinal do piloto e transladando temporalmente os pilotos a serem enviados. Com isso, obtém-se que o pilotos de referência da ERB e os pilotos transmitidos pelos TMs estão atrasados em  $\xi T$  segundos.

### 5.4.1 CCC das Sequências Piloto

Como destacado anteriormente, um dos objetivos deste capítulo é realizar o estudo dos erros introduzidos pelo assincronismo na transmissão dos pilotos. Especificamente, esta seção exemplificará os valores de CCC e suas ocorrências. Para isso, computa-se todos os valores de CCC de duas sequências da mesma família para  $\xi \in \mathbb{Z}$ , gerando-se em seguida o histograma de tais valores<sup>7</sup>. Desta perspectiva, sequências que apresentam alta ocorrência de baixos valores de correlação cruzada ( $c_{i,j}(\xi)$ ,  $i \neq j$ ) são desejáveis, dado a sua superioridade em desacoplar canais durante o processo de estimação.

Para este exemplo, considerou-se as seguintes sequências: Walsh-Hadamard-64 ( $n = 6$ ,  $L_p = 64$ ,  $\mathcal{M} = 64$ ), Gold-63 ( $r = 6$ ,  $L_p = 63$ ,  $\mathcal{M} = 65$ ) and Quaternária-63 ( $r = 6$ ,  $L_p = 63$ ,  $\mathcal{M} = 65$ ). Vale notar que as sequências do tipo Kasami não foram adotadas dado o tamanho reduzido de sua família<sup>8</sup>, o que limita consideravelmente o número de usuários em uma célula, caso desconsidere-se reuso de pilotos.

Na Figura 5.3, pode-se observar que as sequências Walsh-Hadamard-64 apresentam, majoritariamente, valores nulos de CCC, o que é esperado, dada a natureza ortogonal de tal família. No entanto, na condição fora de fase ( $\xi \neq 0$ ), a gama de possíveis valores de CCC aumenta consideravelmente, o que reduz a robustez de tal sequência, caso ela seja usada como piloto.



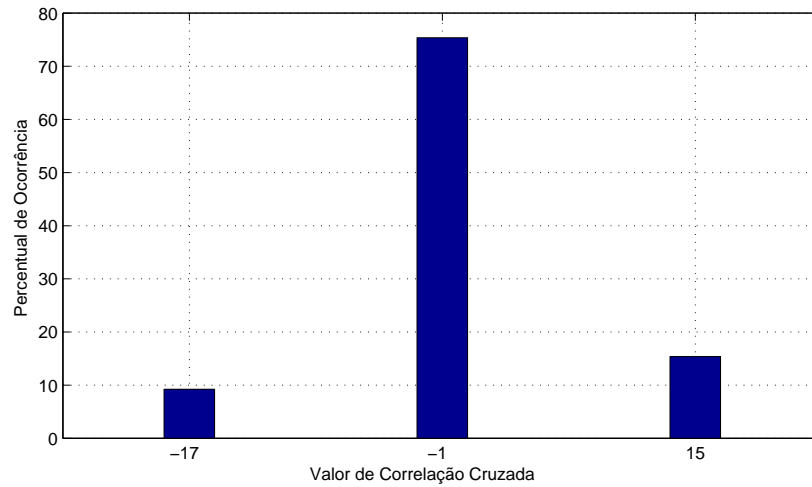
**Figura 5.3:** Histograma da CCC,  $c_{ij}(\xi)$ , para a família Walsh-Hadamard-64

Na Figura 5.4, nota-se que as sequências Gold apresentam uma alta ocorrência de baixos valores de CCC, ou seja,  $c_{ij}(\xi) = -1$ . No entanto, diferente das

<sup>7</sup>Exclui-se novamente os valores de auto-correlação em fase, dado seu comportamento trivial

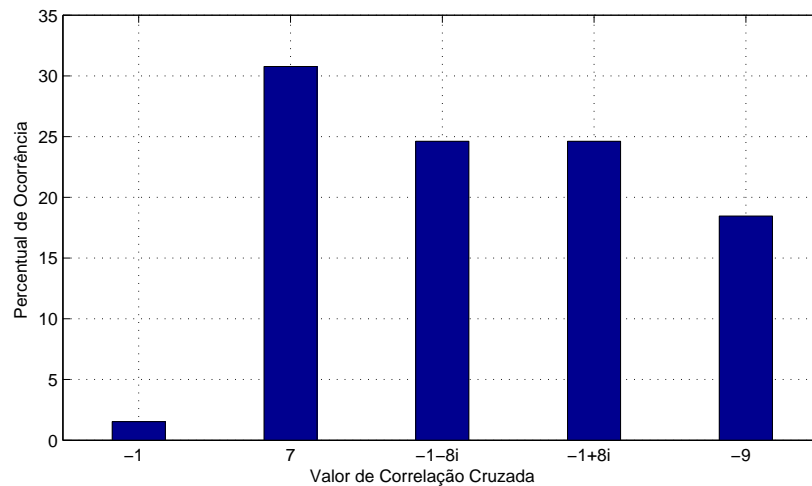
<sup>8</sup> $\mathcal{M} = 8$ , de acordo com a Tabela 5.1

sequências de Walsh-Hadamard, as sequências Gold apresentam somente três valores de correlação cruzada.



**Figura 5.4:** Histograma da CCC,  $c_{ij}(\xi)$ , para a família Gold-63

Já na figura 5.5, é apresentado o histograma dos possíveis valores de CCC para as sequências Quaternária-63. Apesar de apresentar baixos valores de correlação se comparados aos das sequências Gold-63, valores de CCC baixos como o  $c_{ij}(\xi) = -1$ , são muito menos comuns. Portanto, estas sequências acabam tornando-se inapropriadas para a função de pilotos na estimação de canal assíncrona.



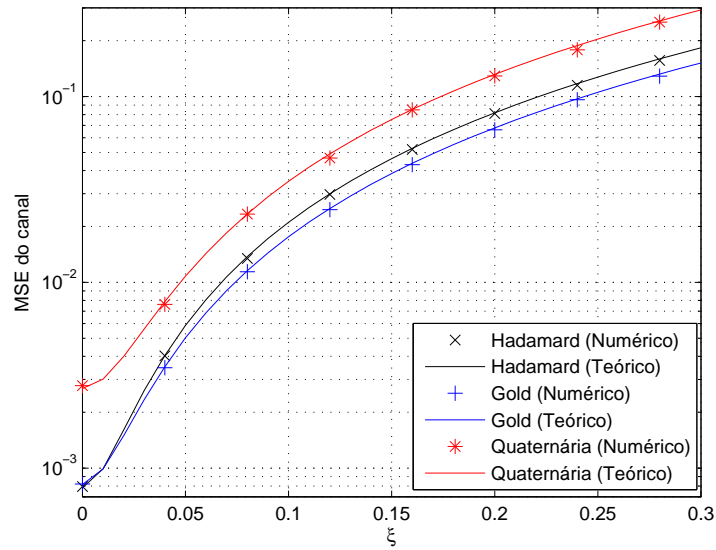
**Figura 5.5:** Histograma da CCC,  $c_{ij}(\xi)$ , para a família Quaternária-63

### 5.4.2 Erro de Estimativa de Canal

A Figura 5.6 ilustra o MSE do canal estimado considerando a transmissão assíncrona de pilotos<sup>9</sup>. Para esta simulação, considerou-se as sequências Walsh-Hadamard-64, Gold-63 e Quaternária-63 como pilotos, além de uma ERB com

<sup>9</sup>medida em termos de  $\xi T$

$N = 300$  antenas servindo  $K = 40$  terminais móveis com uma SNR de  $p_r = 13$  dB. Primeiramente, nota-se uma boa concordância e acurácia entre os valores simulados e os teóricos propostos na eq. (5.16). Pode-se também observar que pilotos baseados em sequências do tipo Gold apresentam os menores valores de MSE. Além disso, as sequências Gold e Walsh-Hadamard possuem praticamente o mesmo MSE para as estimativas de canal com sincronismo quase perfeito:  $\xi \in [0; 0,04]$ . Além disso, as sequências Gold e Hadamard são capazes de atingir os menores erros mesmo em baixo sincronismo.



**Figura 5.6:** MSE das estimativas de canal em função do assincronismo percentual  $\xi$  para as sequências de treinamento Walsh-Hadamard, Gold e Quaternária ( $N = 300$ ,  $K = 40$ ,  $p_r = 13$  dB)

Ao analisar o primeiro termo da eq. (5.16), pode-se notar que o erro das estimativas está ligado às matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{C}(\xi)$ , que por sua vez, constituem partes dos histogramas apresentados nas Figuras 5.3, 5.4 e 5.5. Portanto, à medida que o assincronismo aumenta, os termos fora da diagonal de  $\mathbf{R}$  aumentam, intensificando os erros dos canais estimados. Por exemplo, de acordo com as Figuras 5.3, 5.4 e 5.5, sequências Gold são mais suscetíveis a apresentarem baixos valores de CCC, pois seu histograma mostra uma maior tendência da sequência a apresentar tais valores. Por outro lado, sequências Quaternárias apresentam um desempenho mais pobre, pois baixos valores de CCC são mais improváveis de acordo com a Figura 5.5, levando ao pior desempenho.

Notou-se também que as sequências Quaternárias apresentaram uma baixa performance mesmo sob sincronismo perfeito. Tal comportamento pode ser justificado devido aos altos valores do segundo termo da eq. (5.16), ou seja, o termo da amplificação do ruído. Comparativamente, observou-se que  $\|\Psi\|_F^2$  apresentou os seguintes valores para as sequências Walsh-Hadamard, Gold e Quaternária,

respectivamente: 0,625, 0,651 and 2,135.

Portanto, a ortogonalidade é uma importante característica para uma sequência de treinamento no caso LS, pois  $\Psi = \Phi^\dagger$  cresce à medida que valores de CCC crescem, o que pode acarretar numa amplificação de ruído. Além disso, deve-se buscar um balanço entre baixos valores de CCC entre dois pilotos diferentes e sua probabilidade de ocorrência a fim de produzir melhores estimativas de canal.

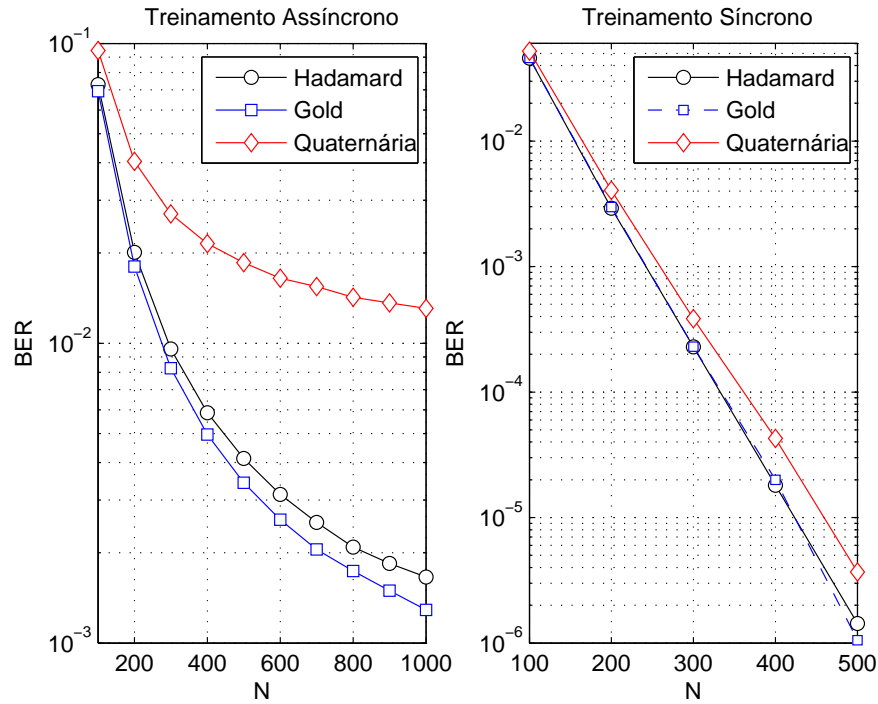
### 5.4.3 BER e Capacidade Total para o *Downlink*

As Figuras 5.7 e 5.8 mostram os efeitos da transmissão assíncrona de pilotos sob a perspectiva da BER e da capacidade total do sistema. A fim de destacar a deterioração do desempenho em função do assincronismo, cada figura demonstra um gráfico para a transmissão síncrona de pilotos e outro para o caso assíncrona. Nesta análise, varia-se o número de antenas da ERB, que serve  $K = 40$  TMs com uma SNR  $p_f = 10$  dB e símbolos 16-QAM pré-codificados via ZF. Além disso, considerou-se pilotos do tipo Walsh-Hadamard-64, Gold-63 e Quaternária-63, transmitidos com uma SNR de *uplink* de  $p_r = 5$  dB, além de um estimador de canal LS.

Da Figura 5.7, é possível observar que o treinamento assíncrono aumenta drasticamente a BER, dada a baixa precisão das estimativas de canal. Neste caso, nota-se que a curva de BER começa a saturar com  $N > 1000$ . Em contraste, verifica-se que o treinamento síncrono não impõe saturação da curva de BER, pois é possível obter boas estimativas de canal. Novamente, sequências Gold ainda mostram-se a melhor escolha em casos de assincronismo de pilotos. No entanto, tanto sequências Gold quanto Hadamard possuem desempenhos similares, quando próximas ao sincronismo. Além disso, dado o alto MSE das estimativas das sequências quaternárias, tal sequência apresentou quedas expressivas de desempenho no caso assíncrono.

A Figura 5.8 apresenta a capacidade efetiva do sistema, considerando a alocação temporal esboçada na Figura 5.1, ou seja, 40% do tempo é reservado para a transmissão de pilotos, 10% para o processamento e 50% para a transmissão de dados no *downlink*. Portanto, a capacidade efetiva do canal pode ser escrita como  $C = 0.5 \sum_i \log_2 |1 + SINR_i|$ , visto que somente metade do tempo é dedicado à transmissão de dados. Como esperado, o treinamento assíncrono reduz severamente a capacidade do sistema. Por exemplo, a capacidade do sistema com sequências quaternárias e assincronismo  $\xi = 0.125$  caiu praticamente para a metade do valor do caso síncrono. As mesmas observações anteriores são





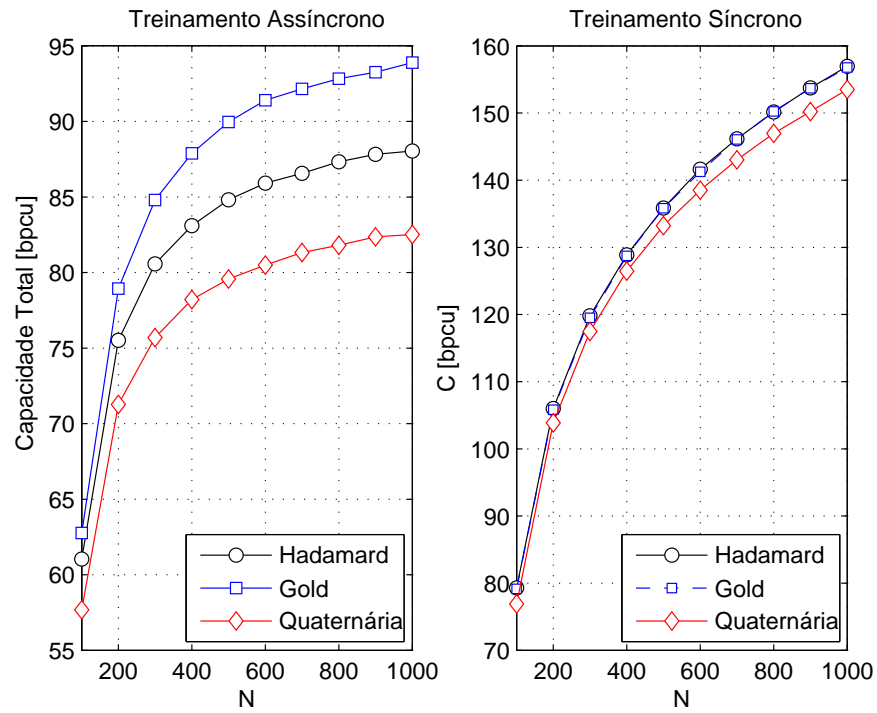
**Figura 5.7:** BER para o *downlink*, com símbolos 16-QAM pré-codificados via ZF, considerando-se  $\xi = 0.125$ ,  $K = 40$ ,  $p_r = 5$  dB e  $p_f = 10$  dB.

aplicáveis para o caso da BER: as sequências do tipo Gold se sobressaíram em qualquer nível de assincronismo, enquanto as sequências de Hadamard operam de forma razoável somente sob um nível de sincronismo relativamente alto; quanto às sequências quaternárias, observou-se um desempenho bem abaixo das outras alternativas.

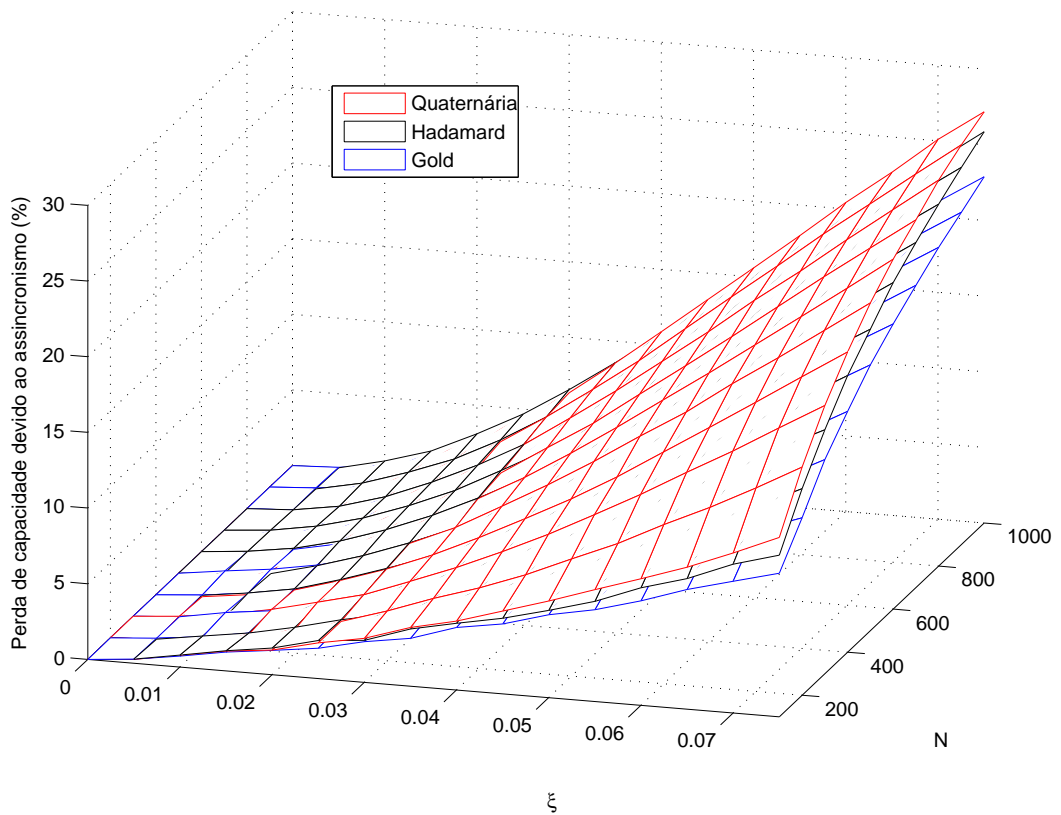
A fim de destacar a deterioração do desempenho devido ao assincronismo de pilotos a Figura 5.9 ilustra a perda de capacidade para diferentes níveis de assincronismo e diferentes números de antenas. Em tal figura, é possível observar que pode-se perder até aproximadamente 30% para  $\xi = 3/40$ , representando uma queda de capacidade considerável. Além disso, também é possível constatar que o sistema torna-se mais sensível ao assincronismo à medida que o número de antenas cresce.

## 5.5 Conclusões

Neste capítulo, estudou-se os efeitos do assincronismo no contexto do treinamento de canal em sistemas MIMO. Neste contexto, deu-se ênfase nos efeitos da transmissão assíncrona de pilotos, no cálculo do erro de canal e em um breve teste com diferentes sequências piloto clássicas em sistemas MIMO de larga escala. Resultados analíticos para o MSE do canal apresentaram boa concordância com os



**Figura 5.8:** Capacidade total no *downlink* com  $\xi = 0.125$ ,  $K = 40$ ,  $p_r = 5$  dB e  $p_f = 10$  dB.



**Figura 5.9:** Perda de capacidade (em porcentagem) devido ao assincronismo,  $K = 40$ ,  $p_r = 5$  dB,  $p_f = 10$  dB

resultados numéricos, além de mostrar que o assincronismo na transmissão de pi-

lotos pode introduzir correlação espacial nas estimativas de canal, que acaba por gerar uma queda no desempenho do sistema. Os resultados numéricos também confirmaram os malefícios da condição assíncrona dos pilotos, que acaba por saturar a curva da BER dado um número específico de antenas da ERB.

Dentre as sequências de treinamento utilizadas neste trabalho, foi observado que a sequência do tipo Gold destacam-se em casos assíncronos. Além disso, sequências Walsh-Hadamard apresentaram um desempenho similar a sequências Gold em casos de alto sincronismo ( $\xi \leq |0.04|$ ). No geral, sequências quaternárias mostraram-se inadequadas no contexto abordado neste capítulo. Desta forma, destaca-se a importância de sequências adequadas para o processo de estimação de canal, ou seja, aquelas que apresentem alta frequência de baixos valores de CCC.

## 6 Alocação de Potência em Sistemas MIMO com *Eigen-beamforming*

Ao longo dos capítulos anteriores, considerou-se uma distribuição de potências uniforme entre as antenas de transmissão. Este quadro muda neste capítulo, dado o uso da técnica de transmissão *eigen-beamforming* com três diferentes alocações de potência: a uniforme, a que proporciona mínima BER e a solução *water-filling*<sup>1</sup>. Em particular, sistemas que utilizam a técnica *eigen-beamforming* paralelizam completamente uma transmissão MIMO, apesar de

Neste capítulo, a alocação ótima de potência que atinja a minimização da BER é desenvolvida a partir de um problema de otimização convexa, solucionada pelas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), as quais são na realidade uma generalização dos multiplicadores de Lagrange. Para comparar tal alocação, a solução *water-filling* será revisitada, além de se fazer o uso da alocação de potência trivial, i.e., a distribuição uniforme de potências.

### 6.1 Modelo de Sistema

Para definir a transmissão de dados, modifica-se a eq. (2.1) adicionando a matriz de pré-codificação e o controle de potência

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{H}\mathbf{s}' + \mathbf{n} \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{s}) + \mathbf{n}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  é o sinal recebido pelas  $N$  antenas;  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times K}$  é a matriz do canal;  $\mathbf{s}' \in \mathbb{C}^{K \times 1}$  é o vetor transmitido;  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{C}^{K \times K}$  é a matriz de pré-codificação;  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{K \times K}$  é uma matriz diagonal, responsável pela alocação de potência em cada antena<sup>2</sup>;  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{K \times 1}$  é o vetor contendo a mensagem modulada em cada antena,

<sup>1</sup>A solução *water-filling* é ótima no sentido de maximizar a capacidade do sistema de comunicação.

<sup>2</sup>Ao longo do texto, adota-se  $p_i = [\mathbf{P}]_{ii}$  e  $\mathbf{p} = \text{diag}(\mathbf{P})$

$\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  é o ruído aditivo.

Vale ressaltar que as modificações introduzidas na eq. (6.1) torna a descrição do sistema mais genérica. Por exemplo: caso não seja feito o uso da pré-codificação, altera-se  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}$ . Além disso, pode-se alocar a potência entre as antenas de forma mais dinâmica, sendo possível até desativar um conjunto de antenas fazendo  $[\mathbf{P}]_{ii} = 0$  e desalocando o símbolo  $s_i$  da  $i$ -ésima antena.

### 6.1.1 *Eigen-beamforming*

Com o conhecimento dos coeficientes do canal, pode-se explorar o *eigen-beamforming* com o auxílio da decomposição em valores singulares (SVD, *Singular-Value-Decomposition*). Neste contexto, o canal é decomposto em

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H, \quad (6.2)$$

onde  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N \times K}$  e  $\mathbf{V}^H \in \mathbb{C}^{K \times K}$  são matrizes unitárias e  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{K \times K}$  é uma matriz diagonal contendo os valores singulares da matriz original em ordem decrescente (KALMAN, 1996), ou seja,  $\sigma_{ii} > \sigma_{i+1,i+1}$ .

Ao aplicar a decomposição à eq. (6.1) e considerando uma pré-codificação  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}$ , o sinal recebido torna-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{H}\mathbf{s}' + \mathbf{n} \\ &= (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H)(\mathbf{V}\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{s}) + \mathbf{n} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{s} + \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

É importante destacar que, como  $\mathbf{V}$  é uma matriz unitária, a potência permanece inalterada, não exigindo operações ou etapas adicionais para controlar a potência de transmissão.

No lado do receptor, procede-se da seguinte forma para recuperar o sinal transmitido:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{P}^{1/2})^{-1} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{s} + \mathbf{P}^{-1/2}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^H \mathbf{n} \\ &= \mathbf{s} + \mathbf{P}^{-1/2}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Da eq. (6.4), nota-se que, a matriz  $\mathbf{U}$  foi suprimida da última etapa por se tratar de uma matriz unitária, a qual não altera a estatística do ruído. Além disso, a transmissão MIMO foi transformada em  $K$  transmissões independentes em canal AWGN.

### 6.1.2 SNR Pós-Detecção

Uma métrica bastante simples para determinar a robustez e a qualidade de uma transmissão é a SNR pós-detecção. Basicamente, tal medida trata-se da razão entre a potência do sinal e a potência do ruído, feito todo o processamento requerido para reconstruir os símbolos. Portanto, a partir da eq. (6.4), a SNR pós-detecção instantânea para cada transmissão AWGN torna-se

$$\begin{aligned}
 \rho_i &= \frac{P_s}{P_n} \\
 &= \frac{|s_i|^2}{\sigma_n^2 \sigma_{ii}^{-2} p_i^{-1}} \\
 &= \left( \frac{\sigma_{ii} |s_i|}{\sigma_n} \right)^2 p_i \\
 &= k_i p_i
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

onde  $\sigma_{ii}^2$  é a potência do canal na  $i$ -ésima transmissão;  $|s_i|^2$  é a potência instantânea do  $i$ -ésimo símbolo;  $\sigma_n$  é a potência do ruído; e  $p_i$  é a potência alocada à  $i$ -ésima transmissão ou antena.

### 6.1.3 BER

Como fez-se o uso da decomposição SVD para converter a transmissão original em  $K$  transmissões AWGN, a BER para a  $i$ -ésima transmissão com símbolos  $M$ -QAM pode ser aproximada por (CHO; YOON, 2002)

$$\begin{aligned}
 Pe_i(p_i) &\approx \frac{4}{\log_2 |M|} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left( \sqrt{\frac{3}{M-1} \rho_i} \right) \\
 &\approx c_1 Q \left( \sqrt{c_2 k_i p_i} \right).
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Note que a aproximação adotada foi selecionada devido a sua simplicidade e razoável fidelidade à BER exata. No entanto, é necessário esclarecer que, existem aproximações mais precisas, e portanto mais complexas, para a BER tanto em canais Rayleigh quanto AWGN (LOPES et al., 2007)

### 6.1.4 Capacidade

Outra possível métrica é a capacidade total do canal. Já que o canal MIMO foi desacoplado em  $K$  canais AWGN paralelos e independentes, a capacidade total é calculada somando as capacidades individuais através da equação de Shannon

(GOLDSMITH, 2005)

$$C(p_i) = \sum_{i=1}^K \log_2(1 + k_i p_i). \quad (6.7)$$

## 6.2 Alocação Ótima de Potência para BER Mínima

Nesta seção, o problema de alocação de potência usado para minimizar a BER do sistema em questão será definido e resolvido. Para isso, o problema será inicialmente formulado na forma padrão. Em seguida, será verificado a convexidade do problema, a fim de garantir a unicidade da solução do problema. Por fim, o problema será resolvido a partir das condições de KKT de primeira ordem.

### 6.2.1 Formulação do Problema

Inicialmente, pode-se formular o problema como a minimização da BER média restrita a uma potência total de transmissão  $P_T$

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K P e_i(p_i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^K p_i = P_T \\ & p_i \geq 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

A fim de tornar o problema mais genérico, pode-se considerar a desativação de algumas antenas/transmissões que estejam com uma SNR baixa. Desta forma, a potência que seria aplicada à antena desligada pode ser alocada a outras antenas com canais mais favoráveis, melhorando o desempenho, assim como implementado com a *water-filling*.

O problema apresentado em (6.8) pode ser alterado considerando um número arbitrário  $K_A$  de antenas ativas. Como a decomposição SVD organiza a potência dos canais de forma decrescente, o canal da primeira antena torna-se o mais forte, enquanto o canal associado a última é o mais fraco. Logo, é razoável assumir que as  $K_A$  primeiras antenas devem se manter ativas, pois estes são os canais com as maiores potências, os quais serão capazes de minimizar a BER. Desta forma o

problema pode, finalmente, ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(\mathbf{p}) &= \frac{1}{K_A} \sum_{i=1}^{K_A} Pe_i(p_i) \\ \text{s.t. } h(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^{K_A} p_i - P_T \\ p_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

## 6.2.2 Convexidade do Problema

Para garantir a unicidade da solução de minimização, deve-se provar que a eq. (6.9) é convexo (BOYD; VANDENBERGHE, 2004). Para isso, é necessário que tanto a função custo e as restrições do problema sejam convexas, o que é procedido na sequência.

### 6.2.2.1 Convexidade da Função Custo

A primeira derivada da função custo da eq. (6.9) pode ser escrita como

$$[\nabla f]_i = -c_1 \sqrt{\frac{c_2 k_i}{8\pi p_i}} \exp\left(-\frac{c_2 k_i}{2} p_i\right). \quad (6.10)$$

Já as derivadas de segunda ordem são dadas por

$$[\nabla^2 f(\mathbf{p})]_{ij} = \begin{cases} c_1 \sqrt{\frac{c_2 k_i}{32\pi p_i}} (1 + c_2 k_i p_i) \exp\left(-\frac{c_2 k_i}{2} p_i\right), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (6.11)$$

Primeiramente, nota-se que a matriz Hessiana de  $f$  é uma matriz diagonal, pois para  $i \neq j$ , tem-se que  $[\nabla^2 f]_{ij} = 0$ . Além disso, observa-se que todos os termos desta matriz são não negativos. Portanto, pode-se afirmar que a matriz Hessiana é positiva definida, confirmando a convexidade da função custo da eq. 6.9 (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

### 6.2.2.2 Convexidade da Função de Restrição

A prova da convexidade do problema (6.9) das restrição torna-se muito mais simples por se tratar de uma função afim. Neste caso, a derivada da restrição de potência, apresentada em (6.9), é dada por

$$\frac{\partial h}{\partial p_i} = 1, \quad (6.12)$$



enquanto sua derivada segunda,  $\forall i, j$ , é dada por

$$\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial p_j} = 0. \quad (6.13)$$

Com isso nota-se que, a matriz Hessiana de  $h$  é semi-positiva definida, logo a restrição do problema (6.9) também é convexa. De fato,  $h$  é uma função afim, ou seja, simultaneamente convexa e concava.

Uma vez que tanto a função custo quanto a restrição do problema da eq. (6.9) são convexas, conclui-se que tal problema de otimização é convexo. Logo, existe uma única solução ótima  $\mathbf{p}^*$  para a alocação de potência do problema apresentado na eq. (6.9)

### 6.2.3 Condições de KKT e a Solução Ótima para o Problema

Como o problema (6.9) é convexo, pode-se resolvê-lo escrevendo as condições de KKT de primeira ordem:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{p}^*) + \lambda \nabla h(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0} \\ h(\mathbf{p}^*) = 0 \end{cases}, \quad (6.14)$$

onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange associado à restrição de igualdade. Combinando as eqs. (6.14), (6.10) e (6.12), deriva-se um sistema não linear com  $K_A + 1$  equações e  $K_A + 1$  incógnitas:

$$\begin{cases} \lambda - c_1 \sqrt{\frac{c_2 k_i}{8\pi p_i^*}} \exp\left(-\frac{c_2 k_i}{2} p_i^*\right) = 0, & i = 1, 2, \dots, K_A \\ \sum_{i=1}^{K_A} p_i^* - P_T = 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

### 6.2.4 Solução Através da Função W de Lambert

A fim de simplificar o sistema (6.15), será feito o uso da função W de Lambert (CORLESS et al., 1996), definida como a inversa da função

$$g(z) = z \exp(z), \quad (6.16)$$

ou seja,

$$W(z) = g^{-1}(z \exp(z)) \quad (6.17)$$

Reescrevendo a primeira equação do sistema (6.15):

$$\frac{(c_1 c_2 k_i)^2}{8\pi\lambda^2} = (c_2 k_i p_i^*) \exp(c_2 k_i p_i^*), \quad (6.18)$$

a qual se encontra na forma da função W de Lambert. Logo, prova-se facilmente que

$$p_i^* = \frac{1}{c_2 k_i} W \left[ \frac{(c_1 c_2 k_i)^2}{8\pi\lambda^2} \right]. \quad (6.19)$$

Assim, o problema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} p_i^* = \frac{1}{c_2 k_i} W \left[ \frac{(c_2 k_i)^2}{8\pi\lambda^2} \right], & i = 1, 2, \dots, K_A \\ 0 = P_T - \sum_{i=1}^{K_A} \frac{1}{c_2 k_i} W \left[ \frac{(c_2 k_i)^2}{8\pi\lambda^2} \right] \end{cases}, \quad (6.20)$$

que por sua vez é um problema muito mais simples do que aquele apresentado na eq. (6.15). Para resolver o problema da eq. (6.20), é necessário encontrar o multiplicador de Lagrange através de uma busca em linha<sup>3</sup> na última equação deste sistema. Feito isso, encontra-se de forma trivial a distribuição ótima de potência.

Com o uso das condições de KKT de primeira ordem, foi possível evitar a solução do problema original através de métodos como o da barreira ou penalidade, que podem apresentar problemas de convergência além da necessidade de calibração de seus respectivos parâmetros. Além disso, o uso da função W de Lambert possibilitou simplificar o problema, convertendo um sistema de equações não lineares em uma busca em linha.

## 6.3 Alocação Ótima de Potência para Capacidade Máxima

Esta seção revisita o problema da maximização da capacidade com uma restrição de potência, cuja solução trata-se do algoritmo *water-filling* (KHALIGHI et al., 2001). Os mesmos passos seguidos ao longo do problema anterior são repetidos, ou seja, o problema é formulado, sua convexidade é provada e sua solução é detalhada.

<sup>3</sup>Método de Newton, método da secante, entre outros

### 6.3.1 Formulação do Problema

Apesar de ser escrito de forma imediata como um problema maximização, o problema de otimização da capacidade será formulado em forma de minimização para manter a padronização ao longo do trabalho. Portanto, é necessário inverter o sinal da capacidade total para obter o problema de minimização. Assim, o problema de maximização da capacidade limitada a uma potência de transmissão  $P_T$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(\mathbf{p}) &= - \sum_{i=1}^{K_A} \log_2(1 + k_i p_i) \\ \text{s.t. } h(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^{K_A} p_i - P_T \\ p_i &\geq 0. \end{aligned} \tag{6.21}$$

### 6.3.2 Convexidade do Problema

Na sequência, a convexidade do problema é testada através da matriz Hessiana.

#### 6.3.2.1 Convexidade da Função Custo

Procedendo com o cálculo da matriz Hessiana da função custo, chega-se a

$$[\nabla^2 f(\mathbf{p})]_{ij} = \begin{cases} \frac{k_i^2}{\log 2(1 + k_i p_i)^2}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \tag{6.22}$$

que é claramente positiva definida por ser uma matriz diagonal. Logo é possível afirmar que a função custo do problema (6.21) é convexa.

#### 6.3.2.2 Convexidade da Função de Restrição

Como as restrições dos problemas apresentados nas eqs. (6.9) e (6.21) são as mesmas, conclui-se que a restrição é convexa em ambos os problemas, como provado na seção 6.2.2.2.

### 6.3.3 Condições de KKT e a Solução Ótima para o Problema

Ao aplicar as condições de KKT, eq. (6.14), no problema formulado em (6.21), obtém-se um sistema com  $K + 1$  equações e incógnitas

$$\begin{cases} \lambda - \frac{k_i}{\log 2} \frac{1}{1 + k_i p_i^*} = 0, & i = 1, 2, \dots, K \\ \sum_{i=1}^K p_i^* - P_T = 0 \end{cases}, \quad (6.23)$$

o qual pode ser facilmente resolvido com

$$\begin{cases} p_i^* = \left[ \mu - \frac{1}{k_i} \right]^+, & i = 1, 2, \dots, K \\ \mu = \frac{1}{K_A} \left( P_T + \sum_{i=1}^{K_A} \frac{1}{k_i} \right) \end{cases}, \quad (6.24)$$

onde  $[\cdot]^+ = \max(\cdot, 0)$  e  $\mu = (\lambda \log 2)^{-1}$ . Nota-se que a solução admite  $K_A$  antenas ativas. Portanto, o número de antenas ativas  $K_A$  deve ser encontrado para resolver o problema adequadamente.

A solução (6.24) é conhecida como *water-filling*, onde o parâmetro  $\mu$  é o nível da água. Nesta solução, as transmissões, i.e., antenas, que não são capazes de atingir uma SNR mínima são desligadas, tendo sua potência redistribuída entre as antenas ativas remanescentes.

O Algoritmo 6.1 é uma modificação detalhada daquele apresentado em (HAMPTON, 2013). Neste algoritmo, tira-se vantagem do fato das potências dos canais  $\sigma_{ii}^2$  estarem ordenadas, o que evita o teste de todas as combinações de canais ativos. Desta forma, o algoritmo calcula inicialmente o nível da água para então obter as potências de cada uma das antenas. Caso a SNR esteja baixa, as últimas antenas transmissoras são desligadas. Além disso, caso seja necessário o desligamento de uma antena, o cálculo do nível da água e das novas potências devem ser repetidos até que todas as potências  $p_i^*$  estejam alocadas corretamente.

## 6.4 Resultados Numéricos

Nesta seção, serão comparadas as performances de um sistema operando mediante ao *eigen-beamforming* com diferentes distribuições de potência: a distribuição de BER mínima (MBD, *Minimum BER Distribution*), a distribuição *water-filling* (WFD *Water-Filling Power Distribution*) e a distribuição de potência

---

**Algoritmo 6.1** Estratégia *Water-filling* para sistemas MIMO operando com *eigen-beamforming*

---

```

1: function  $\mathbf{p}^* = \text{WF}(K, P_T, k_i)$ 
2:    $\mathbf{p}^* = \mathbf{0}_{K \times 1}$ 
3:    $\ell = 0$ 
4:   while 1 do
5:      $\mu = \frac{1}{K - \ell} \left( P_T + \sum_{i=1}^{K-\ell} \frac{1}{k_i} \right)$            % Nível da água com  $\ell$  antenas ativas
6:      $q = 1$ 
7:     for  $i = 1$  to  $K - \ell$  do                                     % Alocação de potência
8:        $p_i^* = \mu - \frac{1}{k_i}$ 
9:       if  $p_i^* < 0$  then                                         % A SNR da  $i$ -ésima antena é muito baixa?
10:         $q = 0$ 
11:         $p_i^* = 0$ 
12:       end if
13:     end for
14:     if  $q = 1$  then                                             % As potências foram alocadas corretamente?
15:       return  $\mathbf{p}^*$ 
16:     end if
17:      $\ell := \ell + 1$ 
18:   end while
19: end function

```

---

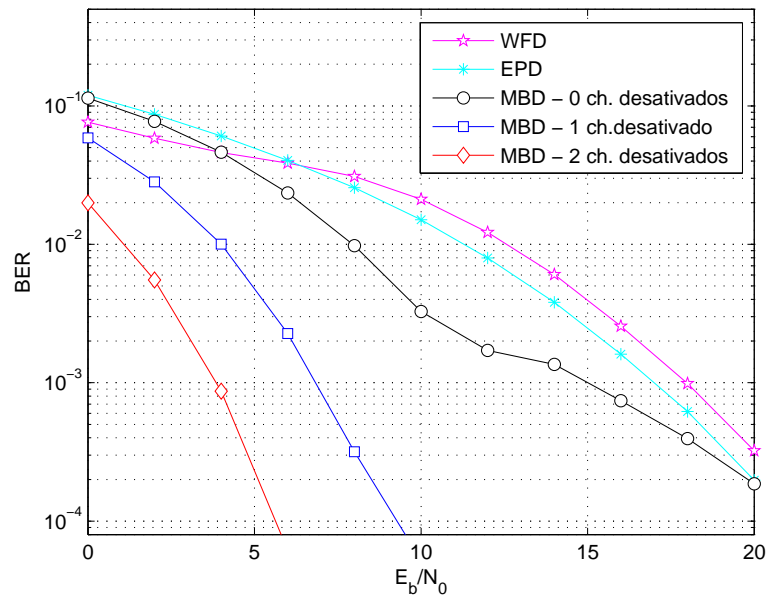
uniforme<sup>4</sup> (EPD, *Equal Power Distribution*). No caso da MBD, varia-se o número de antenas ativas para verificar o comportamento de tal distribuição. Vale lembrar que, por natureza, o *waterfilling* desativa antenas de acordo com o estado dos canais, ou seja, não há motivos para variar o número de antenas ativas de forma arbitrária.

O desempenho em termos de BER e capacidade total para um sistema com  $K = 6$  antenas de transmissão e  $N = 8$  antenas de recepção são apresentados nas Figuras 6.1 e 6.2. Previsivelmente, a solução *water-filling* atinge a maior capacidade total, a qual pode ser atingida pela EPD em altas SNRs. No entanto, em termos de BER, a WFD apresenta um desempenho inferior para altas SNRs já que ela aloca mais potências aos canais de maior SNR, aumentando a BER em canais de baixa SNR, o que deteriora a performance média do sistema. Um comportamento interessante apresenta-se no esquema WFD atingir ao uma baixa BER em baixas SNRs, o que vem do fato de tal distribuição desligar um ou mais canais em estado crítico. A respeito da MBD, ao desativar algumas antenas, a BER pode ser reduzida consideravelmente pela redistribuição de potências, mas a capacidade neste caso é reduzida.

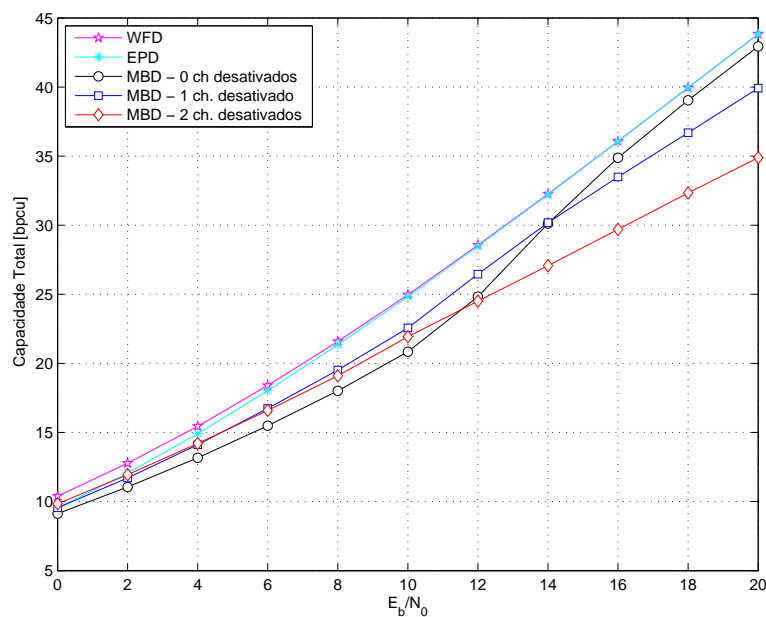
Como esperado, o esquema de alocação MBD e WFD para sistemas MIMO

---

<sup>4</sup> $\mathbf{p} = \mathbf{1}_K / K$



**Figura 6.1:** BER para um sistema com  $K = 6$  e  $N = 8$  e distribuições de potência do tipo MBD, WPD, EPD



**Figura 6.2:** Capacidade total do sistema com  $K = 6$  e  $N = 8$  e distribuições de potência do tipo MBD, WPD, EPD

funcionam de maneiras distintas. A WFD busca alocar mais potência nos canais mais fortes, desligando os canais mais fracos. Por outro lado, a MBD adota uma estratégia diferente, já que alocar menos potência a canais mais fracos reduziria consideravelmente a BER do sistema.

Através das considerações e observações anteriores, pode-se concluir que a WFD é recomendável em baixas SNRs, podendo atingir a maior capacidade e uma BER razoavelmente baixa. No entanto, caso a BER seja um parâmetro mais relevante, a MBD é uma boa escolha, pois pode-se desativar antenas de

**Tabela 6.1:** Valores singulares de uma matriz de canal descorrelacionada ( $6 \times 6$ ,  $\rho = 0$ ) e uma matriz de canal correlacionada ( $6 \times 6$ ,  $\rho = 0.9$ )

Canal	$\sigma_{11}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{33}$	$\sigma_{44}$	$\sigma_{55}$	$\sigma_{66}$	$\text{var}[\sigma_{ii}]$
Descorrelacionado	3,7322	2,8284	1,7691	1,2950	0,7399	0,1322	1,7874
Correlacionado	4,4579	2,3631	0,6557	0,0594	0,0049	0,0007	3,2823

transmissão até que a BER desejável seja atingida. De fato, ao desligar antenas de transmissão em um sistema MIMO, ganha-se diversidade espacial, o que pode melhorar o desempenho do sistema de forma expressiva.

### 6.4.1 Capacidade para as Distribuições WFD e MBD

Apesar da capacidade total atingida pela WFD ser sempre a mais elevada, a distribuição EPD apresenta valores comparáveis à solução ótima (Figura 6.2). Partindo desta observação, especula-se inicialmente que a WFD torna-se substituível pela EPD, já que esta apresenta uma complexidade menor e um desempenho semelhante ao atingido com a distribuição WFD. No entanto, tal fato ocorre devido ao uso de um canal descorrelacionado, que faz com que os ganhos de todos os canais apresentem valores com baixa variabilidade, fazendo com que as distribuições WFD e EPD sejam semelhantes. Caso a matriz de canal seja correlacionada, os ganhos dos canais podem apresentar uma considerável diferença.

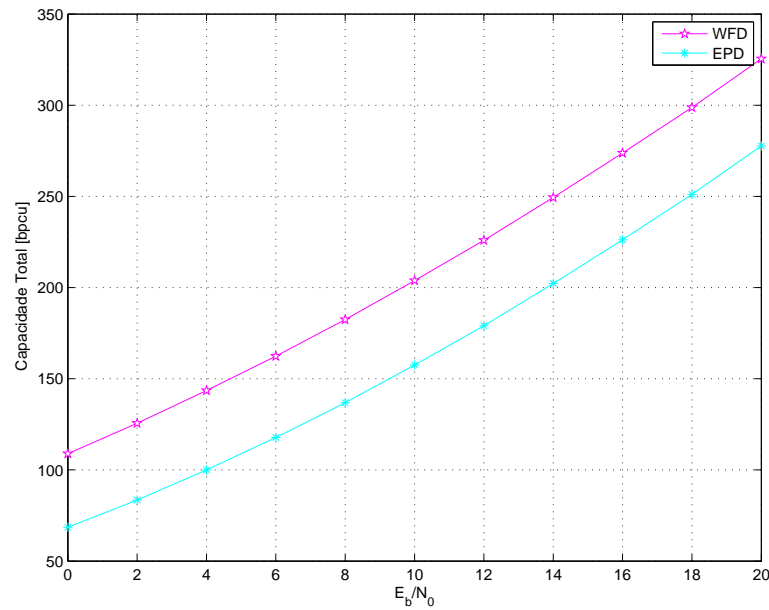
Como exemplo, considere a Tabela 6.1 que apresenta os valores singulares<sup>5</sup> de uma matriz de canal descorrelacionada e outra correlacionada.

Para complementar as observações feitas anteriormente, apresenta-se na Figura 6.3 a capacidade de um sistema MIMO  $100 \times 100$  operando com elevada correlação espacial ( $\rho_{tx} = \rho_{rx} = 0.9$ ). Como a correlação espacial é elevada, somente alguns canais apresentam ganhos razoavelmente altos, levando a WFD a desalocar potências nos canais que apresentam baixa SNR. Com isso, nota-se que o WFD é capaz de obter expressivos ganhos de capacidade em relação à distribuição EPD.

## 6.5 Conclusões

Neste capítulo, discutiu-se-se algumas possíveis estratégias para alocação de potência usadas para aprimorar o funcionamento de um sistema MIMO com *eigen-beamforming* de acordo com suas necessidades. Obviamente, a solução

<sup>5</sup>valores diagonais da matriz  $\Sigma$ , os quais denotam o ganho de cada canal ou modo



**Figura 6.3:** Capacidade total do sistema com  $K = 100$  e  $N = 100$  e distribuições de potência do tipo WPD e EPD

*water-filling* mostrou-se a melhor alternativa para maximizar a capacidade do sistema. Por outro lado, é possível atingir melhorias expressivas nas taxas de erro usando a alocação MBD. De fato, caso menores taxas de erro sejam necessárias, pode-se desativar a transmissão em algumas antenas, cujas condições de canal instantâneas sejam desfavoráveis, reduzindo-se consideravelmente a BER, ao preço de se reduzir a taxa de transmissão. Por fim, caso a complexidade computacional seja crucial, não permitindo o uso de soluções mais sofisticadas, deve-se optar pela distribuição uniforme, que possui um custo computacional praticamente nulo. Desta perspectiva, vale notar que a solução ideal dependerá dos requisitos impostos pelo sistema e usuários, o que requer uma alocação de potência apropriada dependendo da situação.



## 7 Sensoriamento Espectral Multi-Banda

No contexto de sistemas de comunicação sem fio contemporâneos, a escassez espectral tornou-se um dos principais e mais desafiadores problemas. Dadas suas limitações físicas, o problema da escassez espectral deve ser contornado usando tal recurso com eficiência e parcimônia. Deste contexto, emergem os rádios cognitivos, um tema igualmente polêmico e visionário. Um rádio cognitivo trata-se de um rádio capaz de se adaptar dinamicamente a fim de fazer um uso inteligente dos recursos disponíveis, especialmente espectro e energia/potência. Para isso, um rádio cognitivo deve promover uma interação com o ambiente em que está inserido de forma a maximizar seu desempenho (AKYILDIZ et al., 2008; MASONTA; MZYECE; NTLATLAPA, 2013), exigindo capacidades de aprendizagem, cognição, cooperação e autonomia na tomada de decisão.

Peça fundamental para o funcionamento de rádios cognitivos, o sensoriamento espectral possibilita a localização de bandas ociosas que podem ser alocadas a usuários não licenciados a essas. Desta forma, usuários não licenciados, ou usuários secundários (SUs, *secondary users*), podem aproveitar o espectro ocioso maximizando a eficiência do sistema, sem interferir no funcionamento de usuários licenciados, ou usuários primários (PUs, *primary users*) (HAYKIN, 2005). Apesar de tal política de uso espectral ser controversa, a ideia por trás dos rádios cognitivos ainda é bastante promissora e racional, dado que parte substancial do espectro permanece inutilizada na maioria do tempo (DIVAKARAN; MANIKANDAN; HARI, 2011).

Inicialmente, pesquisas em torno do sensoriamento espectral estiveram focadas no sensoriamento de uma única banda específica. Em relação a este tópico, vários sensores de banda única foram propostos, como o detector de energia, filtro casado e detector ciclo-estacionário (BHARGAVI; MURTHY, 2010). No entanto, a escassez espectral exige o uso de bandas não contíguas, exigindo um sensor de banda única para cada sub-banda a ser analisada. Por outro lado, sensores multi-banda são capazes de analisar várias sub-bandas, classificando-as como ociosas

ou ocupadas. Dentre essa classe de sensores, pode-se elencar técnicas que utilizam transformadas *wavelet*, compressão na taxa de amostragem e até mesmo a informação da angulação entre as antenas dos PUs e SUs (IBNKAHLA, 2014). Além disso, tanto sensores de banda única quanto os multi-banda podem operar de forma cooperativa, executando o sensoriamento conjuntamente, para em seguida compartilhar o espectro de forma ótima baseado na decisão de uma central de processamento.

Através do uso de transformadas *wavelet* de diferentes escalas, o método proposto em (ZENG; CHIA; WAH, 2011) detecta as transições espectrais do sinal recebido pelos SUs, possibilitando o sensoriamento espectral multi-banda. Outra abordagem a usar transformadas *wavelets* é explorada em (PROSANTA et al., 2015), a qual não necessita do conhecimento do número de PUs ou da subdivisão do espectro. Nesta estratégia uma média móvel exponencial é usada para decompor a PSD do sinal e extrair as transições espectrais.

Em (EGILMEZ; ORTEGA, 2015), o sensoriamento espectral multi-banda é obtido através técnicas de compressão da taxa, que requer o conhecimento da faixa de frequência ocupada pelos PUs. Como o nome sugere, tal técnica reduz a taxa de amostragem, possibilitando amostragens abaixo à taxa de Nyquist, que acaba por reduzir a complexidade do método. Outra alternativa é proposta em (QING et al., 2015) onde um sistema MIMO é combinado a um filtro de Wiener para sensoriar o espectro. Neste caso, o sensoriamento espectral é auxiliado por um estimador de disco de Gerschgorin, que traz o inconveniente de limitar o número de sub-bandas de acordo com o número de antenas receptoras.

Neste capítulo de Dissertação, propõe-se um método aprimorado para a detecção de transições espectrais multiplicando-se. Ao detectar as transições espectrais da banda sensoriada, é possível estimar a máscara espectral, caracterizando quais sub-bandas estão ocupadas pelos SUs. Em essência, o método será apresentado de forma intuitiva e compreensiva, detalhando cada etapa do sensoriamento espectral multi-banda. Após isso, uma análise analítica do comportamento do sensor proposto é feita considerando sinais OFDM. Além disso, resultados numéricos de simulação corroboram o comportamento do sensor OFDM, os quais serão comparados com a análise analítica.

## 7.1 A Ideia Básica

Como exemplo inicial e hipotético, considere o problema de sensoriamento espectral de um sinal  $x(t)$ , cuja PSD unilateral estimada é escrita como

$$\hat{P}_x(f) = A \Pi\left(\frac{f - f_c}{B}\right) \quad (7.1)$$

i.e., uma PSD com um formato de pulso retangular com amplitude  $A$  e banda  $B$  centrada em  $f_c$ .

Como o objetivo é encontrar a máscara espectral do sinal<sup>1</sup>, um possível ponto de partida resume-se em derivar a PSD do sinal. Observa-se que os picos da derivada da PSD representam transições abruptas do sinal, podendo ser usadas para caracterizar o espectro do sinal sensoriado. No entanto, caso o sinal seja corrompido pelo ruído de fundo, certamente ocorrerá o falso sensoriamento de transições, levando a estimativas errôneas da máscara espectral. Para contornar este problema, pode-se usar uma filtragem antes que o sinal seja derivado. Considere, para este exemplo, que um filtro Gaussiano cujo kernel

$$\phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{f^2}{2\sigma^2}\right). \quad (7.2)$$

Note-se que neste contexto faz-se necessário que a filtragem seja feito no domínio da frequência, convoluindo-se a PSD do sinal com a resposta impulsiva do filtro, ou seja, seu kernel. Assim, após a filtragem, verifica-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(f) &= \hat{P}_x(f) * \phi(f) \\ &= A \left[ \text{Q}\left(\frac{-f - B/2 - f_c}{\sigma}\right) - \text{Q}\left(\frac{-f + B/2 - f_c}{\sigma}\right) \right], \end{aligned} \quad (7.3)$$

onde  $\text{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ . Vale salientar que após a filtragem, as transições da PSD tornam-se mais suaves de acordo com o fator de escala  $\sigma$ . Altos valores de  $\sigma$  acarretam em transições bastante suaves, descaracterizando parcialmente a PSD, mas a supressão do ruído é maior. Por outro lado, baixos valores de  $\sigma$  pouco modificam a PSD do sinal, mas a capacidade de supressão do ruído é reduzida.

Para determinar a banda ocupada pelo sinal analisado, deriva-se a eq (7.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{W}'(f) &= \frac{d\mathcal{W}(f)}{df} \\ &= A \left\{ \exp\left[-\frac{(f + f_c + B/2)^2}{2\sigma^2}\right] - \exp\left[-\frac{(f + f_c - B/2)^2}{2\sigma^2}\right] \right\} \end{aligned} \quad (7.4)$$

<sup>1</sup>Função que define quais bandas estão ocupadas e quais estão ociosas.

Vale ressaltar que os extremos locais de  $\mathcal{W}'(f)$  encontram-se em torno das transições espectrais do sinal  $x(t)$ . Portanto, pode-se encontrar as raízes de  $\mathcal{W}''(f)$  para encontrar as transições espectrais do sinal analisado.

Como exemplo numérico para ilustrar a ideia básica do sensor espectral proposto, considere uma faixa do espectro contendo o sinal cuja PSD é definida pela eq. (7.1), com  $A = 1$ ,  $f_c = 2$  e  $BW = 2$ . Para a filtragem, considere um filtro Gaussiano com  $\sigma = 1$ . A Figura 7.1a apresenta a PSD do sinal corrompido pelo ruído e a resposta impulsiva do filtro. Feita a filtragem, as transições da PSD tornam-se mais suaves ainda preservando as características do sinal original, além do ruído ser praticamente eliminado, como mostra a Figura 7.1b. A partir deste ponto, deriva-se o sinal filtrado, gerando um sinal cujos picos coincidem com as transições do espectro 7.1.

Observe que, caso a filtragem fosse desconsiderada, a derivada da PSD corrompida pelo ruído apresentaria inúmeros extremos locais de valores consideráveis, dada a natureza estocástica do ruído. Com isso, não seria possível discernir as transições espectrais do ruído, gerando possivelmente uma série de falsas detecções.

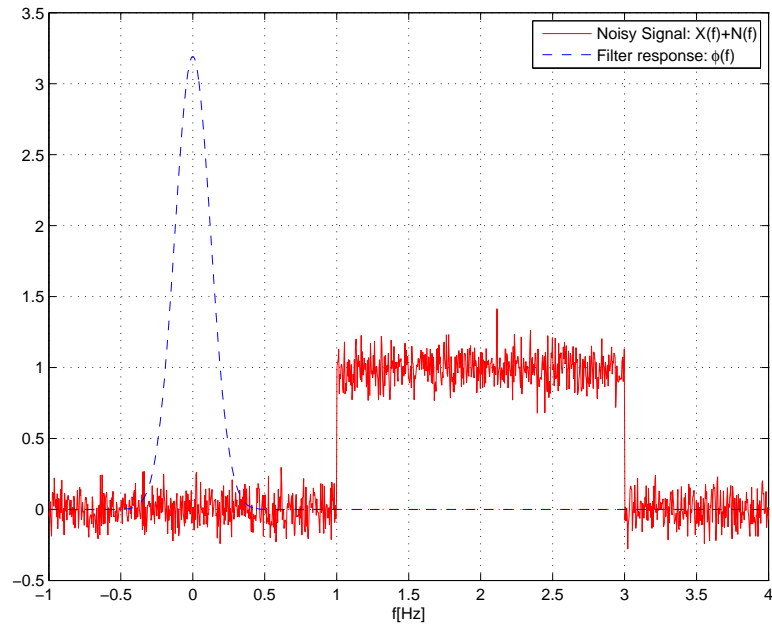
Melhorias podem ser obtidas repetindo o processo descrito anteriormente de forma paralela, usando-se filtros com diferentes fatores de escala, i.e.,  $\phi(f/s_i)$ , seguidos por uma etapa de diferenciação. O sinal gerado por todos os ramos paralelos podem ser então multiplicados, melhorando a supressão de falsas detecções de transições no espectro sensorado. Tal estratégia é esquematizada, sistematizada e analisada nas seções subsequentes deste capítulo.

## 7.2 Modelo de sistema

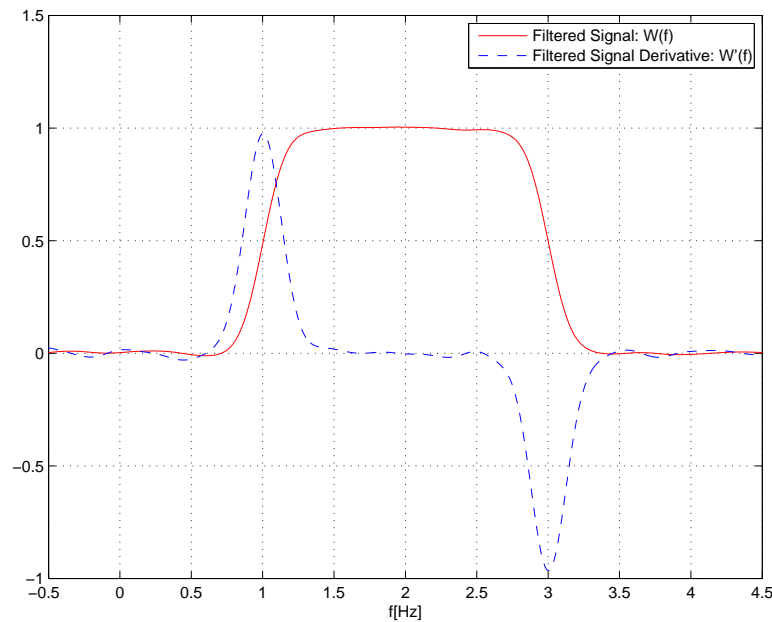
Neste capítulo, considera-se que um SU é responsável pelo sensoriamento espectral de uma faixa de frequência ocupada por  $N_p$  PUs, os quais ocupam sub-bandas diferentes.

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N_p} h_i s_i(t) + n(t), \quad (7.5)$$

onde  $h_i = \{0, 1\}$  define se o  $i$ -ésimo PU está ativo ou não;  $s_i(t)$  é o sinal do  $i$ -ésimo PU, o qual ocupa uma banda  $BW_i$ ; e  $n(t)$  é o ruído aditivo. A partir do sinal  $x(t)$ , localiza-se todos os PUs, possibilitando a alocação de SUs de forma a não interferir PUs, maximizando a eficiência espectral do sistema.



(a) PSD corrompida pelo ruído e resposta impulsiva do filtro.

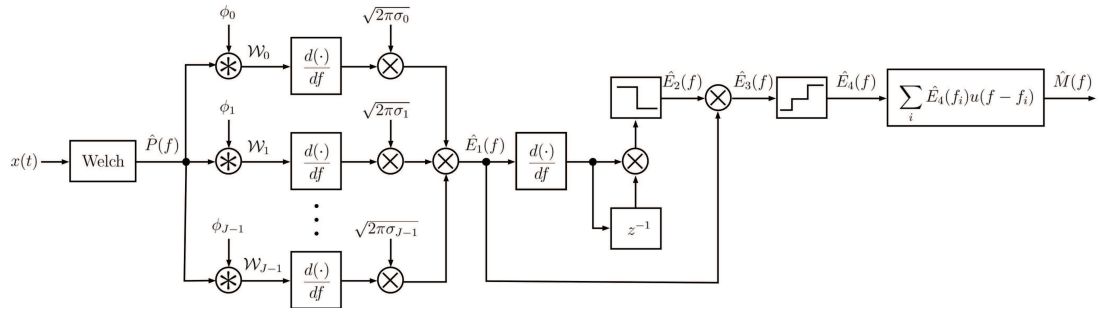


(b) Sinal filtrado e sua derivada.

Figura 7.1: Exemplo, estimativa da máscara espectral.

## 7.3 Método de sensoriamento Multibanda Proposto

A topologia proposta neste trabalho é apresentada no diagrama de blocos da Figura 7.2. Sumariamente, este método estima a PSD da banda sensoriada, por múltiplos filtros, estimando-se as transições do sinal para a geração da máscara espectral. A seguir, cada etapa deste método é descrita com maiores detalhes.



**Figura 7.2:** Diagrama de blocos do método proposto.

### 7.3.1 Estimação da PSD

Para a estimação da PSD, escolheu-se o método de Welch (WELCH, 1967; MOSES; RANDOLPH, 2004). Tal método é capaz de estimar a PSD buscando minimizar sua variância a fim de se aproximar da PSD ideal do sinal.

O método de Welch divide as amostras em  $K$  segmentos de comprimento  $L$ , considerando-se  $O$  amostras sobrepostas, i.e.,

$$x_j[n] = x[n + (j - 1)O], \quad (7.6)$$

sendo  $n = 0, 1, \dots, L - 1$  e  $j = 0, 2, \dots, K - 1$ . Após isso, o periodograma de cada segmento é calculado com

$$\mathcal{I}_x(f_k) = \frac{1}{N^2 U} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) w[n] \exp\left(-j2\pi n \frac{k}{N}\right) \right|^2 \quad (7.7)$$

onde  $w[n]$  é a função de janelamento, escalar  $U$  é definido como

$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n], \quad (7.8)$$

além das frequências assumirem os valores

$$f_k = f_s \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N/2. \quad (7.9)$$

Calculando-se a média dos  $K$  periodogramas, a PSD estimada pelo método de Welch é produzida, ou seja,

$$\hat{P}(f_k) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \mathcal{I}_{x_j}(f_k), \quad (7.10)$$

sendo  $f_s$  a taxa de amostragem. Como a PSD estimada pelo método de Welch é avaliada a partir de médias, ela possui um comportamento mais suave, aproximando-se da PSD ideal do sinal. Logo, tal método é adequado para detecção de transições espectrais, pois uma PSD mais suave pode evitar falsas detecções se o ruído agir

de forma desfavorável. Por outro lado, pode mascarar ou falsear a ocupação de intervalos espectrais mais estreitos.

### 7.3.2 Filtragem

Estimada, a PSD passa por  $J$  ramos responsáveis pela filtragem do sinal, representada no diagrama pelo operador convolução e pelo filtro com resposta impulsiva  $\phi_i(f)$ . Desta forma a PSD filtrada em cada ramo é definida por

$$\mathcal{W}_i = \hat{P}(f) * \phi_i(f). \quad (7.11)$$

Em particular, este trabalho adotou filtros Gaussianos para cada ramo, ou seja,

$$\phi_i(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{f^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad i = 0, 2, \dots, J-1. \quad (7.12)$$

Note que este banco de filtros resume-se a uma topologia para o cálculo de uma transformada Wavelet.

### 7.3.3 Detecção de Transições I

Após a filtragem, cada ramo possui um estágio derivativo, ou seja, neste ponto:

$$\mathcal{W}'_i(f) = \frac{d}{df} \left[ \phi_i(f) * \hat{P}(f) \right]. \quad (7.13)$$

Como explanado na Seção 7.1, as frequências em que os extremos locais do sinal  $\mathcal{W}'_i(f)$  ocorrem são fortes candidatos a transições espectrais. Neste caso, máximos locais caracterizam bordas de subida no espectro, enquanto mínimos locais representam bordas de descida. Além disso, valores baixos de  $\sigma_i$ , produzem picos acentuados em  $\mathcal{W}'_i(f)$ , facilitando a caracterização das transições do espectro sensoriado. No entanto, caso  $\sigma_i$  seja baixo, a supressão do ruído é menor, possivelmente aumentando a probabilidade de falso alarme e portanto prejudicando o sensoriamento. Por outro lado, valores altos de  $\sigma_i$  permitem uma maior supressão do ruído, apesar de dificultar a caracterização das transições espectrais (ZHANG; BAO, 2002). Ao multiplicar todos os sinais processados em cada ramo, isto é,

$$\hat{E}_1(f) = \prod_{i=0}^{J-1} \sqrt{2\pi\sigma_i^2} \mathcal{W}'_i(f), \quad (7.14)$$

pode-se melhorar o sensoriamento espectral. Note que neste caso, a regra multiplicativa rejeita transições espectrais não presentes em todos os ramos, caracterizando-as como detecções espúrias, aumentando a robustez do método. Como os mínimos

locais de  $\mathcal{W}'_i(f)$  são negativos, o número de ramos  $J$  deve ser ímpar, pois caso contrário as bordas de descida do espectro não poderiam ser caracterizadas, sendo impossível identificar a frequência final do segmento de espectro ocupado..

### 7.3.4 Detecção de Transições II

A fim de localizar as transições espectrais com acurácia, o sinal  $\hat{E}_1(f)$  é derivado e suas raízes são encontradas. Logo, tal sinal pode ser escrito por

$$\hat{E}_2(f) = \begin{cases} \delta(f - f_i), & \hat{E}'_1(f)\hat{E}'_1(f - f_s/M) < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7.15)$$

Note que, a descrição anterior para encontrar as raízes de  $\hat{E}_1(f)$  é baseada no método da bisseção. Especificamente, duas amostras adjacentes de  $\hat{E}_1(f)$  são multiplicadas; se o resultado for negativo, o ponto intermediário é raiz; caso contrário, não existem raízes entre tais amostras.

Mesmo localizando as possíveis transições espectrais, deve-se considerar a probabilidade de tais frequências serem realmente transições. Uma função capaz de desempenhar tal função é

$$\begin{aligned} \hat{E}_3(f) &= \hat{E}_1(f)\hat{E}_2(f) \\ &= \hat{E}_1(f_i) \sum_i \delta(f - f_i), \end{aligned} \quad (7.16)$$

onde  $f_i$  são as possíveis localizações das transições espectrais.

### 7.3.5 Classificação das Transições

Como o sinal usado no sensoriamento é corrompido pelo ruído, deve-se rejeitar ao máximo detecções de transições espúrias. Assim, todos os candidatos a transições espectrais devem passar por um decisor abruto (*hard decisor*) considerando um limiar  $\theta$ . Por conveniência, as transições espectrais neste ponto serão representadas por impulsos unitários

$$\hat{E}_4(f_i) = \begin{cases} \delta(f - f_i), & \hat{E}_3(f_i) > \theta \\ -\delta(f - f_i), & \hat{E}_3(f_i) < -\theta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (7.17)$$

onde impulsos positivos indicam bordas de subida no espectro, enquanto impulsos negativos representam bordas de descida.



### 7.3.6 Correção de Erros

Mesmo após o decisor abrupto, transições ainda podem ser detectadas de forma incorreta. No entanto, pode-se tomar algumas medidas em determinados casos. Por exemplo, considerando que a máscara espectral possui dois níveis, duas ou mais transições da mesma espécie não deveriam ocorrer. Assim, caso um conjunto consecutivo de bordas de subida seja detectado, aquelas à esquerda podem ser descartadas. Caso a ocorrência seja de bordas de descida consecutivas, aquelas à direita podem ser eliminadas.

Além disso, caso o espectro dos PU esteja totalmente contido na banda sensoriada, é esperada a ocorrência de um número par de transições ao longo do espectro. A partir disso, é possível corrigir detecções incorretas, melhorando a performance do sensor espectral.

### 7.3.7 Geração da Máscara Espectral

Por fim, é gerada uma máscara espectral com dois níveis, na qual níveis altos representam bandas ocupadas, enquanto níveis baixos representam bandas ociosas. Já que as transições espectrais em  $\hat{E}_4(f_i)$  foram representadas por impulsos unitários, a máscara pode ser matematicamente escrita por

$$\begin{aligned}\hat{M}(f) &= \int_0^{\infty} \hat{E}_4(f_i) df \\ &= \sum_i \hat{E}_4(f_i) u(f - f_i).\end{aligned}\tag{7.18}$$

## 7.4 Sensoriamento de Sinais OFDM

Com o método de sensoriamento espectral definido, passa-se a analisar a detecção de PU o qual emprega técnica OFDM em suas transmissões. Como o OFDM é uma técnica comum e bastante difundida na atualidade, sua escolha é justificável. Em especial, será considerado somente  $N_p = 1$  PU transmitindo sinais OFDM. No entanto, a análise se aplica e pode ser estendida a mais usuários, já que convencionou-se que o espectro de PUs diferentes não se sobrepõe. Além disso, desconsidera-se o efeito do ruído, por tratar-se de uma análise inicial.

Nesta análise, considere ainda um sinal com  $N_{sc}$  subportadoras, cada uma ocupando uma banda de  $B_{sc}$ , utilizando uma formatação de pulso retangular e uma amplitude  $A$ . Neste caso, a PSD do sinal recebido pelo sensor espectral seria

dada por (CHO JAEKON KIM, 2013)

$$P_x(f) = A \sum_{k=0}^{N_{sc}-1} \text{sinc}^2 \left( \frac{f - f_k}{B_{sc}/2} \right), \quad (7.19)$$

onde a posição de cada subportadora é dada por

$$f_k = \frac{B_{sc}}{2} \left( k - \frac{N_{sc} - 1}{2} \right), \quad (7.20)$$

o que caracteriza uma sobreposição espectral de 50% entre subportadoras adjacentes.

Embora a eq. (7.19) tenha um caráter médio, no qual foram analisados infinitos símbolos OFDM, na prática, a PSD é estimada observando poucos símbolos OFDM. Logo, na prática a PSD estimada possui flutuações em torno da PSD descrita na eq. (7.19).

Como era de se esperar, a PSD do sinal OFDM apresentada na eq. (7.19) é relativamente simples, pois o sinal é composto por soma de senoides janeladas no domínio do tempo. No entanto, ao ser filtrada, a expressão para a PSD do sinal torna-se mais complexa, dificultando a análise do sensor. A fim de contornar tal problema, considere a aproximação da PSD de cada subportadora<sup>2</sup> por uma função Gaussiana, levando à seguinte aproximação

$$P_x(f) \approx A \sum_{k=0}^{N_{sc}-1} \exp \left[ -\frac{(f - f_k)^2}{2\beta^2} \right]. \quad (7.21)$$

Esta aproximação pode ser considerada razoável, visto que os lóbulos secundários da função  $\text{sinc}^2(\cdot)$  são pequenos se comparados ao lóbulo principal. Vale notar que tal aproximação torna-se mais fiel à medida que o número de subportadoras aumenta.

### 7.4.1 Filtragem

Dada a PSD aproximada da eq. (7.21), a filtragem gera, em cada ramo, os sinais

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i(f) &= \phi_i(f) * P_x(f) \\ &= A \sum_{k=0}^{N_{sc}-1} \sqrt{\frac{\beta^2}{\beta^2 + \sigma_i^2}} \exp \left[ -\frac{(f - f_k)^2}{2(\beta^2 + \sigma_i^2)} \right] \end{aligned} \quad (7.22)$$

---

<sup>2</sup>função do tipo  $\text{sinc}^2(\cdot)$

### 7.4.2 Detecção de Transições I

Feita a filtragem, cada ramo diferencia o sinal  $\mathcal{W}_i(f)$ , como descrito na eq. (7.12). Logo, obtém-se o sinal

$$\mathcal{W}'_i(f) = -A \sum_{k=0}^{N_{sc}-1} \sqrt{\frac{\beta^2}{(\beta^2 + \sigma_i^2)^3}} \exp \left[ -\frac{(f - f_k)^2}{2(\beta^2 + \sigma_i^2)} \right] (f - f_k), \quad (7.23)$$

que por sua vez, pode ser aproximado por

$$\mathcal{W}'_i(f) \approx \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(f + N_{sc}B_{sc}/4)^2}{2\sigma_i^2} \right] - \exp \left[ -\frac{(f - N_{sc}B_{sc}/4)^2}{2\sigma_i^2} \right] \right\}. \quad (7.24)$$

Segundo a eq. (7.14), deve-se proceder com uma multiplicação ponderada de todos os sinais  $\mathcal{W}'_i(f)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} E_1(f) &= \prod_{i=0}^{J-1} \sqrt{2\pi\sigma_i^2} \mathcal{W}'_i(f) \\ &= A^J \left\{ \exp \left[ -\frac{(f + N_{sc}B_{sc}/4)^2}{2\sigma_i^2} \right] - \exp \left[ -\frac{(f - N_{sc}B_{sc}/4)^2}{2\sigma_i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Note que a eq. (7.25) revela duas propriedades importantes na detecção de sinais OFDM:

1. o sinal  $E_1(f)$ , cujos picos ocorrem nas transições espectrais, possui extremos com valores  $\pm A^J$ . Logo, o limiar deve ser restrito a valores em torno da faixa  $0 \leq \theta \leq A^J$ ;
2. o valor  $\overline{\sigma_i^2} = 1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2 + \dots + 1/\sigma_J^2$  consiste na média harmônica de todos os fatores de escala dos filtros Gaussianos. Logo, caso os valores  $\sigma_i^2$  possuam ordens muito distintas, observa-se que  $\overline{\sigma_i^2} \rightarrow \min \{\sigma_i^2\}$ .

### 7.4.3 Detecção de Transições II

De acordo com as eqs. (7.15) e (7.25), é fácil notar que

$$E_2(f) = \delta(f + N_{sc}B_{sc}/4) + \delta(f - N_{sc}B_{sc}/4). \quad (7.26)$$

Logo, as eqs. (7.16) e (7.26), levam à

$$\begin{aligned} E_3(f) &= E_1(f)E_2(f) \\ &= A^J \delta(f + N_{sc}B_{sc}/4) - A^J \delta(f - N_{sc}B_{sc}/4). \end{aligned} \quad (7.27)$$

### 7.4.4 Classificação das Transições

Após o sinal da eq. (7.27) ser comparado com um limiar, tem-se que

$$E_4(f) = \delta(f + N_{sc}B_{sc}/4) - \delta(f - N_{sc}B_{sc}/4). \quad (7.28)$$

### 7.4.5 Geração da Máscara Espectral

Finalmente, a máscara espectral é gerada integrando a eq. (7.28)

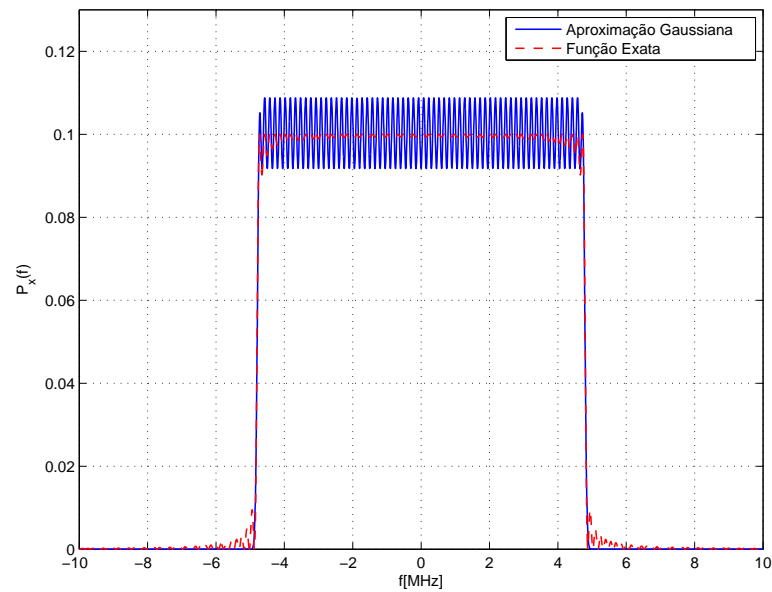
$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_4(f) df \\ &= \Pi\left(\frac{f}{B_{sc}N_{sc}/2}\right), \end{aligned} \quad (7.29)$$

gerando a função janela de largura espectral.

### 7.4.6 Exemplo Numérico

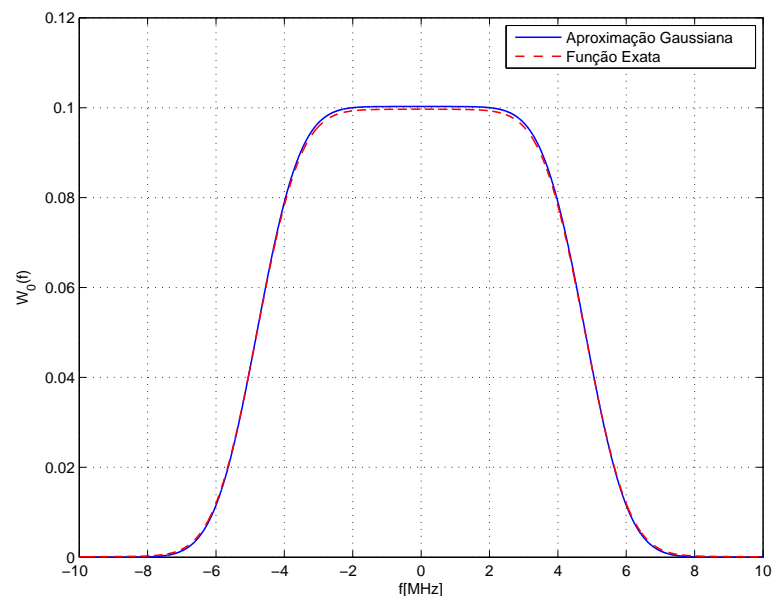
Com a finalidade de demonstrar a validade da aproximação adotada na eq. (7.21), os sinais  $P_x(f)$ ,  $\mathcal{W}_0(f)$ ,  $\mathcal{W}'_0(f)$  e  $E_1(f)$  serão comparados considerando a aproximação da eq. (7.21) e a função exata da eq. (7.19). Para este exemplo, considerou-se  $N_{sc} = 64$  subportadoras,  $A = 1$  e  $B_{sc} = 0.3$  MHz.

Na Figura 7.3, nota-se uma relativa concordância entre as PSDs aproximada e exata. No entanto, nota-se que a variabilidade da PSD na banda de passagem é muito maior para a PSD aproximada. Além disso, como a função Gaussiana só possui um lóbulo, a PSD aproximada não possui lóbulos secundários fora da banda de passagem.



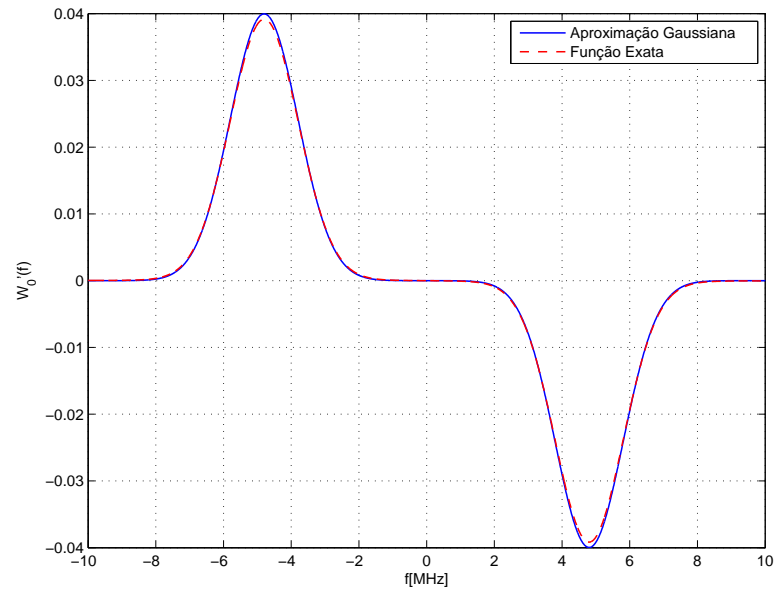
**Figura 7.3:** PSD exata e aproximada do sinal OFDM.

Apesar da PSD aproximada não ser a mais fiel possível, a filtragem do sinal minimiza a diferença entre a versão exata e a aproximada. Observa-se que, na Figura 7.4, a PSD filtrada é praticamente exata para o caso aproximado e o exato. Isso deve-se ao fato do filtro gaussiano reduzir a variabilidade do sinal, aproximando a versão aproximada da exata.



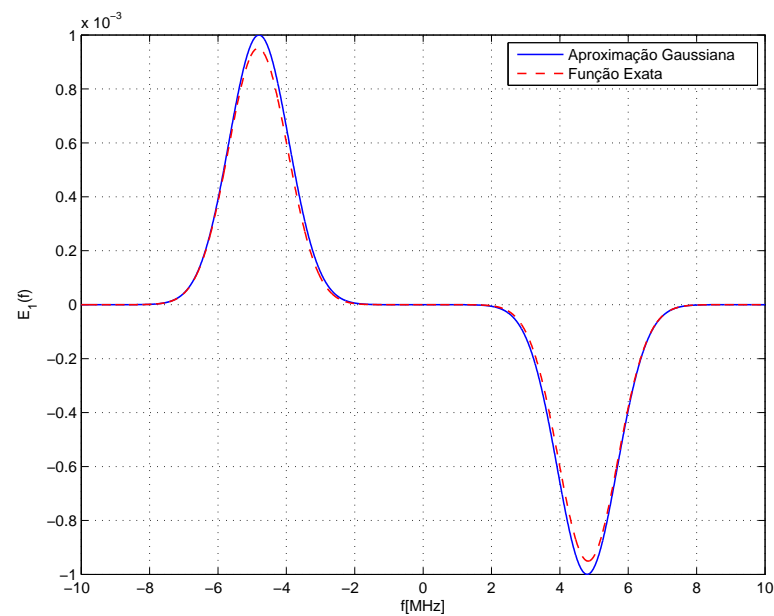
**Figura 7.4:** PSD filtrada exata e aproximada da PSD o sinal OFDM.

Ao diferenciar os sinais apresentados na Figura 7.4, nota-se uma grande semelhança entre as versões aproximada e exata, como é ilustrada na Figura 7.5.



**Figura 7.5:** Sinal  $W_0'(f)$  considerando a PSD aproximada e exata do sinal OFDM.

Por fim a Figura 7.6 mostra que após a multiplicação dos sinais de cada ramo, como descrita em (7.25), a aproximação ainda permanece razoável. Logo, conclui-se, numericamente, que a validade da aproximação adotada e das afirmações feitas anteriormente.



**Figura 7.6:** Sinal  $E_1(f)$  considerando a PSD aproximada e exata do sinal OFDM.

## 7.5 Resultados Numéricos

Nesta seção, resultados numéricos são apresentados a fim de oferecer um melhor entendimento da operação do método de sensoriamento espectral proposto. Para isso será feito o sensoriamento de sinais OFDM com  $N_{sc} = 1024$  subportadoras, sobreposição espectral de 50%, símbolos 4-QAM, banda total de 40MHz e  $SNR = -18$  dB.<sup>3</sup> Já o sensor opera com os parâmetros listados na Tabela 7.1.

**Tabela 7.1:** Parâmetros para o sensoriamento espectral.

Parâmetro	Valor
Taxa de Amostragem ( $f_s$ )	$f_s = 1$ GHz
# de segmentos para o método de Welch ( $K$ )	$K = 7$
Comprimento dos segmentos ( $L$ )	$L = 2048$
# de amostras sobrepostas ( $O$ )	1024
$J$	3
Limiar ( $\theta$ )	$A^J/4 = 6,75 \cdot 10^{-9}$

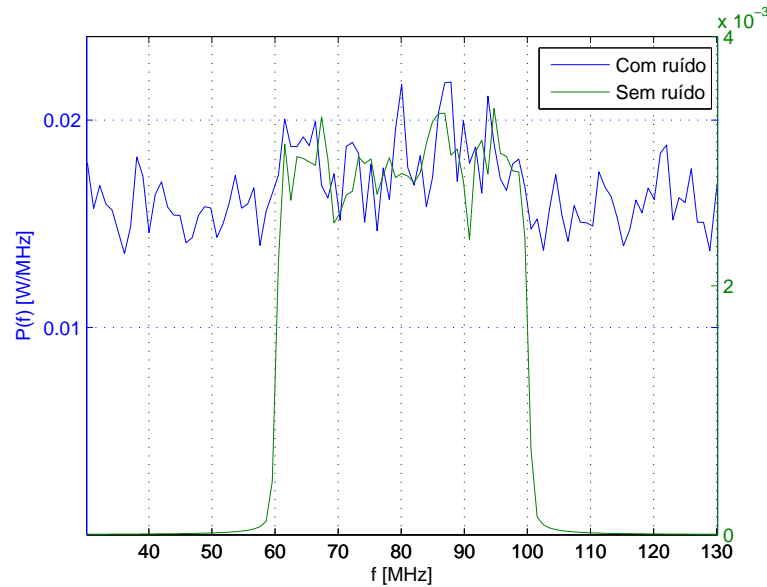
Em especial, nota-se que o valor do limiar  $\theta$  deve-se ser inferior ao valor  $A^J$ .

### 7.5.1 Sensoriamento para $N_p = 1$

Primeiramente, considera-se  $N_u = 1$  para uma melhor exposição da operação do sensoriamento espectral.

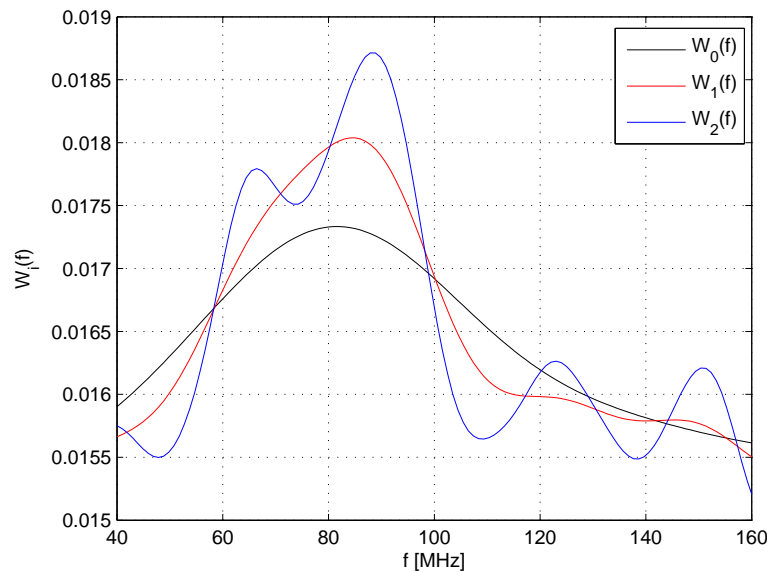
A Figura 7.7 apresenta a PSD estimada, contendo o conteúdo espectral tanto do sinal quanto do ruído. Como a PSD estimada é obtida a partir de um número finito de observações, a PSD do ruído não é plana, variando em torno da constante  $N_0$ . Logo, tais variações podem misturar-se às variações da PSD estimada do sinal, dificultando o sensoriamento espectral.

<sup>3</sup>Considere neste caso,  $SNR_i = \mathbb{E} [|s_i(t)|^2] / \mathbb{E} [|n(t)|^2]$



**Figura 7.7:** PSD estimada do sinal recebido pelo sensor espectral.

Após obter-se a PSD estimada, ela passa por múltiplos filtros paralelos, gerando os sinais ilustrados na Figura 7.8. Observa-se nesta figura que, quanto maior o valor de  $\sigma_i$ , maior será o espalhamento espectral do sinal ao passar pelo filtro.

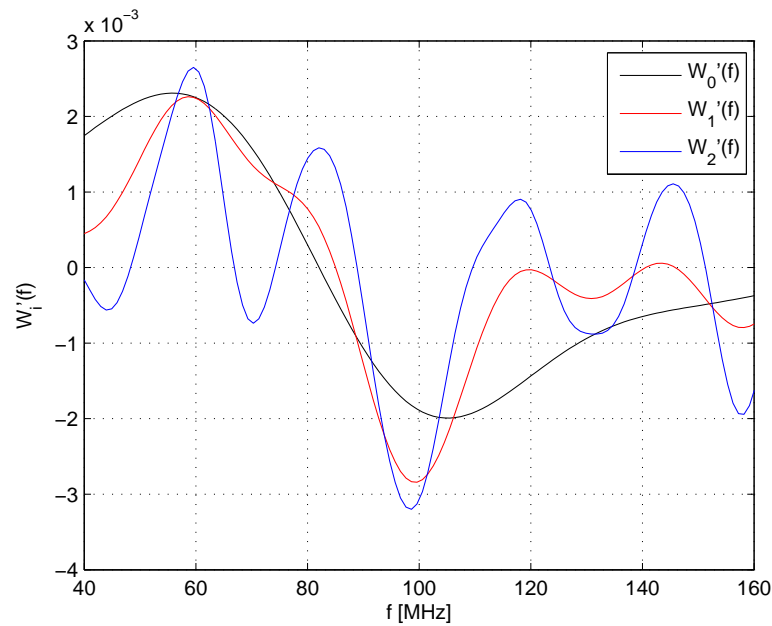


**Figura 7.8:** PSD estimada e filtrada pelos  $J = 3$  ramos, i.e.,  $\mathcal{W}_i(f)$ .

Derivando os sinais da Figura 7.8, pode-se ter uma ideia de onde ocorrem as transições espectrais. Como apenas um PU está ativo, existem duas transições ao longo do espectro sensorado: uma borda de subida e uma de descida. Além disso, nota-se que para valores menores de  $\sigma_i$ , vários picos espúrios passam a ocorrer. Como comentado anteriormente, a medida que  $\sigma_i$  diminui, a capacidade de suprimir ruído também é suprimida, o que causa vários picos espúrios no sinal  $\mathcal{W}_i$ . Por outro lado, altos valores de  $\sigma_i$  não geram picos excessivamente

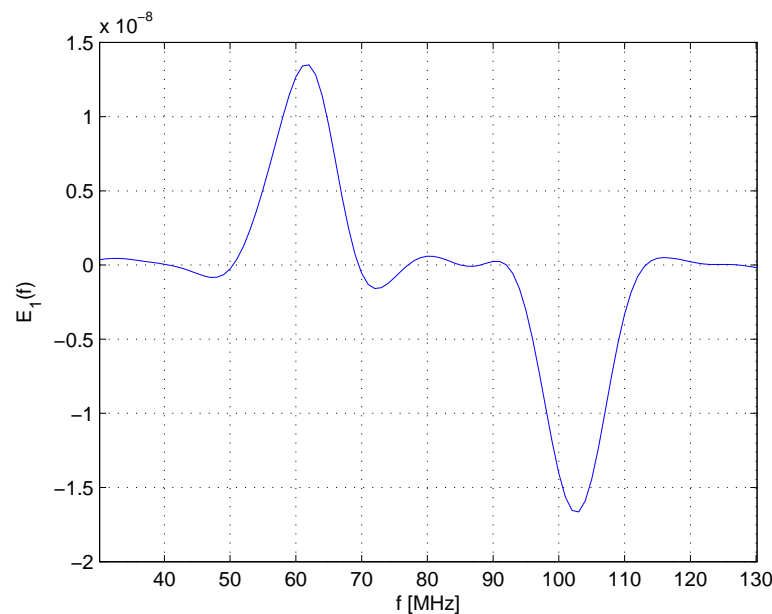


acentuados, como é o caso de  $\mathcal{W}_0(f)$ .



**Figura 7.9:** Derivada das PSDs filtradas  $\mathcal{W}_i'(f)$ .

Seguindo a regra da multiplicação, o produto dos sinais apresentados em (7.9) é ilustrado na Figura 7.10. Nota-se que a multiplicação dos sinais  $\mathcal{W}_i'(f)$ , atenua os picos que não coincidem com transições espectrais.



**Figura 7.10:** Sinal  $\hat{E}_1(f)$ , onde picos representam transições espectrais.

A derivada do sinal ilustrado na Figura 7.10 é apresentada na 7.11. Tal procedimento é realizado com o intuito de encontrar os extremos locais do sinal  $\hat{E}_1(f)$ .

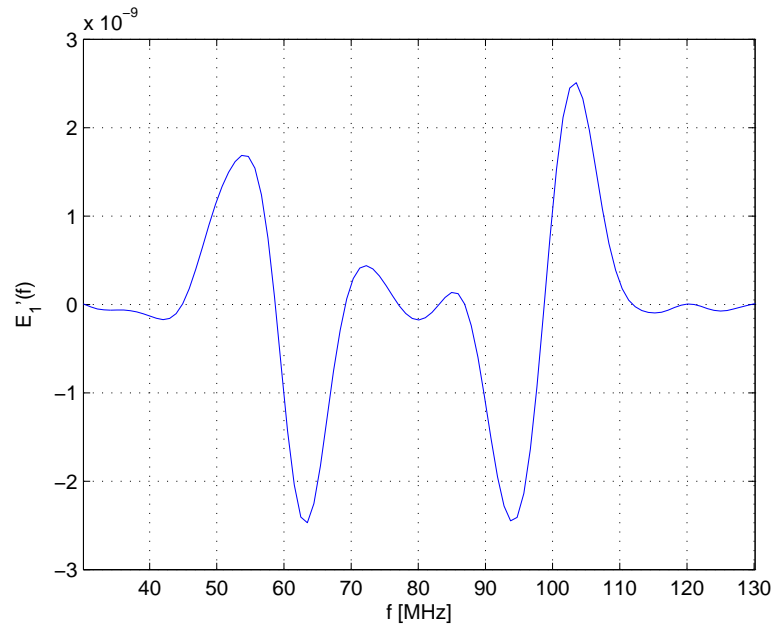


Figura 7.11: Derivada do sinal  $\hat{E}_1(f)$ .

Já a Figura 7.12 apresenta as raízes do sinal  $\hat{E}_1(f)$ , i.e, os possíveis candidatos a transições espectrais.

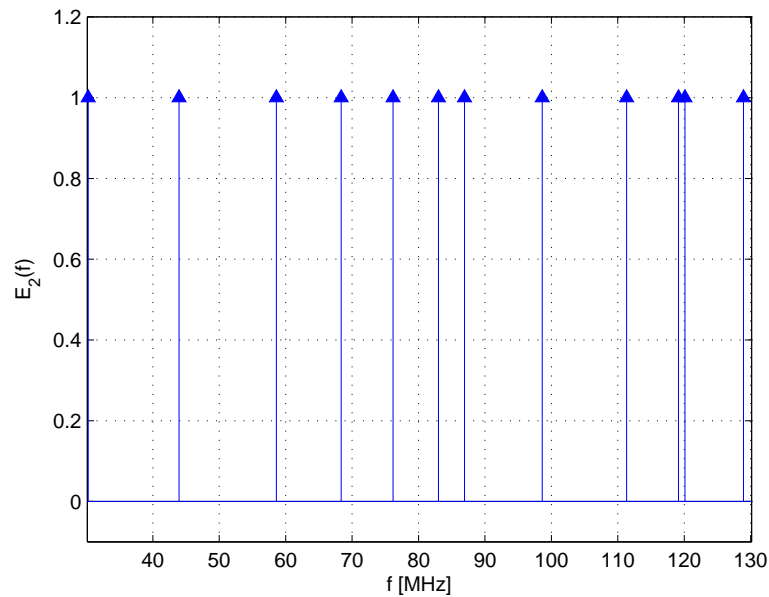
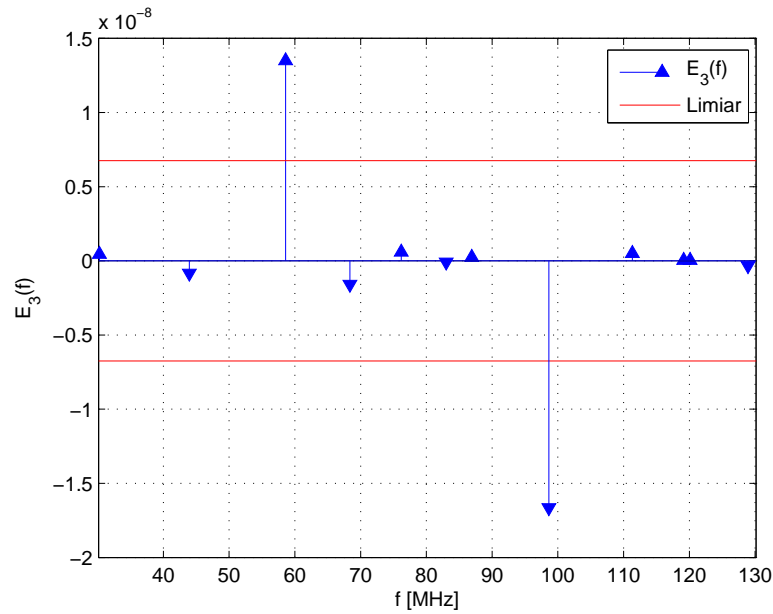


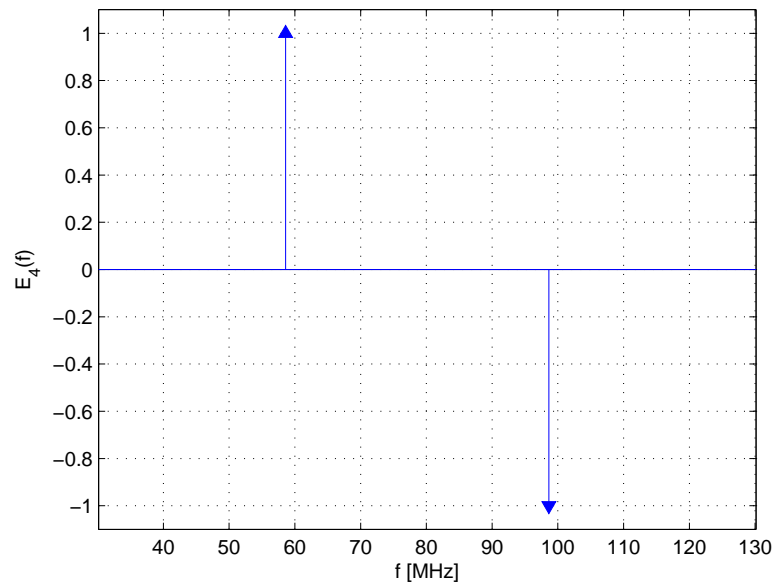
Figura 7.12: Sinal  $\hat{E}_2(f)$ , i.e, raízes de  $\hat{E}_1'(f)$ .

A fim de ponderar a probabilidade dos candidatos a transições espectrais apresentados na Figura 7.12, calcula-se  $\hat{E}_3(f)$ , como é apresentado na Figura 7.13. Com isso, as frequências em que ocorrem impulsos mais intensos, são fortes candidatos a transições espectrais.



**Figura 7.13:** Sinal  $\hat{E}_3(f) = \hat{E}_1(f) \cdot \hat{E}_2(f)$ .

Passando o sinal da Figura 7.13 pelo decisor abrupto, o sensor finalmente classifica as transições espectrais, como mostra a Figura 7.14. Como esperado, ocorreram somente duas transições espectrais, dado que o espectro sensoreado acomoda somente um PU.



**Figura 7.14:** Sinal  $\hat{E}_4(f)$ , gerado após o decisor abrupto, como descrito na eq. (7.17).

Por fim a Figura 7.15 apresenta a máscara espectral gerada a partir da localização das transições espectrais, além da PSD do sinal OFDM na ausência do ruído. Desta forma, conclui-se que o método é razoavelmente robusto, operando em baixas SNRs, neste casos, da ordem de  $-20$  dB. É necessário esclarecer que, ao adotar um número razoavelmente grande de subportadora (1024), a PSD do

sinal torna-se menos variável ao longo de sua banda de passagem, facilitando a detecção das transições no espectro.

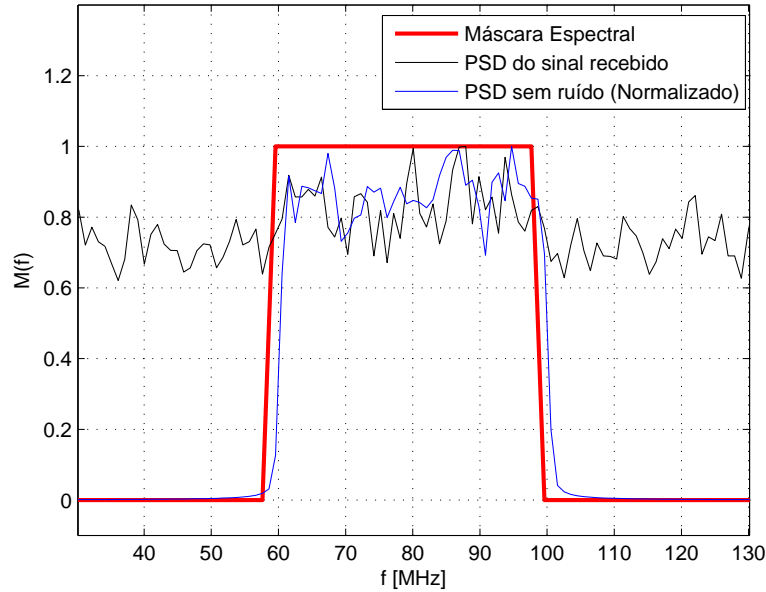


Figura 7.15: Máscara espectral e PSD do sinal sem ruído.

### 7.5.2 Sensoriamento para $N_p = 4$

A fim de validar o funcionamento robusto e relativamente preciso do sensor proposto, a Figura 7.16 apresenta a PSD estimada do sinal recebido considerando-se 4 usuários primários, a PSD do sinal sem ruído e a máscara espectral gerada pelo sensor proposto.

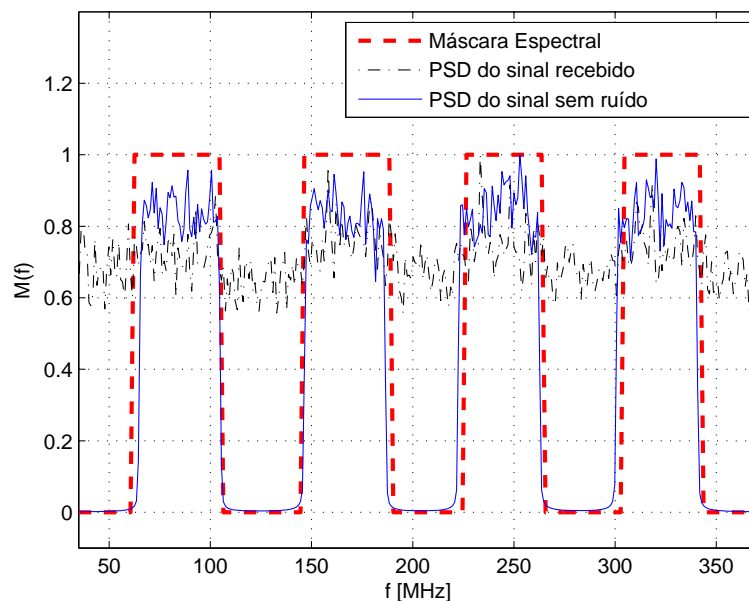


Figura 7.16: Máscara espectral estimada para um sistema OFDM com  $N_u = 4$  PUs.

## 7.6 Conclusões

Ao longo desta capítulo, foi proposto um método de sensoriamento espectral baseado na análise de transições abruptas do espectro, baseado numa topologia de banco de filtros. Neste estudo, uma detalhada descrição do método foi apresentada, exemplificando cada passo do sensor espectral considerando sinais OFDM, praticamente um padrão em comunicações modernas. Sendo robusto e apresentado desempenhos promissores para cenários de sensoriamento espectral multi-banda, o método proposto torna-se uma opção atrativa para aplicações em rádios cognitivos, dada sua robustez e capacidade de sensoriamento multi-banda.

## 8 Conclusões

Através dos estudos realizados ao longo do programa de pós-graduação e documentados ao longo deste texto, foi possível realizar uma investigação detalhada em torno de temas de interesse a sistemas de comunicação modernos, particularmente, rádios cognitivos e sistemas MIMO. Desta forma, este capítulo fechará o trabalho oferecendo conclusões finais, além de elencar as disseminações realizadas ao longo do programa. Adicionalmente, será feita uma breve menção dos possíveis temas de pesquisa a serem abordados futuramente.

No Capítulo 2, uma vasta seleção de detectores MIMO foram apresentados e analisados de forma extensiva. Em especial, notou-se que detectores do tipo MMSE-OSIC deixaram de operar corretamente em sistemas equipados com um número razoavelmente grande de antenas fortemente correlação espacial. Em tais circunstâncias, observou-se que detectores da classe MMSE-OSIC deixaram de operar corretamente, fazendo com que a BER aumentasse em altas SNRs, comportamento contrário ao esperado.

Dada a problemática dos detectores OSIC e sua dependência em relação a decomposição QR, procedeu-se um estudo estatístico de tal decomposição matricial no Capítulo 3. Neste estudo, foi derivado um limitante capaz de quantificar a estabilidade numérica da decomposição QR, mostrando que ela pode ser ineficiente em grandes arranjos matriciais, especialmente em arranjos com um baixo condicionamento numérico, que é o caso encontrado nos detectores MMSE-OSIC.

Baseado nos capítulos anteriores, o Capítulo 4 propôs alterações que possibilitaram os detectores do tipo OSIC a operarem sob altas correlações espaciais em grandes arranjos. As alterações propostas mostraram-se eficientes, possibilitando o correto funcionamento dos detectores do tipo MMSE-OSIC em grandes arranjos, demandando uma baixa complexidade computacional adicional.

Já no Capítulo 5, procedeu-se com um estudo da qualidade de estimativas de canal em sistemas MIMO operando sob assincronismo no treinamento de canal. Este estudo mostrou os efeitos nocivos do assincronismo, o qual leva a estimati-

vas de baixa acurácia e correlacionadas. Neste cenários, mostrou-se também que sequências do tipo Gold são a melhor alternativa para pilotos, provendo estimativas mais precisas e um melhor desempenho.

A alocação de potência em sistemas utilizando *eigen-beamforming* foi tema do Capítulo 6, onde explorou-se as distribuições uniforme, de mínima BER e *water-filling*. Os problemas de otimização de cada distribuição foram resolvidos de forma detalhada utilizando as condições de KKT. Foi possível observar que a MBD atingiu a menor taxa de erro e a WFD proporcionou a maior capacidade, validando a solução encontrada nos problemas de otimização. Em particular, observou-se que as soluções WFD e EPD proporcionam capacidades semelhantes em sistemas operando sob correlação espacial nula. No entanto, o quadro muda em sistemas com antenas correlacionadas, pois muitos dos canais tornam-se inutilizáveis do ponto de vista da SNR, permitindo o *water-filling* desativar mais antenas para atingir uma capacidade consideravelmente maior do que a provida pela EPD.

Apesar do tema principal desta dissertação tratar majoritariamente de sistemas MIMO, o Capítulo 7 foi dedicado ao sensoriamento espectral multi-banda para o contexto de rádios cognitivos. Deste tópico, foi feita a proposta de uma topologia de sensoriamento, além de uma análise extensiva do sensor proposto para sinais OFDM.

## 8.1 Disseminações

Como fruto dos estudos apresentados neste texto, as seguintes disseminações foram realizadas durante o programa:

[A] **Título:** *Efficient Near-Optimum Detectors for Large MIMO Systems under Correlated Channels.*

**Autores:** Ricardo Tadashi Kobayashi, Fernando Ciriaco, Taufik Abrão.

**Status:** publicado em *Wireless Personal Communications* (2015).

**DOI:** 10.1007/s11277-015-2450-y.

**Qualis:** A2.

Tema abordado no Capítulo 2.

[B] **Título:** *Stability Analysis in Gram-Schmidt QR Decomposition.*

**Autores:** Ricardo Tadashi Kobayashi, Taufik Abrão.

**Status:** trabalho publicado na revista *IET Signal Processing.*

**DOI:** 10.1049/iet-spr.2016.0123;

**Qualis:** A2;

Tema abordado no Capítulo 3.

- [C] **Título:** *Ordered MMSE-SIC via Sorted QR Decomposition in Ill conditioned Large-Scale MIMO Channels.*

**Autores:** Ricardo Tadashi Kobayashi, Taufik Abrão.

**Status:** publicado em *Telecommunication Systems* (2015).

**DOI:** 10.1007/s11235-015-0123-5.

**Qualis:** A2.

Tema abordado no Capítulo 4.

- [D] **Título:** *Edge Spectrum Sensing based on Welch Wavelet for Multi-Band Cognitive Radio.*

**Autores:** Ricardo Tadashi Kobayashi, Lucas Claudino, Aislan Gabriel Hernandez, Taufik Abrão.

**Status:** Trabalho apresentado no XXXIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais (2016).

Tema abordado no Capítulo 7.

- [E] **Título:** *Theoretical Error for Asynchronous Channel Estimation in Large Multi-user MIMO Systems.*

**Autores:** Ricardo Tadashi Kobayashi, Taufik Abrão.

**Status:** trabalho aceito revista *IET Communications* (2016).

Tema abordado no Capítulo 5.

Adicionalmente, pode-se mencionar os seguintes colaborações com outros integrantes do Programa de Pós-Graduação da UEL

- [F] **Título:** *Spectrum Sensing Techniques in Cognitive Radio Networks: Achievements and Challenges*

**Autores:** Aislan Gabriel Hernandez, Ricardo Tadashi Kobayashi, Taufik Abrão

**Status:** Capítulo de livro a ser publicado pela CRC Press (2016).

- [G] **Título:** *Hadamard Ratio Spectrum Sensing in Realistic CRN Channels*

**Autores:** Lucas Claudino, Ricardo Tadashi Kobayashi, Taufik Abrão

**Status:** Trabalho apresentado no XXXIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais (2016).

- [H] **Título:** *Linear Detection Analysis in MIMO-OFDM with Spatial Correlation*



**Autores:** David William Marques Guerra, Rafael Fukuda Masashi, Ricardo Kobayashi Tadashi, Taufik Abrão.

**Status:** Trabalho aceito no *12th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications* (2016).

## 8.2 Trabalhos Futuros

Através do conhecimento técnico e maturidade obtidos ao longo do estudo apresentado neste trabalho, espera-se prosseguir a pesquisa em novas frentes de investigação. Especificamente, técnicas alternativas de multiplexação de dados podem ser investigadas, buscando-se soluções que se adequem ao 5G e que não apresentem os mesmos problemas encontrados em sistemas OFDM, como alta PAPR e alta emissão espectral fora de banda. Neste contexto, pode-se citar o esquema de transmissão FBMC (*Filter-Bank Multicarrier*) como uma alternativa ao OFDM (FARHANG et al., 2014); porém, tal técnica ainda carece um estudo mais aprofundado, principalmente no que diz respeito a implementações eficientes em sistemas MIMO. Outra frente de pesquisa com grande potencial de inovação e originalidade consiste na proposição e análise de novas topologias que beneficiem ou potencializem ainda mais sistemas MIMO massivo. Neste caso pode-se elencar sistemas *media-based-MIMO* (KHANDANI, 2014), os quais prometem emular um número maior de antenas virtuais, sem um aumento expressivo no número de antenas físicas.

# Referências

3GPP. *3GPP TR 36.942 V13.0.0 (2016-01)*. [S.l.], Jan. 2016.

AKYILDIZ, I. F.; LEE, W.-Y.; VURAN, M. C.; MOHANTY, S. A Survey on Spectrum Management in Cognitive Radio Networks. **Communications Magazine, IEEE**, v. 46, n. 4, p. 40–48, 2008. ISSN 0163-6804.

ALAMOUTI, S. M. A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications. **IEEE Journal on Selected Areas in Communications**, p. 1451–1458, 1998.

ANATEL. **Portaria N° 481**. [S.l.], 7 2014.

ASHIKHMIN, A.; MARZETTA, T. Pilot Contamination Precoding in Multi-Cell Large Scale Antenna Systems. In: **Information Theory Proceedings (ISIT), 2012 IEEE International Symposium On**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1137–1141. ISSN 2157-8095.

AWASTHI, A.; GUTTAL, R.; AL-DHAHIR, N.; BALSARA, P. T. Complex QR Decomposition Using Fast Plane Rotations for MIMO Applications. v. 18, n. 10, p. 1743–1746, 2014.

BAI, L.; CHOI, J. **Low Complexity MIMO Detection**. [S.l.]: Springer, 2012. ISBN 9781441985828.

BAI, L.; DOU, S.; LI, Q.; XING, W.; CHOI, J. Low-Complexity Iterative Channel Estimation with Lattice Reduction-Based Detection for Multiple-Input Multiple-Output Systems. **Communications, IET**, v. 8, n. 6, p. 905–913, Apr. 2014.

BHARGAVI, D.; MURTHY, C. R. Performance Comparison of Energy, Matched-Filter and Cyclostationarity-Based Spectrum Sensing. In: **Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC), 2010 IEEE Eleventh International Workshop On**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1–5. ISSN 1948-3244.

BIGLIERI, E. **MIMO Wireless Communications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. ISBN 9781139461269.

BIGUESH, M.; GERSHMAN, A. Training-Based MIMO Channel Estimation: A Study of Estimator Tradeoffs and Optimal Training Signals. **Signal Processing, IEEE Transactions On**, v. 54, n. 3, p. 884–893, Mar. 2006. ISSN 1053-587X.

BJÖRCK Å. Numerics of Gram-Schmidt Orthogonalization. **Linear Algebra and Its Applications**, v. 197-198, p. 297 – 316, 1994. ISSN 0024-3795.

BOCCARDI, F.; HEATH, R.; LOZANO, A.; MARZETTA, T.; POPOVSKI, P. Five Disruptive Technology Directions for 5G. **Communications Magazine, IEEE**, v. 52, n. 2, p. 74–80, Feb. 2014. ISSN 0163-6804.

- BÖHNKE, R.; WÜBBEN, D.; KÜHN, V.; KAMMEYER, K.-D. Reduced Complexity MMSE Detection for BLAST Architectures. **Globecom '03. IEEE Global Telecommunications Conference (IEEE Cat. No.03ch37489)**, v. 4, n. 1, 2003.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex Optimization**. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0521833787.
- CHO JAEKON KIM, W. W. Y. C. G. K. W. S. **MIMO-OFDM Wireless Communications with Matlab**. 1. ed. New York: John Wiley and Sons (Asia), 2013.
- CHO, K.; YOON, D. On the General BER Expression of One- and Two-Dimensional Amplitude Modulations. **Communications, IEEE Transactions On**, v. 50, n. 7, p. 1074–1080, Jul. 2002. ISSN 0090-6778.
- CORLESS, R. M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E. G.; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. E. On the Lambert W Function. In: **Advances in Computational Mathematics**. [S.l.: s.n.], 1996. p. 329–359.
- COX, a. J.; HIGHAM, N. J. Stability of Householder QR Factorization for Weighted Least Square Problems. **Numerical Analysis 1997, Proceedings of the 17th Dundee Conference, Pitman Research Notes Mathematics**, v. 380, p. 57, 1998.
- CRAIG, C. C. On the Frequency Function of  $XY$ . **Annals of Mathematical Statistics**, v. 7, n. 1, p. 1–15, Mar. 1936. ISSN 0003-4851.
- DANIEL, J. W.; GRAGG, W. B.; KAUFMAN, L.; STEWART, G. W. Reorthogonalization and Stable Algorithms for Updating the Gram-Schmidt QR Factorization. **Mathematics of Computation**, American Mathematical Society, v. 30, n. 136, p. 772–795, 1976. ISSN 00255718. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2307/2005398>>.
- DIVAKARAN, K.; MANIKANDAN, N.; HARI, S. Wavelet Based Spectrum Sensing Techniques for Cognitive Radio - A Survey. **International Journal of Computer Science & Information Technology**, v. 3, n. 2, p. 123–137, 2011.
- DOCOMO. **5G Radio Access: Requirements, Concept and Technologies**. [S.l.], 11 2010.
- EGILMEZ, H.; ORTEGA, A. Wavelet-Based Compressed Spectrum Sensing for Cognitive Radio Wireless Networks. In: **Acoustics, Speech and Signal Processing (icassp), 2015 IEEE International Conference On**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 3157–3161.
- ELSHOKRY, A. **Complexity and Performane Evaluation of Detection Schemes for Spatial Multiplexing MIMO**. Dissertação (Mestrado), 1 2010.
- EROL-KANTARCI, M.; MOUFTAH, H. T. Energy-efficient information and communication infrastructures in the smart grid: A survey on interactions and open issues. **IEEE Communications Surveys Tutorials**, v. 17, n. 1, p. 179–197, Firstquarter 2015. ISSN 1553-877X.

FARHANG, A.; MARCHETTI, N.; DOYLE, L.; FARHANG-BOROUJENY, B. Filter bank multicarrier for massive MIMO. **CoRR**, abs/1402.5881, 2014. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1402.5881>>.

FETTWEIS, G. P. The Tactile Internet: Applications and Challenges. **IEEE Vehicular Technology Magazine**, v. 9, n. 1, p. 64–70, Mar. 2014. ISSN 1556-6072.

FISCHER, R. F. H.; WINDPASSINGER, C. Real Versus Complex-Valued Equalisation in V-BLAST Systems. **Electronics Letters**, v. 39, n. 5, p. 470–471, Mar. 2003. ISSN 0013-5194.

GAN, Y. H.; LING, C.; MOW, W.-H. Complex Lattice Reduction Algorithm for Low-Complexity Full-Diversity MIMO Detection. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 57, n. 7, p. 2701–2710, 2009. ISSN 1053-587X.

GANDER, W. **Algorithms for TheQR-DECOMPOSITION**. [S.l.], 1980. Disponível em: <<https://www.inf.ethz.ch/personal/gander/papers/qrneu.pdf>>.

GOLD, R. Maximal Recursive Sequences with 3-Valued Recursive Cross-Correlation Functions (corresp.). **Information Theory, IEEE Transactions On**, v. 14, n. 1, p. 154–156, Jan. 1968. ISSN 0018-9448.

GOLDSMITH, A. **Wireless Communications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521837163.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. **Matrix Computations (3rd Ed.)**. Baltimore, MD, USA: Johns Hopkins University Press, 1996. ISBN 0-8018-5414-8.

GUO, X. **Sphere Decoder for MIMO Systems**. 2006. Disponível em: <<http://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22890-sphere-decoder-for-mimo-systems>>.

HAMPTON, J. **Introduction to MIMO Communications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781107042834.

HAN, S.; CUI, T.; TELLAMBURA, C. Improved K-Best Sphere Detection for Uncoded and Coded MIMO Systems. **IEEE Wireless Communications Letters**, v. 1, n. 5, p. 472–475, Oct. 2012. ISSN 2162-2337.

HASSIBI, B.; VIKALO, H. On the Sphere-Decoding Algorithm I. Expected Complexity. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 53, n. 8, p. 2806–2818, Aug. 2005. ISSN 1053-587X.

HAYKIN, S. Cognitive Radio: Brain-Empowered Wireless Communications. **IEEE Journal on Selected Areas in Communications**, v. 23, n. 2, p. 201–220, Feb. 2005. ISSN 0733-8716.

HORADAM, K. **Hadamard Matrices and Their Applications**. [S.l.]: Princeton University Press, 2007. ISBN 9780691119212.

IBNKAHLA, M. **Cooperative Cognitive Radio Networks: the Complete Spectrum Cycle**. [S.l.]: CRC Press, 2014. ISBN 9781466570795,1466570792.

IEEE Standard for Safety Levels with Respect to Human Exposure to Radio Frequency Electromagnetic Fields, 3 kHz to 300 GHz. **IEEE Std C95.1-2005 (Revision of IEEE Std C95.1-1991)**, p. 1–238, April 2006.

JALDEN, J.; OTTERSTEN, B. On the Complexity of Sphere Decoding in Digital Communications. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 53, n. 4, p. 1474–1484, Apr. 2005. ISSN 1053-587X.

JOSE, J.; ASHIKHMIN, A.; MARZETTA, T.; VISHWANATH, S. Pilot Contamination and Precoding in Multi-Cell TDD Systems. **Wireless Communications, IEEE Transactions On**, v. 10, n. 8, p. 2640–2651, Aug. 2011. ISSN 1536-1276.

KALMAN, D. A Singularly Valuable Decomposition: the SVD of A Matrix. **The College Mathematics Journal**, v. 27, n. 1, p. 2–23, 1996.

KASAMI, T.; LIN, S.; PETERSON, W. Polynomial Codes. **Information Theory, IEEE Transactions On**, v. 14, n. 6, p. 807–814, Nov. 1968. ISSN 0018-9448.

KHALIGHI, M.-A.; BROSSIER, J.; JOURDAIN, G.; RAOOF, K. Water Filling Capacity of Rayleigh MIMO Channels. In: **Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2001 12th IEEE International Symposium On**. [S.l.: s.n.], 2001. v. 1, p. A-155–A-158 vol.1.

KHANDANI, A. K. Media-based modulation: Converting static rayleigh fading to awgn. In: **2014 IEEE International Symposium on Information Theory**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1549–1553. ISSN 2157-8095.

KIM, J. S.; MOON, S. H.; LEE, I. A New Reduced Complexity ML Detection Scheme for MIMO Systems. **IEEE Transactions on Communications**, v. 58, n. 4, p. 1302–1310, Apr. 2010. ISSN 0090-6778.

KIM, T. H. Low-Complexity Sorted QR Decomposition for MIMO Systems Based on Pairwise Column Symmetrization. **IEEE Transactions on Wireless Communications**, v. 13, n. 3, p. 1388–1396, 2014. ISSN 15361276.

KOBAYASHI, R. T.; CIRIACO, F.; ABRÃO, T. Efficient near-optimum detectors for large mimo systems under correlated channels. **Wireless Personal Communications**, v. 83, n. 2, p. 1287–1311, 2015. ISSN 1572-834X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11277-015-2450-y>>.

KÜHN, V. **Wireless Communications over MIMO Channels - Applications to CDMA and Multiple Antenna Systems**. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 2006.

KUMAR, P.; HELLESETH, T.; CALDERBANK, A.; HAMMONS AR., J. Large Families of Quaternary Sequences with Low Correlation. **Information Theory, IEEE Transactions On**, v. 42, n. 2, p. 579–592, Mar. 1996. ISSN 0018-9448.

KURAMOTO, A. R.; ABRÃO, T.; JESZENSKY, P. J. E. Set of Sequences for QS-CDMA Systems with Multi-User Detection and Multipath-Fading Channels. **Wireless Personal Communications**, v. 33, n. 1, p. 35–51, 2005. ISSN 1572-834X.

- LAI, R.-H. L. R.-H.; CHEN, C.-M. C. C.-M.; TING, P.-A. T. P.-A.; HUANG, Y.-H. H. Y.-H. A Modified Sorted-QR Decomposition Algorithm for Parallel Processing in MIMO Detection. **2009 IEEE International Symposium on Circuits and Systems**, p. 1405–1408, 2009. ISSN 02714310.
- LENSTRA, H.; LENSTRA, A.; LOVÁSZ, L. Factoring Polynomials with Rational Coefficients. **Mathematische Annalen**, v. 261, p. 515–534, 1982.
- LIN, J. C. Human exposure to rf, microwave, and millimeter-wave electromagnetic radiation [health effects]. **IEEE Microwave Magazine**, v. 17, n. 6, p. 32–36, June 2016. ISSN 1527-3342.
- LING, C.; HOWGRAVE-GRAHAM, N. Effective  $\ell_1$  reduction for lattice decoding. In: **2007 IEEE International Symposium on Information Theory**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 196–200. ISSN 2157-8095.
- LIU, W. C.; WEI, T. C.; HUANG, Y. S.; CHAN, C. D.; JOU, S. J. All-Digital Synchronization for SC/OFDM Mode of IEEE 802.15.3C and IEEE 802.11AD. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, v. 62, n. 2, p. 545–553, Feb. 2015. ISSN 1549-8328.
- LOPES, W.; QUEIROZ, W.; MADEIRO, F.; ALENCAR, M. Exact Bit Error Probability of M-QAM Modulation over Flat Rayleigh Fading Channels. In: **Microwave and Optoelectronics Conference, 2007. IMOC 2007. SBMO/IEEE MTT-S International**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 804–806.
- MA, X.; ZHANG, W. Performance Analysis for MIMO Systems with Lattice-Reduction Aided Linear Equalization. **IEEE Transactions on Communications**, v. 56, n. 2, p. 309–318, 2008. ISSN 0090-6778.
- MARTINEZ, A. A. G. **Sequencias de Codigos para Uso em Comunicaao por Espalhamento Espectral**. Dissertação (Mestrado), 10 1997.
- MARZETTA, T. How Much Training Is Required for MultiuserMIMO? In: **Signals, Systems and Computers, 2006. ACSSC '06. Fortieth Asilomar Conference On**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 359–363.
- MASONTA, M.; MZYECE, M.; NTLATLAPA, N. Spectrum Decision in Cognitive Radio Networks: A Survey. **Communications Surveys Tutorials, IEEE**, v. 15, n. 3, p. 1088–1107, Third 2013. ISSN 1553-877X.
- MESLEH, R. Y.; HAAS, H.; SINANOVIC, S.; AHN, C. W.; YUN, S. Spatial Modulation. **IEEE Transactions on Vehicular Technology**, v. 57, n. 4, p. 2228–2241, Jul. 2008. ISSN 0018-9545.
- MICHELOZZI ALESSANDRA CAPON, U. K. F. F. A. B. A. B. P.; PERUCCI, C. A. Adult and childhood leukemia near a high-power radio station in rome, italy. **American Journal of Epidemiology**, v. 155, n. 12, p. 1096–1103, June 2002.
- MILFORD, D.; SANDELL, M. Simplified Quantisation in A Reduced-Lattice MIMO Decoder. **IEEE Communications Letters**, v. 15, n. 7, p. 725–727, Jul. 2011. ISSN 1089-7798.
- MOLISCH, A. **Wireless Communications**. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 2005. ISBN 047084888X.

- MONDAL, S.; SALAMA, K. N.; ALI, W. H. A Novel Approach for K-Best MIMO Detection and Its VLSI Implementation. **Proceedings - IEEE International Symposium on Circuits and Systems**, p. 936–939, 2008. ISSN 02714310.
- MOSES, P. S.; RANDOLPH. **Spectral Analysis of Signals**. 1. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2004. 427 p. ISBN 0131139568.
- NAGATOMI, K.; HIGUCHI, K.; KAWAI, H. Complexity Reduced MLD Based on QR Decomposition in OFDM MIMO Multiplexing with Frequency Domain Spreading and Code Multiplexing. In: **WCNC'09 – IEEE Conf. on Wireless Comm. & Networking Conference**. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 2009. p. 676–681. ISBN 978-1-4244-2947-9.
- PAPOULIS, A. **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**. New York: McGraw-Hill, 1991. (McGraw-Hill series in electrical engineering). ISBN 0-07-100870-5. Disponível em: <<http://opac.inria.fr/record=b1077486>>.
- PEER, N.; MURIN, Y.; DABORA, R. Improved QRD-QLD Algorithm for Low Complexity MIMO Decoding. **IEEE Communications Letters**, v. 18, n. 10, p. 1703–1706, Oct. 2014. ISSN 1089-7798.
- PROSANTA, P.; XIN, C.; SONG, M.; ZHAO, Y. Spectrum Sensing for A Subdivided Band in Cognitive Radio Networks. In: **Computer Communication and Networks (ICCCN), 2015 24th International Conference On**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–8.
- QING, H.; LIU, Y.; XIE, G.; GAO, J. Wideband Spectrum Sensing for Cognitive Radios: A Multistage Wiener Filter Perspective. **Signal Processing Letters, IEEE**, v. 22, n. 3, p. 332–335, Mar. 2015. ISSN 1070-9908.
- ROH, W.; SEOL, J.-Y.; PARK, J. H.; LEE, B.; LEE, J.; KIM, Y.; CHO, J.; CHEUN, K.; ARYANFAR, F. Millimeter-Wave Beamforming as An Enabling Technology for 5G Cellular Communications: Theoretical Feasibility and Prototype Results. **Communications Magazine, IEEE**, v. 52, n. 2, p. 106–113, Feb. 2014. ISSN 0163-6804.
- RUSEK, F.; PERSSON, D.; LAU, B. K.; LARSSON, E.; MARZETTA, T.; ED-FORS, O.; TUFVESSON, F. Scaling up MIMO: Opportunities and Challenges with Very Large Arrays. **Signal Processing Magazine, IEEE**, v. 30, n. 1, p. 40–60, Jan. 2013. ISSN 1053-5888.
- SCHULZE, H.; LUEDERS, C. **Theory and applications of OFDM and CDMA: wideband wireless communications**. Chichester: Wiley, 2005. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/994675>>.
- SHEPARD, C.; YU, H.; ANAND, N.; LI, E.; MARZETTA, T.; YANG, R.; ZHONG, L. Argos: Practical Many-Antenna Base Stations. **Proceedings of the 18th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking - Mobicom '12**, n. i, p. 53, 2012.
- SHIN, C.; HEATH, R. W.; POWERS, E. J. Blind Channel Estimation for MIMO-OFDM Systems. **IEEE Transactions on Vehicular Technology**, v. 56, n. 2, p. 670–685, Mar. 2007. ISSN 0018-9545.

SILVA, V. A. da. **Modelagem Computacional De Canais De Comunicação Móvel**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 10 2004.

SPENCER, Q.; PEEL, C.; SWINDLEHURST, A.; HAARDT, M. An Introduction to the Multi-User MIMO Downlink. **Communications Magazine, IEEE**, v. 42, n. 10, p. 60–67, Oct. 2004. ISSN 0163-6804.

STAPLE, G.; WERBACH, K. The End of Spectrum Scarcity. **IEEE Spectrum**, v. 41, n. 3, p. 48–52, 2004. ISSN 10079327.

STATISTA. **Number of mobile phone users worldwide from 2013 to 2019 (in billions)**. 2016. Disponível em: <<http://www.statista.com/statistics/274774/forecast-of-mobile-phone-users-worldwide/>>.

SZCZECINSKI, L.; MASSICOTTE, D. Low Complexity Adaptation of MIMO MMSE Receivers, Implementation Aspects. v. 4, p. 6 pp.–2332, Dec. 2005.

TSE, D. N. C.; VISWANATH, P.; ZHENG, L. Diversity-Multiplexing Tradeoff in Multiple-Access Channels. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 50, n. 9, p. 1859–1874, Sept. 2004. ISSN 0018-9448.

WATERS, D. W.; BARRY, J. R. The Sorted-QR Chase Detector for Multiple-Input Multiple-Output Channels. In: **IEEE Wireless Communications and Networking Conference, 2005**. [S.l.: s.n.], 2005. v. 1, p. 538–543 Vol. 1. ISSN 1525-3511.

WATERS, D. W.; BARRY, J. R. The Chase Family of Detection Algorithms for Multiple-Input Multiple-Output Channels. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 56, n. 2, p. 739–747, Feb. 2008. ISSN 1053-587X.

WELCH, P. D. The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging over Short, Modified Periodograms. **IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics**, AU-15, p. 17–20, Jun. 1967. ISSN 0018-9278.

WOLNIANSKY, P.; FOSCHINI, G.; GOLDEN, G.; VALENZUELA, R. V-BLAST: An architecture for realizing very high data rates over the rich-scattering wireless channel. In: **International Symposium on Signals, Systems, and Electronics, 1998. ISSSE 98. 1998 URSI**. [S.l.: s.n.], 1998.

WÜBBEN, D.; BÖHNKE, R.; KÜHN, V.; KAMMEYER, K.-D. MMSE Extension of V-BLAST Based on Sorted QR Decomposition. **2003 IEEE 58th Vehicular Technology Conference. VTC 2003-FALL (IEEE Cat. No.03ch37484)**, v. 1, n. 1, p. 0–4, 2003. ISSN 1090-3038.

WUBBEN, D.; BOHNKE, R.; KUHN, V.; KAMMEYER, K. D. MMSE-BASED Lattice-Reduction for near-ML Detection of MIMO Systems. In: **Smart Antennas, 2004. ITG Workshop On**. [S.l.: s.n.], 2004. p. 106–113.

WÜBBEN, D.; BÖHNKE, R.; KÜHN, V.; KAMMEYER, K.-D. Near-Maximum-Likelihood Detection of MIMO Systems Using MMSE-BASED Lattice Reduction. In: **Communications, 2004 IEEE International Conference On**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 2, p. 798–802 Vol.2.



WÜBBEN, D.; BÖHNKE, R.; RINAS, J.; KÜHN, V.; KAMMEYER, K. Efficient Algorithm for Decoding Layered Space-Time Codes. **Electronics Letters**, v. 37, n. 22, p. 1348, 2001. ISSN 00135194.

YANG, H.; MARZETTA, T. Performance of Conjugate and Zero-Forcing Beamforming in Large-Scale Antenna Systems. **Selected Areas in Communications, IEEE Journal On**, v. 31, n. 2, p. 172–179, Feb. 2013. ISSN 0733-8716.

ZENG, Y.; CHIA, Y.-C. L.; WAH, M. Edge Based Wideband Sensing for Cognitive Radio: Algorithm and Performance Evaluation. In: **New Frontiers in Dynamic Spectrum Access Networks (dyspan), 2011 IEEE Symposium On**. [S.l.: s.n.], 2011. p. 6.

ZHANG, L.; BAO, P. Edge Detection by Scale Multiplication in Wavelet Domain. **Pattern Recognition Letters**, v. 23, p. 1771–1784, 2002. ISSN 01678655.

ZHOU, Y.; KARSILAYAN, A. I.; SERPEDIN, E. Sensitivity of Multiband ZP-OFDM Ultra-Wide-Band and Receivers to Synchronization Errors. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 55, n. 2, p. 729–734, Jan. 2007. ISSN 1053-587X.

ZIMMERMANN, E.; RAVE, W.; FETTWEIS, G. On the Complexity of Sphere Decoding. **Proc. International Symp. on . . .**, v. 53, n. 4, p. 1474–1484, 2004.

# APÊNDICE A – Quantização de símbolos QAM no Domínio LR

Neste apêndice, a quantização de símbolos QAM no domínio LR será estudada, dada sua importância relativa e obscuridade em trabalhos que abordam a LR em detectores MIMO.

## A.1 Quantização de símbolos QAM

Antes de iniciar a análise da quantização de símbolos QAM no domínio LR, vale a pena discutir a quantização de símbolos QAM no domínio original. Para isso, define-se o vetor de símbolos  $M$ -QAM como

$$\mathbf{s} = \alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{1}_K \quad (\text{A.1})$$

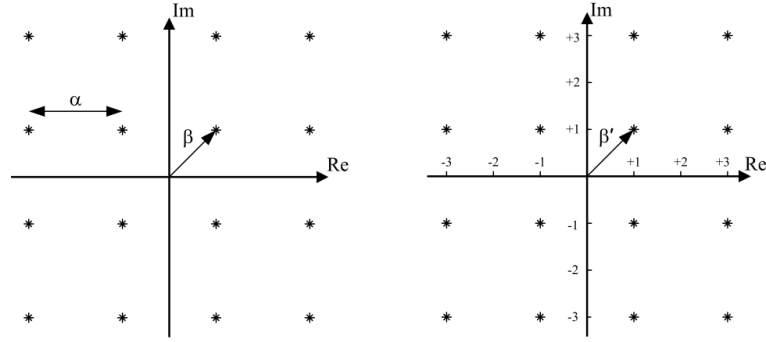
onde  $\alpha$  é o fator de escala da modulação e  $\beta$  é um *offset* da modulação, como é apresentado na figura A.1. Neste caso, o vetor  $\mathbf{s}$  é construído a partir de  $\mathbf{b}$ , o qual é composto por um conjunto de inteiros complexos consecutivos, ou seja,

$$\Re\{b_i\}, \Im\{b_i\} \in \left\{ -\frac{\sqrt{M}}{2} + 1, -\frac{\sqrt{M}}{2} + 2, \dots, \frac{\sqrt{M}}{2} - 1 \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Após passarem pelo canal, o símbolo  $\mathbf{s}$  é corrompido e estimado por um dado detector, gerando o vetor corrompido

$$\tilde{\mathbf{s}} = \alpha \tilde{\mathbf{b}} + \beta \mathbf{1}_K. \quad (\text{A.3})$$

Para quantizar símbolos QAM corrompidos pelo ruído, deve-se normalizá-los para



**Figura A.1:** Constelação 16-QAM e sua versão normalizada (MILFORD; SANDELL, 2011)

que seu alfabeto esteja contido no conjunto dos inteiros complexos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{s}}' &= \frac{2}{\alpha} \tilde{\mathbf{s}} \\
 &= 2\tilde{\mathbf{b}} + \frac{2\beta}{\alpha} \mathbf{1}_K \\
 &= 2\tilde{\mathbf{b}} + \beta' \mathbf{1}_K.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Como o alfabeto de  $\tilde{\mathbf{s}}'$  é composto, tanto para a parte real quanto para a imaginária, por inteiros ímpares a quantização não pode ser procedida com um simples arredondamento, pois isso eventualmente geraria números pares, os quais não fazem parte do alfabeto. Para contornar tal problema, arredonda-se  $\tilde{\mathbf{b}}$ , pois seus símbolos são compostos por inteiros consecutivos, logo:

$$\left[ \tilde{\mathbf{b}} \right] = \left\lfloor \frac{\tilde{\mathbf{s}}' - \beta' \mathbf{1}_K}{2} \right\rfloor \tag{A.5}$$

Assim, a quantização de símbolos QAM pode ser feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{s}}' &= \mathcal{Q}(\tilde{\mathbf{s}}') \\
 &= 2 \left[ \tilde{\mathbf{b}} \right] + \beta' \mathbf{1}_K \\
 &= 2 \left\lfloor \frac{\tilde{\mathbf{s}}' - \beta' \mathbf{1}_K}{2} \right\rfloor + \beta' \mathbf{1}_K.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Vale lembrar que a eq. (A.6) não fica restrita ao uso de símbolos QAM. Para outras modulações, basta reescalonar os símbolos de forma adequada e alterar o valor de  $\beta'$ , que assume 1 para modulações PAM e  $1 + j$  para QAM.

Como exemplo, considere que um dado detector estimou o seguinte vetor de símbolos 4-QAM corrompidos pelo ruído:

$$\tilde{\mathbf{s}}' = \begin{bmatrix} 0.8 + j1.6 \\ 0.4 - j0.9 \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

Um simples arredondamento quantizaria os símbolos estimados como

$$\left[ \tilde{\mathbf{s}}' \right] = \begin{bmatrix} 1 + j^2 \\ 0 - j \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

os quais não seriam decodificados corretamente por não pertencerem ao alfabeto 4-QAM. Por outro lado, a quantização da eq. (A.6) geraria

$$\left[ \tilde{\mathbf{s}}' \right] = \begin{bmatrix} 1 + j \\ 1 - j \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

que fazem parte do alfabeto 4-QAM.

## A.2 Quantização de símbolos QAM no Domínio LR

A análise anterior pode ser estendida para símbolos  $M$ -QAM no domínio LR fazendo algumas mudanças. É importante relembrar que como os símbolos são projetados no domínio LR, seu alfabeto muda de acordo com o canal. Passando os símbolos da eq. (A.1) para o domínio LR

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{s}} \\ &= \alpha\tilde{\mathbf{b}} + \beta\mathbf{T}^{-1}\mathbf{1}_K. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Após isso, normaliza-se (A.10)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}' &= \frac{2}{\alpha}\tilde{\mathbf{z}} \\ &= 2\tilde{\mathbf{b}} + \frac{2\beta}{\alpha}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{1}_K \\ &= 2\tilde{\mathbf{b}} + \beta'\mathbf{T}^{-1}\mathbf{1}_K. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Novamente, arredonda-se o vetor  $\tilde{\mathbf{b}}$

$$\left[ \tilde{\mathbf{b}} \right] = \left\lfloor \frac{\tilde{\mathbf{z}}' - \beta'\mathbf{T}^{-1}\mathbf{1}_K}{2} \right\rfloor \quad (\text{A.12})$$

Desta forma, a quantização de símbolos no domínio LR deve ser feita com (MILFORD; SANDELL, 2011)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} &= \mathcal{Q}_{LR}(\tilde{\mathbf{z}}) \\ &= \left\lfloor \frac{\tilde{\mathbf{z}}' - \beta'\mathbf{T}^{-1}\mathbf{1}_K}{2} \right\rfloor + \beta'\mathbf{T}^{-1}\mathbf{1}_K \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

## APÊNDICE B – Transformação de Variáveis Aleatórias

A transformação de algumas variáveis aleatórias recorrentes será estudada neste apêndice. Especificamente, a função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $X$  que passa por uma transformação  $f(X)$  será derivada. Para isso, a função de distribuição cumulativa será analisada, a partir da qual será derivada sua função de densidade de probabilidade (PAPOULIS, 1991).

### B.1 Transformação $Y = \sqrt{X}$

A fim de se obter a PDF de uma variável aleatória do tipo  $Y = \sqrt{X}$ , escreve-se inicialmente a CDF da variável como uma função de  $X$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr \{Y \leq y\} \\ &= \Pr \{\sqrt{X} \leq y\} \\ &= \Pr \{0 \leq X \leq y^2\} \\ &= F_X(y^2) - F_X(0). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Ao derivar  $F_Y(y)$ , a PDF resultante da variável  $Y$  torna-se

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\ &= 2yf_X(y^2)u(y). \end{aligned} \tag{B.2}$$

### B.2 Transformação $Y = X^2$

Procedendo-se, como feito anteriormente, a CDF da variável  $Y$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr \{Y \leq y\} \\ &= \Pr \{X^2 \leq y\} \\ &= \Pr \{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), \end{aligned} \tag{B.3}$$

que ao ser derivada, revela a PDF da variável aleatória transformada

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\ &= \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} u(y). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

### B.3 Transformação $Y = |X|$

Considerando a transformação  $Y = |X|$ , a CDF de  $Y$  pode ser expressada por

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr \{Y \leq y\} \\ &= \Pr \{|X| \leq y\} \\ &= \Pr \{-y \leq X \leq y\} \\ &= F_X(y) - F_X(-y). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Logo, a PDF da variável transformada  $Y$  é dada por

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\ &= [f_X(y) + f_X(-y)] u(y). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

### B.4 Transformação $Y = CX$

Seja  $Y = CX$ , onde  $C$  é uma constante e  $X$  é uma variável aleatória, a a CDF de  $Y$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr \{Y \leq y\} \\ &= \Pr \{CX \leq y\} \\ &= \Pr \{X \leq y/C\} \\ &= F_X \left( \frac{y}{C} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Com a PDF de  $Y$  expressada em termos da PDF de  $X$ , conclui-se que

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\ &= \frac{1}{C} f_X \left( \frac{y}{C} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

## APÊNDICE C – Função geradora de Momento de uma Variável $|X|$

Suponha que a variável aleatória  $X$  possua uma distribuição normal de média zero e variância  $\sigma^2$  e passe por uma transformação do tipo  $|X|$ . Neste caso, usando a transformação desenvolvida em B.3, a PDF de tal variável aleatória é

$$f_{|X|}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) u(x). \quad (\text{C.1})$$

Vale notar que, neste caso,  $|X|$  é uma variável Chi com um grau de liberdade

Usando a definição da função geradora de momento:

$$\begin{aligned} M_{|X|}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{|X|}(x) \exp(+sx) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + sx\right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\sigma^2 sx}{2\sigma^2} + \frac{(\sigma^2 s)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\sigma^2 s)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\frac{(\sigma^2 s)^2}{2\sigma^2}\right] \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - \sigma^2 s)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{\sigma^2 s^2}{2}\right) \int_{-\sigma^2 s}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{\sigma^2 s^2}{2}\right) \int_{-\sigma^2 s}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2\right] dx \\ &= \exp\left(\frac{\sigma^2 s^2}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma s/\sqrt{2}}^{\infty} \exp(-x^2) dx \\ &= \exp\left(\frac{\sigma^2 s^2}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{\sigma s}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

De fato, a função geradora de momento resume-se à transformada de Laplace com  $s \rightarrow -s$ , já que  $f_{|X|}(x)$  é unilateral. Logo,  $M_X(s) = \mathcal{L}\{f_X(x)\}(-s)$ . Tal constatação facilita o cálculo da função geradora de momento, caso a PDF da função geradora de momento possua sua transformada de Laplace conhecida, ou até mesmo tabelada.

## APÊNDICE D – Exemplo: Formação de $\mathbf{U}^{(\ell)}$

Este apêndice exemplificará a formação da matriz  $\mathbf{U}^{(\ell)}$  e de sua inversa, como descrito em (3.3). Para o caso  $4 \times 4$  e  $\ell = 1$ , i.e., para a primeira:

$$\mathbf{U}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{p_{12}}{p_{11}} & -\frac{p_{13}}{p_{11}} & -\frac{p_{14}}{p_{11}} \\ p_{11} & p_{11} & p_{11} & p_{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{U}^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na próxima iteração, a matrizes  $\mathbf{U}^{(2)}$  e sua inversa é formada por:

$$\mathbf{U}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p_{22}} & -\frac{p_{23}}{p_{22}} & -\frac{p_{24}}{p_{22}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{U}^{(2)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Para a terceira iteração, são geradas as seguintes matrizes

$$\mathbf{U}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{p_{33}} & -\frac{p_{34}}{p_{33}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{U}^{(3)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por fim, a última iteração gera as seguintes matrizes:

$$\mathbf{U}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{p_{44}} \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{U}^{(4)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix}.$$



## APÊNDICE E – Esperança do Máximo

Suponha que deseja-se encontrar um limitante inferior para a esperança do máximo de um conjunto de  $n$  variáveis aleatórias i.i.d.  $X_i$ . Matematicamente:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\max_{i=1,2,\dots,n} X_i\right] \quad (\text{E.1})$$

A fim de derivar um limitante, usa-se a desigualdade de Jensen da seguinte forma:

$$\exp(s\mathbb{E}[Z]) \leq \mathbb{E}[\exp(sZ)] = \mathbb{E}\left[\max_{i=1,2,\dots,n} \exp(sX_i)\right]. \quad (\text{E.2})$$

Além disso, assume-se que o maior termo  $\exp(sX_i)$  é menor que a soma de todos seus termos, i.e.,

$$\mathbb{E}\left[\max_{i=1,2,\dots,n} \exp(sX_i)\right] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\exp(sX_i)]. \quad (\text{E.3})$$

Como  $X_i$  é i.i.d., sua função geradora de momento é a mesma para todos os valores de  $i$ , portanto  $M_X(s) = \mathbb{E}[\exp(sX_i)]$ . Desta forma, combinando as eqs. (E.2) and (E.3), obtém-se

$$\exp(s\mathbb{E}[Z]) \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_{X_i}(s) = n\mathcal{M}_X(s) \quad (\text{E.4})$$

Por fim, aplica-se o logarítmo na eq. E.4, além de se considerar o infimum para um limitante mais preciso. Logo, conclui-se que a esperança do máximo de um conjunto de variáveis aleatórias está limitado como é descrito a seguir

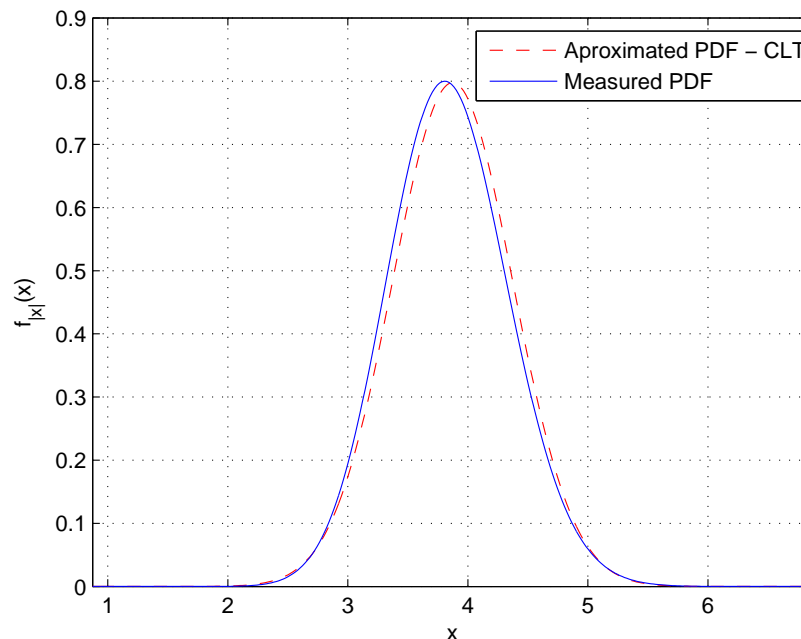
$$\mathbb{E}\left[\max_{i=1,2,\dots,n} \exp(sX_i)\right] \leq \inf_{s>1} \frac{\log[n\mathcal{M}_X(s)]}{s}. \quad (\text{E.5})$$

## APÊNDICE F – PDF da Norma de um Vetor Gaussiano

Seja  $\mathbf{x} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]^T$  um vetor composto por v.a.s aleatórias i.i.d. segundo uma PDF Gaussiana, i.e.  $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$ . A norma do vetor  $\mathbf{x}$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}^T} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^N X_i^2}. \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Se  $\sigma_X^2 = 1$ , nota-se facilmente que  $\|\mathbf{x}\|_2$  segue uma distribuição Chi com  $N$  graus de liberdade. No entanto, para um valor alto de  $N$ , a pdf de  $\|\mathbf{x}\|_2$  pode ser aproximada por uma pdf Gaussiana de tal forma que  $\|\mathbf{x}\|_2 \sim \mathcal{N}(\sigma_X^2 \sqrt{N}, \sigma_X^2/2)$ . A Figura F.1 ilustra a pdf exata e aproximação da variável  $\|\mathbf{x}\|_2$  considerando  $N = 30$  e  $\sigma_X = 1/2$ .



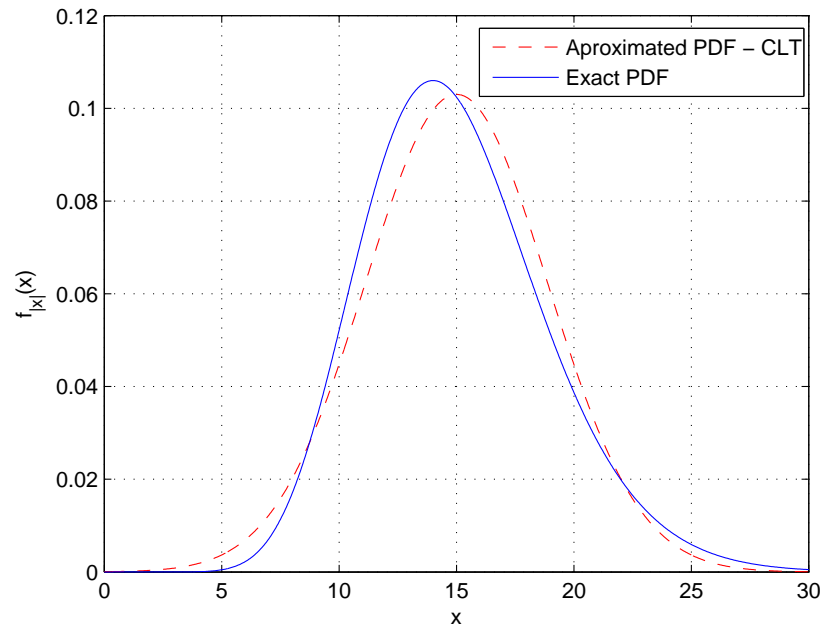
**Figura F.1:** pdf de  $\|\mathbf{x}\|_2$  e de sua aproximação Gaussiana.

Outra distribuição importante é a da variável  $\|\mathbf{x}\|_2^2$ , que pode ser relacionada

a v.a. Chi-quadrado, apresentando a seguinte pdf

$$f_{\|\mathbf{x}\|^2}(x) = \frac{x^{N/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2\sigma_X^2}\right)}{2^{N/2} \sigma_X^N \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} u(x) \quad (\text{F.2})$$

Por fim,  $\|\mathbf{x}\|_2^2$  também possui uma aproximação Gaussiana para sua pdf, que é derivada fazendo-se o uso, novamente, do Teorema Central do Limite. Logo, pode-se considerar que  $\|\mathbf{x}\|^2 \sim \mathcal{N}(N\sigma_X^2, 2N\sigma_X^4)$ . Na Figura F.2, a pdf de  $\|\mathbf{x}\|_2^2$  é apresentada juntamente com sua aproximação Gaussiana, considerando-se  $N = 30$ . Pode-se observar as expressões para a pdf estão razoavelmente próximas, tornando-se ainda mais à medida que  $N$  cresce.



**Figura F.2:** pdf de  $\|\mathbf{x}\|_2^2$  e de sua aproximação Gaussiana.

# APÊNDICE G – PDF do Produto Interno de Dois Vetores Gaussianos

Suponha que a variável aleatória  $Z$  seja dada por

$$Z = \mathbf{x}^T \mathbf{y}, \quad (\text{G.1})$$

onde  $\mathbf{x} = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_N]^T$  e  $\mathbf{y} = [Y_1 \ Y_2 \ \cdots \ Y_N]^T$  são vetores com elementos gaussianos i.i.d. com média zero e variâncias  $\sigma_X^2$  e  $\sigma_Y^2$ , ou seja,  $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$  e  $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_Y^2)$ . De forma alternativa a variável  $Z$  pode ser representada por

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^N X_i Y_i \\ &= \sum_{i=1}^N W_i \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

onde, segundo (CRAIG, 1936), a PDF de  $W_i$  é dada por

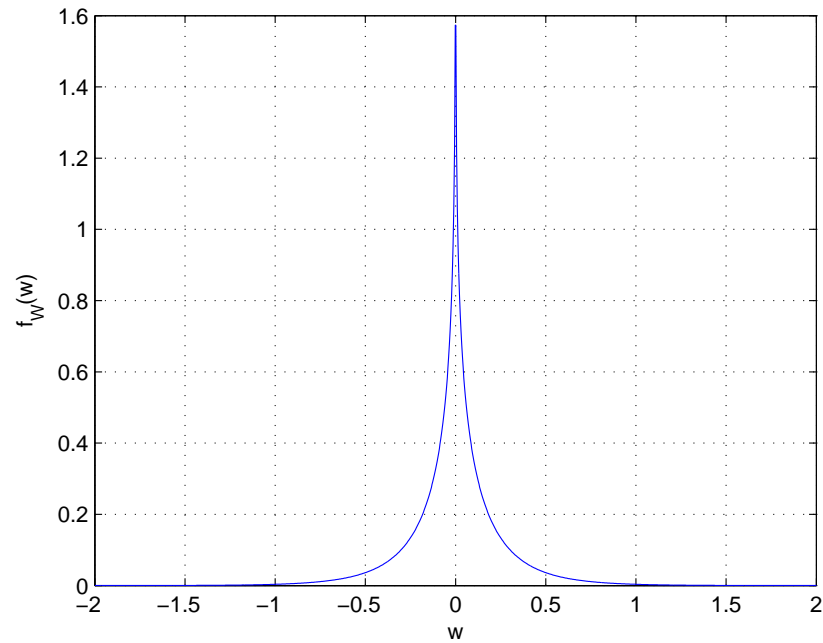
$$f_W(w) = \frac{1}{\pi \sigma_X \sigma_Y} K_0 \left( \frac{|w|}{\sigma_X \sigma_Y} \right), \quad (\text{G.3})$$

onde  $K_0(\cdot)$  é a função de Bessel modificada de segunda ordem. A PDF de  $W_i$  com  $\sigma_Y = \sigma_X = 1$  é mostrada na Figura G.1. A primeira vista, a  $f_W(w)$  assemelha-se a uma distribuição de Laplace. No entanto, uma análise mais precisa mostra que a PDF de uma distribuição de Laplace possui um pico menos acentuado, i.e., uma curtose<sup>1</sup> menor. Note

A fim de obter a PDF de  $Z$ , os elementos  $W_i$  devem ser somados. No entanto, a PDF de  $W_i$  é uma função relativamente complexa para se manipular, o que torna tal tarefa bastante árdua. A fim de contornar tal problema pode-se aplicar o Teorema Central do Limite para aproximar a variável  $Z$ . Inicialmente, vale notar que  $\mathbb{E}[W_i] = 0$  e  $\text{Var}[W_i] = \sigma_X^2 \sigma_Y^2$ , dado que as variáveis  $X$  e  $Y$  são independentes.

---

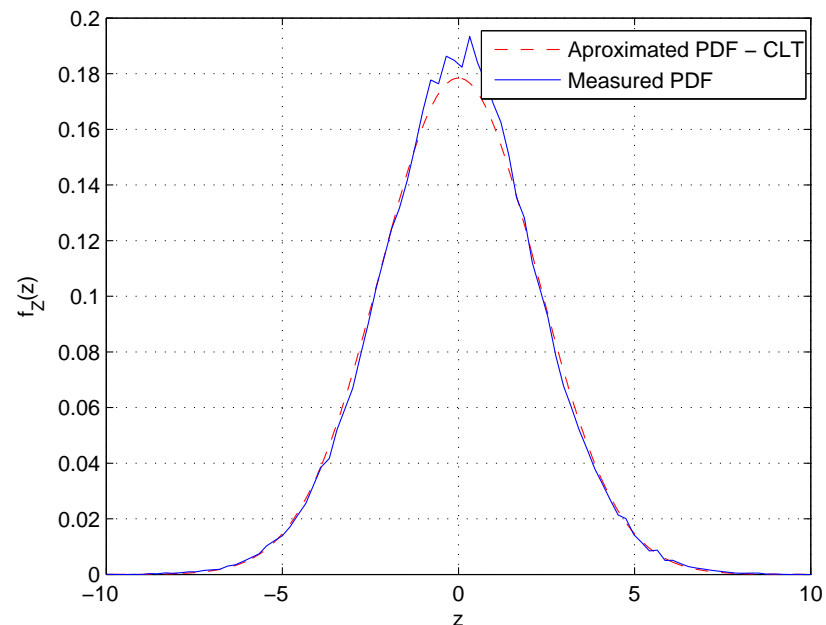
<sup>1</sup>A curtose é o quarto momento central normalizado, representando a tendência da PDF apresentar picos mais acentuados



**Figura G.1:** PDF da multiplicação de duas variáveis gaussianas.

Portanto, caso  $N$  seja grande o suficiente, a PDF de  $Z$  pode ser aproximada por uma função Gaussiana, mais especificamente  $Z \sim \mathcal{N}(0, N\sigma_X^2\sigma_Y^2)$ .

Na Figura G.2 a PDF experimental de  $Z$  é comparada com a aproximação Gaussiana para  $N = 20$ . Vale notar que o desvio da aproximação ocorre devido à alta curtose de  $W_i$ .



**Figura G.2:** PDF experimental de  $Z$  e sua aproximação Gaussiana.