



**Centro de Tecnologia e Urbanismo  
Departamento de Engenharia Elétrica**

Nilson Moutinho dos Santos

**Projeto de Controladores Robustos em Modelos Não-lineares Utilizados em  
Engenharia Biomédica: Pacientes Paraplégicos e Tetraplégicos**

**Brasil  
2014**



Nilson Moutinho dos Santos

**Projeto de Controladores Robustos em Modelos  
Não-lineares Utilizados em Engenharia Biomédica:  
Pacientes Paraplégicos e Tetraplégicos**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Universidade Estadual de Londrina – UEL

Departamento de Engenharia Elétrica

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Dr. Ruberlei Gaino

Coorientador: Dr. Márcio Roberto Covacic

Brasil

2014

---

Nilson Moutinho dos Santos

Projeto de Controladores Robustos em Modelos Não-lineares Utilizados em Engenharia Biomédica: Pacientes Paraplégicos e Tetraplégicos/ Nilson Moutinho dos Santos. – Brasil, 2014-

231 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dr. Ruberlei Gaino

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Londrina – UEL

Departamento de Engenharia Elétrica

Programa de Pós-Graduação, 2014.

1. modelo dinâmico não-linear em espaço de estados. 2. controle robusto. 3. LMIs. 4. realimentação de estados. 5. incertezas paramétricas limitadas em norma. I. Dr. Ruberlei Gaino. II. Universidade Estadual de Londrina – UEL. III. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Projeto de Controladores Robustos Utilizando Modelos Não-lineares em Engenharia Biomédica: Pacientes Paraplégicos e Tetraplégicos

CDU 02:141:005.7

---

Nilson Moutinho dos Santos

**Projeto de Controladores Robustos em Modelos  
Não-lineares Utilizados em Engenharia Biomédica:  
Pacientes Paraplégicos e Tetraplégicos**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Trabalho aprovado. Brasil, 12 de dezembro de 2014:

---

**Dr. Ruberlei Gaino**

Orientador

Universidade Estadual de Londrina

---

**Dr. Márcio Roberto Covacic**

Coorientador

Universidade Estadual de Londrina

---

**Dr. Emerson Ravazzi Pires da Silva**

Convidado

UTFPr - Universidade Tecnológica Federal  
do Paraná

Campus de Cornélio Procópio

Brasil

2014



*À minha esposa, Mercia Mary, companheira de tantos anos, que me incentivou, me ajudou nos momentos mais difíceis dessa caminhada e soube aceitar com paciência as horas furtadas de estar ao seu lado de corpo e mente, com todo reconhecimento e amor.*





# Agradecimentos

Agradeço àquele que tudo pode e cujo poder mantém todas as coisas em movimento no universo.

Agradeço à minha esposa, coautora comigo da nossa maior obra sobre a terra, nossos filhos e filhas, de quem advieram a alegria dos avós: nossos netos e netas.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Ruberlei Gaino, que me guiou com o seu conhecimento sobre Teoria do Controle e Engenharia Biomédica, compartilhando-o comigo nos momentos cruciais dessa caminhada. Conhecimento esse, fruto de seu trabalho árduo e experiência de vários anos na área, sem o qual o trabalho presente não teria a qualidade que apresenta. Além disso, ele soube me incentivar para vencer os obstáculos tão frequentes nessa aventura intelectual.

Agradeço ainda ao Prof. Dr. Márcio Roberto Covacic por suas preciosas sugestões na melhoria do texto e na superação das dificuldades no trabalho, oriundas da complexidade matemática da utilização das desigualdades matriciais lineares na teoria de controle.



*“Não se ajustem demais à sua cultura, a ponto de não poderem pensar mais. Em vez disso, concentrem a atenção em Deus. Vocês serão mudados de dentro para fora. Descubram o que ele quer de vocês e tratem de atendê-lo. Diferentemente da cultura dominante, que sempre os arrasta para baixo, ao nível da imaturidade, Deus extrai o melhor de vocês e desenvolve em vocês uma verdadeira maturidade. (Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2. Fonte: Paráfrase do original por (PETERSON, 2011).)*



# Resumo

O presente estudo tem por finalidade abordar o controle de acionamento da cadeira de rodas por sopro e sucção e o controle de movimentos dos pacientes paraplégicos com o uso de eletroestimuladores. Inicialmente, são utilizados controladores proporcional-integral (PI) e proporcional (P) para estabilização dinâmica de um modelo linear simplificado da cadeira de rodas controlada por sopro e sucção. Em seguida, alguns modelos dinâmicos lineares e não-lineares de veículos sobre rodas com tracionamento diferencial (VRTD), encontrados na literatura acadêmico-científica e representados em espaço de estados, são comparados em suas características básicas. Um modelo dinâmico linearizado, simplificado, é obtido e testado em ambiente do Matlab®. Então a matriz de realimentação de saída é determinada para regular o sistema considerando as incertezas politópicas paramétricas contidas no modelo e utilizando uma abordagem com *Linear Matrix Inequality* LMI. A metodologia de incertezas paramétricas limitadas em norma é utilizada para desenvolver um controlador robusto para estabilização da posição do joelho de um paciente paraplégico através da estimulação elétrica funcional, *Functional Electrical Stimulation* (FES). Neste segundo caso, porém é determinada uma matriz de realimentação de estados para regular o sistema e são inseridas restrições algébricas nas LMIs para limitação da duração do pulso elétrico utilizado na FES para o recrutamento das fibras musculares, isto é, a largura de pulso mínima da planta. Essas restrições atuam como um limitante superior para a variação desses sinais.

**Palavras-chaves:** modelo dinâmico não-linear em espaço de estados. controle robusto. LMIs. realimentação de estados. realimentação de saída. incertezas paramétricas politópicas. incertezas paramétricas limitadas em norma.



# Abstract

The present study aims to address the drive control of the wheelchair by blowing and suction and the control of movements of paraplegic patients using functional electrical stimulation. Initially, proportional-integral (PI) and proportional (P) controllers are used for dynamic stabilization of a simplified linear model of the wheelchair controlled by blowing and sucking. Then some linear and nonlinear dynamic models of vehicles on wheels with traction differential, found in academic-scientific literature and represented in state space, are compared in their basic characteristics. A linearized, simplified dynamic model is obtained and tested in the Matlab® environment. Then the output feedback matrix is determined to regulate the system considering the polytopic parametric uncertainties of the model by using an Linear Matrix Inequality (LMI) approach. The norm-bounded uncertainties methodology is used to develop a robust controller to stabilize the position of a paraplegic patient knee through Functional Electrical Stimulation (FES). In the latter case, however, a state feedback matrix is determined to stabilize the system. Algebraic restrictions are placed on the LMI for limiting the duration of the electrical pulse used in the FES to the recruitment of muscular fibers, i.e., the minimum pulse width of the plant. These restrictions act as an upper bound for the variation of these signals.

**Key-words:** nonlinear dynamic state-space model. robust control. LMIs. state feedback. output feedback. polytopic parametric uncertainties. norm-bounded parametric uncertainties.





# Lista de ilustrações

Figura 1 – Equipe multidisciplinar envolvida com a reabilitação de uma pessoa com incapacidade física. . . . .	38
Figura 2 – Diagrama esquemático do controle robusto em MF do neuroestimulador.	40
Figura 3 – Nomenclatura das regiões da curva de recrutamento. . . . .	40
Figura 4 – Curva de recrutamento de fibras (os círculos pretos representam fibras ativadas). O eixo vertical mostra o grau de ativação muscular, $\alpha$ , o eixo horizontal mostra a duração, $d$ , do estímulo aplicado no músculo. . . . .	41
Figura 5 – Forma geral de modelos. . . . .	42
Figura 6 – Os elementos e a formulação da Programação Linear do Problema de Decisão do Carpinteiro. . . . .	43
Figura 7 – Princípio de funcionamento do relógio de água com regulador de flutuação de Ktesibios. . . . .	45
Figura 8 – Máquina a vapor de Watt com regulador centrífugo de esferas suspensas.	46
Figura 9 – Diagrama de blocos de um sistema de controle linear de tempo contínuo representado em espaço de estado pelas equações 1.5 e 1.6. . . . .	50
Figura 10 – Linearização em torno de um ponto A. . . . .	52
Figura 11 – Ilustração dos conceitos de estabilidade em duas dimensões. (a) Estado de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov. (b) Estado de equilíbrio assintoticamente estável. (c) Estado de equilíbrio instável. . . . .	55
Figura 12 – Sistema massa-mola-massa. . . . .	59
Figura 13 – Planta em MF com controlador proporcional. . . . .	61
Figura 14 – Saída do controlador proporcional e integral. . . . .	62
Figura 15 – Saída do controlador proporcional e derivativo. . . . .	63
Figura 16 – Modelo linear simplificado do veículo sobre rodas com tracionamento diferencial. . . . .	64
Figura 17 – Um politopo com cinco vértices. . . . .	74
Figura 18 – Representação gráfica de um sistema com realimentação da saída do Problema 1.13.1. . . . .	92
Figura 19 – Protótipo da cadeira de rodas controlada da UEL/CTU, Departamento de Engenharia Elétrica. . . . .	104
Figura 20 – Diagrama de blocos do sistema de controle da cadeira de rodas guiada por um interface homem-máquina com três possibilidade de comandos de direção: oral, autônomo e manual. . . . .	106
Figura 21 – Diagrama de blocos do sistema de controle da cadeira de rodas com indicação dos parâmetros e variáveis do modelo. . . . .	107

Figura 22 – Diagrama de blocos do sistema de controle da cadeira de rodas com valores numéricos para simulação. . . . .	108
Figura 23 – Diagrama de blocos modificado do sistema de controle da cadeira de rodas com separação do controlador $PI$ em dois blocos paralelos de ganho $P$ e controlador $I$ , com explicitação das variáveis $X_1(s)$ , $X_2(s)$ , $X_3(s)$ e $X_4(s)$ . . . . .	112
Figura 24 – Relações entre a derivada e a função em um integrador. . . . .	112
Figura 25 – Representação gráfica do modelo não-linear de um VRTD e seus parâmetros, segundo ZHANG et al. (1998). . . . .	118
Figura 26 – Representação gráfica do modelo não-linear de um VRTD e seus parâmetros, segundo MARTINS et al. (2008). . . . .	118
Figura 27 – Representação gráfica do modelo não-linear de um VRTD e seus parâmetros, segundo De La CRUZ, BASTOS e CARELLI (2011). . . . .	120
Figura 28 – Representação esquemática da planta da articulação do joelho do paciente.	132
Figura 29 – Resultados da resposta ao degrau unitário do controle dinâmico da cadeira, $V = 0[m/s]$ e $\Omega = 1[rad/s]$ e $V = 1[m/s]$ e $\Omega = 0[rad/s]$ . . . . .	139
Figura 30 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice $Pd1(0.40; 0; 0.151)$ e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ . . . . .	144
Figura 31 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice $Pd2(0.40; 0; -0.151)$ e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ . . . . .	144
Figura 32 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice $Pd3(0.40; 0.151; 0.151)$ e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ . . . . .	145
Figura 33 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice $Pd4(0.40; 0.151; -0.151)$ e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ . . . . .	145
Figura 34 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice $Pd5(0.70; 0; 0.151)$ e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ . . . . .	146
Figura 35 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice $Pd6(0.70; 0; -0.151)$ e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ . . . . .	146
Figura 36 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice $Pd7(0.70; 0.151; 0.151)$ e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ . . . . .	147
Figura 37 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice $Pd8(0.70; 0.151; -0.151)$ e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ . . . . .	147
Figura 38 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, ponto $Pdgc1(0.70; 0; 0)$ do interior e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ . . . . .	148
Figura 39 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, ponto $Pdgc2(0.40; 0; 0)$ do interior e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ . . . . .	148
Figura 40 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, ponto $Pdgc3(0.45; 0; 0)$ do interior e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ . . . . .	149

Figura 41 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, ponto $Pdcg4(0.70; 0; -0.1)$ do interior e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ .	149
Figura 42 – Movimentação angular da cadeira para a direita em relação à movimentação angular das rodas de tracionamento.	150
Figura 43 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para malha aberta, ponto $Pdcg1(0.70; 0; 0)$ do interior e degrau unitário nas entradas $U_{ref}$ e $\Omega_{ref}$ .	150
Figura 44 – Simulação das equações dinâmicas do modelo do parapléxico para o ponto de operação de $30^\circ$ , sendo $\tilde{f}_{21max} = -21.7834$ e $\tilde{f}_{21min} = -36.0085$ , SEM restrição de saída.	156
Figura 45 – Simulação das equações dinâmicas do modelo do parapléxico para o ponto de operação de $30^\circ$ , sendo $\tilde{f}_{21max} = -21.7834$ e $\tilde{f}_{21min} = -36.0085$ , COM restrição de saída.	157
Figura 46 – Intervalo de restrição para a largura de pulso mínima.	157



# Lista de tabelas

Tabela 1	–	Parâmetros e valores do modelo linear simplificado do VRTD. . . . .	65
Tabela 2	–	Descrição dos parâmetros dos modelos não-lineares utilizados em (ZHANG et al., 1998; CELESTE et al., 2007; MARTINS et al., 2008; De La CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011). . . . .	117
Tabela 3	–	Parâmetros do modelo da cadeira de rodas utilizados para determinação das matrizes $Ad_i$ e $Bd_i$ , correspondentes a cada um dos vértices do politopo. . . . .	128
Tabela 4	–	Natureza e valores dos parâmetros obtidos experimentalmente em (FERRARIN; PEDOTTI, 2000; GAINO et al., 2011; DIOGO et al., 2012) para o complexo canela-pé de um paciente de 30 anos, paraplégico. . .	133
Tabela 5	–	Autovalores da planta para cada vértice do politopo $Pd_i(d_i, b1_i, b2_i)$ , para $i = 1, 2, \dots, 7$ e 8 e para os quatro pontos do interior do politopo, $Pd_{cg_1}$ , $Pd_{cg_2}$ , $Pd_{cg_3}$ e $Pd_{cg_4}$ , em MA e MF. . . . .	143
Tabela 6	–	Valores dos parâmetros iniciais escolhidos para simulação. . . . .	153
Tabela 7	–	Parâmetros de entrada e de saída obtidos experimentalmente para o caso simples de simulação SEM restrição na saída, considerando os parâmetros da Tabela 6 e utilizados na geração da Figura 44. . . . .	154
Tabela 8	–	Pontos notáveis observáveis na Figura 44, simulação SEM restrição de saída. Para cada parâmetro de entrada e saída são examinadas três curvas, a saber: para $\delta = 1$ , $\delta = 0$ e $\delta = -1$ , conforme legenda. . . . .	155
Tabela 9	–	Parâmetros de entrada e de saída obtidos experimentalmente para o caso de simulação com restrição na saída, considerando os parâmetros da Tabela 6 e utilizados na Figura 45 . . . . .	158
Tabela 10	–	Pontos notáveis observáveis na Figura 44, simulação COM restrição de saída. Para cada parâmetro de entrada e saída são examinadas três curvas, a saber: para $\delta = 1$ , $\delta = 0$ e $\delta = -1$ , conforme legenda. . . . .	159



# Lista de abreviaturas e siglas

AP	Action Potential (Potencial de Ação)
DOF	Degree Of Freedom (Grau de Liberdade)
DC	Direct Current (Corrente Contínua)
ERP	Estritamente Real Positivo
ITAE	Integral of Time multiplied by Absolute Error (Integral de Tempo multiplicada pelo Erro Absoluto)
LMI	Linear Matrix Inequality (Desigualdade Matricial Linear)
LMIs	Linear Matrix Inequalities (Desigualdades Matriciais Lineares)
LQR	Linear Quadratic Regulator (Regulador Quadrático Linear)
LVDT	Linear Variable Differential Transformer (Transformador Diferencial Variável Linear)
LTI	Linear Time Invariant (Linear Invariante no Tempo)
MIMO	Multiple-Input, Multiple-Output (Entradas Múltiplas, Saídas Múltiplas)
NES	Neuromuscular Electrical Stimulation (Estimulação Elétrica Neuromuscular Funcional)
MA	Malha Aberta
MF	Malha Fechada
PID	Proportional Integral Derivative (Proporcional Integral Derivativo)
PI	Proportional Integral (Proporcional Integral)
PD	Proportional Derivative (Proporcional Derivativo)
P	Proportional (Proporcional)
$P_s$	Largura de Pulso
$P_N$	Largura de Pulso Não-Referenciada
RP	Real Positivo

SAE	Society of Automotive Engineers (Sociedade de Engenheiros Automotivos)
SFR	Sistema Físico Real
SISO	Single-Input, Single-Output (Entrada Simples, Saída Simples)
SPR	Strictly Positive Real (Sistemas Estritamente Reais Positivos)
SDP	Semidefinite Programming (Programação Semidefinida)
S-Procedure	Procedimento S
VRTD	Veículo sobre Rodas com Tracionamento Diferencial



# Lista de símbolos

$a$	Distância entre o centro cinemático e o ponto de interesse na cadeira de rodas
$A$	Ponto da cadeira de rodas rastreado pelo controlador, matriz característica do modelo em espaço de estados
$b_1, b_2$	Deslocamentos longitudinal e lateral do CG da cadeira de rodas, respectivamente
$\beta$	Taxa de decaimento
$B$	Coefficiente viscoso, centro da linha de base das rodas acionadoras da cadeira de rodas, matriz de entrada do modelo em espaço de estados
$B_e$	Coefficiente viscoso efetivo do motor, rotor e engrenagens da cadeira de rodas combinados
$C$	Local da ferramenta da cadeira de rodas, matriz de saída do modelo em espaço de estados
$d$	Distância entre as rodas traseiras de acionamento da cadeira de rodas
$D$	Matriz de transmissão direta do modelo em espaço de estados
$\delta$	Ângulo de direção das rodas de um veículo, vetor de incertezas paramétricas
$\delta A$	Matriz de incertezas
$\Delta$	Matriz diagonal das incertezas contendo parâmetros incertos normalizados na diagonal principal
$\exists$	Existe
$E$	Coefficiente do termo exponencial
$\forall x$	Para qualquer valor de $x$
$F_{x',c}, F_{y',c}$	Forças resultantes no pneu nas direções longitudinal e lateral no ponto $C$ , respectivamente
$\gamma$	Limitante superior para norma infinita da função de transferência $G_{wz}$

$G$	Coeficiente da função de transferência (ganho estático), centro de gravidade
$\in$	Pertence
$I$	Constante integral dos controladores PI
$I - z$	Momento de inércia do veículo em torno do eixo $z$ e
$I_e$	Momento de inércia efetivo do motor, rotor e engrenagens da cadeira de rodas combinados
$J$	Momento de inércia do complexo pé-canela
$K_1, K_2$	Constantes proporcionais dos controladores P e PI, respectivamente
$k_a, k_b$	Constantes eletromotiva e de torque dos motores das rodas da cadeira de rodas, respectivamente
$K$	Ganho da função de transferência dos motores DC
$K_{DR}, K_{DT}$	Ganho derivativo do controlador PD de baixo nível rotacional e translacional, respectivamente
$K_{PR}, K_{PT}$	Ganho proporcional do controlador PD de baixo nível rotacional e translacional, respectivamente
$K_P$	Ganho do controlador proporcional
$K_I$	Ganho do controlador integral
$l$	Distância entre o joelho e o centro de massa do complexo pé-canela
$L$	Ponto de contato da roda com o chão da roda castor, matriz componente da matriz de incertezas $\delta A$
$\lambda$	Autovalores de uma matriz de sistema, coeficiente do termo exponencial de um modelo matemático
$\lambda_0$	Restrição de saída para sistemas com incertezas limitadas em norma
$\Leftrightarrow$	Se e somente se
$m$	Massa do complexo pé-canela, relação entre o eixo traseiro e o eixo da roda motorizada da cadeira de rodas
$M_{a0}$	Torque ativo do joelho do paciente paraplégico
$\mu$	Limitante superior a sinais de controle e saídas

$\nexists$	Não existe
$\nu_{x',e}, \nu_{y',e}$	Forças resultantes nas direções longitudinal e lateral no ponto $E$ , respectivamente
$\omega$	Velocidade angular, ângulo elástico de repouso do joelho
$\omega_r, \omega_l$	Velocidades angulares das rodas direita e esquerda da cadeira de rodas, respectivamente
$\Omega$	Velocidade angular
$P > 0$	Indica que a matriz $P$ é positiva definida
$P \leq 0$	Indica que a matriz $P$ é negativa semidefinida
$P < 0$	Indica que a matriz $P$ é negativa definida
$P \geq 0$	Indica que a matriz $P$ é positiva semidefinida
$\pi$	Fator de restrição escalar para sistemas incertos com incertezas limitadas
$P_N$	Largura de pulso neuroestimulador não referenciada
$\psi$	Ângulo para funções geométricas, ângulo de posicionamento da cadeira de rodas
$P_s$	Largura do pulso neuroestimulador
$r$	Raio das rodas traseiras de acionamento da cadeira de rodas
$R$	Ponto de contato com o chão das rodas direita e esquerda da cadeira de rodas
$R_a$	Resistência elétrica dos motores acionadores da cadeira de rodas
$\Rightarrow$	Implica em
$R_t$	Raio nominal dos pneus das rodas da cadeira de rodas
$\tau, \tau_u, \tau_\omega$	Torques mecânico de motores elétricos
$\tau$	Restrição escalar, coeficiente da função de transferência (constante de tempo do polo)
$\theta$	Ângulo de direcionamento da cadeira de rodas, vetor de grandezas paramétricas
$\theta_\nu$	Ângulo de articulação do joelho do paciente

$\theta_{\nu 0}$	Ponto de operação angular relativo à articulação do joelho de um paciente
$\triangleq$	Por definição
$T$	Constante de tempo do motor DC
$u_{ref}, U_{ref}, \omega_{ref}, \Omega_{ref}$	Velocidades lineares e angulares de referência da cadeira de rodas, respectivamente
$V$	Velocidade angular
$\xi$	Fator de limitação da saída de um sistema, fator de restrição escalar para sistemas incertos com incertezas limitadas, vetor de estado para sistemas descritores
:	Tal que
'	Indica matriz ou vetor transpostos

# Sumário

Introdução	33	
<b>I</b>	<b>REFERENCIAIS TEÓRICOS</b>	<b>35</b>
<b>1</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>37</b>
<b>1.1</b>	<b>Conceitos básicos sobre engenharia biomédica</b>	<b>37</b>
1.1.1	Engenharia Biomédica e Engenharia de Reabilitação	37
1.1.2	A utilização da estimulação elétrica funcional (FES) na prática clínica da reabilitação do paciente com deficiência física	39
<b>1.2</b>	<b>Modelagem, simulação e controle</b>	<b>41</b>
1.2.1	Uma abordagem histórica	41
1.2.2	Modelagem em Espaço de Estados de Sistemas Dinâmicos	47
<b>1.3</b>	<b>Métodos de linearização de sistemas não-lineares</b>	<b>50</b>
1.3.1	Método de expansão em série de Taylor	51
1.3.2	Método indireto de Lyapunov	53
<b>1.4</b>	<b>Estabilidade de sistemas não-lineares</b>	<b>55</b>
<b>1.5</b>	<b>Controlabilidade e Observabilidade de Sistemas</b>	<b>56</b>
<b>1.6</b>	<b>Controlador Proporcional-Integral-Derivativo - PID</b>	<b>61</b>
<b>1.7</b>	<b>Modelagem dinâmica simplificada de um veículo sobre rodas com tracionamento diferencial - VRTD</b>	<b>63</b>
<b>1.8</b>	<b>Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs</b>	<b>66</b>
1.8.1	Estabilidade de Lyapunov e uma breve perspectiva histórica do desenvolvimento das LMIs	66
1.8.2	Propriedades das LMIs	71
<b>1.9</b>	<b>Normas de vetores, matrizes, sinais e sistemas</b>	<b>79</b>
<b>1.10</b>	<b>Norma euclidiana <math>\mathcal{H}_2</math></b>	<b>82</b>
1.10.1	Norma euclidiana $\mathcal{H}_2$ via LMIs	85
<b>1.11</b>	<b>Norma infinita <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	<b>85</b>
1.11.1	Norma infinita $\mathcal{H}_\infty$ via LMIs	86
<b>1.12</b>	<b>Controle robusto <math>\mathcal{H}_2</math> para sistema descritor</b>	<b>88</b>
<b>1.13</b>	<b>Sistemas Estritamente Reais Positivos - ERP</b>	<b>90</b>
1.13.1	Introdução	90
1.13.2	Sistemas hiperestáveis e assintoticamente hiperestáveis	90
1.13.3	Síntese de sistemas ERP	92
1.13.4	Determinação da matriz de realimentação que torna o sistema ERP	93

1.13.5	Sistemas com realimentação da saída e mesmo número de entradas e saídas	93
1.13.6	Sistemas com realimentação da saída e números diferentes de entradas e saídas	94
<b>1.14</b>	<b>Sistemas com incertezas limitadas em norma</b>	<b>96</b>
<b>1.15</b>	<b>Controle de sistemas com taxa de decaimento e restrição de saída</b>	<b>99</b>
<b>1.16</b>	<b>Conclusão Parcial: Capítulo 1</b>	<b>101</b>
<b>2</b>	<b>CONTROLADOR PI PARA UM MODELO LINEAR SIMPLIFICADO DA CADEIRA DE RODAS</b>	<b>103</b>
<b>2.1</b>	<b>Contextualização e definição do problema</b>	<b>103</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelo Simulink® da estabilização da cadeira de rodas com controlador P e PI</b>	<b>106</b>
2.2.1	Funcionamento dos controladores P e PI no diagrama da Figura 20	106
2.2.2	Modelo Simulink® da estabilização da cadeira de rodas	107
<b>2.3</b>	<b>Modelo no Espaço de Estados da estabilização da cadeira de rodas com controlador PI e P</b>	<b>108</b>
2.3.1	Dedução das variáveis de estado a partir do diagrama de blocos do modelo linear simplificado do ambiente Simulink®	111
<b>3</b>	<b>CONTROLADOR ROBUSTO UTILIZANDO LMIS EM PRESENÇA DE INCERTEZAS PARAMÉTRICAS POLITÓPICAS PARA UM MODELO NÃO-LINEAR DE UM VEÍCULO SOBRE RODAS COM TRAÇÃO DIFERENCIAL</b>	<b>115</b>
<b>3.1</b>	<b>Contextualização e definição do problema</b>	<b>115</b>
<b>3.2</b>	<b>Análise e avaliação de alguns modelos não-lineares da cadeira de rodas</b>	<b>115</b>
3.2.1	Modelo não-linear da cadeira de rodas segundo ZHANG et al. (1998)	115
3.2.2	Modelo não-linear da cadeira de rodas segundo MARTINS et al. (2008)	116
3.2.3	Modelo não-linear da cadeira de rodas segundo De La CRUZ C. C. e CARELLI (2006)	119
<b>3.3</b>	<b>Determinação da equação do modelo dinâmico não-linear simplificado da cadeira de rodas segundo De La CRUZ, BASTOS e CARELLI (2011)</b>	<b>121</b>
<b>3.4</b>	<b>Linearização do modelo não-linear simplificado segundo De La CRUZ, BASTOS e CARELLI (2011)</b>	<b>123</b>
3.4.1	Obtenção da representação não-linear do sistema em equações de estado	123
3.4.2	Linearização do modelo não-linear simplificado da cadeira de rodas	124
<b>3.5</b>	<b>Projeto do controlador robusto do sistema com incertezas politópicas e LMIs</b>	<b>126</b>
3.5.1	Determinação dos valores das matrizes para cada vértice do politopo	127

4	<b>CONTROLADOR ROBUSTO DO ÂNGULO DE ARTICULAÇÃO DO JOELHO DE UM PACIENTE PARAPLÉGICO UTILIZANDO LMIS EM PRESENÇA DE INCERTEZAS PARAMÉTRICAS LIMITADAS EM NORMA</b> . . . . .	131
4.1	Contextualização e definição do problema . . . . .	131
4.2	Modelo não-linear da articulação do joelho do paciente . . . . .	132
4.3	Projeto do controlador do sistema com incertezas limitadas em norma e LMIs . . . . .	134
<b>II</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>137</b>
5	<b>CONTROLADOR PI PARA UM MODELO LINEAR SIMPLIFICADO DA CADEIRA DE RODAS</b> . . . . .	139
5.1	Saídas da simulação com Matlab® e Equações de Estado . . . . .	139
5.2	Conclusão Parcial: Capítulo 5 . . . . .	140
6	<b>CONTROLADOR ROBUSTO UTILIZANDO LMIS EM PRESENÇA DE INCERTEZAS PARAMÉTRICAS POLITÓPICAS PARA UM MODELO NÃO-LINEAR DE UM VRTD</b> . . . . .	141
6.1	Saídas da simulação . . . . .	141
6.1.1	Obtenção da matriz de realimentação . . . . .	141
6.1.2	Determinação dos autovalores da planta nos vértices do politopo e geração das saídas . . . . .	142
6.2	Conclusão Parcial: Capítulo 6 . . . . .	151
7	<b>CONTROLADOR ROBUSTO DO ÂNGULO DE ARTICULAÇÃO DO JOELHO DE UM PACIENTE PARAPLÉGICO UTILIZANDO LMIS EM PRESENÇA DE INCERTEZAS PARAMÉTRICAS LIMITADAS EM NORMA</b> . . . . .	153
7.1	Parâmetros de entrada, valores e gráficos de saídas da simulação . . . . .	153
7.2	Conclusão Parcial: Capítulo 7 . . . . .	160
8	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	161
	Conclusão . . . . .	161
8.1	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	163
8.2	Artigos publicados, apresentados e submetidos . . . . .	163
	Referências . . . . .	165

<b>APÊNDICES</b>	<b>173</b>
<b>III MODELAGEM DINÂMICA LINEAR SIMPLIFICADA DE VRTD</b>	<b>175</b>
<b>APÊNDICE A – PROGRAMAS IMPLEMENTADOS EM AMBIENTES MATLAB® E SIMULINK®</b>	<b>177</b>
A.1 Simulação com modelo da cadeira de rodas em espaço de estado. Fonte: do próprio autor.	178
<b>IV MODELAGEM DINÂMICA NÃO-LINEAR SIMPLIFICADA DE VRTD</b>	<b>181</b>
<b>APÊNDICE B – DEFINIÇÕES DOS VETORES PARAMÉTRICOS E DE DISTÚRBIOS</b>	<b>183</b>
B.1 Definição do vetor paramétrico e de distúrbio de Zhang	183
B.2 Definição do vetor de distúrbio de De La Cruz	183
<b>APÊNDICE C – PARÂMETROS DO CONTROLADOR ROBUSTO PARA UM MODELO NÃO-LINEAR DE UM VRTD</b>	<b>185</b>
C.1 Determinação dos elementos das matrizes lineares do VRTD Fonte: do próprio autor.	185
C.1.1 Determinação dos elementos da matriz A	185
C.1.2 Determinação dos elementos da matriz B	187
<b>APÊNDICE D – PROGRAMAS DO MATLAB® PARA DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE REALIMENTAÇÃO DO CONTROLE ROBUSTO DO VRTD.</b>	<b>189</b>
D.1 Programa para determinação dos valores das matrizes dos vértices do politopo. Fonte: do próprio autor.	190
D.2 Programa para cálculo da matriz $K_o$ de realimentação de saída do sistema utilizando LMIs. Fonte: do próprio autor.	201
D.3 Programa para cálculo dos autovalores do sistema e geração das curvas de saída. Fonte: do próprio autor.	204
<b>APÊNDICE E – CONTROLADOR ROBUSTO DO ÂNGULO DE ARTICULAÇÃO DO JOELHO DE UM PACIENTE PARAPLÉGICO UTILIZANDO LMIS EM PRESENÇA DE INCERTEZAS PARAMÉTRICAS LIMITADAS EM NORMA</b>	<b>219</b>



E.1	Programa para determinação da matriz de realimentação. Fonte: do próprio autor. . . . .	220
E.2	Programa para simulação do sistema e emissão dos gráficos de saída. Fonte: do próprio autor. . . . .	223
E.3	Programa para simulação do sistema e emissão dos gráficos de saída. Fonte: do próprio autor. . . . .	225
APÊNDICE F – DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE INCER- TEZAS DA EQUAÇÃO 1.115 . . . . .		227



# Introdução

Os modelos simbólicos são aqueles mais usados em simulação. Eles reforçam ou complementam o entendimento dos profissionais dos diversos campos da ciência e da engenharia. O primeiro passo para a utilização da simulação é a obtenção de um modelo matemático que represente o sistema em estudo dentro de um grau adequado de aproximação do sistema real (BAZZO; PEREIRA, 2006; ALLEN; KLEE, 2011). A história do controle moderno percorreu um longo caminho desde a Clepsidra de Ktesibios de Alexandria (sec. III AC) até chegar aos dias de hoje (sec. XXI) (SILVEIRA, 2007).

Os modelos trabalhados aqui são utilizados com dois objetivos básicos. A primeira parte, analisa o caso dos sistemas de controle robusto utilizados para controlar o movimento da cadeira de rodas através de um modelo em presença de incertezas politópicas. O objetivo é dar mais mobilidade às pessoas com deficiência física tais como pessoas bastante idosas e pacientes de paraplegia e tetraplegia. A segunda parte, analisa o caso dos sistemas de controle robusto utilizados para controlar a variação do ângulo de posição do joelho do paraplégico para reabilitação ou locomoção. O objetivo é o controle da estimulação elétrica neuromuscular funcional em presença de incertezas limitadas por norma usando um modelo da planta constituída pela coxa e o complexo canela-pé do paciente com deficiência (GAINO, 2009).

A cadeira de rodas segue uma abordagem genérica pela modelagem de um Veículo sobre Rodas com Tracionamento Diferencial (VRTD). Muitos trabalhos científicos têm sido desenvolvidos neste campo por isso, depois da avaliação de diversos modelos encontrados na literatura técnica e científica, opta-se pelo modelo de De La CRUZ, BASTOS e CARELLI (2011) que permite estudar a estabilidade da cadeira de rodas considerando o deslocamento do centro de gravidade da cadeira ocasionado pela movimentação do cadeirante.

Quanto mais próximos do sistema físico real, mais complexo se torna o modelo. Esses modelos dinâmicos de sistemas mais complexos apresentam não linearidades inerentes. Assim, há a necessidade de considerações simplificativas e de linearização do modelo para desenvolvimento do projeto do controlador robusto. Além disso, os modelos globais da cadeira de rodas são representados por meio de equações de estados que carregam em si a representação da parte dinâmica e cinemática do sistema. Por isso, é feito um desacoplamento da parte dinâmica do modelo global seguido da linearização do modelo encontrado.

Conforme BOYD et al. (1994), é possível tratar muitos problemas da teoria dos sistemas e controle utilizando otimização convexa envolvendo as desigualdades matriciais lineares, LMIs. As LMIs são um conjunto de inequações que representam o sistema físico

que permitem a análise da estabilidade do sistema se forem encontradas algumas matrizes que satisfaçam essas desigualdades. O desenvolvimento das LMIs se deu através do Teorema de Lyapunov surgido na década de 1940 (BOYD et al., 1994). Os primeiros pesquisadores dessa técnica utilizavam uma abordagem analítica para busca das matrizes que satisfaziam as desigualdades. Seguiu-se um longo desenvolvimento dessa técnica bem como de sua aplicação sempre crescente a vários problemas práticos em engenharia de controle. Finalmente, o surgimento dos algoritmos de pontos interiores e de excelentes ferramentas computacionais numéricas tornou a utilização das LMIs no estudo da estabilidade dos sistemas. Dessa maneira, na sequência, as LMIs são utilizadas neste trabalho para obtenção de projetos de controladores robustos para sistemas dinâmicos em presença de incertezas paramétricas politópicas e limitadas em norma.

O modelo dinâmico linearizado do veículo sobre rodas com tracionamento diferencial obtido é representado através de LMIs e testado em ambiente do Matlab®. O controlador robusto é projetado para estabilização da planta e testado no ambiente de simulação adotado. O mesmo ocorre com o modelo não-linear do controle da posição do joelho de um paciente paraplégico por estimulação elétrica funcional (*Functional Electrical Stimulation - FES*) é projetado

Nilson Moutinho dos Santos

# Parte I

## Referenciais teóricos



# 1 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo são abordados os conceitos fundamentais utilizados nesta dissertação. Após abordar os conceitos básicos de Engenharia Biomédica é feita uma breve retrospectiva histórica da modelagem e simulação dando destaque para simulação matemática e computacional via ambiente Matlab® e Simulink®. Na sequência, discorre-se sobre os princípios de modelagem em espaço de estados de sistemas dinâmicos. Em seguida, é apresentado o método de linearização de Lyapunov. Finalmente, são abordados os princípios teóricos de estabilidade de sistemas não-lineares, LMIs, incertezas paramétricas politópicas e limitadas em normas e projeto de controladores robustos.

## 1.1 Conceitos básicos sobre engenharia biomédica

### 1.1.1 Engenharia Biomédica e Engenharia de Reabilitação

Segundo [COCIAN \(2003\)](#), a Engenharia Biomédica engloba os seguintes campos: Engenharia Eletromédica, Engenharia Clínica, Engenharia Biomecânica, Engenharia Bioinformática e Bioengenharia. Ele situa a engenharia biomédica como um campo de atuação paralelo ao da engenharia elétrica e define o trabalho do engenheiro biomédico da seguinte maneira:

“[...] aplica os métodos e técnicas da engenharia elétrica, mecânica, química e de plásticos, para analisar, modificar ou controlar sistemas biológicos.”

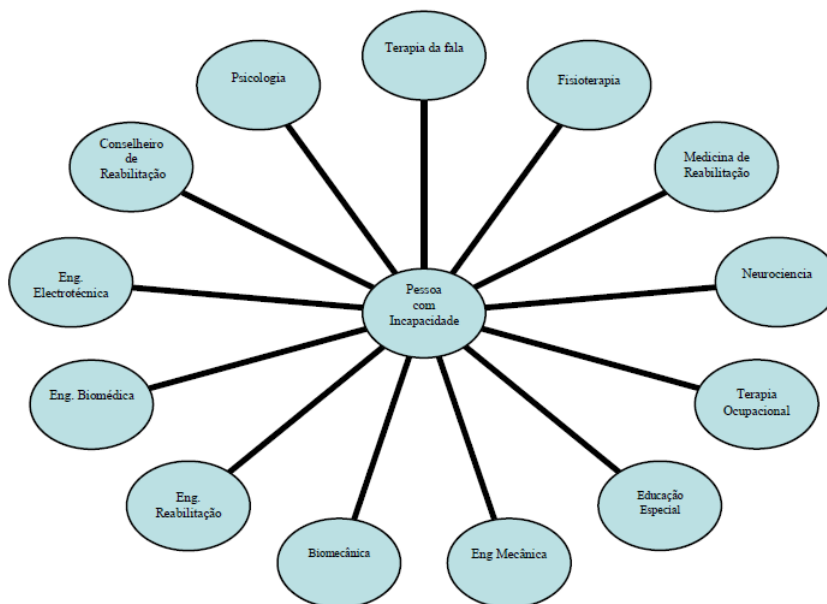
Embora na classificação anterior não se faça menção da Engenharia de Reabilitação, contudo [GODINHO \(2010\)](#) mostra que ela é incluída em Engenharia Biomédica em vários países. Ainda de acordo com [GODINHO \(2010\)](#),

“Os primeiros 5 Centros de Engenharia de Reabilitação dos EUA [...] foram criados em 1971 e 1972 nas seguintes áreas: 1. Estimulação eléctrica funcional de nervos e músculos paralisados (Hospital Rancho Los Amigos, Universidade Southern Califórnia); 2 Sistemas de Controlo Neuromuscular (Hospital de Reabilitação Moss, Universidade Temple e Drexel Universities) [...] 5. desenvolvimento de produtos de apoio para pessoas com deficiências significativas incluindo sistemas de controlo para cadeiras de rodas eléctricas [...]”

Na realidade, a reabilitação de uma pessoa com incapacidade física, como é o caso de uma pessoa paraplégica ou tetraplégica, envolve uma multiplicidade de disciplinas,

conforme ilustrado na Figura 1. Os profissionais dessas disciplinas interagem no sentido de prover recursos para a melhoria da qualidade de vida do paciente e o desenvolvimento de todas as suas potencialidades (GODINHO, 2010). E isto deve ser alcançado pela prática da engenharia de criação e manutenção de serviços e sistemas, aparelhos, máquinas estruturas, processos e produtos destinados a melhorar a qualidade de vida de forma efetiva e eficiente (GODINHO, 2010).

Figura 1 – Equipe multidisciplinar envolvida com a reabilitação de uma pessoa com incapacidade física.



Fonte: (GODINHO, 2010)

Verifica-se que ainda não há um consenso em relação ao estabelecimento das fronteiras definitivas de cada uma das especialidades da engenharia envolvidas nessa área de atuação. Por exemplo, no Brasil, a Resolução N<sup>o</sup> 473, de 26 de Novembro de 2002 do Conselho Federal de Engenharia, Arquitetura e Agronomia - Confea, na instituição da Tabela de Títulos Profissionais do Sistema Confea/Crea, na última atualização de 05/07/2012, inclui o engenheiro biomédico, nível graduação, dentro da modalidade de Engenharia Elétrica e não menciona a Engenharia de Reabilitação (CONFEEA, 2012). Já GODINHO (2010), para a realidade de Portugal, separa Engenharia Biomédica de Engenharia de Reabilitação colocando-as em paralelo com Engenharia Eletrotécnica e Engenharia Mecânica, conforme representado na Figura 1.



### 1.1.2 A utilização da estimulação elétrica funcional (FES) na prática clínica da reabilitação do paciente com deficiência física

Segundo [GAINO \(2009\)](#), uma lesão na medula torácica ou cervical leva a uma rápida atrofia nos músculos grandes da coxa. Esta atrofia debilita a saúde do indivíduo já que as atividades do coração e dos pulmões ficam comprometidas. O quadro clínico de uma pessoa nesta situação pode agravar-se pela falta de exercício dos músculos afetados. E isto contribui para uma baixa qualidade de vida do paciente e das pessoas que estão à sua volta.

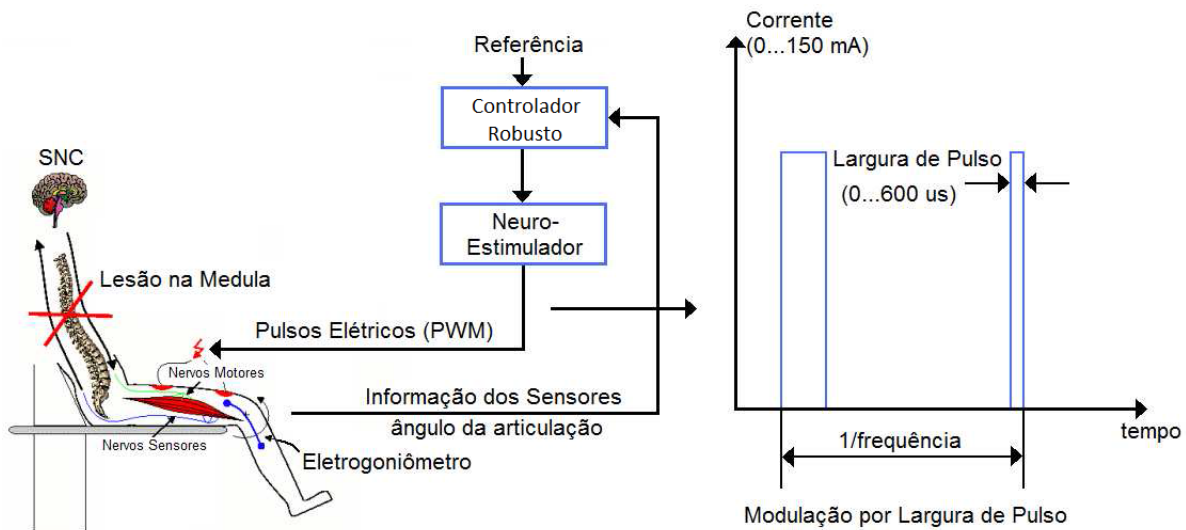
Para [BOHORQUEZ, de SOUZA e PINO \(2013\)](#), a prática clínica da reabilitação faz uso da estimulação elétrica funcional (FES) no fortalecimento, na recuperação e preservação funcional dos músculos enfraquecidos. Contudo, a ausência de padrões adequados para a realização de um movimento pré-estabelecido constitui-se em um problema tendo em vista que os parâmetros da estimulação (frequência, intensidade de corrente e duração do pulso) são variados de maneira heurística.

Os pacientes que perderam suas funções motoras, porém, mantiveram os nervos periféricos intatos, apresentam grande probabilidade de aumentar a circulação do sangue no membro paralisado. Este benefício pode ser conseguido através da estimulação elétrica neuromuscular funcional (NES). A aplicação da estimulação elétrica funcional (FES) nos neurônios motores do músculo em questão, produz a contração involuntária do mesmo, ou seja, ocasiona um potencial de ação (AP) ([GAINO, 2009](#); [DIOGO et al., 2012](#); [BOHORQUEZ; de SOUZA; PINO, 2013](#)).

[GAINO \(2009\)](#) afirma também que, embora se possa trabalhar com a NES em malha aberta (MA), os grupos de pesquisa sobre o assunto têm trabalhado com a teoria de controle em malha fechada (MF), desenvolvendo equipamentos para geração de movimentos, ortostatismo e até mesmo a marcha em deficientes. O controle eficiente obtido sobre FES em MF auxilia os movimentos e evitam a fadiga precoce dos músculos envolvidos, procedimento esse representado na [Figura 2](#).

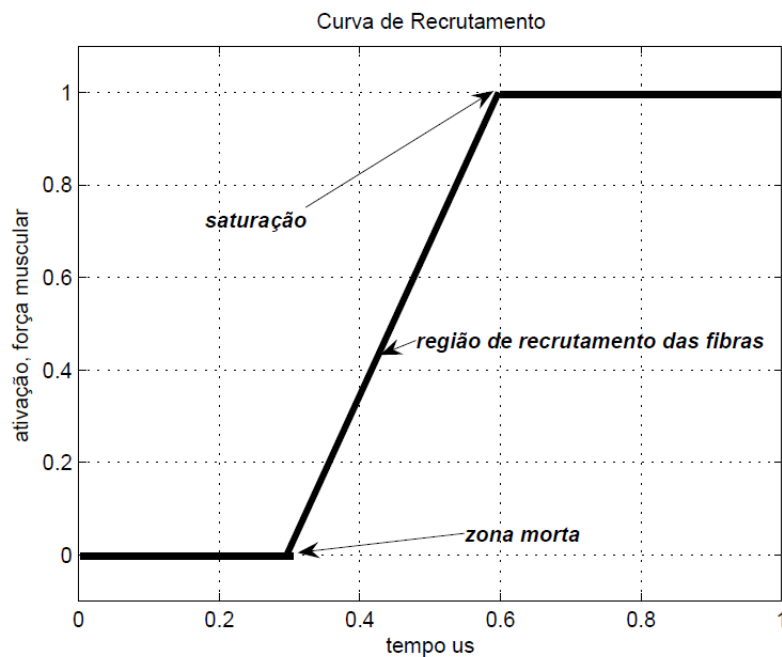
Para que o músculo se contraia, é necessário que a amplitude/intensidade e a duração do estímulo elétrico, representado à direita da [Figura 2](#), estejam acima de um limiar. Quando isso ocorre, então o potencial de ação é gerado e se propaga nas duas direções da fibra nervosa ([DIOGO et al., 2012](#)). Complexos mecanismos de estímulos eletroquímicos ocorrem na estrutura neuromuscular provocando o processo de acoplamento excitação-contração responsável pelo movimento da perna ([GAINO, 2009](#)). A modulação da força pelo número de fibras musculares recrutadas e a velocidade de recrutamento das fibras dependem de vários parâmetros, entre eles a proximidade do eletrodo com a fibra nervosa, o diâmetro do eletrodo e a variação de números de estados ativos das fibras pela variação da amplitude ou duração do pulso ([GAINO, 2009](#); [DIOGO et al., 2012](#)).

Figura 2 – Diagrama esquemático do controle robusto em MF do neuroestimulador.



Adaptado de: (GAINO, 2009)

Figura 3 – Nomenclatura das regiões da curva de recrutamento.

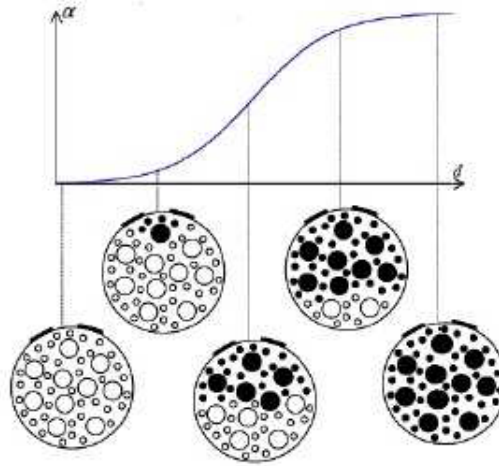


Fonte: (GAINO, 2009)

Conforme se pode verificar na Figura 4 o grau de ativação muscular ( $\alpha$ ) em função da duração do estímulo ( $d$ ) é de natureza não-linear.

GAINO (2009) mostra também que há uma região variando em torno de  $0.3[\mu s]$  a  $0.6[\mu s]$  em que o estímulo produz ativação ou força muscular conforme pode ser visto na

Figura 4 – Curva de recrutamento de fibras (os círculos pretos representam fibras ativadas). O eixo vertical mostra o grau de ativação muscular,  $\alpha$ , o eixo horizontal mostra a duração,  $d$ , do estímulo aplicado no músculo.



Fonte: (MAKSSOUD; GUIRAUD; POIGNET, 2004; GAINO, 2009)

Figura 3. Entre 0 e  $0.3[\mu s]$ , não há ativação muscular e este período corresponde à zona morta. Acima de  $0.6[\mu s]$  de duração do estímulo nenhuma fibra é recrutada e o músculo entra na região de saturação.

## 1.2 Modelagem, simulação e controle

### 1.2.1 Uma abordagem histórica

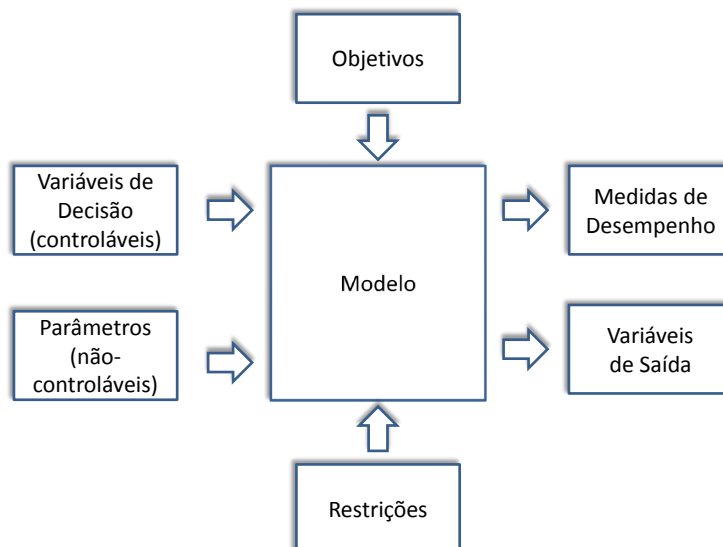
Um modelo pode ser de natureza física, que é tangível, de fácil compreensão, mas de difícil reprodução e manipulação. Em razão disso sua utilização é muito baixa. Como exemplo cita-se o modelo físico de uma aeronave. Pode também ser de natureza analógica, que é intangível, de difícil compreensão, porém de reprodução e manipulação mais fácil do que o anterior. Sua utilização é maior do que a do modelo anterior. Um exemplo poderia ser um gráfico ou um velocímetro. Um modelo pode ainda ser de natureza simbólica. Esse modelo é intangível como o analógico e de compreensão mais difícil. Porém, é de reprodução e manipulação muito fácil, de tal maneira que sua utilização é de escopo muito mais amplo. Alguns exemplos deste tipo são os modelos de simulação, algébricos, planilhas, etc (GOMIDE, 2007).

Segundo ALLEN e KLEE (2011), o objetivo da simulação é reforçar ou complementar o entendimento dos profissionais praticantes dos diversos campos da ciência e da engenharia sobre um sistema. Na simulação representa-se alguns aspectos do mundo real através de números ou símbolos os quais poderão facilmente ser manipulados, facilitando o

estudo dos aspectos representados. Além disso, o desenvolvimento e utilização de modelos permite também estudar a dinâmica de sistemas reais ou hipotéticos. As ferramentas computacionais de simulação existentes, tais como o Matlab® e Simulink®, Maple®, MathCAD®, Mathematica® e outras, são cada vez mais utilizadas. A razão principal é que elas permitem aperfeiçoar a maneira como os sistemas e as pessoas desempenham suas funções. E disponibilizam ferramentas em um ambiente seguro, controlável e com custos reduzidos para explorar as soluções dos modelos como alternativa de experimentação com sistemas reais.

A simulação, no entanto, não pode ocorrer sem que antes um modelo matemático seja desenvolvido para o sistema em estudo, ou seja, os modelos matemáticos são o ponto de partida na evolução dos modelos de simulação (ALLEN; KLEE, 2011). Os modelos de simulação servem como uma forma de prever a resposta do sistema para várias entradas e condições iniciais.

Figura 5 – Forma geral de modelos.

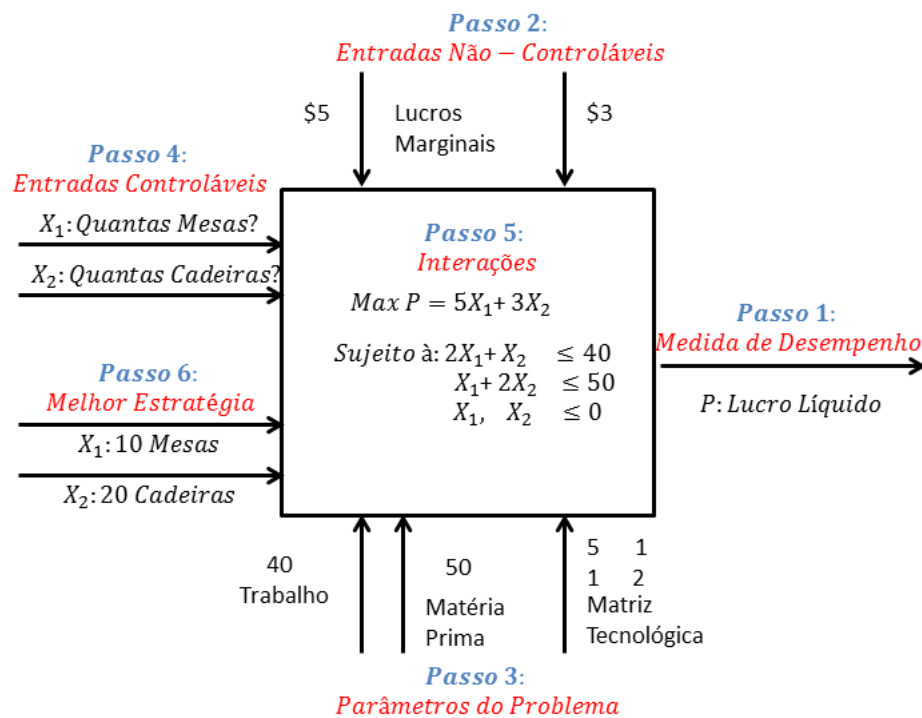


Fonte: Adaptado de (GOMIDE, 2007).

O comportamento de sistemas dinâmicos pode ser explicado por meio de equações matemáticas e fórmulas que incorporam os princípios científicos, as observações empíricas, ou ambas, em relação ao sistema. Quando os parâmetros e variáveis do sistema mudam continuamente no tempo ou espaço, os modelos consistem de equações algébricas e diferenciais acopladas. Em alguns casos, tabelas de pesquisa contendo dados empíricos são utilizadas para calcular os parâmetros. Equações podem ser complementadas por desigualdades ma-

temáticas, que restringem a variação de uma ou mais variáveis dependentes. A agregação de equações e dados numéricos empregadas para descrever o comportamento dinâmico de um sistema em termos quantitativos é chamado em conjunto como modelo matemático do sistema (ALLEN; KLEE, 2011). A Figura 5 mostra um modelo gráfico dos modelos matemáticos ressaltando as variáveis de decisão e os parâmetros de entrada, os objetivos e restrições associados às variáveis e as variáveis de saída e medidas de desempenho. As equações do modelo matemático estão inseridas no retângulo central denominado modelo. A Figura 6 mostra a representação gráfica de um exemplo de modelo matemático para análise de estabilidade do “Problema de Decisão do Carpinteiro utilizando Programação Linear”, criado por ARSHAM (1994) em sua página sobre otimização.

Figura 6 – Os elementos e a formulação da Programação Linear do Problema de Decisão do Carpinteiro.



Fonte: Adaptado de (ARSHAM, 1994)

BAZZO e PEREIRA (2006) ao considerarem a complexidade de um Sistema Físico Real (SFR) reconhecem que a criação de um modelo matemático implica na simplificação do mesmo uma vez que objetiva-se analisá-lo convenientemente e com mais facilidade. Aquele que vai simular um SFR precisa, antes de mais nada, ter em vista um modelo conceitual que o represente adequadamente. Eles entendem também que a atividade da modelagem, em particular da modelagem matemática, depende muito da perícia do profissional que a realiza. Eles comentam que se trata de “uma arte altamente individualizada, e o engenheiro deverá decidir, por um lado, qual o grau de realismo

necessário para o modelo e, por outro, a sua praticidade para determinar uma solução numérica” (BAZZO; PEREIRA, 2006).

ALLEN e KLEE (2011) afirmam que: “Modelagem matemática é uma ciência inexata, apoiada sobre uma combinação de intuição, experiência, empiricismo, e aplicação de leis científicas da natureza”. Existe uma linha de pensamento que vê a diferença entre modelos matemáticos e modelos de simulação como inexistente. Neste caso, os modelos matemáticos são vistos como incorporando os atributos do sistema real e a simulação como se referindo às soluções das equações do modelo, porém são geralmente aproximadas em natureza.

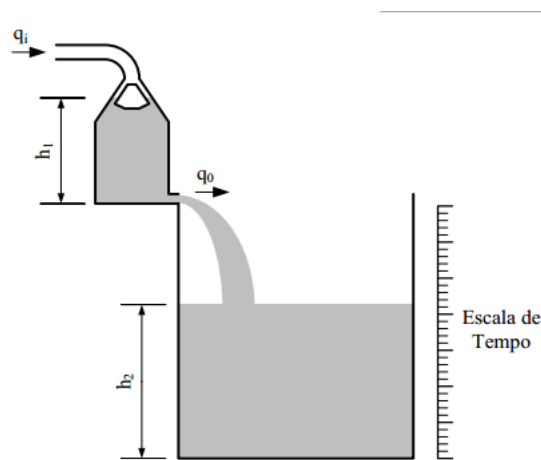
Há outra linha de raciocínio na qual é feita uma distinção entre os dois modelos. Neste caso, a simulação seria derivada do modelo matemático. Para os que adotam este ponto de vista, simular a dinâmica de um sistema requer um modelo de simulação que é diferente em natureza do modelo matemático. E um modelo de simulação confiável deve ser capaz de produzir soluções numéricas numa concordância razoável com as soluções reais (desconhecidas) do modelo matemático.

Resumindo, segundo ALLEN e KLEE (2011), modelagem é um ponto de partida essencial para qualquer estudo de simulação. Porém, a maneira como o modelo matemático é obtido é de importância secundária para um completo entendimento do modelo. O entendimento vem através do conhecimento das variáveis, parâmetros e das condições que podem impor restrições na sua adequabilidade para uma aplicação específica.

As primeiras máquinas foram desenvolvidas pelo homem com a finalidade de ampliar suas capacidades naturais. Neste sentido elas são verdadeiras próteses: para os músculos, as máquinas mecânicas; para a visão, as lunetas e os microscópios; etc.. Depois vieram máquinas energéticas, desviando a energia transportada pelos ventos, rios, etc. Nesses tipos de máquinas simples, o homem é o operador e continuamente as aciona, ajusta, regula segundo o seu querer. O relógio é outro tipo de máquina que surgiu com a função de manter uma marcha uniforme do tempo sem a intervenção do homem, ou seja, uma máquina autorregulada (SILVEIRA, 2007).

Um exemplo desse último tipo que apresentava um regulador de funcionamento indissociado da máquina, conferindo-lhe um comportamento automático, é a clepsidra do inventor e matemático grego em Alexandria, Ktesibios (285-222AC). Ela usava uma válvula controlada pelo nível de um tanque de água para regular o fluxo de saída da água (SILVEIRA, 2007). A Figura 7 ilustra o princípio de funcionamento da clepsidra. Nela pode-se ver no primeiro tanque o flutuador em forma de cone que se casava com a forma de funil invertido do tanque. Se o tanque está cheio, o flutuador corta o fornecimento da água. Quando o nível baixa, ele o abre, mantendo o nível constante (VILLAÇA; SILVEIRA, 2013).

Figura 7 – Princípio de funcionamento do relógio de água com regulador de flutuação de Ktesibios.



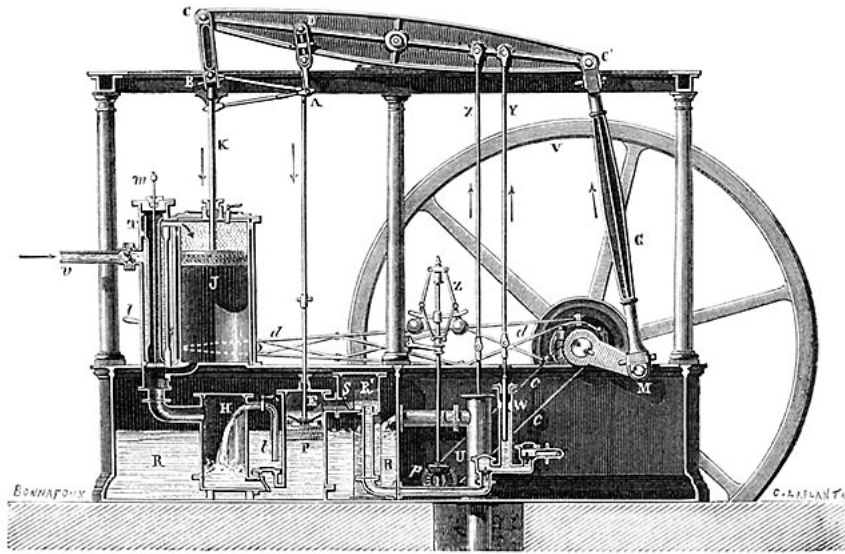
Fonte: (VILLAÇA; SILVEIRA, 2013)

A partir do início do século XVII até o início do século XVIII, começaram a aparecer as primeiras máquinas energéticas complexas para transformação de um tipo de energia em outra: as máquinas a vapor. Elas surgiram impulsionadas pelos trabalhos de Denis Papin (1707), Thomas Savery (1698) e Thomas Newcomen (1712). Contudo, devido às variações de pressão provocadas pela queima não homogênea do carvão, a regularidade da marcha na rotação do eixo dessas máquinas ainda era muito pequena. VALENTI (1996) mostra uma interessante disputa pela autoria da invenção da máquina a vapor e sua utilização industrial e naval.

Na segunda metade do século XVIII a procura de máquinas autônomas com regularidade de marcha já era de interesse geral. O aparecimento dos primeiros teares automáticos, das boias para caixas d'água e para caldeiras, dos controladores de descarga e dos reguladores de temperaturas introduziram o uso da realimentação da saída para manter constante o seu valor, sendo classificados na categoria de reguladores. A invenção da máquina a vapor por James Watt (1769), representada na Figura 8, inaugura a Revolução Industrial e faz o uso do regulador centrífugo, garantindo a regularidade da marcha da máquina em torno de um ponto de operação escolhido arbitrariamente pelo operador (SILVEIRA, 2007; VILLAÇA; SILVEIRA, 2013).

O século XIX viu nascer e se consolidar de maneira empírica o conceito de realimentação da informação ou controle em MF, os modelos matemáticos simples utilizando reguladores e a teoria da estabilidade. De acordo com SILVEIRA (2007), “a fundação da teoria de controle é datada dos trabalhos de J. C. Maxwell J. Vyshnegradskii [...]” no final do século XIX (SILVEIRA, 2007). De fato, na comunicação de MAXWELL (1868) à Royal Society of London lê-se:

Figura 8 – Máquina a vapor de Watt com regulador centrífugo de esferas suspensas.



Fonte: (VILLAÇA; SILVEIRA, 2013)

“A governor is a part of a machine by means of which the velocity of the machine is kept nearly uniform, notwithstanding variations in driving power or resistance.[...] I propose at present, without entering in any details of mechanism, to direct the attention of engineers and mathematicians to the dynamical theory of such governors<sup>1</sup>” . (MAXWELL, 1868), p. 270 e 271.

Em 1876, Vyshnegradski, apoiou-se na definição abstrata de estabilidade de L. M. Lyapunov<sup>2</sup> e publicou um trabalho na Academia de Ciências de Paris, onde, da mesma forma que Maxwell, utilizou matemática formal para modelagem do sistema e de seu regulador (SILVEIRA, 2007).

Segundo DORF e BISHOP (2008), antes da Segunda Guerra Mundial, a teoria e a prática do controle desenvolveram-se de maneira diferente nos Estados Unidos e Europa Ocidental do que na Rússia e Europa Oriental. Assim, enquanto nos Estados Unidos o domínio da frequência era utilizado principalmente para descrever a operação dos amplificadores de realimentação em termos de largura de banda e outras variáveis de frequência, na União Soviética o campo da teoria de controle era inspirado e dominado por eminentes matemáticos e engenheiros que utilizavam a abordagem do domínio do tempo. O impulso principal para a utilização da realimentação nos Estados Unidos foi o

<sup>1</sup> O regulador é uma parte de uma máquina por meio da qual a velocidade da máquina é mantida quase uniforme, não obstante as variações na potência ou na resistência de acionamento. [...] Proponho no presente, sem entrar em quaisquer detalhes de mecanismo, chamar a atenção dos engenheiros e matemáticos para a teoria dinâmica de tais governadores. (tradução nossa).

<sup>2</sup> Sobre estabilidade de Lyapunov consulte a Seção 1.4



desenvolvimento do sistema telefônico e os amplificadores de realimentação eletrônicos por Bode, Nyquist e Black nos laboratórios da Bell Telephone. Black teve que resolver a questão da estabilização, linearização e melhoria dos amplificadores, utilizados em pares, para levar as conversações através de milhares de quilômetros de distância (SILVEIRA, 2007; DORF; BISHOP, 2008; NISE, 2009). SILVEIRA (2007) observa que:

“Se Black generalizou bastante a ideia da realimentação negativa do erro, Nyquist e Bode perceberam que a função de transferência era uma função de variável complexa, à qual podia ser aplicada a riquíssima teoria deste tipo de função. Esta observação matemática permitiu uma verdadeira explosão dos métodos de projeto na área de controle e automação<sup>3</sup>”.

### 1.2.2 Modelagem em Espaço de Estados de Sistemas Dinâmicos

Os modelos em espaço de estados são representados por matrizes que são obtidas a partir de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem que representam matematicamente o sistema em estudo. As equações do sistema expressas em termos de variáveis de estado são conhecidas por equações de estado. Ferramentas matemáticas para a resolução dessas equações de estado, tais como o Matlab®, estão disponíveis para auxiliar o engenheiro no seu trabalho (D’AZZO; HOUPIS, 2003).

Como argumenta OGATA (2010), na análise em espaço de estados estão em foco três tipos de variáveis envolvidas na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. Embora a representação em espaço de estado não seja única para um dado sistema, contudo, o número de variáveis de estado é o mesmo para qualquer representação de diferente do mesmo sistema em espaço de estado. No controle em tempo contínuo de um sistema dinâmico, os valores das entradas para  $t \geq t_1$  são guardados em dispositivos de memória tais como as saídas dos integradores, as quais são consideradas como variáveis definidoras do estado interno do sistema dinâmico. Por esta razão o número de variáveis de estado que define completamente a dinâmica do sistema é igual ao número de integradores envolvidos no sistema.

Segundo D’AZZO e HOUPIS (2003 apud KALMAN, 1963, p. 55), o estado de um sistema é definido como:

“[ $\dots$ ] a mathematical structure containing a set of  $n$  variables  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t)$ , called the state variables, such that the initial values  $x_i(t_0)$  of this set and the system inputs  $u_j(t)$  are sufficient to describe uniquely the system’s future response of  $t \geq t_0$ . A minimum set of state variables is required

<sup>3</sup> O Controle de um processo industrial (manufatura, produção, etc.) por meios automáticos ao invés de manual é frequentemente denominado automação e está presente de maneira ampla nas indústrias química, de potência elétrica, de papel, de automóveis e aço. (DORF; BISHOP, 2008)

to represent the system accurately. The  $m$  inputs,  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_j(t), \dots, u_m(t)$ , are deterministic; i.e., they have specific values for all values of time  $t \geq t_0$ .<sup>4</sup>

O tempo inicial  $t_0$  é tomado como zero e as variáveis de estado não têm a necessidade de serem quantidades fisicamente observáveis e mensuráveis, pois elas podem ser quantidades puramente matemáticas (D'AZZO; HOUPIS, 2003).

O conjunto de variáveis  $x_i(t)$  representa os elementos ou componentes de um vetor  $n$ -dimensional  $\mathbf{x}(t)$ , denominado vetor de estado, ou seja:  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]'$ . A ordem da equação característica do sistema é  $n$ , por isso a representação em espaço de estado do sistema é composta de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem (D'AZZO; HOUPIS, 2003). Quando todas as entradas  $u_j(t)$  para uma planta dada são especificadas para  $t \geq t_0$  o vetor de estado resultante determina de maneira única o comportamento da planta para  $t \geq t_0$ .

O espaço de estado é um espaço  $n$ -dimensional no qual os componentes do vetor de estado representam seus eixos coordenados. O caminho produzido no espaço de estado pelo vetor de estado  $\mathbf{x}(t)$ , à medida que ele muda com a passagem do tempo, é denominado trajetória de estado. O espaço e a trajetória de estados no caso bi-dimensional é denominado de plano de fase e trajetória de fase, respectivamente (D'AZZO; HOUPIS, 2003).

A escolha das variáveis de estado físicas para representar a planta implica na determinação dos elementos que armazenam energia no sistema e no fato de que somente variáveis físicas que não podem ser expressas em termos das demais variáveis de estado eleitas podem ser escolhidas.

OGATA (2010) estabelece que, se um sistema MIMO<sup>5</sup> envolve  $n$  integradores,  $m$  entradas e  $r$  saídas, então as equações de estado do sistema são dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

<sup>4</sup> [...] uma estrutura matemática contendo um conjunto de  $n$  variáveis  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t)$ , chamadas de variáveis de estado, tais que os valores iniciais  $x_i(t_0)$  desse conjunto e as entradas do sistema  $u_j(t)$  são suficientes para descrever de maneira única as respostas futuras do sistema de maneira precisa para  $t \geq t_0$ . Um conjunto mínimo de variáveis de estado é requerido para representar o sistema precisamente. As  $m$  entradas,  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_j(t), \dots, u_m(t)$ , são determinísticas; ou seja, elas têm valores específicos para todos os valores do tempo  $t \geq t_0$  (tradução nossa).

<sup>5</sup> Sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

as equações de saídas do sistema são dadas por:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ &\vdots \\ y_r(t) &= g_r(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

as equações 1.1 e 1.2 podem ser expressas de maneira concisa por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.4)$$

onde 1.3 é a equação de estado, 1.4 é a equação de saída e:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ g_r(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

Ainda segundo OGATA (2010), se as funções vetoriais  $\mathbf{f}$  e/ou  $\mathbf{g}$  envolvem o tempo explicitamente, então o sistema que elas representam é chamado de sistema variante no tempo.

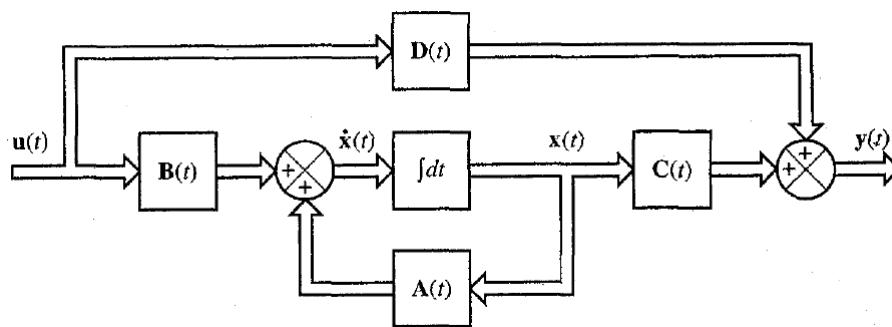
OGATA (2010) argumenta também que se as equações 1.3 e 1.4 são linearizadas com relação a um estado de operação, as equações 1.5 e 1.6 representam as equações de estado e de saída linearizadas, respectivamente.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (1.6)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$  é o vetor de saída do sistema,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz característica do sistema,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada ou de controle do sistema,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  é matriz de saída do sistema e  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  é matriz de transmissão direta do sistema.

Figura 9 – Diagrama de blocos de um sistema de controle linear de tempo contínuo representado em espaço de estado pelas equações 1.5 e 1.6.



Fonte: (OGATA, 2010)

O diagrama de blocos do sistema, representado pelas equações 1.5 e 1.6, é mostrado na Figura 9.

No caso de as funções vetoriais  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  não envolverem o tempo,  $t$ , de maneira explícita, então o sistema que elas representam é denominado sistema invariante no tempo e pode ser representado conforme as equações 1.7 e 1.8.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (1.7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (1.8)$$

Dois exemplos de equações de estados que expressam modelos de veículos sobre rodas podem ser encontrados na Seção 1.7, o modelo inverso de um VRTD, e na Seção 3.2, o modelo dinâmico simplificado.

### 1.3 Métodos de linearização de sistemas não-lineares

NISE (2009) mostra que a modelagem de um pêndulo simples pode resultar numa representação por um sistema de equações diferenciais não-lineares. SLOTINE e LI (1991)

argumentam que os sistemas físicos são inerentemente não-lineares e que todo controle de sistemas são não-lineares até certo ponto. “Por outro lado, se a faixa de operação de um sistema de controle é pequena, e se as não-linearidades envolvidas são suaves, então, o sistema de controle para estabilização do sistema pode ser razoavelmente aproximado por um sistema linearizado, cuja dinâmica é descrita por um conjunto de equações diferenciais lineares” (SLOTINE; LI, 1991), pag. 4.

Um sistema é não-linear se o princípio de superposição não se aplica (OGATA, 2010). Assim, se a resposta na saída de um sistema à soma de entradas é igual à soma das respostas às entradas individuais e se a multiplicação de uma entrada do sistema por um escalar fornece uma resposta que é igual à resposta anterior multiplicada pelo mesmo escalar, então se diz que o sistema goza das propriedades de *superposição* e *homogeneidade*. Nesse caso, o sistema é dito linear (NISE, 2009). Os procedimentos utilizados para se determinar as soluções de problemas de sistemas não-lineares, em geral, são extremamente complexos (OGATA, 2010).

Contudo, se um sistema é não-linear, sua análise e projeto do controlador podem ser simplificados através de uma aproximação linear. Trata-se de uma linearização em torno de um ponto de equilíbrio das equações não-lineares que representam o sistema, desde que os resultados obtidos forneçam uma boa aproximação da realidade. Em outras palavras, pode ser estabelecida uma relação linear em um ponto de uma curva não-linear se a faixa de valores de entrada nas proximidades desse ponto for pequena e se a origem for transladada até esse ponto (D’AZZO; HOUPIS, 2003; NISE, 2009). Porém, os resultados da análise de um sistema não-linear utilizando seus modelos linearizados devem ser interpretados cuidadosamente a fim de evitar erros grosseiros devido à aproximação no processo de linearização (ZAK, 2003).

Frequentemente é necessário investigar as propriedades de estabilidade de um sistema não-linear baseadas na sua linearização em torno de um dado ponto de equilíbrio. Nesta seção são introduzidas duas ferramentas bastante úteis para esse propósito as quais são conhecidas como: “método de expansão em série de Taylor” e “primeiro método ou método indireto de Lyapunov” (ZAK, 2003).

### 1.3.1 Método de expansão em série de Taylor

Considere-se um sistema não-linear operando em um ponto A, cujas coordenadas são dadas por  $[x_0, f(x_0)]$  conforme mostra a Figura 10. Pequenas variações na entrada,  $\delta x$ , podem ser relacionadas às variações na saída,  $\delta f(x)$ , no entorno do ponto A por meio da inclinação,  $m_a$ , da curva naquele ponto (NISE, 2009).

$$[f(x) - f(x_0)] \approx m_a(x - x_0)$$

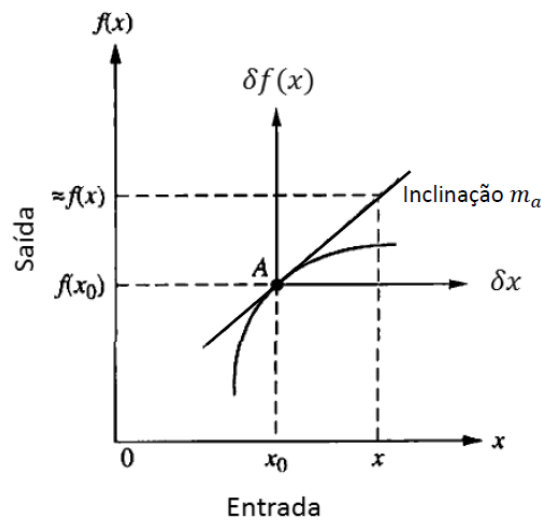


Figura 10 – Linearização em torno de um ponto A.

Fonte: (NISE, 2009)

De onde vem que:

$$\delta f(x) \approx m_a \delta x$$

, ou seja,

$$f(x) \approx f(x_0) + m_a(x - x_0) \approx f(x_0) + m_a \delta x$$

Na Figura 10 se pode ver que do ponto A origina-se um novo conjunto de eixos,  $\delta x$  e  $\delta f(x)$ , e que  $f(x) \approx f(x_0)$ , que é a ordenada da nova origem, adicionada a pequenas variações,  $m_a \delta x$ , em seguida do ponto A.

Formalmente, a expansão de uma função em série de Taylor expressa o valor da função em termos do seu valor em um ponto particular, da continuidade da função adiante desse ponto e das derivadas calculadas nesse ponto, veja Equação 1.9.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!} + \frac{d^2 f}{dx^2}\bigg|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \quad (1.9)$$

Para pequenas excursões de  $x$  em torno de  $x_0$  é possível desprezar os termos de ordem superior da Equação 1.9 e se chegar às Equações 1.10 ou 1.11, que são relações

lineares entre  $\delta f(x)$  e  $\delta x$ , obtidas anteriormente de maneira intuitiva.

$$f(x) - f(x_0) \approx \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0), \quad (1.10)$$

$$\delta f(x) \approx m_a|_{x=x_0} \delta x. \quad (1.11)$$

### 1.3.2 Método indireto de Lyapunov

O método indireto de Lyapunov consiste na análise da estabilidade de um sistema não-linear através do sistema linearizado nas proximidades de um ponto de equilíbrio do sistema.

Considere-se que o ponto de equilíbrio para testar a estabilidade do sistema é a origem e que o modelo é não-linear e representado pela Equação 1.12. Considere-se ainda que  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}^n$  é uma função continuamente diferenciável do domínio  $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{R}^n$  em  $\mathfrak{R}^n$ , que a origem  $x = 0$  está no interior de  $\mathcal{D}$  e que é um estado de equilíbrio de 1.12, ou seja,  $f(0) = 0$ , então a matriz Jacobiana de  $f$ , calculada em  $x = 0$  é dada pela Equação 1.13 (ZAK, 2003).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.12)$$

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x=0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x=0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{x=0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{x=0} & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_{x=0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{x=0} \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

onde  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  são as componentes da função vetorial  $\mathbf{f}(x)$ , ou seja, funções escalares diferenciáveis na origem,  $x = 0$ , isto é:  $\mathbf{f}(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)]'$ .

Desenvolvendo o lado direito da Equação 1.12 por Taylor tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (1.14)$$

onde a função  $\mathbf{g}$  representa os termos de mais alta ordem que gozam da seguinte propriedade:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (1.15)$$

As equações 1.14 e 1.15 sugerem que, no entorno da origem, é possível substituir o sistema não-linear representado pela Equação 1.12 pelo seu sistema linearizado em torno da origem,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ . Ou seja, a matriz Jacobiana é utilizada para representar sistemas

não-lineares por equações lineares aproximadas na vizinhança de seus pontos singulares (D'AZZO; HOUPIS, 2003).

Os Lemas 1.3.1, 1.3.2 e 1.3.3, a seguir, disponibilizam um método simples para determinar a estabilidade assintótica ou a instabilidade de um estado de equilíbrio para um sistema não-linear. Segundo SLOTINE e LI (1991), ZAK (2003), através destes teoremas do método de linearização de Lyapunov pode-se inferir sobre as propriedades de estabilidade da origem do sistema não-linear baseado na estabilidade do sistema linearizado. As provas de cada um deles pode ser encontrada em (ZAK, 2003).

**Lema 1.3.1 (Equilíbrio Assintoticamente Estável)** *Seja a origem,  $\mathbf{x}=0$ , um estado de equilíbrio de um sistema não-linear,  $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Então, a origem é um equilíbrio assintoticamente estável do sistema não-linear se  $\mathbf{A}$ , a matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}$  calculada na origem, tem todos os seus autovalores no semi-plano esquerdo aberto. (ZAK, 2003).*

**Lema 1.3.2 (Equilíbrio Instável)** *Seja a origem,  $\mathbf{x}=0$ , um estado de equilíbrio de um sistema não-linear,  $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Então, a origem é instável se  $\mathbf{A}$  tem um ou mais autovalores no semi-plano direito. (ZAK, 2003).*

**Lema 1.3.3 (Equilíbrio Marginalmente Estável)** *Se o sistema linearizado é marginalmente estável (isto é, todos os autovalores de  $\mathbf{A}$  estão no semi-plano esquerdo, mas pelo menos um deles está no eixo imaginário,  $j\omega$ ), então não se pode concluir nada da aproximação linear (o ponto de equilíbrio pode ser estável, assintoticamente estável, ou instável para o sistema não-linear. (SLOTINE; LI, 1991).*

Quando o sistema apresenta uma entrada  $\mathbf{u}$ , a equação de estado não-linear é dada pela Equação 1.16 e o ponto de equilíbrio é constante e determinado fazendo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x_0, u_0)$ . As matrizes Jacobianas são então dadas pelas equações 1.17 e 1.18.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.16)$$

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \end{array} \right]_{x=0, u=0}, \quad (1.17)$$

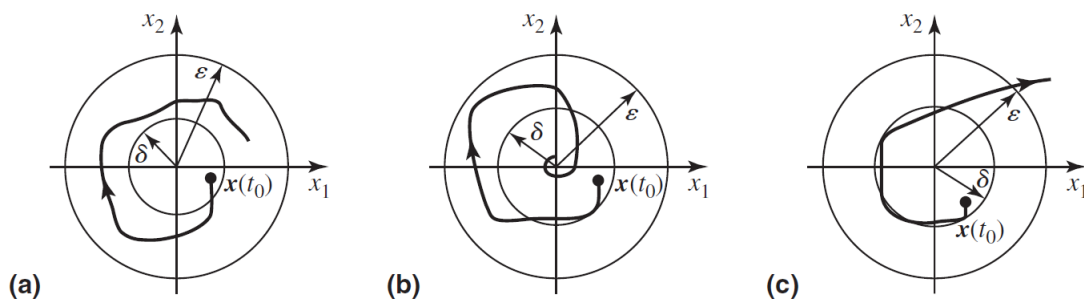
$$\mathbf{B} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_r} \end{array} \right]_{x=0, u=0}. \quad (1.18)$$



## 1.4 Estabilidade de sistemas não-lineares

A teoria sobre estabilidade dos sistemas tem um papel central na teoria de controle e na engenharia. Há vários tipos de problemas de estabilidade no estudo dos sistemas dinâmicos, como, por exemplo: estabilidade de pontos de equilíbrio, estabilidade de entrada-saída, estabilidade de órbitas periódicas, entre outros (KHALIL, 2001). A seguir, será abordado o conceito de estabilidade de pontos de equilíbrio no sentido de Lyapunov. A estabilidade do ponto de equilíbrio na origem de  $\mathfrak{R}^n$ , onde  $x = 0$ , com  $x$  representado pela Equação 1.16, para um sistema linear e invariante no tempo pode ser completamente caracterizada pelo posicionamento dos autovalores de  $A$ , representada pela Equação 1.17, no plano complexo. Além disso, a estabilidade também pode ser determinada pela linearização em torno daquele ponto (KHALIL, 2001).

Figura 11 – Ilustração dos conceitos de estabilidade em duas dimensões. (a) Estado de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov. (b) Estado de equilíbrio assintoticamente estável. (c) Estado de equilíbrio instável.



Fonte: (ZAK, 2003)

Seja o vetor constante  $\mathbf{x}_e$  um ponto de equilíbrio ou estado tal que,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$  para qualquer  $t$ . Segundo ZAK (2003), é possível transferir este ponto de equilíbrio para a origem de  $\mathfrak{R}^n$  pela introdução de uma nova variável,  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$  tal que,  $\mathbf{f}(t, 0) = \mathbf{0}$  para qualquer  $t$ . Então, considerando a Figura 11, os estados de equilíbrio possíveis no sentido de Lyapunov<sup>6</sup> podem ser assim interpretados: se o estado de equilíbrio é estável, como na Figura 11(a), uma trajetória começando dentro de um círculo interno de raio  $\delta$  nunca deixará um círculo exterior de raio  $\epsilon$ ; se o estado de equilíbrio é assintoticamente estável, como na Figura 11(b), então uma trajetória começando dentro de um círculo interno de raio  $\delta$ , mesmo quando excursionar pelo círculo externo de raio  $\epsilon$ , tenderá ao estado de equilíbrio  $\mathbf{x}_e$  na medida que  $t$  tender ao  $\infty$ , isto é,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_e) \rightarrow \mathbf{0}$  na medida em que  $t \rightarrow \infty$ ; finalmente, se o estado de equilíbrio é instável, como na Figura 11(c), então uma trajetória iniciando dentro de um círculo interno de raio  $\delta$ , deixará o círculo externo de raio  $\epsilon$  em algum tempo mais tarde.

<sup>6</sup> Sobre Lyapunov veja Seção 1.8

## 1.5 Controlabilidade e Observabilidade de Sistemas

Seja um sistema representado pela Equação 1.19, onde  $U(s)$  é a entrada,  $Y(s)$  é a saída e todas as raízes do polinômio do denominador são distintas, isto é,  $p_i \neq p_j$ . Segundo OGATA (2010), pode-se representá-lo em sua forma canônica controlável, dada pela Equação 1.20, em sua forma canônica observável, dada pela Equação 1.21, e na sua forma canônica diagonal, dada pela Equação 1.22. A forma canônica controlável é importante para o projeto de sistemas de controle através da abordagem de alocação de pólos.

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2) + \dots + (s + p_n)}, \\ &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \\ &= b_0 + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n \cdot b_0 & | & b_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_0 & | & \dots & | & b_1 - a_1 \cdot b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 \cdot u, \quad (1.20)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 \cdot u, \quad (1.21)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & & 0 \\ & -p_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -p_{n-1} & \\ 0 & & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 \cdot u. \quad (1.22)$$

Se houverem raízes múltiplas, então a forma canônica diagonal representada pela Equação 1.22 transforma-se na forma canônica de Jordan, representada na Equação 1.23, que é válida para  $p_1 = p_2 = p_3$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 \cdot u. \quad (1.23)$$

**Definição 1.5.1 (Controlabilidade)** *Uma planta linear é controlável em um tempo  $t_0$  se for possível obter uma entrada capaz de transferir todas as variáveis de estado do sistema de um estado inicial desejado para um estado final desejado em um intervalo de tempo finito (ZAK, 2003; PEREIRA, 2007; SILVA, 2007; NISE, 2009; OGATA, 2010). Neste caso, existe uma trajetória no espaço de estados que pode ser percorrida pelo sistema de MF desde o estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  até o estado final  $\mathbf{x}(t_f)$  em um tempo finito  $t_f - t_0$ . Se todos os estados do sistema forem controláveis a planta é dita ser completamente controlável.*

**Definição 1.5.2 (Observabilidade)** *Uma planta linear é observável se for possível obter um vetor de estado inicial,  $\mathbf{x}(t_0)$ , a partir da medida de  $u(t)$  e de  $y(t)$  durante um intervalo de tempo finito  $t_f - t_0$ . Isso equivale dizer que qualquer transição de estado que afete a saída do sistema estabelece a observabilidade do sistema. De maneira oposta, se para a modificação do valor de alguma variável de estado não houver alteração na saída, então, essa variável de estado é não observável (ZAK, 2003; PEREIRA, 2007; SILVA, 2007; NISE, 2009; OGATA, 2010).*

Partindo das transformações lineares:  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ , onde  $\dim \mathcal{X} = n$  e  $\dim \mathcal{U} = m$ , e considerando o sistema linear contínuo e invariante no tempo dado por 1.24, PEREIRA (2007) define controlabilidade e observabilidade conforme 1.5.3 e 1.5.4.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \\ x(t_0) &= x_0, t \geq t_0.\end{aligned}\tag{1.24}$$

**Definição 1.5.3 (Controlabilidade por equações de estados)** *Diz-se que, no sistema 1.24,  $x_1$  é alcançável num tempo  $T$ , a partir de uma condição inicial  $x_0$ , se existir uma entrada  $u : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{U}$ , admissível tal que a solução da equação 1.24, com  $x(t_0) = x_0$ , obedeça a  $x(T) = x_1$ . Um sistema é controlável se todo estado  $x_1$  puder ser alcançado num tempo  $T$  a partir de uma condição inicial  $x_0$  arbitrária. A matriz de controlabilidade  $\mathcal{C}$  é representada em 1.25 (PEREIRA, 2007).*

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & A \cdot B & \dots & A^{n-1} \cdot B \end{bmatrix}.\tag{1.25}$$

O espaço  $\mathcal{R}_0$  alcançável a partir da origem é dado por  $\mathcal{R}_0 = \text{Im } \mathcal{C}$ .

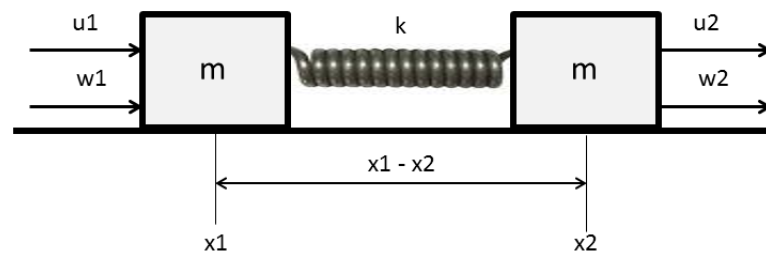
**Definição 1.5.4 (Observabilidade por equações de estados)** *O sistema 1.24 é observável se o estado  $x(t)$ , no intervalo  $[t_0, t_0 + T]$ , puder ser determinado a partir do conhecimento de  $u(\cdot)$  e  $y(\cdot)$ , neste mesmo intervalo. A matriz de observabilidade  $\mathcal{O}$  é representada por 1.26 (PEREIRA, 2007).*

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C & C \cdot A & \dots & C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}'.\tag{1.26}$$

O subespaço  $\mathcal{N}_0$  não-observável é dado por  $\mathcal{N}_0 = \ker \mathcal{C} = \{0\}$ .

**Exemplo 1.5.1 (Sistema massa-mola-massa)** *Consideremos o sistema massa-mola-massa, mostrado na Figura 12, onde  $w_1(t)$  e  $w_2(t)$  são forças perturbatórias e  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  são entradas (da Silva, 2013). O sistema pode ser representado pelas de equações de estados 1.27.*

Figura 12 – Sistema massa-mola-massa.



Fonte: Adaptado de (da Silva, 2013)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t),\end{aligned}\tag{1.27}$$

As matrizes e vetores que definem o sistema são:

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & 0 & -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} \end{bmatrix} \\ x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1.28}$$

Considerando a massa  $m = 1[\text{kg}]$  e a constante de mola  $k = 1[\text{N/m}]$  e utilizando o ambiente Matlab® é possível testar a controlabilidade do sistema massa-mola-massa:

```
>> k = 1;
>> m = 1;
>> A = [0 1 0 0; -1 0 1 0; 0 0 0 1; 1 0 -1 0];
>> B = [0 0; 1 0; 0 0; 0 1];
>> C = [1 0 0 0; 0 0 1 0];
```

Para cálculo da matriz de controlabilidade  $C$ , tem-se:

>>  $MC = \text{ctrb}(A, B)$

$$MC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para decomposição de  $C$  em seus valores singulares, basta determinar o posto<sup>7</sup> da matriz o qual é o número de seus valores singulares não nulos:

>>  $VSC = \text{svd}(MC)$

$$VSC = 2.2361 \quad 2.2361 \quad 1.0000 \quad 1.0000$$

Tendo em vista que foram retornados 4 valores singulares não-nulos isto indica que o sistema é controlável, uma vez que o posto da matriz de controlabilidade coincide com a dimensão do estado.

Para cálculo da matriz de observabilidade  $\mathcal{O}$ , tem-se:

>>  $MO = \text{obsv}(A, C)$

$$MO = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para decomposição de  $\mathcal{O}$  em seus valores singulares, basta determinar o posto da matriz o qual é o número de seus valores singulares não nulos:

>>  $VSO = \text{svd}(MO)$

$$VSO = 2.2361 \quad 2.2361 \quad 1.0000 \quad 1.0000$$

Tendo em vista que foram retornados 4 valores singulares não-nulos isto indica que o sistema é observável, uma vez que o posto da matriz de observabilidade coincide com a dimensão do estado.

<sup>7</sup>  $\text{posto}(C) = p$  é o número de linhas (ou colunas) da matriz  $C$  linearmente independentes. O posto de uma matriz  $m \times n$  é, no máximo, igual ao valor da menor dimensão da matriz.

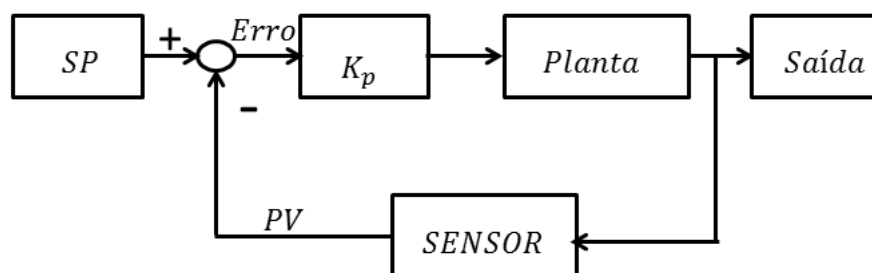
## 1.6 Controlador Proporcional-Integral-Derivativo - PID

XUE D. CHEN e ATHERTON (2007) afirma que o PID é uma das primeiras estratégias de controle surgidas utilizando primeiramente dispositivos pneumáticos, seguido de dispositivos de eletrônica analógica à vácuo e estado sólido, antes de chegar aos dispositivos microprocessadores digitais dos dias atuais. Segundo CAMPOS e TEIXEIRA (2006), XUE D. CHEN e ATHERTON (2007), o controlador PID é o algoritmo de controle mais tradicional na indústria devido à simplicidade no ajuste dos seus parâmetros (sintonia) para se obter um bom desempenho e do fato deste algoritmo estar disponível em quase todos os equipamentos de controle na indústria.

O controlador PID determina inicialmente a função de erro,  $e(t)$ , entre a variável que está sendo medida no processo (variável controlada ou *Process Variable, PV*) e o seu valor desejado (*setpoint, SP*). Então, gera um sinal de controle para eliminar este desvio. Para produzir a saída ou variável manipulada o algoritmo PID usa o erro em três módulos distintos: o termo proporcional,  $P$ , o termo integral,  $I$  e o termo derivativo,  $D$ .

O controlador  $P$ , utilizado no sistema da Figura 13, é representado pela Equação 1.29, sendo que  $K_P$  é o ganho proporcional do controlador. A posição da saída no momento em que o controlador foi colocado em automático é o seu valor inicial,  $u_0$ . No caso dos controladores digitais, o *algoritmo em velocidade* que calcula a variação da saída inclui o valor de  $u_0$ . Nesse caso, a determinação da posição da saída do controlador já parte do ponto atual. Verifica-se que quanto maior  $K_p$ , maior será a ação do controlador sobre a válvula na saída do mesmo para igual erro na variável de processo (CAMPOS; TEIXEIRA, 2006).

Figura 13 – Planta em MF com controlador proporcional.



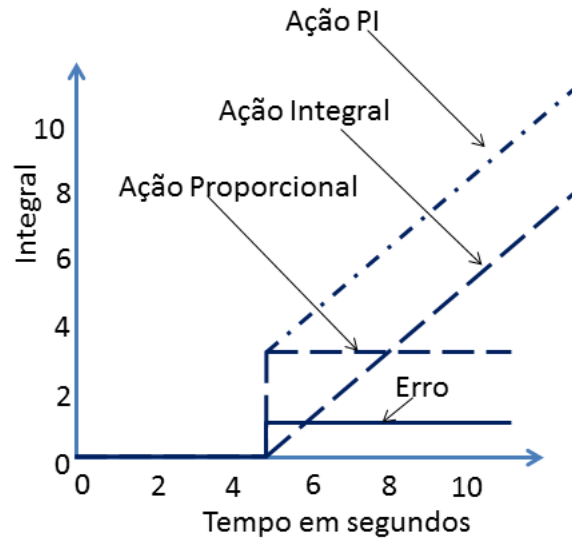
Fonte: Adaptado de (CAMPOS; TEIXEIRA, 2006)

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + u_0, \quad (1.29)$$

O controlador proporcional e integral,  $PI$ , gera uma saída que é proporcional,  $P$ , ao erro e proporcional à integral,  $I$ , do erro. É representado pela Equação 1.30 do algoritmo

de posição do controlador *PI* paralelo clássico.  $T_I$  é o tempo integral e ambos os ganhos são ajustáveis (SOBRINHO et al., 2003). O fator multiplicativo  $1/T_I$  é o ganho integral, sendo  $T_I$  o tempo integral.

Figura 14 – Saída do controlador proporcional e integral.



Fonte: Adaptado de (CAMPOS; TEIXEIRA, 2006)

A Figura 14 representa a ação dos controladores proporcional e integral quando ocorre um erro em degrau. A reação proporcional ao degrau é também um degrau multiplicado pelo ganho proporcional  $K_P$ . A reação integral é uma rampa que aumentará ou diminuirá a saída do controlador indefinidamente enquanto o erro existir. CAMPOS e TEIXEIRA (2006) argumentam que enquanto a ação proporcional muda instantaneamente a saída quando ocorre um erro, a ação integral, por sua vez, continuará mudando a saída enquanto existir o erro. Sendo assim, a ação do controlador proporcional-integral, *PI*, não aceitará um erro em regime permanente entre o valor desejado,  $SP$ , e a variável controlada pelo processo,  $PV$ , ao buscar a eliminação do erro,  $SV - PV$ . Dessa maneira a saída do controlador tenderá à saturação.

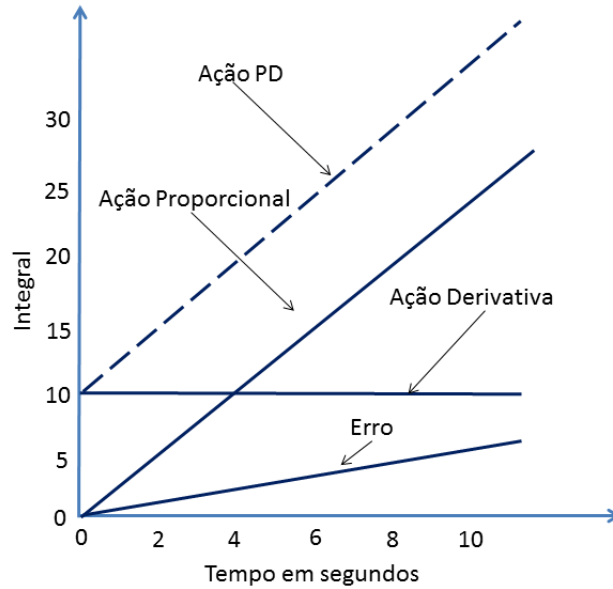
$$u(t) = K_P \cdot e(t) + \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(t)dt + u_0. \quad (1.30)$$

A Figura 15 representa a ação dos controladores proporcional e derivativo, representado pela Equação 1.31, quando ocorre um erro em rampa. A reação derivativa ao erro em rampa será um valor constante uma vez que a derivada de uma rampa é um valor fixo (degrau) que será multiplicado por um tempo derivativo  $K_P \cdot T_D$ . O tempo derivativo antecipa a ação do proporcional que ocorre já no tempo zero, assim que o controlador



calcula a derivada do erro (CAMPOS; TEIXEIRA, 2006). Essa ação evita oscilações em processos lentos.

Figura 15 – Saída do controlador proporcional e derivativo.



Fonte: Adaptado de (CAMPOS; TEIXEIRA, 2006)

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_P \cdot T_D \cdot \frac{de(t)}{dt} + u_0. \quad (1.31)$$

O controlador proporcional, integral e derivativo, *PID*, fornece uma saída que é proporcional ao erro, à integral do erro e à derivada do erro,  $e(t)$ , conforme representado na equação 1.32.

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(t)dt + K_P \cdot T_D \cdot \frac{de(t)}{dt} + u_0. \quad (1.32)$$

onde  $T_D$  é o tempo derivativo do controlador.

## 1.7 Modelagem dinâmica simplificada de um veículo sobre rodas com tracionamento diferencial - VRTD

Um veículo sobre rodas com tracionamento diferencial possui uma plataforma que se apoia sobre quatro rodas. As duas rodas traseiras produzem o movimento do veículo que é causado pela ação de dois motores com acionamentos independentes. As duas rodas dianteiras são livres e podem movimentar-se cada uma em torno de um eixo vertical, elas são conhecidas como rodas castores.

Para obtenção de um modelo linear simplificado do VRTD, algumas suposições simplificativas são consideradas: o veículo é um corpo rígido, as massas das quatro rodas e dos rotores dos motores são desprezíveis, o torque aplicado a cada roda acionadora gera uma força que simultaneamente produz o movimento (MAZO et al., 1994).

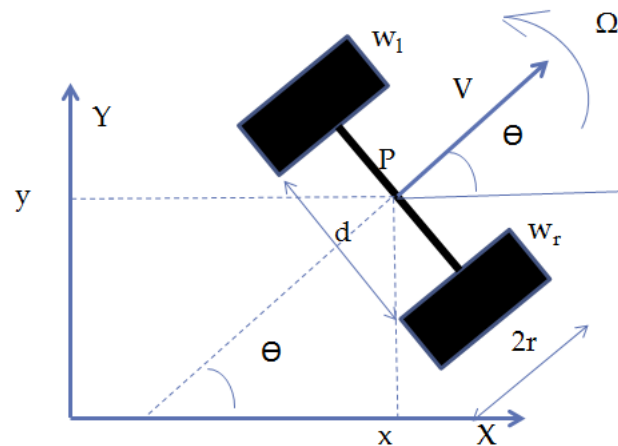
De acordo com MAZO et al. (1994), SAADATZI e POSHTAN (2010), o modelo linear simplificado obtido está representado na Figura 16 e pode ser utilizado para calcular a velocidade linear  $V$  e a velocidade angular  $\Omega$  de um VRTD a partir das velocidades angulares de acionamento da roda direita,  $\omega_r$ , e da roda esquerda,  $\omega_l$ , do raio,  $r$ , das rodas e da distância,  $d$ , entre as rodas. Considerando que a posição instantânea do VRTD é dada pela direção,  $\theta$ , representada pela Equação 1.33 e pela velocidade linear,  $V$ , representada pela Equação 1.34, MAZO et al. (1995), SOBRINHO et al. (2003) obtêm a Equação 1.35 da velocidade angular.

$$\theta = \theta_0 + \frac{r}{d} \int_0^t (\omega_l - \omega_r) dt, \quad (1.33)$$

$$V = \frac{du}{dt} = \frac{r}{2} (\omega_l + \omega_r), \quad (1.34)$$

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{r}{d} (\omega_l - \omega_r). \quad (1.35)$$

Figura 16 – Modelo linear simplificado do veículo sobre rodas com tracionamento diferencial.



Fonte: (MAZO et al., 1994)

De posse das equações que representam a dinâmica do VRTD, as equações de estado do Modelo Inverso e Direto são expressas, respectivamente, em 1.36 e em 1.37.

$$\begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{d} & -\frac{r}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_l \end{bmatrix}, \quad (1.36)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \Omega \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Conforme MAZO et al. (1995), SOBRINHO et al. (2003), considerando que  $\Omega > 0$  significa movimento angular para a direita, o controle de direcionamento do VRTD através da variação de  $V$  e  $\Omega$  apresenta nove estados bem definidos:

- 1-  $[V = 0, \Omega = 0]$  parada;
- 2-  $[V > 0, \Omega = 0]$  indo em frente;
- 3-  $[V < 0, \Omega = 0]$  indo para trás;
- 4-  $[V = 0, \Omega > 0]$  girando em torno de si para a direita;
- 5-  $[V = 0, \Omega < 0]$  girando em torno de si para a esquerda;
- 6-  $[V > 0, \Omega < 0]$  indo em frente e simultaneamente para esquerda;
- 7-  $[V > 0, \Omega > 0]$  indo em frente e simultaneamente para a direita;
- 8-  $[V < 0, \Omega > 0]$  indo para trás e simultaneamente para direita; e
- 9-  $[V < 0, \Omega < 0]$  indo para trás e simultaneamente para a esquerda.

Tabela 1 – Parâmetros e valores do modelo linear simplificado do VRTD.

Parâmetro	Natureza do parâmetro	Valor
$r$	Raio das rodas traseiras de acionamento	0,15 [m]
$d$	Distância entre as rodas traseiras de acionamento	0,7 [m]
$m$	Relação entre o eixo traseiro e da roda motorizada	0,1
$K$	Ganho da função de transferência dos motores DC	7,6394
$T$	Constante de tempo do motor DC	0,13
$K_1$	Constante proporcional dos controladores P	0,1768
$K_2$	Constante proporcional dos controladores PI	1
$I$	Constante integral dos controladores PI	10

Fonte: Adaptado de (SOBRINHO et al., 2003).

Para este modelo de VRTD será utilizado, em cada roda de acionamento, um motor DC cuja função de transferência simplificada é dada na Equação 1.38, onde  $\Omega(s)$  é a transformada de Laplace da velocidade angular,  $E(s)$  é a transformada de Laplace da tensão de armadura,  $T$  é a constante de tempo do motor e  $m$  é relação entre o eixo do motor e da roda. Estes parâmetros utilizados no modelo linear simplificado do VRTD são resumidos na Tabela 1, que inclui também as constantes  $K_1$ ,  $K_2$  e  $I$  dos controladores utilizados para estabilização do VRTD, na Seção 2.2.

$$H(s) = \frac{\Omega(s)}{E(s)} = \frac{K \cdot m}{T \cdot s + 1} \quad (1.38)$$

## 1.8 Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs

Segundo BOYD et al. (1994), muitos problemas que surgem na teoria dos sistemas e controle podem ser reduzidos a problemas de otimização convexa ou quasi-convexa envolvendo LMIs. Esse fato, aliado ao surgimento de excelentes ferramentas computacionais numéricas para resolução de LMIs e ao desenvolvimento de eficientes e poderosos métodos de pontos interiores que se aplicam aos problemas convexos<sup>8</sup>, foram um incentivo ao uso das mesmas no estudo de estabilidade de sistemas.

### 1.8.1 Estabilidade de Lyapunov e uma breve perspectiva histórica do desenvolvimento das LMIs

Esse desenvolvimento tem sua origem a partir da publicação do Teorema de Lyapunov, em 1890, descrito no Lema 1.8.1 a seguir. Lyapunov estabeleceu as condições para que o sistema representado pela Equação 1.40 seja estável<sup>9</sup>, isto é, todas as suas trajetórias convirjam para zero. Essa foi a primeira LMI. Ela podia ser resolvida analiticamente para estudar a estabilidade de pequenos sistemas dinâmicos de segunda ou terceira ordem.

**Definição 1.8.1.1 (Critério de estabilidade de Lyapunov)** Segundo PALHARES e GONÇALVES (2007), o critério de estabilidade de Lyapunov é obtido pela definição da função quadrática escalar positiva de Lyapunov, dada por 1.39, sendo  $P = P' > 0$ , e  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ .

$$V(x(t)) = x'(t) \cdot P \cdot x(t) > 0 \quad (1.39)$$

<sup>8</sup> Um hiperplano divide o espaço vetorial em 2 semi-espacos. O semi-espaco que contém o hiper-plano é denominado semi-espaco fechado. Um subconjunto  $S \in \mathfrak{R}^n$  é chamado convexo se para quaisquer dois pontos  $A$  e  $B$  de  $S$  o segmento  $\overline{AB}$  está inteiramente contido em  $S$ . Um semi-espaco fechado é convexo (BOLDRINI et al., 1986).

<sup>9</sup> Sobre o conceito de estabilidade veja Seção 1.4

e avaliando a derivada (caso contínuo) ao longo das trajetórias  $x(t)$ , isto é:  $\dot{V}(x(t)) = x'(t) \cdot (A' \cdot P + P \cdot A) \cdot x(t)$ .

Tendo em vista que  $V(x(t))$  é positiva definida, a estabilidade assintótica, com o estado de equilíbrio em  $x(t) \equiv 0$ , só ocorrerá se  $\dot{V}(x)$  for definida negativa, ou seja:  $\dot{V}(x) < 0$ . Isto implica em  $A' \cdot P + P \cdot A < 0$ , com  $P > 0$  (PALHARES; GONÇALVES, 2007). Essas condições levam ao Lema 1.8.1.

**Lema 1.8.1 (Lyapunov)** A planta 1.40 é estável se e somente se existe uma matriz positiva definida<sup>10</sup>  $P$  tal que satisfaça às desigualdades representadas em 1.41. Nesse caso, diz-se que o sistema (ou simplesmente a matriz  $A$ ) é assintoticamente estável (BOYD et al., 1994).

$$\dot{x} = Ax(t) \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned} A'P + PA &< 0, \\ P &> 0. \end{aligned} \tag{1.41}$$

As desigualdades representadas em 1.41 ficaram conhecidas como “desigualdade de Lyapunov em  $P$ ”.

OLIVEIRA e PERES (2010) propõem uma abordagem alternativa para encontrar a solução através de uma igualdade, ao invés de uma desigualdade. Toma-se uma matriz qualquer  $Q = Q' > 0$  e resolve-se a equação linear  $A'P + PA = -Q$  para a matriz  $P$  (CRUSIUS, 1996; GEROMEL; OLIVEIRA; HSU, 1999). Então, considerando-se o  $Tr(P)$ <sup>11</sup> e dadas as matrizes  $A$  e  $Q = Q' > 0$ , a solução para a desigualdade de Lyapunov, 1.41, pode ser obtida pela resolução do procedimento de otimização. Trata-se da minimização de uma função linear formada com os elementos da matriz  $P$ , isto é, minimização de uma função objetivo linear com restrições que definem um conjunto convexo, portanto, o problema é convexo<sup>12</sup>.

$$\min_P Tr(P)$$

sujeito a

<sup>10</sup> Uma matriz  $P = P' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é positiva definida se  $x' \cdot P \cdot x > 0, \forall x \neq 0$  e  $x \in \mathfrak{R}^n$ , o que implica que todos os autovalores (ou todos os menores principais líderes) de  $P$  são positivos (OLIVEIRA; PERES, 2010)

<sup>11</sup> O traço da matriz  $P$ ,  $Tr(P)$ , é a soma dos elementos da diagonal principal de  $P$ .

<sup>12</sup> Ou seja, minimização de uma função objetivo linear com restrições que definem um conjunto convexo, 1.42 (OLIVEIRA; PERES, 2010). Para maiores detalhes sobre conjunto convexo verifique a Subseção 1.8.2. 1.42 (PALHARES; GONÇALVES, 2007)

$$\begin{aligned} A'P + PA + Q &< 0, \\ P &> 0. \end{aligned} \tag{1.42}$$

LOPES (2011) argumenta que se pode entender as LMIs como uma ferramenta para a interpretação de problema de controle dado como se fosse “um problema de programação semidefinida (SDP). Em outras palavras, as LMIs seriam um problema de otimização com objetivo linear e restrições semidefinidas positivas envolvendo matrizes simétricas que são afins<sup>13</sup> nas variáveis de decisão”.

Contudo, no caso da desigualdade é necessário somente “uma solução factível para o problema e nenhuma variável necessita ser minimizada” (GACS, 1996).

**Exemplo 1.8.1.1 (Análise da estabilidade via Lyapunov)** *Seja, por exemplo, o sistema dado por:*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

*O problema de determinar se o sistema é estável ou não, utilizando o Lema 1.8.1 de Lyapunov pode ser resolvido de maneira numérica utilizando as ferramentas matemáticas disponíveis hoje. Por exemplo, no Matlab® os comandos que se seguem encontram a matriz  $P$  simétrica positiva definida garantindo a estabilidade do sistema dado.*

```
>> Q = eye(2);
```

```
>> P = lyap(A', Q)
```

```
P = [-0.500  0.7500;  0.7500  -2.7500]'
```

*examinando  $P$  constata-se que é simétrica:*

```
>> eig(P)
```

```
ans = [-2.9771;  -0.2729]'
```

*porém,  $P$  não é positiva definida, pois seus autovalores não são positivos.*

**Exemplo 1.8.1.2** *Seja, agora, o sistema dado por:*

<sup>13</sup> Para maiores detalhes sobre função afim verifique a Subseção 1.8.2.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x.$$

Seguindo o mesmo procedimento anterior verifica-se que, agora, a matriz  $P$  é simétrica positiva definida garantindo a estabilidade do sistema dado:

```
>> Q = eye(2);
>> P = lyap(A', Q);
```

examinando  $P$  constata-se que os autovalores de  $P$  são todos positivos:

```
>> P
ans = [1.2500 0.2500; 0.2500 0.2500]'
>> eig(P)
ans = [1.3090; 0.1910]'
```

Este mesmo problema poderia ser resolvido numericamente com auxílio do solver SeDuMi<sup>14</sup> (OLIVEIRA; PERES, 2010).

**Exemplo 1.8.1.3** *Seja o exemplo anterior. A sequência de comandos do Yalmip a seguir fornece os mesmos resultados obtidos com os comandos Matlab® utilizados.*

```
>> A = [0 1; -2 -3];
>> Q = eye(2);
>> LMIs = set([]);
>> P = sdpvar(2, 2, 'symmetric');
>> LMIs = LMIs + set(P > 0) + set(-A' * P + P * A - Q > 0);
>> obj = trace(P);
>> sol = solvesdp(LMIs, obj, sdpsettings('solver', 'sedumi'));
```

<sup>14</sup> O SeDuMi é um solver para programação semidefinida. O YALMIP é uma linguagem de modelagem para modelagem avançada e para solução de problemas de otimização convexa e não convexa. O YALMIP é um toolbox que pode ser instalada no ambiente do Matlab® baixando o pacote YALMIP.zip no site <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/pmwiki.php?n=Tutorials.Installation>. O Yalmip foi desenvolvido por J. Löfberg.

Após o processamento, os resultados podem ser obtidos com os comandos:

```
>> double(obj)

ans = 1.5000

>> double(P)

ans = [1.2500 0.2500; 0.2500 0.2500]'

>> eigs(P)

ans = [1.3090; 0.1910]'
```

que são os mesmos resultados obtidos apenas com o Matlab®.

O passo seguinte, de uma longa caminhada histórica, no desenvolvimento e uso de LMIs ocorreu na década de 1940 quando alguns estudiosos russos, entre eles Lur'e e Postnikov aplicaram o método de Lyapunov a problemas práticos em engenharia de controle, como a estabilidade de um sistema de controle com não-linearidades no atuador (BOYD; VANDENBERGHE, 2009; OLIVEIRA; PERES, 2010).

Segundo (BOYD et al., 1994), um grande avanço veio através dos trabalhos de Yakubovich, Popov, Kalman e outros no início da década de 60 que tiveram sucesso em reduzir a solução das LMIs que apareceram no problema de Lur'e a um simples critério gráfico, utilizando que hoje é conhecido por Lema da Positividade Real (*positive-real, PR*). Este lema e suas extensões foram intensamente estudados na última metade da década de 60 e verificou-se que estavam relacionados às ideias de passividade, teorema do ganho pequeno introduzidos por Zames e Sandberg, e controle ótimo linear quadrático. Pela década de 70 soube-se que a LMI que aparecia no Lema PR poderia ser resolvida não somente por meios gráficos mas também pela solução da equação algébrica de Riccati 1.44, (*Algebraic Riccati Equation, ARE*) (CRUSIUS, 1996). Segundo OLIVEIRA e PERES (2010 apud WILLEMS, 1971, p. 207), “a primeira menção explícita de uma LMI é atribuída a WILLEMS (1971), em um artigo que apresenta a LMI” 1.43.

$$\begin{bmatrix} A' \cdot P + P \cdot A + Q & P \cdot B + C' \\ B' \cdot P + C & R \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.43)$$

condição esta que se aplica ao sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u, \\ y &= C \cdot x, \end{aligned}$$



e que pode ser resolvida estudando-se as soluções simétricas da Equação 1.44, onde  $P$  é a variável, e as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $Q$  e  $R$  são conhecidas.

$$A' \cdot P + P \cdot A - (P \cdot B + C') \cdot R^{-1} \cdot (B' \cdot P + C) + Q = 0. \quad (1.44)$$

Na década de 70 vários pesquisadores observaram que as LMIs que apareciam na teoria de sistemas e controle poderiam ser formuladas em termos de problemas de otimização convexa os quais eram passíveis de serem solucionados por meio de computador. Segundo [BOYD et al. \(1994\)](#), essa simples observação teve como consequência a ideia de que era possível solucionar de maneira confiável muitas LMIs para as quais não havia sido encontrada solução analítica alguma. Finalmente, no final da década de 80, pesquisadores tais como Nesterov e Nemirovskii desenvolveram métodos dos pontos interiores que se aplicavam diretamente aos problemas convexos envolvendo LMIs. E, hoje vários algoritmos de pontos interiores para problemas com LMIs foram desenvolvidos e testado em famílias específicas de LMIs que surgem na teoria de controle, apresentando resultados extremamente eficientes ([BOYD et al., 1994](#)).

## 1.8.2 Propriedades das LMIs

Uma outra representação da LMI é a forma canônica dada pela Equação 1.45, para o caso de LMIs estritas,

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (1.45)$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^m$  é a variável,  $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_m]'$ , e as matrizes simétricas  $F_i = F_i' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  para  $i = 0, \dots, m$ , são dadas. O símbolo de desigualdade na Equação 1.45 significa que  $F(x)$  é positiva-definida, isto é,  $u' \cdot F(x) \cdot u > 0 \ \forall u \neq 0$  sendo que  $u \in \mathfrak{R}^n$  ([BOYD et al., 1994](#); [PALHARES; GONÇALVES, 2007](#)).

Uma LMI na forma canônica não estrita é representada pela Equação 1.46

$$F(x) \geq 0. \quad (1.46)$$

Um conjunto de LMIs,  $F^{(1)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0$ , pode ser representado como se fosse uma só LMI do tipo  $\mathbf{diag}(F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) > 0$ . Quando as matrizes  $F_i$  são diagonais, a LMI  $F(x) > 0$  é apenas um conjunto de desigualdades lineares ([BOYD et al., 1994](#)).

**Definição 1.8.2.1 (Conjunto e função afins)** *Se um subconjunto  $M \in \mathfrak{R}^n$  é afim, então,  $\forall \lambda \in \mathfrak{R}$  e  $\forall x, y \in M$ , tem-se que  $(1 - \lambda) \cdot x + \lambda \cdot y \in M$ . Assim, uma função afim é*

uma função polinomial cujo grau é no máximo 1, do tipo  $f(x) = a \cdot x + b$ , sendo  $f : \Re \rightarrow \Re$  e  $a, b \in \Re$  e  $a \neq 0$ .

A função  $F(x)$  representada na Equação 1.45 é uma função afim uma vez que para  $x = 0$  tem-se  $F(0) = F_0$  (CRUSIUS, 1996).

**Definição 1.8.2.2 (Conjunto e função convexas)** *Se um subconjunto  $C \in \Re^n$  é convexo, então,  $\forall x, y \in C, (1 - \lambda) \cdot x + \lambda \cdot y \in C$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Ou seja, um conjunto é convexo se o segmento de reta que une quaisquer dois pontos do conjunto também pertencer ao conjunto. Considere-se agora que o epígrafo de  $f$  é o conjunto  $\text{epi}f \triangleq \{(x, \mu) : x \in S, \mu \in \Re, \mu \geq f(x)\}$ . A ligação entre conjuntos convexas e funções convexas se dá através do seu epígrafo: a função  $f : S \in \Re^n \rightarrow \Re$  é convexa em  $S$  se o seu epígrafo<sup>15</sup> é convexo.*

A LMI 1.45 é uma restrição convexa em  $x$ , isto é, o conjunto  $\{x : F(x) > 0\}$  é convexo conforme pode-se verificar da prova que se segue (CRUSIUS, 1996).

**Prova 1.8.1 (Prova convexidade conjunto solução de uma LMI)** *Sejam  $y$  e  $x$  dois pontos que satisfazem a inequação 1.45 e  $x = \alpha \cdot y + (1 - \alpha) \cdot z$ , onde  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Substituindo em 1.45 vem:*

$$\begin{aligned} F_0 + \sum_{i=1}^m F_i \cdot x_i &= F_0 + \sum_{i=1}^m F_i \cdot (\alpha \cdot y_i + (1 - \alpha) \cdot z_i) = \\ &= F_0 + \sum_{i=1}^m F_i \cdot z_i + \alpha \cdot \sum_{i=1}^m F_i \cdot (y_i - z_i) = \\ &= (1 - \alpha) \cdot (F_0 + \sum_{i=1}^m F_i \cdot z_i) + \alpha \cdot (F_0 + \sum_{i=1}^m F_i \cdot y_i) > 0 \end{aligned}$$

*Desta forma, verifica-se que  $x$  também é solução da LMI (CRUSIUS, 1996).*

Uma LMI pode representar uma ampla variedade de restrições convexas em  $x$ , tais como: desigualdades lineares, desigualdades quadráticas (convexas), desigualdades de norma matriciais<sup>16</sup> e restrições que aparecem na teoria de controle, tais como Lyapunov e desigualdades matriciais quadráticas convexas.

<sup>15</sup> O prefixo *epi* significa *acima*, logo, *epígrafo* significa *acima do gráfico*. Trata-se da região que se inicia imediatamente acima do gráfico de uma função (BOYD et al., 1994).

<sup>16</sup> Uma norma sobre o espaço vetorial formado pelas matrizes reais ou complexas de ordem  $n \times m$ , denotado por  $M^{n \times m}$ , é chamado de norma matricial. A norma 1, por exemplo, denotada por  $\|\cdot\|_1$ , é definida como o máximo da soma módulo das entradas de cada linha da matriz, (BOLDRINI et al., 1986, p. 340).

**Lema 1.8.2 (Transformação de Congruência)** *Duas matrizes simétricas  $Q, R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  são congruentes se existir  $T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  não-singular<sup>17</sup> :  $Q = T' \cdot R \cdot T$ . Se  $Q$  e  $R$  são congruentes, então  $Q > 0$  se e somente se  $R > 0$ .*

**Prova 1.8.2**  $R > 0 \Rightarrow \forall x \neq 0, x' \cdot R \cdot x > 0$ . Definindo  $y = T^{-1} \cdot x$  tem-se  $x' \cdot R \cdot x = y' \cdot T' \cdot R \cdot T \cdot y = y' \cdot Q \cdot y > 0 \forall y \neq 0 \Rightarrow Q > 0$  (OLIVEIRA; PERES, 2010).

Note que para  $R = R' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $T \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ,  $T' \cdot R \cdot T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ . Neste caso,  $R > 0 \Rightarrow T' \cdot R \cdot T \geq 0$ ,  $R > 0$  e  $\text{rank}(T) = m \Rightarrow T' \cdot R \cdot T > 0$  pois  $\text{rank}(T' \cdot R \cdot T) = \text{rank}(T)$  e, se  $\text{rank}(T) = m$ ,  $\nexists x \neq 0 : T \cdot x = 0$ .

Note que para  $R = R' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $T \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ , então  $T' \cdot R \cdot T > 0 \not\Rightarrow R > 0$  !

**Exemplo 1.8.2.1** *Seja, por exemplo,  $R = [1 \ 0; 0 \ -1]'$  e  $T = [1 \ 0]'$ . Constata-se que  $R = R'$ , ou seja,  $R$  é simétrica e que  $T' \cdot R \cdot T = 1 > 0$ , porém os autovalores de  $R$  são 1 e  $-1$ , logo  $R \not> 0$ .*

Segundo PALHARES e GONÇALVES (2007), o critério de estabilidade de Lyapunov como apresentado na Subseção 1.8.1, dá origem a um importante tema de debate na teoria de controle robusto que é a verificação da estabilidade de uma família de sistemas ou um sistema com incertezas, conforme estudado na Seção 1.14.

**Definição 1.8.2.3 (Conjunto Poliedral)** *A intersecção de um número finito de subespaços fechados forma um conjunto poliedral, os quais são convexos e fechados (BOLDRINI et al., 1986).*

**Definição 1.8.2.4 (Politopo)** *Um politopo ou envelope convexo é um conjunto poliedral limitado de  $N$  pontos  $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathfrak{R}^n$ . Um ponto descrito como  $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_N \cdot x_N$ , com  $\alpha_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, N$  e  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ , é chamado de combinação convexa dos pontos  $x_1, x_2, \dots, x_N$  (PALHARES; GONÇALVES, 2007).*

Seja o politopo descrito pelos seus cinco vértices  $\mathcal{P} = \text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_5\}$ , onde  $\text{co}$  representa a casca ou o envelope convexo conforme ilustrado na Figura 17. Cada ponto  $p \in \mathcal{P}$  pode ser escrito através de uma combinação convexa dos vértices:

$$p = \sum_{i=1}^5 \alpha_i \cdot x_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^5 \alpha_i = 1.$$

**Exemplo 1.8.2.2**

$$p_1 = \frac{1}{4} \cdot x_1 + \frac{1}{4} \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{1}{2} \cdot x_4 + 0 \cdot x_5,$$

<sup>17</sup> Uma matriz  $A$  é inversível ou não-singular se  $\det(A) \neq 0$  (BOLDRINI et al., 1986).

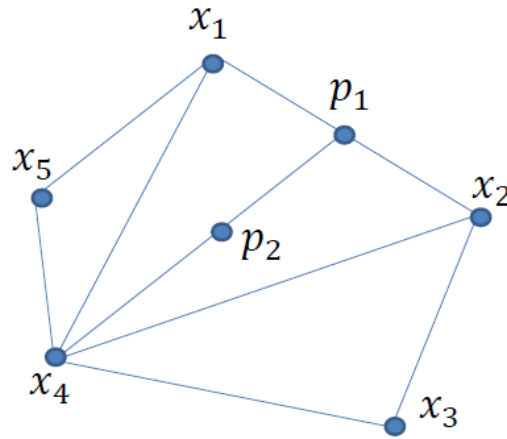


Figura 17 – Um polígono com cinco vértices.

Fonte: Adaptado de (PALHARES; GONÇALVES, 2007)

$$p_2 = \frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{3} \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{1}{3} \cdot x_4 + 0 \cdot x_5,$$

$$p_1 = \frac{3}{4} \cdot p_2 + \frac{1}{4} \cdot x_4.$$

PALHARES e GONÇALVES (2007) argumentam que “por analogia, pode-se supor que cada vértice é uma matriz  $A$  de um conjunto de sistemas autônomos.” Ainda “esta propriedade de convexidade é suficiente para que se possa formular o problema de estabilidade de um sistema incerto verificando a estabilidade em um polígono e usando a teoria de Lyapunov.”

Seja o sistema dinâmico incerto com  $K$  vértices representado pela Equação 1.47.

$$\Delta[x(t)] = A \cdot x(t), \quad A \in \mathcal{P} \triangleq \left\{ A : A = \sum_{i=1}^K \alpha_i A_i, \alpha_i \geq 0, \sum_1^K \alpha = 1 \right\} \quad (1.47)$$

Para o sistema contínuo no tempo 1.47, se existe uma matriz  $P = P' > 0$  tal que

$$A' \cdot P + P \cdot A < 0, \quad \forall A \in \mathcal{P},$$

então o sistema é dito ser *quadraticamente estável*.

A definição de estabilidade quadrática exige que se fixe apenas uma matriz de Lyapunov que satisfaz, simultaneamente, todos os múltiplos sistemas descritos pelo polígono

(LEITE et al., 2004; PALHARES; GONÇALVES, 2007). Para os sistemas invariantes no tempo, esta exigência produz algum grau de conservadorismo na análise de estabilidade.

Considerando a maneira como a estabilidade quadrática é formulada, conforme aparece na Subseção 1.8.1, não há necessidade de se verificar a condição para os infinitos sistemas que compõem o politopo, mas é suficiente testar a condição apenas nos seus  $K$  vértices. Ou seja, para comprovar se o sistema é quadraticamente estável é suficiente verificar a existência de  $P = P' > 0$  tal que o conjunto finito das  $K$  LMIs seja satisfeito. Por exemplo, para o caso dos sistemas contínuos no tempo:

$$\begin{aligned} A'_1 \cdot P + P \cdot A_1 &< 0, \\ A'_2 \cdot P + P \cdot A_2 &< 0, \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ A'_K \cdot P + P \cdot A_K &< 0. \end{aligned}$$

O complemento de Schur é uma propriedade das matrizes que fornece um artifício utilizado frequentemente para converter uma desigualdade (convexa) não-linear em uma LMI (ou vice-versa) (OLIVEIRA; PERES, 2010).

**Definição 1.8.2.5 (Complemento de Schur para matrizes)** *Considere a matriz quadrada simétrica particionada representada pela Equação 1.48 (PALHARES; GONÇALVES, 2007; BOYD; VANDENBERGHE, 2009; OLIVEIRA; PERES, 2010).*

- Se  $A = A'$  e  $\det(A) \neq 0$ , então o complemento de Schur de  $A$  em relação a  $M$  é a matriz  $C - B' \cdot A^{-1} \cdot B$ .
- Se  $C = C'$  e  $\det(C) \neq 0$ , então o complemento de Schur de  $C$  em relação a  $M$  é a matriz  $A - B \cdot C^{-1} \cdot B'$ .

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$

**Lema 1.8.3 (Complemento de Schur para LMIs)** *Considere as desigualdades não-lineares convexas representada por 1.49, onde  $Q(x) = Q(x)'$ ,  $R(x) = R(x)'$ , e  $S(x)$  são afins em  $x$  (ANTWERP; BRAATZ, 2000). Nestas condições, trata-se de uma desigualdade matricial bilinear, ou seja, uma BMI. O lema do Complemento de Schur converte este conjunto de desigualdades não-lineares convexas, dadas em 1.49, em uma LMI equivalente, conforme mostrada em 1.50. Assim, o complemento de Schur constitui-se em uma ferramenta para converter BMIs em LMIs (ERKUS, 2006).*

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)' > 0 \quad (1.49)$$

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & R(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (1.50)$$

Seja a matriz quadrática simétrica particionada representada por 1.48, então, o complemento de Schur surge nas seguintes situações (PALHARES; GONÇALVES, 2007; BOYD; VANDENBERGHE, 2009):

- na solução de equações lineares,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

- quando se elimina um bloco de variáveis;
- ele é a inversa da matriz do bloco (2, 2) na matriz simétrica particionada

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}^{-1},$$

- surge também na minimização de uma forma quadrática, em relação a algumas variáveis,

$$\min_x \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

e, finalmente,

- na caracterização da positividade da matriz representada na Equação 1.48.

**Exemplo 1.8.2.3 (Restrição de norma matricial (BOYD et al., 1994))** *Considere a restrição da norma matricial, ou o valor singular máximo,  $\|Z(x)\| < 1$ , onde  $Z(x) \in \mathfrak{R}^{p \times q}$  é a variável matricial e depende de maneira afim de  $x$ . Encontre a representação LMI da inequação dada. Uma vez que a restrição da norma matricial*

$$\|Z(x)\| < 1,$$

é equivalente a:

$$I - Z(x) \cdot I \cdot Z(x)' > 0,$$

utilizando o complemento de Schur, pode-se escrevê-la como:

$$\begin{bmatrix} I & Z(x) \\ Z(x)' & I \end{bmatrix} > 0.$$

*BOYD et al. (1994) argumentam que o caso em que  $q = 1$  se reduz a uma desigualdade quadrática convexa genérica em  $x$ .*

**Exemplo 1.8.2.4 (Restrição quadrática (BOYD et al., 1994))** A restrição  $c(x)' \cdot P(x)^{-1} \cdot c(x) < 1$  onde  $c(x) \in \mathfrak{R}^n$  e  $P(x) = P(x)' > 0$  pode ser escrita na forma de LMI, utilizando o complemento de Schur, em relação a  $P(x)$ , da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} P(x) & c(x)' \\ c(x) & 1 \end{bmatrix} > 0,$$

pois

$$c(x)' \cdot P(x)^{-1} \cdot c(x) < 1,$$

pode ser escrita como

$$1 - c(x)' \cdot P(x)^{-1} \cdot c(x) > 0.$$

Nem sempre a minimização dos ganhos do controlador projetado com a utilização de LMIs consegue eliminar o conservadorismo inerente ao projeto. Segundo BUZACHERO (2010), BUZACHERO et al. (2011), um certo grau de conservadorismo tem sido inserido na análise de estabilidade quadrática. Os projetos de controladores que levam a ganhos maiores podem introduzir saturações no sinal de controle, o que torna o projeto mais difícil de ser implementado. A relaxação na análise de estabilidade, ou a estabilidade estendida, tem sido alcançada com a utilização de técnicas como o Procedimento-S e o Lema de Finsler, aumentando assim a região de factibilidade.

**Definição 1.8.2.6 (S-Procedure)** Considere as matrizes simétricas representadas por  $T_0, \dots, T_p \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e a condição dada pela Equação 1.51, em  $T_0, \dots, T_p$ :

$$\psi' \cdot T_0 \cdot \psi > 0, \forall \psi \neq 0 \quad : \quad \psi' \cdot T_i \cdot \psi \geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.51)$$

Se existirem escalares  $\tau_i \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ , tais que:

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i \cdot T_i > 0, \quad (1.52)$$

então a condição 1.51 está satisfeita.

Além disso, 1.51 e 1.52 são equivalentes quando  $p = 1$  e quando  $T_i$  são funções afins de um conjunto de parâmetros a condição 1.52  $\Rightarrow$  1.51.

O S-Procedure é uma técnica de análise de estabilidade de sistemas não-lineares, para formas quadráticas e desigualdades estritas, que permite concatenar várias restrições escalares de desigualdade em uma única. Esta técnica introduz multiplicadores como fatores de ponderação a serem determinados a fim de reduzir os resultados conservadores (BOYD et al., 1994). Na realidade o S-Procedure nada mais é do que a técnica de relaxação

de Lagrange<sup>18</sup>, a qual na maioria das vezes é utilizada com restrições quadráticas. Um dos resultados mais importantes é a condição para exatidão (minimização de perdas) da relaxação, especialmente quando um objetivo quadrático está sujeito a uma restrição quadrática. O *S-Procedure* tem numerosas aplicações na análise de equações diferenciais incertas. É frequentemente utilizada para obter estabilidade e resultados de desempenho para sistemas não-lineares e sistemas em presença de incertezas (JÖNSSON, 2006).

**Exemplo 1.8.2.5** *BOYD et al. (1994) abordam um problema que surge em sistemas incertos com incertezas limitadas em norma (norm-bounded uncertainties): trata-se de encontrar  $P$  tal que:*

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} A' \cdot P + P \cdot A & P \cdot B \\ B' \cdot P & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} < 0, \\ \forall \xi : \pi' \cdot \pi \leq \xi' \cdot C' \cdot C \cdot \xi. \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

A restrição em  $\pi$  e  $\xi$  acima pode ser reescrita como se segue:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} -C' \cdot C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} \leq 0. \quad (1.54)$$

Aplicando a restrição 1.52 em 1.53 e 1.54 e, considerando  $i = 1$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} A' \cdot P + P \cdot A & P \cdot B \\ B' \cdot P & 0 \end{bmatrix} - \tau_1 \cdot \begin{bmatrix} -C' \cdot C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0,$$

então, aplicando-se *S-Procedure* a restrição 1.53 é equivalente à existência de  $\tau_1 \geq 0$ , tal que:

$$\begin{bmatrix} A' \cdot P + P \cdot A + \tau_1 \cdot C' \cdot C & P \cdot B \\ B' \cdot P & -\tau_1 \cdot I \end{bmatrix} < 0. \quad (1.55)$$

Dessa maneira, a solução do problema de encontrar  $P > 0$  de tal maneira que a Inequação 1.53 seja satisfeita pode ser expresso como a LMI 1.55 em  $P$  e na variável escalar  $\tau_1$  acima.

<sup>18</sup> Em programação linear inteira é possível relaxar algumas das restrições do problema original, removendo as restrições de integralidade do modelo. Formalmente: Seja a formulação  $F$  dada por  $z = \min\{c(x) : x \in P\}$ , onde  $P$  é o conjunto de pontos que satisfazem as restrições dessa formulação,  $c(x)$  a função objetivo e  $z$  o valor da solução ótima. A formulação  $F_R$ , dada por  $z_R = \min\{c(x) : x \in R\}$  é uma relaxação se todo ponto de  $P$  está em  $R$ , ou seja,  $P \subseteq R$  e se  $f(x) \leq c(x)$  para  $x \in P$ . A relaxação lagrangeana consiste em remover algumas das restrições da formulação original e embutir essas desigualdades na função objetivo, penalizando a função objetivo quando as restrições removidas forem violadas. O “peso” dessas penalidades é controlado por coeficientes chamados de multiplicadores lagrangeanos (de OLIVEIRA; BERRETTA, 2007).



O Lema de Finsler definido em 1.8.2.7 é bastante útil, pois permite que se possa inserir restrições de igualdade em uma única desigualdade a qual pode então ser resolvida via LMI. E BUZACHERO (2010) argumenta que a utilização desse lema em projetos de sistemas com realimentação de estados traz a vantagem de desacoplar a síntese da matriz de realimentação,  $K$ , da matriz de Lyapunov,  $P$ , deixando-a livre, uma vez que  $P = P' > 0$  já é uma realidade. A utilização do Lema de Finsler para expressar as condições de estabilidade em termos de LMIs introduz novos graus de liberdade na análise de sistemas incertos, possibilitando a eliminação de variáveis e de não-linearidades.

**Definição 1.8.2.7 (Lema de Finsler)** *Seja  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $Q = Q' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  uma matriz dada com  $\text{rank}(B) < n$  e  $B^\perp$  uma base para o espaço nulo de  $B$ , ou seja,  $B \cdot B^\perp = 0$ . As seguintes afirmações são verdadeiras (de OLIVEIRA, 2004):*

- i)  $x' \cdot Q \cdot x < 0, x \neq 0 : B \cdot x = 0$ .
- ii)  $B^{\perp'} \cdot Q \cdot B^\perp < 0$ .
- iii)  $\exists \mu \in \mathfrak{R} : Q - \mu \cdot B' \cdot B < 0$ .
- iv)  $\exists \mathcal{X} \in \mathfrak{R}^{n \times m} : Q + \mathcal{X} \cdot B + B' \cdot \mathcal{X}' < 0$ .

**Exemplo 1.8.2.6** (BARBOSA; TROFINO, 2002) *propõem as condições para estabilidade quadrática de sistemas descritores representadas em 1.87, ou seja: encontre  $P$  tal que:*

$$\dot{v}(x) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} J_1' \cdot P + P \cdot J_1 & P \cdot J_2 \\ J_2' \cdot P & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} < 0,$$

$$\forall J \in C_0 \cdot \left[ \tilde{J}_i \right]_{i=1}^q, \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

*Aplicando-se o Lema de Finsler, condição “iv”, é possível inserir a restrição de igualdade em uma única LMI representada em 1.56.*

$$\begin{bmatrix} J_1' \cdot P + P \cdot J_1 & P \cdot J_2 \\ J_2' \cdot P & 0 \end{bmatrix} + L \cdot \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix}' \cdot L' < 0. \quad (1.56)$$

## 1.9 Normas de vetores, matrizes, sinais e sistemas

Segundo SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2001), uma norma é uma ferramenta matemática útil pois permite que através de um único número obter uma medida global do tamanho de um vetor, de uma matriz, de um sinal, ou de um sistema. Ele dá a seguinte definição de norma:

**Definição 1.9.1 (Norma de  $e$ )** *Uma norma de um vetor, uma matriz, um sinal ou um sistema, denotados genericamente por  $e$ , é um número real, simbolizado por  $\|e\|$ , que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Não-negatividade:*  $\|e\| \geq 0$ .
2. *Positividade:*  $\|e\| = 0 \Leftrightarrow e = 0$ .
3. *Homogeneidade:*  $\|\alpha \cdot e\| = |\alpha| \cdot \|e\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$ .
4. *Desigualdade triangular:*  $\|e_1 + e_2\| \leq \|e_1\| + \|e_2\|$ .

*De maneira mais precisa, “ $e$ ” é um elemento num espaço vetorial  $V$  sobre o campo  $\mathbb{C}$  de números complexos e as propriedades acima devem ser satisfeitas  $\forall e, e_1, e_2 \in V$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ .*

SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2001) classificam as normas em dois grupos: o primeiro envolvendo normas espaciais e o segundo, normas de funções ou normas temporais. Esses dois grupos abrangem quatro tipos diferentes de objetos, os quais são normas sobre quatro espaços vetoriais diferentes:

1. normas espaciais, onde  $e$  representa um vetor constante ou então uma matriz constante. A pergunta pertinente é: “Como encontrar a média ou o valor global dos canais?”; e
2. normas de funções ou normas temporais, onde  $e$  representa: um sinal dependente do tempo,  $e(t)$ , onde, para cada valor fixo de  $t$ , pode-se ter um escalar ou vetor constantes; ou um “sistema”, representado por uma função de transferência  $G(s)$  ou uma resposta ao impulso  $g(t)$ , para os quais a cada valor fixo de  $s$  ou de  $t$  tem-se um escalar ou uma matriz constantes. Aqui, deseja-se obter a média ou o valor global como uma função da frequência ou do tempo.

Os objetivos dos sistemas de controle podem ser estabelecidos como garantir a estabilidade interna e atingir certas especificações de desempenho de um sistema. É preciso garantir que possíveis perturbações ocorrendo num sistema de controle não irão afetar de maneira proibitiva as variáveis de interesse sob controle. Uma das maneiras mais utilizadas para atender os requisitos de desempenho é conhecimento da energia de determinados sinais de interesse. Através da medida do nível de energia desses sinais é possível conhecer-se o grau de influência da perturbação externa sobre a saída de interesse (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001).

A capacidade de um sistema de controle de limitar os efeitos indesejáveis dessas perturbações é conhecida como rejeição de perturbações e pode ser quantificada de várias formas. No conceito de perturbações estão incluídos: distúrbios externos, tais como

temperatura ambiente, velocidade do vento, força e amplitude das ondas marítimas; distúrbios internos, tais como sensores descalibrados gerando medidas incorretas dos sinais ou ruídos de medição, etc. Em componentes da variável de desempenho estão incluídos todos os sinais a serem controlados, ou que forneçam informações vitais para a dinâmica do sistema, tais como: sinal de erro, sinal de controle etc. (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001).

Do ponto de vista histórico, as normas de sistemas são definidas de acordo com a resposta em frequência dos mesmos. Assim, a resposta de regime permanente para excitações senoidais de diversas frequências é caracterizada pela resposta em frequência de um sistema LTI estável. Por exemplo, a norma infinita  $H_\infty$  de uma função de transferência escalar estável  $f(s)$ , tratada na Subseção 1.11, é simplesmente o valor de pico da função da frequência  $|f(j\omega)|$ , representada na equação 1.57 (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001).

$$\|f(s)\|_\infty \triangleq \max_{\omega} |f(j\omega)|. \quad (1.57)$$

SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2001) fornecem as seguintes explicações para a escolha dos símbolos utilizados para representar as normas infinita e euclidiana, respectivamente:

- O símbolo  $\infty$  é proveniente do fato de que a magnitude máxima sobre a frequência pode ser escrita como:

$$\max_{\omega} |f(j\omega)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(j\omega)|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ao elevar  $|f|$  a uma potência infinita seu valor de pico é selecionado.

- O símbolo  $\mathcal{H}$  vem de “Hardy space<sup>19</sup>”, e  $\mathcal{H}_\infty$  é o conjunto de funções de transferência limitada pela norma infinita, isto é, o conjunto de funções de transferência estáveis e estritamente próprias<sup>20</sup>.
- Da mesma maneira, o símbolo  $\mathcal{H}_2$  é utilizado para o “Hardy space” das funções de transferência limitadas em norma-2, o qual é o conjunto de funções de transferência estáveis e estritamente próprias. Assim, a norma  $\mathcal{H}_2$  de uma função de transferência escalar estável estritamente própria, é definida como:

$$\|f(s)\|_2 \triangleq \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

<sup>19</sup> “Hardy space” é o espaço de todas as funções analíticas  $f$  no disco unitário  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , para  $1 \leq p < \infty$ .

<sup>20</sup> Função de transferência estritamente própria é aquela na qual o grau do numerador é menor do que o grau do denominador.

Minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  corresponde a minimizar o pico do maior valor singular (pior direção e frequência). Ao passo que minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  corresponde a minimizar a soma do quadrado de todos os valores singulares sobre toda frequência (direção e frequências médias). Resumindo, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  empurra para baixo o pico do maior valor singular e a norma  $\mathcal{H}_2$  empurra para baixo todos os valores singulares sobre todas as frequências.

Em controle robusto a norma mais utilizada é a  $\mathcal{H}_\infty$ , isto porque ela é muito útil para representar modelos incertos não estruturados e satisfaz a propriedade multiplicativa representada pela equação 1.58 a seguir.

**Definição 1.9.2 (Norma Matricial)** *A norma de uma matriz  $A$  é uma **norma matricial** se, além das quatro propriedades da Definição 1.9.1, também satisfaz a propriedade multiplicativa (chamada de condição de consistência):*

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| + \|B\|. \quad (1.58)$$

As normas que satisfazem as propriedades encontradas em 1.9.1, porém não satisfazem a propriedade 1.9.2 da norma matricial são denominadas *normas matriciais generalizadas*.

Para as Seções 1.10 e 1.11, a seguir, considere-se o sistema nominal 1.59, pertencente à classe de sistemas LTI.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B_\omega \cdot \omega(t), \\ z(t) &= C_z \cdot x(t) + D_{\omega z} \cdot \omega(t). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Sendo que  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  representa o vetor de estados;  $\omega(t) \in \mathfrak{R}^{n_\omega}$ , o vetor de entrada de perturbações (entradas exógenas);  $z(t) \in \mathfrak{R}^{n_z}$ , o vetor de saídas de interesse (saídas medidas); e  $A$ ,  $B_\omega$ ,  $C_z$  e  $D_{\omega z}$  são matrizes constantes com dimensões apropriadas.

## 1.10 Norma euclidiana $\mathcal{H}_2$

A norma 2 de um sinal  $z(t)$  é definida de acordo com 1.60, sendo  $\epsilon$  a medida da energia.

$$\|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z(t)^2 \cdot dt = \epsilon, \quad (1.60)$$

A expressão 1.60 é uma generalização de energia dissipada. Se  $z(t)$  representa um sinal de tensão, então a expressão 1.60 pode ser entendida como a energia dissipada num resistor unitário. O conjunto de todos os sinais que possuem energia finita, isto é, são quadraticamente integráveis, formam um espaço denominado  $\mathcal{L}_2$  (de SOUZA, 1994). O

ganho  $\mathcal{L}_2$  do operador entrada/saída permite determinar o desempenho do sistema em relação ao sinal de perturbação

Segundo [BARBOSA \(2003\)](#), a norma 2 de um sinal vetorial  $z(t) = [z_1 \cdots z_n(t)]'$ , ou seja a energia da resposta ao impulso, é definida como sendo a soma das energias de todas as componentes do vetor, conforme representada em [1.61](#).

$$\|z(t)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \int_0^\infty z(t)_i^2 \cdot dt = \int_0^\infty z(t)' \cdot z(t) \cdot dt = \epsilon, \quad (1.61)$$

O Lema de Parseval enunciado em [1.10.1](#) permite relacionar energia de um sinal, definida no domínio do tempo, com a transformada de Fourier do sinal (de [SOUZA, 1994](#); [BARBOSA, 2003](#)).

**Lema 1.10.1 (Teorema de Parseval)** *Seja  $f(t)$  um sinal real causal com energia limitada e  $F(j\omega)$  sua transformada de Fourier. Então, a relação [1.62](#), envolvendo a energia  $\epsilon$  do sinal  $f(t)$ , é verdadeira*

$$\epsilon = \int_0^\infty f(t)' \cdot f(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^\infty F(j \cdot \omega)^* \cdot F(j \cdot \omega) \cdot d\omega, \quad (1.62)$$

Seja o sistema representado pela equação [1.59](#) e, considere-se ainda, que  $x_0 = x(0) = 0$  e que o termo de transmissão direta de  $\omega$  para  $z$  é  $D_{\omega z} = 0$ , uma das condições para que a norma  $\mathcal{H}_2$  seja finita ([ROBERTS, 2009](#)).

Consequentemente, o operador perturbação/saída de interesse no domínio da frequência para o sistema [1.59](#) é dado pela matriz de transferência representada em [1.63](#).

$$G_{\omega z} = C_z \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B_\omega. \quad (1.63)$$

Dessa maneira, o desempenho do sistema vai depender do tamanho do operador entre  $\omega(t)$  e  $z(t)$ ,  $G_{\omega z}$ . A maneira de se avaliar o valor de  $G_{\omega z}$  são as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . É possível representar as perturbações que afetam o sistema através de uma saída do sistema dinâmico excitado por um impulso, incorporando-as ao operador perturbação/saída de interesse, desde que a forma dos sinais seja conhecida.

Assim, a norma  $\mathcal{H}_2$  de  $G_{\omega z}$  pode ser definida como a energia da resposta ao impulso  $w(t)$  que é a energia do sinal de saída,  $z(t)$ . Quando o sistema [1.59](#) é estritamente próprio e estável, isto é, a matriz  $A$  é Hurwitz<sup>21</sup> e  $D_{\omega z} = 0$ , então a energia de saída  $z(t)$  será finita.

[CRUSIUS \(1996\)](#), [SKOGESTAD e POSTLETHWAITE \(2001\)](#), [BARBOSA \(2003\)](#) mostram que a norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser definida de diversas maneiras:

<sup>21</sup> A matriz  $A$  do sistema [1.59](#) é Hurwitz se todos os autovalores de  $A$  apresentam as partes reais estritamente negativas, em outras palavras,  $Re[\lambda_i] < 0$  para cada  $\lambda_i$ .

- para funções de transferência:

$$\|G_{\omega z}(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(G^*(j\omega) \cdot G(j\omega)) d\omega, \quad (1.64)$$

- para equações de estado, com  $D_{\omega z} = 0$  e gramiano<sup>22</sup> de controlabilidade  $L_c$ :

$$\|G_{\omega z}\|_2^2 = \text{Tr}(C_z \cdot L_c \cdot C'_z) : A \cdot L_c + L_c \cdot A' + B_\omega \cdot B'_\omega = 0, \quad (1.65)$$

- para equações de estado, com  $D_{\omega z} = 0$  e gramiano de observabilidade  $L_o$ :

$$\|G_{\omega z}\|_2^2 = \text{Tr}(B_\omega \cdot L_o \cdot B'_\omega) : A \cdot L_o + L_o \cdot A' + C_z \cdot C'_z = 0, \quad (1.66)$$

- através de otimização convexa, para sistema controlável:

$$\|G_{\omega z}\|_2^2 = \min \text{Tr}(C_z \cdot L_c \cdot C'_z) : A \cdot L_c + L_c \cdot A' + B_\omega \cdot B'_\omega \leq 0, \quad L_c > 0, \quad (1.67)$$

onde

$$L_c = \int_0^{\infty} \exp(A' \cdot t) \cdot B'_\omega \cdot B_\omega \cdot \exp(A \cdot t) dt. \quad (1.68)$$

A matriz  $L_c$  pode ser obtida através da resolução da equação de Lyapunov:

$$A \cdot L_c + L_c \cdot A' + B_\omega \cdot B'_\omega = 0, \quad (1.69)$$

- através de otimização convexa, para sistema observável:

$$\|G_{\omega z}\|_2^2 = \min \text{Tr}(B_\omega \cdot L_o \cdot B'_\omega) : A \cdot L_o + L_o \cdot A' + C_z \cdot C'_z \leq 0, \quad L_o > 0, \quad (1.70)$$

onde

$$L_o = \int_0^{\infty} \exp(A' \cdot t) \cdot C'_z \cdot C_z \cdot \exp(A \cdot t) dt. \quad (1.71)$$

A matriz  $L_o$  pode ser obtida através da resolução da equação de Lyapunov:

$$A \cdot L_o + L_o \cdot A' + C'_z \cdot C_z = 0. \quad (1.72)$$

<sup>22</sup> Dada uma matriz  $A \in \mathfrak{R}$ , a matriz  $A' \cdot A$  é uma matriz gramiana das colunas de  $A$ , ao passo que  $A \cdot A'$  é a matriz gramiana das linhas de  $A$ . Conforme explicado na Seção 1.5, quando aplicado à teoria de controle, por exemplo, o gramiano de controlabilidade é utilizado para determinar se um sistema linear é ou não controlável. O gramiano de observabilidade é utilizado para determinar se o sistema linear é ou não observável.

### 1.10.1 Norma euclidiana $\mathcal{H}_2$ via LMIs

BARBOSA (2003) mostra que o problema do cálculo da norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser resolvido como um problema de otimização convexa através da Equação 1.73 com a precisão desejada.

$$\|G_{\omega z}\|_2^2 = \min_P \{Tr\{B'_\omega \cdot P \cdot B_\omega\} : P = P' > 0, \quad A' \cdot P + P \cdot A + C'_z \cdot C_z < 0\} \quad (1.73)$$

## 1.11 Norma infinita $\mathcal{H}_\infty$

Seja o sistema nominal representado na Seção 1.10 pela equação 1.59, com  $x(0) = 0$ , e  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  representando o vetor de estados;  $\omega(t) \in \mathfrak{R}^{n_\omega}$ , o vetor de entrada de perturbações (entradas exógenas);  $z(t) \in \mathfrak{R}^{n_z}$ , o vetor de saídas de interesse (saídas medidas); e  $A$ ,  $B_\omega$ ,  $C_z$  e  $D_{\omega z}$  são matrizes constantes com dimensões apropriadas. Então, a matriz de transferência representando o operador perturbação/saída de interesse no domínio da frequência neste caso é dada por:

$$G_{\omega z} = C_z \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B_\omega + D_{\omega z}. \quad (1.74)$$

Dessa maneira, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de uma função de transferência  $\|G_{\omega z}\|$  é simplesmente o valor de pico de  $|G_{\omega z}(j\omega)|$ , ou o maior ganho que o sistema é capaz de oferecer ao sinal de entrada. Ela é representada, no caso de sistemas SISO<sup>23</sup>, pela equação 1.75, onde a entrada  $\omega$ , a saída  $z$  e a função de transferência  $G_{\omega z}$  são escalares (BARBOSA, 2003).

$$\|G_{\omega z}(s)\|_\infty \triangleq \max_\omega |G_{\omega z}(j\omega)|. \quad (1.75)$$

No caso de sistemas MIMO<sup>24</sup> a ideia de módulo não se aplica e deve ser substituída pela norma espectral da matriz de transferência representada pela equação 1.76. Então, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é definida como:

$$\|G_{\omega z}(s)\|_\infty \triangleq \sup_\omega \bar{\sigma}\{G_{\omega z}(j\omega)\}, \quad (1.76)$$

onde  $\bar{\sigma}\{G_{\omega z}(j\omega)\}$  denota o valor singular máximo de  $G_{\omega z}(j\omega)$  (CRUSIUS, 1996).

Segundo SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2001), é possível substituir o símbolo “max”, isto é, “máximo valor”, em 1.75 por “sup”, isto é, “o supremo, o limite superior mínimo”. Isso, devido ao fato de que o máximo só poder ser aproximado na medida em que  $\omega \rightarrow \infty$  e portanto pode realmente não ser alcançado. Eles argumentam, finalmente

<sup>23</sup> Sistemas com apenas uma entrada e apenas uma saída.

<sup>24</sup> Sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

que, para os propósitos da engenharia não há diferença entre “sup” e “max”. Quando se usa os termos norma e controle  $\mathcal{H}_\infty$ , está-se simplesmente falando sobre um método de projeto cujo objetivo é fazer com que os picos de uma ou mais funções de transferência escolhidas diminuam.

CRUSIUS (1996) sustenta que o cálculo da norma infinita, no caso das funções de transferência, não pode ser feito diretamente como no caso da norma  $H_2$ , mas deve seguir um procedimento iterativo.

A versão no domínio do tempo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  surge, de acordo com COLMENARES e GONZÁLEZ (2005), da aplicação do Lema 1.10.1 de Parseval na definição da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , equação 1.76, a qual se traduz pelo maior ganho da resposta em frequência da norma em questão. Esta versão é representada pela equação 1.77.

$$\|G_{\omega z}(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2}. \quad (1.77)$$

### 1.11.1 Norma infinita $\mathcal{H}_\infty$ via LMIs

Para sistemas nominais SISO pode-se determinar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  através da sua resposta em frequência utilizando o diagrama de Bode para obter o ganho máximo do sistema em relação a todas as frequências (COLMENARES; GONZÁLEZ, 2005). Todavia, para sistemas MIMO, essa abordagem é complexa, prefere-se utilizar a noção de decomposição pelo valor singular.

Assim, em lugar da determinação do valor exato para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , determina-se numericamente um limitante superior  $\gamma$  para  $\|G_{\omega z}(s)\|_\infty$ , buscando-se a partir de 1.77 um escalar positivo tal que :

$$\|G_{\omega z}(s)\|_\infty < \gamma. \quad (1.78)$$

CRUSIUS (1996) argumentam que encontrar o limitante que satisfaça 1.78, denominado o problema  $\mathcal{H}_\infty$  sub-ótimo, pode ser resolvido de diversas maneiras, incluindo equação de Riccati, matriz Hamiltoniana e LMI. CRUSIUS (1996) acrescenta que encontrar um controlador que minimize essa norma é denominado de problema ótimo  $\mathcal{H}_\infty$ .

OLIVEIRA e PERES (2010) propõem a sequência de raciocínio que se segue para determinar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  através de LMI.

- manipulando a equação 1.77 vem:

$$\|G_{\omega z}(s)\|_\infty = \sup_{\omega \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2} = \sup_{\omega \neq 0} \sqrt{\frac{\int_0^\infty z(t)' \cdot z(t) dt}{\int_0^\infty \omega(t)' \cdot \omega(t) dt}} < \gamma, \quad (1.79)$$



- a equação 1.79 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_0^\infty z(t)' \cdot z(t) dt <^2 \cdot \int_0^\infty \omega(t)' \cdot \omega(t) dt, \quad (1.80)$$

- considere que o sistema é exponencialmente estável, isto é,  $x(\infty) = 0$  e que as condições iniciais são nulas, isto é,  $x(0) = 0$
- considere o problema de determinar uma função  $V(x) = x(t)' \cdot P \cdot x(t)$ , onde  $P$  é uma matriz simétrica definida positiva, tal que:

$$\dot{V}(x) + z(t)' \cdot z(t) - \gamma^2 \cdot \omega(t)' \cdot \omega(t) < 0. \quad (1.81)$$

onde  $\dot{V}$  é a derivada de  $V(x)$  para as trajetórias do sistema. Para comprovar 1.80 e em consequência 1.79 basta encontrar  $V(x)$  que satisfaça 1.81. Integrando 1.81 no intervalo  $t \in (0, T)$  com  $T \rightarrow \infty$ .

- trabalhando a equação 1.81 é possível expressá-la como uma LMI:

$$\dot{V}(x) + z(t)' \cdot z(t) - \gamma^2 \cdot \omega(t)' \cdot \omega(t) =$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} (A' \cdot P + P \cdot A + C'_z \cdot C_z) & (P \cdot B_\omega + C'_z \cdot D_{\omega z}) \\ (B'_\omega \cdot P + D'_{\omega z} \cdot C_z) & -\gamma^2 \cdot I_{n_\omega} + D'_{\omega z} \cdot D_{\omega z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \neq 0.$$

- finalmente, a expressão anterior pode ser colocada na forma de LMI:

$$\begin{bmatrix} (A' \cdot P + P \cdot A + C'_z \cdot C_z) & (P \cdot B_\omega + C'_z \cdot D_{\omega z}) \\ (B'_\omega \cdot P + D'_{\omega z} \cdot C_z) & -\gamma^2 \cdot I_{n_\omega} + D'_{\omega z} \cdot D_{\omega z} \end{bmatrix} < 0. \quad (1.82)$$

A LMI 1.82 recebe o nome de “Bounded Real Lemma” e é uma condição necessária e suficiente para 1.79.

- Isto implica que o valor exato da norma pode ser obtido, com a precisão desejada, através do problema de otimização convexa expresso por 1.83:

$$\min_P \gamma^2 : \begin{cases} P > 0, \\ \begin{bmatrix} (A' \cdot P + P \cdot A + C'_z \cdot C_z) & (P \cdot B_\omega + C'_z \cdot D_{\omega z}) \\ (B'_\omega \cdot P + D'_{\omega z} \cdot C_z) & -\gamma^2 \cdot I_{n_\omega} + D'_{\omega z} \cdot D_{\omega z} \end{bmatrix} < 0. \end{cases} \quad (1.83)$$

## 1.12 Controle robusto $\mathcal{H}_2$ para sistema descritor

Os sistemas descritores são conhecidos também por sistemas com restrições algébricas ou sistemas singulares (BARBOSA; TROFINO, 2002). Segundo Lu et al. (2009), um sistema descritor descreve melhor os sistemas físicos do que um sistema em espaço de estado. Contudo, um sistema descritor tem uma estrutura mais complexa do que aquela de um sistema em espaço de estados. Isto porque o primeiro usualmente apresenta três tipos de modos, quais sejam, modos dinâmicos finitos, modos impulsivos e modos estáticos. Os sistemas em espaço de estado só apresentam os modos dinâmicos finitos. Para sistemas descritores com incertezas paramétricas a estabilidade robusta é garantida para todas as incertezas admissíveis através de uma condição de LMI estrita por intermédio da estabilidade quadrática generalizada.

BARBOSA e TROFINO (2002) estudam o problema da análise da estabilidade para o sistema descritor representado por 1.84 com incertezas representadas por 1.86.

$$E \cdot \dot{\xi} = A \cdot \xi, \quad (1.84)$$

onde  $\xi \in \mathfrak{R}^{n_\xi}$  representa o vetor de estados do sistema e  $A \in \mathfrak{R}^{n_\xi \times n_\xi}$  e  $E \in \mathfrak{R}^{n_\xi \times n_\xi}$  são matrizes dinâmicas do sistema com  $\text{rank } E < n_\xi$ , caracterizando a singularidade do sistema.

A forma algébrico-diferencial desacoplada com a restrição algébrica é dada por 1.85, onde  $x \in \mathfrak{R}^n$  representa os estados e  $z \in \mathfrak{R}^l$  representa as variáveis algébricas do sistema, isto é, algebricamente dependente do estado e  $J$  é a matriz jacobiana do sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 \cdot x + A_2 \cdot z, \\ 0 &= A_3 \cdot x + A_4 \cdot z, \\ J &= \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$\begin{aligned} J &\in C_0 \cdot \left[ \tilde{J}_i \right]_{i=1}^q, \\ \tilde{J}_i &= \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} \\ J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Neste sistema,  $C_0 \cdot \left[ \tilde{J}_i \right]_{i=1}^q$  representa o politopo convexo de vértices  $\tilde{J}_i$  das incertezas.

BARBOSA e TROFINO (2002) argumentam que a análise da estabilidade de sistemas com restrições algébricas na forma algébrico-diferencial pode ser feita eliminando-se a variável algébrica e transformando o sistema algébrico-diferencial em um outro

puramente diferencial de menor dimensão. Porém, essa abordagem dificulta a consideração de incertezas no modelo por envolver inversão de matrizes com elementos incertos. Se a dimensão do problema é grande, outra dificuldade que pode ocorrer é a perda da esparsidade das matriz gerando impacto computacional considerável. Como uma forma de evitar esses problemas, [BARBOSA e TROFINO \(2002\)](#) propõe expressar o problema em LMIs que são tratáveis numericamente de maneira eficiente.

[BARBOSA e TROFINO \(2002\)](#), considerando que a matriz  $J_4$  é inversível e que o sistema é admissível, propõem a seguinte condição para a estabilidade do sistema representado por [1.85](#) e [1.86](#):

**Definição 1.12.0.1 (Estabilidade quadrática para o sistema descritor)** *O sistema descritor é quadraticamente estável se existe uma função  $v(x) = x' \cdot P \cdot x > 0$ ,  $\forall x$  tal que sua derivada temporal para as trajetórias do sistema [1.85](#) e [1.86](#) satisfaça a condição de estabilidade representada por [1.87](#) ([BARBOSA; TROFINO, 2002](#)).*

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} J_1' \cdot P + P \cdot J_1 & P \cdot J_2 \\ J_2' \cdot P & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} < 0 \\ \forall J \in C_0 \cdot [\tilde{J}_i]_{i=1}^q, \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (1.87)$$

Para transformar a condição de estabilidade [1.87](#) em um problema envolvendo apenas uma LMI basta aplicar o Lema de Finsler, representado pela Definição [1.8.2.7](#), utilizando a condição “iv”, conforme mostra o Exemplo [1.8.2.6](#).

Assim, para o sistema nominal com solução via LMI, basta encontrar  $P$  tal que satisfaça a seguinte condição:

$$\begin{bmatrix} J_1' \cdot P + P \cdot J_1 & P \cdot J_2 \\ J_2' \cdot P & 0 \end{bmatrix} + L \cdot \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix}' \cdot L' < 0.$$

Conforme [BARBOSA e TROFINO \(2002\)](#), para o mesmo sistema e consideradas as incertezas politópicas tem-se que ele é quadraticamente estável e admissível se existem matrizes  $P > 0$  e  $L$  tais que a LMI que se segue seja satisfeita para todo  $i = 1, \dots, q$ :

$$\begin{bmatrix} J_{1i}' \cdot P + P \cdot J_{1i} & P \cdot J_{2i} \\ J_{2i}' \cdot P & 0 \end{bmatrix} + L \cdot \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix}' \cdot L' < 0.$$

## 1.13 Sistemas Estritamente Reais Positivos - ERP

### 1.13.1 Introdução

Para uma introdução à teoria sobre sistemas Estritamente Reais Positivos nesta seção considere-se uma planta linear, invariante no tempo, controlável e observável<sup>25</sup> representada por 1.88 (COVACIC, 2001; COVACIC et al., 2010; COVACIC et al., 2010b):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t).\end{aligned}\tag{1.88}$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de saída do sistema,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz característica do sistema,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada ou de controle do sistema,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é matriz de saída do sistema e  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é matriz de transmissão direta do sistema.

Segundo COVACIC (2001), COVACIC (2006), os sistemas ERP se revestem de grande importância no controle de sistemas com incertezas<sup>26</sup> e distúrbios por causa da disponibilidade de resultados relevantes sobre a estabilidade desses sistemas. ANDERSON (1968), por exemplo, mostra que Popov introduziu o conceito de hiperestabilidade para sistemas lineares invariantes no tempo com uma entrada e uma saída, em 1963. Depois ampliou suas idéias mostrando que existe uma equivalência entre sistemas hiperestáveis e sistemas que podem ser descritos por uma função de transferência que é real positiva, ou seja, que hiperestabilidade implica em real positividade.

### 1.13.2 Sistemas hiperestáveis e assintoticamente hiperestáveis

**Definição 1.13.1 (Matriz de Transferência Real Positiva)** (ANDERSON, 1968) *A matriz de transferência própria racional  $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  da planta 1.88 é Real Positiva (RP) se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (a) *Os elementos de  $G(s)$  não possuem pólos com parte real positiva;*
- (b)  *$G^*(s) = G'(s^*)$  e*
- (c) *A matriz hermitiana  $J(s) = G(s) + G'(s^*)$  é semi-positiva definida em  $Re(s) > 0$ , sendo que o asterisco (\*) denota o complexo conjugado de um escalar ou o complexo conjugado transposto de um vetor ou matriz (ANDERSON, 1968).*

<sup>25</sup> Sobre controlabilidade e observabilidade consultar Seção 1.5.

<sup>26</sup> Sobre sistemas com incertezas consulte Seção 1.14.

**Definição 1.13.2 (Matriz de Transferência Estritamente Real Positiva)** *A matriz de transferência  $G(s) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  é Estritamente Real Positiva (ERP) se  $G(s - \epsilon)$  for RP para algum  $\epsilon > 0$  (KHALIL, 2001; COVACIC, 2001; COVACIC, 2006).*

Considere-se, novamente, a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável representada pela Equação 1.88 (ANDERSON, 1968), tal que para todo  $T$  positivo,

$$\int_0^T u'(t)y(t)dt < \delta[\|x(0)\|] \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|. \quad (1.89)$$

Na Equação 1.89,  $\delta$  é uma constante positiva dependente do estado inicial  $x(0)$  do sistema, porém independente do tempo  $T$  e o símbolo  $\| \cdot \|$  representa a norma Euclideana.

ANDERSON (1968) argumenta que a hiperestabilidade é uma propriedade do sistema que requer que o vetor de estado permaneça limitado se as entradas  $u$  são restritas ao subconjunto do conjunto de todas as entradas possíveis. Sendo assim, o subconjunto das entradas  $u$  é definido por aqueles  $u(\cdot)$  que satisfazem a Equação 1.89.

**Definição 1.13.3 (Sistema Hiperestável)** *O sistema 1.88 é dito hiperestável se, para qualquer  $u(\cdot)$  limitado definido em 1.89 a seguinte inequação é satisfeita para alguma constante positiva  $K$  e para todo  $t \geq 0$  (ANDERSON, 1968):*

$$\|x(t)\| \leq K(\|x(0)\| + \delta). \quad (1.90)$$

**Definição 1.13.4 (Sistema Assintoticamente Hiperestável)** *O sistema 1.88 é dito assintoticamente hiperestável se, para qualquer  $u(\cdot)$  limitado definido em 1.89 a inequação 1.90 é satisfeita juntamente com (ANDERSON, 1968):*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (1.91)$$

Seja, por definição,  $G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$  a matriz de transferência do sistema 1.88, então:

**Lema 1.13.1 (Sistema hiperestável)** *A condição necessária e suficiente para que o sistema 1.88 seja hiperestável é que  $G(s)$  seja RP (ANDERSON, 1968).*

**Lema 1.13.2 (Sistema assintoticamente hiperestável)** *A condição necessária e suficiente para que o sistema 1.88 seja assintoticamente hiperestável é que  $G(s)$  seja ERP (ANDERSON, 1968).*

### 1.13.3 Síntese de sistemas ERP

Sistemas Estritamente Reais Positivos (ERP) são sistemas passivos<sup>27</sup>, realimentados negativamente, com o mesmo número de entradas e saídas e que apresentam a propriedade de estabilidade assintótica. A condição necessária e suficiente para que isso aconteça é que todos os zeros de transmissão<sup>28</sup> tenham parte real negativa (COVACIC et al., 2010; COVACIC et al., 2012).

Tornar um sistema ERP é um processo conhecido como síntese ERP. Consiste na manipulação do sistema, com o objetivo de colocá-lo na forma ERP, de tal maneira a aproveitar os resultados sobre a estabilidade destes sistemas. De uma maneira resumida, trata-se de encontrar duas matrizes constantes  $K_o$ , de realimentação da saída, e  $F$ , em série com a saída como na Figura 18, tais que o sistema controlado  $A - BK_oC, B, FC$  seja ERP (COVACIC, 2006). Na Seção 3.5 são utilizados os conceitos de síntese ERP para encontrar uma matriz de realimentação das saídas de maneira a estabilizar um veículo sobre rodas com tracionamento diferencial em presença de incertezas paramétricas utilizando LMIs.

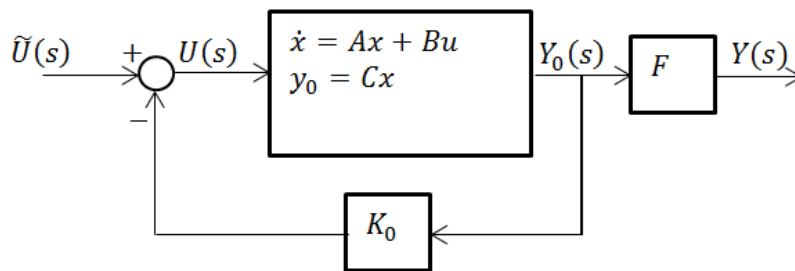


Figura 18 – Representação gráfica de um sistema com realimentação da saída do Problema 1.13.1.

Fonte: (COVACIC, 2001; COVACIC, 2006)

Para que um sistema de MA  $\dot{x} = A \cdot x$  seja ERP, ele deve obedecer às condições do Lema 1.13.3.

**Lema 1.13.3 (Condição para que um sistema seja ERP)** *A matriz de transferência do sistema 1.88 com  $D = 0$ ,  $G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$ , é ERP se e somente se existir uma matriz  $P = P'$ , tal que (COVACIC, 2001; COVACIC, 2006):*

$$P \cdot A + A' \cdot P < 0,$$

<sup>27</sup> Sistemas passivos são sistemas independentes de utilização de energia externa para o seu controle. Sistemas ativos, por outro lado, são aqueles que dependem, por exemplo, de atuadores para serem controlados. (TORRES, 2010).

<sup>28</sup> Um zero de transmissão, ou simplesmente um zero de um sistema dinâmico MIMO, é um valor da variável da Transformada de Laplace  $s$ , denominado de frequência generalizada  $z$ , para o qual a resposta temporal da saída do sistema é zero, ou seja,  $y(t) = 0$  para  $t \geq 0$ , para um vetor de entradas diferente de zero variando segundo  $u(t) = u_0(t) \cdot \exp z \cdot t$ . (TORRES, 2010)

$$B' \cdot P = C,$$

$$P > 0. \quad (1.92)$$

#### 1.13.4 Determinação da matriz de realimentação que torna o sistema ERP

COVACIC (2006), baseando-se no Lema 1.13.3, considerando a planta 1.88, com  $D = 0$ , e sendo  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  o vetor de estado,  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$  a entrada de controle,  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$  o vetor de saída do sistema,  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  a matriz característica do sistema,  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  a matriz de entrada ou de controle do sistema e  $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{p \times n}$  a matriz de saída do sistema, com  $p \geq m$ ,  $\text{posto}(C) = p$  e  $\text{posto}(B) = \text{posto}(CB) = m$ , propõe o Problema 1.13.1 que se segue.

**Problema 1.13.1 (Determinar  $F$ ,  $K_o$  para sistema ERP)** *Dada a planta  $A, B, C$  linear, invariante no tempo, controlável e observável, com  $\text{posto}(C) = p$ , e  $\text{posto}(B) = \text{posto}(CB) = m$ , obtenha as condições necessárias e/ou suficientes, usando LMIs, para a existência de matrizes constantes  $F$  e  $K_o \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ , para que o sistema descrito na Figura 18 seja ERP.*

#### 1.13.5 Sistemas com realimentação da saída e mesmo número de entradas e saídas

Considere-se, em primeiro lugar, sistemas com realimentação da saída e com o mesmo número de entradas e saídas ( $m = p$ ). A solução do Problema 1.13.1 é obtida com o uso do Lema 1.13.4 (COVACIC, 2001; COVACIC, 2006).

**Lema 1.13.4 (Solução para 1.13.1 com  $m = p$ )** *O Problema 1.13.1 tem solução se e somente se existirem matrizes  $P = P'$ ,  $R$  e  $F$ , tais que:*

$$P \cdot A + A' \cdot P - C' \cdot (R + R') \cdot C < 0, \quad (1.93)$$

$$B' \cdot P = F \cdot C, \quad (1.94)$$

$$P > 0. \quad (1.95)$$

Além disso, quando 1.93-1.95 são satisfeitas, então uma matriz  $K_o$ , obtida pela expressão:

$$K_o = (F')^{-1} \cdot R, \quad (1.96)$$

torna o sistema da Figura 18, com entrada  $\tilde{U}(s)$  e saída  $Y(s)$ , ERP (ANDERSON, 1968; COVACIC, 2001; COVACIC, 2006).

**Prova 1.13.1** *A partir do Lema 1.13.3, o sistema descrito na Figura 18, com entrada  $\tilde{U}(s)$  e saída  $Y(s)$  é ERP se e somente se existirem matrizes  $P = P'$ ,  $K_o$  e  $F$ , tais que:*

$$P \cdot (A - B \cdot K_o \cdot C) + (A - B \cdot K_o \cdot C)' \cdot P < 0, \quad (1.97)$$

$$B' \cdot P = F \cdot C, \quad (1.98)$$

$$P > 0. \quad (1.99)$$

*Substituindo 1.98 em 1.97 e definindo  $R = F' \cdot K_o$ , tem-se:*

$$P \cdot A + A' \cdot P - C' \cdot F' \cdot K_o \cdot C - C' \cdot K_o' \cdot F \cdot C < 0,$$

$$P \cdot A + A' \cdot P - C' \cdot (R + R') \cdot C < 0 \quad (1.100)$$

que corresponde à equação 1.93.

Considerando a Equação 1.94, como  $\text{posto}(B) = m$ , então,  $B' \cdot P \cdot B = F \cdot C \cdot B$  tem posto  $m$ . Portanto,  $F \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  também tem posto  $m$  e assim  $(F')^{-1}$  existe. Então, se o sistema mostrado na Figura 18 for ERP, 1.93-1.95 são factíveis e se 1.93-1.95 forem factíveis, o sistema na Figura 18 é ERP, para  $K_o$  dado em 1.96 (COVACIC, 2001).

**Observação 1.13.1** *Segundo (GAHINET et al., 1995), se as LMIs dadas em 1.93-1.95 forem factíveis, elas podem ser facilmente resolvidas utilizando-se programas computacionais disponíveis, como o Matlab®.*

### 1.13.6 Sistemas com realimentação da saída e números diferentes de entradas e saídas

Seja a planta 1.88, com  $D = 0$ , onde  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estado;  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$ , a entrada de controle;  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$ , o vetor de saída do sistema;  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , a matriz característica do sistema;  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ , a matriz de entrada ou de controle do sistema; e  $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ , a matriz de saída do sistema. Seja, ainda,  $p > m$ ,  $\text{posto}(C) = p$  e  $\text{posto}(B) = \text{posto}(CB) = m$  COVACIC (2006). Dessa maneira, fazendo-se inicialmente a dimensão do vetor de saída igual a dimensão do vetor de estado, ( $p = n$ ), propõe-se, então, a solução do Problema 1.13.1 através do uso do Lema 1.13.5 (COVACIC, 2006).

**Lema 1.13.5 (Solução para 1.13.1 com  $m \neq p$ )** *O Problema 1.13.1, com  $p = n$  tem solução se e somente se existirem matrizes  $X = X'$ ,  $R$  e  $F$  tais que satisfaçam às seguintes LMIs:*

$$A \cdot X + X \cdot A' - B \cdot R - R' \cdot B' < 0, \quad (1.101)$$



$$X > 0. \quad (1.102)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por (COVACIC, 2006):

$$F = B' \cdot X^{-1} \cdot C^{-1}, \quad (1.103)$$

$$K_o = R \cdot X^{-1} \cdot C^{-1}. \quad (1.104)$$

**Prova 1.13.2** A partir do Lema 1.13.3, o sistema descrito na Figura 18, com entrada  $\tilde{U}(s)$  e saída  $Y(s)$  é ERP se e somente se existirem matrizes  $P = P'$ ,  $K_o$  e  $F$ , tais que:

$$P \cdot (A - B \cdot K_o \cdot C) + (A - B \cdot K_o \cdot C)' \cdot P < 0, \quad (1.105)$$

$$B' \cdot P = F \cdot C, \quad (1.106)$$

$$P > 0. \quad (1.107)$$

Definindo-se  $X = P^{-1}$ , têm-se, de 1.105-1.107:

$$(A - B \cdot K_o \cdot C) \cdot X + X \cdot (A - B \cdot K_o \cdot C)' < 0, \quad (1.108)$$

$$B' = F \cdot C \cdot X, \quad (1.109)$$

$$X > 0. \quad (1.110)$$

As LMIs 1.102 e 1.110 são equivalentes. Definindo-se, em 1.108,  $R = K_o \cdot C \cdot X$ , obtém-se a LMI 1.101. Como as matrizes  $C$  e  $X$  são inversíveis, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas através das equações 1.103 e 1.104.

$$\begin{aligned} A \cdot X + X \cdot A' - B \cdot R - R' \cdot B' < 0, \\ X > 0. \end{aligned} \quad (1.111)$$

e, as matrizes  $F$  e  $K_o$  serão obtidas das equações 1.112 e 1.113.

$$F = B' \cdot X^{-1} \cdot C^{-1} \quad (1.112)$$

$$K_o = R \cdot X^{-1} \cdot C^{-1} \quad (1.113)$$

## 1.14 Sistemas com incertezas limitadas em norma

Sabe-se que os modelos matemáticos são, na verdade, aproximações do SFR. Assim, o esquema de controle baseado num modelo que apresenta incertezas será tanto mais eficiente quanto mais próximo do SFR (LOPES, 2011). Todavia, quanto mais próximo um modelo está do SFR mais complexo ele se torna. Os sistemas dinâmicos apresentam incertezas originárias de várias fontes, tais como: desconhecimento de parâmetros (constantes, variantes no tempo, ou conhecidos com imprecisão) e desconhecimento de entradas do sistema (COVACIC, 2001). Além disso, há duas classes conhecidas de sistemas: os passivos, independentes de utilização de energia externa para o seu controle, e os ativos, que dependem, por exemplo, de atuadores para serem controlados (TORRES, 2010).

Considere-se a planta representada pela Equação 1.114:

$$\dot{x} = (A + \delta A) \cdot x + (B + \delta B) \cdot u \quad (1.114)$$

onde as matrizes com incertezas são dadas pelas equações 1.115:

$$\begin{aligned} \delta A &= L \cdot \Delta \cdot R_A, \\ \delta B &= L \cdot \Delta \cdot R_B, \\ \Delta \cdot \Delta' &\leq I. \end{aligned} \quad (1.115)$$

As matrizes  $R_A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $R_B \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e  $L \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  são determinadas algebricamente<sup>29</sup>, de modo que atendam às expressões da Equação 1.114 para  $\delta A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $\delta B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  dadas na Equação 1.115.  $\Delta \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  é a matriz diagonal das incertezas, contendo os parâmetros incertos normalizados na diagonal principal, sendo que o módulo de cada um deles é menor ou igual a 1.

O Lema 1.14.1 estabelece uma condição suficiente para a estabilidade do sistema em MA, representado pela Equação 1.114, com as matrizes incertas dadas em 1.115 e  $u = 0$ , ou seja, entrada nula.

**Lema 1.14.1 (Estabilidade com Incertezas, MA)** (LU et al., 2009) *A planta 1.114, com  $u = 0$ , é estável para quaisquer matrizes  $\delta A$  e  $\delta B$  definidas em 1.115 se existir uma matriz  $X = X'$  e uma constante real  $\epsilon$  que atendam às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} A \cdot X + X \cdot A' + \epsilon \cdot L \cdot L' & X \cdot R_A' \\ R_A \cdot X & -\epsilon \cdot I \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (1.116)$$

<sup>29</sup> A determinação das matrizes  $R_A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $R_B \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e  $L \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  está detalhada no Apêndice F.

**Prova 1.14.1** De acordo com o segundo método de Lyapunov, a planta 1.114, com  $u = 0$  e  $\delta A$  definida em 1.115 e , é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz  $X = X'$  tal que:

$$\begin{aligned} (A + L \cdot \Delta \cdot R_A) \cdot X + X \cdot (A + L \cdot \Delta \cdot R_A)' = \\ A \cdot X + X \cdot A' + L \cdot \Delta \cdot R_A \cdot X + X \cdot R_A \cdot \Delta' \cdot L' < 0, \\ X > 0. \end{aligned} \quad (1.117)$$

Para qualquer  $\Delta$  tal que  $\Delta \cdot \Delta' \leq I$ , de acordo com o Lema 3 de Lu et al. (2009), a LMI 1.117 é satisfeita se existir um escalar  $\epsilon > 0$  tal que:

$$A \cdot X + X \cdot A' + \epsilon \cdot L \cdot L' + \epsilon^{-1} \cdot X \cdot R_A' \cdot R_A \cdot X < 0,$$

isto é,

$$-(A \cdot X + X \cdot A' + \epsilon \cdot L \cdot L') - (-X \cdot R_A') \cdot (\epsilon \cdot I)^{-1} \cdot (-R_A \cdot X) > 0. \quad (1.118)$$

Como  $\epsilon > 0$ , de acordo com o complemento de Schur, mostrado em 1.8.3 (BOYD et al., 1994), a LMI 1.118 é equivalente à:

$$\begin{bmatrix} -(A \cdot X + X \cdot A' + \epsilon \cdot L \cdot L') & -(X \cdot R_A') \\ -(R_A \cdot X) & \epsilon \cdot I \end{bmatrix} > 0.$$

que corresponde à Equação 1.116.

Seja, agora, a planta dada pela Equação 1.114, com as matrizes  $\delta A$  e  $\delta B$  dadas pela Equação 1.115 e a lei de controle com realimentação de estados dada pela Equação 1.119.

$$u = -K \cdot x. \quad (1.119)$$

Assim, considerando as equações 1.114 e 1.115, o sistema realimentado com a lei de controle representada pela Equação 1.119 é definido pela Equação 1.120.

$$\dot{x} = [(A - B \cdot K) + L \cdot \Delta \cdot (R_A - R_B \cdot K)] \cdot x. \quad (1.120)$$

O Lema 1.14.2 a seguir corresponde ao Lema 1.14.1, porém, aplicado ao sistema de MF, e estabelece uma condição suficiente para a estabilidade do sistema realimentado

dado pela Equação 1.120, com as matrizes incertas dadas pela Equação 1.115 e entrada representada pela Equação 1.119.

**Lema 1.14.2 (Estabilidade com Incertezas, MF)** *O sistema 1.120 é estável para quaisquer matrizes  $\delta A$  e  $\delta B$  definidas em 1.115 se existirem matrizes  $X = X'$  e  $W$  e uma constante real  $\epsilon$  que atendam às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} A \cdot X + X \cdot A' - B \cdot W - W' \cdot B' + \epsilon \cdot L \cdot L' & X \cdot R'_A - W' \cdot R'_B \\ R_A \cdot X - R_B \cdot W & -\epsilon \cdot I \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (1.121)$$

A partir da solução, a matriz  $K$  é dada por  $K = W \cdot X^{-1}$ .

**Prova 1.14.2** *De acordo com o segundo método de Lyapunov, a planta realimentada dada pela Equação 1.120, com  $\delta A$  e  $\delta B$  definidas na Equação 1.115, é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz  $X = X'$  e uma matriz  $W$ , tal que satisfaça a Equação 1.122.*

$$\begin{aligned} & [(A - B \cdot K) + L \cdot \Delta \cdot (R_A - R_B \cdot K)] \cdot X + X \cdot [(A - B \cdot K) + L \cdot \Delta (R_A - R_B \cdot K)]' \\ &= A \cdot X - B \cdot K \cdot X + L \cdot \Delta \cdot R_A \cdot X - L \cdot \Delta \cdot R_B \cdot K \cdot X + X \cdot A' - X \cdot K' \cdot B' + \\ & \quad X \cdot R'_A \cdot \Delta' \cdot L' - X \cdot K' \cdot R'_B \cdot \Delta' \cdot L' < 0, \\ & X > 0. \end{aligned} \quad (1.122)$$

*Substituindo  $K \cdot X$  por  $W$  e  $X \cdot K'$  por  $W'$  em 1.122 tem-se:*

$$\begin{aligned} & [(A - B \cdot K) + L \cdot \Delta \cdot (R_A - R_B \cdot K)] \cdot X + X \cdot [(A - B \cdot K) + L \cdot \Delta \cdot (R_A - R_B \cdot K)]' \\ &= A \cdot X - B \cdot K \cdot X + L \cdot \Delta \cdot R_A \cdot X - L \cdot \Delta \cdot R_B \cdot K \cdot X + X \cdot A' - X \cdot K' \cdot B' + X \cdot R'_A \cdot \Delta' \cdot L' - \\ & \quad X \cdot K' \cdot R'_B \cdot \Delta' \cdot L' < 0, \\ & X > 0. \end{aligned} \quad (1.123)$$

*Para qualquer  $\Delta$  tal que  $\Delta \Delta' \leq I$ , de acordo com o Lema 3 de Lu et al. (2009), a LMI representada pela Equação 1.123 é satisfeita se existir um escalar  $\epsilon > 0$  tal que:*

$$A \cdot X + X \cdot A' - B \cdot W - W' \cdot B' + \epsilon \cdot L \cdot L' + \\ \epsilon^{-1}(X \cdot R'_A - W' - R'_B)(R_A \cdot X - R_B \cdot W) < 0,$$

isto é:

$$-(A \cdot X + X \cdot A' - B \cdot W - W' \cdot B' + \epsilon \cdot L \cdot L') - \\ \left[ -(X \cdot R'_A - W' \cdot R'_B) \right] \cdot (\epsilon^{-1}) \cdot \left[ -(R_A \cdot X - R_B \cdot W) \right] > 0. \quad (1.124)$$

Segundo [BOYD et al. \(1994\)](#), como  $\epsilon > 0$  e considerando o complemento de Schur, mostrado em [1.8.3](#), a LMI representada pela Equação [1.124](#) é equivalente a:

$$\left[ \begin{array}{cc} -(A \cdot X + X \cdot A' - W' \cdot B' - B \cdot W + \epsilon \cdot L \cdot L') & -(X \cdot R'_A - W' \cdot R'_B) \\ -(R_A \cdot X - R_B \cdot W) & \epsilon \cdot I \end{array} \right] > 0. \quad (1.125)$$

que corresponde à Equação [1.121](#).

## 1.15 Controle de sistemas com taxa de decaimento e restrição de saída

De acordo com [BOYD et al. \(1994\)](#), análises de estabilidade e projetos de controle de sistemas descritos por LMIs permitem a introdução de outros índices de desempenho no projeto do controlador. Entre eles, por exemplo, a especificação da resposta transitória através da taxa de decaimento,  $(\gamma)$ , que permite uma resposta transitória mais rápida, e a especificação de restrições,  $(\mu, \lambda)$ , nos sinais de controle e nas saídas dos sistemas, sendo que essas restrições atuam como um limitante superior para a amplitude desses sinais ([GAINO, 2009](#)).

[BUZACHERO \(2010\)](#) argumenta que a magnitude dos controladores projetados pode prejudicar a implementação prática dos mesmos, sendo necessária uma minimização dos ganhos do controlador para viabilizar sua implementação, isto é, a otimização da norma de  $K$ . Já pelo fato de que o tempo de estabilização do sistema possa ser maior do que aquele especificado no projeto, há a necessidade de restrições nas LMIs que limitem a taxa de decaimento, obtidas com a inserção do parâmetro  $\gamma$  nas LMIs.

[COVACIC et al. \(2012\)](#) afirmam que há a necessidade de manter a amplitude de alguns sinais de um SFR dentro de uma faixa de valores segura por causa das suas limitações que são representadas por saturações nos atuadores ou o risco de danificação nos

sensores. Por outro lado, os sinais de amplitudes pequenas apresentam energias menores. Por isso, em muitas aplicações algumas entradas e saídas devem ser incluídas no projeto do controle.

BOYD et al. (1994), BUZACHERO (2010) definem a taxa de decaimento para sistemas com realimentação de estados como a maior constante positiva  $\gamma$ , tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\gamma t) \cdot \|x(t)\| = 0, \quad (1.126)$$

e que se mantenha para todas as trajetórias  $x(t)$ ,  $t > 0$ .

BUZACHERO (2010), mostra que é possível utilizar a função quadrática de Lyapunov, 1.39, e estabelecer um limite inferior sobre a taxa de decaimento do sistema controlado através dela de tal maneira que:

$$\dot{V}(x(t)) < 2 \cdot \gamma \cdot V(x(t)). \quad (1.127)$$

Um sistema que apresenta um desempenho robusto deve ser capaz de manter seu desempenho mesmo em presença de perturbações ou distúrbios, de ruídos e de incertezas. Dentre os vários tipos de incertezas existentes serão consideradas as incertezas limitadas em norma. Nesse tipo, representado pela matriz  $\Delta$ , a única informação que se tem sobre a incerteza está na sua norma. Nesse caso, a incerteza representada pela matriz  $\Delta$  atua nas matrizes que definem as equações do espaço de estado do sistema. Todavia não é conhecido o quanto seus elementos são afetados pela incerteza (REGIS FILHO, 2004). A norma  $\mathcal{H}_2$  da perturbação, por exemplo, pode ser calculada por  $\|\Delta\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(\Delta' \cdot \Delta)}$ , isto é, a raiz quadrada do máximo valor de  $(\Delta' \cdot \Delta)$  (REGIS FILHO, 2004).

Considere-se  $y(t) = C \cdot x(t)$ , assumindo que a condição inicial,  $x(0)$ , é conhecida e que as LMIs 1.129 e 1.130 são factíveis quando a restrição representada pela Equação 1.128 é imposta para todo tempo  $t \geq 0$ . Então, o estudo de estabilidade assintótica do sistema 1.114 com saída limitada se obtém adicionando as LMIs 1.129 e 1.130 às LMIs 1.121 do Lema 1.14.2, mantendo-se  $X = X' > 0$ , como indicado em (REGIS FILHO, 2004; GAINO, 2009; COVACIC et al., 2012).

$$\max \|y(t)\|_2 = \max \sqrt{y'(t) \cdot y(t)} \leq \lambda_0, \quad (1.128)$$

A condição da restrição estabelecida na Equação 1.128 é atendida se as LMIs 1.129 e 1.130 são satisfeitas.

$$\begin{bmatrix} 1 & x'(0) \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.129)$$

$$\begin{bmatrix} X & X \cdot C' \\ C \cdot X & \lambda_0^2 \cdot I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (1.130)$$

## 1.16 Conclusão Parcial: Capítulo 1

O conhecimento científico e técnico acumulado sobre a questão do projeto de controladores robusto é vasto. Na realidade cada vez mais acelera-se a obtenção de novos avanços. Procurou-se inicialmente situar o leitor no desenvolvimento histórico da modelagem, simulação e controle a fim de construir uma pequena base para a introdução dos conceitos sobre a modelagem no espaço de estados de sistemas dinâmicos.

Tendo em vista que o grande desafio é o tratamento dos sistemas não-lineares, de abordagem complexa, buscou-se introduzir as técnicas de linearização de sistemas para simplificação da abordagem. A partir do método da expansão em série de Taylor progride-se para o método indireto de Lyapunov, com o objetivo de discutir o método para determinar a estabilidade de um sistema. Três lemas básicos sobre o equilíbrio dos sistemas são analisados: equilíbrio assintoticamente estável, equilíbrio instável e equilíbrio marginalmente estável.

O conceito básico que permite aos cientistas e engenheiros de controle grandes progressos é o da estabilidade de pontos de equilíbrio no sentido de Lyapunov. As formas canônicas observável e controlável das plantas lineares na abordagem por alocação de polos e por equações de estado são estudadas de maneira concisa. Um exemplo de aplicação dos conceitos é proposto e resolvido com auxílio do ambiente do Matlab®.

Uma das primeiras estratégias de controle surgidas na engenharia, o uso de controladores do tipo Proporcional-Integral-Derivativo, é introduzida. O conceito de função de erro é comentado e uma planta em MF é mostrada através da técnica de diagrama de blocos. Os princípios das ações Proporcional, Integral e Derivativa são vistos de maneira rápida. Esses conceitos serão utilizados no projeto de controle de um veículo sobre rodas com tracionamento diferencial (VRTD). A seguir a modelagem dinâmica simplificada do VRTD utilizando equações de estados é proposta. Os parâmetros com seus valores utilizados no modelo são apresentados.

Um estudo mais detalhado da técnica matemática a ser utilizada em toda a dissertação é apresentado. Trata-se das Desigualdades Matriciais Lineares ou, como são mais conhecidas, LMIs. Uma breve perspectiva histórica do desenvolvimento da técnica de LMIs é abordada. Nesse ponto é identificada aquela que seria conhecida como a primeira LMI proposta: a desigualdade de Lyapunov. Alguns exemplos de determinação da estabilidade de sistemas, utilizando LMIs em ambiente Matlab®, são resolvidos e seus resultados comparados. Os exemplos são resolvidos utilizando o LMI Robust Control Toolbox e o SeDuMi, com a interface Yalmip para o LMILab . Algumas propriedades

mais importantes das LMIs são vistas, alguns teoremas importantes avaliados e mais exemplos são abordados. O conceito de politopo e sua importância no estudo de sistemas dinâmicos incertos são discutidos. Alguns exemplos de problemas são vistos com a finalidade de exemplificar os conceitos vistos. Os dois últimos conceitos bastante utilizados nas transformações de equações para desigualdades são postos: *S-procedure* para formas quadráticas e desigualdades estritas e Lema de Finsler. Esta seção finaliza com alguns exemplos de aplicação desses princípios a sistemas incertos e estabilidade quadrática.

Considerando que as normas de vetores e matrizes serão bastante utilizadas na dissertação, uma seção mais detalhada é dedicada ao assunto. Normas de vetores e matrizes são avaliadas. O Teorema de Parseval é introduzido e sua relação, em termos de energia de um sinal, com as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  é estabelecida. As normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  são estabelecidas via LMIs.

Uma breve introdução sobre controle robusto  $\mathcal{H}_2$  para sistema descritor é apresentada. Tendo em vista que o desenvolvimento dos controladores nos próximos capítulos lidarão com incertezas paramétricas, é dedicada uma seção detalhada sobre sistemas com incertezas limitadas em norma. A estabilidade da planta em MA e MF são vistas. O controle de sistemas com taxa de decaimento e restrição de saída são abordados tendo em vista a utilização no desenvolvimento do controle do ângulo de posição do joelho de um paciente paraplégico.

Finalmente, uma seção detalhada também é dedicada aos Sistemas Estritamente Reais (ERP) uma vez que esses conceitos serão o ponto focal de utilização no problema do controle do ângulo da posição do joelho do paciente paraplégico.



## 2 Controlador PI para um modelo linear simplificado da cadeira de rodas

A partir de [SOBRINHO et al. \(2003\)](#), [SOBRINHO et al. \(2000\)](#), [Ferreira, Cervantes e Germanovix \(2008\)](#) é possível descrever uma visão global do desenvolvimento do projeto de controle do modelo de uma cadeira de rodas controlada por sopro e sucção. Após a contextualização e definição do problema a ser tratado, o modelo dinâmico simplificado do VRTD é adotado como modelo da cadeira de rodas dando enfoque na parte de baixo nível da planta. A planta é então estabilizada utilizando-se controladores PI e P ([SOBRINHO et al., 2000](#)). Finalmente, o modelo dinâmico simplificado da cadeira de rodas é transferido para um diagrama de blocos e simulado em ambiente Simulink®.

### 2.1 Contextualização e definição do problema

Segundo [GIL \(2002\)](#), cerca de três por cento da população brasileira é portadora de deficiência motora. Tendo em vista que o Censo de 2010 ([IBGE, 2010](#)) apontou que a população do Brasil neste ano era de 190.732.694 de pessoas, conclui-se que 5.721.980 de pessoas no Brasil sofrem de restrições em relação à mobilidade e independência ([SIQUEIRA et al., 2009](#)). Essa situação tende a piorar na medida em que a expectativa de vida do brasileiro continua a aumentar. De acordo com [GAIER \(2010\)](#), esta expectativa era da ordem de 73,2 anos em 2010. Uma cadeira de rodas com controle colaborativo de baixo custo permitiria ao deficiente ganhar mobilidade de maneira segura e independente. Esta necessidade se torna mais aguda quando se sabe que 74,7% das Unidades Básicas de Saúde no Brasil não dispõem de cadeira de rodas ([SIQUEIRA et al., 2009](#)).

O Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina desenvolveu o protótipo da cadeira de rodas mostrada na Figura 19 que utiliza um controle colaborativo onde o cadeirante interage com a cadeira através de sopros e sucções para alcançar o ponto desejado na trajetória. Trata-se de uma cadeira de rodas com acionamento diferencial nas duas rodas traseiras controlado por um computador embarcado, o que lhe confere a capacidade de movimentação autônoma.

A cadeira utilizada pela UEL segue os padrões normalmente apresentados pela indústria que consiste de uma plataforma retangular baseada em quatro rodas ([MAZO et al., 1995](#)), duas rodas livres (denominadas rodas castores) e duas rodas independentes de acionamento. Cada roda de acionamento utiliza um motor DC [24V,9A], e a fonte de potência consiste de uma bateria de 24[V]. As duas rodas de acionamento devem estar tão longe quanto possível uma da outra, pelas seguintes razões:



Figura 19 – Protótipo da cadeira de rodas controlada da UEL/CTU, Departamento de Engenharia Elétrica.

Fonte: (FERREIRA; CERVANTES; GERMANOVIX, 2008)

- A estabilidade estática e dinâmica da cadeira de rodas é melhorada;
- A influência da resolução do codificador sobre o erro de orientação da cadeira de rodas é diminuída; e
- Durante os movimentos em linha reta, perturbações mecânicas e elétricas farão com que os motores funcionem em velocidades angulares diferentes, resultando numa trajetória temporariamente encurvada. É conhecido pela trigonometria que o raio da trajetória curva é diretamente proporcional à distância entre as rodas de acionamento.

No protótipo da cadeira de rodas descrito aqui, a distância entre as duas rodas de acionamento é de  $700\text{mm}$ . O raio das rodas de acionamento é de  $300\text{mm}$  e a distância entre o eixo das rodas de acionamento e o eixo das rodas castores é de  $500\text{mm}$ .

Vários tipos de interface homem-máquina podem ser construídos a fim de permitir ao usuário o controle da cadeira (MAZO et al., 1995; SOBRINHO et al., 2003). Porém, algumas dessas interfaces são mais onerosas do que outras. Um exemplo desse tipo de interface é o proposto por MAZO et al. (1994) que consiste em três modos de dirigir combinados num mesmo sistema de controle, que são:

- Comandos orais: “Controle por voz”. O sistema de sensor da cadeira atua como sistema de segurança;
- Direção autônoma: “Controle autônomo”. Nesse modo a cadeira segue as paredes e utiliza a informação proveniente dos sensores de infravermelho e ultrassom. A velocidade linear é modificada com comandos orais; e
- *Joystick*: “Controle manual”.

Quanto à facilidade de manobra, é preciso lembrar que alguns tipos de deficiências com um alto grau de dano na medula espinhal ou tetraplegia, apresentam como consequência uma perda de habilidade para operar uma cadeira de rodas, por exemplo, através de *joystick* (FERREIRA; CERVANTES; GERMANOVIX, 2008). Isso ensejou o desenvolvimento de um projeto para a disponibilização de “uma alternativa de baixo custo a ser aplicada na área médica, em casos de pacientes possuidores de paralisias permanentes ou temporárias dos membros inferiores e superiores” (SOBRINHO et al., 2000). Os comandos para controle de trajetória da cadeira de rodas devem ser obtidos através da utilização de sopros e sucções pelo cadeirante. O sistema de controle está dividido nos seguintes subsistemas: Unidade de Disparo, Unidade de Controle, Unidade de Tração ‘motor DC’ e Unidade Direcionamento. Na Unidade de Disparo, o transdutor utilizado para gerar os sinais de comando é constituído por um LVDT. O componente principal da Unidade de Controle é um Conjunto Processador que recebe os sinais de entrada provenientes do LVDT e envia os sinais adequados para a Unidade de Tração e Unidade de Direcionamento.

Segundo Ferreira, Cervantes e Germanovix (2008), especial atenção deve ser dada à forma como o cadeirante interage com o veículo. A interface deverá ter as seguintes características:

“Entre os fatores mais importantes estão a facilidade de uso e a conveniência no controle. A operação do dispositivo deve ser fácil de aprender e exigir o mínimo esforço por parte do usuário. O dispositivo deverá ser pequeno, não obstruível, baixo custo e não, ou minimamente invasivo “Ferreira, Cervantes e Germanovix (2008 apud KRISHNAMURTHY; GHOVANLOO, 2006)”. Finalmente um fator que é frequentemente negligenciado é que o dispositivo deverá ser esteticamente aceitável. A pessoa deficiente quer ser aceita e despertar atenção especial”. (FERREIRA; CERVANTES; GERMANOVIX, 2008)

No controle colaborativo é preciso levar em conta as advertências de Ferreira, Cervantes e Germanovix (2008), no sentido de que o compartilhamento de tarefa entre o homem e a máquina deve ser tal que não crie constrangimento para o homem. É necessário que haja um balanceamento adequado, autonomia da cadeira inteligente e a autonomia do usuário. A introdução do automatismo no sistema homem-máquina deve ser feita de tal maneira a incrementar a segurança do deslocamento sem coibir o usuário de se aproximar de locais de seu interesse.

Conforme MAZO et al. (1994), ZHANG et al. (1998) o protótipo da cadeira de rodas utilizado no laboratório da UEL pode ser estudado através do modelo dinâmico linear simplificado de um VRTD como o representado graficamente na Figura 16.

## 2.2 Modelo Simulink® da estabilização da cadeira de rodas com controlador P e PI

A Figura 20 mostra o diagrama de blocos do sistema de controle de uma cadeira de rodas guiada por uma interface homem-máquina, que é uma combinação de comandos orais, direção autônoma e controle manual. A figura mostra também um diagrama de blocos integrando todos os componentes do controle da cadeira de rodas.

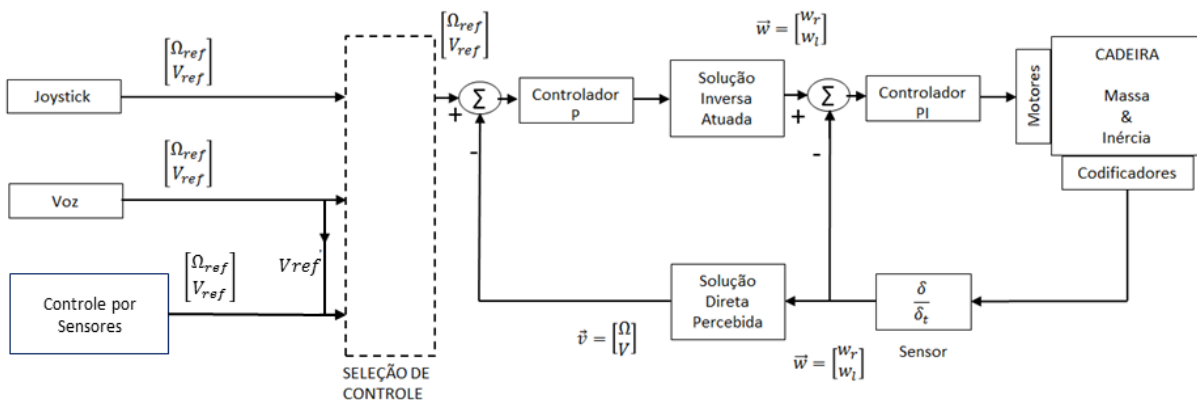


Figura 20 – Diagrama de blocos do sistema de controle da cadeira de rodas guiada por um interface homem-máquina com três possibilidade de comandos de direção: oral, autônomo e manual.

Fonte: Adaptado de (MAZO et al., 1994)

### 2.2.1 Funcionamento dos controladores P e PI no diagrama da Figura 20

A cadeira utilizada por MAZO et al. (1994) está equipada com oito sensores de ultrassom distribuídos nos quatro lados da cadeira e um sensor infravermelho na frente da cadeira. Os sensores de ultrassom seguem as paredes ao longo do movimento para distinguir os objetos-obstáculos.

A cadeira apresenta uma interface constituída por três tipos diferentes de de entrada de comando do sistema: comando por voz, comando por joystick e movimento autônomo controlado por sensores. Conforme pode ser verificado através da Figura 20, MAZO et al. (1994) introduzem na planta o vetor dos valores de referência da velocidade angular e velocidade linear,  $\begin{bmatrix} \Omega_{ref} & V_{ref} \end{bmatrix}'$ .

A entrada do bloco de solução direta,  $\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_r & \omega_l \end{bmatrix}'$ , é fornecida pelo subsistema codificador-sensor que lê o vetor dos valores das velocidades angulares das rodas de acionamento direita,  $\omega_r$ , e esquerda,  $\omega_l$ . A saída do bloco “Solução Direta Percebida”,  $\begin{bmatrix} \Omega & V \end{bmatrix}'$ , é comparada com o vetor de referência,  $\begin{bmatrix} \Omega_{ref} & V_{ref} \end{bmatrix}'$ . O erro entre valores, multiplicado pelo ganho proporcional  $K_p$  do controlador  $P$ , é entrada para o bloco

“Solução Inversa Atuada” que fornece um vetor de velocidades angulares de referência que é comparado com o vetor das velocidades angulares das rodas lido,  $\vec{\omega} = [\omega_r \ \omega_l]'$ . O erro dessas leituras constitui-se na entrada do controlador PI, que atua sobre esse sinal através do ganho proporcional,  $K_P$ , e integral,  $1/T_I$ . O sinal do controlador PI atua então sobre os motores buscando a estabilidade do sistema<sup>1</sup>.

### 2.2.2 Modelo Simulink® da estabilização da cadeira de rodas

Admita-se, como suposição simplificadora, que a função de transferência do “bloco do sensor” é 1. Então, o diagrama de blocos para utilização no ambiente do Matlab®-Simulink® corresponde ao lado direito do bloco “seleção de controle” no diagrama de blocos da Figura 20. Esse diagrama é representado na Figura 21 onde estão destacados os parâmetros e variáveis envolvidos no modelo.

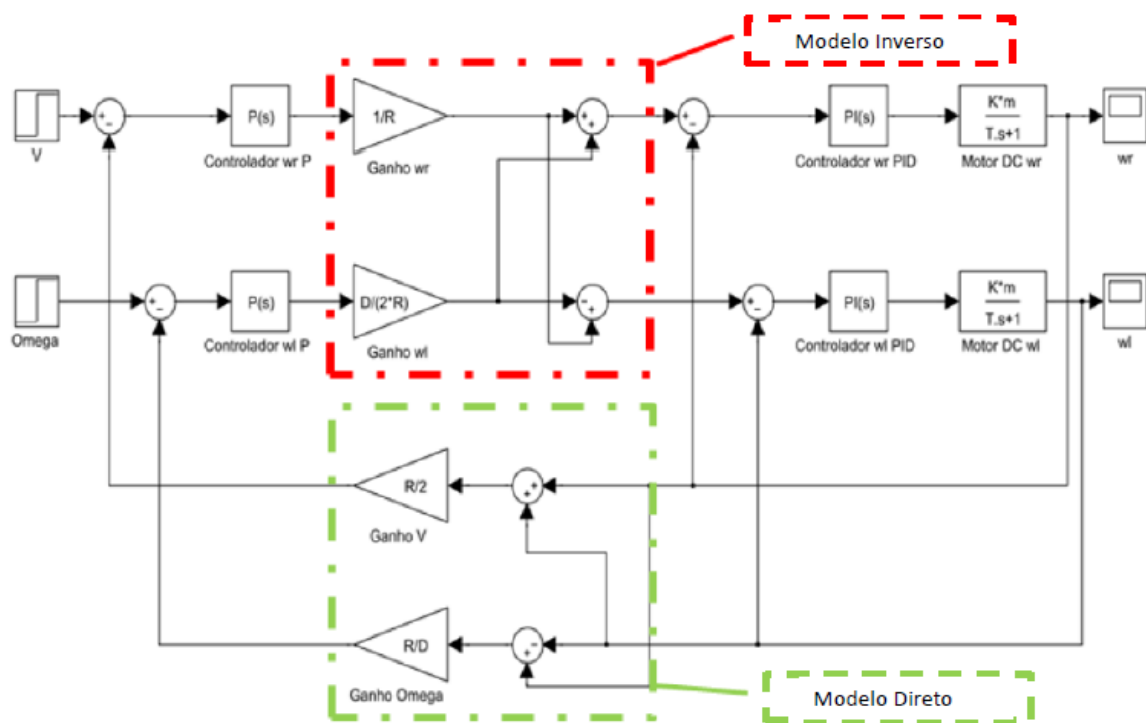


Figura 21 – Diagrama de blocos do sistema de controle da cadeira de rodas com indicação dos parâmetros e variáveis do modelo.

Fonte: Adaptado de (SOBRINHO et al., 2003)

Na Figura 21 está destacado o “Modelo Direto” (SOBRINHO et al., 2003) que recebe como entrada o vetor  $\vec{\omega} = [\omega_r \ \omega_l]'$  e fornece na saída o vetor  $\vec{v} = [\Omega \ V]'$ . Esse segmento do modelo corresponde ao bloco da “Solução Inversa Atuada” da Figura

<sup>1</sup> Sobre o funcionamento do controlador P, PI e PID consultar a Seção 1.6.

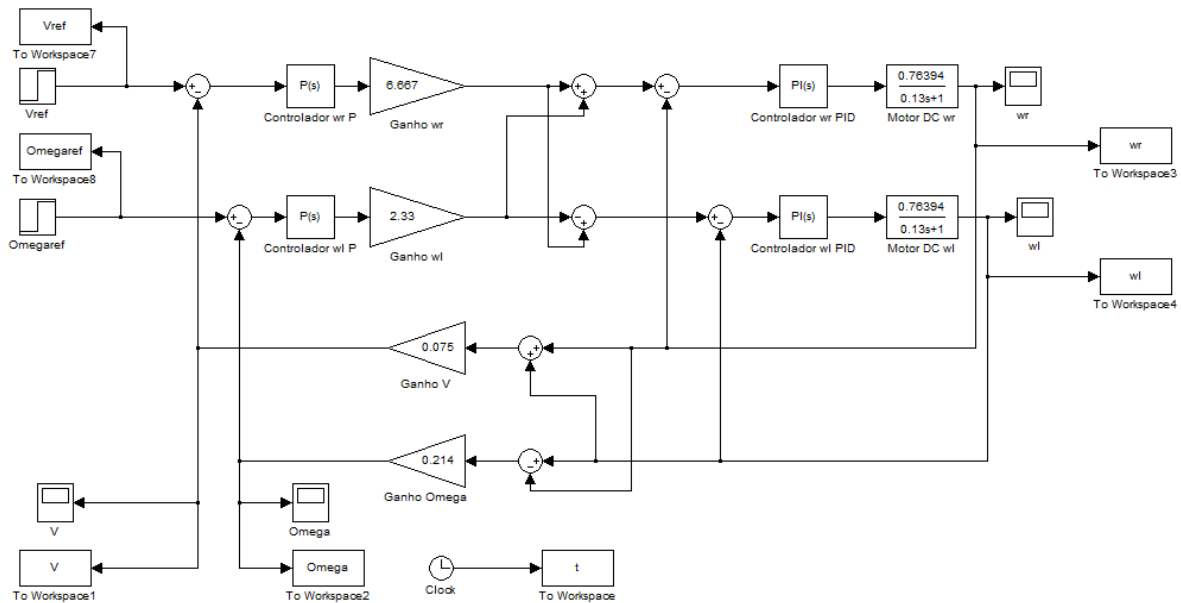


Figura 22 – Diagrama de blocos do sistema de controle da cadeira de rodas com valores numéricos para simulação.

Fonte: Adaptado de (SOBRINHO et al., 2003)

20. Também está destacado o “Modelo Inverso” que recebe como entrada  $\vec{v} = [\Omega \ V]'$  e fornece como saída  $\vec{\omega} = [\omega_r \ \omega_l]'$ . Esse segmento do modelo corresponde ao bloco “Solução Direta Percebida” (MAZO et al., 1994). Substituindo os valores da Tabela 1 no diagrama de blocos da Figura 21 obtém-se o diagrama de blocos da Figura 22.

Para os detalhes do funcionamento dos controladores  $P$ ,  $PI$  e  $PID$  sugere-se a consulta das Seções 1.6 e 2.2.

## 2.3 Modelo no Espaço de Estados da estabilização da cadeira de rodas com controlador PI e P

A partir do diagrama da Figura 21 segue-se uma análise em MF da estabilização da cadeira de rodas que já inclui os controladores  $P$  e  $PI$ , com seus ganhos. Além disso, leva-se em consideração todos os parâmetros envolvidos na modelagem da cadeira de rodas, pode-se determinar as matrizes de estado, 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 que satisfazem as equações de

estado 2.5 e 2.6 (SOBRINHO et al., 2003).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-K_2 \cdot (K_1 + 1) \cdot K \cdot m - 1}{T} & 0 & \frac{K \cdot m}{T} & 0 \\ 0 & \frac{-K_2 \cdot (K_1 + 1) \cdot K \cdot m - 1}{T} & 0 & \frac{K \cdot m}{T} \\ -I \cdot (K_1 + 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I \cdot (K_1 + 1) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{K_2 \cdot K_1 \cdot K \cdot m}{r \cdot T} & \frac{K_2 \cdot K_1 \cdot K \cdot m \cdot d}{2 \cdot r \cdot T} \\ \frac{K_2 \cdot K_1 \cdot K \cdot m}{r \cdot T} & -\frac{K_2 \cdot K_1 \cdot K \cdot m \cdot d}{2 \cdot r \cdot T} \\ \frac{I \cdot K_1}{r} & \frac{I \cdot K_1 \cdot d}{2 \cdot r} \\ \frac{I \cdot K_1}{r} & -\frac{I \cdot K_1 \cdot d}{2 \cdot r} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad (2.5)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t), \quad (2.6)$$

sendo as derivadas das variáveis de estado definidas nas Equações de 2.7 a 2.12, as variáveis de saída definidas em 2.11 e 2.12 e a entrada  $u(t)$  dada pela Equação 2.13.

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-K_2 \cdot (K_1 + 1) \cdot K \cdot m - 1}{T} \cdot x_1(t) + \frac{K \cdot m}{T} \cdot x_3(t) + \frac{K_2 \cdot K_1 \cdot K \cdot m}{r \cdot T} \cdot V(t) + \frac{K_2 \cdot K_1 \cdot K \cdot m \cdot d}{2 \cdot r \cdot T} \cdot \Omega(t), \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{-K_2 \cdot (K_1 + 1) \cdot K \cdot m - 1}{T} \cdot x_2(t) + \frac{K \cdot m}{T} \cdot x_4(t) + \frac{K_2 \cdot K_1 \cdot K \cdot m}{r \cdot T} \cdot V(t) - \frac{K_2 \cdot K_1 \cdot K \cdot m \cdot d}{2 \cdot r \cdot T} \cdot \Omega(t), \quad (2.8)$$

$$\dot{x}_3(t) = -I \cdot (K_1 + 1) \cdot x_1(t) + \frac{I \cdot K_1}{r} \cdot V(t) + \frac{I \cdot K_1 \cdot d}{2 \cdot r} \cdot \Omega(t), \quad (2.9)$$

$$\dot{x}_4(t) = -I \cdot (K_1 + 1) \cdot x_2(t) + \frac{I \cdot K_1}{r} \cdot V(t) - \frac{I \cdot K_1 \cdot d}{2 \cdot r} \cdot \Omega(t), \quad (2.10)$$

$$y_1(t) = \omega_r(t) = x_1(t), \quad (2.11)$$

$$y_2(t) = \omega_l(t) = x_2(t), \quad (2.12)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} V(t) & \Omega(t) \end{bmatrix}'. \quad (2.13)$$

Considerando o diagrama de blocos do sistema de controle da cadeira de rodas com a indicação dos parâmetros e variáveis do modelo, representados na Figura 21, é possível chegar-se às equações de estado do modelo utilizado.

Iniciando-se pelo bloco de soma que gera a função de erro entre  $V_{ref}$  e  $V$  pode-se seguir a malha que define o Modelo Direto e encontrar a equação abaixo:

$$\left\{ \left[ \left( V - (\omega_r + \omega_l) \cdot \frac{r}{2} \right) \cdot K_1 \cdot \frac{1}{r} + \left( \Omega - (\omega_r - \omega_l) \cdot \frac{r}{d} \right) \right] \cdot K_1 \cdot \frac{d}{2 \cdot r} - \omega_r \right\} \cdot \left( \frac{K_2 s + I}{s} \right) \cdot \left( \frac{K \cdot m}{T s + 1} \right) = w_r, \quad (2.14)$$

para  $\Omega = 0$  tem-se que:

$$\left\{ \left[ \frac{V \cdot K_1}{r} - (\omega_r + \omega_l) \cdot \frac{K_1}{2} + (-\omega_r + \omega_l) \cdot \frac{K_1}{2} \right] - \omega_r \right\} \cdot \frac{K \cdot K_2 \cdot m \cdot s + K \cdot m \cdot I}{T \cdot s^2 + s} = w_r, \quad (2.15)$$

ainda

$$\left[ \frac{V \cdot K_1}{r} - \frac{\omega_r \cdot K_1}{2} - \frac{\omega_l \cdot K_1}{2} - \frac{\omega_r \cdot K_1}{2} - \frac{\omega_l \cdot K_1}{2} - \omega_r \right] \cdot \frac{K \cdot K_2 \cdot m \cdot s + K \cdot m \cdot I}{T \cdot s^2 + s} = w_r, \quad (2.16)$$

$$\frac{V \cdot K_1}{r} \cdot \left( \frac{K \cdot K_2 \cdot m \cdot s + K \cdot m \cdot I}{T \cdot s^2 + s} \right) = \omega_r + (\omega_r \cdot K_1 + \omega_r) \cdot \frac{K \cdot K_2 \cdot m \cdot s + K \cdot m \cdot I}{T \cdot s^2 + s}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\omega_r \cdot \left[ 1 + (K_1 + 1) \cdot \frac{K \cdot K_2 \cdot m \cdot s + K \cdot m \cdot I}{T \cdot s^2 + s} \right]}{V} = \frac{K_1}{r} \cdot \frac{K \cdot K_2 \cdot m \cdot s + K \cdot m \cdot I}{T \cdot s^2 + s}, \quad (2.18)$$



com mais algumas manipulações algébricas chega-se à função de transferência de cada saída

$$\frac{\omega_r}{V} = \frac{1}{r} \cdot \frac{K_{m1} \cdot s + K_{m2} \cdot I}{T \cdot s^2 + K_{m3}s + K_{m4} \cdot I} \Bigg|_{\Omega=0}, \quad (2.19)$$

onde

$$\begin{aligned} K_{m1} &= K \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot m, \\ K_{m2} &= K \cdot K_1 \cdot m, \\ K_{m3} &= 1 + K \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot m + K \cdot K_2 \cdot m, \\ K_{m4} &= K \cdot K_1 \cdot m + K \cdot m. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Utilizando o mesmo procedimento algébrico obtém-se as funções de transferência das demais saídas:

$$\frac{\omega_l}{V} = \frac{1}{r} \cdot \frac{K_{m1} \cdot s + K_{m2} \cdot I}{T \cdot s^2 + K_{m3}s + K_{m4} \cdot I} \Bigg|_{\Omega=0}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\omega_r}{\Omega} = \frac{1}{r} \cdot \frac{(d/2) \cdot K_{m1} \cdot s + K_{m2} \cdot I}{T \cdot s^2 + K_{m3}s + K_{m4} \cdot I} \Bigg|_{V=0}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\omega_l}{\Omega} = \frac{1}{r} \cdot \frac{-(d/2) \cdot K_{m1} \cdot s + K_{m2} \cdot I}{T \cdot s^2 + K_{m3}s + K_{m4} \cdot I} \Bigg|_{V=0}. \quad (2.23)$$

Aplicando-se o princípio da superposição obtém-se as funções de transferência de cada saída em relação às duas entradas, o que no Modelo Direto fica:

$$\omega_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{[K_{m1} \cdot s + K_{m2} \cdot I] \cdot V + [(d/2) \cdot K_{m1} \cdot s + K_{m2} \cdot I] \cdot \Omega}{T \cdot s^2 + K_{m3}s + K_{m4} \cdot I}, \quad (2.24)$$

$$\omega_l = \frac{1}{r} \cdot \frac{[K_{m1} \cdot s + K_{m2} \cdot I] \cdot V - [(d/2) \cdot K_{m1} \cdot s + K_{m2} \cdot I] \cdot \Omega}{T \cdot s^2 + K_{m3}s + K_{m4} \cdot I}. \quad (2.25)$$

### 2.3.1 Dedução das variáveis de estado a partir do diagrama de blocos do modelo linear simplificado do ambiente Simulink®

Considerando que os integradores, nos sistemas de controle contínuos no tempo, operam como memória, suas saídas podem ser consideradas como valores das variáveis de estado interno de sistemas dinâmicos, assim, substituindo os controladores PIs dos motores DC mostrados na Figura 21 por um bloco integrador,  $I$ , em paralelo com um

bloco de ganho,  $P$ , é possível explicitar as variáveis de estado do sistema, indicadas na Figura 23. Assim, as saídas dos blocos dos motores,  $\omega_r$  e  $\omega_l$ , foram identificadas com as variáveis de estado  $x(1)$  e  $x(2)$ , ao passo que as saídas dos integradores foram identificadas com  $x(3)$  e  $x(4)$  (SOBRINHO et al., 2003), todas representadas na Figura 24.

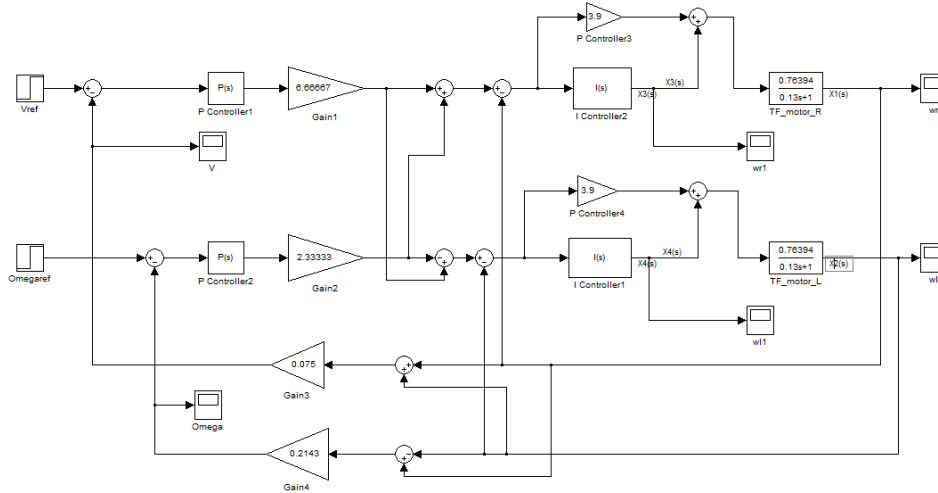
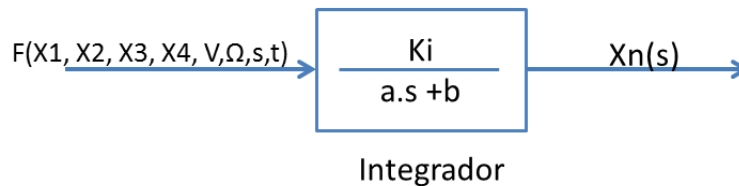


Figura 23 – Diagrama de blocos modificado do sistema de controle da cadeira de rodas com separação do controlador  $PI$  em dois blocos paralelos de ganho  $P$  e controlador  $I$ , com explicitação das variáveis  $X_1(s)$ ,  $X_2(s)$ ,  $X_3(s)$  e  $X_4(s)$ .

Fonte: Adaptado de (SOBRINHO et al., 2003)

Figura 24 – Relações entre a derivada e a função em um integrador.



Fonte: Adaptado de (SOBRINHO et al., 2003).

Partindo da Figura 24 tem-se que as derivadas podem ser expressas como:

$$X_n(s) = F(X_1, X_2, X_3, X_4, V, \Omega, s) \cdot \frac{K_i}{a \cdot s + b}, \tag{2.26}$$

ou ainda,

$$sX_n(s) = \frac{K_i \cdot F(X_1, X_2, X_3, X_4, V, \Omega, s) - b \cdot X_n(s)}{a}. \tag{2.27}$$

Para  $n = 3$ , tem-se  $K_i = I$ ,  $a = 1$  e  $b = 0$ , logo 2.27 pode ser expressa como:

$$s \cdot X_3(s) = I \cdot F(X_1, X_2, X_3, X_4, V, \Omega, s). \tag{2.28}$$

Indo para o diagrama de blocos do sistema no Simulink® tem-se que:

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4, V, \Omega, s) = \left[ (V - (X_1(s) + X_2(s)) \cdot \frac{r}{2}) \cdot \frac{K_1}{r} + (\Omega - (X_1(s) - X_2(s)) \cdot \frac{r}{d}) \right] \cdot \frac{K_1 \cdot d}{2 \cdot r} - X_1(s), \quad (2.29)$$

$$s \cdot X_3(s) = I \cdot \left[ \frac{K_1 \cdot V}{r} - \frac{K_1 \cdot X_1(s)}{2} - \frac{K_1 \cdot X_2(s)}{2} \right] + I \cdot \left[ \frac{K_1 \cdot d \cdot \Omega}{2 \cdot r} - \frac{K_1 \cdot X_1(s)}{2} + \frac{K_1 \cdot X_2(s)}{2} - X_1(s) \right]. \quad (2.30)$$

Finalmente:

$$s \cdot X_3(s) = -I \cdot (K_1 + 1) \cdot X_1(s) + \frac{I \cdot K_1 \cdot V}{r} + \frac{I \cdot K_1 \cdot d \cdot \Omega}{2 \cdot r}. \quad (2.31)$$

De maneira análoga, para  $n = 4$ , obtém-se a definição da variável de estado,  $x_4$ , representada pela Equação 2.32:

$$s \cdot X_4(s) = -I \cdot (K_1 + 1) \cdot X_2(s) + \frac{I \cdot K_1 \cdot V}{r} - \frac{I \cdot K_1 \cdot d \cdot \Omega}{2 \cdot r}, \quad (2.32)$$

A fim de completar as equações para  $n = 1$ , e  $n = 2$ , fornecendo respectivamente  $X_1$  e  $X_2$ , basta encontrar  $F(X_1, X_2, X_3, X_4, V, \Omega, s)$  e  $F(X_2, X_2, X_3, X_4, V, \Omega, s)$ , que são as parcelas do sinal que passam pelos controladores  $K_1$  e  $K_2$  e proceder à simplificação algébrica, obtendo:

$$s \cdot X_1(s) = -\frac{(K \cdot (K_1 + 1) \cdot K_2 \cdot m - 1) \cdot X_1(s)}{T} + \frac{K \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot m \cdot V}{r \cdot T} + \frac{K \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot m \cdot d \cdot \Omega}{2 \cdot r \cdot T} + \frac{K \cdot m \cdot X_3(s)}{T}, \quad (2.33)$$

$$s \cdot X_2(s) = -\frac{(K \cdot (K_1 + 1) \cdot K_2 \cdot m - 1) \cdot X_2(s)}{T} + \frac{K \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot m \cdot V}{r \cdot T} - \frac{K \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot m \cdot d \cdot \Omega}{2 \cdot r \cdot T} + \frac{K \cdot m \cdot X_4(s)}{T}. \quad (2.34)$$

Para completar a determinação das variáveis de estado, toma-se a transformada inversa de Laplace, chega-se às mesmas equações das variáveis de estado, representadas nas Equações de 2.7 a 2.12, e à entrada  $u(t)$ , dada pela Equação 2.13.

As equações em espaço de estado de 2.7 a 2.13, do modelo linear simplificado da cadeira de rodas, mostrado na Figura 23, podem ser postas na forma canônica, obtendo-se as Equações 2.35 e 2.36.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(K \cdot (K_1 + 1) \cdot K_2 \cdot m - 1)}{T} & 0 & \frac{K \cdot m}{T} & 0 \\ 0 & -\frac{(K \cdot (K_1 + 1) \cdot K_2 \cdot m - 1)}{T} & 0 & \frac{K \cdot m}{T} \\ -I \cdot (K_1 + 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I \cdot (K_1 + 1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot m}{r \cdot T} & \frac{K \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot m \cdot d}{2 \cdot r \cdot T} \\ \frac{K \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot m}{r \cdot T} & -\frac{K \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot m \cdot d}{2 \cdot r \cdot T} \\ \frac{I \cdot K_1}{r} & \frac{I \cdot K_1 \cdot d}{2 \cdot r} \\ \frac{I \cdot K_1}{r} & -\frac{I \cdot K_1 \cdot d}{2 \cdot r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

No Capítulo 5, que trata dos resultados da simulação dos modelos lineares simplificados da cadeira de rodas, são mostradas saídas correspondentes a esses modelos vistos para alguns casos especiais.

## 3 Controlador robusto utilizando LMIs em presença de incertezas paramétricas politópicas para um modelo não-linear de um veículo sobre rodas com tração diferencial

### 3.1 Contextualização e definição do problema

Conforme foi visto no Capítulo 2, uma cadeira de rodas pode ser estudada de um maneira mais genérica como um veículo sobre rodas com tração diferencial (VRTD). Segundo [ESPINOSA et al. \(2001\)](#), o projeto de um controlador é fortemente influenciado pela qualidade do modelo do sistema físico que está sendo modelado. Obter o modelo dinâmico do veículo em MA pode ser extremamente complexo para as unidades de cadeiras de rodas, no que diz respeito à estrutura da plataforma e ao número e detalhes de efeitos a serem modelados. Uma vez obtido o modelo, é necessário lidar com as incertezas inerentes ao modelo. Além disso, muitos desses modelos são de natureza não-linear, como poderá ser constatado mais adiante, e será necessária a utilização de técnicas de linearização.

[De La CRUZ, BASTOS e CARELLI \(2011\)](#) afirmam que deve ser considerada a dinâmica do veículo juntamente com sua cinemática porque as cadeiras de rodas transportam cargas relativamente pesadas. Alguns modelos não consideram o fato de que o centro de massa de uma cadeira robótica pode ser deslocado lateralmente devido ao movimento do cadeirante. Assim, é importante projetar um controlador robusto que possa estabilizar a planta mesmo em presença de incertezas paramétricas.

### 3.2 Análise e avaliação de alguns modelos não-lineares da cadeira de rodas

#### 3.2.1 Modelo não-linear da cadeira de rodas segundo [ZHANG et al. \(1998\)](#)

O modelo não-linear de [ZHANG et al. \(1998\)](#), mostrado na Figura 25, é elaborado utilizando-se os torques dos motores e inclui o vetor de incertezas representado pela Equação 3.1. Trata-se de um modelo dinâmico simplificado que está baseado nos seguintes pressupostos:

- dois sistemas de coordenadas: local,  $x' - G - y'$ , fixo na plataforma do veículo, e

global, fixo no plano de deslocamento,  $x - o - y$ ;

- o movimento da cadeira é limitado a três graus de liberdade num plano caracterizado pelas variáveis independentes  $u, v, \omega$  mostradas na Figura 25 e descritas na Tabela 2;
- a somatória das forças e momentos aplicados estão relacionados ao sistema de referência local  $x' - G - y'$ ;
- o ponto de contato roda-solo é ideal, ou seja, não há deslizamento;
- não existem distúrbios e momentos externos atuantes; e
- as forças viscosas de fricção e as forças de resistência das rodas do tipo castor são desprezadas.

Se todos esses efeitos perturbadores não modelados forem considerados como incertezas do modelo e representados por  $\delta = [\delta_x \ \delta_y \ 0 \ \delta_u \ \delta_\omega]'$ , será possível propor um modelo que inclua o vetor de incertezas, representado pela Equação 3.1. Os efeitos dos parâmetros físicos do robô móvel foram considerados no vetor de parâmetros identificados,  $\theta = [\theta_u \ \theta_\omega]'$ .

Os parâmetros representados na Figura 25 e constantes da Tabela 2 que aparecem na Equação 3.1 são definidos pelas equações auxiliares representadas no Apêndice B.1.

Examinando o Modelo Dinâmico Simplificado da Equação 3.1 verifica-se que a saída do controlador dinâmico que está sendo utilizada como entrada para o veículo sobre rodas é constituída pelos torques resultantes,  $\tau_u$  e  $\tau_\omega$ , dos motores acionadores das rodas esquerda e direita, respectivamente (ZHANG et al., 1998; ZHANG; CHUNG; VELINSKY, 2003). Além disso, a Equação 3.1 contém em si dois níveis do controlador: o controlador cinemático, envolvendo as variáveis de estado  $x, y$  e  $\Psi$ , as quais determinam a trajetória da cadeira, e o controlador dinâmico, envolvendo as variáveis de estado  $\dot{u}$  e  $\dot{\omega}$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\Psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cdot \cos \Psi - a \cdot \omega \cdot \sin \Psi \\ u \cdot \sin \Psi + a \cdot \omega \cdot \cos \Psi \\ \omega \\ \frac{m \cdot b \cdot r^2}{\theta_u} \omega^2 \\ \frac{2 \cdot m \cdot b \cdot r^2}{\theta_\omega} u \cdot \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2 \cdot r}{\theta_u} & 0 \\ 0 & \frac{2 \cdot r \cdot d}{\theta_\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_u \\ \tau_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

### 3.2.2 Modelo não-linear da cadeira de rodas segundo MARTINS et al. (2008)

Segundo MARTINS et al. (2008), os sinais de controle gerados pela maioria dos controladores dinâmicos reportados na literatura são torques ou voltagens,  $\tau_u$  e  $\tau_\omega$ , para os motores do veículo sobre rodas conforme Equação 3.1. Os veículos sobre rodas comerciais,

Tabela 2 – Descrição dos parâmetros dos modelos não-lineares utilizados em (ZHANG et al., 1998; CELESTE et al., 2007; MARTINS et al., 2008; De La CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

Parâmetro	Natureza do parâmetro
$\tau_u, \tau_\omega$	Torques resultantes dos motores acionadores localizados nas rodas direita e esquerda.
G, B, R, L, C, A	Centro de Gravidade, centro da linha de base das rodas, ponto de contato com o chão das rodas direita e esquerda, ponto de contato com o chão da roda castor, local da ferramenta, ponto rastreado pelo controlador, respectivamente.
$\omega_l, \omega_r,$ $u_{ref}, \omega_{ref}$	Velocidades angulares das rodas esquerda e direita, velocidades linear e angular de referência dos servocontroles de baixo nível da cadeira de rodas, respectivamente.
r	Raio das rodas motorizadas.
d	Distância entre as rodas motorizadas.
a	Distância entre o centro cinemático B e o ponto de interesse h no veículo.
$R_t$	Raio nominal dos pneus.
$R_a$	Resistência elétrica dos motores.
kb, ka	Constantes eletromotiva e de torque dos motores das rodas, respectivamente.
$u, \omega$	Velocidades longitudinal e angular do centro de massa, G, da cadeira de rodas, respectivamente.
$x - o - y,$ $x' - G - y'$	Sistemas de coordenadas global, fixo no mundo real (o), e local, fixo no Centro de Gravidade (G), respectivamente.
$I_z, I_e, B_e$	Momento de inércia do veículo em torno do eixo z, momento de inércia e coeficiente viscoso efetivos do motor, rotor e engrenagens combinados, respectivamente.
$F_{x',c}, F_{y',c},$ $\eta_{x',e}, \eta_{y',e}$	Forças resultantes no pneu e forças resultantes nas direções longitudinal e lateral, nos pontos C e E, respectivamente.
$b_1, b_2$	Deslocamentos longitudinal e lateral do CG, respectivamente.
$\Psi$	Ângulo de posicionamento do veículo.
$v$	Velocidade lateral do centro de massa G.
$\omega$	Velocidade angular do veículo.
m	Massa do veículo sobre rodas.
$K_{DR}, K_{DT},$ $K_{PR}, K_{PT}$	Ganho derivativo do controle proporcional-derivativo de baixo nível rotacional e translacional, ganho proporcional do controle proporcional-derivativo de baixo nível rotacional e translacional, respectivamente.

Fonte: do próprio autor

por outro lado, usualmente recebem comandos de velocidade,  $u_{ref}$  e  $\omega_{ref}$ . Portanto, MARTINS et al. (2008) buscaram uma forma alternativa de expressar o modelo dinâmico da cadeira utilizando as velocidades linear e angular de referência como entradas na

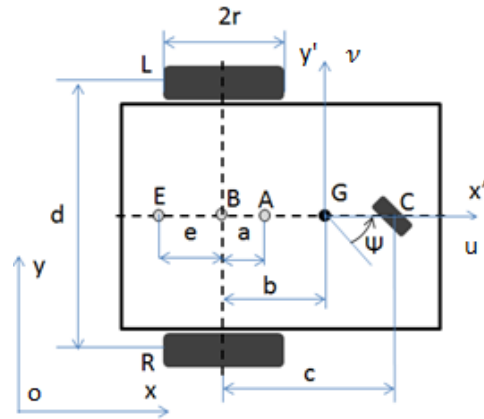


Figura 25 – Representação gráfica do modelo não-linear de um VRTD e seus parâmetros, segundo ZHANG et al. (1998).

Fonte: Adaptado de (ZHANG et al., 1998)

Equação 3.2, que corresponde à Figura 26.

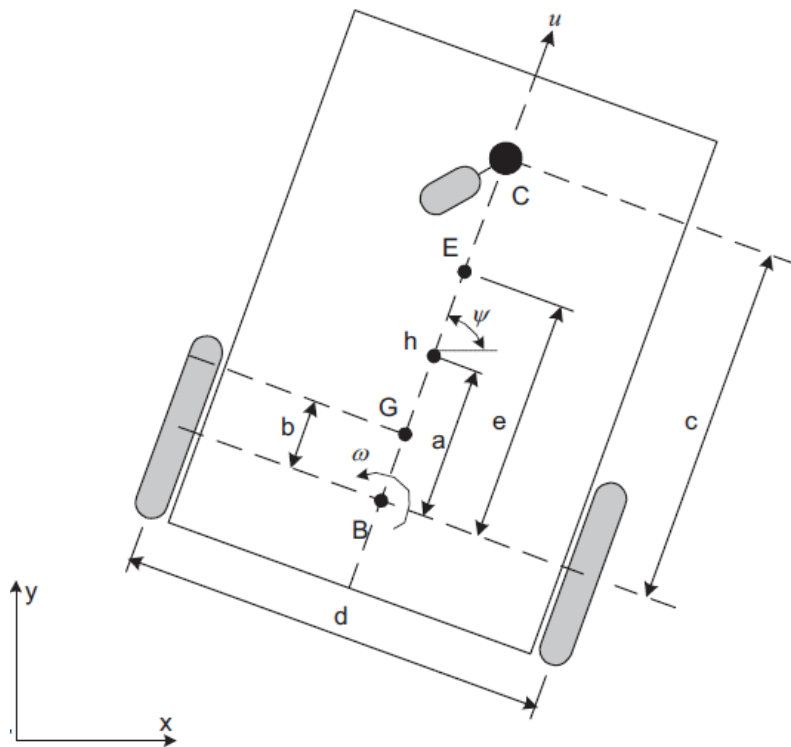


Figura 26 – Representação gráfica do modelo não-linear de um VRTD e seus parâmetros, segundo MARTINS et al. (2008).

Fonte: (MARTINS et al., 2008)



$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\Psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cdot \cos \Psi - a \cdot \omega \cdot \sin \Psi \\ u \cdot \sin \Psi + a \cdot \omega \cdot \cos \Psi \\ \omega \\ \frac{\theta_3}{\theta_1} \cdot \omega^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1} \cdot u \\ -\frac{\theta_5}{\theta_2} \cdot u \cdot \omega - \frac{\theta_6}{\theta_2} \cdot \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

MARTINS et al. (2008) fazem uso do vetor dado pela Equação 3.3 que descreve os componentes do vetor de parâmetros identificados. O vetor de incertezas paramétricas associado ao modelo é  $\boldsymbol{\delta} = [\delta_x \ \delta_y \ 0 \ \delta_u \ \delta_\omega]'$ .

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]'. \quad (3.3)$$

Os componentes  $\delta_x$  e  $\delta_y$  são funções das velocidades de deslizamento e da orientação do veículo sobre rodas. Os componentes  $\delta_u$  e  $\delta_\omega$  são funções de parâmetros físicos tais como massa, momento de inércia do veículo e do motor, diâmetros das rodas e pneus, parâmetros dos motores e seus servos, forças nas rodas e outros parâmetros dentre aqueles encontrados na Tabela 2 e representam os distúrbios do sistema. O vetor  $\boldsymbol{\theta}$  é função de parâmetros físicos do veículo sobre rodas, tais como aqueles encontrados na Tabela 2.

### 3.2.3 Modelo não-linear da cadeira de rodas segundo De La CRUZ C. C. e CARELLI (2006)

Neste trabalho será utilizado o modelo dinâmico do veículo sobre rodas descrito em (De La CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011) e representado na Figura 27. As definições dos vetores de parâmetros, representado em 3.4, estão detalhadas nas equações de 3.5 até 3.12. As definições dos elementos dos vetores de distúrbio estão detalhadas no Apêndice B.2.

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ \theta_7 \ \theta_8]', \quad (3.4)$$

$$\theta_1 = \frac{k_{DT}}{k_{PT}} + \frac{R_a \cdot r}{2 \cdot k_{PT} \cdot k_a} \cdot \left( \frac{2 \cdot I_e}{r^2} + m \right), \quad (3.5)$$

$$\theta_2 = \left( \frac{I_e \cdot d^2}{2 \cdot r^2} + I_z + m \cdot b_1^2 + m \cdot b_2^2 \right) \times \frac{R_a \cdot r}{d \cdot k_{PR} \cdot k_a} + \frac{k_{DR}}{k_{PR}}, \quad (3.6)$$

$$\theta_3 = \frac{R_a \cdot r \cdot m \cdot b_1}{2 \cdot k_{PT} \cdot k_a}, \quad (3.7)$$

$$\theta_4 = 1 + \frac{k_b}{k_{PT} \cdot r} + \frac{B_e \cdot R_a}{k_{PT} \cdot k_a \cdot r}, \quad (3.8)$$

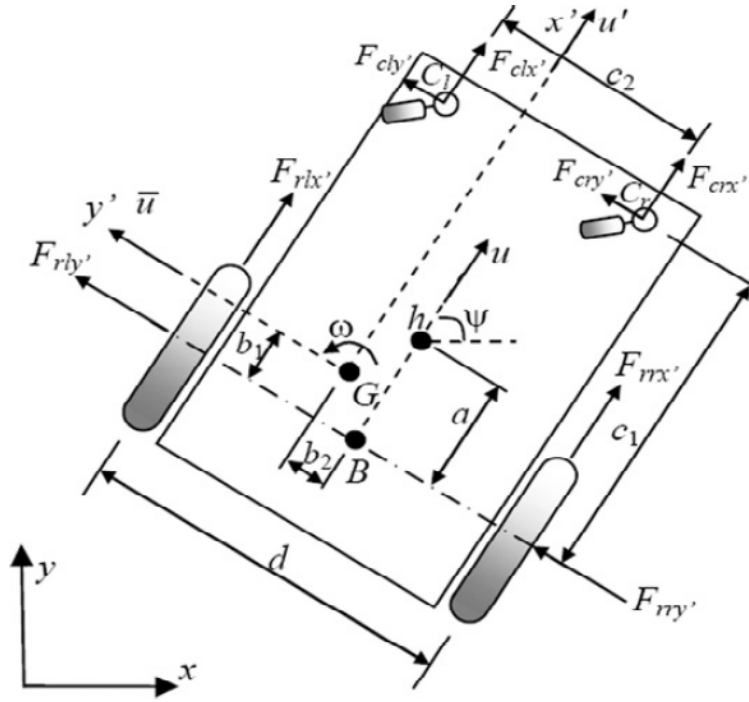


Figura 27 – Representação gráfica do modelo não-linear de um VRTD e seus parâmetros, segundo De La CRUZ, BASTOS e CARELLI (2011).

Fonte: (De La CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011)

$$\theta_5 = \frac{R_a \cdot r \cdot m \cdot b_1}{d \cdot k_{PR} \cdot k_a}, \quad (3.9)$$

$$\theta_6 = 1 + \frac{d \cdot k_b}{2 \cdot k_{PR} \cdot r} + \frac{d \cdot B_e \cdot R_a}{2 \cdot k_{PR} \cdot k_a \cdot r}, \quad (3.10)$$

$$\theta_7 = \frac{R_a \cdot r \cdot m \cdot b_2}{2 \cdot k_{PT} \cdot k_a}, \quad (3.11)$$

$$\theta_8 = \frac{R_a \cdot r \cdot m \cdot b_2}{d \cdot k_{PR} \cdot k_a}. \quad (3.12)$$

Analisando as equações de 3.5 até 3.12 e considerando a Figura 27 verifica-se que, para  $i$  variando de 1 a 8,  $\theta_i$  adquire os seguintes valores:

- quando o centro de massa G está sobre a linha que une as duas rodas traseiras, isto é, a linha de base, então  $b_1 = 0$ , logo  $\theta_i > 0$  para  $i = 1, 2, 4$  e  $6$ , ao passo que  $\theta_i = 0$  para  $i = 3$  e  $5$ ;
- quando o centro de massa G está sobre a mediatriz que passa pelo ponto B, então,  $b_2 = 0$ , logo  $\theta_i = 0$  apenas para  $i = 7$  e  $8$ ;

- quando o centro de massa G estiver exatamente sobre o ponto B, mediatriz do eixo que une ambas as rodas traseiras, então,  $b_1 = b_2 = 0$ , logo  $\theta_i = 0$  para  $i = 3, 5, 7$  e  $8$ ; e
- independentemente da posição que o cadeirante ocupe, sempre acontecerá que  $\theta_i > 0$ , para  $i = 1, 2, 4$  e  $6$ .

### 3.3 Determinação da equação do modelo dinâmico não-linear simplificado da cadeira de rodas segundo De La CRUZ, BASTOS e CARELLI (2011)

Observando o modelo de (MARTINS et al., 2008) da Figura 26, é possível perceber que o centro de massa, G, da cadeira pode ser deslocado apenas ao longo da linha perpendicular que passa pelo ponto B, ponto médio entre as duas rodas traseiras, permitindo deslocamento longitudinal do cadeirante, mas não transversal.

De La CRUZ, BASTOS e CARELLI (2011) apresentam um modelo não-linear, representado na Figura 27, que se constitui numa escolha mais adequada para o objetivo deste trabalho. Este modelo permite deslocamento transversal e longitudinal do cadeirante em relação ao centro de gravidade da plataforma. O cadeirante se desloca para a esquerda na transversal quando os valores do parâmetro  $b_2$  são maiores que zero, e se desloca para a direita quando  $b_2$  são menores que zero. Além disso, o modelo contempla duas rodas livres na parte dianteira da plataforma, o que é mais próximo da cadeira de rodas utilizada.

CELESTE et al. (2007), De La CRUZ, BASTOS e CARELLI (2011) trabalham com o modelo dinâmico de maneira a desacoplar parte cinemática (Equação 3.13) da parte dinâmica (Equação 3.14).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -a \cdot \text{sen} \Psi \\ \text{sen} \Psi & a \cdot \cos \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix},$$

$$\dot{\Psi} = \omega, \tag{3.13}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & -\theta_7 \\ -\theta_8 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_4 \cdot u - \theta_3 \cdot \omega^2 \\ \theta_6 \cdot \omega + \theta_5 \cdot u \cdot \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

A partir do modelo dinâmico representado pela Equação 3.14 e considerando que não há deslizamento das rodas e que as forças que agem nas rodas dianteiras (castores) são nulas, tem-se que os distúrbios  $\delta_u$  e  $\delta_\omega$  são também nulos. Desprezando-se o vetor de incertezas e

explicitando o vetor de referência,  $\begin{bmatrix} u_{ref} & \omega_{ref} \end{bmatrix}'$ , obtém-se a parametrização linear do modelo, dada pela Equação 3.15, em função do vetor  $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \theta_7 & \theta_8 \end{bmatrix}'$ , cujos elementos estão definidos nas Equações de 3.5 até 3.12.

$$\begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 & -\dot{\omega} & 0 \\ 0 & \dot{\omega} & 0 & 0 & u \cdot \omega & \omega & 0 & -\dot{u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \theta_7 & \theta_8 \end{bmatrix}'. \quad (3.15)$$

Tomando a Equação 3.15 e realizando o produto entre as matrizes segue que:

$$u_{ref} = \dot{u} \cdot \theta_1 - \omega^2 \cdot \theta_3 + u \cdot \theta_4 - \dot{\omega} \cdot \theta_7, \quad (3.16)$$

$$\omega_{ref} = \dot{\omega} \cdot \theta_2 + u \cdot \omega \cdot \theta_5 + \omega \cdot \theta_6 - \dot{u} \cdot \theta_8. \quad (3.17)$$

Isolando-se  $\dot{u}$  e  $\dot{\omega}$  tem-se:

$$\dot{u} = \frac{1}{\theta_1} \cdot \left[ u_{ref} + \omega^2 \cdot \theta_3 - u \cdot \theta_4 + \dot{\omega} \cdot \theta_7 \right], \quad (3.18)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\theta_2} \cdot \left[ \omega_{ref} - u \cdot \omega \cdot \theta_5 - \omega \cdot \theta_6 + \dot{u} \cdot \theta_8 \right]. \quad (3.19)$$

Substituindo-se Equação 3.18 na 3.19 e fazendo-se as manipulações necessárias, obtém-se:

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \left[ \omega_{ref} \cdot \theta_1 - u \cdot \omega \cdot \theta_1 \cdot \theta_5 - \omega \cdot \theta_1 \cdot \theta_6 \right] + \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \left[ u_{ref} \cdot \theta_8 + \omega^2 \cdot \theta_3 \cdot \theta_8 - u \cdot \theta_4 \cdot \theta_8 \right], \quad (3.20)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ u_{ref} \cdot \theta_2 + \omega^2 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 - u \cdot \theta_2 \cdot \theta_4 \right] + \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \left[ \omega_{ref} \cdot \theta_7 - u \cdot \omega \cdot \theta_5 \theta_7 - \omega \cdot \theta_6 \cdot \theta_7 \right]. \quad (3.21)$$

Rearranjando o sistema na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_7 \\ \theta_8 & \theta_1 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_4 & -\omega \cdot \theta_3 \\ \omega \cdot \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \right\}.$$

Realizando o produto matricial interno indicado obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_7 \\ \theta_8 & \theta_1 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u \cdot \theta_4 - \omega^2 \cdot \theta_3 \\ u \cdot \omega \cdot \theta_5 + \omega \cdot \theta_6 \end{bmatrix} \right\}.$$

Fazendo a troca das variáveis  $V$  e  $\Omega$ , da Equação 1.37, por  $u$  e  $\omega$ , respectivamente, e tomando a derivada da Equação 1.37, encontra-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2 \cdot r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2 \cdot r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Tomando a expressão de  $\begin{bmatrix} \dot{V} & \dot{\Omega} \end{bmatrix}'$  da Equação 3.22 e substituindo as expressões de  $V$  e  $\Omega$  das equações 1.34 e 1.35 na Equação 3.22 acima, tem-se :

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_l \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2 \cdot r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2 \cdot r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_7 \\ \theta_8 & \theta_1 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cdot (\omega_r + \omega_l) \cdot \theta_4 - \frac{r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l)^2 \cdot \theta_3 \\ \frac{r^2}{2 \cdot d} \cdot (\omega_r^2 - \omega_l^2) \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_6 \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.23)$$

A Equação 3.23 representa o modelo dinâmico não-linear simplificado da cadeira de rodas acionada por tração diferencial. Nessa equação,  $\begin{bmatrix} u_{ref} & \omega_{ref} \end{bmatrix}'$  é o vetor de entrada, constituído das velocidades linear e angular de referência para os controladores proporcional derivativo de velocidade de baixo nível. O vetor de estados, que não aparece explicitado, é dado por  $\begin{bmatrix} \omega_r & \omega_l \end{bmatrix}'$  (MOUTINHO et al., 2013).

## 3.4 Linearização do modelo não-linear simplificado segundo De La CRUZ, BASTOS e CARELLI (2011)

### 3.4.1 Obtenção da representação não-linear do sistema em equações de estado

A partir da Equação 3.23 são identificadas a matriz característica, representada pela Equação 3.24, a qual não mostra o vetor  $\begin{bmatrix} \omega_r & \omega_l \end{bmatrix}'$  na sua forma explícita; a matriz de entrada, representada pela Equação 3.25; a matriz de saída, representada pela Equação 3.26; e a matriz de transmissão direta, representada pela Equação 3.27, para estabelecer as equações de estado do modelo dinâmico (MOUTINHO et al., 2013). Supõe-se que todas as variáveis de estados estejam disponíveis para medição, o que se verifica quando  $C = I$ , conforme Equação 3.26.

$$A = -\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2 \cdot r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2 \cdot r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_7 \\ \theta_8 & \theta_1 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cdot (\omega_r + \omega_l) \cdot \theta_4 - \frac{r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l)^2 \cdot \theta_3 \\ \frac{r^2}{2 \cdot d} \cdot (\omega_r^2 - \omega_l^2) \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_6 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$B = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2 \cdot r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2 \cdot r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_7 \\ \theta_8 & \theta_1 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$D = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

### 3.4.2 Linearização do modelo não-linear simplificado da cadeia de rodas

O modelo dinâmico mostrado na Equação 3.23 apresenta não-linearidades em  $\omega_r$  e  $\omega_l$ , mas, de acordo com a Subseção 1.3.2, pode ser transformado em um conjunto de equações diferenciais não-lineares na forma da Equação 3.28 (SLOTINE; LI, 1991). Essa linearização do modelo dinâmico é realizada por intermédio da aproximação na vizinhança de um ponto de operação utilizando o método indireto de Lyapunov.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\omega_r, \omega_l, u_{ref}, \omega_{ref}) \quad (3.28)$$

A estabilidade do projeto de controle de um sistema não-linear pode ser garantida, em torno da origem, que é um ponto de equilíbrio, substituindo-se a matriz não-linear original pela matriz Jacobiana da função (SLOTINE; LI, 1991) conforme pode ser visto na Subseção 1.3.2. No caso, a Equação 3.29 estabelece a matriz A Jacobiana de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  em relação às velocidades angulares das rodas traseiras e a Equação 3.30 estabelece a matriz B, em relação às velocidades linear e angular de referência.

$$A = \left[ \frac{\partial f}{\partial \omega_r}, \frac{\partial f}{\partial \omega_l} \right]_{(u_r=0, \omega_l=0)}, \quad (3.29)$$

$$B = \left[ \frac{\partial f}{\partial u_{ref}}, \frac{\partial f}{\partial \omega_{ref}} \right]_{(u_{ref}=0, \omega_{ref}=0)}. \quad (3.30)$$

Nas equações 3.31 e 3.32 tem-se o sistema linearizado, para o qual cada elemento da matriz é definido nas equações de 3.33 até 3.40. Os detalhes de como obter essas equações podem ser conferidos no Apêndice C.1.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} A_{11} = & -\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right] \times \\ & \left[ \frac{r}{2} \cdot \theta_4 - \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \right] - \\ & \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_7 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right] \left[ \frac{r^2 \cdot \omega_r}{d} \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \right], \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} A_{12} = & -\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right] \times \\ & \left[ \frac{r}{2} \cdot \theta_4 + \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \right] - \\ & \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_7 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right] \left[ -\frac{r^2 \cdot \omega_l}{d} \cdot \theta_5 - \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} A_{21} = & -\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right] \times \\ & \left[ \frac{r}{2} \cdot \theta_4 - \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \right] - \\ & \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_7 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right] \left[ \frac{r^2 \cdot \omega_r}{d} \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \right], \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} A_{22} = & -\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right] \times \\ & \left[ \frac{r}{2} \cdot \theta_4 + \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \right] - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_7 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right] \left[ -\frac{r^2 \cdot \omega_l}{d} \cdot \theta_5 - \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \right], \quad (3.36)$$

$$B_{11} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{\theta_2}{r} + \frac{d \cdot \theta_8}{2 \cdot r} \right], \quad (3.37)$$

$$B_{12} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{\theta_7}{r} + \frac{d \cdot \theta_1}{2 \cdot r} \right], \quad (3.38)$$

$$B_{21} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{\theta_2}{r} - \frac{d \cdot \theta_8}{2 \cdot r} \right], \quad (3.39)$$

$$B_{22} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{\theta_7}{r} - \frac{d \cdot \theta_1}{2 \cdot r} \right]. \quad (3.40)$$

O modelo linearizado obtido é uma aproximação da cadeira de rodas real e como tal apresenta diversos tipos de incertezas. Entre essas incertezas estão dinâmicas não modeladas, incertezas paramétricas, ruídos e linearização (ZHANG et al., 1998). A análise e o projeto do controlador do sistema devem considerar essas incertezas (COVACIC, 2001; COVACIC, 2006). O sistema deve ser robusto em relação às incertezas paramétricas do modelo. Esses parâmetros podem ser vistos na Figura 27 sendo que as incertezas podem estar presentes nos raios das rodas traseiras,  $r$ , na distância entre as rodas motorizadas,  $d$ , e nas distâncias dos deslocamentos lateral e longitudinal relativos ao CG do sistema,  $b_1$  e  $b_2$ , respectivamente. Neste trabalho foram considerados como parâmetros incertos apenas os valores de  $d$ ,  $b_1$  e  $b_2$ , o que corresponde a um politopo de  $2^3 = 8$  vértices.

### 3.5 Projeto do controlador robusto do sistema com incertezas politópicas e LMIs

Nesta seção, o foco está no fato de que os sistemas ERP são estáveis por definição conforme mostrado na Seção 1.13. A formulação em LMIs do Lema 1.13.5 da tese de (COVACIC, 2006), será utilizada apenas com a finalidade de determinar a matriz  $K_o$  que torna o sistema estável, por meio da realimentação da saída. Todavia, a matriz  $F$  não será implementada uma vez que o objetivo do capítulo não é tornar o sistema ERP.

Além disso, com a finalidade de examinar a influência da movimentação do cadeirante na estabilidade da planta considerou-se que os parâmetros  $b_1$  e  $b_2$ , representados na Figura 27, variam dentro dos limites das faixas representadas por 3.41 e 3.42 respectivamente. Foi também estabelecida uma faixa de variação para o parâmetro  $d$  de acordo com 3.43.



### 3.5.1 Determinação dos valores das matrizes para cada vértice do politopo

Considerando as faixas de variação dos parâmetros  $Pd_i(d_i, b_{1i}, b_{2i})$ , definidas em 3.41 a 3.43, foram determinados oito vértices do politopo<sup>1</sup> formado, mostrados de 3.44 até 3.51. Além dos vértices do politopo, foram escolhidos quatro pontos do interior do politopo, mostrados de 3.52 a 3.55.

As matrizes,  $A_{ij} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$  e  $B_{ij} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 7$  e  $8$ , que representam o sistema nos oito vértices do politopo, são calculadas utilizando-se o programa definido em D.1 e os valores dos parâmetros do modelo da cadeira mostrados na Tabela 3. Foi também utilizado o vetor de grandezas paramétricas  $\theta$ , cujos elementos estão definidos nas equações de 3.5 até 3.12. O programa é executado em ambiente Matlab® e as matrizes resultantes são mostradas de 3.56 a 3.63.

Intervalo de variação dos parâmetros:

$$0 \leq b_1 \leq 0.151 \quad (3.41)$$

$$-0.151 \leq b_2 \leq 0.151 \quad (3.42)$$

$$0.40 \leq d \leq 0.70 \quad (3.43)$$

Vértices do politopo:

$$Pd1(0.40; 0; 0.151) \quad (3.44)$$

$$Pd2(0.40; 0; -0.151) \quad (3.45)$$

$$Pd3(0.40; 0.151; 0.151) \quad (3.46)$$

$$Pd4(0.40; 0.151; -0.151) \quad (3.47)$$

$$Pd5(0.70; 0; 0.151) \quad (3.48)$$

$$Pd6(0.70; 0; -0.151) \quad (3.49)$$

$$Pd7(0.70; 0.151; 0.151) \quad (3.50)$$

$$Pd8(0.70; 0.151; -0.151) \quad (3.51)$$

Pontos do interior do politopo:

$$Pdcg1(0.70; 0; 0) \quad (3.52)$$

$$Pdcg2(0.40; 0; 0) \quad (3.53)$$

$$Pdcg3(0.45; 0; 0) \quad (3.54)$$

$$Pdcg4(0.70; 0; -0.1) \quad (3.55)$$

<sup>1</sup> Sobre politopo consulte 1.8.2.4.

Tabela 3 – Parâmetros do modelo da cadeira de rodas utilizados para determinação das matrizes  $Ad_i$  e  $Bd_i$ , correspondentes a cada um dos vértices do politopo.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$k_{DT}$	0.1	$x_k$	1
$k_{PT}$	1	$F_{px}$	10
$k_{DR}$	0.1	$F_{py}$	10
$k_{PR}$	1	$\tau_p$	100
$R_a$	0.2	$\omega_l$	0
$k_a$	1	$\omega_r$	0
$I_e$	100	$a$	0.35
$I_z$	150	$m$	80
$k_b$	1	$y_k$	1
$B_e$	5		

Fonte: do próprio autor.

Pd1(0.40;0;0.151):

$$\begin{aligned}
 Ad1 &= \begin{bmatrix} 0.0857 & 0.0274 \\ 0.0288 & 0.0831 \end{bmatrix} \\
 Bd1 &= \begin{bmatrix} 0.0481 & 0.0155 \\ 0.0476 & -0.0145 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Pd2(0.40;0;-0.151):

$$\begin{aligned}
 Ad2 &= \begin{bmatrix} 0.0825 & 0.0282 \\ 0.0268 & 0.0851 \end{bmatrix} \\
 Bd2 &= \begin{bmatrix} 0.0471 & 0.0145 \\ 0.0476 & -0.0155 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Pd3(0.40;0.151;0.151):

$$\begin{aligned}
 Ad3 &= \begin{bmatrix} 0.0854 & 0.0277 \\ 0.0289 & 0.0827 \end{bmatrix} \\
 Bd3 &= \begin{bmatrix} 0.0481 & 0.0154 \\ 0.0475 & -0.0144 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Pd4(0.40;0.151;-0.151):

$$\begin{aligned}
 Ad4 &= \begin{bmatrix} 0.0822 & 0.0284 \\ 0.0269 & 0.0847 \end{bmatrix} \\
 Bd4 &= \begin{bmatrix} 0.0471 & 0.0144 \\ 0.0475 & -0.0154 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Pd5(0.70;0;0.151):

$$\begin{aligned} Ad5 &= \begin{bmatrix} 0.1000 & 0.0132 \\ 0.0143 & 0.0976 \end{bmatrix} \\ Bd5 &= \begin{bmatrix} 0.0482 & 0.0289 \\ 0.0476 & -0.0278 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pd6(0.70;0;-0.151):

$$\begin{aligned} Ad6 &= \begin{bmatrix} 0.0969 & 0.0136 \\ 0.0125 & 0.0993 \end{bmatrix} \\ Bd6 &= \begin{bmatrix} 0.0470 & 0.0278 \\ 0.0476 & -0.0289 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Pd7(0.70;0.151;0.151):

$$\begin{aligned} Ad7 &= \begin{bmatrix} 0.0997 & 0.0134 \\ 0.0142 & 0.0971 \end{bmatrix} \\ Bd7 &= \begin{bmatrix} 0.0482 & 0.0288 \\ 0.0474 & -0.0276 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Pd8(0.70;0.151;-0.151):

$$\begin{aligned} Ad8 &= \begin{bmatrix} 0.0967 & 0.0138 \\ 0.0125 & 0.0988 \end{bmatrix} \\ Bd8 &= \begin{bmatrix} 0.0470 & 0.0276 \\ 0.0474 & -0.0288 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Pdcg1(0.70;0;0):

$$\begin{aligned} Adcg1 &= \begin{bmatrix} 0.0986 & 0.0132 \\ 0.0132 & 0.0986 \end{bmatrix} \\ Bdcg1 &= \begin{bmatrix} 0.0476 & 0.0285 \\ 0.0476 & -0.0285 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Pdcg2(0.40;0;0):

$$\begin{aligned} Adcg2 &= \begin{bmatrix} 0.0843 & 0.0276 \\ 0.0276 & 0.0843 \end{bmatrix} \\ Bdcg2 &= \begin{bmatrix} 0.0476 & 0.0151 \\ 0.0476 & -0.0151 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.65)$$

$Pd cg3(0.45;0;0.0)$ :

$$\begin{aligned} Adcg3 &= \begin{bmatrix} 0.0874 & 0.0244 \\ 0.0244 & 0.0874 \end{bmatrix} \\ Bdcg3 &= \begin{bmatrix} 0.0476 & 0.0177 \\ 0.0476 & -0.0177 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.66)$$

$Pd cg4(0.70;0;-0.1)$ :

$$\begin{aligned} Adcg4 &= \begin{bmatrix} 0.0975 & 0.0134 \\ 0.0127 & 0.0991 \end{bmatrix} \\ Bd1 &= \begin{bmatrix} 0.0472 & 0.0280 \\ 0.0476 & -0.0288 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Os pontos  $Pd cg1$ ,  $Pd cg2$ ,  $Pd cg3$  e  $Pd cg4$  são pontos no interior do politopo onde  $b_1$  ou  $b_2$  ou ambos são nulos, indicando variações no CG, devido à movimentação do cadeirante.

A partir das matrizes  $A$  e  $B$  de cada vértice e ponto escolhido do politopo e do programa D.2, que implementa as LMIs do Lema 1.13.5 em ambiente Matlab®, é determinada a matriz de realimentação da saída,  $K_o$ , para estabilização da cadeira de rodas.

## 4 Controlador robusto do ângulo de articulação do joelho de um paciente paraplégico utilizando LMIs em presença de incertezas paramétricas limitadas em norma

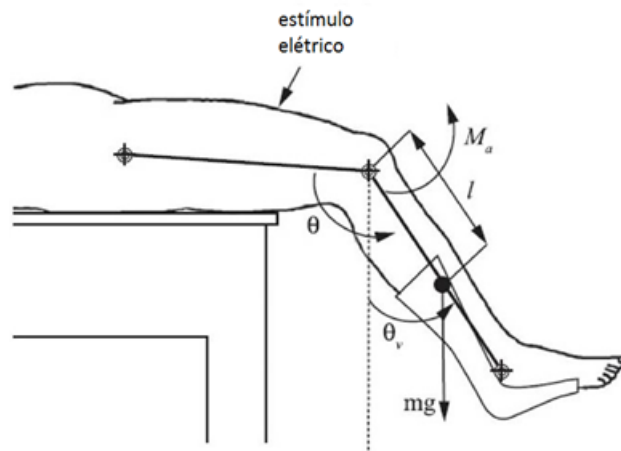
Este capítulo apresenta uma proposta de projeto para o controle da posição do joelho de um paciente paraplégico através da estimulação elétrica funcional (FES), representado na Figura 2, utilizando LMIs no controle de sistemas com incertezas limitadas em norma.

### 4.1 Contextualização e definição do problema

Conforme observaram [GAINO et al. \(2011\)](#), os sistemas FES baseados em controle de MA apresentam problemas relacionados com falta de sensibilidade tanto para distúrbios externos como para mudança nos parâmetros internos. Por outro lado, por meio de sensores os sistemas FES baseados em controles de MF permitem a medição em tempo real do movimento produzido e fornecem um padrão de estimulação com a modulação adequada ([FERRARIN; PEDOTTI, 2000](#)). Isso possibilita a otimização da largura do pulso neuroestimulador, conforme Figura 2, com conseqüente diminuição da fadiga do músculo. Além disso, [GAINO et al. \(2011\)](#) mostraram que, embora o sinal de realimentação, relacionado ao ângulo de articulação do joelho, possa ser obtido utilizando-se eletrogoniômetros, a utilização de acelerômetros em pontos estratégicos é mais vantajosa. Ela simplifica a medição, permitindo uma maior facilidade de fixação dos sensores na pele do paciente e por isso é mais segura e confiável.

A planta escolhida, representando o sistema ilustrado na Figura 28, é a junção do joelho, isto é, a cadeia cinemática aberta composta de dois segmentos rígidos: a coxa e o complexo canela-pé ([FERRARIN; PEDOTTI, 2000](#)). Ela permite estudar o relacionamento entre os principais parâmetros da estimulação de entrada, ou seja, a largura de pulso e frequência, com a saída representada pelo torque da junta ativa produzido pelos músculos estimulados em condições não isométricas, isto é, produção de força sem mudança de comprimento ([FERRARIN; PEDOTTI, 2000](#); [BIOMECÂNICA... , 2001](#)). O tornozelo foi fixado através de um apoio externo de plástico, chamado órtese, reduzindo assim o número de graus de liberdade da planta. Dessa forma, o comprimento dos músculos biarticulares depende somente da posição da articulação do joelho. A coxa foi apoiada na mesa de suporte de maneira que somente a dinâmica da canela-pé e os movimentos de

Figura 28 – Representação esquemática da planta da articulação do joelho do paciente.



Fonte: (MAKSSOUD; GUIRAUD; POIGNET, 2004; GAINO, 2009)

flexão-extensão do joelho foram considerados. Essa modelagem foi inicialmente proposta por FERRARIN e PEDOTTI (2000).

## 4.2 Modelo não-linear da articulação do joelho do paciente

O modelo não-linear da articulação do joelho do paciente paraplégico é obtido a partir da análise da planta representada na Figura 28.

Por meio de eletrodos fixados na pele da coxa do paciente, o quadríceps recebe uma FES provocando a contração do músculo e posicionando o joelho num ângulo,  $\theta$ , desejado entre a canela e a coxa no plano sagital (FERRARIN; PEDOTTI, 2000; GAINO et al., 2011). O ângulo entre a canela e o eixo vertical no plano sagital é  $\theta_v$  e o torque ativo produzido pela FES no quadríceps é  $M_a$  (GAINO et al., 2008).

Conforme GAINO et al. (2008), o ponto de equilíbrio de interesse do sistema é aquele no qual  $\theta_{v0} = 30^\circ$ , ou seja, o ponto de operação do sistema não é a origem. Assim, segundo a teoria de estabilidade de Lyapunov, é necessário efetuar uma troca de variáveis para transladar o novo ponto de equilíbrio para a origem. Dessa maneira, as variáveis de estado da Equação 4.1 são dadas por:

- $x_1(t) = \Delta\theta_v = \theta_v - \theta_{v0}$ , ângulo entre a canela e o eixo vertical no plano sagital, deslocado para o ponto de operação na origem;
- $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \Delta\dot{\theta}_v = \dot{\theta}_v - \dot{\theta}_{v0}$ , velocidade angular da canela, deslocada para o ponto de operação na origem; e

- $x_3(t) = \Delta M_a = M_a - M_{a0}$ , torque ativo do joelho produzido pela FES, deslocado para o ponto de operação na origem.

O movimento da articulação do joelho decorrente do estímulo elétrico aplicado no quadríceps é regido pela equação de estados 4.1, não-linear, de acordo com GAINO et al. (2008).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_{21} & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix} \cdot P_N. \quad (4.1)$$

Os parâmetros da planta com seus significados e valores foram obtidos experimentalmente em (FERRARIN; PEDOTTI, 2000; GAINO et al., 2011) e são mostrados na Tabela 4.

Tabela 4 – Natureza e valores dos parâmetros obtidos experimentalmente em (FERRARIN; PEDOTTI, 2000; GAINO et al., 2011; DIOGO et al., 2012) para o complexo canela-pé de um paciente de 30 anos, paraplégico.

Parâmetro	Natureza	Valor	Unidade
$J$	Momento inercial do complexo pé-canela	0.362	$[kg \cdot m^2]$
$m$	Massa do complexo pé-canela	4.37	$[Kg]$
$l$	Distância entre o joelho e o centro de massa do complexo pé-canela	23.8	$[cm]$
$B$	Coefficiente viscoso	0.27	$[N \cdot m \cdot s/rad]$
$\lambda$	Coefficiente do termo exponencial	41.208	$[N \cdot m/rad]$
$E$	Coefficiente do termo exponencial	2.024	$[rad^{-1}]$
$\omega$	Ângulo elástico de repouso do joelho	2.918	$[rad]$
$\tau$	Coefficiente da função de transferência (constante de tempo do polo)	0.951	$[s]$
$G$	Coefficiente da função de transferência (ganho estático)	42500	$[N \cdot m/s]$

Adaptado de: (GAINO et al., 2007).

A não-linearidade do modelo matemático da planta vem através do elemento  $\tilde{f}_{21}$  da matriz característica do sistema, mostrado na Equação 4.1, o qual está representado na Equação 4.2 (GAINO et al., 2008; GAINO, 2009; GAINO et al., 2011; DIOGO et al., 2012).

$$\tilde{f}_{21}(x_1(t)) = \frac{1}{J \cdot x_1(t)} [m \cdot g \cdot l \cdot \text{sen}(x_1(t) + \theta_{\nu 0})] - \frac{1}{J \cdot x_1(t)} \left[ \lambda \cdot (\exp -E \cdot (x_1(t) + \theta_{\nu 0} + \frac{\pi}{2})) \left( x_1(t) + \theta_{\nu 0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) + M_{a0} \right]. \quad (4.2)$$

Conforme definido em GAINO et al. (2008), GAINO (2009), GAINO et al. (2011), DIOGO et al. (2012), no ponto de operação de interesse, tem-se:  $\theta_{\nu} = \theta_{\nu 0} = 30^{\circ}$ . Além disso, as derivadas  $\ddot{\theta}_{\nu}$  e  $\dot{\theta}_{\nu}$  são nulas. Nesse caso, o torque ativo do joelho,  $M_{a0}$ , produzido pela estimulação elétrica, é dado pela Equação 4.3.

$$M_{a0} = m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta_{\nu 0}) + \lambda \cdot (\exp -E \cdot (\theta_{\nu 0} + \frac{\pi}{2})) \left( \theta_{\nu 0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right). \quad (4.3)$$

Considerando-se os valores dos parâmetros da Tabela 4, com  $g = 9.8[m/s^2]$  e  $\theta_{\nu 0} = \frac{\pi}{6}[rad]$ , e substituindo-os na Equação 4.3 obtém-se o valor de  $M_{a0} = 4.6068[N \cdot m]$ . No caso em que  $\theta_{\nu 0} = \frac{\pi}{3}[rad]$ , tem-se  $M_{a0} = 8.7653[N \cdot m]$ . A partir da entrada do sistema, a largura de pulso,  $P_s$ , define-se a nova entrada do sistema dada por  $P_N$ , a largura de pulso não referenciada, dada pela Equação 4.4 (GAINO et al., 2008; GAINO, 2009; GAINO et al., 2011; DIOGO et al., 2012).

$$P_N = P_s - \frac{M_{a0}}{G}. \quad (4.4)$$

Tendo em vista que só haverá movimentação da perna do paraplégico se for aplicado um pulso eletroestimulador na pele da coxa, através dos eletrodos previamente fixados, a Equação 4.4 mostra que esse pulso deve ter largura  $P_s > 0$ , o que implica na desigualdade 4.5 a seguir.

$$P_N > -\frac{M_{a0}}{G}. \quad (4.5)$$

### 4.3 Projeto do controlador do sistema com incertezas limitadas em norma e LMIs

O controle da posição do joelho do paciente paraplégico, através da estimulação elétrica funcional (FES) aplicada ao músculo quadríceps visto na Seção 4.2, é descrito em (FERRARIN; PEDOTTI, 2000; TEIXEIRA et al., 2006). A equação da planta em espaço de estados é representada pela Equação 1.114, ou seja:

$$\dot{x} = (A + \delta A) \cdot x + (B + \delta B) \cdot u,$$

sendo as matrizes característica e de entrada do sistema com as incertezas dadas pelas Equações 4.6 e 4.7.

$$A + \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_{21} & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$



$$B + \delta B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{G}{\tau} \end{bmatrix}'. \quad (4.7)$$

Conforme descrito na Seção 4.2 a função  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$  é uma não-linearidade do sistema representada pela Equação 4.2 tal que o intervalo de incertezas paramétricas é:

$$\tilde{f}_{21_{min}} \leq \tilde{f}_{21}(x_1(t)) \leq \tilde{f}_{21_{max}}.$$

Na Equação 4.2 verifica-se que  $x_1(t)$  aparece no denominador o que leva a uma indeterminação caso seu valor seja nulo. Para solucionar esse inconveniente GAINO (2009) expandiu analiticamente a Equação 4.2 em duas séries de Taylor uma de quinta ordem e outra de ordem superior à quinta, utilizando Toolbox Symbolic do Matlab®. Para um intervalo fechado de interesse do estudo foi verificado que o erro de aproximação torna-se praticamente nulo (GAINO, 2009).

Os valores máximo e mínimo da função  $\tilde{f}_{21}$  encontrados por GAINO et al. (2008) vão depender do ponto de operação e da faixa de variação de  $\theta_\nu$  escolhidos. Para o ponto de operação  $\theta_{\nu 0} = 30^\circ$ , levando-se em consideração a restrição física do paciente para movimentar a perna apenas dentro da faixa  $0 \leq \theta_\nu \leq \frac{\pi}{2}$ , a faixa de variação escolhida de  $\theta_\nu$  é dada por  $0 \leq \theta_\nu \leq \frac{\pi}{3}$ . Nestas condições, os valores encontrados são:  $\tilde{f}_{21_{min}} = -21.7834$  e  $\tilde{f}_{21_{max}} = -36.0086$ .

GAINO (2009), utilizando o *basic fitting tool* do software Matlab®, aproximou a função não-linear  $\tilde{f}_{21}(x_1(t))$  na função de primeira ordem dada pela Equação 4.8. A função é válida para  $x_1(t)$  variando na faixa  $0^\circ \leq \theta_\nu(t) \leq 60^\circ$  e ponto de operação igual a  $\theta_{\nu 0} = 30^\circ$ .

$$\tilde{f}_{21}(x_1(t)) = 13.584x_1 - 28.896. \quad (4.8)$$

Assim, a planta nominal é representada por  $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ , com as matrizes dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_0 & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{G}{\tau} \end{bmatrix}',$$

sendo:

$$\tilde{f}_0 = \frac{\tilde{f}_{21_{max}} + \tilde{f}_{21_{min}}}{2}.$$

As matrizes  $\delta A$  e  $\delta B$  são decompostas<sup>1</sup> de acordo com a Equação 1.115, sendo:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \delta \tilde{f}_{max} & 0 \end{bmatrix}',$$

$$R_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_B = [0],$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix},$$

onde:

$$-1 \leq \delta \leq 1,$$

e:

$$\delta \tilde{f}_{max} = \frac{\tilde{f}_{21min} - \tilde{f}_{21max}}{2}.$$

Para a determinação da matriz de realimentação de saída que estabiliza a variação do ângulo de articulação do joelho de um paciente paraplégico, utilizando LMIs em presença de incertezas limitadas em norma é utilizado o Lema 1.13.5 de COVACIC (2006).

As LMIs 1.101 e 1.102 são programadas para resolução em ambiente Matlab® e, se elas forem factíveis, as matrizes  $X$  e  $R$  serão utilizadas para determinação da matriz de realimentação da saída,  $K_o$ , de acordo com a Equação 1.104, ou seja:

$$K_o = R \cdot X^{-1} \cdot C^{-1}.$$

A planta em MF está representada na Figura 18. A matriz  $F$  não é utilizada, nesta abordagem. Os valores numéricos das matrizes acima encontram-se nas tabelas da Seção 7.1 da parte de resultados.

<sup>1</sup> Ver Apêndice F sobre a determinação das matrizes de incertezas. Há mais de uma escolha possível. Por exemplo, as seguintes matrizes poderiam também ser utilizadas:  $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}'$  e  $R_A = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Parte II

Resultados

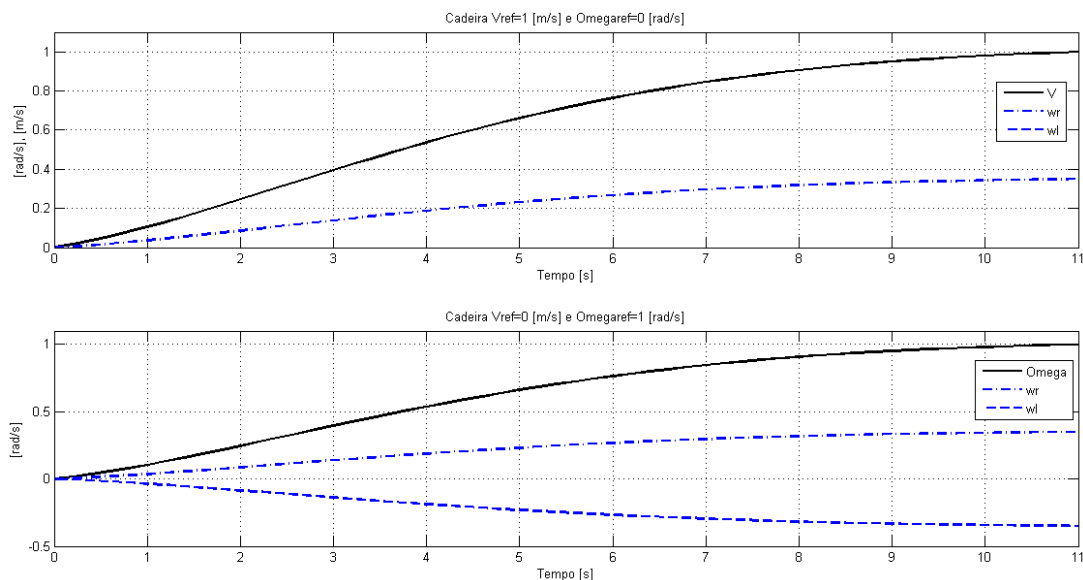


## 5 Controlador PI para um modelo linear simplificado da cadeira de rodas

### 5.1 Saídas da simulação com Matlab® e Equações de Estado

Considerando os valores da Tabela 1 e utilizando o Programa A.1 foram encontradas a matriz característica 5.1, a matriz de entrada 5.2, a matriz de saída 5.3 e a matriz de transmissão direta 5.4 da planta para a representação em espaço de estados da cadeira de rodas acionada por tração diferencial modelo linear simplificado.

Figura 29 – Resultados da resposta ao degrau unitário do controle dinâmico da cadeira,  $V = 0[m/s]$  e  $\Omega = 1[rad/s]$  e  $V = 1[m/s]$  e  $\Omega = 0[rad/s]$ .



Fonte: do próprio autor

Os resultados mostrados nas saídas da Figura 29 foram obtidos a partir das matrizes da representação do modelo no espaço de estados, dadas pelas equações 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4. Os valores numéricos das matrizes foram obtidos pela substituição dos valores numéricos experimentais dos parâmetros dados na Tabela 1, fornecidos por SOBRINHO et al. (2003), e representados pelas Equações de 5.1 até 5.4. Para a determinação dos valores numéricos das matrizes foi utilizado o Programa A.1. As saídas mostram que o sistema é estável.

$$A = \begin{bmatrix} -8,9721 & 0 & 5,8765 & 0 \\ 0 & -8,9721 & 0 & 5,8765 \\ -5,7285 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,7285 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.2707 & 0.4447 \\ 1.2707 & -0.4447 \\ 5.6879 & 1.9907 \\ 5.6879 & -1.9907 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

## 5.2 Conclusão Parcial: Capítulo 5

A movimentação do cadeirante sobre a cadeira causa desvios laterais e longitudinais do CG, isto é, do posicionamento do paciente. O modelo linear simplificado não permite a inclusão dessa incerteza paramétrica. Ele não permite também a inclusão de detalhes estruturais que é outra fonte de incertezas paramétricas. No próximo capítulo é feita uma análise de vários modelos não-lineares que permitem superar essas limitações.

O modelo da cadeira de rodas em equação de estados da Seção 2.3, representado nas equações 2.1 a 2.13, sendo um modelo matemático teórico, fornece os valores esperados de  $V$  e  $\Omega$ , considerando os valores de referência  $V_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ . Contudo, na prática há restrições no resultado final já que está sendo utilizado um modelo linear simplificado, que tem suas limitações.

## 6 Controlador robusto utilizando LMIs em presença de incertezas paramétricas poli-tópicas para um modelo não-linear de um VRTD

### 6.1 Saídas da simulação

Considere-se a planta representada pelas Equações 1.88 da Seção 1.13 e as matrizes de saída e de transmissão direta do sistema representadas pela Equações 6.2 e 6.1, respectivamente.

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

Dessa maneira, o modelo de espaço de estado do VRTD fica:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t).$$

Como a planta tem duas entradas,  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ , e duas saídas,  $\omega_r$  e  $\omega_l$ , daí vem que

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_l \end{bmatrix} + B \cdot \begin{bmatrix} U_{ref} \\ \Omega_{ref} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_l \end{bmatrix}.$$

#### 6.1.1 Obtenção da matriz de realimentação

A matriz de realimentação de saída do sistema,  $K_o$ , é calculada utilizando-se LMIs representadas por 1.111, através do programa D.2 para ambiente Matlab®. São utilizados

os valores dos parâmetros da Tabela 3 e das matrizes dos vértices do politopo dadas pelo Programa D.1. As matrizes resultantes do processo estão representadas em 6.3 até 6.5.

$$X = \begin{bmatrix} 51.3762 & -1.7280 \\ -1.7280 & 46.1799 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

$$R = \begin{bmatrix} 267.8942 & 674.7599 \\ 371.1933 & -592.7815 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

$$K_o = \begin{bmatrix} 5.7130 & 14.8253 \\ 6.8018 & -12.5818 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

### 6.1.2 Determinação dos autovalores da planta nos vértices do politopo e geração das saídas

Por intermédio do programa D.3, foram calculados os autovalores da planta para os vértices e pontos interiores escolhidos do politopo considerando o sistema em MA e em MF como pode ser visto na Tabela 5.

A Tabela 5 está organizada de tal maneira que, para cada vértice e ponto do politopo foram calculados os polos, sendo que à esquerda foi realizado um teste em MA e, à direita foi realizado um teste em MF com realimentação das saídas da planta através da matriz de realimentação  $K_o$ , mostrada na Equação 6.5.

Verificando a tabela constata-se que em MA tanto os pontos dos vértices do politopo quanto os pontos escolhidos no interior do politopo apresentam autovalores positivos, o que quer dizer que o sistema é instável. Analisando-se os autovalores de todos os pontos do politopo do sistema em MF constata-se que são todos negativos, garantindo a estabilidade assintótica do sistema.

Nas Figuras 30 até 37 tem-se as saídas  $\omega_l$  e  $\omega_r$  em função da aplicação de degraus unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$  para os oito pontos dos vértices do politopo. Nas Figuras 38 a 41 tem-se as saídas  $\omega_l$  e  $\omega_r$  em função das entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$  para quatro pontos do interior do politopo. Esses pontos estão representados em suas matrizes de 3.56 até 3.67. As curvas dessas saídas mostram um comportamento estável do sistema em MF.

Conforme representado nas Figuras de 30 até 41, os gráficos localizados do lado esquerdo das referidas figuras foram obtidos para uma excitação degrau unitário na velocidade linear de referência,  $U_{ref}$ , o que ocasiona uma velocidade linear da cadeira para frente, sendo assim, ambas as rodas apresentam velocidades angulares na mesma direção, sentido horário, compatíveis com o movimento da cadeira. Os gráficos localizados do lado direito das figuras em questão foram obtidos para uma excitação degrau unitário na velocidade angular de referência,  $\Omega_{ref}$ , o que ocasiona uma velocidade angular da cadeira



Tabela 5 – Autovalores da planta para cada vértice do politopo  $Pd_i(d_i, b1_i, b2_i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, 7$  e 8 e para os quatro pontos do interior do politopo,  $Pdcg_1, Pdcg_2, Pdcg_3$  e  $Pdcg_4$ , em MA e MF.

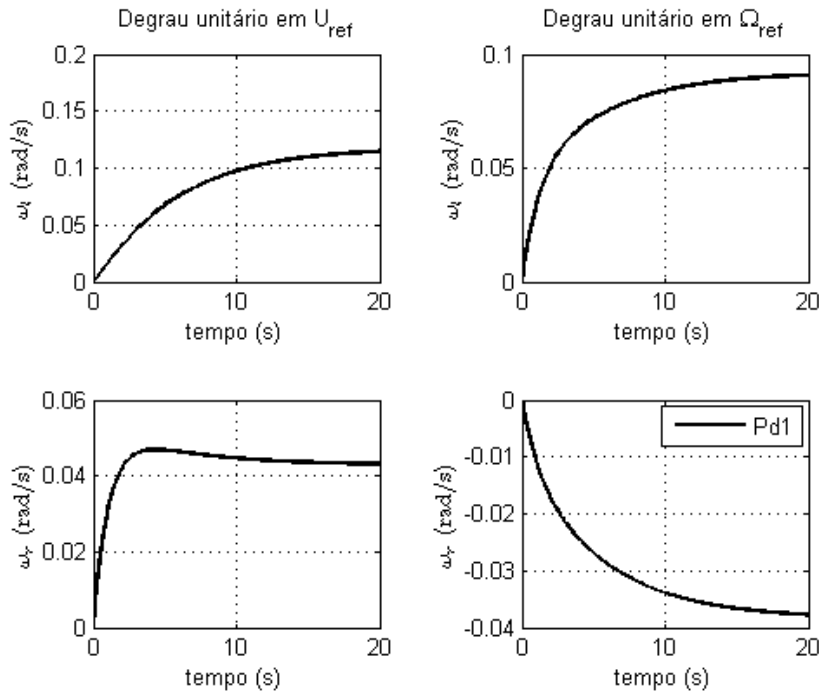
$Pd1(0.40; 0; 0.151)$		$Pd2(0.40; 0; -0.151)$	
Malha Aberta	Malha Fechada	Malha Aberta	Malha Fechada
0.1125	-0.1816	0.0563	-0.1790
0.0563	-0.9192	0.1113	-0.9231
$Pd3(0.40; 0.151; 0.151)$		$Pd4(0.40; 0.151; -0.151)$	
Malha Aberta	Malha Fechada	Malha Aberta	Malha Fechada
0.0558	-0.1781	0.1124	-0.1807
0.1111	-0.9213	0.0557	-0.9174
$Pd5(0.70; 0; 0.151)$		$Pd6(0.70; 0; -0.151)$	
Malha Aberta	Malha Fechada	Malha Aberta	Malha Fechada
0.1126	-0.3358	0.0850	-0.3290
0.0850	-0.9962	0.1112	-1.0039
$Pd7(0.70; 0.151; 0.151)$		$Pd8(0.70; 0.151; -0.151)$	
Malha Aberta	Malha Fechada	Malha Aberta	Malha Fechada
0.0846	-0.3278	0.1123	-0.3349
0.1109	-1.0002	0.0845	-0.9917
$Pdcg1(0.70; 0; 0)$		$Pdcg2(0.40; 0; 0)$	
Malha Aberta	Malha Fechada	Malha Aberta	Malha Fechada
0.0854	-0.3339	0.0567	-0.1814
0.1118	-1.0011	0.1119	-0.9216
$Pdcg3(0.45; 0; 0)$		$Pdcg4(0.70; 0; -0.1)$	
Malha Aberta	Malha Fechada	Malha Aberta	Malha Fechada
0.0499	-0.1493	0.0852	-0.3305
0.1119	-0.9100	0.1114	-1.0032

Fonte: do próprio autor.

para a direita, então, as rodas apresentam velocidade angular positiva em  $\omega_l$ , sentido horário e velocidade angular negativa em  $\omega_r$ , compatível com o movimento angular da cadeira de rodas para a direita, como ilustrado na Figura 42.

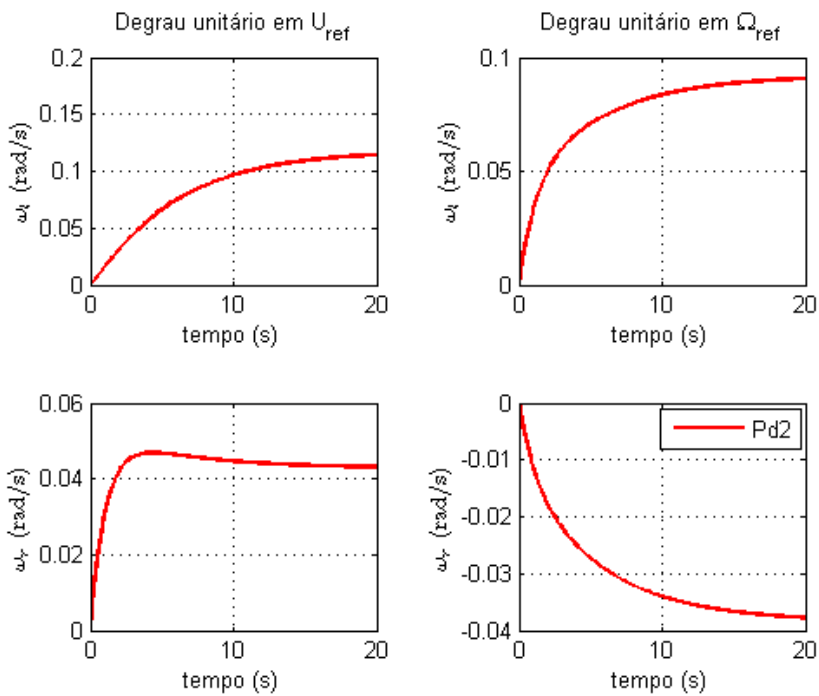
Apenas com a finalidade de constatar a instabilidade do sistema em malha aberta a Figura 43 apresenta as saídas para o ponto  $Pdcg1(0.70; 0; 0)$  do interior do politopo, quando é aplicado um degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ . Verifica-se pelas curvas que crescem indefinidamente que o sistema realmente é instável.

Figura 30 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice  $Pd1(0.40; 0; 0.151)$  e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



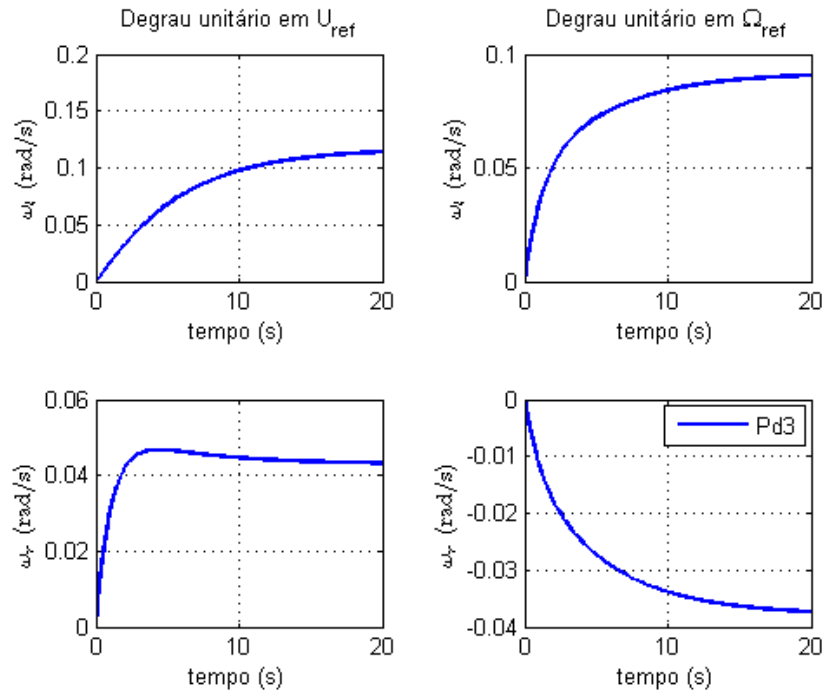
Fonte: do próprio autor.

Figura 31 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice  $Pd2(0.40; 0; -0.151)$  e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



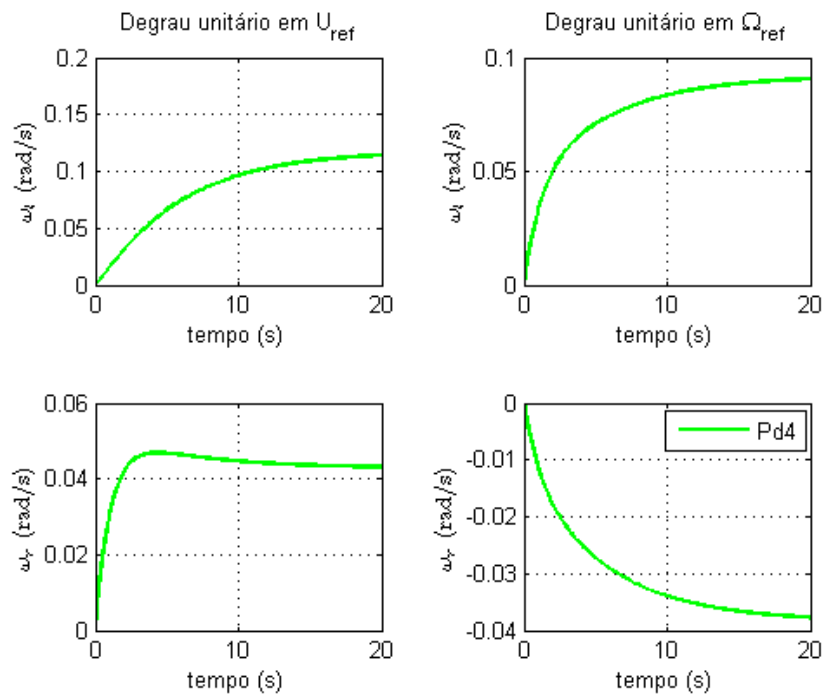
Fonte: do próprio autor.

Figura 32 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice  $Pd3(0.40; 0.151; 0.151)$  e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



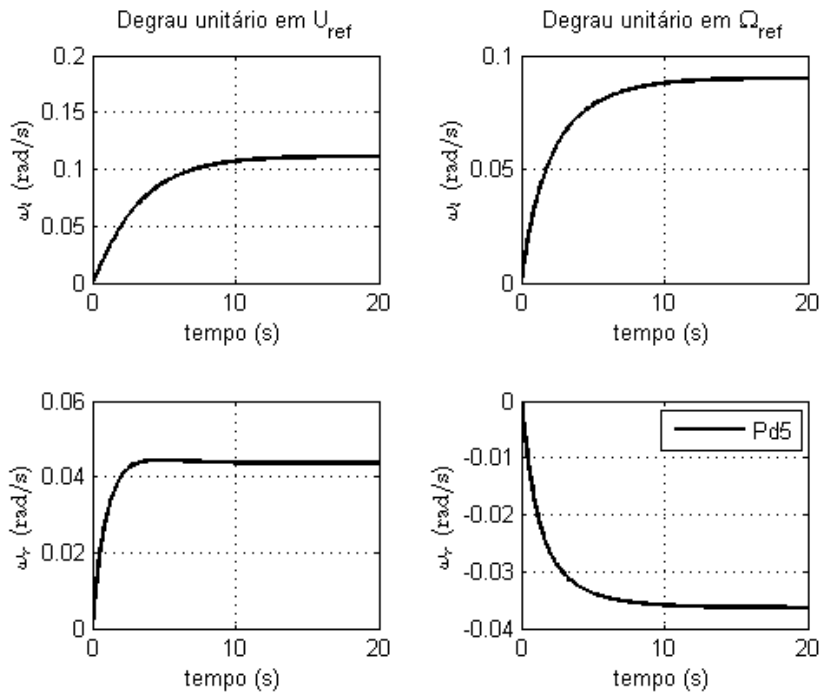
Fonte: do próprio autor.

Figura 33 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice  $Pd4(0.40; 0.151; -0.151)$  e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



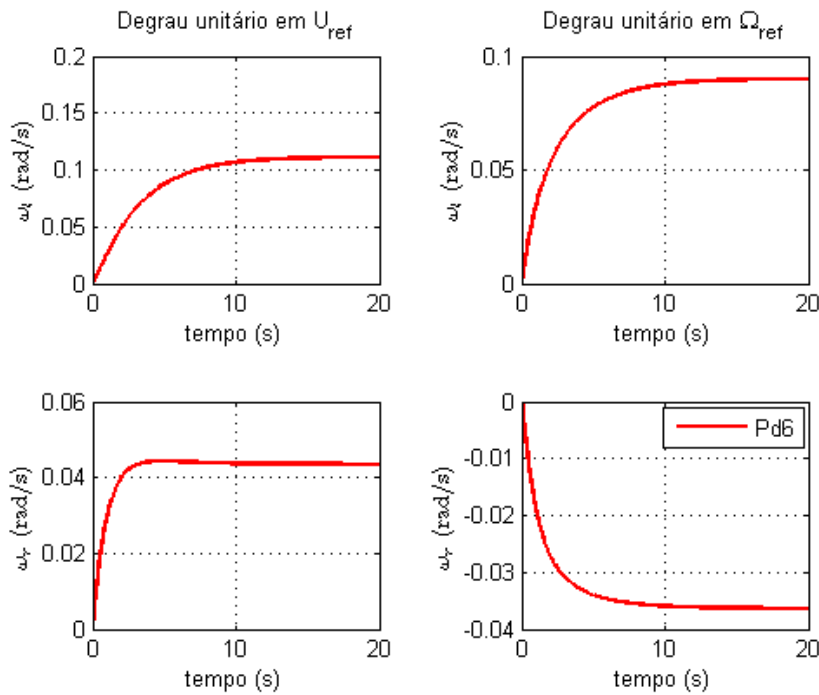
Fonte: do próprio autor.

Figura 34 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice  $Pd5(0.70; 0; 0.151)$  e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



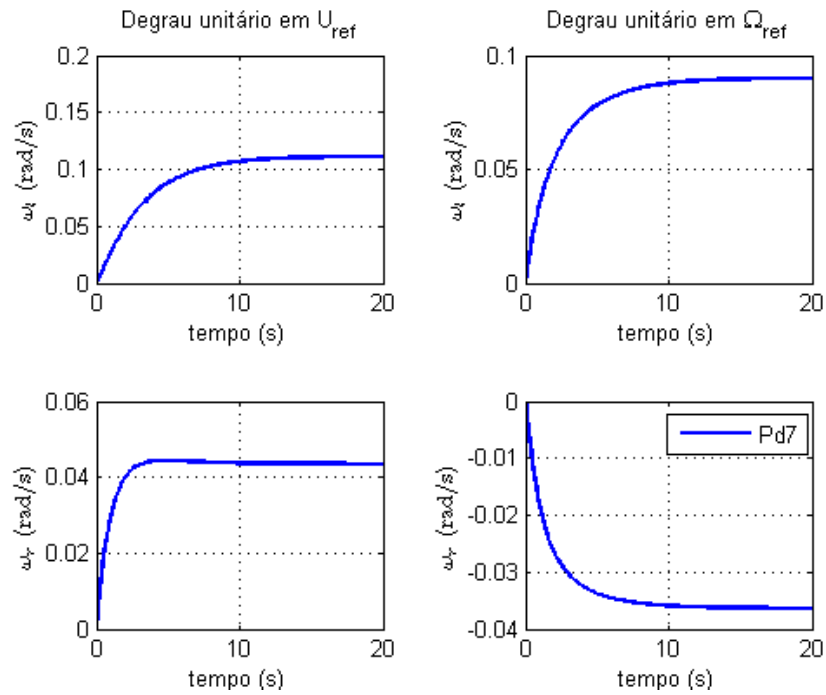
Fonte: do próprio autor.

Figura 35 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice  $Pd6(0.70; 0; -0.151)$  e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



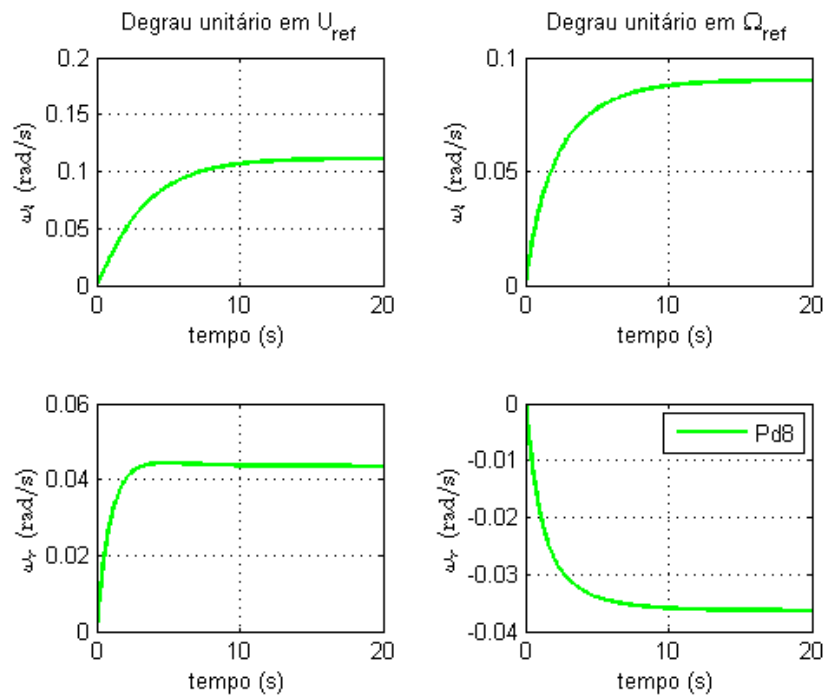
Fonte: do próprio autor.

Figura 36 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice  $Pd7(0.70; 0.151; 0.151)$  e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



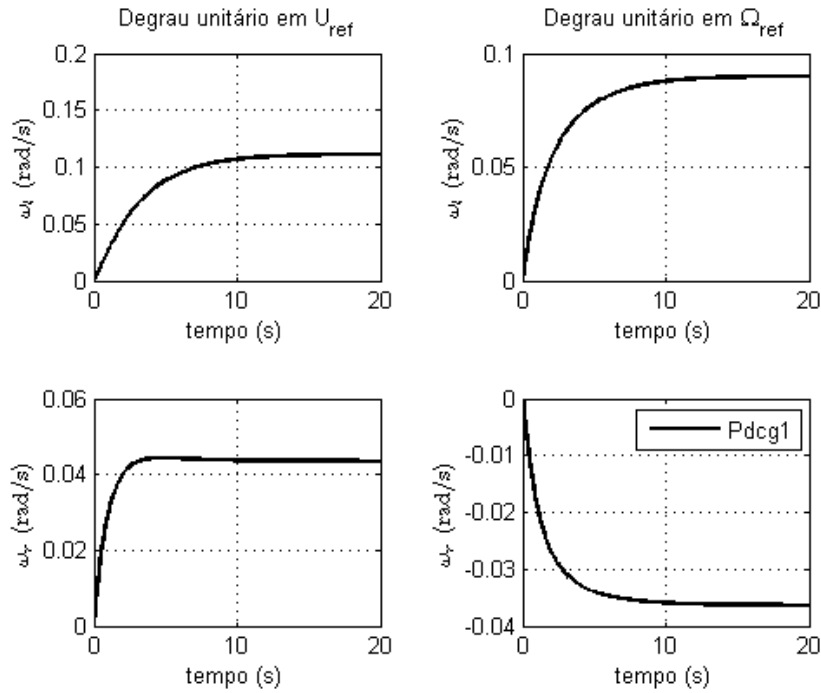
Fonte: do próprio autor.

Figura 37 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, vértice  $Pd8(0.70; 0.151; -0.151)$  e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



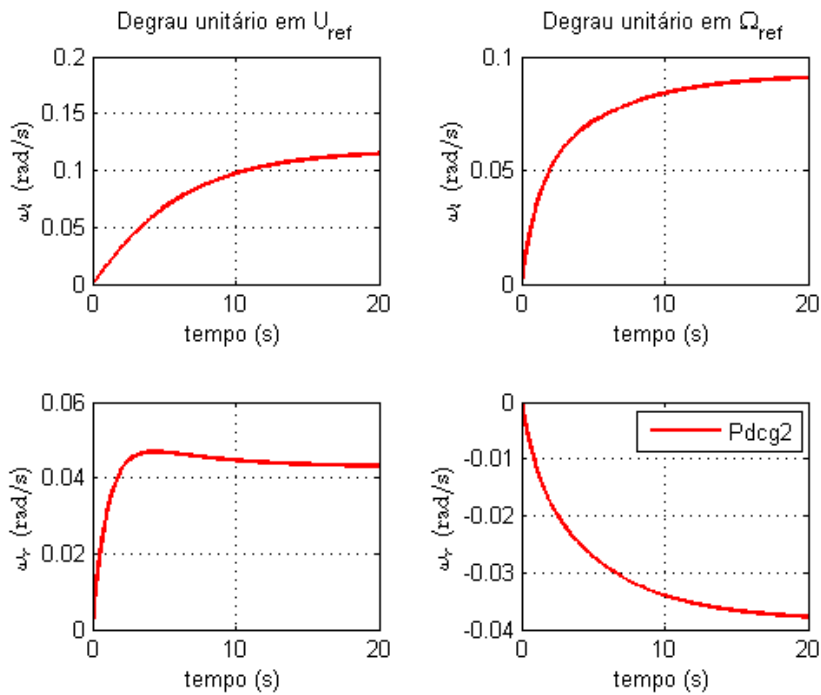
Fonte: do próprio autor.

Figura 38 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, ponto  $Pdcg1(0.70; 0; 0)$  do interior e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



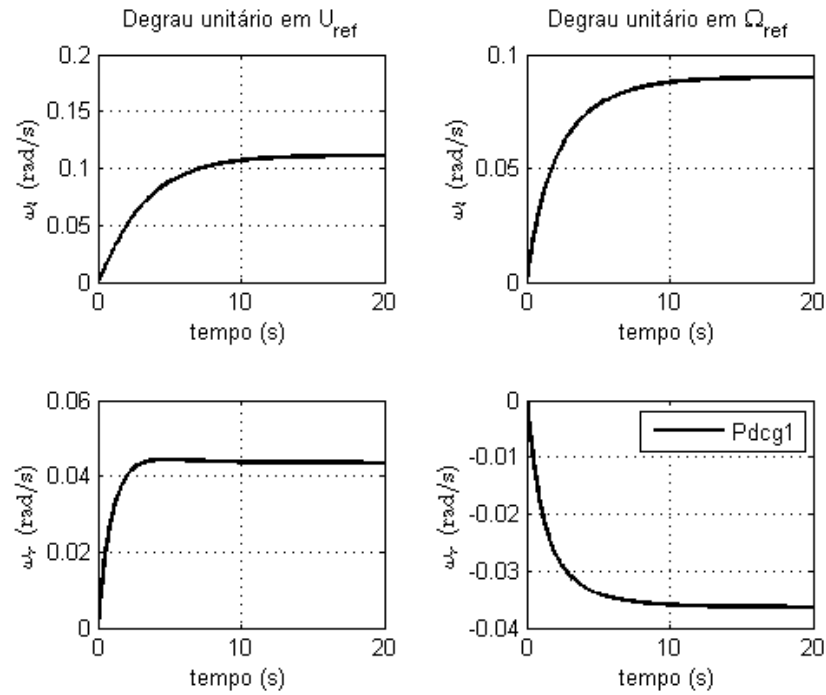
Fonte: do próprio autor.

Figura 39 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, ponto  $Pdcg2(0.40; 0; 0)$  do interior e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



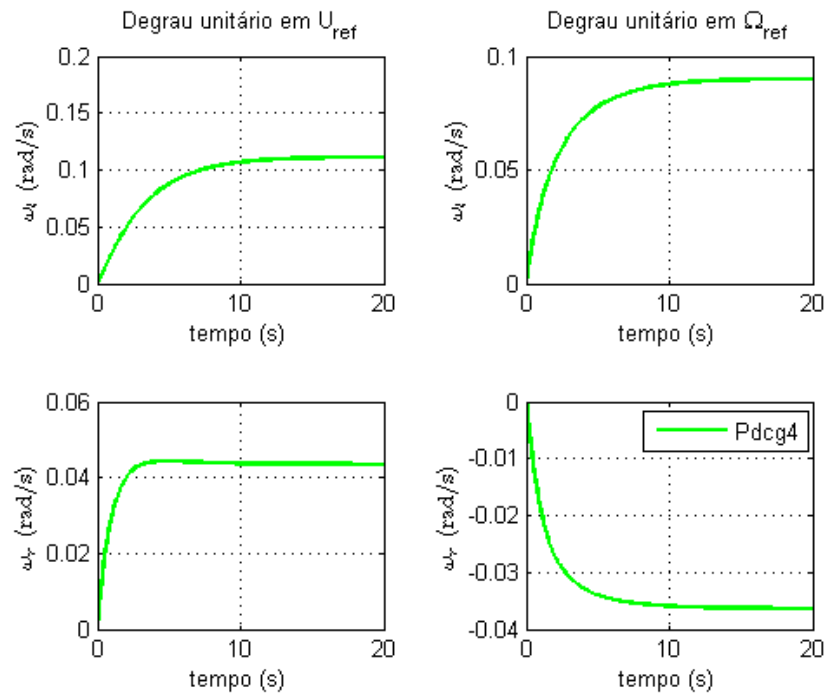
Fonte: do próprio autor.

Figura 40 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, ponto  $Pd cg3(0.45; 0; 0)$  do interior e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



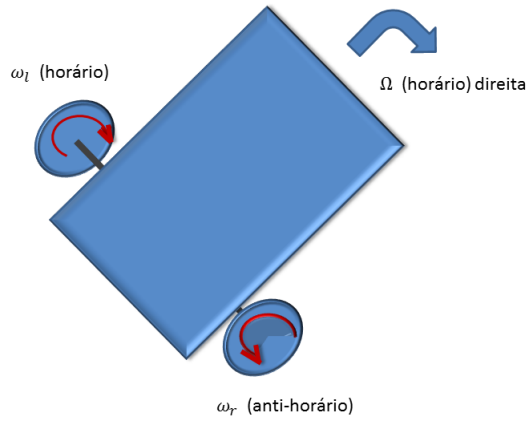
Fonte: do próprio autor.

Figura 41 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para MF, ponto  $Pd cg4(0.70; 0; -0.1)$  do interior e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



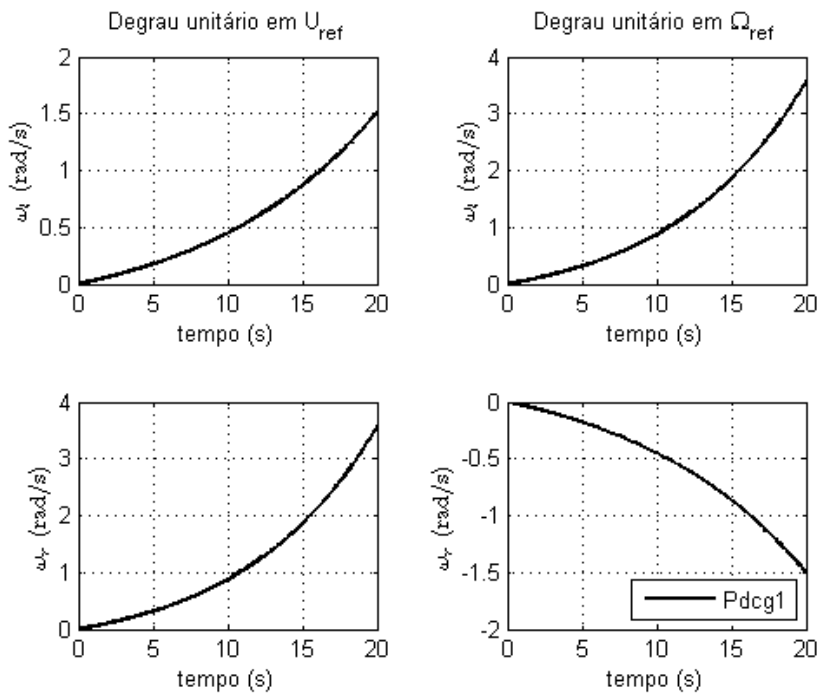
Fonte: do próprio autor.

Figura 42 – Movimentação angular da cadeira para a direita em relação à movimentação angular das rodas de tracionamento.



Fonte: do próprio autor.

Figura 43 – Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, para malha aberta, ponto  $Pdcg1(0.70; 0; 0)$  do interior e degrau unitário nas entradas  $U_{ref}$  e  $\Omega_{ref}$ .



Fonte: do próprio autor.



## 6.2 Conclusão Parcial: Capítulo 6

O modelo global do veículo sobre rodas com tração diferencial é composto de uma parte cinemática e de uma parte dinâmica que controla o nível mais baixo do modelo, representado pelas equações 3.1 e 3.2. Este último módulo envolve apenas a parte de controle das velocidades longitudinal e rotacional do veículo. Para os objetivos deste capítulo apenas o modelo dinâmico foi tratado. Contudo, a mesma metodologia pode ser utilizada para abordar a parte cinemática. Neste caso, são utilizadas as saídas controladas do módulo dinâmico como entradas do módulo cinemático. E, então, a matriz de controle para estabilizar as variáveis cinemáticas responsáveis pelo direcionamento do veículo, isto é,  $x$ ,  $y$  e  $\Psi$ , pode ser determinada.

O modelo dinâmico não-linear permite incluir a movimentação do cadeirante e as variações estruturais (paramétricas) que aparecem em forma de incertezas paramétricas politópicas do modelo. Essas incertezas são representadas por um conjunto de vértices matriciais e incluídas na programação das LMIs que determinam a matriz de realimentação negativa,  $K_o$ , que tornam o sistema estável.

A matriz  $F$  que deveria ser colocada em série com a saída do sistema, não foi determinada por duas razões: primeiro, o objetivo inicial não era obter uma síntese ERP; segundo, porque o cálculo da matriz  $F = B' \cdot X_{-1} \cdot C_{-1}$ , diferentemente de  $K_o$ , depende das matrizes  $B_i$  com  $i = 1, 2, \dots, 8$ , dos vértices do politopo.

Vários modelos não-lineares de VRTD são estudados e o modelo de De La CRUZ, BASTOS e CARELLI (2011) é escolhido por que permite controlar o veículo sobre rodas com tração diferencial utilizando as velocidades longitudinal e de rotação como entradas da parte dinâmica do modelo.

O objetivo inicial foi alcançado, isto é, a estabilidade do sistema dinâmico não-linear com incertezas politópicas paramétricas foi analisada e controlador foi projetado utilizando LMIs.



## 7 Controlador robusto do ângulo de articulação do joelho de um paciente paraplégico utilizando LMIs em presença de incertezas paramétricas limitadas em norma

### 7.1 Parâmetros de entrada, valores e gráficos de saídas da simulação

A Tabela 6 apresenta os valores e faixas de variação dos parâmetros para geração das saídas de simulação em ambiente Matlab®. Estes valores são utilizados para todos os casos de simulação que se seguem.

Tabela 6 – Valores dos parâmetros iniciais escolhidos para simulação.

Parâmetro	Valores escolhidos
Ponto de Operação $\theta_{\nu 0}$	$\pi/6$ .
Faixa de Variação	$0 \leq \theta_{\nu} \leq \pi/3$ .
Valores máximo e mínimo da função, $f_{21max}$ e $f_{21min}$ , obtidos substituindo $x_1$ por $\pi/6$ na Equação 4.8	$-21.7834$ e $-36.0085$ , respectivamente.
Estado Inicial $x(0) = \begin{bmatrix} -\theta_{\nu 0} & 0 & -M_{a0} \end{bmatrix}'$	$\begin{bmatrix} -0.5236 & 0 & -4.6068 \end{bmatrix}'$ .

Fonte: do próprio autor.

Os parâmetros de entrada e saída obtidos experimentalmente<sup>1</sup> são mostrados, para o caso sem restrição de saída<sup>2</sup> na Tabela 7. Para o caso com restrição de saída, na Tabela 9. Conforme pode ser visto na Seção 1.15 deste trabalho e de acordo com GAINO (2009), a estabilidade assintótica do sistema representado pela equação 4.1 pode ser obtida se a condição inicial  $x(0)$  é conhecida e a restrição de saída 1.128 é imposta para todo tempo  $t \geq 0$  ao sistema. Para obter esse resultado esperado basta adicionar as LMIs 1.129 e 1.130 às LMIs 1.121 do Lema 1.14.2, obviamente desde que essas LMIs sejam factíveis.

Nas Tabelas 8 e 10 são mostrados os parâmetros e valores para os pontos notáveis que são vistos nos gráficos das Figuras 45 e 44. Para a geração desses gráficos é necessário

<sup>1</sup> Os detalhes para o cálculo dessas matrizes podem ser vistos na Seção 4.3, sendo que o cálculo de  $f_{21}(x_1(t))$  está baseado na Equação 4.8.

<sup>2</sup> Ver Seção 1.15 sobre restrição de saída.

Tabela 7 – Parâmetros de entrada e de saída obtidos experimentalmente para o caso simples de simulação SEM restrição na saída, considerando os parâmetros da Tabela 6 e utilizados na geração da Figura 44.

Parâmetro	Valores
Matriz característica $A + \delta A$ ( $\delta = 0$ )	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -28.8960 & -0.7459 & 2.7624 \\ 0 & 0 & -1.0515 \end{bmatrix}$
Matriz característica $A + \delta A$ ( $\delta = 1$ )	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -21.7834 & -0.7459 & 2.7624 \\ 14.4989 & -4.4627 & -3.7559 \end{bmatrix}$
Matriz característica $A + \delta A$ ( $\delta = -1$ )	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -36.0086 & -0.7459 & 2.7624 \\ 14.4989 & -4.4627 & -3.7559 \end{bmatrix}$
Matriz de entrada $B$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 44690 \end{bmatrix}'$
Matriz de saída $C$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz $D$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
Matriz $L$	$\begin{bmatrix} 0 & 7.1126 & 0 \end{bmatrix}'$
Matriz $R_A$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz $R_B$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
Matriz $\Delta = \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$
Matriz $\delta A = L \cdot \Delta \cdot R_A$	$0, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7.1126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7.1126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz de realimentação $K$	$10^{-3} \times \begin{bmatrix} -0.3244 & 0.0999 & 0.0605 \end{bmatrix}$
Polos em malha fechada	
$\delta = 0$	$-1.3777 \pm 6.1086i$ e $-1.7463$
$\delta = 1$	$-1.6143 \pm 5.4951i$ e $-1.2732$
$\delta = -1$	$-1.2186 \pm 6.6799i$ e $-2.0646$
Variável escalar Lema 1.14.2.	$\epsilon = 12.7728$

Fonte: do próprio autor.

primeiro determinar as matrizes de realimentação,  $K$ , programando as LMIs estabelecidas no Lema 1.14.2 utilizando o LMILab do ambiente Matlab®. Considerando que as matrizes de incertezas,  $\delta A$  e  $\delta B$ , são dependentes da matriz diagonal das incertezas,  $\Delta = [\delta]$ , e esta última depende dos valores limites e ponto de operação do intervalo de variação de incertezas paramétricas, as curvas são geradas para  $\delta = -1$ ,  $\delta = 0$  e  $\delta = 1$ . Essas curvas são geradas nesta ordem em todos os gráficos, donde se observa que as curvas para  $\delta = 0$ ,

ficam localizadas entre as outras duas curvas.

Tabela 8 – Pontos notáveis observáveis na Figura 44, simulação SEM restrição de saída. Para cada parâmetro de entrada e saída são examinadas três curvas, a saber: para  $\delta = 1$ ,  $\delta = 0$  e  $\delta = -1$ , conforme legenda.

Parâmetro	Valores
Largura de pulso:	$2.17 \times 10^{-4}[s]$ em $0[s]$ ; estabiliza em $1.06 \times 10^{-4}[s]$ em $3.11[s]$ . $2.17 \times 10^{-4}[s]$ em $0[s]$ ; estabiliza em $1.08 \times 10^{-4}[s]$ em $3.20[s]$ . $2.17 \times 10^{-4}[s]$ em $0[s]$ ; estabiliza em $1.08 \times 10^{-4}[s]$ em $3.26[s]$ .
Ângulo do joelho:	$0.50[rad]$ em $0.60[s]$ ; estabiliza em $0.52[rad]$ em $3.80[s]$ . $0.45[rad]$ em $0.80[s]$ ; estabiliza em $0.52[rad]$ em $3.80[s]$ . $0.40[rad]$ em $1.20[s]$ ; estabiliza em $0.52[rad]$ em $4.00[s]$ .
Velocidade angular:	$1.35[rad/s]$ em $0.30[s]$ ; estabiliza em $0[rad/s]$ em $3.90[s]$ . $0.95[rad/s]$ em $0.35[s]$ ; estabiliza em $0[rad/s]$ em $3.90[s]$ . $0.70[rad/s]$ em $0.52[s]$ ; estabiliza em $0[rad/s]$ em $3.90[s]$ .
Torque:	$4.15[N.m]$ no tempo de $1.00[s]$ ; estabiliza em $4.60[N.m]$ em $4.00[s]$ . $4.10[N.m]$ no tempo de $1.30[s]$ ; estabiliza em $4.60[N.m]$ em $3.70[s]$ . $4.00[N.m]$ no tempo de $1.70[s]$ ; estabiliza em $4.55[N.m]$ em $3.95[s]$ .

Fonte: do próprio autor.

Nas Figuras 44 e 45, são mostrados os resultados das simulações, dos sistemas representados pela Equação 1.114, com a lei de controle dada na Equação 1.119.

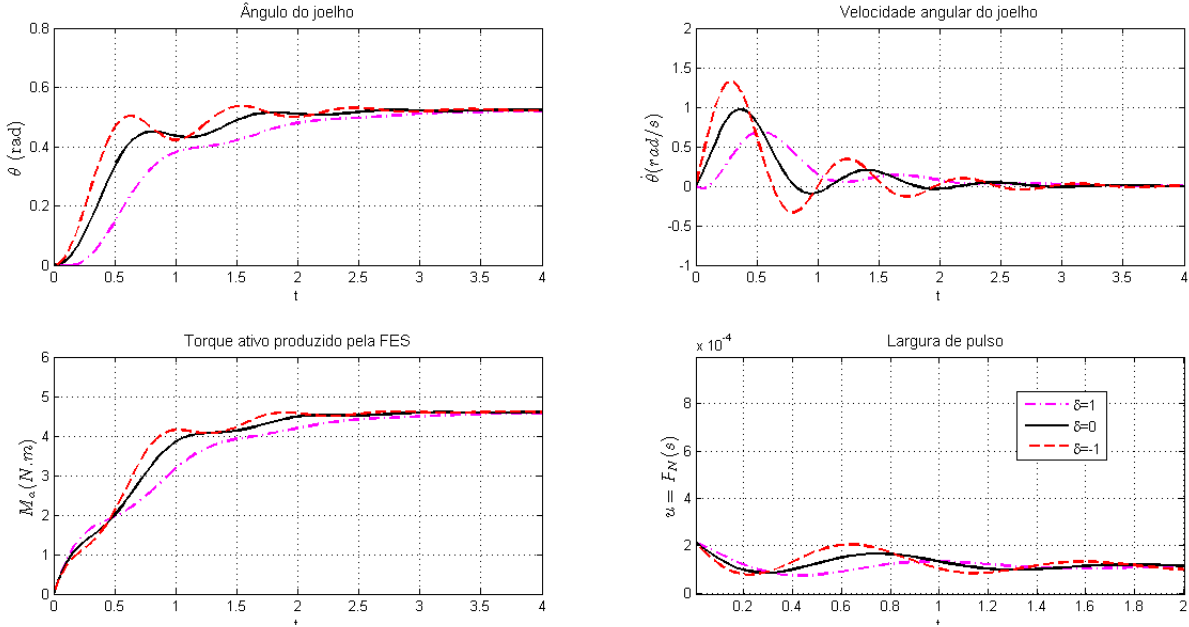
O ângulo do joelho, em ambas as tabelas, começa próximo de  $0^\circ$ , correspondendo a  $\Delta x_1 = \theta_{\nu 0} = -\frac{\pi}{6} = -0.5236[rad]$ , e estabiliza-se em em torno de  $0.45[rad]$ , no caso sem restrição de saída, e exatamente em  $0.52[rad]$ , no caso com restrição de saída.

A velocidade angular do joelho começa próximo de  $0[rad/s]$  e apresenta um máximo valor de ultrapassagem de  $1.35[rad/s]$  em  $0.60[s]$ , para  $\delta = 1$  e no caso sem restrição de saída. Já no caso com restrição de saída esse valor desce para  $1.31[rad/s]$  no mesmo período. A velocidade desce para  $0[rad/s]$  em  $3.80[s]$ , para ambos os casos de sem e com restrição de saída.

E o torque ativo produzido pelos estímulos inicia-se em  $0[N.m]$ , correspondendo a  $\Delta x_3 = M_{a0} = 4.6068$ , também é mostrada a resposta transitória da lei de controle do compensador dinâmico aplicado à dinâmica do paciente paraplégico, com  $\tilde{f}_{21max} = -21.7834$  e  $\tilde{f}_{21min} = -36.0085$  calculados pela Equação 4.8 e estado inicial dado na Tabela 6. Em ambos os casos estabiliza-se em torno de  $4.60[N.m]$  em  $3.80[s]$ .

Finalmente, a largura de pulso inicia-se em torno de  $1.10 \times 10^{-4}[s]$  e estabiliza-se em torno de  $1.07 \times 10^{-4}[s]$ , na melhor situação para o caso com restrição de saída.

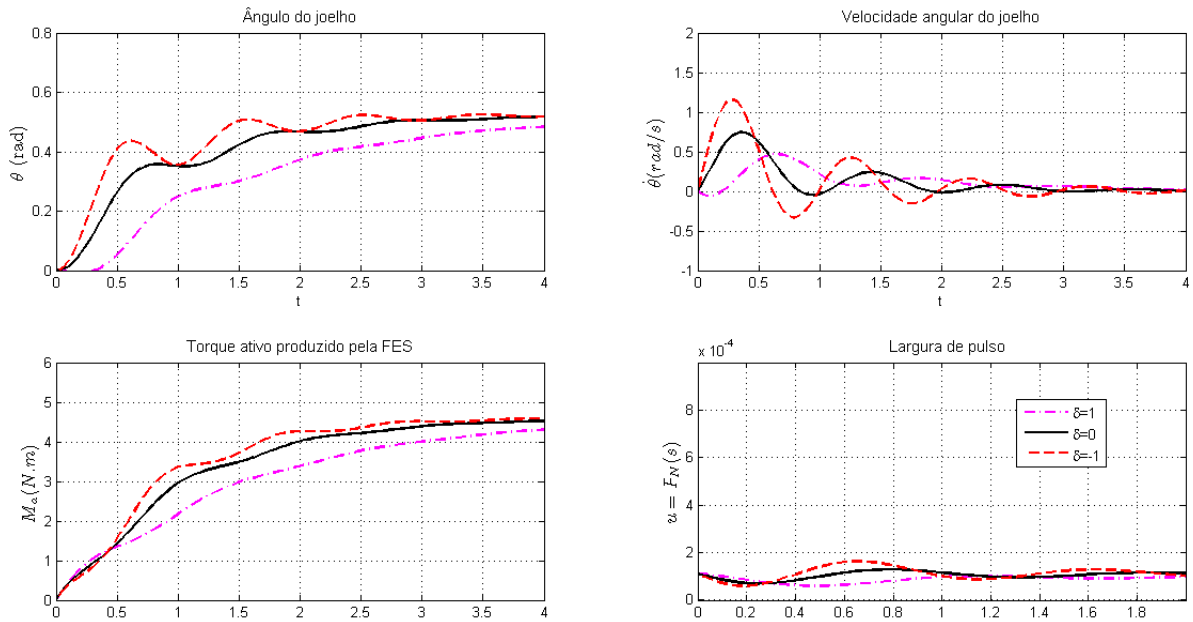
Figura 44 – Simulação das equações dinâmicas do modelo do paraplégico para o ponto de operação de  $30^\circ$ , sendo  $\tilde{f}_{21max} = -21.7834$  e  $\tilde{f}_{21min} = -36.0085$ , SEM restrição de saída .



Fonte: do próprio autor

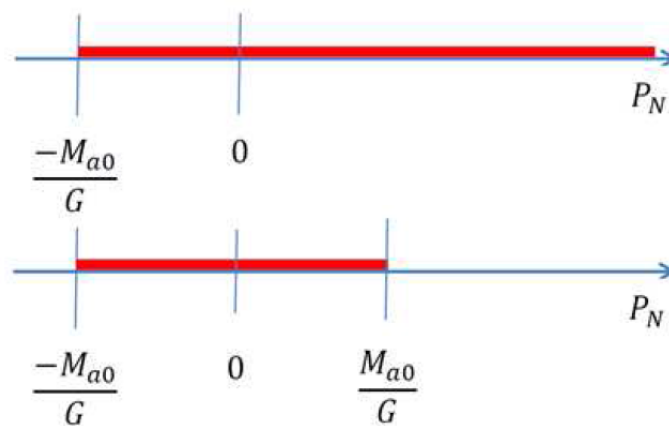
A Equação 4.5 mostra que é necessário que a largura de pulso satisfaça a condição  $P_N > -M_{a0}/G$ . Assim, a condição  $P_N > -M_{a0}/G$  foi substituída por  $|P_N| < -M_{a0}/G$  para permitir o uso das LMIs que determinam a restrição de saída. Na realidade qualquer valor de  $P_N$  maior do que a razão  $-M_{a0}/G$  satisfaz a restrição. Contudo, a relação prévia implica que  $|P_N| < -M_{a0}/G$ , dessa maneira qualquer valor de  $P_N$  entre  $-M_{a0}/G$  e  $M_{a0}/G$  satisfaz os requisitos, como mostrado na Figura 46. Considerando-se o valor da relação  $M_{a0}/G = (4.6068/42500) = 1.08 \times 10^{-4}[s]$  constata-se que ela está dentro do intervalo estabelecido.

Figura 45 – Simulação das equações dinâmicas do modelo do paraplégico para o ponto de operação de  $30^\circ$ , sendo  $\tilde{f}_{21max} = -21.7834$  e  $\tilde{f}_{21min} = -36.0085$ , COM restrição de saída.



Fonte: do próprio autor

Figura 46 – Intervalo de restrição para a largura de pulso mínima.



Fonte: do próprio autor

Tabela 9 – Parâmetros de entrada e de saída obtidos experimentalmente para o caso de simulação com restrição na saída, considerando os parâmetros da Tabela 6 e utilizados na Figura 45

Parâmetro	Valores
Matriz característica $A + \delta A$ ( $\delta = 0$ )	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -28.8960 & -0.7459 & 2.7624 \\ 0 & 0 & -1.0515 \end{bmatrix}$
Matriz característica $A + \delta A$ ( $\delta = 1$ )	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -21.7834 & -0.7459 & 2.7624 \\ 11.7958 & -2.6918 & -2.4139 \end{bmatrix}$
Matriz característica $A + \delta A$ ( $\delta = -1$ )	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -36.0086 & -0.7459 & 2.7624 \\ 11.7958 & -2.6918 & -2.4139 \end{bmatrix}$
Matriz de entrada $B$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 44690 \end{bmatrix}'$
Matriz de saída $C$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz $D$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
Matriz $L$	$\begin{bmatrix} 0 & 7.1126 & 0 \end{bmatrix}'$
Matriz $R_A$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz $R_B$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
Matriz $\Delta = \delta$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & e & -1 \end{bmatrix}$
Matriz $\delta A = L \cdot \Delta \cdot R_A$	$0, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7.1126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7.1126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz de realimentação $K$	$10^{-3} \times \begin{bmatrix} -0.2639 & 0.0602 & 0.0305 \end{bmatrix}$
Polos em malha fechada	
$\delta = 0$	$-1.0627 \pm 5.8995i$ e $-1.0343$
$\delta = 1$	$-1.2390 \pm 5.2721i$ e $-0.6818$
$\delta = -1$	$-0.9457 \pm 6.4770i$ e $-1.2681$
Variável escalar Lema 1.14.2.	$\epsilon = 4.2263$
Fator de restrição de saída, $\lambda_0$ , LMI 1.130.	$\lambda_0 = \sqrt{\mu} = \sqrt{46.2651} = 6.8018$

Fonte: do próprio autor.



Tabela 10 – Pontos notáveis observáveis na Figura 44, simulação COM restrição de saída. Para cada parâmetro de entrada e saída são examinadas três curvas, a saber: para  $\delta = 1$ ,  $\delta = 0$  e  $\delta = -1$ , conforme legenda.

Parâmetro	Valores
Largura de pulso:	$1.10 \times 10^{-4}[s]$ em $0[s]$ ; estabiliza em $1.07 \times 10^{-4}[s]$ em $3.00[s]$ . $1.10 \times 10^{-4}[s]$ em $0[s]$ ; estabiliza em $1.10 \times 10^{-4}[s]$ em $2.76[s]$ . $1.10 \times 10^{-4}[s]$ em $0[s]$ ; estabiliza em $1.07 \times 10^{-4}[s]$ em $3.00[s]$ .
Ângulo do joelho:	$0.50[rad]$ em $0.60[s]$ ; estabiliza em $0.52[rad]$ em $3.75[s]$ . $0.45[rad]$ em $0.80[s]$ ; estabiliza em $0.52[rad]$ em $3.65[s]$ . $0.40[rad]$ em $1.20[s]$ ; estabiliza em $0.52[rad]$ em $4.00[s]$ .
Velocidade angular:	$1.31[rad/s]$ em $0.30[s]$ ; estabiliza em $0[rad/s]$ em $3.80[s]$ . $0.98[rad/s]$ em $0.35[s]$ ; estabiliza em $0[rad/s]$ em $3.80[s]$ . $0.70[rad/s]$ em $0.52[s]$ ; estabiliza em $0[rad/s]$ em $3.80[s]$ .
Torque:	$4.15[N.m]$ no tempo de $1.00[s]$ ; estabiliza em $4.60[N.m]$ em $3.80[s]$ . $4.08[N.m]$ no tempo de $1.30[s]$ ; estabiliza em $4.60[N.m]$ em $3.80[s]$ . $4.00[N.m]$ no tempo de $1.65[s]$ ; estabiliza em $4.58[N.m]$ em $3.80[s]$ .

Fonte: do próprio autor.

## 7.2 Conclusão Parcial: Capítulo 7

No Capítulo 6 é utilizada uma metodologia de incertezas paramétricas politópicas ao passo que, neste capítulo, é utilizada uma abordagem diferente, incertezas paramétricas limitadas em norma. Neste caso, no programa para cálculo das matrizes de realimentação, tanto no caso sem restrição quanto no caso com restrição, a primeira LMI utiliza os valores nominais da matriz característica  $A$  e da matriz  $L$  e não os vértices de um politopo. Só depois que a solução foi obtida é que se verifica o caso nominal ( $\delta = 0$ ) e os casos extremos ( $\delta = 1$  e  $\delta = -1$ ). Ou seja, na abordagem por incertezas paramétricas limitadas em norma, as incertezas estão em  $\delta A = L \cdot \Delta \cdot RA$ .

Tanto no caso sem restrição quanto no caso com restrição percebe-se pelos gráficos de saída do sistema que a largura de pulso se estabiliza dentro da faixa dos limites teóricos estabelecidos na Figura 6. Pelos valores das Tabelas 8 e 10 verifica-se que o caso com restrição de saída encaixa-se melhor nos intervalos teóricos estabelecidos do que o caso sem restrição de saída. Todavia, a inclusão da restrição de saída ainda é conservadora, demandando uma abordagem mais eficaz.

As Tabelas 8 e 10 mostram que os resultados confirmam a prática de que o torque estabiliza-se no seu valor máximo num tempo igual àquele que permite a estabilização em zero da velocidade angular. As tabelas mostram também que o ângulo de estabilização do posicionamento final do joelho do paciente paraplégico alcança os  $30^\circ$  inicialmente esperado.

## 8 Conclusão Geral

De acordo com o Capítulo 6, a modelagem de uma cadeira de rodas pode ser dividida em duas partes principais: o modelo da parte dinâmica, que tem como entrada as velocidades de referência,  $u_{ref}$  e  $\omega_{ref}$ , e como saída as velocidades linear,  $u$ , e angular,  $\omega$ , da cadeira; o modelo da parte cinemática, que tem como entrada as saídas da parte dinâmica e fornece como saídas as variáveis de posicionamento da cadeira  $x$ ,  $y$  e  $\Psi$ . Ambos os modelos, no entanto, acabam sendo uma aproximação da planta real apresentando incertezas paramétricas que precisam ser tratadas. Por outro lado, constata-se que os modelos são não-lineares e a abordagem matemática se torna complexa e uma linearização do modelo em torno de um ponto de equilíbrio é necessária para tratar essa complexidade.

Concentrando-se na parte dinâmica da planta foi proposto inicialmente um modelo linear dinâmico simplificado de um VRTD. Verificou-se que esse modelo dinâmico simplificado permitia o estudo da cadeira de rodas num nível baixo, encontrando um modelo que relaciona as velocidades linear  $V$  e angular  $\Omega$  com as velocidades angulares no eixo dos motores direito,  $\omega_r$ , e esquerdo,  $\omega_l$ , considerando apenas dois parâmetros o raio das rodas,  $r$ , e a distância entre as rodas,  $d$ .

Partindo-se de um modelo implementado no Simulink® e de um modelo em espaço de estados, foi estudado um projeto de estabilização para a cadeira utilizando-se controladores PI e P. Contudo, esse modelo era muito simples e não permitia considerar como os movimentos do cadeirante influenciava na estabilidade do veículo.

Estes fatos direcionaram os esforços na utilização de métodos matemáticos envolvendo incertezas paramétricas politópicas e incertezas limitadas em norma utilizando LMIs para estudar a estabilidade do sistema em face das incertezas consideradas. Optou-se então pelo projeto de um controlador robusto capaz de estabilizar o sistema, mesmo em face de incertezas. A busca por uma solução adequada levou à utilização da metodologia conhecida como síntese de sistemas ERP utilizando LMIs. Foram estudados vários modelos de um VRTD optando-se pelo modelo de [De La CRUZ, BASTOS e CARELLI \(2011\)](#) que se mostrou bastante completo, pois levou em conta vários parâmetros físicos da cadeira e também as incertezas inerentes ao mesmo.

Como o modelo resultante era não-linear, desprezando-se o vetor de distúrbios, a matriz não-linear original foi substituída pela matriz Jacobiana da função obtendo-se um modelo linearizado. Em seguida, foi determinada a matriz de realimentação,  $K_o$ , que garantia a estabilidade do modelo dinâmico.

No caso da estabilização do posicionamento final do joelho do paciente paraplégico, verifica-se que o pulso de estimulação elétrica funcional aplicado no músculo quadríceps

constitui-se na entrada da planta. A saída, por sua vez, é constituída pelo ângulo da perna do paciente paraplégico, que varia até um limite definido pelas condições do paciente. Assim, o objetivo inicial foi alcançado: foi obtida uma matriz de realimentação de estados,  $K$ , considerando incertezas limitadas em norma, de modo que o sistema em questão se torne estável.

Para que a largura de pulso não assuma valores negativos, como aconteceu em vários estudos realizados pelo autor, devem ser impostas restrições na entrada, como mostrado na Figura 46, para impedir tal fato.

As saídas de simulação resultantes mostradas na 45 são idênticas àquelas obtidas por GAINO (2009) nas mesmas condições. Aqui os resultados de simulação foram obtidos utilizando uma restrição imposta na saída por um fator  $\lambda_0 = 6.8018$ . E os valores da variável escalar são  $\epsilon = 12.7728$  e  $\epsilon = 4.2263$ , para os casos sem e com restrição de saída, respectivamente, conforme podem ser verificados pelas Figuras 44 e 45. Como consequência, a oscilação foi eliminada do gráfico da largura de pulso, estabilizando em valores de  $P_N$  muito próximos uns dos outros nas simulações.

Mesmo quando se busca um modelo mais completo não-linear, há a necessidade de diminuir a complexidade inerente ao sistema desprezando-se algumas características físicas do modelo, como os distúrbios por exemplo.

Constata-se que o método de projeto do controlador envolvendo incertezas paramétricas politópicas e LMIs, utilizado no caso do modelo dinâmico simplificado de um VRTD, foi bem sucedido, pois as LMIs são factíveis uma vez que se encontrou uma resposta para  $K$ .

Para as plantas com realimentação de saída, via matriz de realimentação  $K$ , todos os pontos de testes escolhidos dentro do politopo considerado apresentaram autovalores com a parte real negativa. Portanto, o sistema é estável, independentemente dos valores dos parâmetros incertos, o que é garantido pela factibilidade das LMIs utilizadas.

Os gráficos das respostas transitórias das velocidades linear e angular a uma entrada em degrau unitário também mostram que todas as curvas se estabilizam em um tempo abaixo de 20[s].

Os objetivos iniciais dos projetos foram alcançados uma vez que as matrizes de realimentação de estado  $K$ , utilizando incertezas paramétricas politópicas, foram obtidas para cada sistema em particular tornando os sistemas realimentado estáveis.

No caso do controle robusto do ângulo da articulação do joelho do paciente paraplégico, o controle projetado é capaz de fazer com que a perna do paciente se mova do descanso até um ângulo desejado e, uma vez que a estimulação do controlador é removida, a perna volta à situação de repouso pela gravidade.

## 8.1 Sugestões para trabalhos futuros

O projetar do controle robusto do ângulo da articulação do joelho do paciente paraplégico incluindo uma taxa de decaimento para controlar a velocidade da resposta transitória, permitindo um tempo de recuperação mais curto, como em (GAINO, 2009).

Utilizar a mesma abordagem desenvolvida com auxílio de LMIs em presença de incertezas paramétricas politópicas, mostrada no Capítulo 6, para projetar o controlador robusto para a parte cinemática do veículo sobre rodas com tracionamento diferencial.

Utilizar a metodologia aqui apresentada para estudar a estabilidade robusta do Helicóptero 3-DOF da Quanser, em presença de incertezas e distúrbios. A existência da planta representada pelo modelo de bancada, disponibilizado pela Quanser, permite que o modelo, utilizando técnicas de LMIs e incertezas paramétricas politópicas, possa ser simulado em ambiente Matlab®e, posteriormente, validado no modelo de bancada da Quanser.

## 8.2 Artigos publicados, apresentados e submetidos

Publicado em co-autoria: ROSSINI, F. L.; MOUTINHO, N. M. S.; GAINO, R.; COVACIC, M. R.. Projeto de controlador robusto aplicado à cadeira de rodas móveis via abordagem por LMIs. In: XIX CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 2012, Campina Grande. *Anais...* Campina Grande, 2012. p. 2966-2972.

Publicado em autoria e apresentado em Congresso: MOUTINHO, N. M. S.; ROSSINI, F. L.; COVACIC, M. R.; GAINO, R. Controle robusto de veículo sobre plataforma com rodas e tração diferencial utilizando LMIs. In: XI SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 2013, Fortaleza, Ceará, Brasil. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2013. Disponível em: <<http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/4737.pdf>>. Acesso em: 30 nov. 2013.

Manuscrito Submetido, sob número 736246, em autoria: MOUTINHO, N. M.; GAINO, R.; COVACIC, M. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARVALHO, A. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. and SANCHES, A. A.. Robust Control of the Knee Joint Angle of Paraplegic Patients Considering Norm-bounded Uncertainties. Submetido ao periódico *Mathematical Problem in Engineering*. Publisher: Hindawi Publishing Corporation. URL: <http://www.hindawi.com>. Acesso em: 10 dez. 2014.



## Referências

- ALLEN, R.; KLEE, H. *Simulation of Dynamic Systems with MATLAB and Simulink*. 2. ed. Boca Raton, Florida, EUA: Taylor and Francis Group, LLC, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 33, 41, 42, 43 e 44.
- ANDERSON, B. D. O. A simplified viewpoint of hyperstability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New South Wales, Austrália, v. 13, n. 3, p. 292–294, jun. 1968. Citado 3 vezes nas páginas 90, 91 e 93.
- ANTWERP, J. G. V.; BRAATZ, R. D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, Oxford, England, v. 10, p. 363–385, mai. 2000. Citado na página 75.
- ARSHAM, H. *Deterministic Modeling: Linear Optimization with Applications*. 1994. Disponível em: <<http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/partviii.htm#rCarpenterPr>>. Acesso em: 09 jul. 2014. Citado na página 43.
- BARBOSA, K. A. *Projeto de Filtros Robustos para Sistemas Lineares e Não Lineares*. 139 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, mai. 2003. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 85.
- BARBOSA, K. A.; TROFINO, A. Técnicas lmi para análise de sistemas com restrições algébricas no estado. *Sba Revista Controle e Automação*, Campinas, SP, v. 13, n. 1, p. 24–40, jan. e abr. 2002. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-17592002000100005&script=sci\\_arttext](http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-17592002000100005&script=sci_arttext)>. Acesso em: 25 set. 2014. Citado 3 vezes nas páginas 79, 88 e 89.
- BAZZO, W. A.; PEREIRA, L. T. V. *Introdução à engenharia: conceitos, ferramentas e comportamentos*. Florianópolis: Editora da UFSC, 2006. 250 p. Citado 3 vezes nas páginas 33, 43 e 44.
- BIOMECÂNICA Global. *FisioWeb WGate*, São Paulo, 2001. Disponível em: <<http://www.wgate.com.br/conteudo/medicinaesaude/fisioterapia/biomecnica.htm>>. Acesso em: 20 ago. 2014. Citado na página 131.
- BOHORQUEZ, I. J. R.; de SOUZA, M. N.; PINO, A. V. Influência de parâmetros da estimulação elétrica funcional na contração concêntrica do quadríceps. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, Uberlândia, MG, v. 29, n. 2, p. 153–165, FEV. 2013. Disponível em: <<http://rbeb.org.br/files/v29n2/v29n2a04.pdf>>. Acesso em: 08 dez. 2014. Citado na página 39.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo, SP, Brasil: Editora HARBRA Ltda., 1986. Citado 3 vezes nas páginas 66, 72 e 73.
- BOYD, S. P. et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. In: *SIAM Studies in Applied Mathematics Society for Industrial and Applied Mathematics*. Philadelphia, PA, EUA: [s.n.], 1994. v. 15, p. 205. Citado 13 vezes nas páginas 33, 34, 66, 67, 70, 71, 72, 76, 77, 78, 97, 99 e 100.

BOYD, S. P.; VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. 7. ed. New York, NY, EUA: Cambridge University Press, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 70, 75 e 76.

BUZACHERO, L. F. S. *Otimização de Controladores Robustos de Sistemas Dinâmicos Sujeitos a Falhas Estruturais*. 74 p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, mar. 2010. Citado 4 vezes nas páginas 77, 79, 99 e 100.

BUZACHERO, L. F. S. et al. Resultados menos conservadores para o projeto de controladores robustos ótimos de sistemas dinâmicos incertos. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, X., 2011, São João del-Rei, Minas Gerais, Brasil. São João del-Rei: Universidade Federal de São João del-Rei, 2011. Disponível em: <<http://www.sba.org.br/rsv/SBAI/SBAI2011/82460.pdf>>. Acesso em: 30 ago. 2014. Citado na página 77.

CAMPOS, M. C. M. M.; TEIXEIRA, H. C. G. *Controles típicos de equipamentos e processos industriais*. São Paulo, SP: Editora Blücher, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 61, 62 e 63.

CELESTE, W. C. et al. Modelo dinâmico e controle de uma cadeira de rodas autônoma para pessoas com deficiência motora severa. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, VIII., 2007, Florianópolis, SC. Florianópolis, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 19, 117 e 121.

COCIAN, L. F. E. *Engenharia - Uma Breve Introdução*. Canoas, RS: Universidade Luterana do Brasil, 2003. Citado na página 37.

COLMENARES, W.; GONZÁLEZ, N. *Apuntes sobre Control Robusto y Multiobjetivos de Sistemas*. 1. ed. Caracas, Venezuela: Editorial Equinócio, Universidad Simón Bolívar, 2005. Citado na página 86.

CONFEA. *Tabela de Títulos Profissionais Resolução 473/02*. Conselho Federal de Engenharia e Arquitetura, 2012. Disponível em: <[http://www.crea-sc.org.br/portal/arquivosSGC/Titulos\\_Profissionais\\_05Jul2012.pdf](http://www.crea-sc.org.br/portal/arquivosSGC/Titulos_Profissionais_05Jul2012.pdf)>. Acesso em: 08 dez. 2014. Citado na página 38.

COVACIC, M. et al. Síntese de sistemas estritamente reais positivos através do critério de routh-hurwitz. *Revista Sba Controle e Automação*, Campinas, SP, v. 21, n. 3, p. 427–434, mai./jun. 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-17592010000300001>>. Acesso em: 28 jul. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 90 e 92.

COVACIC, M. R. *Controle Automático com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI*. 116 p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, jul. 2001. Citado 7 vezes nas páginas 90, 91, 92, 93, 94, 96 e 126.

COVACIC, M. R. *Síntese de Sistemas ERP Baseada LMIs e Controle com Estrutura Variável*. 237 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, jul. 2006. Citado 9 vezes nas páginas 90, 91, 92, 93, 94, 95, 126, 136 e 203.

COVACIC, M. R. et al. Sistemas erp com compensadores dinâmicos para controle da posição angular da perna de pacientes paraplégicos. In: CONGRESSO BRASILEIRO



DE AUTOMÁTICA, XVIII., 2010, Bonito, MS. Bonito, 2010b. p. 1700–1707. Citado na página 90.

COVACIC, M. R. et al. Lmi based algorithm for strictly positive real systems with static output feedback. *Systems and Control Letters*, v. 61, p. 521–527, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 92, 99 e 100.

CRUSIUS, C. A. R. *Formulação LMI para Problemas de Performance e Robustez*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, SC, mai. 1996. Citado 6 vezes nas páginas 67, 70, 72, 83, 85 e 86.

da Silva, P. S. P. *Controle Multivariável*. 2013. Disponível em: <<http://www.lac.usp.br/~paulo/pee513.html>>. Acesso em: 09 jan. 2015. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 59.

D'AZZO, J.; HOUPIS, C. *Linear Control System Analysis and Design with Matlab*. Fifth. New York, USA: Marcel Dekker, Inc., 2003. Citado 4 vezes nas páginas 47, 48, 51 e 54.

De La CRUZ, C. C.; BASTOS, T. F.; CARELLI, R. Adaptive motion control law of a robotic wheelchair. *Control Engineering Practice*, Elsevier Science Ltd., v. 19, n. 2, p. 113–125, 2011. Citado 13 vezes nas páginas 16, 19, 33, 115, 117, 119, 120, 121, 151, 161, 183, 184 e 203.

De La CRUZ C. C. E CARELLI, R. Dynamic modeling and centralized formation control of mobile robots. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY, IECON, XXXII., 2006, Paris, FR. Paris, 2006. p. 3880–3885. Citado na página 183.

de OLIVEIRA, L. K.; BERRETTA, R. Uma abordagem baseada em relaxação lagrangiana e busca tabu para o problema de dimensionamento de lotes multiestágio. *GEPROS, Gestão da Produção Operações e Sistemas*, v. 4, p. 77–94, 2007. Disponível em: <[revista.feb.unesp.br/index.php/gepros/article/download/170/123](http://revista.feb.unesp.br/index.php/gepros/article/download/170/123)>. Acesso em: 22 set. 2014. Citado na página 78.

de OLIVEIRA, M. C. Novos testes de estabilidade para sistemas lineares. *Revista Controle e Automação*, Campinas, SP, v. 15, n. 1, p. 17–23, fev. e mar. 2004. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ca/v15n1/a04v15n1.pdf>>. Acesso em: 24 set. 2014. Citado na página 79.

de SOUZA, S. R. *Análise Conveza Aplicada a Sistemas Dinâmicos Contínuos*. 253 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica, Departamento de Telemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, jun. 1994. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000076386>>. Acesso em: 08 out. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 83.

DIOGO, D. N. T. P. et al. Modelo fuzzy takagi-sugeno para controle do ângulo de articulação do joelho de pacientes paraplégicos. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas*, Universidade Estadual de Londrina, v. 33, n. 2, p. 215–218, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 19, 39, 133 e 134.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Modern Control Systems*. Eleventh. Upper Saddle River, NJ, EUA: Pearson Education International, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.

- ERKUS, B. *Dissipativity and Performance Analysis of Semiactive Systems with Smart Dampers*. 197 p. Tese (Doutorado) — Faculty of the Graduate School, University of Southern California, California, USA, May. 2006. Citado na página 75.
- ESPINOSA, F. et al. Advanced and intelligent control techniques applied to the drive control and path tracking systems on a robotic wheelchair. *Autonomous Robots*, n. 11, p. 137–148, 2001. Citado na página 115.
- FERRARIN, M.; PEDOTTI, A. The relationship between electrical stimulus and joint torque: a dynamic model. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, San Diego, v. 8, n. 3, p. 342–352, jan./mar. 2000. Citado 5 vezes nas páginas 19, 131, 132, 133 e 134.
- FERREIRA, C. L. L.; CERVANTES, S. G. S.; GERMANOVIX, W. Cadeira de rodas controlada por sopro e sucção. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, XVII., 2008, Paris, FR. Juiz de Fora, 2008. p. 3880–3885. Disponível em: <[http://www.uel.br/pessoal/silvia/?page\\_id=29](http://www.uel.br/pessoal/silvia/?page_id=29)>. Acesso em: 02 jun. 2014. Citado 3 vezes nas páginas 103, 104 e 105.
- GACS. *Yalmip*. GACS-Grupo de Automação e Controle de Sistemas, 1996. Disponível em: <<http://www.feng.pucrs.br/~gacs/new/disciplinas/ppgee/crobusto/apostilas/aula03/yalmip.pdf>>. Acesso em: 07 nov. 2014. Citado na página 68.
- GAHINET, P. et al. *LMI Control Toolbox User's Guide*. Natick, MA, USA, 1995. Citado na página 94.
- GAIER, R. V. Expectativa de vida no brasil passa a 73,2 anos, diz ibge. *Estadão Online*, São Paulo, 01 dez. 2010. Disponível em: <<http://www.estadao.com.br/noticias/geral,expectativa-de-vida-no-brasil-passa-a-732-anos-diz-ibge,647908,0.htm>>. Acesso em: 03 jul. 2014. Citado na página 103.
- GAINO, R. *Controle de movimentos de pacientes paraplégicos utilizando modelos Fuzzy T-S*. 182 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, jul. 2009. Citado 13 vezes nas páginas 33, 39, 40, 41, 99, 100, 132, 133, 134, 135, 153, 162 e 163.
- GAINO, R. et al. Reguladores e observadores fuzzy takagi-sugeno para variar o ângulo da articulação do joelho de um paciente paraplégico. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, VIII., 2007, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2007. Disponível em: <<http://www.sbai2007.das.ufsc.br/arquivos/programa-sbai2007.pdf>>. Acesso em: 30 ago. 2014. Citado na página 133.
- GAINO, R. et al. Controle não-linear takagi-sugeno do movimento de paraplégicos utilizando acelerômetros. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, XXI., 2008, Salvador, Ba. Salvador, 2008. p. 1254–1257. Citado 4 vezes nas páginas 132, 133, 134 e 135.
- GAINO, R. et al. Realimentação derivativa e modelo fuzzy takagi-sugeno para controle da articulação do joelho de pacientes paraplégicos com uso de acelerômetros. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, Uberlândia, v. 27, n. 2, p. 67–78, jan./mar. 2011. Disponível em: <<http://www.rbeb.org.br/files/v27n2/v27n2a1.pdf>>. Acesso em: 02 jun. 2014. Citado 5 vezes nas páginas 19, 131, 132, 133 e 134.

GEROMEL, J. C.; OLIVEIRA, M. C.; HSU, L. Proceedings of the american control conference. In: LMI CHARACTERIZATION OF STRUCTURAL AN ROBUST STABILITY, 1999, San Diego, California, USA. San Diego, CA: International Federation of Automatic Control, 1999. p. 1888–1892. Citado na página 67.

GIL, M. *O que as empresas podem fazer pela inclusão das pessoas com deficiência*. São Paulo, SP, Brasil: Instituto Ethos, 2002. Disponível em: <<http://www3.ethos.org.br/cedoc/o-que-as-empresas-podem-fazer-pela-inclusao-das-pessoas-com-deficiencia-maio2002/#.U7WhlPldWSo>>. Acesso em: 02 jun. 2014. Citado na página 103.

GODINHO, F. A. F. B. *Uma nova abordagem para a formação em engenharia de reabilitação em Portugal*. 229 p. Tese (Doutorado) — Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Trás-os-Montes e Alto Douro, Pt, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.

GOMIDE, F. *IA881 Otimização Linear*. 2007. Disponível em: <<http://www.dca.fee.unicamp.br/~gomide/courses/IA881/transp/IA881ApresentacaoCurso.pdf>>. Acesso em: 09 jul. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

IBGE. Censo 2010: população do brasil é de 190.732.694 pessoas. Rio de Janeiro, 29 nov. 2010. Disponível em: <<http://censo2010.ibge.gov.br/noticias-censo?view=noticia&id=1&idnoticia=1766&t=censo-2010-populacao-brasil-190-732-694-pessoas>>. Acesso em: 16 jul. 2014. Citado na página 103.

JÖNSSON, U. T. A lecture on the s-procedures. Stockholm, Sweden, mai. 2006. Disponível em: <[www.math.kth.se/~uj/5B5746/Lecture.ps](http://www.math.kth.se/~uj/5B5746/Lecture.ps)>. Acesso em: 20 set. 2014. Citado na página 78.

KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Third. Upper Saddle River, NJ, EUA: Prentice Hall, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 91.

KRISHNAMURTHY, G.; GHOVANLOO, M. A tongue operated magnetic sensor based wireless assistive technology for people with severe disabilities. International Symposium on Circuits and Systems, Raleigh, NC, USA, p. 5551–5554, May 2006. Citado na página 105.

LEITE, V. J. S. et al. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Sba Revista Controle e Automação*, Campinas, SP, v. 16, n. 1, p. 24–40, jan., fev. e mar. 2004. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?pid=s0103-17592004000100005&script=sci\\_arttext](http://www.scielo.br/scielo.php?pid=s0103-17592004000100005&script=sci_arttext)>. Acesso em: 12 set. 2014. Citado na página 75.

LOPES, J. *Controle Preditivo Robusto baseado em Desigualdades Matriciais Lineares aplicado a um Sistema de Tanques Acoplados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, FEV. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 96.

LU, R. et al. Robust h2 control for descriptor system based on new bounded real lemma. *Circuits, Systems and Signal Processing*, Birkhäuser, Boston, MA, USA, v. 28, n. 6, p. 869–882, nov. 2009. Citado 4 vezes nas páginas 88, 96, 97 e 98.

MAKSSOUD, H. E.; GUIRAUD, D.; POIGNET, P. Mathematical muscle model for functional electrical stimulation control strategies. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 2004, Barcelona, Espanha. Barcelona, 2004. v. 2, p. 1282–1287. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 132.

- MARTINS, F. N. et al. An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking. *Control Engineering Practice*, Elsevier Science Ltd., v. 16, n. 11, p. 1354–1363, 2008. Citado 9 vezes nas páginas 16, 19, 116, 117, 118, 119, 121, 183 e 184.
- MAXWELL, J. C. On governors. *Proceeding of Royal Society of London*, London, v. 16, n. 100, p. 270–283, mar. 1868. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- MAZO, M. et al. Electronic control for a wheel-chair guided by oral commands and ultrasonic and infrared sensors. In: ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN REAL TIME CONTROL SYMPOSIUM, 1994, Valencia, Spain. Valencia: International Federation of Automatic Control, 1994. p. 249–254. Citado 5 vezes nas páginas 64, 104, 105, 106 e 108.
- MAZO, M. et al. Electronic control of a wheelchair guided by voice commands. *Control Engineering Practice*, Elsevier Science Ltd., v. 3, n. 5, p. 665–674, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 64, 65, 103 e 104.
- MOUTINHO, N. M. S. et al. Controle robusto de veículo sobre plataforma com rodas e tração diferencial utilizando lmis. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, XI., 2013, Fortaleza, Ceará, Brasil. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2013. Disponível em: <<http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/4737.pdf>>. Acesso em: 30 nov. 2013. Citado na página 123.
- NISE, N. S. *Engenharia de Sistemas de Controle*. Quinta. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2009. Citado 6 vezes nas páginas 47, 50, 51, 52, 57 e 58.
- OGATA, K. *Modern Control Engineering*. 5th. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. Citado 8 vezes nas páginas 47, 48, 49, 50, 51, 56, 57 e 58.
- OLIVEIRA, R.; PERES, P. Análise e controle de sistemas lineares por meio de desigualdades matriciais lineares. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, XVIII., 2010, Bonito, Mato Grosso do Sul. Bonito: Universidade Estadual Paulista e Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 67, 69, 70, 73, 75 e 86.
- PALHARES, R. M.; GONÇALVES, E. N. Desigualdades matriciais lineares em controle. In: AGUIRRE, L. (Ed.). *Enciclopédia de Automática: Controle e Automação*. 1. ed. São Paulo, SP, Brasil: Editora BLUCHER, 2007. v. 1, p. 155–195. Citado 7 vezes nas páginas 66, 67, 71, 73, 74, 75 e 76.
- PEREIRA, P. S. Controlabilidade e observabilidade. In: AGUIRRE, L. (Ed.). *Enciclopédia de Automática: Controle e Automação*. 1. ed. São Paulo, SP, Brasil: Editora BLUCHER, 2007. v. 2, p. 92–107. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.
- PETERSON, E. H. *A Mensagem: Bíblia em Linguagem Contemporânea*. 1. ed. São Paulo, SP: Editora Vida, 2011. Citado na página 9.
- REGIS FILHO, L. *Filtragem Ótima Robusta em Sistemas Dinâmicos*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade de Campinas, CAMPINAS, SP, mai. 2004. Citado na página 100.
- ROBERTS, M. J. *Fundamentos em Sinais e Sistemas*. 1. ed. São Paulo, SP: McGraw-Hill Interamericana do Brasil Ltda., 2009. Citado na página 83.

- SAADATZI, M. N.; POSHTAN, J. Multivariable robust controller for linear and angular velocities of electrically-powered wheelchair using characteristic loci method. *IEEE International Conference on Control Applications*, Yokohama, Japan, p. 1246–1250, set. 2010. Citado na página 64.
- SILVA, P. Controlabilidade e observabilidade. In: AGUIRRE, L. (Ed.). *Enciclopédia de Automática: Controle e Automação*. 1. ed. São Paulo, SP, Brasil: Editora BLUCHER, 2007. v. 2, p. 92–107. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.
- SILVEIRA, M. A. Controle e automação: história e caracterização. In: AGUIRRE, L. (Ed.). *Enciclopédia de Automática: Controle e Automação*. 1. ed. São Paulo, SP, Brasil: Editora BLUCHER, 2007. v. 1, p. 24–39. Citado 5 vezes nas páginas 33, 44, 45, 46 e 47.
- SIQUEIRA, F. C. V. et al. Barreiras arquitetônicas a idosos e portadores de deficiência física: um estudo epidemiológico da estrutura física das unidades básicas de saúde em sete estados do Brasil. *Ciência e Saúde Coletiva*, Rio de Janeiro, v. 14, n. 1, p. 67–78, jan./fev. 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S1413-81232009000100009>>. Acesso em: 02 jun. 2014. Citado na página 103.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. 2. ed. Trondheim, Noruega: John Wiley and Sons, 2001. Citado 5 vezes nas páginas 79, 80, 81, 83 e 85.
- SLOTINE, J. J.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. 1. ed. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1991. Citado 4 vezes nas páginas 50, 51, 54 e 124.
- SOBRINHO, A. S. F. et al. Cadeira de rodas controlada por sopros e sucções. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas*, Universidade Estadual de Londrina, v. 21, n. 4, p. 3–7, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 103 e 105.
- SOBRINHO, A. S. F. et al. Implementação e análise do controle de uma cadeira de rodas através de sopros e sucções. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 6º., 2003, Bauru, SP. Bauru: Tec Art Editora, 2003. p. 775–780. Citado 10 vezes nas páginas 62, 64, 65, 103, 104, 107, 108, 109, 112 e 139.
- TEIXEIRA, M. C. M. et al. Design of a fuzzy takagi-sugeno controller to vary the joint knee angle of paraplegic patients. *Ciência e Saúde Coletiva*, Springer-Verlag, Hong Kong, China, v. 4234, n. III, p. 118–126, out. 2006. Disponível em: <[http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F11893295\\_14](http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F11893295_14)>. Acesso em: 02 jun. 2014. Citado na página 134.
- TORRES, D. *Redução de Vibrações de Vibrações Utilizando Múltiplos Sistemas Passivos de Absorção*. 94 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, Universidade Federal Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, set. 2010. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 96.
- VALENTI, P. *Leibniz, Papin and the Steam Engine: A Case Study Of British Sabotage of Science*. Schiller Institute Inc, 1996. Disponível em: <[http://www.schillerinstitute.org/educ/pedagogy/steam\\_engine.html](http://www.schillerinstitute.org/educ/pedagogy/steam_engine.html)>. Acesso em: 10 jul. 2014. Citado na página 45.
- VILLAÇA, M. V. M.; SILVEIRA, J. L. Uma breve história do controle automático. *Revista Ilha Digital*, Instituto Federal de Santa Catarina, v. 4, p. 3–12, 2013. ISSN 2177-2649. Citado 3 vezes nas páginas 44, 45 e 46.

XUE D. CHEN, Y.; ATHERTON, D. P. *Linear feedback control: analysis and design with Matlab*. Philadelphia, PA, EUA: SIAM Studies in Applied Mathematics Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. 368 p. Citado na página 61.

ZAK, S. H. *System and Control*. 1. ed. New York, NY, USA: Oxford University Press, 2003. Citado 6 vezes nas páginas 51, 53, 54, 55, 57 e 58.

ZHANG, Y.; CHUNG, J. H.; VELINSKY, S. A. Variable structure control of a differentially steered wheeled mobile robot. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Netherlands, v. 36, p. 301–304, jun. 2003. Citado na página 116.

ZHANG, Y. et al. Dynamic model based robust tracking control of a differentially steered wheeled mobile robot. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1998, Philadelphia, PA, USA. Philadelphia, PA, USA, 1998. p. 850–855. Citado 9 vezes nas páginas 16, 19, 105, 115, 116, 117, 118, 126 e 183.

# Apêndices





## Parte III

# Modelagem dinâmica linear simplificada de VRTD



# APÊNDICE A – Programas implementados em ambientes Matlab® e Simulink®

## A.1 Simulação com modelo da cadeira de rodas em espaço de estado. Fonte: do próprio autor.

```

% -----
% Programa para executar a simulação do controle da cadeira de rodas
% do modelo linear simplificado em equações de estado no Matlab
% -----

clear all; clc;

D = 0.7;      % Distância entre as rodas traseiras de acionamento
R = 0.15;    % Raio das rodas traseiras de acionamento
m = 0.1;     % Relação do Redutor de Engrenagens
T = 0.13;    % Constante de Tempo do Motor
K1 = 0.1750; % Constante Proporcional dos Controladores P
K2 = 0.18534; % Constante Proporcional dos Controladores PI
K = 24/pi;   % Ganho da Função de Transferência dos Motores
I = 4.8753;  % Constante Integral dos Controladores PI
A11 = (-K2*(K1+1)*K*m-1)/T;
A12 = 0;
A13 = K*m/T;
A14 = 0;
A21 = 0;
A22 = A11;
A23 = 0;
A24 = A13;
A31 = -I*(K1+1);
A32 = 0;
A33 = 0;
A34 = 0;
A41 = 0;
A42 = A31;
A43 = 0;
A44 = 0;
B11 = K2*K1*K*m/(R*T);
B12 = K2*K1*K*m*D/(2*R*T);
B21 = B11;
B22 = -B12;
B31 = I*K1/R;
B32 = I*K1*D/(2*R);
B41 = B31;
B42 = -B32;
C11 = 1;
C12 = 0;
C13 = 0;
C14 = 0;
C21 = 0;
C22 = 1;
C23 = 0;
C24 = 0;
D11 = 0;
D12 = 0;
D21 = 0;
D22 = 0;
A = [A11,A12,A13,A14;A21,A22,A23,A24;A31,A32,A33,A34;A41,A42,A43,A44];
B = [B11,B12;B21,B22;B31,B32;B41,B42];
C = [C11,C12,C13,C14;C21,C22,C23,C24];
D = [D11,D12;D21,D22];

```

```
t=0:0.2:13.8;
[num1,den1]=ss2tf(A,B,C,D,1);
[num2,den2]=ss2tf(A,B,C,D,2);
[y1t1,x1]=step(num1,den1);
[y2,t2,x2]=step(num2,den2);
for i=1:70
    V(i)      = y1(i,1);
    Omega(i) = y1(i,2);
end

for i=1:70
    wr(i) = y2(i,1);
    wl(i) = y2(i,2);
end

figure('Name','Resposta ao Degrau V=0 e Omega=1','NumberTitle','off')

subplot(2,1,1)
plot(t,V,'k-',t,wr,'b-.',t,wl,'b--','LineWidth',1.5);
title('Cadeira Vref=1 [m/s] e Omegaref=0 [rad/s]');
legend('V','wr','wl')
axis([-Inf 11.0 0 1.1])
ylabel('[rad/s], [m/s]');
xlabel('Tempo [s]');
grid on;
hold on;

subplot(2,1,2)
plot(t,Omega,'k-',t,wr,'b-.',t,wl,'b--','LineWidth',1.5);
title('Cadeira Vref=0 [m/s] e Omegaref=1 [rad/s]');
legend('Omega','wr','wl')
axis([-Inf 11.0 -0.5 1.1])
ylabel('[rad/s]');
xlabel('Tempo [s]');
grid on;
hold on;
```



## Parte IV

# Modelagem dinâmica não-linear simplificada de VRTD





# APÊNDICE B – Definições dos vetores paramétricos e de distúrbios

## B.1 Definição do vetor paramétrico e de distúrbio de Zhang

ZHANG et al. (1998) utiliza as definições dos componentes dos vetores paramétrico e de distúrbio mostrados nas equações de B.1 até B.6 a seguir.

$$\begin{aligned}\theta_u &= m \cdot R_t^2 + 2 \cdot I_e, \\ \theta_\omega &= I_e \cdot d^2 + 2 \cdot R_t^2 \cdot (I_z + m \cdot b^2),\end{aligned}\tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}\tau_u &= \frac{1}{2} \cdot [\tau_l + \tau_r], \\ \tau_\omega &= \frac{1}{2} \cdot [\tau_l - \tau_r],\end{aligned}\tag{B.2}$$

$$\delta_u = \frac{1}{\theta_u} \cdot \left[ m \cdot R_t^2 \cdot \omega \cdot v^s + R_t^2 \cdot (F_{x',c} + \eta_{x',e}) - B_e \cdot (2 \cdot u + u_l^s + u_r^s) - I_e \cdot (\dot{u}_l^s + \dot{u}_r^s) \right]\tag{B.3}$$

$$\delta_\omega = \frac{1}{\theta_\omega} \{ -B_e d^2 \omega - B_e d[u_l^s - u_r^s] - I_e d[\dot{u}_l^s - \dot{u}_r^s] - 2mR_t^2 v^s + R_t^2 [(b-e)\eta_{y',e} + (a+b)F_{y',c} + \tau_e] \}\tag{B.4}$$

$$\delta_x = -v^s \cdot \text{sen}\Psi\tag{B.5}$$

$$\delta_y = -v^s \cdot \text{cos}\Psi\tag{B.6}$$

## B.2 Definição do vetor de distúrbio de De La Cruz

ZHANG et al. (1998), De La CRUZ C. C. e CARELLI (2006), MARTINS et al. (2008), De La CRUZ, BASTOS e CARELLI (2011) utilizam o mesmo vetor de distúrbio  $\delta$  com pequenas variações. Como o modelo escolhido neste trabalho é de De La CRUZ,

BASTOS e CARELLI (2011) ele está definido nas equações de B.7 até B.11 (MARTINS et al., 2008; De La CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

$$\delta_u = \frac{1}{2} \cdot \theta_4 \cdot (u_r^s + u_l^s) + \frac{1}{2} \cdot \left( \theta_1 - \frac{R_a \cdot r \cdot m}{2 \cdot k_{PT} \cdot k_a} \right) \cdot (\dot{u}_r^s + \dot{u}_l^s) + \frac{R_a \cdot r}{2 \cdot k_{PT} \cdot k_a} \cdot (m \cdot \bar{u}^s \cdot \omega + F_{px'}), \quad (\text{B.7})$$

$$\delta_\omega = \delta_{o1} - c_{o5} \cdot \delta_u \quad (\text{B.8})$$

onde,

$$\begin{aligned} \delta_{o1} &= \delta_{o1a} + \delta_{o1b} + \delta_{o1c}, \\ \delta_{o1a} &= \frac{\theta_6}{d} \cdot (u_r^s - u_l^s) + \frac{c_{o3}}{2} \cdot (u_r^s - u_l^s) + \frac{c_{o2}}{2} \cdot (\dot{u}_r^s + \dot{u}_l^s), \\ \delta_{o1b} &= \left( \frac{c_{o1}}{d} - \frac{R_a \cdot r}{d^2 \cdot k_{PR} \cdot K_a} \cdot (b_1^2 \cdot m + I_z) \right) \cdot (\dot{u}_r^s - \dot{u}_l^s), \\ \delta_{o1c} &= \frac{R_a \cdot r}{d \cdot k_{PR} \cdot k_a} \cdot (\tau_p + b_1 \cdot F_{py'} - b_1 \cdot m \cdot \dot{u}^s), \\ c_{o1} &= \frac{k_{DR}}{k_{PR}} + \frac{R_a \cdot r}{d \cdot K_{PR} \cdot k_a} \cdot \left( \frac{I_e \cdot d^2}{2 \cdot r^2} + b_1^2 \cdot m + I_z \right), \\ c_{o2} &= \text{frac2} \cdot b_2 d \cdot k_{PR} \cdot \left( k_{DT} + \frac{R_a \cdot I_e}{k_a \cdot r} \right), \\ c_{o3} &= \text{frac2} \cdot b_2 d \cdot k_{PR} \cdot \left( k_{PT} + \frac{k_b}{r} + \frac{R_a \cdot B_e}{k_a \cdot r} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\delta_x = -\bar{u}^s \cdot \text{sen} \Psi \quad (\text{B.10})$$

$$\delta_y = \bar{u}^s \cdot \text{cos} \Psi \quad (\text{B.11})$$

# APÊNDICE C – Parâmetros do controlador robusto para um modelo não-linear de um VRTD

## C.1 Determinação dos elementos das matrizes lineares do VRTD

Fonte: do próprio autor.

### C.1.1 Determinação dos elementos da matriz A

1. Seja,

$$\alpha = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2 \cdot r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2 \cdot r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_7 \\ \theta_8 & \theta_1 \end{bmatrix}$$

2. Então:

$$A_{2 \times 2} = -\alpha \cdot \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cdot (\omega_r + \omega_l) \cdot \theta_4 - \frac{r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l)^2 \cdot \theta_3 \\ \frac{r^2}{2 \cdot d} \cdot (\omega_r^2 - \omega_l^2) \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_6 \end{bmatrix}$$

3. Transformando a matriz A por Lyapunov, vem:

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_r} = \frac{\partial}{\partial \omega_r} \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cdot (\omega_r + \omega_l) \cdot \theta_4 - \frac{r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l)^2 \cdot \theta_3 \\ \frac{r^2}{2 \cdot d} \cdot (\omega_r^2 - \omega_l^2) \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_l} = \frac{\partial}{\partial \omega_l} \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cdot (\omega_r + \omega_l) \cdot \theta_4 - \frac{r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l)^2 \cdot \theta_3 \\ \frac{r^2}{2 \cdot d} \cdot (\omega_r^2 - \omega_l^2) \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_6 \end{bmatrix}$$

4. Isto é:

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_r} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cdot \theta_4 - \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \\ \frac{r^2 \cdot \omega_r}{d} \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_l} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cdot \theta_4 + \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \\ -\frac{r^2 \cdot \omega_l}{d} \cdot \theta_5 - \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \end{bmatrix}$$

5. Então:

$$A_{2 \times 2} = -\alpha \cdot \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cdot \theta_4 - \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 & \frac{r}{2} \cdot \theta_4 + \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \\ \frac{r^2 \cdot \omega_r}{d} \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot \theta_6 & -\frac{r^2 \cdot \omega_l}{d} \cdot \theta_5 - \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \end{bmatrix}$$

6. Substituindo  $\alpha$  vem:

$$A_{2 \times 2} = -\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2 \cdot r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2 \cdot r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_7 \\ \theta_8 & \theta_1 \end{bmatrix} \times 1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cdot \theta_4 - \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 & \frac{r}{2} \cdot \theta_4 + \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \\ \frac{r^2 \cdot \omega_r}{d} \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot \theta_6 & -\frac{r^2 \cdot \omega_l}{d} \cdot \theta_5 - \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \end{bmatrix}$$

7. Finalmente:

$$A_{11} = -\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right] \left[ \frac{r}{2} \cdot \theta_4 - \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \right] -$$

$$\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_7 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right] \left[ \frac{r^2 \cdot \omega_r}{d} \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \right]$$

$$A_{12} = -\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right] \left[ \frac{r}{2} \cdot \theta_4 + \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \right] -$$

$$\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_7 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right] \left[ -\frac{r^2 \cdot \omega_l}{d} \cdot \theta_5 - \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \right]$$

$$A_{21} = -\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right] \left[ \frac{r}{2} \cdot \theta_4 - \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \right] -$$

$$\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_7 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right] \left[ \frac{r^2 \cdot \omega_r}{d} \cdot \theta_5 + \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \right]$$

$$A_{22} = -\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right] \left[ \frac{r}{2} \cdot \theta_4 + \frac{2 \cdot r^2}{d^2} \cdot (\omega_r - \omega_l) \cdot \theta_3 \right] -$$

$$\frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_7 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right] \left[ -\frac{r^2 \cdot \omega_l}{d} \cdot \theta_5 - \frac{r}{d} \cdot \theta_6 \right]$$

(C.1)

### C.1.2 Determinação dos elementos da matriz B

1. Seja:

$$B_{2 \times 2} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \cdot \theta_2 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 & \frac{1}{r} \cdot \theta_7 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \\ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 & \frac{1}{r} \cdot \theta_7 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \end{bmatrix}$$

2. Transformando a matriz  $B$  por Lyapunov, vem:

$$\frac{\partial f}{\partial u_{ref}} = \frac{\partial}{\partial u_{ref}} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{r} \cdot \theta_2 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right) \cdot u_{ref} + \left( \frac{1}{r} \cdot \theta_7 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right) \cdot \omega_{ref} \\ \left( \frac{1}{r} \cdot \theta_2 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right) \cdot u_{ref} + \left( \frac{1}{r} \cdot \theta_7 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right) \cdot \omega_{ref} \end{array} \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_{ref}} = \frac{\partial}{\partial \omega_{ref}} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{r} \cdot \theta_2 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right) \cdot u_{ref} + \left( \frac{1}{r} \cdot \theta_7 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right) \cdot \omega_{ref} \\ \left( \frac{1}{r} \cdot \theta_2 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right) \cdot u_{ref} + \left( \frac{1}{r} \cdot \theta_7 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right) \cdot \omega_{ref} \end{array} \right]$$

3. Ou seja:

$$\frac{\partial f}{\partial u_{ref}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \cdot \theta_2 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \\ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_{ref}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \cdot \theta_7 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \\ \frac{1}{r} \cdot \theta_7 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \end{bmatrix}$$

4. Então:

$$B_{2 \times 2} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \cdot \theta_2 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 & \frac{1}{r} \cdot \theta_7 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \\ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 & \frac{1}{r} \cdot \theta_7 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \end{bmatrix}$$

5. Finalmente:

$$B_{11} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right]$$

$$B_{12} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_7 + \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right]$$

$$B_{21} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_2 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_8 \right]$$

$$B_{22} = \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2 - \theta_7 \cdot \theta_8} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \theta_7 - \frac{d}{2 \cdot r} \cdot \theta_1 \right]$$



APÊNDICE D – Programas do  
Matlab® para determinação da matriz de  
realimentação do controle robusto do VRTD.

## D.1 Programa para determinação dos valores das matrizes dos vértices do politopo. Fonte: do próprio autor.

```

% -----
% Programa CalcMatCaractDeLaCruz45_deb1b2.m
% C:\Users\Nilson\Dropbox\QualificaçãoNilson_2014v3
% Modelo Dinâmico Cadeira de Rodas Motorizada
% Cálculo dos valores das Matrizes Característica e de Dados de DeLaCruz
% Este programa fornece as matrizes para o cálculo de Ko
% pelo programa SBAI2013_TestemalhaAbertaEFechada451_vf14082014
% que está em Dropbox\QualificaçãoNilson_2014v3
% -----
syms d b1 b2
clear;close all;clc

k_DT=0.1;
k_PT=1;
k_DR=0.1;
k_PR=1;
R_a=0.2;
k_a=1;
I_e=100;
I_z=150;
k_b=1;
B_e=5;
x_k=1;
y_k=1;
wl=0;
wr=0;

%Parâmetros Ajustáveis:

a=0.1;
m=80;
r=0.35;

%Pd1(0.40;0;0.151)
d=0.40;
b1=0;
b2=0.151; % b2<0 quando deslocamento é para direita

% Utilizando o Cálculo das Constantes Thetas via pag. 123-124 De La Cruz

theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*((2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a));
theta0_2=(k_DR/k_PR)+R_a*r*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
theta0_3=R_a*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a*r*m/(d*k_PR*k_a);

% Derivação das Matrizes Linearizadas por Lyapunov

```



```
gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);
beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);

B11=gama.*beta11;
B12=gama.*beta12;
B21=gama.*beta21;
B22=gama.*beta22;

Ad1=[A11 A12;A21 A22]
Bd1=[B11 B12;B21 B22]

%Pd2(0.40;0;-0.151)
d=0.40;
b1=0;
b2=-0.151; % b2<0 quando deslocamento é para direita

theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*((2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a));
theta0_2=(k_DR/k_PR)+R_a.*r.*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
theta0_3=R_a.*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a.*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a*r*m/(d*k_PR*k_a);

gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);
beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
```

```

alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);

B11=gama.*beta11;
B12=gama.*beta12;
B21=gama.*beta21;
B22=gama.*beta22;

Ad2=[A11 A12;A21 A22]
Bd2=[B11 B12;B21 B22]

%Pd3(0.40;0.151;0.151)
d=0.40;
b1=0.151;
b2=0.151;

theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*((2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a));
theta0_2=(k_DR/k_PR)+R_a*r*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
theta0_3=R_a*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a*r*m/(d*k_PR*k_a);

gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);
beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);

B11=gama.*beta11;
B12=gama.*beta12;
B21=gama.*beta21;
B22=gama.*beta22;

```

```

Ad3=[A11 A12;A21 A22]
Bd3=[B11 B12;B21 B22]

%Pd4(0.40;0.151;-0.151)
d=0.40;
b1=0.151;
b2=-0.151; % b2<0 quando deslocamento é para direita

theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*((2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a));
theta0_2=(k_DR/k_PR)+R_a*r*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
theta0_3=R_a*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a*r*m/(d*k_PR*k_a);

gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);
beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);

B11=gama.*beta11;
B12=gama.*beta12;
B21=gama.*beta21;
B22=gama.*beta22;

Ad4=[A11 A12;A21 A22]
Bd4=[B11 B12;B21 B22]

%Pd5(0.70;0;0.151)
d=0.70;
b1=0;
b2=0.151;

theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*((2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a));

```

```

theta0_2=(k_DR/k_PR)+R_a*r*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
theta0_3=R_a*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a*r*m/(d*k_PR*k_a);

gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);
beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);

B11=gama.*beta11;
B12=gama.*beta12;
B21=gama.*beta21;
B22=gama.*beta22;

Ad5=[A11 A12;A21 A22]
Bd5=[B11 B12;B21 B22]

%Pd6(0.70;0;-0.151)
d=0.70;
b1=0;
b2=-0.151; % b2<0 quando deslocamento é para direita

theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*((2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a));
theta0_2=(k_DR/k_PR)+R_a*r*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
theta0_3=R_a*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a*r*m/(d*k_PR*k_a);

gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);

```

```

beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);

B11=gama.*beta11;
B12=gama.*beta12;
B21=gama.*beta21;
B22=gama.*beta22;

Ad6=[A11 A12;A21 A22]
Bd6=[B11 B12;B21 B22]

%Pd7(0.70;0.151;0.151)
d=0.70;
b1=0.151;
b2=0.151;

theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*((2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a));
theta0_2=(k_DR/k_PR)+R_a*r*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
theta0_3=R_a*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a*r*m/(d*k_PR*k_a);

gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);
beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;

```

```

alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);

B11=gama.*beta11;
B12=gama.*beta12;
B21=gama.*beta21;
B22=gama.*beta22;

Ad7=[A11 A12;A21 A22]
Bd7=[B11 B12;B21 B22]

%Pd8(0.70;0.151;-0.151)
d=0.70;
b1=0.151;
b2=-0.151; % b2<0 quando deslocamento é para direita

theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*((2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a));
theta0_2=(k_DR/k_PR)+R_a.*r*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
theta0_3=R_a.*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a.*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a.*r*m/(d*k_PR*k_a);

gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);
beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);

B11=gama.*beta11;
B12=gama.*beta12;
B21=gama.*beta21;

```

```
B22=gama.*beta22;

Ad8=[A11 A12;A21 A22]
Bd8=[B11 B12;B21 B22]

%Pdcg1(0.70;0;0)
d=0.70;
b1=0;
b2=0; %
theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*((2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a));
theta0_2=(k_DR/k_PR)+R_a*r*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
theta0_3=R_a*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a*r*m/(d*k_PR*k_a);

gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);
beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);

B11=gama.*beta11;
B12=gama.*beta12;
B21=gama.*beta21;
B22=gama.*beta22;

Adcg1=[A11 A12;A21 A22]
Bdcg1=[B11 B12;B21 B22]

%Pdcg2(0.40;0;0)
d=0.40;
b1=0;
b2=0;

theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*((2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a));
theta0_2=(k_DR/k_PR)+R_a*r*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
```

```

theta0_3=R_a*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a*r*m/(d*k_PR*k_a);

gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);
beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).* (wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).* (wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).* (wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).* (wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);

B11=gama.*beta11;
B12=gama.*beta12;
B21=gama.*beta21;
B22=gama.*beta22;

Adcg2=[A11 A12;A21 A22]
Bdcg2=[B11 B12;B21 B22]

%Pdcg3(0.45;0;0)
d=0.45;
b1=0;
b2=0;

theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*((2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a));
theta0_2=(k_DR/k_PR)+R_a*r*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
theta0_3=R_a*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a*r*m/(d*k_PR*k_a);

gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);
beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

```



```

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);

B11=gama.*beta11;
B12=gama.*beta12;
B21=gama.*beta21;
B22=gama.*beta22;

Adcg3=[A11 A12;A21 A22]
Bdcg3=[B11 B12;B21 B22]

%Pdcg4(0.70;0;-0.1)
d=0.70;
b1=0;
b2=-0.1; % b2<0 quando deslocamento é para direita
theta0_1=(k_DT./k_PT)+(R_a.*r.*(2*I_e./r.^2)+m)./(2.*k_PT.*k_a);
theta0_2=(k_DR./k_PR)+R_a.*r.*(I_e*d^2/(2*r^2)+I_z+m*(b1^2+b2^2))/(d*k_PR*k_a);
theta0_3=R_a.*r*m*b1/(2*k_PT*k_a);
theta0_4=1+k_b/(k_PT*r)+B_e*R_a/(k_PT*k_a*r);
theta0_5=R_a.*r*b1*m/(d*k_PR*k_a);
theta0_6=1+d*k_b/(2*r*k_PR)+B_e*R_a*d/(2*k_PR*k_a*r);
theta0_7=m*b2*R_a*r/(2*k_PT*k_a);
theta0_8=b2*R_a.*r*m/(d*k_PR*k_a);

gama = 1./(theta0_1.*theta0_2-theta0_7.*theta0_8);
beta11= (theta0_2./r) + d.*theta0_8./(2.*r);
beta12= (theta0_7./r) + d.*theta0_1./(2.*r);
beta21= (theta0_2./r) - d.*theta0_3./(2.*r);
beta22= (theta0_7./r) - d.*theta0_1./(2.*r);

alfa11= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa11a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa12= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa12a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;
alfa21= (r.*theta0_4./2) - (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa21a= (r.*theta0_6./d) + ((r.^2).*wr.*theta0_5)./d;
alfa22= (r.*theta0_4./2) + (2.*(r.^2).*(wr-wl).*theta0_3)./(d.^2);
alfa22a= -(r.*theta0_6./d) - ((r.^2).*wl.*theta0_5)./d;

A11=gama.*(beta11.*alfa11+beta12.*alfa11a);
A12=gama.*(beta11.*alfa12+beta12.*alfa12a);
A21=gama.*(beta21.*alfa21+beta22.*alfa21a);

```

```
A22=gama.*(beta21.*alfa22+beta22.*alfa22a);
```

```
B11=gama.*beta11;
```

```
B12=gama.*beta12;
```

```
B21=gama.*beta21;
```

```
B22=gama.*beta22;
```

```
Adcg4=[A11 A12;A21 A22]
```

```
Bdcg4=[B11 B12;B21 B22]
```

## D.2 Programa para cálculo da matriz Ko de realimentação de saída do sistema utilizando LMIs. Fonte: do próprio autor.

```
% -----  
% Programa para cálculo da matriz Ko de realimentação da saída  
% Modelo Dinâmico de De La Cruz  
% Utilizando Teorema 8 de Marcio Covacic:  
% Sendo  $X=X'$   
%  $AX+XA'-BR-R'B' < 0$   
%  $X>0$   
%  $F = B'inv(X)inv(C)$   
%  $Ko=Rinv(X)inv(C)$   
%  
% Utilizando os vértices dos politopos de Ai e Bi  
% este programa calcula o X, o R e o Ko utilizando  
% duas codificações diferentes para as LMIs  
% -----  
  
clear;close all;clc  
% Versão corrigido o sinal de gama  
Ad1=[0.0857 0.0274;0.0288 0.0831];  
Ad2=[0.0825 0.0282;0.0268 0.0851];  
Ad3=[0.0854 0.0277;0.0289 0.0827];  
Ad4=[0.0822 0.0284;0.0269 0.0847];  
Ad5=[0.1000 0.0132;0.0143 0.0976];  
Ad6=[0.0969 0.0136;0.0125 0.0993];  
Ad7=[0.0997 0.0134;0.0142 0.0971];  
Ad8=[0.0967 0.0138;0.0125 0.0988];  
  
Bd1=[0.0481 0.0155;0.0476 -0.0145];  
Bd2=[0.0471 0.0145;0.0476 -0.0155];  
Bd3=[0.0481 0.0154;0.0475 -0.0154];  
Bd4=[0.0471 0.0144;0.0475 -0.0154];  
Bd5=[0.0482 0.0289;0.0476 -0.0278];  
Bd6=[0.0470 0.0278;0.0476 -0.0289];  
Bd7=[0.0482 0.0288;0.0474 -0.0276];  
Bd8=[0.0470 0.0276;0.0474 -0.0288];  
  
Cd=[1 0;0 1];  
  
n=size(Ad1,1);  
  
setlmis([]);  
  
X=lmivar(1,[n 1]);  
R=lmivar(2,[n n]);  
  
% Versão A This block is of the form  
%  $A1*X1 + X1*A1' + A2*X2 + X2'*A2'$   
% Essa versão gera os dados levados ao SBAl2013  
  
lmiterm([1 1 1 X],1,Ad1,'s');  
lmiterm([1 1 1 -R],1,-Bd1,'s');
```

```
lmiterm([2 1 1 X],1,Ad2,'s');  
lmiterm([2 1 1 -R],1,-Bd2,'s');
```

```
lmiterm([3 1 1 X],1,Ad3,'s');  
lmiterm([3 1 1 -R],1,-Bd3,'s');
```

```
lmiterm([4 1 1 X],1,Ad4,'s');  
lmiterm([4 1 1 -R],1,-Bd4,'s');
```

```
lmiterm([5 1 1 X],1,Ad5,'s');  
lmiterm([5 1 1 -R],1,-Bd5,'s');
```

```
lmiterm([6 1 1 X],1,Ad6,'s');  
lmiterm([6 1 1 -R],1,-Bd6,'s');
```

```
lmiterm([7 1 1 X],1,Ad7,'s');  
lmiterm([7 1 1 -R],1,-Bd7,'s');
```

```
lmiterm([8 1 1 X],1,Ad8,'s');  
lmiterm([8 1 1 -R],1,-Bd8,'s');
```

```
%-----
```

```
lmiterm([-9 1 1 X],1,1);
```

```
lmidin=getlmis;
```

```
[tmin,xf]=feasp(lmidin);  
Xdin=dec2mat(lmidin,xf,X)  
Rdin=dec2mat(lmidin,xf,R)  
Ko=Rdin/Xdin/Cd
```

O Programa [D.2](#) acima determina a matriz de realimentação  $K_o$  que estabiliza a planta dada pelo modelo dinâmico de [De La CRUZ, BASTOS e CARELLI \(2011\)](#) linearizado, de conformidade com as equações de [3.33](#) até [3.40](#), foi utilizado o Lema [1.13.5](#) de [COVACIC \(2006\)](#).

### D.3 Programa para cálculo dos autovalores do sistema e geração das curvas de saída. Fonte: do próprio autor.

```

% -----
% Modelo Dinâmico Cadeira de Rodas Motorizada
% Cálculo dos autovalores do sistema em cada um dos vértices do politop
% Geração dos Gráficos de Saída
% pelo programa SBAl2013_TestemalhaAbertaEFechada451_131114.m
% que está em Dropbox\DiSSERTACAOUEL2014_Latex
% -----

clear;close all;clc

% Paciente nos vértices do Politopo para a cadeira de rodas(essas
matrizes
% não têm influência aqui neste programa elas são originadas a partir de
% vértices diferentes do politopo e são utilizadas nas LMIs )

Ad1=[0.0857    0.0274;0.0288    0.0831];
Ad2=[0.0825    0.0282;0.0268    0.0851];
Ad3=[0.0854    0.0277;0.0289    0.0827];
Ad4=[0.0822    0.0284;0.0269    0.0847];
Ad5=[0.1000    0.0132;0.0143    0.0976];
Ad6=[0.0969    0.0136;0.0125    0.0993];
Ad7=[0.0997    0.0134;0.0142    0.0971];
Ad8=[0.0967    0.0138;0.0125    0.0988];

Bd1=[0.0481    0.0155;0.0476   -0.0145];
Bd2=[0.0471    0.0145;0.0476   -0.0155];
Bd3=[0.0481    0.0154;0.0475   -0.0154];
Bd4=[0.0471    0.0144;0.0475   -0.0154];
Bd5=[0.0482    0.0289;0.0476   -0.0278];
Bd6=[0.0470    0.0278;0.0476   -0.0289];
Bd7=[0.0482    0.0288;0.0474   -0.0276];
Bd8=[0.0470    0.0276;0.0474   -0.0288];

% Paciente no Centro de Gravidade Pdcg1(0.70;0;0)

Adcg1 =[0.0986    0.0132;0.0132    0.0986];
Bdcg1 =[0.0476    0.0285;0.0476   -0.0285];

% Paciente no Centro de Gravidade Pdcg2(0.40;0;0)

Adcg2 =[0.0843    0.0276;0.0276    0.0843];
Bdcg2 =[0.0476    0.0151;0.0476   -0.0151];

% Paciente no Centro de Gravidade Pdcg3(0.45,0,0)

Adcg3 =[0.0874    0.0244;0.0244    0.0874];
Bdcg3 =[0.0476    0.0177;0.0476   -0.0177];

% Paciente no Centro de Gravidade: Pdcg4(0.70;0,-0.1)
Adcg4 = [0.0975 0.0134;0.0127 0.0991];
Bdcg4 = [0.0472 0.0280;0.0476 -0.0288];

```

```
Cd=[1 0; 0 1];
D=[0 0;0 0];

% Matriz de realimentação de saída que estabiliza a planta

Ko=[5.6548    14.8895;6.8580  -12.5922]; %versao A

%Ko=[6.5098    6.3488;13.2726  -13.7025]; %versao B

disp('=====')

% ===== Montagem dos 4 LTIs dos Pdcgis
=====

AAcg1=(Adcg1-Bdcg1*Ko*Cd);
AAcg2=(Adcg2-Bdcg2*Ko*Cd);
AAcg3=(Adcg3-Bdcg3*Ko*Cd);
AAcg4=(Adcg4-Bdcg4*Ko*Cd);

%Pdcg1(0.70;0;0)
syscg11=ss(Adcg1,Bdcg1,Cd,D); % Malha Aberta 1
syscg21=ss(AAcg1,Bdcg1,Cd,D); % Malha Fechada 1

%Pdcg2(0.40;0;0)
syscg12=ss(Adcg2,Bdcg2,Cd,D); % Malha Aberta 2
syscg22=ss(AAcg2,Bdcg2,Cd,D); % Malha Fechada 2

%Pdcg3(0.45;0;0)
syscg13=ss(Adcg3,Bdcg3,Cd,D); % Malha Aberta 3
syscg23=ss(AAcg3,Bdcg3,Cd,D); % Malha Fechada 3

%Pdcg4(0.70;0;-0.1)
syscg14=ss(Adcg4,Bdcg4,Cd,D); % Malha Aberta 4
syscg24=ss(AAcg4,Bdcg4,Cd,D); % Malha Fechada 4

% =====OBTENÇÃO RESPOSTA STEP  CGi=====

disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO PONTO INTERIOR CG 1 ->
Pdcg1(0.70;0;0)')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
[y11,t11,x11] = step(syscg11,20);% Resposta degrau LTI malha aberta
Pdcg1(0.70;0;0)
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Adcg1)
%pause

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO PONTO INTERIOR CG 1 ->
Pdcg1(0.70;0;0)')
```

```

disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')
[y1,t21,x1] = step(syscg21,20);% Resposta degrau LTI malha fechada
Pdcg1(0.40;0;0)
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAcg1)
%pause

% -----

disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO PONTO INTERIOR CG 2 ->
Pdcg2(0.40;0;0)')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
%[y12,t12,x12] = step(syscg12,20);% Resposta degrau LTI malha aberta
Pdcg2(0.40;0;0)
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Adcg2)
%pause

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO PONTO INTERIOR CG 2 ->
Pdcg2(0.40;0;0)')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')
[y2,t22,x2] = step(syscg22,20);% Resposta degrau LTI malha fechada
Pdcg2(0.40;0;0)
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAcg2)
%pause

% -----

disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO PONTO INTERIOR CG 3 ->
Pdcg3(0.45;0;0)')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
%[y13,t13,x13] = step(syscg13,20);% Resposta degrau LTI malha aberta
Pdcg3(0.45;0;0)
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Adcg3)
%pause

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO VERTICE CG 3 -> Pdcg3(0.45;0;0)')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')
[y3,t23,x3] = step(syscg23,20);% Resposta degrau LTI malha fechada
Pdcg3(0.45;0;0)
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAcg3)

```



```
%pause

% -----
--

disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO VERTICE CG 4 -> Pdcg4(0.70;0;-0.1)')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
[y14,t14,x14] = step(syscg14,20);% Resposta degrau LTI malha aberta
Pdcg4(0.70;0;-0.1)
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Adcg4)
%pause

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO VERTICE CG 4 -> Pdcg4(0.70;0;-0.1)')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')
[y4,t24,x4] = step(syscg24,20);% Resposta degrau LTI malha fechada
Pdcg4(0.70;0;-0.1)
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAcg4)
%pause

% ===== Montagem dos 8 LTIs dos Vértices Pdis
=====

AAd1=(Ad1-Bd1*Ko*Cd);
AAd2=(Ad2-Bd2*Ko*Cd);
AAd3=(Ad3-Bd3*Ko*Cd);
AAd4=(Ad4-Bd4*Ko*Cd);

AAd5=(Ad5-Bd5*Ko*Cd);
AAd6=(Ad6-Bd6*Ko*Cd);
AAd7=(Ad7-Bd7*Ko*Cd);
AAd8=(Ad8-Bd8*Ko*Cd);

%Pd1
sysd11=ss(Ad1,Bd1,Cd,D); % Malha Aberta 1
sysd21=ss(AAd1,Bd1,Cd,D); % Malha Fechada 1

%Pd2
sysd12=ss(Ad2,Bd2,Cd,D); % Malha Aberta 2
sysd22=ss(AAd2,Bd2,Cd,D); % Malha Fechada 2

%Pd3
sysd13=ss(Ad3,Bd3,Cd,D); % Malha Aberta 3
sysd23=ss(AAd3,Bd3,Cd,D); % Malha Fechada 3

%Pd4
sysd14=ss(Ad4,Bd4,Cd,D); % Malha Aberta 4
sysd24=ss(AAd4,Bd4,Cd,D); % Malha Fechada 4
```

```

%Pd5
sysd15=ss (Ad5,Bd5,Cd,D); % Malha Aberta 5
sysd25=ss (AAd5,Bd5,Cd,D); % Malha Fechada 5

%Pd6
sysd16=ss (Ad6,Bd6,Cd,D); % Malha Aberta 6
sysd26=ss (AAd6,Bd6,Cd,D); % Malha Fechada 6

%Pd7
sysd17=ss (Ad7,Bd7,Cd,D); % Malha Aberta 7
sysd27=ss (AAd7,Bd7,Cd,D); % Malha Fechada 7

%Pd8
sysd18=ss (Ad8,Bd8,Cd,D); % Malha Aberta 8
sysd28=ss (AAd8,Bd8,Cd,D); % Malha Fechada 8

% =====OBTENÇÃO RESPOSTA STEP Pdi =====

disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO VERTICE Pd1')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
%[y11,t11,x11] = step(sysd11,20);% Resposta degrau LTI malha aberta Pd1
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Ad1)
%pause

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO VERTICE Pd1')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')
[yd1,td1,xd1] = step(sysd21,20);% Resposta degrau LTI malha fechada Pd1
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAd1)
%pause

% -----
%tempo= 0:0.1:15;
disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO VERTICE Pd2')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
%[y12,t12,x12] = step(syscg12,20);% Resposta degrau LTI malha aberta Pd2
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Ad2)
%pause

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO VERTICE Pd2')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')

```

```
[yd2,td2,xd2] = step(sysd22,20);% Resposta degrau LTI malha fechada
Pd2(0.40;0;-0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAd2)
%pause

% -----

%tempo= 0:0.05:15;
disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO VERTICE Pd3')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
%[y13,t13,x13] = step(syscg13,20);% Resposta degrau LTI malha aberta
Pd3(0.40;0;-0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Ad3)
%pause

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO VERTICE Pd3')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')
[yd3,td3,xd3] = step(sysd23,20);% Resposta degrau LTI malha fechada
Pd3(0.40;0;-0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAd3)
%pause

% -----
--

disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO VERTICE Pd4')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
%[y14,t14,x14] = step(syscg14,20);% Resposta degrau LTI malha aberta
Pd4(0.70;0.151;-0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Ad4)
%pause

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO VERTICE Pd4')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')
[yd4,td4,xd4] = step(sysd24,20);% Resposta degrau LTI malha fechada
Pd4(0.70;0.151;-0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAd4)
%pause
```

```

disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO VERTICE Pd5')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
%[y11,t11,x11] = step(syscg15,20);% Resposta degrau LTI malha aberta
%Pd5(0.70;0;0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Ad5)
%pause

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO VERTICE Pd5')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')
[yd5,td5,xd5] = step(sysd25,20);% Resposta degrau LTI malha fechada
Pd5(0.70;0;0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAd5)
%pause

% -----
%tempo= 0:0.1:15;
disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO VERTICE Pd6')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
%[y12,t12,x12] = step(sysd16,20);% Resposta degrau LTI malha aberta
%Pd6(0.70;0;-0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Ad6)
%pause

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO VERTICE Pd6')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')
[yd6,td6,xd6] = step(sysd26,20);% Resposta degrau LTI malha fechada
Pd6(0.70;0;-0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAd6)
%pause

% -----

%tempo= 0:0.05:15;
disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO VERTICE Pd7')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
%[y13,t13,x13] = step(sysd17,20);% Resposta degrau LTI malha aberta
%Pd7(0.70;0.151;0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Ad7)
%pause

```

```

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO VERTICE Pd7')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')
[yd7,td7,xd7] = step(sysd27,20);% Resposta degrau LTI malha fechada
Pd7(0.70;0.151;0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAd7)
%pause

% -----
--

disp('-----')
disp('RESULTADOS EM MALHA ABERTA DO VERTICE Pd8')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU:')
%[y14,t14,x14] = step(syscg14,20);% Resposta degrau LTI malha aberta
%Pd8(0.70;0.151;-0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES:')
eig(Ad8)
%pause

disp('=====')

disp('RESULTADOS EM MALHA FECHADA DO VERTICE Pd8')
disp('RESPOSTA AO DEGRAU: ')
[yd8,td8,xd8] = step(sysd28,20);% Resposta degrau LTI malha fechada
Pd8(0.70;0.151;-0.151)
%pause
disp('AUTOVALORES: ')
eig(AAd8)
%pause

%===== GRAVANDO QUATRO CURVAS Pdcg1 EM GRÁFICOS
=====
%===== EM MALHA ABERTA
=====

figure('Name','Saída em malha ABERTA vértice
Pdcg1(0.70;0;0)', 'NumberTitle', 'off')

subplot(221);plot(t11,y11(:,1,2),'-k','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('$\omega_1$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(222);plot(t11,y11(:,1,1),'-k','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('$\omega_1$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(223);plot(t11,y11(:,2,1),'-k','LineWidth',1.5)

```

```

xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_r$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(224);plot(t11,y11(:,2,2),'-k','LineWidth',1.5)
legend('Pdcg1',4,'Interpreter','LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_r$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

% -----
--

%===== GRAVANDO QUATRO CURVAS Pdcgi EM GRÁFICOS
=====

figure('Name','Saída em malha fechada vértice
Pdcg1(0.70;0;0)','NumberTitle','off')

subplot(221);plot(t21,y1(:,1,2),'-k','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_l$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(222);plot(t21,y1(:,1,1),'-k','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_l$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(223);plot(t21,y1(:,2,1),'-k','LineWidth',1.5)
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_r$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(224);plot(t21,y1(:,2,2),'-k','LineWidth',1.5)
legend('Pdcg1',4,'Interpreter','LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_r$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

% -----
--

figure('Name','Saída em malha fechada vértice
Pdcg2(0.40;0;0)','NumberTitle','off')

subplot(221);plot(t22, y2(:,1,2),'-r','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_l$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(222);plot(t22, y2(:,1,1),'-r','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_l$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(223);plot(t22, y2(:,2,1),'-r','LineWidth',1.5)
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_r$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')

```

```
grid

subplot(224);plot(t22, y2(:,2,2), '-r', 'LineWidth',1.5)
legend('Pdcg2',4, 'Interpreter', 'LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('$\omega_r$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

% -----
--
figure('Name','Saída em malha fechada vértice
Pdcg3(0.45;0;0)', 'NumberTitle', 'off')

subplot(221);plot(t23,y3(:,1,2), '-b', 'LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('$\omega_l$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(222);plot(t23,y3(:,1,1), '-b', 'LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('$\omega_l$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(223);plot(t23,y3(:,2,1), '-b', 'LineWidth',1.5)
xlabel('tempo (s)');ylabel('$\omega_r$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(224);plot(t23,y3(:,2,2), '-b', 'LineWidth',1.5)
legend('Pdcg3',4, 'Interpreter', 'LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('$\omega_r$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

% -----
--
figure('Name','Saída em malha fechada vértice Pdcg4(0.70;0;-
0.1)', 'NumberTitle', 'off')

subplot(221);plot(t24,y4(:,1,2), '-g', 'LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('$\omega_l$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(222);plot(t24,y4(:,1,1), '-g', 'LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('$\omega_l$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(223);plot(t24,y4(:,2,1), '-g', 'LineWidth',1.5)
xlabel('tempo (s)');ylabel('$\omega_r$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid

subplot(224);plot(t24,y4(:,2,2), '-g', 'LineWidth',1.5)
legend('Pdcg4',4, 'Interpreter', 'LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('$\omega_r$ (rad/s)', 'Interpreter', 'LaTeX')
grid
```

```

%===== GRAVANDO OITO CURVAS Pdi EM GRÁFICOS =====

figure('Name','Saída em malha fechada vértice Pd1','NumberTitle','off')

subplot(221);plot(td1,yd1(:,1,2),'-k','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_l\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(222);plot(td1,yd1(:,1,1),'-k','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_l\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(223);plot(td1,yd1(:,2,1),'-k','LineWidth',1.5)
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(224);plot(td1,yd1(:,2,2),'-k','LineWidth',1.5)
legend('Pd1',4,'Interpreter','LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

% -----
--
figure('Name','Saída em malha fechada vértice Pd2','NumberTitle','off')

subplot(221);plot(td2, yd2(:,1,2),'-r','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_l\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(222);plot(td2, yd2(:,1,1),'-r','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_l\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(223);plot(td2, yd2(:,2,1),'-r','LineWidth',1.5)
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(224);plot(td2, yd2(:,2,2),'-r','LineWidth',1.5)
legend('Pd2',4,'Interpreter','LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

% -----
--
figure('Name','Saída em malha fechada vértice Pd3','NumberTitle','off')

subplot(221);plot(td3,yd3(:,1,2),'-b','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_l\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')

```



```
grid

subplot(222);plot(td3,yd3(:,1,1),'-b','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_l$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(223);plot(td3,yd3(:,2,1),'-b','LineWidth',1.5)
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_r$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(224);plot(td3,yd3(:,2,2),'-b','LineWidth',1.5)
legend('Pd3',4,'Interpreter','LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_r$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

% -----
--

figure('Name','Saída em malha fechada vértice Pd4','NumberTitle','off')

subplot(221);plot(td4,yd4(:,1,2),'-g','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_l$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(222);plot(td4,yd4(:,1,1),'-g','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_l$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(223);plot(td4,yd4(:,2,1),'-g','LineWidth',1.5)
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_r$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(224);plot(td4,yd4(:,2,2),'-g','LineWidth',1.5)
legend('Pd4',4,'Interpreter','LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_r$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

% -----
-

figure('Name','Saída em malha fechada vértice Pd5','NumberTitle','off')

subplot(221);plot(td5,yd5(:,1,2),'-k','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_l$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(222);plot(td5,yd5(:,1,1),'-k','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\omega_l$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid
```

```

subplot(223);plot(td5,yd5(:,2,1),'-k','LineWidth',1.5)
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(224);plot(td5,yd5(:,2,2),'-k','LineWidth',1.5)
legend('Pd5',4,'Interpreter','LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

% -----
--
figure('Name','Saída em malha fechada vértice Pd6','NumberTitle','off')

subplot(221);plot(td6, yd6(:,1,2),'-r','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_l\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(222);plot(td6, yd6(:,1,1),'-r','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_l\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(223);plot(td6, yd6(:,2,1),'-r','LineWidth',1.5)
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(224);plot(td6, yd6(:,2,2),'-r','LineWidth',1.5)
legend('Pd6',4,'Interpreter','LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

% -----
--
figure('Name','Saída em malha fechada vértice Pd7','NumberTitle','off')

subplot(221);plot(td7,yd7(:,1,2),'-b','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em U_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_l\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(222);plot(td7,yd7(:,1,1),'-b','LineWidth',1.5)
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_l\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(223);plot(td7,yd7(:,2,1),'-b','LineWidth',1.5)
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

subplot(224);plot(td7,yd7(:,2,2),'-b','LineWidth',1.5)
legend('Pd7',4,'Interpreter','LaTeX')
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')
grid

```

```
% -----  
--  
  
figure('Name','Saída em malha fechada vértice Pd8','NumberTitle','off')  
  
subplot(221);plot(td8,yd8(:,1,2),'-g','LineWidth',1.5)  
title('Degrau unitário em U_{ref}')  
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_l\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')  
grid  
  
subplot(222);plot(td8,yd8(:,1,1),'-g','LineWidth',1.5)  
title('Degrau unitário em \Omega_{ref}')  
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_l\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')  
grid  
  
subplot(223);plot(td8,yd8(:,2,1),'-g','LineWidth',1.5)  
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')  
grid  
  
subplot(224);plot(td8,yd8(:,2,2),'-g','LineWidth',1.5)  
legend('Pd8',4,'Interpreter','LaTeX')  
xlabel('tempo (s)');ylabel('\$\omega_r\$ (rad/s)','Interpreter','LaTeX')  
grid
```



APÊNDICE E – Controlador robusto do  
ângulo de articulação do joelho de um  
paciente parapléxico utilizando LMIs em  
presença de incertezas paramétricas limitadas  
em norma

## E.1 Programa para determinação da matriz de realimentação. Fonte: do próprio autor.

```

% -----
% Programa para calcular matriz de realimentação Ko do controle robusto
% do ângulo de articulação do joelho de pacientes paraplégicos via LMIs
% sem restrição de saída.
% Calculando K para os valores de f21max=-21.7834 e f21min=-36.0085 e
% delta=0, delta=1 e delta=-1, obtendo os valores:
% K0 = 10^(-3)*[ -0.3244    0.0999    0.0605]; % para delta=0
% K1=10^(-3)*[ -0.2342    0.1288    0.0772]; % para delta=1
% Km1=10^(-3)*[ -0.2895    0.0503    0.0212];% para delta=-1
% -----

%limnorma30g2simples.M

clear;close all;clc
% Sistema de controle da posição da perna do paciente paraplegico:

BB=0.27;
J=0.362;
tau=0.951;
G=42500;
teta0=pi/6; % theta= 30 graus
Ma0=4.6068;

xo=[-teta0;0;-Ma0];

f21max=-21.7834;
f21min=-36.0085;

fo=(f21max+f21min)/2;
fi=(f21max-f21min)/2;
A=[0 1 0;fo -BB/J 1/J;0 0 -1/tau];
B=[0;0;G/tau];
L=[0;fi;0];
RA=[1 0 0];
RB=[0];
C=[1 0 0];
Delta0=[0];
DeltaM=[1];
Deltam=[-1];
DeltaA0=L*Delta0*RA;
DeltaAM=L*DeltaM*RA;
DeltaAm=L*Deltam*RA;
DeltaB0=L*Delta0*RB;
DeltaBM=L*DeltaM*RB;
DeltaBm=L*Deltam*RB;
ADelta0=A+DeltaA0;
ADeltaM1=A+DeltaAM;
ADeltam1=A+DeltaAm;

```

```

disp('xo= ')
disp(xo)
disp('fo= ')
disp(fo)
disp('fi')
disp(fi)
disp('A= ')
disp(A)
disp('B= ')
disp(B)
disp('L= ')
disp(L)
disp('Delta0= ')
disp(Delta0)
disp('DeltaM= ')
disp(DeltaM)
disp('Deltam= ')
disp(Deltam)
disp('DeltaA0= ')
disp(DeltaA0)
disp('DeltaAM= ')
disp(DeltaAM)
disp('DeltaAm= ')
disp(DeltaAm)
disp('ADelta0= ')
disp(ADelta0)
disp('ADeltaM1= ')
disp(ADeltaM1)
disp('ADeltaml= ')
disp(ADeltaml)
pause

% LMIs:
setlmis([]);
X=lmivar(1,[3 1]);
W=lmivar(2,[1 3]);
epsilonI=lmivar(1,[1 0]);
miI=lmivar(1,[1 0]);
% LMI 1
%A=ADelta0;
%A=ADeltaM1;
A=ADeltaml;

lmiterm([1 1 1 X],A,1,'s');
lmiterm([1 1 1 W],-B,1,'s');
lmiterm([1 1 1 epsilonI],L,L');
lmiterm([1 2 1 X],RA,1);
lmiterm([1 2 1 W],-RB,1);
lmiterm([1 2 2 epsilonI],-1,1);

%LMI 2
%lmiterm([-2 1 1 X],1,1);
%lmiterm([-2 2 1 X],C,1);
%lmiterm([-2 2 2 miI],1,1);

```

```
%LMI 3
lmiterm([-2 1 1 X],1,1);

lmiln=getlmis;

[tmin,xf]=feasp(lmiln);
Xf=dec2mat(lmiln,xf,X)
Wf=dec2mat(lmiln,xf,W)
epsilonIf=dec2mat(lmiln,xf,epsilonI)
mIf=dec2mat(lmiln,xf,miI)
if rank(Xf)==3
    K=Wf*inv(Xf)
else
    K=0
end

disp('Polos de malha fechada do sistema nominal:')
%A=
%eig(A-B*K)
Szero=A-B*K; % para delta=0
eig(Szero)

disp('Polos de malha fechada delta=1 ou delta=-1')

%eig(A-L*RA-B*K)
S=(A-L*RA-B*K)
eig(S)
```



## E.2 Programa para simulação do sistema e emissão dos gráficos de saída. Fonte: do próprio autor.

```
% -----  
% Programa para executar a simulação do controle robusto do ângulo de  
% articulação do joelho de pacientes paraplégicos via LMIs e  
% sem considerar restrições.  
% impressão dos gráficos: ângulo do joelho (x10), velocidade angular  
% do joelho (x20), torque ativo produzido pelo estímulo (x30) e largura  
% de pulso (u0). As matrizes de realimentação, K, utilizadas foram  
% Calculando K para os valores de f21max=-21.7834 e f21min=-36.0085 e  
% delta=0, delta=1 e delta=-1, obtendo os valores:  
% K0 = 10^(-3)*[ -0.3244    0.0999    0.0605]; % para delta=0  
% K1=10^(-3)*[ -0.2342    0.1288    0.0772]; % para delta=1  
% Km1=10^(-3)*[ -0.2895    0.0503    0.0212];% para delta=-1  
% -----  
  
%simparaln30g2XQ.M  
  
clear  
teta0=pi/6;  
Ma0=4.6068; % para 30 graus  
G=42500;  
xo=[-teta0;0;-Ma0];  
[t0,deltax0]=ode23('sisparaln30g2mi0XQ',[0 5.0],xo);  
[t1,deltax1]=ode23('sisparaln30g2miMM1XQ',[0 5.0],xo);  
[tm1,deltaxm1]=ode23('sisparaln30g2mim1XQ',[0 5.0],xo);  
% pause  
deltax10=deltax0(:,1);  
deltax20=deltax0(:,2);  
deltax30=deltax0(:,3);  
x10=deltax10+teta0;  
x20=deltax20;  
x30=deltax30+Ma0;  
  
deltax11=deltax1(:,1);  
deltax21=deltax1(:,2);  
deltax31=deltax1(:,3);  
x11=deltax11+teta0;  
x21=deltax21;  
x31=deltax31+Ma0;  
  
deltax1m1=deltaxm1(:,1);  
deltax2m1=deltaxm1(:,2);  
deltax3m1=deltaxm1(:,3);  
x1m1=deltax1m1+teta0;  
x2m1=deltax2m1;  
x3m1=deltax3m1+Ma0;  
  
K0 = 10^(-3)*[ -0.3244    0.0999    0.0605]; % para delta=0  
K1=10^(-3)*[ -0.2342    0.1288    0.0772]; % para delta=1  
Km1=10^(-3)*[ -0.2895    0.0503    0.0212];% para delta=-1
```

```

u0=-K0*deltax0'+Ma0/G;
u1=-K1*deltax1'+Ma0/G;
um1=-Km1*deltaxm1'+Ma0/G;

figure('Name','Output for theta=pi/6 f21max=-16.3561 f21min=-51.0113 mi=
210.0514 delta=1','NumberTitle','off')

subplot(221);plot(t0,x10,'-k',t1,x11,'-.r',tm1,x1m1,'--
m','LineWidth',1.5)
axis([-Inf 5.0 0 0.8])
xlabel('t');ylabel('$\theta$ [rad]','Interpreter','LaTeX','FontSize',13)
title('Ângulo do joelho','FontSize',11)
grid

subplot(222);plot(t0,x20,'-k',t1,x21,'-.r',tm1,x2m1,'--
m','LineWidth',1.5)
axis([-Inf 5.0 -1 2])
title('Velocidade angular do joelho','FontSize',11)
xlabel('t');ylabel('$\dot{\theta}$
[rad/s]','Interpreter','LaTeX','FontSize',13)
grid

subplot(223);plot(t0,x30,'-k',t1,x31,'-.r',tm1,x3m1,'--
m','LineWidth',1.5)
axis([-Inf 5.0 0 6])
title('Torque ativo produzido pela FES','FontSize',11)
xlabel('t');ylabel('$M_a$ [N.m]','Interpreter','LaTeX','FontSize',13)
grid

subplot(224);plot(t0,u0,'-k',t1,u1,'-.r',tm1,um1,'--m','LineWidth',1.5)
h=legend('\delta=0','\delta=1','\delta=-1',3,'Interpreter','LaTeX')
axis([-Inf 5.0 -5*10^(-4) 15*10^(-4)])
title('Largura de pulso','FontSize',11)
xlabel('t');ylabel('$u=P_{N}$ [s]','Interpreter','LaTeX','FontSize',13)
grid

```

## E.3 Programa para simulação do sistema e emissão dos gráficos de saída. Fonte: do próprio autor.

```
% -----  
% Função para executar o cálculo dos parâmetros: Ma0, f21, A, B e  
% xdot0=A*x+B*ws0; utilizados para simulação da articulação do joelho de  
% pacientes paraplégicos via LMIs utilizando: delta=0 e K0  
% para os valores de f21 linearizado com ordem quinta  
% K0 =[788.0846  415.5553  -223.8878];  
% -----  
  
%sisparaln30g.m  
  
function xdot0=sisparaln30g2mi0XQ(t1,x)  
format long  
J=0.362;  
m=4.37;  
l=0.238;  
B=0.27;  
LL=41.208;  
E=2.024;  
w=2.918;  
G=42500;  
xx=pi/6; % para 30 graus  
g=9.8;  
tau=0.951;  
  
Ma0=m*g*l*sin(xx)+LL*exp(-E*((xx)+(pi/2)))*(xx+(pi/2)-w);  
  
x=[x(1) x(2) x(3)]';  
  
%para 30 graus  
f21=(1/J)*((-m*g*l)*(1-1/6*(x(1))^2-1/2*xx*x(1)-...  
  
A=[0 1 0 ; f21 -B/J 1/J ; 0 0 -1/tau];  
B=[0 ; 0 ; G/tau];  
  
K0 = 10^(-3)*[ -0.3244  0.0999  0.0605]; % para delta=0  
  
%y=C*x;  
  
ws0=-K0*x;  
%pause  
  
xdot0=A*x+B*ws0;
```

```
%pause  
t1
```

## APÊNDICE F – Determinação das matrizes de incertezas da Equação 1.115

Partindo da equação da planta em espaço de estados é representada pela Equação 1.114, ou seja:

$$\dot{x} = (A + \delta A) \cdot x + (B + \delta B) \cdot u,$$

e sendo as matrizes característica e de entrada do sistema com as incertezas dadas pelas Equações 4.6 e 4.7, ou seja:

$$A + \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_{21} & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix},$$

$$B + \delta B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{G}{\tau} \end{bmatrix}'.$$

Considerando ainda a definição das matrizes com incertezas dada pela Equação 1.115, ou seja:

$$\delta A = L \cdot \Delta \cdot R_A,$$

$$\delta B = L \cdot \Delta \cdot R_B,$$

$$\Delta \cdot \Delta' \leq I.$$

A determinação das matrizes  $L$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  e  $\Delta$  pode ser feita como se segue.

Substituindo as matrizes característica e de entrada, representadas pelas Equações 4.6 e 4.7, na Equação 1.114 vem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_{21} & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix} \cdot P_N = (A + \delta A) \cdot x + (B + \delta B) \cdot u. \quad (\text{F.1})$$

Considerando  $\delta B = 0$ , tem-se:

$$B + \delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix},$$

$$A + \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_{21} & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_0 & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, conclui-se que:

$$\tilde{f}_{21} = f_0 + \delta f = \frac{\tilde{f}_{21max} + \tilde{f}_{21min}}{2} + \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} \cdot \delta, \quad (\text{F.2})$$

onde  $\delta$  varia no intervalo dado por:

$$-1 \leq \delta \leq +1. \quad (\text{F.3})$$

Dessa maneira, considerando F.2 e F.3, pode-se ter três situações diferentes:

(a) Para  $\delta = 0$ , correspondendo ao valor médio de  $\tilde{f}_{21}$ :

$$\tilde{f}_{21} = f_0 + \delta f = \frac{\tilde{f}_{21max} + \tilde{f}_{21min}}{2} + \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} \cdot (0) = \frac{\tilde{f}_{21max} + \tilde{f}_{21min}}{2},$$

(b) Para  $\delta = 1$ , correspondendo ao valor máximo de  $\tilde{f}_{21}$ :

$$\tilde{f}_{21} = f_0 + \delta f = \frac{\tilde{f}_{21max} + \tilde{f}_{21min}}{2} + \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} \cdot (1) = \tilde{f}_{21max},$$

(c) Para  $\delta = -1$ , correspondendo ao valor mínimo de  $\tilde{f}_{21}$ :

$$\tilde{f}_{21} = f_0 + \delta f = \frac{\tilde{f}_{21max} + \tilde{f}_{21min}}{2} + \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} \cdot (-1) = \tilde{f}_{21min}.$$

Então, para  $\delta A = 0$ , tem-se:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\tilde{f}_{21max} + \tilde{f}_{21min}}{2} & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}. \quad (\text{F.4})$$

Tendo em vista as Equações 1.115 e considerando os demais valores de  $\delta A$ , tem-se:

$$\delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} \cdot \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L \cdot \Delta \cdot R_A, \quad (\text{F.5})$$

Onde  $\Delta = [\delta]$ , com  $\delta \in [-1, 1]$  e  $L$  e  $R_A$  são representados pelas Equações F.6 e F.7, neste caso, tem-se que  $\Delta \in \mathfrak{R}^{1 \times 1}$ ,  $L \in \mathfrak{R}^{3 \times 1}$  e  $R_A \in \mathfrak{R}^{1 \times 3}$ , de modo que  $\delta A \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ .

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{F.6})$$

$$R_A = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{F.7})$$

Fazendo-se as devidas substituições, vem:

$$\delta A = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \cdot [\delta] \cdot \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \delta \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot r_1 & l_1 \cdot r_2 & l_1 \cdot r_3 \\ l_2 \cdot r_1 & l_2 \cdot r_2 & l_2 \cdot r_3 \\ l_3 \cdot r_1 & l_3 \cdot r_2 & l_3 \cdot r_3 \end{bmatrix} = \delta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{f}_{21max} + \tilde{f}_{21min}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E os valores dos produtos  $l_i \cdot r_j$  podem ser determinados considerando as Equações de F.8 até F.16:

$$l_1 \cdot r_1 = 0, \quad (\text{F.8})$$

$$l_2 \cdot r_1 = \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2}, \quad (\text{F.9})$$

$$l_3 \cdot r_1 = 0, \quad (\text{F.10})$$

$$l_1 \cdot r_2 = 0, \quad (\text{F.11})$$

$$l_2 \cdot r_2 = 0, \quad (\text{F.12})$$

$$l_3 \cdot r_2 = 0, \quad (\text{F.13})$$

$$l_1 \cdot r_3 = 0, \quad (\text{F.14})$$

$$l_2 \cdot r_3 = 0, \quad (\text{F.15})$$

$$l_3 \cdot r_3 = 0. \quad (\text{F.16})$$

Uma condição necessária para que o lado direito da Equação F.9 seja diferente de zero é que F.17 e F.18 sejam verdadeiras simultaneamente.

$$l_2 \neq 0, \quad (\text{F.17})$$

$$r_1 \neq 0. \quad (\text{F.18})$$

Considerando-se as condições necessárias F.17 e F.18, obtêm-se os seguintes resultados:

- (a) Levando F.18 em F.8: conclui-se que  $l_1 = 0$ ;
- (b) Levando F.18 em F.10: conclui-se que  $l_3 = 0$ ;
- (c) Levando F.17 em F.12: conclui-se que  $r_2 = 0$ ;
- (d) Levando F.17 em F.15: conclui-se que  $r_3 = 0$ ;
- (e) Assim, as condições F.11, F.13, F.14 e F.16 são atendidas automaticamente, quando  $l_1 = l_3 = r_2 = r_3 = 0$ ; de tal maneira que:
- (f)  $L = \begin{bmatrix} 0 & l_2 & 0 \end{bmatrix}'$  e  $R_A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .
- (g) Os valores de  $l_2$  e  $r_1$  são as soluções de:

$$l_2 \cdot r_1 = \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2}$$

Finalmente, várias soluções são possíveis e dentre elas:

- (1) Escolhendo  $r_1 = 1$ , tem-se:

$$l_2 = \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2},$$

Portanto:

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$R_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (2) Escolhendo  $l_2 = 1$ , tem-se:

$$r_1 = \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2},$$

Portanto:

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$R_A = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Para o caso da matriz de entrada com incerteza  $\delta B = 0$ , tem-se:

$$B_0 + \delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix},$$

e

$$\delta B = L \cdot \Delta \cdot R_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Representando-se  $R_B$  como:  $R_B = [r]$ , vem:

$$L \cdot \Delta \cdot R_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [\delta] \cdot [r] = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall \delta \in [-1, 1].$$

Finalmente, tem-se que:

$$\frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} \cdot \delta \cdot r = 0.$$

Como,  $\frac{\tilde{f}_{21max} - \tilde{f}_{21min}}{2} \neq 0$  e  $\delta \in [-1, 1]$ ,

Então,  $r = 0$  e  $R_B = [0]$ .