



**UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA**

---

**FLÁVIO LUIZ ROSSINI**

**PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO APLICADO À  
CADEIRA DE RODAS MÓVEIS VIA ABORDAGEM POR  
LMIS**

---

Londrina  
2013

**FLÁVIO LUIZ ROSSINI**

**PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO APLICADO À  
CADEIRA DE RODAS MÓVEIS VIA ABORDAGEM POR  
LMIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração - Sistemas de Controle por Realimentação.

Especialidade - Sistemas Estritamente Reais Positivos (ERPs) e Controle com Estrutura Variável (CEV) com incertezas politópicas via Inequações Matriciais Lineares (LMIs).

Orientador - Dr. Márcio Roberto Covacic.

Londrina  
2013

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina.**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

R835p Rossini, Flávio Luiz.  
Projeto de controlador robusto aplicado à cadeira de rodas móveis via abordagem  
por LMIS / Flávio Luiz Rossini. – Londrina, 2013.  
183 f. : il.

Orientador: Márcio Roberto Covacic.  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de  
Londrina, Centro de Tecnologia e Urbanismo, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica, 2013.  
Inclui bibliografia.

1. Controle robusto – Teses. 2. Desigualdades (Matemática) – Teses. 3. Sistemas  
lineares – Teses. 4. Cadeira de rodas móveis – Teses. 5. Engenharia elétrica –  
Modelos matemáticos – Teses. I. Covacic, Márcio Roberto. II. Universidade Estadual  
de Londrina. Centro de Tecnologia e Urbanismo. Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica. III. Título.

CDU 621.3.051.025

**FLÁVIO LUIZ ROSSINI**

**PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO APLICADO À CADEIRA  
DE RODAS MÓVEIS VIA ABORDAGEM POR LMIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração - Sistemas de Controle por Realimentação.

Especialidade - Sistemas Estritamente Reais Positivos (ERPs) e Controle com Estrutura Variável (CEV) com incertezas politópicas via Inequações Matriciais Lineares (LMIs).

---

Orientador - Prof. Dr. Márcio Roberto Covacic  
Departamento de Engenharia Elétrica  
Universidade Estadual de Londrina

---

Co-orientador - Prof. Dr. Ruberlei Gaino  
Departamento de Engenharia Elétrica  
Universidade Estadual de Londrina

---

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
Departamento de Engenharia Elétrica  
Universidade Estadual Paulista – Campus de  
Ilha Solteira

Londrina, 10 de maio de 2013.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela sabedoria e força para galgar essa etapa e chegar ao final com êxito.

A meus familiares, pelo ânimo e palavras de apoio.

À minha esposa e filha, pelo incentivo e paciência de aguardarem a chegada da viagem e horas de estudo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Márcio Roberto Covacic, por ter contribuído diretamente para o sucesso desse processo de aprendizado.

Ao co-orientador Prof. Dr. Ruberlei Gaino, pelo apoio e contribuição ao trabalho.

Aos colegas Fábio Augusto Gentilin, Emerson Charles Martins e Alecsander Pereira Martins, pela companhia contínua nas viagens a Londrina, pelo apoio, companheirismo e motivação nos estudos.

Por fim, ao Conselho Nacional de Conhecimento Científico e Tecnológico – CNPQ, pelo apoio financeiro através da bolsa de estudos fornecida para fomentação desta pesquisa.

*“Não se pode ensinar tudo a alguém, pode-se apenas ajudá-lo a encontrar por si mesmo”. (Galileu Galilei)*

ROSSINI, Flávio Luiz. **Projeto de controlador robusto aplicado à cadeira de rodas móveis via abordagem por LMIS**. 2013. 183 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

## RESUMO

O presente trabalho aborda o projeto de controlador robusto aplicado a Cadeira de Rodas Móveis (CRM) via Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities – LMIs*) utilizando sistemas Estritamente Reais Positivos (ERPs). As contribuições do trabalho foram a escolha de um modelo matemático para a CRM com incerteza quanto à posição do Centro de Gravidade (CG) da mesma, o desacoplamento dos sistemas dinâmico e cinemático, a linearização dos modelos, a construção das matrizes de incertezas (vértices do politopo), a proposta da malha de controle, a obtenção das matrizes que tornam o sistema ERP e que estabilizam o sistema com uma taxa de decaimento especificada, as matrizes que tornam o sistema ERP e que estabilizam o sistema a partir da metodologia de Controle com Estrutura Variável (CEV) via LMIs, sendo desenvolvida a demonstração para sistema com número de saídas maior que o número de entradas, com incertezas paramétricas e com taxa de decaimento especificada.

**Palavras-chave-** Controlador robusto. Cadeira de rodas móveis. Desacoplamento de sistemas. Malha de controle. LMI.

ROSSINI, Flávio Luiz. **Robust controller applied to wheelchair mobile via Linear Matrix Inequalities LMI**. 2013.183 p. Dissertation (Master in Electrical Engineering) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

## **ABSTRACT**

This paper design of robust controller applied to Wheelchair Mobile (CRM) via Linear Matrix Inequalities (LMI) systems using Strictly Positive Real (SPR). The contributions of this work were the choice of a mathematical model for CRM with uncertainty about the position of the center of gravity (CG) of the same, the decoupling of the kinematic and dynamical systems, linearization of the models, the headquarters building of uncertainty (vertices the polytope), the proposal of the control loop, obtaining the matrices that make the SPR system and stabilize the system with a decay rate specified matrices that make the SPR system and stabilize the system from the control methodology with Variable Structure Control via LMIs, developed for the demonstration system with number of outputs greater than the number of entries, with parametric uncertainties and decay rate specified.

**Keywords** - Robust controller. Wheelchair mobile. Decoupling of systems. Control loop. LMI.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - Sistema realimentado dos Teoremas 4 e 5 .....	27
Figura 3.2 - Sistema realimentado do problema 1. ....	29
Figura 3.3 - Sistema realimentado do problema 2. ....	76
Figura 5.1 - Organização das unidades do projeto. ....	108
Figura 5.2 - Vista superior da CRM. ....	112
Figura 5.3 - Diagrama de Blocos, referente à dinâmica e cinemática do Robô. ....	114
Figura 5.4 - Vista superior da Cadeira Robótica Móvel (CRM) e seus respectivos parâmetros e orientações. ....	117
Figura 6.1 - Constituição da malha de controle do sistema - modelo dinâmico, matriz de transformação, matriz de ganho e modelo cinemático. ....	134
Figura 7.1 - Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\mu = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ ), sendo a saída ( $\eta = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) multiplicada por uma matriz de ganho $T =$ $10I_{2 \times 2}$ , para o primeiro vértice do politopo. ....	138
Figura 7.2 - Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [u \ \omega]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de $10^5$ . Representação do primeiro vértice do politopo. ....	140
Figura 7.3 - Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [u \ \omega]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de $10^5$ . Representação do quarto vértice do politopo. ....	145

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDP	Compensação Distribuída Paralela
CEV	Controle com Estrutura Variável
CG	Centro de Gravidade
CRM	Cadeira Robótica Móvel
ERP	Estritamente Real Positivo
IHM	Interface Homem-Máquina
LMEs	<i>Linear Matrix Equalities</i> (Equações Matriciais Lineares)
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i> (Inequações Matriciais Lineares)
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i> (Regulador Linear Quadrático)
LQE	<i>Linear Quadratic Estimator</i> (Estimador Linear Quadrático)
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i> (Gaussiano Linear Quadrático)
MIMO	<i>Multiple Input, Multiple Output</i> (Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas)
PRM	Plataforma Robótica Móvel
RP	Real Positivo
SLIT	Sistema Linear Invariante no Tempo
SPR	<i>Strictly Positive Real</i> (Estritamente Real Positiva)
SUS	Sistemas Único de Saúde
TSK	Takagi-Sugeno-Kang
UEL	Universidade Estadual de Londrina

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>CAPÍTULO 2 MÉTODOS DE LINEARIZAÇÃO .....</b>	<b>17</b>
2.1	SÉRIE DE TAYLOR .....	18
2.2	MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO DE LYAPUNOV .....	19
2.3	CONCLUSÃO PARCIAL: CAPÍTULO 2.....	22
<b>3</b>	<b>CAPÍTULO 3 CONDIÇÕES BASEADAS EM LMIS PARA SISTEMAS ERP.....</b>	<b>24</b>
3.1	SISTEMAS ERP.....	24
3.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	29
3.3	SISTEMAS COM REALIMENTAÇÃO DA SAÍDA.....	30
3.3.1	Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas .....	30
3.3.2	Sistemas com Números Diferentes de Entradas ( $m$ ) e Saídas ( $p$ ).....	33
3.4	TAXA DE DECAIMENTO .....	59
3.4.1	Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas.....	60
3.4.2	Sistemas com Números Diferentes de Entradas ( $m$ ) e Saídas ( $p$ ).....	63
3.5	SISTEMAS INCERTOS.....	75
3.5.1	Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas.....	77
3.5.2	Sistemas com Números Diferentes de Entradas ( $m$ ) e Saídas ( $p$ ).....	78
3.5.3	Sistemas Incertos com Taxa de Decaimento .....	84
3.5.3.1	Sistemas com o mesmo número de entradas e saídas .....	84
3.5.3.2	Sistemas com números diferentes de entradas e saídas.....	86
3.6	CONCLUSÃO PARCIAL: Capítulo 3 .....	92
<b>4</b>	<b>CAPÍTULO 4 COM ESTRUTURA VARIÁVEL UTILIZANDO LMIS.....</b>	<b>93</b>
4.1	ESTABILIDADE E ROBUSTEZ.....	95
4.2	ESTABILIDADE, ROBUSTEZ E TAXA DE DECAIMENTO.....	101
4.3	ESTABILIDADE, ROBUSTEZ, TAXA DE DECAIMENTO E RESTRIÇÕES NA ENTRADA E NA SAÍDA .....	101
4.4	CONCLUSÃO PARCIAL: CAPÍTULO 4 .....	104

<b>5</b>	<b>CAPÍTULO 5 MODELO DINÂMICO DA CRM.....</b>	<b>105</b>
5.1	CONSTRUÇÃO DA CADEIRA DE RODAS MOVEIS.....	107
5.2	PRIMEIRO MODELO DINÂMICO DA CRM.....	108
5.3	MODELO COMPLETO DA CRM.....	115
5.4	DESACOPLAMENTO DOS MODELOS DINÂMICO E CINEMÁTICO DA CRM.....	123
5.5	CONCLUSÃO PARCIAL: CAPÍTULO 5.....	125
<b>6</b>	<b>CAPÍTULO 6 LINEARIZAÇÃO EM TORNO NA ORIGEM.....</b>	<b>127</b>
6.1	LINEARIZAÇÃO DO MODELO DINÂMICO.....	127
6.2	LINEARIZAÇÃO DO MODELO CINEMÁTICO.....	131
6.3	CONCLUSÃO PARCIAL: CAPÍTULO 6.....	135
<b>7</b>	<b>CAPÍTULO 7 ABORDAGEM LMI PARA PROJETO DE CONTROLADOR.....</b>	<b>136</b>
7.1	SISTEMA ERP INCERTOS COM ESPECIFICAÇÃO DA TAXA DE DECAIMENTO	
7.1.1	Sistema Com o Mesmo Número de Entradas e Saídas: Modelo Dinâmico .....	136
7.1.2	Sistema Com Números de Saídas Maior Que os Números de Entradas: Modelo Cinemático .....	139
7.2	CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL UTILIZANDO LMIs: ROBUSTEZ, ESTABILIDADE E TAXA DE DECAIMENTO .....	141
7.2.1	Sistema Com Números de Saídas Maior Que os Números de Entradas .....	141
7.3	CONCLUSÃO PARCIAL: CAPÍTULO 7.....	146
<b>8</b>	<b>CAPÍTULO 8 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....</b>	<b>147</b>
<b>9</b>	<b>CAPÍTULO 9 CONCLUSÃO.....</b>	<b>149</b>
9.1	SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS.....	150
9.2	ARTIGO PUBLICADO E ARTIGO SUBMETIDO.....	150
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>151</b>
	<b>APÊNDICES</b> .....	<b>158</b>
	APÊNDICE A – Complemento de Schur.....	159

APÊNDICE B – Formulação Para Resolver LMEs. ....	160
APÊNDICE C – Zeros de Transmissão de um Sistema. ....	162
APÊNDICE D – Algoritmo de Linearização do Modelo Dinâmico. ....	163
APÊNDICE E – Algoritmo de Linearização do Modelo Cinemático. ....	165
APÊNDICE F – Gráficos dos Vértices dos Polítopos do Modelo Dinâmico da CRM. ....	167
APÊNDICE G – Gráficos dos Vértices dos Polítopos do Modelo Cinemático da CRM. ....	174
APÊNDICE H – Gráficos dos Vértices dos Polítopos do Modelo Cinemático da CRM: CEV com LMIs. ....	181

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

O controle automático tem contribuído no avanço da engenharia e da ciência. Sua importância é evidente no desenvolvimento de veículos espaciais, sistemas robóticos e parte integrante dos processos industriais modernos. Nesse contexto, a Teoria de Controle, como todo campo da ciência, se desenvolve ininterruptamente, com períodos de maior avanço, outros nem tanto. O primeiro trabalho significativo em controle automático foi o de James Watt no século XVIII, que desenvolveu um controlador centrífugo para o controle de velocidade de uma máquina a vapor. Outros trabalhos, nos primórdios do desenvolvimento da Teoria e Controle, foram de Minorsky (1922), Nyquist (1932), Hazen (1934) e Evans (1950), cujos temas envolviam a formulação de critérios para a análise de estabilidade do sistema (AGUIRRE, 2007; OGATA, 2010).

A partir do final da década de 1950, o foco dos projetos de controle tem sido o projeto de um sistema que seja ótimo para uma determinada especificação do mesmo. Estima-se que, de 1960 em diante, o advento dos computadores digitais tornou possível a análise, no domínio do tempo, de sistemas complexos, estimulando o desenvolvimento da moderna Teoria de Controle, cunhada nas técnicas de análise e síntese por meio de variáveis de estado (OGATA, 2010).

Ao considerar a alternância dos avanços da Teoria de Controle, um desses momentos de mudança do quadro conceitual ocorreu no final da década de 1970 e ao longo da década de 1980. Estabeleceu-se a ideia de que todo controlador deveria ser robusto. Assim, desenvolveram-se ferramentas de projeto para garantir que o controlador resultante fosse dotado de tal propriedade.

Resumidamente, isso significa que todo controlador deveria ser capaz de assegurar um desempenho em malha fechada satisfatório, ainda que o processo (ou a ‘planta’) a ser controlado tenha diferenças significativas de comportamento em comparação com o modelo matemático utilizado durante a etapa de projeto. (AGUIRRE, 2007).

Atualmente a Teoria de Controle Robusto, em sua principal vertente, surge da otimização da norma  $H_\infty$  da malha fechada (AGUIRRE, 2007; ZAMES, 1981). O Controle  $H_\infty$  foi definido no domínio da frequência e conseqüentemente estendido para espaço de estados, assim possibilitando sua generalização (AGUIRRE, 2007; DOYLE et al., 1989; HASSIBI; SAYED; KAIATH, 1999; VAN DER SCHAFT, 1991, 1992; ZHOU; DOYLE;

GLOVER, 1996). Projetos de controladores  $H_\infty$  têm sido desenvolvidos para solucionar os mais variados tipos de problemas, tais como, aplicações em plantas químicas, em automóveis, em aviões, em robótica móvel e em sistemas de potência (CHEN; LIU; SUN, 2005; HWANG; HAN, 2005; LUNDSTRÖM; SKOGESTAD; DOYLE, 1999; MARCOS; BALAS, 2005; MEI et al., 2005).

No contexto do Controle Robusto, por volta de 1990, as Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities* - LMIs) surgem como uma das ferramentas mais importantes (AGUIRRE, 2007). As descrições por LMIs emergiram como uma nova formulação elegante, genérica, poderosa de fácil manipulação “[...] alternativa a uma vasta gama de abordagem de controle e estimação fortemente baseadas, até aquele momento, nas (des)igualdades algébricas de Riccati como, por exemplo, LQR, LQE, LQG e o controle ótimo  $H_2$  ou  $H_\infty$ , [...]” (AGUIRRE, 2007). Contudo, a relação entre descrições por LMIs e várias abordagens em Teoria de Controle não é recente. “A primeira descrição por LMIs em Teoria de Controle surgiu do estudo sobre estabilidade de sistemas dinâmicos, que data de 1892, apresentado na tese de doutorado de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov.” (AGUIRRE, 2007). Na opinião dos autores Reinaldo Martinez Palhares e Eduardo Nunes Gonçalves (AGUIRRE, 2007), uma possível explicação na demora em redescobrir as LMIs na Teoria de Controle deveu-se ao interesse da comunidade de controle em dispor de ferramentas de fácil manipulação numérica. Outro ponto que contribuiu para retardar a exploração de soluções por LMIs talvez seja o grau de importância com que as abordagens por Riccati se revestiram. “No entanto, no início da década de 1990 já eram evidentes as limitações impostas por abordagens baseadas em Riccati em gerar formulações mais abrangentes e amigáveis.” (AGUIRRE, 2007).

Ao considerar o exposto acima, propõem-se aplicar as LMIs para projeto de controlador robusto aplicado a uma Cadeira de Rodas Móveis (CRM), a fim de auxiliar as pessoas com deficiência física. O Brasil encontra-se num processo de organização de dados estatísticos oficiais sobre pessoas com deficiência, após a Lei nº 7.853/89; o Censo Demográfico de 2000 identificou um contingente de 24,6 milhões de pessoas com algum tipo de deficiência, portanto 14,5% da população brasileira. Naquele momento, foram detectados 4% da população com deficiência física, sendo este grupo composto por 200 mil paraplégicos, 50 mil tetraplégicos, dentre outras lesões físicas. (BRASIL, 2010; RABEH; CALIRI, 2010).

Para conscientizar e mobilizar a sociedade e organizações o Ministério da Saúde estabeleceu um política de inclusão das pessoas com deficiência, “[...] voltada para a inclusão das pessoas com deficiência em toda a rede de serviços do Sistema Único de Saúde (SUS)

[...]” (BRASIL, 2010). Uma das diretrizes desta política proposta pelo Ministério da Saúde a serem implementadas, juntamente nas três esferas de gestão e incluindo as parcerias interinstitucionais, é a promoção da qualidade de vida as pessoas com deficiência.

A promoção da qualidade de vida, segundo o Ministério da Saúde (BRASIL, 2010), “[...] é uma diretriz que deve ser compreendida como responsabilidade social compartilhada, visando assegurar a igualdade de oportunidades, a construção de ambientes acessíveis e a ampla inclusão sociocultural.” (BRASIL, 2010). Para promover tal diretriz, torna-se necessário construir acesso às escolas, a ambientes públicos, a serviços de saúde, a meios de transporte, etc. Sendo assim, para viabilização esta política nacional, os gestores do SUS, tendo como parceiros potenciais as áreas da educação, desenvolvimento social, direito humano, etc, assim, os mesmos investem esforços para consolidar compromissos institucionais para a progressiva inclusão das pessoas com deficiência em suas comunidades (BRASIL, 2010).

Tendo em vista o exposto acima, um dos objetivos do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade estadual de Londrina (UEL) é melhorar a expectativa de vida de tetraplégicos, desde o ano de 2000. Sendo assim, o departamento está desenvolvendo uma cadeira de rodas para tetraplégicos (GERMANOVIX et al., 2003). Em meio a todos estes esforços, o presente trabalho tem como objetivo projetar o controlador de realimentação da saída e analisar o desempenho do sistema de controle. Para isso, apresenta-se uma abordagem para projeto de Controlador Robusto via LMIs aplicado a uma Plataforma Robótica Móvel. A análise de controle do sistema utiliza uma estrutura cinemática modelada por Mazo et al (1995) e adaptada em Germanovix et al. (2003) para tetraplégicos, por meio de sopro e sucção. Em trabalhos recentes, Ferreira, Cervantes e Germanovix (2008) adaptaram os comandos de sopro e sucção (GERMANOVIX et al., 2003) a uma cadeira de rodas comercial com *joystick*.

Uma cadeira de rodas robotizada é útil para pessoas deficientes que não são capazes de conduzir manualmente uma cadeira de rodas, como as pessoas tetraplégicas. Usando uma interface homem-máquina (IHM), baseada em sinais de sopro e sucção da pessoa com deficiência, a mesma pode conduzir a cadeira de rodas robotizada ao local desejado. Assim, selecionou-se o modelo dinâmico da cadeira de rodas construído por De La Cruz, Bastos e Carelli (2011), uma vez que a principal contribuição do modelo dinâmico foi a incerteza quanto a posição do Centro de Gravidade da mesma (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).



O projeto de controlador robusto aplicado à Cadeira de Rodas Móveis (CRM), desenvolvido por este trabalho, apresenta técnicas de linearização de sistemas, projeto de sistema Estritamente Real Positivo (ERP) e análise dos resultados obtidos. As técnicas de linearização usadas por este trabalho são: Série de Taylor e o Método de Linearização de Lyapunov (OGATA, 2010; SLOTINE; LI, 1991).

Os sistemas ERP têm grande importância no controle de sistemas com incertezas e distúrbios, pois possui resultados relevantes quanto à estabilidade de sistemas (ANDERSON, 1968). Os sistemas Reais Positivos (RP) nasceram na teoria de circuitos elétricos e foram definidos dentro dos Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT). As matrizes de transferência RP e ERP possuem duas interpretações em termos de circuitos elétricos. Considere dois nós de um circuito elétrico composto pela conexão de elementos passivos, Resistor ( $R$ ), Indutor ( $L$ ) e Capacitor ( $C$ ), de forma arbitrária.

Então, a impedância usando a Transformada de Laplace entre os dois nós,  $Z(s)$  é RP, e, de modo inverso, qualquer função de transferência  $Z(s)$  RP pode ser realizada como a impedância entre dois nós de um circuito elétrico com elementos passivos  $R$ ,  $L$  e  $C$ . Agora, se aplicarmos uma tensão entre estes dois nós mencionados anteriormente e se  $Z(s)$  for RP, então a soma da energia inicial armazenada no circuito, no instante inicial  $t = 0$ , com a energia fornecida no intervalo  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , deve ser maior ou igual à energia armazenada em  $t = T$ .”(LORDELO, 2000).

Este trabalho utiliza os resultados dos sistemas ERP baseados em LMIs e Controle com Estrutura Variável (CEV) de Covacic (2006) e Covacic et al (2008), para plantas com número de saídas maior que o número de entradas. E para análise dos resultados são ilustrados gráficos, os quais evidenciam as regiões de solução e gráficos no domínio do tempo contínuo, para apresentar alguns estudos de caso.

No capítulo 2 serão abordados os seguintes métodos de linearização: Série de Taylor e Método de Linearização de Lyapunov. Assim, com estas ferramentas torna-se possível adequar o modelo não-linear da CRM às técnicas de projeto de controladores propostas.

O capítulo 3 tratará de condições baseadas em LMIs para sistemas ERP. O capítulo mostra a formulação para obter um sistema ERP e em seguida trata do projeto de compensador estático com retroação da saída. O capítulo aborda também as especificações para sistemas com o mesmo número de entradas e saídas, sistema com número de saídas maior que o número de entradas, taxa de decaimento e incertezas na planta.

O capítulo 4 discorrerá sobre o método de projeto de CEV utilizando LMIs. Descreverá o método de CEV para sistemas com o mesmo número de entradas e de saídas.

Apresentam-se as formulações para estabilidade, robustez, taxa de decaimento e restrição dos sinais de entrada e de saída.

No capítulo 5 descreve-se a preocupação do Ministério da Saúde quanto a inclusão das pessoas com deficiência na sociedade. Em seguida, neste capítulo, encontram-se duas contribuições deste trabalho, a saber, a escolha de um modelo matemático para a Cadeira de Rodas Móveis que inclua incertezas quanto à posição do Centro de Gravidade (CG) em relação ao sistema móvel de coordenadas e o desacoplamento do modelo dinâmico do modelo cinemático da CRM.

No capítulo 6, encontram-se três contribuições deste trabalho. A linearização do modelo dinâmico e a linearização do modelo cinemático, os vértices do politopo correspondentes as matrizes característica do sistema e de entrada do sistema e a malha de controle para a CRM, sendo propostos dois controladores estáticos de realimentação da saída.

No capítulo 7 são apresentados os resultados quanto ao projeto e análise do controlador robusto desenvolvidos neste trabalho. As contribuições deste capítulo consistem na obtenção do controlador estático do modelo dinâmico para sistemas Estritamente Reais Positivos com incertezas politópicas e imposição da taxa de decaimento, a obtenção do controlador estático do modelo cinemático por meio de sistemas Estritamente Reais Positivos com incertezas politópicas e imposição da taxa de decaimento, a demonstração para projeto e análise de sistemas com número de saídas maior que o número de entradas com incertezas politópicas e imposição da taxa de decaimento e a última contribuição, não menos importantes que as demais, obtenção do controlador estático modelo cinemático por Controle com Estrutura Variável com incertezas politópicas e imposição da taxa de decaimento.

No capítulo 8 discutem-se os resultados obtidos no projeto. Assim, evidenciam-se as incertezas consideradas no projeto de controlador robusto da CRM e destaca-se a taxa de decaimento obtida no projeto do controlador estático para parte dinâmica da CRM. Para o modelo cinemático, evidenciam-se as incertezas consideradas e a taxa de decaimento encontrada para o sistema.

Por fim, no capítulo 9, relata-se a importância do assunto escolhido, incluem-se os principais resultados do projeto, apresentam-se sugestões para pesquisas futuras e a disseminação do trabalho no meio acadêmico.

## **CAPÍTULO 2 MÉTODOS DE LINEARIZAÇÃO**

### **MÉTODOS DE LINEARIZAÇÃO**

Este capítulo apresenta dois métodos de linearização para sistemas não-lineares. Tais métodos produzem modelos lineares locais. Os métodos apresentados serão: expansão por Série de Taylor (OGATA, 2010) e Método de Linearização de Lyapunov (SLOTINE; LI, 1991).

Segundo Geromel e Korogui (2011) “Aproximar e saber usar aproximações é uma arte.” Os problemas de sistemas dinâmicos reais sempre apresentam, em sua essência fenômenos não lineares, desde simples variações do ganho com a amplitude do sinal de entrada a efeitos radicais como saturação, folga, deslizamento, zona morta, atrito de Coulomb, sendo estes não representados por equações lineares (CASTRUCCI, BITTAR; SALES, 2011; GEROMEL; KOROGUI, 2011).

Considerando os sistemas não-lineares, tanto a análise quanto o projeto de sistemas de controle são mais complexos quando comparados aos sistemas lineares. A linearização é o método de determinar um modelo linear local, do sistema não-linear, em um ponto de operação que descreva um comportamento similar a dinâmica original. “Há mais de 100 anos, Lyapunov provou que se o modelo linear, obtido através de processo de linearização de um modelo não-linear, é válido em uma região em torno do ponto de operação e se é estável, então existe uma região contendo o ponto de operação na qual o sistema não-linear é estável.” (ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2013).

Portanto, ao projetar um sistema de controle para um sistema não-linear, quando o sistema é linearizável no ponto de operação, pode-se seguramente obter uma aproximação linear deste modelo, para o ponto de equilíbrio, e utilizar a teoria de controle linear para projetar o controlar desejado. Assim, utilizá-lo para controlar o sistema não-linear, garantindo sua estabilidade nas vizinhanças do ponto de operação (ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2013; OGATA, 2010; SLOTINE; LI, 1991).

Técnicas modernas de projeto de controladores utilizando LMI para sistemas não-lineares possibilitam o sistema trabalhar próximo de um conjunto de pontos de operação, garantindo a estabilidade do sistema não-linear e também um conjunto de restrições de desempenho temporal (ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2013).

A seguir, na seção 2.1 é apresentada a metodologia de linearização em expansão por Série de Taylor e na seção 2.2 é ilustrado um procedimento mais abrangente para linearização, o Método de Linearização de Lyapunov.

## 2.1 SÉRIE DE TAYLOR

Nesta seção, será mostrada uma técnica de linearização aplicável à maioria dos sistemas não-lineares. O método é baseado na expansão da função não-linear por série de Taylor, em torno de um ponto de operação. Para obtenção do modelo matemático linear de um sistema não-linear supõe-se que a variação (erro do modelo linear) do sistema seja baixa em relação a alguma condição de operação (OGATA, 2010).

Considere um sistema não-linear cuja grandeza de saída  $y$  é função de  $n$  grandezas de entrada  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , de modo que

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.1)$$

Pode-se obter uma aproximação linear de  $y$  expandindo-se a equação ((2. 1) em série de Taylor, em torno do ponto de operação  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$ . A equação ((2. 1) torna-se, então,

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} (x_n - \bar{x}_n) \right] + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} (x_n - \bar{x}_n)^2 \right] + \dots \quad (2.2)$$

sendo as derivadas parciais calculadas em  $x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2, \dots, x_n = \bar{x}_n$ . Próximo ao ponto de operação, os termos de maior ordem são negligenciados, se e somente se a variação de  $x_i - \bar{x}_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , for pequena (OGATA, 2010). Assim, o modelo matemático linear do sistema não-linear em análise, nas vizinhanças do ponto de operação é dado por

$$y \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} (x_n - \bar{x}_n) \right]. \quad (2.3)$$

Portanto, o modelo matemático (2.3) utilizado na análise e no projeto pode representar, com acurácia, a dinâmica de um sistema real nas condições específicas de operação, porém pode não ser significativo para apurar o comportamento em outras condições de operação. Portanto, se as condições de operação variarem muito, o modelo linear não é adequado (OGATA, 2010).

## 2.2 MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO DE LYAPUNOV

O método de linearização de Lyapunov diz respeito à estabilidade local de um sistema não-linear. Como todos os sistemas físicos são inerentemente não-lineares, o método de linearização de Lyapunov serve como ferramenta fundamental para uso das técnicas de controle linear, isto é, mostra que projeto de estabilidade para controle linear garante a estabilidade do sistema físico original localmente (SLOTINE; LI, 1991).

Considere o sistema dinâmico não-linear representado por um conjunto de equações diferenciais não-lineares na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

sendo  $\mathbf{f}$  uma função vetorial não-linear de dimensão  $n \times 1$  e  $\mathbf{x}$  vetor de estado de dimensão  $n \times 1$ .

O número de variáveis de estado  $n$  é chamado de ordem do sistema. Uma solução para  $\mathbf{x}(t)$  da equação  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  é usualmente correspondente a uma curva no espaço de estados com  $t$  variando a partir de zero até o infinito. Esta curva é geralmente referida como uma trajetória do sistema (SLOTINE; LI, 1991).

É importante observar que a equação (2.4) não contém explicitamente a entrada de controle como uma variável, a qual é diretamente aplicado ao sistema de controle realimentado. A razão é que a equação  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  pode representar a dinâmica de malha fechada de um sistema de controle realimentado, com a entrada de controle sendo uma função de estado  $\mathbf{x}$  e tempo  $t$ , e portanto desaparecendo na dinâmica em malha fechada (SLOTINE; LI, 1991). Especialmente, se a dinâmica da planta for

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.5)$$

e alguma lei de controle for selecionada

$$\mathbf{u} = g(\mathbf{x}, t), \quad (2.6)$$

então a dinâmica em malha fechada é

$$\dot{\mathbf{x}} = f[\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, t), t], \quad (2.7)$$

que pode ser reescrita na forma  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$ .

Uma classe especial de sistemas não-lineares são sistemas lineares (SLOTINE; LI, 1991). As dinâmicas dos sistemas lineares são da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \quad (2.8)$$

sendo  $A(t)$  uma matriz  $n \times n$  (SLOTINE; LI, 1991).

Os sistemas não-lineares são classificados por autônomos e não-autônomos, de acordo com a Definição 1.

**Definição 1** (SLOTINE; LI, 1991) O sistema não-linear  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$  é dito ser autônomo se  $f$  não depende explicitamente do tempo, isto é, se as equações de estado podem ser escritas

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

caso contrário, o sistema é chamado não-autônomo.

Considere o sistema autônomo  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  e suponha que  $f(\mathbf{x})$  é continuamente diferenciável. Então as dinâmicas do sistema podem ser escritas como

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \mathbf{x} + f_h(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

sendo  $f_h(\mathbf{x})$  designado para os termos de ordem elevada em  $\mathbf{x}$ .

Usou-se a matriz constante  $\mathbf{A}$  para denotar a matriz Jacobiana  $\mathbf{A}$  de  $\mathbf{f}$  com relação a  $\mathbf{x}$  em  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Uma matriz  $n \times n$  de elementos  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , dada por

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \quad (2.11)$$

sendo  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Então o sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  é chamado de linearização ou aproximação linear do sistema não-linear original (equação (2.9)) no ponto de equilíbrio  $\mathbf{0}$ .

Observe a similaridade, começando com um sistema não-linear não-autônomo com uma entrada de controle  $\mathbf{u}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.12)$$

tal que  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , pode-se escrever

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}}} \mathbf{x} + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}}} \mathbf{u} + \mathbf{f}_h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.13)$$

sendo  $\mathbf{f}_h(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  designado para os termos de ordem elevada em  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$ .

A matriz  $\mathbf{A}$  denota a matriz Jacobiana  $\mathbf{A}$  de  $\mathbf{f}$  com relação a  $\mathbf{x}$ , em  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , e  $\mathbf{B}$  denota a matriz Jacobiana  $\mathbf{B}$  de  $\mathbf{f}$  com relação a  $\mathbf{u}$  no mesmo ponto, sendo uma matriz  $n \times m$  de elementos  $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$ , sendo  $m$  o número de entradas,  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, m$ . Tem-se

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}}}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}}}. \quad (2.15)$$

Assim, o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.16)$$

é a linearização ou aproximação linear do sistema não-linear original em  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  (SLOTINE; LI, 1991).

Considere a planta definida em (2.16), com  $m$  entradas e  $p$  saídas. O Teorema 1, dado em Slotine e Li (1991), estabelece condições necessárias para que um sistema linearizado seja estável e estende suas condições para sistemas não-lineares.

**Teorema 1** (LATHI, 2007; SLOTINE; LI, 1991)

- (i) Se o sistema linearizado é estritamente estável, isto é, se todos os autovalores de  $\mathbf{A}$  estão estritamente no Semiplano Esquerdo (SPE) do Plano Complexo, então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável para o real sistema não-linear.
- (ii) Se o sistema linearizado é instável, isto é, se ao menos um autovalor de  $\mathbf{A}$  está estritamente no Semiplano Direito (SPD) do plano complexo, então o ponto de equilíbrio é instável para o sistema não-linear.
- (iii) Se o sistema é marginalmente estável, isto é, todos os autovalores de  $\mathbf{A}$  estão no SPE do plano complexo, mas ao menos um deles no eixo imaginário, então não podemos concluir alguma coisa a partir da aproximação linear, o ponto de equilíbrio pode ser estável, assintoticamente estável, ou instável para o sistema não-linear.
- (iv) Sistema com pelo menos um autovalor de  $\mathbf{A}$  com multiplicidade maior que um no eixo imaginário é instável.

### 2.3 CONCLUSÃO PARCIAL: CAPÍTULO 2

Nas seções (2.1) e (2.2) foram mostrados dois métodos de linearização, a saber: expansão por Série de Taylor e o método de linearização de Lyapunov. A Série de Taylor é o método de linearização mais difundido na literatura de análise e projeto de controladores para



sistemas dinâmicos. Tal assunto é encontrado com detalhes nas seguintes: Nise (2011), Castrucci, Bittar e Sales (2011), Ogata (2010), Garcia (2009), Aguirre (2007), Falleiro e Yoneyama (2002) e Slotine e Li (1991).

Já o método de linearização de Lyapunov (seção 2.2), encontra-se um tanto restrito, quanto a literatura básica nacional. Porém, tal método é encontrado em Slotine e Li (1991), sendo fundamentado e aqui relatado na forma do Teorema 1 (Linearização de Lyapunov). Mostra-se que o projeto de controle linear para sistemas MIMO (*Multiple Input, Multiple Output*) é um assunto de relevância e ao projetar um controlador, tal que, o sistema permaneça numa faixa linear, apresenta limitações, uma vez que todos os sistemas são inerentemente não-lineares (SLOTINE; LI, 1991).

No próximo capítulo encontra-se um estudo de condições baseados em LMIs para sistemas ERP.

### CAPÍTULO 3

#### CONDIÇÕES BASEADAS EM LMIS PARA SISTEMAS ERP

##### 3.1 SISTEMAS ERP

Considere a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável (COVACIC et al., 2008):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle,  $y \in \mathbb{R}^m$  a saída do sistema,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz característica do sistema,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a matriz de entrada do sistema e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a matriz de saída do sistema.

Na Definição 2 apresentam-se as condições para que a matriz de transferência  $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  do sistema (3.1) seja RP.

**Definição 2** (ANDERSON, 1968) *A matriz de transferência  $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  do sistema (3.1) é Real Positiva (RP) se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(a) *Os elementos de  $G(s)$  não possuem polos com parte real positiva;*

(b)  *$G^*(s) = G^T(s^*)$  e*

(c) *A matriz hermitiana  $J(s) = G(s) + G^T(s^*)$  é semi-definida positiva em  $Re(s) > 0$ , sendo que o asterisco (\*) denota o complexo conjugado de um escalar ou o complexo conjugado transposto de um vetor ou matriz.*

Na Definição 3 apresenta a condição para que a matriz de transferência  $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  do sistema (3.1) seja ERP.

**Definição 3** (ANDERSON, 1968) *A matriz de transferência  $G(s)$  é Estritamente Real Positiva (ERP) se  $G(s - \epsilon)$  for RP para algum  $\epsilon > 0$ .*

Considere a planta linear invariante no tempo, controlável e observável a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{3.2}$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$  e o vetor de entrada  $u \in \mathbb{R}^m$  tal que, para todo  $T$  positivo,

$$\int_0^T u(t)^T y(t) dt < \delta [ \|x(0)\| \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\| ], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.3}$$

Neste caso,  $\delta$  é uma constante positiva, que depende do estado inicial do sistema  $x(0)$  mas independe do tempo  $T$ . Os resultados a seguir foram formulados por V. M. Popov na década de 1960 (ANDERSON, 1968; COVACIC et al., 2008).

A Definição 4 estabelece a condição para que o sistema (3.2) seja dito hiperestável.

**Definição 4** (ANDERSON, 1968) *O sistema (3.2) é dito hiperestável se, para qualquer  $u(\cdot)$  limitado satisfazendo (3.3), a inequação*

$$\|x(t)\| \leq K(\|x(0)\| + \delta) \tag{3.4}$$

*é satisfeita para alguma constante positiva  $K$  e para todo  $t \geq 0$ .*

Na Definição 5, Anderson (1968) estabeleceu as condições para que o sistema (3.2) seja dito assintoticamente hiperestável.

**Definição 5** (ANDERSON, 1968) *O sistema (3.2) é dito assintoticamente hiperestável se, para qualquer  $u(\cdot)$  limitado satisfazendo (3.3), a inequação (3.4) é satisfeita e, também,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (3.5)$$

Seja, por definição,  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  a matriz de transferência do sistema (3.2), então (COVACIC et al., 2008):

**Teorema 2** (ANDERSON, 1968) *A condição necessária e suficiente para que o sistema (3.2) seja hiperestável é que  $G(s)$  seja RP.*

**Teorema 3** (ANDERSON, 1968) *A condição necessária e suficiente para que o sistema (3.2) seja assintoticamente hiperestável é que  $G(s)$  seja ERP.*

Com base nas definições e teoremas anteriores, o Lema 1 (ANDERSON, 1968) fornece condições para os sistemas ERP.

**Lema 1** (ANDERSON, 1968) *A matriz de transferência do sistema (3.1),  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , é ERP se e somente se existir uma matriz  $P = P^T$ , tal que:*

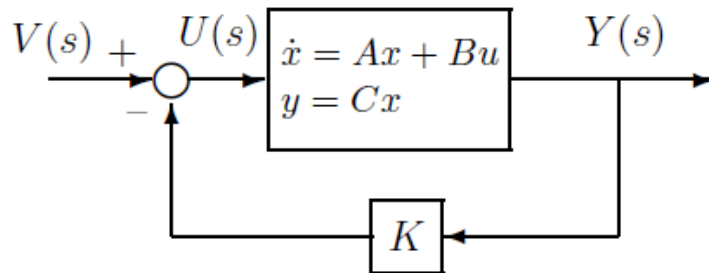
$$PA + A^T P < 0,$$

$$B^T P = C,$$

$$P > 0. \quad (3.6)$$

Huang et al. (1999) apresenta condições usando LMIs, para que o sistema realimentado descrito na Figura 3.1, com entrada  $V(s)$  e saída  $Y(s)$ , seja ERP para alguma matriz constante  $K$  (COVACIC et al., 2008). Estas condições são dadas no Teorema 4.

Figura 3.1 - Sistema realimentado dos Teoremas 4 e 5



Fonte: Covacic et al. (2008).

**Teorema 4** (HUANG et al., 1999) *Existe uma matriz  $K$ , constante, de realimentação da saída, que torna o sistema de malha fechada da Figura 3.1 ERP, se e somente se, para,  $\tilde{C} = C^T$ ,*

$$B^T \tilde{C} = \tilde{C}^T B > 0, \quad (3.7)$$

e se existir uma matriz  $X = X^T > 0$ , tal que

$$\tilde{C}_\perp^T \text{herm}(B_\perp X B_\perp^T A) \tilde{C}_\perp < 0. \quad (3.8)$$

A matriz  $\tilde{C}_\perp$  é definida como  $\tilde{C}_\perp \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$ ,  $\text{posto}(\tilde{C}_\perp) = n - m$  e  $\tilde{C}^T \tilde{C}_\perp = 0$  e a função  $\text{herm}(X)$  é dada por:  $\text{herm}(X) = \frac{1}{2}(X + X^*)$ , sendo  $X^*$  a matriz complexa conjugada transposta de  $X$ .

Sendo (3.7) e (3.8) factíveis, todas as soluções para  $K$  serão descritas por:

$$K = \tilde{C}^\dagger \text{herm}(PA) \left\{ I - \tilde{C}_\perp [\tilde{C}_\perp^T \text{herm}(PA) \tilde{C}_\perp]^{-1} \tilde{C}_\perp^T \text{herm}(PA) \right\} \tilde{C}^{\dagger T} + S, \quad (3.9)$$

sendo  $P = P^T = \tilde{C}(B^T \tilde{C})^{-1} \tilde{C}^T + B_{\perp} X B_{\perp}^T > 0$ ,  $S$  uma matriz definida positiva qualquer e  $\tilde{C}^{\dagger} = (\tilde{C}^T \tilde{C})^{-1} \tilde{C}^T$  denota a pseudo-inversa de Moore-Penrose de  $\tilde{C}$ .

O problema descrito no Teorema 4 foi estudado teoricamente em (OWENS; PRATZEL-WOLTERS; ILCHMANN, 1987; TEIXEIRA, 1989) como mostra o Teorema 5, a seguir.

**Teorema 5** (KAUFMAN; BAR-KANA; SOBEL, 1994; TEIXEIRA, 1989) *Considere a Figura 3.1. Então, existe uma matriz constante  $K$ , tal que o sistema da Figura 3.1, com entrada  $V(s)$  e saída  $Y(s)$ , seja ERP, se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

- (i)  $CB = (CB)^T > 0$ ;
- (ii) *todos os zeros de transmissão da planta  $\{A, B, C\}$  apresentam parte real negativa.*

A seguir, na Definição 6, apresentam-se as condições para que um dado sistema seja chamado de fase mínima.

**Definição 6** (OGATA, 2010) *Se todos os polos e zeros de um sistema estiverem localizados no semiplano esquerdo do plano  $s$ , o sistema será chamado de fase mínima. Se um sistema tiver pelo menos um pólo ou um zero no semiplano direito do plano  $s$ , então o sistema será chamado de fase não mínima*

**Observação 1** *É oportuno mencionar que o Teorema 5 apresenta as mesmas condições descritas em (KAUFMAN; BAR-KANA; SOBEL, 1994), Lema 1, excetuando-se que, naquele lema, a condição (i) do Teorema 5 é substituída pela condição  $CB > 0$  (COVACIC et al., 2008).*

Embora não tenha sido explicitado, no Lema 1 em (KAUFMAN; BAR-KANA; SOBEL, 1994), a condição de simetria (i) do Teorema 5 está implícita. Esta simetria é

necessária, pois das condições (3.6),  $B^T P B = (B^T P B)^T$ , tendo em vista que  $P = P^T$  (COVACIC et al., 2008).

### 3.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável (COVACIC et al., 2008):

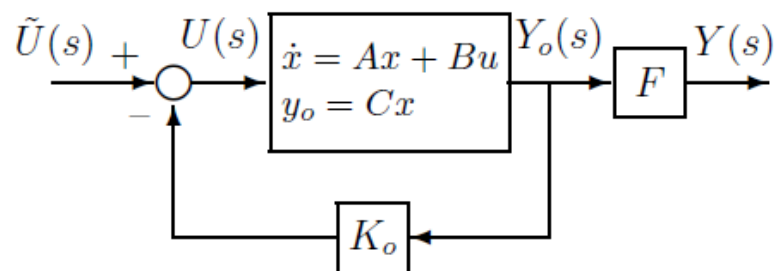
$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.10)$$

$$y = Cx$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle,  $x \in \mathbb{R}^p$  a saída do sistema,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz característica do sistema,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  a matriz de entrada do sistema e  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  a matriz de saída do sistema, com  $p \geq m$ ,  $\text{posto}(C) = p$  e  $\text{posto}(B) = \text{posto}(CB) = m$ .

**Problema 1:** Dada a planta  $\{A, B, C\}$  linear, invariante no tempo, controlável e observável, com  $\text{posto}(C) = p$  e  $\text{posto}(B) = \text{posto}(CB) = m$ , obtenha condições necessárias e/ou suficientes, usando LMIs, para a existência de matrizes constantes  $F$  e  $K_o \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , para que o sistema descrito na Figura 3.2 seja ERP (COVACIC, 2006).

Figura - 3.2 Sistema realimentado do problema 1



Fonte: Covacic et al. (2008).

### 3.3 SISTEMAS COM REALIMENTAÇÃO DA SAÍDA

Agora são apresentados teoremas para sistemas com realimentação da saída para o mesmo número de entradas e saídas e com número de saídas maior que o número de entradas.

#### 3.3.1 Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas

Considere a planta definida pelas equações (3.10), com  $p = m$ . A solução do Problema 1, para sistemas com o mesmo número de entradas e saídas, é apresentada no Teorema 6. (COVACIC et al., 2008)

**Teorema 6** (LORDELO, 2000; TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000) *O Problema 1 tem solução se e somente se existirem matrizes  $P = P^T$ ,  $R$  e  $F$ , tais que:*

$$PA + A^T P - C^T(R + R^T)C < 0, \quad (3.11)$$

$$B^T P = FC, \quad (3.12)$$

$$P > 0. \quad (3.13)$$

*Além disso, quando (3.11)–(3.13) são satisfeitas, então uma matriz  $K_o$ , que pode ser obtida pela expressão:*

$$K_o = (F^T)^{-1}R \quad (3.14)$$

*torna o sistema da Figura 3.2, com entrada  $\tilde{U}(s)$  e saída  $Y(s)$ , ERP.*

**Prova** (TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000) A partir do Lema 1 descrito na Figura 3.2, com entrada  $\tilde{U}(s)$  e saída  $Y(s)$  é ERP se e somente se existirem matrizes  $P = P^T$ ,  $K$  e  $F$ , tais que:

$$P(A - BKC) + (A - BKC)^T P < 0, \quad (3.15)$$



$$B^T P = FC, \quad (3.16)$$

$$P > 0. \quad (3.17)$$

Agora, substituindo (3.16) em (3.15) e definindo  $R = F^T K$ , tem-se:

$$PA + A^T P - C^T F^T K C - C^T K^T F C < 0,$$

$$PA + A^T P - C^T (R + R^T) C < 0, \quad (3.18)$$

Que corresponde à equação (3.11). Agora, de (3.12), como  $\text{posto}(B) = m$  então  $B^T P B = FCB$  tem posto  $m$ . Portanto,  $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$  também tem posto  $m$  e assim  $(F^T)^{-1}$  existe. Então, se o sistema na Figura 3.2 for ERP, (3.11)-(3.13) são factíveis e se (3.11)-(3.13) forem factíveis, o sistema na Figura 3.2 é ERP, para  $K$  dado em (3.14). ■

**Observação 2** *Se as LMIs dadas em (3.11)–(3.13) forem factíveis, elas podem ser facilmente resolvidas utilizando-se programas computacionais disponíveis, como o Matlab (GAHINET et al., 1995) e o LMISol (DE OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997).*

O Lema a seguir permite retirar a restrição de igualdade do Teorema 6, como descrito no Corolário 1 abaixo.

**Lema 2** (OWENS; PRATZEL-WOLTERS; ILCHMANN, 1987; TEIXEIRA, 1990) *Considere o sistema  $\{A, B, C\}$ , descrito em (3.1), com  $\text{posto}(CB) = m$ . Então, existe uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que:*

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix} = T x \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{y}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix} u \quad (3.20)$$

$$y_o = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

**Corolário 1** (LORDELO, 2000) *Considere que as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , na Figura 3.2, tenham as seguintes formas:*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ C_o B_o \end{bmatrix} \text{ e } C = [0 \quad I_m], \quad (3.22)$$

*sendo  $\text{posto}(C_o B_o) = m$ . Então, as condições necessárias e suficientes para a solução do Problema 1 são a existência de matrizes  $P = P^T$  e  $R$ , tais que*

$$P = \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & P_c \end{bmatrix} > 0 \text{ e} \quad (3.23)$$

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (R + R^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.24)$$

*sendo as matrizes  $K_o$  e  $F$  obtidas pelas expressões:*

$$K_o = (F^T)^{-1} R = (P_c C_o B_o)^{-1} R, \quad (3.25)$$

$$F = (C_o B_o)^T P_c. \quad (3.26)$$

**Prova** A prova deste Corolário é similar à prova do Teorema 6 e é apresentada em Lordelo (2000). ■

Comparando-se os resultados do Corolário 1 com os do Teorema 6, observa-se que foi removida a Equação Linear Matricial (em inglês, *Linear Matrix Equality, LME*) (3.12). Alguns programas computacionais, como o toolbox de LMI do Matlab não aceitam diretamente a existência de LME, sendo assim, torna-se necessário usar o Complemento de Schur (Apêndice A) ou a formulação proposta por Covacic (2006) (Apêndice B). Desta forma, o Corolário 1 pode ser útil para a obtenção de uma solução numérica do Problema 1 (COVACIC et al., 2008).

### 3.3.2 Sistemas com Números Diferentes de Entradas ( $m$ ) e Saídas ( $p$ )

Considere a planta definida em (3.27) (COVACIC, 2006):

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A_o \tilde{x} + B_o u \\ y &= C_o \tilde{x}\end{aligned}\tag{3.27}$$

sendo  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle,  $y \in \mathbb{R}^p$  a saída do sistema,  $A_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz característica do sistema,  $B_o \in \mathbb{R}^{n \times p}$  a matriz de entrada do sistema e  $C_o \in \mathbb{R}^{p \times n}$  a matriz de saída do sistema, com  $p \geq m$ ,  $\text{posto}(C_o) = p$  e  $\text{posto}(B_o) = \text{posto}(C_o B_o) = m$ . O Teorema 7 estabelece a solução do Problema 1.

**Teorema 7** *O Problema 1, com  $p = n$ , tem solução se e somente se existirem matrizes*

*$X = X^T$  e  $R$  que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$AX + XA^T - BR - R^T B^T < 0,\tag{3.28}$$

$$X > 0.\tag{3.29}$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = B^T X^{-1} C^{-1},\tag{3.30}$$

$$K_o = R X^{-1} C^{-1}.\tag{3.31}$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A partir do Lema 1, o sistema descrito na Figura 3.2, com entrada  $\tilde{U}(s)$  e a saída  $Y(s)$ , é ERP se e somente se existirem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_o$  e  $F$ , tais que:

$$P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0,\tag{3.32}$$

$$B^T P = FC,\tag{3.33}$$

$$P > 0.\tag{3.34}$$

Definindo-se  $X = P^{-1}$ , tem-se, de (3.32)-(3.34):

$$(A - BK_oC)X + X(A - BK_oC)^T P < 0, \quad (3.35)$$

$$B^T = FCX, \quad (3.36)$$

$$X > 0. \quad (3.37)$$

As LMIs (3.29) e (3.37) são equivalentes. Definindo-se, em (3.35),  $R = K_oCX$ , obtém-se a LMI (3.28). Como as matrizes  $C$  e  $X$  são inversíveis, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas através das equações (3.30) e (3.31). ■

Considere agora,  $p < n$ . Embora não tenham sido obtidas condições necessárias e suficientes, em termos de LMIs, para a solução do Problema 1 neste caso, são propostas por Covacic (2006), algumas condições suficientes que são úteis na solução do Problema 1.

Considere, também, o seguinte lema:

**Lema 3** (OWENS; PRATZEL-WOLTERS; ILCHMANN, 1987; TEIXEIRA, 1990)  
*Considere o sistema (3.23), com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  e  $p \geq m$ . Então, existe uma transformação linear  $T$ , de modo que:*

$$x = T\tilde{x}, \quad (3.38)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ C_o B_o \end{bmatrix} u = Ax + Bu, \quad (3.39)$$

$$\tilde{y} = [0 \quad I_p]x = Cx, \quad (3.40)$$

sendo  $I_p$  a matriz identidade de ordem  $p$ . Note que, no Lema 3,  $C_o B_o = CB$  e que

$$B^T = (CB)^T C.$$

**Prova** (TEIXEIRA, 1990) Defina  $B_{\perp} = [b_{\perp 1}, \dots, b_{\perp n-m}] \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$  e considere que o  $\text{posto}(B_{\perp}) = n - m$ ,  $B_{\perp}^T B = 0$  e  $b_{\perp i}^T b_{\perp j} = 0$  para  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n - m\}$ . Então,  $C$  pode ser considerado igual a:

$$C = M_1 B^T + M_2 B_{\perp}^T, \quad (3.41)$$

pois, de  $\text{posto}(CB) = m$ , segue que o  $\text{posto}(B) = m$  e, assim,  $\text{posto}([B : B_{\perp}]) = n$ . Note que, em (3.41),  $M_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}$  e  $CB = M_1 B^T B$ . Então, da condição de que  $\text{posto}(CB) = m$  segue que:

$$\text{posto}(M_1) = m. \quad (3.42)$$

Agora, considere, por hipótese,  $\text{posto}(C) = p$  e, de (3.41),

$$C = [M_1 : M_2] \begin{bmatrix} B^T \\ B_{\perp}^T \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

e, então,  $\text{posto}([M_1 : M_2]) = p$ . Portanto, de (3.42) e  $[M_1 : M_2] \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , existem  $p - m$  colunas de  $M_2$ , iguais por definição a  $m_1, \dots, m_{p-m}$ , tal que

$$\text{posto}[M_1 : m_1 : \dots : m_{p-m}] = \text{posto}[M_1 : M_4] = p.$$

Note que:

$$[M_1 : M_4] = M_2 N_1 N_2 \dots N_q = M_2 N, \quad (3.45)$$

sendo  $N_i \in \mathbb{R}^{n-m \times n-m}$ ,  $i = 1, \dots, q$  não singulares e que permutam duas colunas de  $M_2 N_0 \dots N_{i-1}$ , sendo  $N_0 = I_{n-m}$ .

É fácil mostrar que  $N_i^{-1} = N_i$  e assim, de (3.45),  $N^{-1} = N_q \dots N_1$ . Então, de (3.43) e (3.45), segue que:

$$C = [M_1 : M_4] \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & NN^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T \\ B_{\perp}^T \end{bmatrix} = [M_1 : M_3 : M_4] \begin{bmatrix} B^T \\ N^{-1}B_{\perp}^T \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Note que  $N^{-1}B_{\perp}^T$  tem as mesmas linhas de  $B_{\perp}^T$ , mas com algumas mudanças de posição. Portanto, de  $B_{\perp}^T B = 0$  e  $b_{\perp i}^T b_{\perp j} = 0, i \neq j$ , defina:

$$N^{-1}B_{\perp}^T = [B_{0\perp} : \tilde{B}_{0\perp}]^T, \quad (3.47)$$

sendo  $B_{0\perp}^T \in \mathbb{R}^{n-p \times n}$  e  $\tilde{B}_{0\perp}^T \in \mathbb{R}^{p-m \times n}$ . Então,  $B_{0\perp}^T B = 0$ ,  $\tilde{B}_{0\perp}^T B = 0$  e  $B_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp} = 0$ . Portanto, de (3.46) e (3.47), seque que:

$$C = M_1 B^T + M_3 B_{0\perp}^T + M_4 \tilde{B}_{0\perp}^T.$$

Sabendo-se que  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , temos, a partir de (3.44):

$$\text{posto}([M_1 : M_4]) = \text{posto}([M_1 : M_3 : M_4]) = p. \quad (3.48)$$

Agora, considere a matriz:

$$T = \begin{bmatrix} B_{0\perp}^T \\ C \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Então:

$$T^{-1} = [B_{0\perp} [B_{0\perp}^T B_{0\perp}]^{-1} + BK_1 + \tilde{B}_{0\perp} K_2 : C^T [CC^T]^{-1} + C_{\perp}^T K_3], \quad (3.50)$$

sendo:

$$C_{\perp}^T = B[B^T B]^{-1}K_4 + B_{0\perp} [B_{0\perp}^T B_{0\perp}]^{-1} + \tilde{B}_{0\perp} [\tilde{B}_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp}]^{-1}K_5, \quad (3.51)$$

$$M_3 + M_1 K_4 + M_4 K_5 = M_3 + M_4 \tilde{B}_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp} K_2 + M_1 B^T B K_1 = 0, \quad (3.52)$$

$$K_3 = -\tilde{B}_{0\perp}^T C (CC^T)^{-1}. \quad (3.53)$$

Note que  $CC_{\perp}^T = 0$  e, de (3.48), existem  $K_1, K_2, K_4$  e  $K_5$  tais que (3.52) seja satisfeita, pois  $\tilde{B}_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp}$  e  $B^T B$  são não-singulares. Portanto, de (3.10), (3.49) e (3.50), é fácil mostrar que:

$$TB = \begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix} = B_N, \quad CT^{-1} = [0 \quad I_p] = C_N, \quad (3.54)$$

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = A_N, \quad Tx = \begin{bmatrix} e_1 \\ \tilde{y} \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

sendo  $A_1 \in \mathbb{R}^{n-p \times n-p}$ ,  $A_4 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $A_3 \in \mathbb{R}^{p \times n-p}$  e  $A_2 \in \mathbb{R}^{n-p \times p}$ . Então, o Lema 3 está provado. ■

Os Teoremas 8 e 9, consideram que as matrizes da planta satisfazem à condição  $B^T = (CB)^T C$ . Uma condição suficiente para a solução do Problema 1, com  $B^T = (CB)^T C$ , é apresentada no Teorema 8 (COVACIC, 2001).

**Teorema 8** (COVACIC, 2001) *Uma condição suficiente para a solução do Problema 1, com  $B^T = (CB)^T C$ , é a existência de matrizes  $P = P^T$ ,  $N$  e  $M$ , tais que:*

$$PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T < 0, \quad (3.56)$$

$$B^T P = MB^T, \quad (3.57)$$

$$P > 0. \quad (3.58)$$

*Quando (3.56)–(3.58) são satisfeitas, então as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:*

$$F = M(CB)^T, \quad (3.59)$$

$$K_o = (M^T)^{-1} N. \quad (3.60)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A partir do Lema 1, o sistema descrito na Figura 3.2, com entrada  $\tilde{U}(s)$  e saída  $Y(s)$ , é ERP se e somente se existirem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_o$  e  $F$ , tais que:

$$P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0, \quad (3.61)$$

$$B^T P = FC, \quad (3.62)$$

$$P > 0. \quad (3.63)$$

Considere que existem matrizes  $P$ ,  $N$  e  $M$  que satisfazem às equações (3.56)-(3.58).

As equações (3.58) e (3.63) são equivalentes.

Como  $B^T = (CB)^T C$ , então, de (3.57), tem-se que:

$$B^T P = MB^T = M(CB)^T C. \quad (3.64)$$

Desta forma, para  $F = M(CB)^T$ , a equação (3.57) implica na equação (3.62).

Finalmente, de (3.56) e (3.57), obtém-se:

$$\begin{aligned} & PA + A^T P - BNC - (BNC)^T \\ &= PA + A^T P - BM^T (M^T)^{-1} NC - C^T N^T M^{-1} MB^T \\ &= PA + A^T P - PB(M^T)^{-1} NC - C^T N^T M^{-1} B^T P \\ &= P(A - B(M^T)^{-1} NC) - (A - B(M^T)^{-1} NC)^T P < 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Definindo-se  $K_o = (M^T)^{-1} N$ , tem-se:

$$P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0 \quad (3.66)$$

Portanto, a equação (3.56) implica na equação (3.61). ■



**Corolário 2** (COVACIC, 2001) *A condição necessária e suficiente para a factibilidade das LMIs (3.31)–(3.33) é que todos os zeros de transmissão do sistema  $\{A, B, B^T\}$  tenham parte real negativa.* A definição dos zeros de transmissão faz parte do Apêndice C.

**Prova** (COVACIC, 2006) (Suficiência) Pelo Teorema 5, se todos os zeros de transmissão de sistema  $\{A, B, B^T\}$  têm parte real negativa, então existe uma matriz  $K$ , tal que o sistema  $\{A - BKB^T, B, B^T\}$  seja ERP, pois  $\text{posto}(B) = m$ , então  $B^T B > 0$ . Assim, de acordo com o Lema 1, existe  $P = P^T$ , tal que:

$$P(A - BKB^T) + (A - BKB^T)^T P < 0, \quad (3.67)$$

$$B^T P = B^T, \quad (3.68)$$

$$P > 0. \quad (3.69)$$

As equações (3.69) e (3.58) são equivalentes. A partir de (3.68), definido  $M = I_m$ , tem-se:

$$B^T P = MB^T. \quad (3.70)$$

Portanto, a equação (3.68) implica na equação (3.57).

A partir de (3.67), tem-se:

$$PA + A^T P - PBKB^T - BK^T B^T P < 0. \quad (3.71)$$

Substituindo (3.68) em (3.71), segue que:

$$PA + A^T P - BKB^T - BK^T B^T < 0. \quad (3.72)$$

Da hipótese de que  $B^T = (CB)^T C$ , tem-se:

$$PA + A^T P - BK(CB)^T C - C^T (CB) K^T B^T < 0. \quad (3.73)$$

Definindo  $N = K(CB)^T$ , segue que:

$$PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T < 0. \quad (3.74)$$

Portanto, a equação (3.67) implica na equação (3.56).

(Necessidade) De (3.56) a (3.58), o sistema  $\{A - BK_o C, B, MB^T\}$  é ERP e, portanto, todos os zeros de transmissão deste sistema têm parte real negativa. Como a matriz  $M$  é inversível, pode-se verificar que os sistemas  $\{A - BK_o C, B, MB^T\}$  e  $\{A, B, B^T\}$  têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de  $\{A - BK_o C, B, MB^T\}$ :

$$\begin{bmatrix} sI - A + BK_o C & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Assim, todos os zeros de transmissão do sistema  $\{A, B, B^T\}$  têm parte real negativa. ■

Outra condição suficiente para a solução do Problema 1, com  $B^T = (CB)^T C$ , é apresentada no Teorema 9.

**Teorema 9** (COVACIC, 2001) *Uma condição suficiente para a solução do Problema 1, com  $B^T = (CB)^T C$ , é a existência de matrizes  $X = X^T$ ,  $Y$  e  $Z$ , tais que:*

$$AX + XA^T - BZC - C^T Z^T B^T < 0, \quad (3.76)$$

$$CX = YC, \quad (3.77)$$

$$X > 0. \quad (3.78)$$

Quando (3.36)–(3.38) são satisfeitas, então as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = (CB)^T Y^{-1}, \quad (3.79)$$

$$K_o = ZY^{-1}. \quad (3.80)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A partir do Lema 1, o sistema descrito na Figura 3.2, com entrada  $\tilde{U}(s)$  e saída  $Y(s)$ , é ERP se e somente se existirem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_o$  e  $F$ , tais que:

$$P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0, \quad (3.81)$$

$$B^T P = FC, \quad (3.82)$$

$$P > 0. \quad (3.83)$$

Definindo-se  $X = P^{-1}$ , tem-se, de (3.81)-(3.83):

$$(A - BK_o C)X + X(A - BK_o C)^T < 0, \quad (3.84)$$

$$B^T = FCX, \quad (3.85)$$

$$X > 0. \quad (3.86)$$

Considerando a existência de matrizes  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , que satisfazem às equações (3.76)-(3.78). As equações (3.78) e (3.86) são equivalentes. Note que, de (3.77) e (3.78),  $CXC^T = YCC^T$  tem posto  $m$  e, assim,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$  também tem posto  $m$ .

Como  $B^T = (CB)^T C$ , então, de (3.77), segue que:

$$CX = YC,$$

$$(CB)^T Y^{-1} CX = (CB)^T Y^{-1} YC,$$

$$(CB)^T Y^{-1} CX = (CB)^T C = B^T.$$

Assim, para  $F = (CB)^T Y^{-1}$ , a equação (3.77) implica a equação (3.85).

A partir da equação (3.76), obtém-se:

$$\begin{aligned} AX + XA^T - BZC - C^T Z^T B^T &< 0, \\ AX + XA^T - BZY^{-1}YC - C^T Y^T (Y^{-1})^T Z^T B^T &< 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Substituindo (3.77) em (3.87), segue que:

$$\begin{aligned} AX + XA^T - BZY^{-1}YC - C^T Y^T (Y^{-1})^T Z^T B^T &< 0, \\ (A - BZY^{-1}YC)X + X(A - BZY^{-1}YC)^T &< 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Definindo  $K_o = ZY^{-1}$ , segue que:

$$(A - BK_o C)X + X(A - BK_o C)^T < 0.$$

Portanto, a equação (3.76) implica na equação (3.84). ■

**Corolário 3** (COVACIC, 2001) *Uma condição necessária para a factibilidade das LMIs (3.76)–(3.78) é que todos os zeros de transmissão do sistema  $\{A, C^T, C\}$  tenham parte real negativa.*

**Prova** (COVACIC, 2006) De (3.76)–(3.80), o sistema  $\{A - BK_o C, C^T, Y^{-1}C\}$  é ERP e, portanto, todos os zeros de transmissão deste sistema têm parte real negativa. Como a matriz  $Y^{-1}$  é inversível, pode-se verificar que os sistemas  $\{A - BK_o C, C^T, Y^{-1}C\}$  e  $\{A, C^T, C\}$  têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares nas linhas da matriz que defini os zeros de transmissão de  $\{A - BK_o C, C^T, Y^{-1}C\}$ :

$$\begin{bmatrix} sI - A + BK_o C & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, se o sistema  $\{A - BK_oC, C^T, Y^{-1}C\}$  é ERP, ou de forma equivalente, se (3.76)-(3.78) são factíveis, todos os zeros de transmissão do sistema  $\{A, C^T, C\}$  têm parte real negativa. ■

**Observação 3** *Através de várias aplicações dos Teoremas 8 e 9, em exemplos numéricos, foi possível constatar que existem casos nos quais um funciona e o outro não e vice-versa. Desta forma, as condições destes teoremas são distintas e um teorema não pode ser visto como um caso particular do outro.*

Considere a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A_o\tilde{x} + B_o u \\ y &= C_o\tilde{x}\end{aligned}\tag{3.89}$$

Considerando a planta (3.89), os Lemas 4 e 5 são a base para os Teoremas 10 e 11, propostos por Covacic (2006):

**Lema 4** *Considere a matriz  $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , definida por:*

$$M = \begin{bmatrix} (C_o B_o)_\perp^T \\ [(C_o B_o)^T (C_o B_o)]^{-1} (C_o B_o) \end{bmatrix},\tag{3.90}$$

sendo  $(C_o B_o)_\perp^T \in \mathbb{R}^{p-m \times p}$  tal que  $(C_o B_o)_\perp^T (C_o B_o) = 0$  e  $\text{posto}[(C_o B_o)_\perp] = p - m$ . Multiplicando a saída  $\tilde{y}$  por  $M$ , defina a nova saída  $\tilde{y}_N = M C_o = C_1 \tilde{x}$ . Então, o produto  $C_1 B_o$ , com  $C_1 = M C_o$ , é dado por:

$$C_1 B_o = M C_o B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}.$$

**Lema 5** Considere o sistema (3.89), com a nova saída  $\tilde{y}_N = M\tilde{y} = MC_o = C_1\tilde{x}$ , definida no Lema 4. Então, utilizando uma transformação linear dada por:

$T = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{o\perp}^T \\ C_1 \end{bmatrix}$ , sendo  $\tilde{B}_{o\perp}^T \in \mathbb{R}^{n-p \times n}$  tal que  $\tilde{B}_{o\perp}^T B_o = 0$ ,  $\text{posto}(\tilde{B}_{o\perp}) = n - p$  e tal que  $\text{posto}(T) = n$ , o sistema transformado adquire a seguinte forma definida pelas equações (3.10), com:

$$x = T\tilde{x}, \quad y = M\tilde{y},$$

$$A = TA_oT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.91)$$

$$B = TB_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \quad (3.92)$$

$$C = C_1T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_{p-m} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}. \quad (3.93)$$

Neste caso específico, o Teorema 10, proposto por Covacic (2006), estabelece as condições necessárias e suficientes para que o sistema (3.10), com as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  definidas em (3.91)–(3.93), seja ERP.

**Teorema 10** O Problema 1, com as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  definidas em (3.91)–(3.93), tem solução se e somente se existirem matrizes  $P_{11} = P_{11}^T$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{22} = P_{22}^T$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{33} = P_{33}^T$ ,  $K_1$  e  $K_2$  que satisfazem às seguintes condições:

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{23}K_1 & P_{23}K_2 \\ 0 & P_{33}K_1 & P_{23}K_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1^T P_{23}^T & K_2^T P_{33}^T \\ 0 & K_1^T P_{23}^T & K_2^T P_{33}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (3.94)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ 0 & P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.95)$$

sendo que as matrizes possuem dimensões apropriadas. Neste caso, as matrizes  $K_o$  e  $F$  podem ser obtidas por:

$$K_o = [K_1 \quad K_2], \quad (3.96)$$

$$F = [P_{23}^T \quad P_{33}], \quad (3.97)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A partir do Lema1, o sistema descrito na Figura 3.2, com entrada  $U_o$  e saída  $Y_o$  é ERP se e somente se existirem matrizes  $P = P^T$ ,  $F$  e  $K_o$ , tais que:

$$P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0, \quad (3.98)$$

$$B^T P = FC, \quad (3.99)$$

$$P > 0. \quad (3.100)$$

Decompondo-se as matrizes  $P$ ,  $F$  e  $K_o$ , tem-se:

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix}, \quad F = [F_1 \quad F_2], \quad K_o = [K_1 \quad K_2].$$

Com base nesta decomposição, obtém-se:

$$B^T P = [0 \quad 0 \quad I_m] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix} = [P_{13}^T \quad P_{23}^T \quad P_{33}], \quad (3.101)$$

$$FC = [F_1 \quad F_2] \begin{bmatrix} 0 & I_{p-m} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} = [0 \quad F_1 \quad F_2]. \quad (3.102)$$

Substituindo-se as expressões (3.101) e (3.102) em (3.99), segue que:

$$P_{13}^T = 0, P_{23}^T = F_1, P_{33} = F_2.$$

Portanto,

$$F = [P_{23}^T \quad P_{33}],$$

o que corresponde à equação (3.97).

Substituindo-se  $P_{13} = 0$  na expressão de  $P$ , a expressão (3.100) corresponde à expressão (3.95).

Já o produto  $PBK_oC$  é dado por:

$$PBK_oC = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} 0 & I_{p-m} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{23}K_1 & P_{23}K_2 \\ 0 & P_{33}K_1 & P_{33}K_2 \end{bmatrix}.$$

Substituindo-se a equação acima na expressão (3.98), obtém-se a expressão (3.94). ■

O inconveniente do Teorema 10 é que as condições não são expressas em termos de LMIs. Entretanto, com  $P_{23} = 0$ , podem ser obtidas condições suficientes, em termos de LMIs, para que o sistema descrito em (3.10), com as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  definidas em (3.91)–(3.93), seja ERP.

**Teorema 11** *O sistema (3.10), com as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  definidas em (3.91)–(3.93), é ERP se existirem matrizes  $P_{11} = P_{11}^T$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{22} = P_{22}^T$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{33} = P_{33}^T$ ,  $R_{32}$  e  $R_{33}$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{32}^T \\ 0 & 0 & R_{33}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (3.103)$$



$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12}^T & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.104)$$

sendo que as matrizes possuem dimensões apropriadas. Neste caso, as matrizes  $K_o$  e  $F$  podem ser obtidas por:

$$K_o = [K_1 \quad K_2], \quad (3.105)$$

$$F = [0 \quad P_{33}], \quad (3.106)$$

Sendo

$$K_1 = P_{33}^{-1} R_{32}, \quad (3.107)$$

$$K_2 = P_{33}^{-1} R_{33}. \quad (3.108)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) Substituindo-se  $P_{23} = 0$  e definindo-se  $R_{32} = P_{33}K_1$  e  $R_{33} = P_{33}K_2$  nas expressões (2.94)-(3.97), obtêm-se as expressões (3.103)-(3.106). ■

Considere, novamente, a planta definida pelas equações (3.10), com  $p > m$ . O Teorema 12 apresenta outras condições suficientes para que o sistema da Figura 3.2 seja ERP, propostas por Covacic et al. (2008).

**Teorema 12** (COVACIC et al., 2008) *O sistema da Figura 3.2 é ERP se pelo menos uma das condições (i)–(xi) for satisfeita:*

- (i) *Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_o$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -2P & A^T - C^T K_o^T B^T + P + I_n \\ A - BK_o C + P + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.109)$$

$$B^T P = FC. \quad (3.110)$$

(ii) *Existem matrizes  $P_N = P_N^T$ ,  $K_o$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ :*

$$\begin{bmatrix} -2P_N & A^T - C^T K_o^T B^T + P_N + \delta I_n \\ A - BK_o C + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.111)$$

$$B^T P_N = F_N C. \quad (3.112)$$

*Neste caso, a matriz  $F$  é dada por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N. \quad (3.113)$$

(iii) *Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_f$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -BK_f B^T - BK_f^T B^T - 2I_n & A + P + I_n \\ A^T + P + I_n & -2P \end{bmatrix} < 0, \quad (3.114)$$

$$B^T P = FC. \quad (3.115)$$

*Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:*

$$K_o = K_f F. \quad (3.116)$$

(iv) *Existem matrizes  $P_N = P_N^T$ ,  $K_f$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ , com  $\delta > 0$ :*

$$\begin{bmatrix} -BK_f B^T - BK_f^T B^T - 2\delta I_n & A + P_N + \delta I_n \\ A^T + P_N + \delta I_n & -2P_N \end{bmatrix} < 0, \quad (3.117)$$

$$B^T P_N = F_N C. \quad (3.118)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, K_o = K_f F. \quad (3.119)$$

(v) Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -2P & A^T - C^T K_1^T B^T + P + I_n \\ A - BK_1 C + P + I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.120)$$

$$B^T P = FC. \quad (3.121)$$

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (3.122)$$

(vi) Existem matrizes  $P_N = P_N^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ , com  $\delta > 0$ :

$$\begin{bmatrix} -2P_N & A^T - C^T K_1^T B^T + P_N + \delta I_n \\ A - BK_1 C + P_N + \delta I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.123)$$

$$B^T P_N = F_N C. \quad (3.124)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (3.125)$$

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (3.126)$$

(vii) *Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_o$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P - 2P & -C^T K_o^T B^T + P + I_n \\ -BK_o C + P + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.127)$$

$$B^T P = FC, \quad (3.128)$$

$$P > 0. \quad (3.129)$$

(viii) *Existem matrizes  $P_N = P_N^T$ ,  $K_N$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ :*

$$\begin{bmatrix} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_N^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_N C + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.130)$$

$$B^T P_N = F_N C, \quad (3.131)$$

$$P_N > 0. \quad (3.132)$$

*Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (3.133)$$

$$K_o = \frac{1}{\delta} K_N. \quad (3.134)$$

(ix) *Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P - 2P & -C^T K_1^T B^T + P + I_n \\ -BK_1 C + P + I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.135)$$

$$B^T P = FC, \quad (3.136)$$

$$P > 0. \quad (3.137)$$

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (3.138)$$

(x) Existem matrizes  $P_N = P_N^T$ ,  $K_{N1}$ ,  $K_{N2}$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ , com  $\delta > 0$ :

$$\begin{bmatrix} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_{N1}^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_{N1} C + P_N + \delta I_n & -BK_{N2} B^T - BK_{N2}^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.139)$$

$$B^T P_N = F_N C, \quad (3.140)$$

$$P_N > 0. \quad (3.141)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (3.142)$$

$$K_o = K_1 + K_2 F, \quad (3.143)$$

sendo:

$$K_1 = \frac{1}{\delta} K_{N1},$$

$$K_2 = \frac{1}{\delta} K_{N2}.$$

(xi) Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $M$ ,  $N$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:

$$PA + A^T P - C^T N^T B^T - BNC < 0, \quad (3.144)$$

$$P > 0, \quad (3.145)$$

$$BM = PB, \quad (3.146)$$

$$B^T P = FC. \quad (3.147)$$

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = M^{-1}N. \quad (3.148)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A partir do Lema 1, o sistema descrito na Figura 3.2, com entrada  $U_o$  e saída  $Y_o$  é ERP se e somente se existirem matrizes  $P = P^T$ ,  $F$  e  $K_o$ , tais que:

$$P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0, \quad (3.149)$$

$$B^T P = FC, \quad (3.150)$$

$$P > 0. \quad (3.151)$$

- (i) As equações (3.110) e (3.150) são equivalentes. A LMI (3.151) é uma condição necessária para (3.109). Multiplicando-se a LMI (3.109) à esquerda por  $[I_n \ P]$  e à direita por  $[I_n \ P]^T$ , tem-se:

$$[I_n \ P] \begin{bmatrix} -2P & A^T - C^T K_o^T B^T + P + I_n \\ A - BK_oC + P + I_n & -2I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix}$$

$$= P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0.$$

Portanto, a LMI (3.109) implica nas LMIs (3.149) e (3.151).

- (ii) Considere  $P_N = \delta P$  e  $F_N = \delta F$ . Assim, as equações (3.112) e (3.150) são equivalentes. A LMI (3.151) é uma condição necessária para (3.111). Note que (3.111) implica que  $\delta > 0$  e assim  $P_N = \delta P = P_N^T > 0$ . Multiplicando-se a LMI (3.111) à esquerda por  $[I_n \ P]$  e à direita por  $[I_n \ P]^T$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2P_N & A^T - C^T K_o^T B^T + P_N + \delta I_n \\ A - BK_o C + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\delta P & A^T - C^T K_o^T B^T + \delta P + \delta I_n \\ A - BK_o C + \delta P + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \\
&= P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a LMI (3.111) implica nas LMIs (3.149) e (3.151).

- (iii) As equações (3.115) e (3.150) são equivalentes. A LMI (3.151) é uma condição necessária para (3.114). Multiplicando-se a LMI (3.114) à esquerda por  $\begin{bmatrix} P & I_n \end{bmatrix}$  e à direita por  $\begin{bmatrix} P & I_n \end{bmatrix}^T$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} P & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -BK_f B^T - BK_f^T B^T - 2I_n & A + P + I_n \\ A^T + P + I_n & -2P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ I_n \end{bmatrix} \\
&= PA + A^T P - PBK_f B^T P - PBK_f^T B^T P < 0. \tag{3.152}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.115) e (3.116) em (3.152), tem-se:

$$\begin{aligned}
& PA + A^T P - PBK_f B^T P - PBK_f^T B^T P \\
&= PA + A^T P - PBK_f F C - C^T F^T K_f^T B^T P \\
&= PA + A^T P - PBK_o C - C^T K_o^T B^T P \\
&= P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a LMI (3.114) implica nas LMIs (3.149) e (3.151).

- (iv) Considere  $P_N = \delta P$  e  $F_N = \delta F$ . Assim, as equações (3.118) e (3.150) são equivalentes. A LMI (3.151) é uma condição necessária para (3.117). Como  $\delta > 0$ , então note que  $P_N = \delta P = P_N^T > 0$ . Multiplicando-se a LMI (3.117) à esquerda por  $\begin{bmatrix} P & I_n \end{bmatrix}$  e à direita por  $\begin{bmatrix} P & I_n \end{bmatrix}^T$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
& [P \quad I_n] \begin{bmatrix} -BK_f B^T - BK_f^T B^T - 2\delta I_n & A + P_N + \delta I_n \\ A^T + P_N + \delta I_n & -2P_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ I_n \end{bmatrix} \\
&= [P \quad I_n] \begin{bmatrix} -BK_f B^T - BK_f^T B^T - 2\delta I_n & A + \delta P + \delta I_n \\ A^T + \delta P + \delta I_n & -2P_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ I_n \end{bmatrix} \\
&= PA + A^T P - PBK_f B^T P - PBK_f^T B^T P < 0. \tag{3.153}
\end{aligned}$$

Substituindo-se (3.118) e (3.119) em (3.153), tem-se:

$$\begin{aligned}
& PA + A^T P - PBK_f B^T P - PBK_f^T B^T P \\
&= PA + A^T P - PBK_f F C - C^T F^T K_f^T B^T P \\
&= PA + A^T P - PBK_o C - C^T K_o^T B^T P \\
&= P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a LMI (3.117) implica nas LMIs (3.149) e (3.151).

- (v) As equações (3.121) e (3.150) são equivalentes. A LMI (3.151) é uma condição necessária para (3.120). Multiplicando-se a LMI (3.120) à esquerda por  $[I_n \quad P]$  e à direita por  $[I_n \quad P]^T$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
& [I_n \quad P] \begin{bmatrix} -2P & A^T - C^T K_1^T B^T + P + I_n \\ A - BK_1 C + P + I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \\
&= PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P < 0. \tag{3.154}
\end{aligned}$$

Substituindo-se (3.121) e (3.122) em (3.154), tem-se:

$$\begin{aligned}
& PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P \\
&= PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 F C - C^T F^T K_2^T B^T P \\
&= PA + A^T P - PB(K_1 + K_2 F)C - C^T(K_1 + K_2 F)^T B^T P \\
&= P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0.
\end{aligned}$$



Portanto, a LMI (3.120) implica nas LMIs (3.149) e (3.151).

- (vi) Considere  $P_N = \delta P$  e  $F_N = \delta F$ . Assim, as equações (3.124) e (3.150) são equivalentes. A LMI (3.151) é uma condição necessária para (3.123). Como  $\delta > 0$ , então note que  $P_N = \delta P = P_N^T > 0$ . Multiplicando-se a LMI (3.123) à esquerda por  $[I_n \ P]$  e à direita por  $[I_n \ P]^T$ , tem-se:

- (vii)

$$\begin{aligned}
& [I_n \ P] \begin{bmatrix} -2P_N & A^T - C^T K_1^T B^T + P_N + \delta I_n \\ A - BK_1 C + P_N + \delta I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \\
&= [I_n \ P] \begin{bmatrix} -2\delta P & A^T - C^T K_1^T B^T + \delta P + \delta I_n \\ A - BK_1 C + \delta P + \delta I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \\
&= PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P < 0. \tag{3.155}
\end{aligned}$$

Substituindo-se (3.124) e (3.126) em (3.154), tem-se:

$$\begin{aligned}
& PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P \\
&= PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 F C - C^T F^T K_2^T B^T P \\
&= PA + A^T P - PB(K_1 + K_2 F)C - C^T(K_1 + K_2 F)^T B^T P \\
&= P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a LMI (3.123) implica nas LMIs (3.149) e (3.151).

- (viii) As equações (3.128) e (3.150) são equivalentes. As LMIS (3.129) e (3.151) são equivalentes. Multiplicando-se a LMI (3.127) à esquerda por  $[I_n \ P]$  e à direita por  $[I_n \ P]^T$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PA + A^T P - 2P & -C^T K_o^T B^T + P + I_n \\ -BK_o C + P + I_n & -2I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \\
& = P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a LMI (3.127) implica na LMI (3.149).

- (ix) Considere  $P_N = \delta P$ ,  $F_N = \delta F$  e  $K_N = \delta K_o$ . As equações (3.131) e (3.150) são equivalentes. A LMI (3.132) e (3.151) são equivalentes. Note que (3.130) implica que  $\delta > 0$  e então,  $P_N = \delta P = P_N^T > 0$ . Multiplicando-se a LMI (3.130) à esquerda por  $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}$  e à direita por  $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}^T$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_N^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_N C + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta P A + \delta A^T P - 2\delta P & -\delta C^T K_o^T B^T + \delta P + \delta I_n \\ -\delta B K_o C + \delta P + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \\
& = \delta [P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P] < 0.
\end{aligned}$$

Como, de (3.130),  $\delta > 0$ , segue que:

$$P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0.$$

Portanto, a LMI (3.130) implica na LMI (3.149).

- (x) As equações (3.136) e (3.150) são equivalentes. As LMIs (3.137) e (3.151) são equivalentes. Multiplicando-se a LMI (3.135) à esquerda por  $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}$  e à direita por  $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}^T$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PA + A^T P - 2P & -C^T K_1^T B^T + P + I_n \\ -BK_1 C + P + I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \\
& = PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P < 0. \tag{3.156}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.136) e (3.138) em (2.156), tem-se:

$$\begin{aligned}
& PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P \\
& = PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 F C - C^T F^T K_2^T B^T P \\
& = PA + A^T P - PB(K_1 + K_2 F)C - C^T (K_1 + K_2 F)^T B^T P \\
& = P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a LMI (3.135) implica na LMI (3.149).

- (xi) Considere  $P_N = \delta P$ ,  $F_N = \delta F$ ,  $K_{N1} = \delta K_1$  e  $K_{N2} = \delta K_2$ . As equações (3.140) e (3.150) são equivalentes. A LMI (3.141) e (3.151) são equivalentes. Como  $\delta > 0$ , então note que  $P_N = \delta P = P_N^T > 0$ . Multiplicando-se a LMI (3.139) à esquerda por  $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}$  e à direita por  $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}^T$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_{N1}^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_{N1} C + \delta P + \delta I_n & -BK_{N2} B^T - BK_{N2}^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta PA + \delta A^T P - 2\delta P & -\delta C^T K_1^T B^T + \delta P + \delta I_n \\ -\delta BK_1 C + P_N + \delta I_n & -\delta BK_2 B^T - \delta BK_2^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \\
& = \delta [PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P] < 0.
\end{aligned}$$

Como, de (3.139),  $\delta > 0$ , segue que:

$$PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P < 0. \tag{3.157}$$

Substituindo (3.140) e (3.143) em (3.157), tem-se:

$$PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P$$

$$\begin{aligned}
&= PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 F C - C^T F^T K_2^T B^T P \\
&= PA + A^T P - PB(K_1 + K_2 F)C - C^T(K_1 + K_2 F)^T B^T P \\
&= P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a LMI (3.139) implica na LMI (3.149).

- (xii) As equações (3.147) e (3.150) são equivalentes. As LMIs (3.149) e (3.151) são a condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema  $\{A - BK_o C, B, C\}$ . De acordo com Crusius e Trofino (1999), uma condição suficiente para a existência de uma matriz  $K_o$  que torna o sistema  $\{A - BK_o C, B, C\}$  estável é a existência de matrizes  $P = P^T$ ,  $M$  e  $N$  que satisfazem às condições (3.144)–(3.146). Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por (3.148). ■

**Observação 4** A condição (v) engloba as condições (i) e (iii) e a condição (vi) engloba as condições (ii) e (iv).

**Observação 5** As condições do item (xi) do Teorema 12 são mais gerais ou pelo menos equivalentes às condições do Teorema 8, pois não exigem a restrição  $B^T = (CB)^T C$ . Note que se as condições do Teorema 8 são factíveis, então  $F = M(CB)^T$  atende à condição (3.147) do item (xi). Desta forma, quando o Teorema 8 apresenta solução, o item (xi) do Teorema 12 também apresenta solução. Este resultado é útil quando a planta possui incertezas paramétricas e existe a dificuldade de coloca-la na forma  $B^T = (CB)^T C$ .

**Observação 6** A partir das LMEs (3.146) e (3.147) e definindo-se  $C_n = FC$ , tem-se  $C_n = FC = M^T B^T$ . Como  $M$  é invertível, então os zeros de transmissão de  $\{A, B, C_n\}$  correspondem aos zeros de transmissão de  $\{A, B, B^T\}$ . Portanto, a condição necessária e suficiente para a existência de uma solução para as LMIs (3.144)–(3.147) é que todos os zeros de transmissão de  $\{A, B, B^T\}$  possuam parte real negativa.

Considere uma dada matriz  $F$  tal que o sistema  $\{A, B, FC\}$  seja de fase mínima.

O Teorema 13, proposto por Covacic (2006), fornece condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz  $K_o$  que torna ERP o sistema da Figura 3.2.

**Teorema 13** (COVACIC, 2006) *Considere  $F$  tal que o sistema  $\{A, B, FC\}$  seja de fase mínima. Então, uma solução para o Problema 1 é obtida através das seguintes LMIs, em termos de  $K_o$  e  $P = P^T$ :*

$$PA + A^T P - C^T F^T K_o C - C^T K_o^T F C < 0, \quad (3.158)$$

$$B^T P = F C, \quad (3.159)$$

$$P > 0. \quad (3.160)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A prova deste teorema é obtida diretamente do Lema 1. ■

### 3.4 TAXA DE DECAIMENTO

Em muitas situações, somente a estabilidade não é suficiente para a obtenção de um desempenho satisfatório para um sistema de controle. Comumente, é necessário especificar, também, a resposta transitória.

Dado um Sistema Linear Invariante no Tempo (SLIT),  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , de acordo com (BOYD et al., 1994), a taxa de decaimento é definida como o máximo valor da constante real  $\gamma > 0$ , tal que a condição (COVACIC, 2006):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0, \forall x(0) \in \mathbb{R}^n, \text{ é satisfeita para todas as trajetórias de } x(t).$$

Estabilidade corresponde a taxa de decaimento positiva. Pode-se utilizar a função de Lyapunov quadrática  $V(\xi) = \xi^T P \xi$  para estabelecer um limite inferior para a taxa de decaimento, por exemplo, da planta (3.1). Se  $\dot{V}(x) \leq -2\gamma V(x)$  para todas as trajetórias, então  $V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-2\gamma t}$ , e assim:

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-\gamma t},$$

sendo  $\lambda_{\max}(P)$  e  $\lambda_{\min}(P)$  o máximo e o mínimo autovalor de  $P$ , respectivamente, para todas as trajetórias, e portanto a taxa de decaimento da planta (3.1) é pelo menos igual a  $\gamma$  (BOYD et al., 1994) (COVACIC, 2006).

Para condição  $\dot{V}(x) \leq -2\gamma V(x)$  em um sistema  $\{A_o, B_o, C_o\}$ , para todas as trajetórias é equivalente a:

$$A_o^T P + P A_o + 2\gamma P = (A_o + \gamma I)^T P + P(A_o + \gamma I) \leq 0. \quad (3.161)$$

#### 3.4.1 Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas

Considere a planta definida pelas equações (3.10), com  $p = m$ . O Teorema 14, dado em (TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000), estabelece condições necessárias e suficientes para que todos os polos do sistema da Figura 3.2 tenham parte real menor que  $-\gamma$  e que este sistema seja ERP (COVACIC, 2006).

**Teorema 14** (TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000) Considere  $z_i = \sigma_i + j\beta_i$ ,  $\sigma_i$  e  $\beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , os zeros de transmissão do sistema  $\{A, B, C\}$ , descrito no Problema 1. Então, o sistema é ERP e possui uma taxa de decaimento maior que  $\gamma$ , se existirem as matrizes  $P = P^T$ ,  $R$  e  $F$ , tais que:

$$PA + A^T P - C^T(R + R^T)C < -2\gamma P, \quad (3.162)$$

$$B^T P = FC, \quad (3.163)$$

$$P > 0. \quad (3.164)$$

com  $\gamma < -\sigma$ , sendo  $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ , e  $\text{posto}(CB) = m$ . Neste caso, uma matriz  $K_o$  pode ser obtida pela expressão:

$$K_o = (F^T)^{-1}R. \quad (3.165)$$

**Prova** (TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000) Definindo  $\tilde{A} = A + \gamma I$ , então (3.162) pode ser descrita por:

$$P(\tilde{A} - \gamma I) + (\tilde{A} - \gamma I)^T P - C^T(R + R^T)C < -2\gamma P,$$

$$P\tilde{A} - \gamma P + \tilde{A}^T P - \gamma P - C^T(R + R^T)C < -2\gamma P,$$

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - C^T(R + R^T)C - 2\gamma P < -2\gamma P,$$

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - C^T(R + R^T)C < 0. \quad (3.166)$$

Do Teorema 6, de (3.162) (que é equivalente a (3.166)), (3.163) e (3.164) são factíveis se e somente se o sistema  $\{\tilde{A} - BK_o C, B, FC\}$  é ERP. Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa (KAUFMAN, BAR-KANA e SOBEL, 1994). Sabe-se que os zeros de transmissão de um sistema  $\{A, B, C\}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , são números  $s \in \mathbb{C}$ , tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

De (3.163), a matriz  $F$  tem posto  $m$  e, assim, é fácil verificar que os sistemas  $\{\tilde{A} - BK_o C, B, FC\}$  e  $\{\tilde{A}, B, C\}$  têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}, B, C\}$ :

$$\begin{bmatrix} sI - \tilde{A} + BK_o C & B \\ -FC & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & B \\ -FC & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, os zeros de transmissão  $\{\tilde{A}, B, C\}$  são os números  $s \in \mathbb{C}$ , tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s - \gamma)I - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se  $s = s_o$  for um zero de transmissão de  $\{A, B, C\}$ , então  $s = s_o + \gamma$  será um zero de transmissão de  $\{\tilde{A}, B, C\}$ . Então, todos os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}, B, C\}$  apresentam parte real negativa se  $\sigma_i + \gamma < 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ . Daí,  $\gamma < \sigma$ ,  $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ . Agora, de (3.163) e (3.164),  $\text{posto}(B^T P B) = \text{posto}(F C B) = m$  e, assim,  $\text{posto}(C B) = m$ . A necessidade está provada. Para demonstrar a suficiência, considere que  $0 < \gamma < -\sigma$ , ou seja, todos os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}, B, C\}$  apresentam parte real negativa e que o  $\text{posto}(C B) = m$ . Agora, defina  $F = (C B)^T$  e note que o sistema  $\{\tilde{A}, B, F C\}$  satisfaz às condições (i) e (ii) do Teorema 5. Assim, existe  $K_f$  tal que  $K_o = K_f F$  torne o sistema  $\{\tilde{A} - B K_o C, B, F C\}$  ERP. Finalmente, o Teorema 6, (3.162) (que é equivalente a (3.166)), (3.163) e (3.164) são factíveis e o Teorema 14 está provado. ■

**Observação 7** (TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000) *Considere uma candidata a função de Lyapunov  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ ,  $P = P^T > 0$ , para o sistema na Figura 3.2. Se a planta tem zeros de transmissão  $z_i = \sigma_i + j\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  e  $0 < \gamma < -\sigma$ , sendo  $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ , então, do Teorema 14, as LMIs (3.162), (3.163) e (3.164) são factíveis e, então, não é difícil ver que  $\dot{V}(t) \leq -2\gamma V(t)$ . Portanto,  $V(t) \leq V(0)e^{-2\gamma t}$  e (CHOI, 1998)*

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x(0)\| e^{-\gamma t},$$

*sendo  $\lambda_{\max}(P)$  e  $\lambda_{\min}(P)$  o máximo e o mínimo autovalor de  $P$ , respectivamente. O Teorema 14 mostra que existe um limite superior para  $\gamma$ , relacionado com os zeros de transmissão da planta, para que o sistema na Figura 3.2 seja ERP. Uma conclusão geral é que, para sistemas ERP, os zeros de transmissão definem o máximo valor da taxa de decaimento ERP. A taxa de decaimento do sistema ERP não considera a restrição (3.163) e então pode ser diferente da taxa de decaimento ERP. Em controle adaptativo e CEV de sistemas incertos utilizando a teoria ERP, a restrição (3.163) é necessária. O resultado do Teorema 12 é considerado razoável, se for utilizada uma realimentação  $K$  com alto ganho, como nos modos CEV e deslizante, pois sabe-se que, neste caso, os zeros de transmissão da planta serão os polos do sistema de malha fechada (no caso de CEV e modos deslizantes, os zeros de transmissão da planta serão os polos do sistema no deslizamento (ŽAK; HUI, 1993). O inesperado é a influência da localização dos zeros de transmissão para todas as matrizes  $K$ , que realimentam a planta e  $F$  na Figura 3.2.*



**Corolário 4** (LORDELO, 2000) Considere  $z_i = \sigma_i + j\beta_i$ ,  $\sigma_i$  e  $\beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , os zeros de transmissão do sistema  $\{A_o, B_o, C_o\}$ , descrito no Problema 1. Considere, também, que as matrizes  $A_o$ ,  $B_o$  e  $C_o$  na Figura 3.2, tenham as seguintes formas:

$$A_o = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix} \text{ e } C_o = [0 \quad I_m], \quad (3.167)$$

sendo  $\text{posto}(CB) = m$ . Então, o sistema é ERP e possui uma taxa de decaimento maior que  $\gamma$ , se existirem as matrizes  $P = P^T$  e  $R$ , tais que:

$$P = \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & P_c \end{bmatrix} > 0 \text{ e} \quad (3.168)$$

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (R + R^T) \end{bmatrix} < -2\gamma P, \quad (3.169)$$

com  $\gamma < -\sigma$ , sendo  $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ , e  $\text{posto}(CB) = m$ . Neste caso, as matrizes  $K_o$  e  $F$  são obtidas pelas expressões:

$$K_o = (F^T)^{-1}R = (P_c CB)^{-1}R, \quad (3.170)$$

$$F = (CB)^T P_c. \quad (3.171)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A prova deste corolário é similar à prova do Teorema 14. ■

### 3.4.2 Sistemas com Números Diferentes de Entradas ( $m$ ) e Saídas ( $p$ )

Considere a planta definida pelas equações (3.10), com  $p < m$ . Os Teoremas 15 e 16, dados em Covacic (2001), estabelecem as condições suficientes para que todos os polos

do sistema da Figura 3.2 tenham parte real menor que  $-\gamma$  e que este sistema seja ERP. Nestes teoremas, considera-se que  $B^T = (CB)^T C$  (COVACIC, 2006).

**Teorema 15** (COVACIC, 2001) Considere  $z_i = \sigma_i + j\beta_i$ ,  $\sigma_i$  e  $\beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , os zeros de transmissão do sistema  $\{A, B, B^T\}$ , descrito no Problema 1. Então, o sistema é ERP e possui uma taxa de decaimento maior que  $\gamma$ , se existirem as matrizes  $P = P^T$ ,  $N$  e  $M$ , tais que:

$$PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T < -2\gamma P, \quad (3.172)$$

$$B^T P = MB^T, \quad (3.173)$$

$$P > 0, \quad (3.174)$$

com  $\gamma < -\sigma$ , sendo  $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ . Neste caso, as matrizes  $K_o$  e  $F$  podem ser obtidas por:

$$F = M(CB)^T, \quad (3.175)$$

$$K_o = (M^T)^{-1}N. \quad (3.176)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) Definido  $\tilde{A} = A + \gamma I$ , então (3.172) pode ser descrita por:

$$P(\tilde{A} - \gamma I) + (\tilde{A} - \gamma I)^T P - BNC - (BNC)^T < -2\gamma P,$$

$$P\tilde{A} - \gamma P + \tilde{A}^T P - \gamma P - BNC - (BNC)^T < -2\gamma P,$$

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - BNC - (BNC)^T - 2\gamma P < -2\gamma P,$$

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - BNC - (BNC)^T < 0. \quad (3.177)$$

Pelo Corolário 2, de (3.172) (que é equivalente a (3.177)), (3.173) e (3.174), os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}, B, B^T\}$  possuem parte real negativa. Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa (KAUFMAN;

BAR-KANA; SOBEL, 1994). É conhecido, também, que o zeros de transmissão de um sistema  $\{A, B, B^T\}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $p \geq m$ , são os números  $s \in \mathbb{C}$ , tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

De (3.172), a matriz  $F$  tem posto  $m$  e, assim, é fácil verificar que os sistemas  $\{\tilde{A} - BKC, B, MB^T\}$  e  $\{\tilde{A}, B, B^T\}$  têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}, B, B^T\}$ :

$$\begin{bmatrix} sI - \tilde{A} + BKC & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, os zeros de transmissão  $\{\tilde{A}, B, B^T\}$  são os números  $s \in \mathbb{C}$ , tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s - \gamma)I - A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se  $s = s_o$  for um zero de transmissão de  $\{A, B, B^T\}$ , então  $s = s_o + \gamma$  será um zero de transmissão de  $\{\tilde{A}, B, B^T\}$ . Então, todos os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}, B, B^T\}$  apresentam parte real negativa se  $\sigma_i + \gamma < 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ . Daí,  $\gamma < -\sigma$ ,  $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ . ■

**Teorema 16** (COVACIC, 2001) Considere  $z_i = \sigma_i + j\beta_i$ ,  $\sigma_i$  e  $\beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , os zeros de transmissão do sistema  $\{A, C^T, C\}$ , descrito no Problema 1. Então, o sistema é ERP e possui uma taxa de decaimento maior que  $\gamma$ , com  $\gamma < -\sigma$ , sendo  $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ , se existirem as matrizes  $P = P^T$ ,  $N$  e  $M$ , tais que:

$$AX + XA^T - BZC - C^T Z^T B^T < -2\gamma X, \quad (3.178)$$

$$YC = CX, \quad (3.179)$$

$$X > 0, \quad (3.180)$$

Neste caso, as matrizes  $K_o$  e  $F$  podem ser obtidas por:

$$F = (CB)^T Y, \quad (3.181)$$

$$K_o = ZY^{-1}. \quad (3.182)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) Definido  $\tilde{A} = A + \gamma I$ , então (3.178) pode ser descrita por

$$(\tilde{A} - \gamma I)X + X(\tilde{A} - \gamma I)^T - BZC - (BZC)^T < -2\gamma X,$$

$$\tilde{A}X - \gamma X + X\tilde{A}^T - \gamma X - BZC - (BZC)^T < -2\gamma X,$$

$$\tilde{A}X + X\tilde{A}^T - BZC - (BZC)^T - 2\gamma X < -2\gamma X,$$

$$\tilde{A}X + X\tilde{A}^T - BZC - (BZC)^T < 0. \quad (3.183)$$

Pelo Corolário 3, de (3.178) (que é equivalente a (3.183)), (3.179) e (3.180), os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}, C^T, C\}$  possuem parte real negativa. Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa (KAUFMAN; BAR-KANA; SOBEL, 1994). É conhecido, também, que o zeros de transmissão de um sistema  $\{A, C^T, C\}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $p \geq m$ , são os números  $s \in \mathbb{C}$ , tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

É fácil verificar que os sistemas  $\{\tilde{A} - BKC, C^T, Y^{-1}C\}$  e  $\{\tilde{A}, C^T, C\}$  têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}, C^T, C\}$ :

$$\begin{bmatrix} sI - \tilde{A} + BKC & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, os zeros de transmissão  $\{\tilde{A}, C^T, C\}$  são os números  $s \in \mathbb{C}$ , tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s - \gamma)I - A & C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se  $s = s_o$  for um zero de transmissão de  $\{A, C^T, C\}$ , então  $s = s_o + \gamma$  será um zero de transmissão de  $\{\tilde{A}, C^T, C\}$ . Então, todos os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}, C^T, C\}$  apresentam parte real negativa se  $\sigma_i + \gamma < 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ . Daí,  $\gamma < -\sigma$ ,  $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ . ■

**Observação 8** *Através de várias aplicações dos Teoremas 15 e 16, em exemplos numéricos, foi possível constatar que existem casos nos quais um funciona e o outro não e vice-versa. Desta forma, as condições destes teoremas são distintas e um teorema não pode ser visto como um caso particular do outro (COVACIC, 2006).*

Considere, agora, a planta (3.89) e os Lemas 4 e 5. Neste caso específico, o Teorema 17, proposto por Covacic (2006), estabelece condições necessárias e suficientes para que todos os polos do sistema (3.10), com as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  definidas em (3.91)–(3.93), tenham parte real menor que  $-\gamma$  e que este sistema seja ERP.

**Teorema 17** (COVACIC, 2006) Considere  $z_i = \sigma_i + j\beta_i$ ,  $\sigma_i$  e  $\beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$  os zeros de transmissão do sistema  $\{A, B, B^T\}$ , descrito no Problema 1, com as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  definidas em (3.91)–(3.93). Então, o sistema é ERP e possui uma taxa de decaimento maior que  $\gamma$ , com  $\gamma < -\sigma$ , sendo  $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ , se existirem as matrizes  $P_{11} = P_{11}^T$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{22} = P_{22}^T$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{33} = P_{33}^T$ ,  $K_1$  e  $K_2$ , tais que:

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{23}K_1 & P_{23}K_2 \\ 0 & P_{33}K_1 & P_{23}K_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1^T P_{23}^T & K_2^T P_{33}^T \\ 0 & K_1^T P_{23}^T & K_2^T P_{33}^T \end{bmatrix} < -2\gamma P,$$

(3.184)

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ 0 & P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.185)$$

sendo que as matrizes possuem dimensões apropriadas. Neste caso, as matrizes  $K_o$  e  $F$  podem ser obtidas por:

$$K_o = [K_1 \quad K_2], \quad (3.186)$$

$$F = [P_{23}^T \quad P_{33}]. \quad (3.187)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 10. ■

O inconveniente do Teorema 17 é que as condições não são descritas em termos de LMIs. Entretanto, com  $P_{23} = 0$ , podem ser obtidas condições suficientes, em termos de LMIs, para que a factibilidade das expressões (3.184) e (3.185).

**Teorema 18** (COVACIC, 2006) Considere  $z_i = \sigma_i + j\beta_i$ ,  $\sigma_i$  e  $\beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$  os zeros de transmissão do sistema  $\{A, B, B^T\}$ , descrito no Problema 1, com as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  definidas em (3.91)–(3.93). Então, o sistema é ERP e possui uma taxa de decaimento maior que  $\gamma$ , com  $\gamma < -\sigma$ , sendo  $\sigma = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ , se existirem as matrizes  $P_{11} = P_{11}^T$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{22} = P_{22}^T$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{33} = P_{33}^T$ ,  $R_{32}$  e  $R_{33}$ , tais que:

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{32}^T \\ 0 & 0 & R_{33}^T \end{bmatrix} < -2\gamma P, \quad (3.188)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12}^T & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix} > 0. \quad (3.189)$$

sendo que as matrizes possuem dimensões apropriadas. Neste caso, as matrizes  $K_o$  e  $F$  podem ser obtidas por:

$$K_o = [K_1 \quad K_2], \quad (3.190)$$

$$F = [0 \quad P_{33}], \quad (3.191)$$

sendo:

$$K_1 = P_{33}^{-1} R_{32}, \quad (3.192)$$

$$K_2 = P_{33}^{-1} R_{33}. \quad (3.193)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 11. ■

Considere, novamente, a planta definida pelas equações (3.10), com  $p > m$ . O Teorema 19 apresenta outras condições suficientes para que todos os polos do sistema da Figura 3.2 possuam parte real menor que  $-\gamma$ , com  $\gamma > 0$ , e que este sistema seja ERP, propostas por Covacic (2006):

**Teorema 19** (COVACIC, 2006) *Todos os polos do sistema da Figura 3.2 possuem parte real menor que  $-\gamma$ , com  $\gamma > 0$ , e este sistema é ERP se pelo menos uma das condições (i)–(xi) for satisfeita:*

(i) *Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_o$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -2P & A^T + \gamma I - C^T K_o^T B^T + P + I_n \\ A + \gamma I - B K_o C + P + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.194)$$

$$B^T P = F C. \quad (3.195)$$

(ii) *Existem matrizes  $P_N = P_N^T$ ,  $K_o$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ :*

$$\begin{bmatrix} -2P_N & A^T + \gamma I - C^T K_o^T B^T + P_N + \delta I_n \\ A + \gamma I - BK_o C + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.196)$$

$$B^T P_N = F_N C. \quad (3.197)$$

*Neste caso, a matriz  $F$  é dada por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N. \quad (3.198)$$

(iii) *Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_f$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -BK_f B^T - BK_f^T B^T - 2I_n & A + \gamma I + P + I_n \\ A^T + \gamma I + P + I_n & -2P \end{bmatrix} < 0, \quad (3.199)$$

$$B^T P = FC. \quad (3.200)$$

*Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:*

$$K_o = K_f F. \quad (3.201)$$

(iv) *Existem matrizes  $P_N = P_N^T$ ,  $K_f$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ , com  $\delta > 0$ :*

$$\begin{bmatrix} -BK_f B^T - BK_f^T B^T - 2\delta I_n & A + \gamma I + P_N + \delta I_n \\ A^T + \gamma I + P_N + \delta I_n & -2P_N \end{bmatrix} < 0, \quad (3.202)$$



$$B^T P_N = F_N C. \quad (3.203)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, K_o = K_f F. \quad (3.204)$$

(v) Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -2P & A^T + \gamma I - C^T K_1^T B^T + P + I_n \\ A + \gamma I - BK_1 C + P + I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.205)$$

$$B^T P = FC. \quad (3.206)$$

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (3.207)$$

(vi) Existem matrizes  $P_N = P_N^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ , com  $\delta > 0$ :

$$\begin{bmatrix} -2P_N & A^T + \gamma I - C^T K_1^T B^T + P_N + \delta I_n \\ A + \gamma I - BK_1 C + P_N + \delta I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.208)$$

$$B^T P_N = F_N C. \quad (3.209)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (3.210)$$

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (3.211)$$

(vii) *Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_o$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P - 2P & -C^T K_o^T B^T + P + I_n \\ -BK_o C + P + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.212)$$

$$B^T P = FC, \quad (3.213)$$

$$P > 0. \quad (3.214)$$

(viii) *Existem matrizes  $P_N = P_N^T$ ,  $K_N$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ :*

$$\begin{bmatrix} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_N^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_N C + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.215)$$

$$B^T P_N = F_N C, \quad (3.216)$$

$$P_N > 0. \quad (3.217)$$

*Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (3.218)$$

$$K_o = \frac{1}{\delta} K_N. \quad (3.219)$$

(ix) *Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P - 2P & -C^T K_1^T B^T + P + I_n \\ -BK_1 C + P + I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.220)$$

$$B^T P = FC, \quad (3.221)$$

$$P > 0. \quad (3.222)$$

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (3.223)$$

(x) Existem matrizes  $P_N = P_N^T$ ,  $K_{N1}$ ,  $K_{N2}$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ , com  $\delta > 0$ :

$$\begin{bmatrix} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_{N1}^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_{N1} C + P_N + \delta I_n & -BK_{N2} B^T - BK_{N2}^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.224)$$

$$B^T P_N = F_N C, \quad (3.225)$$

$$P_N > 0. \quad (3.226)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (3.227)$$

$$K_o = K_1 + K_2 F, \quad (3.228)$$

sendo:

$$K_1 = \frac{1}{\delta} K_{N1},$$

$$K_2 = \frac{1}{\delta} K_{N2}.$$

(xi) *Existem matrizes  $P = P^T$ ,  $M$ ,  $N$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$PA + A^T P - C^T N^T B^T - BNC < -2\gamma P, \quad (3.229)$$

$$P > 0, \quad (3.230)$$

$$BM = PB, \quad (3.231)$$

$$B^T P = FC. \quad (3.232)$$

*Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:*

$$K_o = M^{-1}N. \quad (3.233)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 12, substituindo-se  $A$  por  $A + \gamma I$ . ■

**Observação 9** *A condição (v) engloba as condições (i) e (iii) e a condição (vi) engloba as condições (ii) e (iv). (COVACIC, 2006)*

**Observação 10** *As condições do item (xi) do Teorema 19 são mais gerais ou pelo menos equivalentes às condições do Teorema 15, pois não exigem a restrição  $B^T = (CB)^T C$ . Note que se as condições do Teorema 8 são factíveis, então  $F = M(CB)^T$  atende à condição (3.232) do item (xi). Desta forma, quando o Teorema 15 apresenta solução, o item (xi) do Teorema 19 também apresenta solução. Este resultado é útil quando a planta possui incertezas paramétricas e existe a dificuldade de coloca-la na forma  $B^T = (CB)^T C$  (COVACIC, 2006).*

**Observação 11** *A partir das LMEs (3.231) e (3.232) e definindo-se  $C_n = FC$ , tem-se  $C_n = FC = M^T B^T$ . Como  $M$  é invertível, então os zeros de transmissão de  $\{A, B, C_n\}$*

correspondem aos zeros de transmissão de  $\{A, B, B^T\}$ . Portanto, a condição necessária e suficiente para a existência de uma solução para as LMIs (3.229)–(3.232) é que todos os zeros de transmissão de  $\{A, B, B^T\}$  possuam parte real menor que  $-\gamma$ . (COVACIC, 2006) Considere, agora, uma dada matriz  $F$  tal que todos os zeros de transmissão do sistema  $\{A, B, FC\}$  possuem parte real menor que  $-\gamma$ ,  $\gamma > 0$ . O Teorema 20, proposto por Covacic (2006), fornece condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz  $K_o$  tal que todos os polos do sistema da Figura 3.2 tenham parte real menor que  $-\gamma$ , e que este sistema seja ERP (COVACIC, 2006).

**Teorema 20** (COVACIC, 2006) *Considere  $F$  tal que todos os zeros de transmissão do sistema  $\{A, B, FC\}$  possuem parte real menor que  $-\gamma$ ,  $\gamma > 0$ . Então, uma condição suficiente para que todos os polos do sistema da Figura 3.2 tenham parte real menor que  $-\gamma$ , e que este sistema seja ERP é obtida através das seguintes LMIs, em termos de  $K_o$  e  $P = P^T$ :*

$$PA + A^T P - C^T F^T K_o C - C^T K_o^T F C < -2\gamma P, \quad (3.234)$$

$$B^T P = F C, \quad (3.235)$$

$$P > 0. \quad (3.236)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A prova deste teorema é obtida diretamente do Lema 1. ■

### 3.5 SISTEMAS INCERTOS

Nas situações práticas, geralmente, existem incertezas nos parâmetros da planta. Desta forma, é importante considerar estas incertezas no projeto de sistemas de controle. Considere, então, a planta descrita em (3.237) (COVACIC, 2006):

$$\dot{x} = A(\alpha)x + Bu, \quad (3.237)$$

$$y = C(\alpha)x$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \geq m$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^r$  dado por:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix},$$

(3.238)

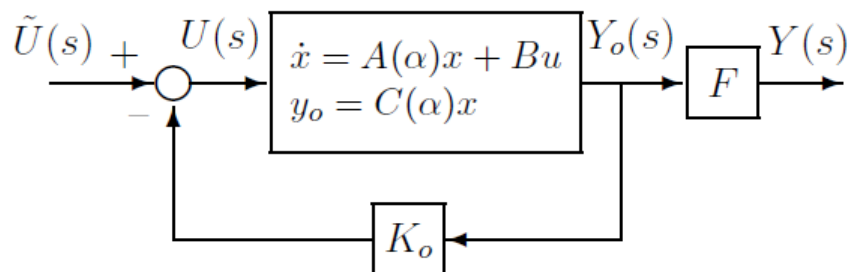
sendo  $\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, r-1, r$  constantes desconhecidas, com  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = 1$ . São admitidas as seguintes hipóteses:  $A_1$  O vetor  $x$  não está disponível para medição, mas o vetor  $y$  está disponível para medição;  $A_2$  As matrizes com incertezas  $A(\alpha)$  e  $C(\alpha)$  são constantes, mas desconhecidas e descritas por:

$A(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i$  e  $C(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i C_i$ , sendo  $\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, r-1, r$  constantes desconhecidas,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = 1$  e as matrizes  $A_i$  e  $C_i, i = 1, \dots, r$  são conhecidas (incertezas politópicas).

Considerando a planta descrita em (3.237), satisfazendo às hipóteses  $A_1$  e  $A_2$ , foi proposto por Covacic (2006) o seguinte problema:

**Problema 2** Dada a planta  $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$ , satisfazendo às condições  $A_1$  e  $A_2$ , encontre condições necessárias e suficientes, usando LMIs, para a existência de matrizes constantes  $F$  e  $K_o \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , para que o sistema descrito na Figura 3.3, com entrada  $\tilde{U}(s)$  e saída  $Y(s)$ , seja ERP.

**Figura 3.3** - Sistema realimentado do problema 2



**Fonte:** Covacic, (2006).

### 3.5.1 Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas

Considere a planta definida em (3.237), com  $p = m$ , satisfazendo às hipóteses  $A_1$  e  $A_2$ . A solução do Problema 2 é apresentada no Teorema 21, sendo a nova candidata a função de Lyapunov  $V(x, \alpha) = x^T P(\alpha)x$ , sendo  $P(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i$ .

**Teorema 21** (COVACIC, 2001) *O Problema 2 tem solução se e somente se existirem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $R$  e  $F$ , tais que:*

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < 0, \quad (3.239)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \quad (3.240)$$

$$P(\alpha) > 0. \quad (3.241)$$

para todo  $\alpha$  definido em (3.238) e  $A_2$ . Aliás, se (3.239)–(3.240) forem satisfeitas, então  $K_o$  pode ser obtido pela expressão:

$$K_o = (F^T)^{-1} R. \quad (3.242)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A partir do Lema 1, o sistema descrito na Figura 3.3, com entrada  $\tilde{U}(s)$  e saída  $Y(s)$ , é ERP se e somente se existirem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $K_o$  e  $F$ , tais que:

$$P(\alpha)(A(\alpha) - BK_o C(\alpha)) + (A(\alpha) - BK_o C(\alpha))^T P(\alpha) < 0, \quad (3.243)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \quad (3.244)$$

$$P(\alpha) > 0. \quad (3.245)$$

Agora, considerando (3.243) e definindo  $R = F^T K$ , segue que:

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T K_o C(\alpha) - C(\alpha)^T K_o^T F^T C(\alpha) < 0,$$

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < 0, \quad (3.246)$$

que corresponde à equação (3.239). Agora, de (3.240), com  $\text{posto}(B) = m$ , então  $B^T P(\alpha) B = FC(\alpha)B$  tem posto  $m$ . Portanto,  $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$  também tem posto  $m$  e assim  $(F^T)^{-1}$  existe. Então, se o sistema na Figura 3.3 for ERP, (3.239)-(3.241) são factíveis e se (2.239)-(3.241) forem factíveis, o sistema na Figura 3.3 é ERP, para  $K_o$  dado por (3.242). ■

**Observação 12** *As expressões dadas nos teoremas desta seção, com as matrizes  $P(\alpha)$ ,  $A(\alpha)$  e  $C(\alpha)$ , podem ser definidas em termos de LMIs (COVACIC, 2006).*

**Observação 13** *Se as incertezas consideradas no Teorema 21 forem removidas, tem-seo Teorema 8. Note, também, que a condição de igualdade (3.240) limita a localização das incertezas na matriz  $C(\alpha)$  (COVACIC, 2006).*

### 3.5.2 Sistemas com Números Diferentes de Entradas ( $m$ ) e Saídas ( $p$ )

Considere a planta definida em (3.237), com  $p > m$ , satisfazendo às hipóteses  $A_1$  e  $A_2$ . O Teorema 22, proposto por Covacic (2006), que é extensão do Teorema 12 para sistemas incertos, apresenta algumas condições suficientes para a solução do Problema 2:

**Teorema 22** (COVACIC, 2006) *O sistema da Figura 3.3 é ERP se pelo menos uma das condições (i)–(xi) for satisfeita:*

(i) *Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $K_o$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha) & A(\alpha)^T - C(\alpha)^T K_o^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ A(\alpha) - BK_o C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.247)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \quad (3.248)$$



(ii) Existem matrizes  $P_N(\alpha) = P_N^T(\alpha)$ ,  $K_o$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{bmatrix} -2P_N(\alpha) & \dots \\ A(\alpha) - BK_oC(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & \dots \\ \dots & A(\alpha)^T - C(\alpha)^TK_o^TB^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ \dots & \dots & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.249)$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha). \quad (3.250)$$

Neste caso, a matriz  $F$  é dada por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N. \quad (3.251)$$

(iii) Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $K_f$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -BK_f B^T - BK_f^T B^T - 2I_n & A(\alpha) + P(\alpha) + I_n \\ A(\alpha)^T + P(\alpha) + I_n & -2P(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.252)$$

$$B^T P(\alpha) = F C(\alpha). \quad (3.253)$$

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = K_f F. \quad (3.254)$$

(iv) Existem matrizes  $P_N(\alpha) = P_N^T(\alpha)$ ,  $K_f$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ , com  $\delta > 0$ :

$$\begin{bmatrix} -BK_f B^T - BK_f^T B^T - 2\delta I_n & A(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ A(\alpha)^T + P_N(\alpha) + \delta I_n & -2P_N(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.255)$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha). \quad (3.256)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, K_o = K_f F. \quad (3.257)$$

(v) Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha) & A(\alpha)^T - C(\alpha)^T K_1^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ A(\alpha) - BK_1 C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.258)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \quad (3.259)$$

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (3.260)$$

(vi) Existem matrizes  $P(\alpha)_N = P(\alpha)_N^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ , com  $\delta > 0$ :

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha)_N & \dots \\ A(\alpha) - BK_1 C(\alpha) + P(\alpha)_N + \delta I_n & \dots \\ \dots & A(\alpha)^T - C(\alpha)^T K_1^T B^T + P(\alpha)_N + \delta I_n \\ \dots & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.261)$$

$$B^T P(\alpha)_N = F_N C(\alpha). \quad (3.262)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (3.263)$$

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (3.264)$$

(vii) Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $K_o$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - 2P(\alpha) & -C(\alpha)^T K_o^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ -BK_o C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.265)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \quad (3.266)$$

$$P(\alpha) > 0. \quad (3.267)$$

(viii) *Existem matrizes  $P(\alpha)_N = P(\alpha)_N^T$ ,  $K_N$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ :*

$$\begin{bmatrix} P_N(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P_N(\alpha) - 2P_N(\alpha) & -C(\alpha)^T K_N^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ -BK_N C(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.268)$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha), \quad (3.269)$$

$$P_N(\alpha) > 0. \quad (3.270)$$

*Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (3.271)$$

$$K_o = \frac{1}{\delta} K_N. \quad (3.272)$$

(ix) *Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - 2P(\alpha) & -C(\alpha)^T K_1^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ -BK_1 C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.273)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \quad (3.274)$$

$$P(\alpha) > 0. \quad (3.275)$$

*Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:*

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (3.276)$$

(x) Existem matrizes  $P(\alpha)_N = P(\alpha)_N^T$ ,  $K_{N1}$ ,  $K_{N2}$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbf{R}$ , com  $\delta > 0$ :

$$\begin{bmatrix} P_N(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P_N(\alpha) - 2P_N(\alpha) & \dots \\ -BK_{N1}C(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & \dots \\ \dots & -C(\alpha)^T K_{N1}^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ \dots & -BK_{N2}B^T - BK_{N2}^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.277)$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha), \quad (3.278)$$

$$P_N(\alpha) > 0. \quad (3.279)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (3.280)$$

$$K_o = K_1 + K_2 F, \quad (3.281)$$

sendo:

$$K_1 = \frac{1}{\delta} K_{N1},$$

$$K_2 = \frac{1}{\delta} K_{N2}.$$

(xi) Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $M$ ,  $N$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T N^T B^T - BNC(\alpha) < 0, \quad (3.282)$$

$$P(\alpha) > 0, \quad (3.283)$$

$$BM = P(\alpha)B, \quad (3.284)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \quad (3.285)$$

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = M^{-1}N. \quad (3.286)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 12, substituindo-se  $A$  por  $A(\alpha)$ ,  $C$  por  $C(\alpha)$  e  $P$  por  $P(\alpha)$ . ■

**Observação 14** *É possível solucionar as condições (i)–(xi) do Teorema 22 sem a dependência do parâmetro  $\alpha$ . Por exemplo, as expressões (3.247) e (3.248), dadas no item (i), são equivalentes a:*

$$\begin{bmatrix} -2P_i & A_i^T - C_i^T K_o^T B^T + P_i + I_n \\ A_i - BK_o C_i + P_i + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.287)$$

$$B^T P_i = FC_i, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.288)$$

Considere, agora, uma dada matriz  $F$  tal que o sistema  $\{A(\alpha), B, FC(\alpha)\}$  seja de fase mínima. O Teorema 23, proposto por Covacic (2006), fornece condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz  $K_o$  que torna ERP o sistema da Figura 3.3.

**Teorema 23** (COVACIC, 2006) *Considere  $F$  tal que o sistema  $\{A(\alpha), B, FC(\alpha)\}$  seja de fase mínima, para todo  $\alpha$  admissível. Então, uma solução para o Problema 2 é obtida através das seguintes LMIs, em termos de  $K_o$  e  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$  :*

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T K_o C(\alpha) - C(\alpha)^T K_o^T FC(\alpha) < 0, \quad (3.289)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \quad (3.290)$$

$$P(\alpha) > 0. \quad (3.291)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A prova deste teorema é obtida diretamente do Lema 1. ■

### 3.5.3 Sistemas Incertos com Taxa de Decaimento

#### 3.5.3.1 Sistemas com o mesmo número de entradas e saídas

Normalmente, apenas a estabilidade de um sistema de controle é insuficiente para a obtenção de um desempenho adequado para um sistema de controle. Frequentemente, também é necessário especificar a resposta transitória. O Teorema 24, concebido em (COVACIC, 2001), estabelece condições necessárias e suficientes para que todos os polos do sistema incerto da Figura 3.3, com o mesmo número de entradas e saídas, tenham parte real menor que  $-\gamma$  e que este sistema seja ERP (COVACIC, 2006).

**Teorema 24** (COVACIC, 2001) *Sejam  $z_i(\alpha) = \sigma_i(\alpha) + j\beta_i(\alpha)$ ,  $\sigma_i(\alpha)$  e  $\beta_i(\alpha) \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$  os zeros de transmissão do sistema  $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$ , descrito no Problema 2. Então, o sistema é ERP e possui uma taxa de decaimento maior que  $\gamma$ , se existirem as matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $R$  e  $F$ , tais que:*

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha), \quad (3.292)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \quad (3.293)$$

$$P(\alpha) > 0. \quad (3.294)$$

com  $\gamma < -\sigma$ , sendo  $\sigma = \max\{\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_p(\alpha)\}$  e existe  $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , tal que  $FC(\alpha)B = (FC(\alpha)B)^T > 0$ , para todo  $\alpha$  admissível. Neste caso, uma matriz  $K_o$  pode ser obtida pela expressão:

$$K_o = (F^T)^{-1}R. \quad (3.295)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) Definindo  $\tilde{A}(\alpha) = A(\alpha) + \gamma I$ , então (3.292) pode ser descrito por:

$$P(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) - \gamma I) + (\tilde{A}(\alpha) - \gamma I)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha),$$

$$P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - \gamma P(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)^T P(\alpha) - \gamma P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha),$$

$$P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) - 2\gamma P(\alpha) < -2\gamma P(\alpha),$$

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < 0. \quad (3.296)$$

Do teorema 21, de (3.292) (que é equivalente a (3.296)), (3.293) e (3.294), o sistema  $\{\tilde{A}(\alpha) - BKC(\alpha), B, FC(\alpha)\}$  é ERP. Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa (KAUFMAN; BAR-KANA; SOBEL, 1994). Sabe-se que os zeros de transmissão de um sistema  $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$ ,  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , são os números  $s(\alpha) \in \mathbb{C}$ , tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} s(\alpha)I - A(\alpha) & B \\ -C(\alpha) & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

De (3.293), a matriz  $F$  tem posto  $m$  e, assim, é fácil verificar que os sistemas  $\{\tilde{A}(\alpha) - BKC(\alpha), B, FC(\alpha)\}$  e  $\{\tilde{A}(\alpha), B, C\}$  têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}(\alpha), B, C\}$ :

$$\begin{bmatrix} s(\alpha)I - \tilde{A}(\alpha) + BKC(\alpha) & B \\ -FC(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} s(\alpha)I - \tilde{A}(\alpha) & B \\ -FC(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} s(\alpha)I - \tilde{A}(\alpha) & B \\ -C(\alpha) & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, os zeros de transmissão  $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$  são os números  $s \in \mathbb{C}$ , tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s(\alpha) - \gamma)I - A(\alpha) & B \\ -C(\alpha) & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se  $s = s_o$  for um zero de transmissão de  $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$ , então  $s(\alpha) = s_o(\alpha) + \gamma$  será um zero de transmissão de  $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$ . Então, todos os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$  apresentam parte real negativa se  $\sigma_i(\alpha) + \gamma < 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ . Daí,  $\gamma < -\sigma$ ,  $\sigma = \max\{\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_p(\alpha)\}$ , para todo  $\alpha$  admissível. Agora, de (3.293) e (3.294),  $FC(\alpha)B = B^T P B > 0$ . A necessidade está provada. Para demonstrar a suficiência, considere que  $0 < \gamma < -\sigma$ , ou seja, todos os zeros de transmissão de  $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$  apresentam parte real negativa e, ainda, que existe  $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tal que  $FC(\alpha)B = (FC(\alpha)B)^T > 0$ . Note que, nestas condições, o sistema  $\{\tilde{A}(\alpha), B, FC(\alpha)\}$  satisfaz às condições (i) e (ii) do Teorema 5. Assim, existe  $K_o(\alpha)$  tal que  $K(\alpha) = K_o(\alpha)F$  torne o sistema  $\{\tilde{A}(\alpha) - BK(\alpha)C(\alpha), B, FC(\alpha)\}$  ERP. Mais especificamente, pode-se demonstrar

que, usando argumentos descritos em (OWENS; PRATZEL-WOLTERS; ILCHMANN, 1987; TEIXEIRA, 1989),  $K_o(\alpha) = kI$ ,  $k > 0$ , constante e suficientemente grande torna o sistema descrito acima ERP. Finalmente, do Teorema 21, (3.292) (que é equivalente a (3.296)), (3.293) e (3.294) são factíveis e o Teorema 24 está demonstrado. ■

**Observação 15** *Se as incertezas consideradas no Teorema 24 forem removidas, tem-se o Teorema 14 (COVACIC, 2006).*

### 3.5.3.2 Sistemas com números diferentes de entradas e saídas

Considere a planta definida em (3.237), com  $p > m$ , satisfazendo às hipóteses  $A_1$  e  $A_2$ . O Teorema 25, proposto por Covacic (2006), que é extensão do Teorema 19 para sistemas incertos, estabelece condições suficientes para que todos os polos do sistema incerto da Figura 3.3, com o número de saídas maior que o número de entradas, tenham parte real menor que  $-\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , e que este sistema seja ERP:

**Teorema 25** (COVACIC, 2006) *Todos os polos do sistema da Figura 3.3 possuem parte real menor que  $-\gamma$ , com  $\gamma > 0$ , e este sistema é ERP se pelo menos uma das condições (i)–(xi) for satisfeita:*

(i) *Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $K_o$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha) & \dots \\ A(\alpha) + \gamma I - BK_o C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & \dots \\ \dots & A(\alpha)^T + \gamma I - C(\alpha)^T K_o^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ \dots & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.297)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \quad (3.298)$$

(ii) *Existem matrizes  $P_N(\alpha) = P_N^T(\alpha)$ ,  $K_o$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ :*



$$\begin{bmatrix} -2P_N(\alpha) & \dots \\ A(\alpha) + \gamma I - BK_o C(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & \dots \\ \dots & A(\alpha)^T + \gamma I - C(\alpha)^T K_o^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ \dots & \dots & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0,$$

(3.299)

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha). \quad (3.300)$$

Neste caso, a matriz  $F$  é dada por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N. \quad (3.301)$$

(iii) Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $K_f$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -BK_f B^T - BK_f^T B^T - 2I_n & A(\alpha) + \gamma I + P(\alpha) + I_n \\ A(\alpha)^T + \gamma I + P(\alpha) + I_n & -2P(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.302)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \quad (3.303)$$

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = K_f F. \quad (3.304)$$

(iv) Existem matrizes  $P_N(\alpha) = P_N^T(\alpha)$ ,  $K_f$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ , com  $\delta > 0$ :

$$\begin{bmatrix} -BK_f B^T - BK_f^T B^T - 2\delta I_n & A(\alpha) + \gamma I + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ A(\alpha)^T + \gamma I + P_N(\alpha) + \delta I_n & -2P_N(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.305)$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha). \quad (3.306)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, K_o = K_f F. \quad (3.307)$$

(v) *Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha) & \dots \\ A(\alpha) + \gamma I - BK_1 C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & \dots \\ \dots & A(\alpha)^T + \gamma I - C(\alpha)^T K_1^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ \dots & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.308)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \quad (3.309)$$

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (3.310)$$

(vi) *Existem matrizes  $P(\alpha)_N = P(\alpha)_N^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ , com  $\delta > 0$ :*

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha)_N & \dots \\ A(\alpha) + \gamma I - BK_1 C(\alpha) + P(\alpha)_N + \delta I_n & \dots \\ \dots & A(\alpha)^T + \gamma I - C(\alpha)^T K_1^T B^T + P(\alpha)_N + \delta I_n \\ \dots & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.311)$$

$$B^T P(\alpha)_N = F_N C(\alpha). \quad (3.312)$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (3.313)$$

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (3.314)$$

(vii) *Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $K_o$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - 2P(\alpha) & -C(\alpha)^T K_o^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ -BK_o C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < \dots \\ \dots - 2\gamma \begin{bmatrix} P(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.315)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \quad (3.316)$$

$$P(\alpha) > 0. \quad (3.317)$$

(viii) *Existem matrizes  $P(\alpha)_N = P(\alpha)_N^T$ ,  $K_N$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ :*

$$\begin{bmatrix} P_N(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P_N(\alpha) - 2P_N(\alpha) & -C(\alpha)^T K_N^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ -BK_N C(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < \dots \\ \dots - 2\gamma \begin{bmatrix} P_N(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.318)$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha), \quad (3.319)$$

$$P_N(\alpha) > 0. \quad (3.320)$$

*Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (3.321)$$

$$K_o = \frac{1}{\delta} K_N. \quad (3.322)$$

(ix) *Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - 2P(\alpha) & -C(\alpha)^T K_1^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ -BK_1 C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} < \dots$$

$$\dots - 2\gamma \begin{bmatrix} P(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
(3.323)

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha),$$
(3.324)

$$P(\alpha) > 0.$$
(3.325)

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = K_1 + K_2 F.$$
(3.326)

(x) Existem matrizes  $P(\alpha)_N = P(\alpha)_N^T$ ,  $K_{N1}$ ,  $K_{N2}$  e  $F_N$  que satisfazem às seguintes condições, para algum  $\delta \in \mathbb{R}$ , com  $\delta > 0$ :

$$\begin{bmatrix} P_N(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P_N(\alpha) - 2P_N(\alpha) & -C(\alpha)^T K_{N1}^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ -BK_{N1} C(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & -BK_{N2} B^T - BK_{N2}^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} \dots$$

$$\dots < -2\gamma \begin{bmatrix} P_N(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
(3.327)

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha),$$
(3.328)

$$P_N(\alpha) > 0.$$
(3.329)

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $K_o$  podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N,$$
(3.330)

$$K_o = K_1 + K_2 F,$$
(3.331)

sendo:

$$K_1 = \frac{1}{\delta} K_{N1},$$

$$K_2 = \frac{1}{\delta} K_{N2}.$$

(xi) *Existem matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $M$ ,  $N$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições:*

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T N^T B^T - BNC(\alpha) < -2\gamma P(\alpha), \quad (3.332)$$

$$P(\alpha) > 0, \quad (3.333)$$

$$BM = P(\alpha)B, \quad (3.334)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \quad (3.335)$$

Neste caso, a matriz  $K_o$  é dada por:

$$K_o = M^{-1}N. \quad (3.336)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 12, substituindo-se  $A$  por  $A(\alpha) + \gamma I$ ,  $C$  por  $C(\alpha)$  e  $P$  por  $P(\alpha)$ . ■

Considere, agora, uma dada matriz  $F$  tal que todos os zeros de transmissão do sistema  $\{A(\alpha), B, FC(\alpha)\}$  possuem parte real menor que  $-\gamma$ ,  $\gamma > 0$ . O Teorema 26, proposto por Covacic (2006), fornece condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz  $K_o$  tal que todos os polos do sistema da Figura 3.3 tenham parte real menor que  $-\gamma$ , e que este sistema seja ERP.

**Teorema 26** (COVACIC, 2006) *Considere  $F$  tal que todos os zeros de transmissão do sistema  $\{A(\alpha), B, FC(\alpha)\}$  possuem parte real menor que  $-\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , para todo  $\alpha$  admissível. Então, uma condição suficiente para que todos os polos do sistema da Figura 3.3 tenham parte real menor que  $-\gamma$  e que este sistema seja ERP é obtida através das seguintes LMIs, em termos de  $K_o$  e  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$  :*

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T K_o C(\alpha) - C(\alpha)^T K_o^T F C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha), \quad (3.337)$$

$$B^T P(\alpha) = F C(\alpha), \quad (3.338)$$

$$P(\alpha) > 0. \quad (3.339)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A prova deste teorema é obtida diretamente do Lema 1. ■

### 3.6 CONCLUSÃO PARCIAL: capítulo 3

Neste capítulo foram apresentadas as definições de sistemas ERP disponíveis na literatura. Para plantas sem incertezas e com o mesmo número de entradas e saídas, discutiu-se os resultados sobre o problema de sistemas ERP com controladores estáticos e acesso somente às saídas da planta, conforme formulado no Problema 1 e solucionado em Teixeira, Lordelo e Assunção (2000), Lordelo (2000) e Covacic (2006).

Em (COVACIC, 2001), foi estudado o Problema 2, que é uma extensão do Problema 1 para sistemas com incertezas politópicas, para plantas com o mesmo número de entradas e saídas. Também, foram relatadas duas condições suficientes, duais, para o sistema da Figura 3.2, cujas plantas possuem o número de saídas maior que o número de entradas, que atendem à condição  $B^T = (CB)^T C$ , e a relação com os zeros de transmissão da planta.

Relatou-se neste trabalho, condições suficientes obtidas por Covacic (2006) para a solução dos Problemas 1 e 2, para os sistemas das Figuras 2 e 3, cujas plantas possuem número de saídas maior que o número de entradas e podem apresentar incertezas paramétricas, sem a restrição  $B^T = (CB)^T C$ .

No próximo capítulo apresenta-se a teoria sobre Controle com Estrutura Variável .

## CAPÍTULO 4

### COM ESTRUTURA VARIÁVEL UTILIZANDO LMIS

Na seção 3, foram apresentadas condições em termos de LMIs para a síntese de sistemas ERP sem e com incertezas. Nesta seção, são descritos os métodos de projeto de Controle com Estrutura Variável (CEV) para sistemas com incertezas paramétricas e sujeitos a distúrbios. Considerou-se robustez paramétrica, taxa de decaimento e restrições na entrada e saída, para sistemas lineares invariantes no tempo (COVACIC, 2006).

Considere o sistema incerto descrito por (4.1) (COVACIC, 2006):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + B(\alpha)(u + \xi(t, x)), \\ y &= C(\alpha)x, \end{aligned} \tag{4.1}$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \geq m$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^r$  dado por:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

sendo  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$  constantes desconhecidas, com  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$ .

A lei de controle é dada por:

$$u = -K_o y - \beta \text{sign}(Fy). \tag{4.3}$$

São admitidas as seguintes hipóteses (COVACIC, 2006):

*B1* O vetor  $x$  não está disponível, mas o vetor  $y$  está disponível para medição;

*B2* As matrizes com incertezas  $A(\alpha)$  e  $C(\alpha)$  são constantes, mas conhecidas e descritas por:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i \tag{4.4}$$

$$C(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i C_i \tag{4.5}$$

sendo  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$  constantes desconhecidas,  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$  e as matrizes  $A_i$  e  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  conhecidas (incertezas politópicas);

*B3* Definindo-se  $|\xi(t, x)| = \|\xi(t, x)\|_1 = |\xi_1(t, x)| + \dots + |\xi_m(t, x)|$ , sendo que  $\xi(t, x)^T = [\xi_1(t, x), \dots, \xi_m(t, x)]$ , então, existem e são conhecidas constantes positivas  $a$  e  $b$ , tais que  $|\xi(t, x)| \leq a|x| + b$ ;

*B4* A matriz  $B(\alpha) = B + \Delta B$ , sendo  $\Delta B = B\Delta\tilde{B}$ . Existem e são conhecidas  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , tais que

$$1 + \Delta\tilde{B}_{i,i} - |\Delta\tilde{B}_{i,1}| - \dots - |\Delta\tilde{B}_{i,i-1}| - |\Delta\tilde{B}_{i,i+1}| - \dots - |\Delta\tilde{B}_{i,m}| > l_i > 0,$$

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$ , e define-se  $l = \min\{l_1, \dots, l_m\}$ .

A condição *B3* é usual em CEV Utkin (1992). A condição *B1* considera o CEV com acesso somente às saídas da plante, estudada por exemplo em Heck, Yallapragada e Fan (1995), Teixeira (1993), Žak e Hui (1993), Edwards, Spurgeon e Akoachere (2000) e Edwards, Akoachere e Spurgeon (2001). O método de projeto proposto por Covacic (2006) é mais geral que os resultados anteriores, pois o método considera estabilidade, taxa de decaimento, robustez e restrições no sinal (COVACIC, 2006). A condição *B2* é geral, pois permite incertezas arbitrárias politópicas em  $A(\alpha)$  e  $C(\alpha)$ . Por exemplo, considere  $C(\alpha) = [c_1 \quad c_2]$ , sendo que as constantes  $c_1 \in [2,3]$  e  $c_2 \in [4,5]$  são desconhecidas. Então, para todo  $c_1$  e  $c_2$  factível, existem constantes  $\beta_i \in [0,1]$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , satisfazendo às condições  $\beta_1 + \beta_2 = 1$  e  $\beta_3 + \beta_4 = 1$ , de modo que  $c_1 = 2\beta_1 + 3\beta_2$  e  $c_2 = 4\beta_3 + 5\beta_4$ . Agora, note que  $c_1 = (\beta_3 + \beta_4)(2\beta_1 + 3\beta_2) = 2\beta_1\beta_3 + 2\beta_1\beta_4 + 3\beta_2\beta_3 + 3\beta_2\beta_4$  e  $c_2 = (\beta_1 + \beta_2)(4\beta_3 + 5\beta_4) = 4\beta_1\beta_3 + 5\beta_1\beta_4 + 4\beta_2\beta_3 + 5\beta_2\beta_4$ . Então, definindo-se  $\alpha_1 = \beta_1\beta_3$ ,  $\alpha_2 = \beta_1\beta_4$ ,  $\alpha_3 = \beta_2\beta_3$  e  $\alpha_4 = \beta_2\beta_4$ , note que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$  e  $C(\alpha) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 + \alpha_4 C_4$ , sendo  $C_1 = [2 \quad 4]$ ,  $C_2 = [2 \quad 5]$ ,  $C_3 = [3 \quad 4]$  e  $C_4 = [3 \quad 5]$ . A incerteza em  $\Delta\tilde{B}$ , dada em *B4*, é também usual, mas é possível relaxar esta condição, como mostrado em Hsu, Kaszkurewicz e Bhaya (1999) (COVACIC, 2006).



#### 4.1 ESTABILIDADE E ROBUSTEZ

Para a análise de estabilidade do sistema incerto (4.1), com as condições  $B1 - B4$ , uma candidata a função de Lyapunov é (COVACIC, 2006):

$$V(x, \alpha) = x^T P(\alpha) x, P(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i, \quad (4.6)$$

sendo  $P_i = P_i^T > 0, i = 1, \dots, r$ .

Considere a existência de  $P(\alpha) = P(\alpha)^T, K_o$  e  $F$ , de modo que, dadas  $A(\alpha)$  e  $C(\alpha)$  satisfazendo  $B2$  e  $B(\alpha)$  obedecendo à Hipótese  $B4$ , as equações abaixo sejam satisfeitas (COVACIC, 2006):

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)K_o C(\alpha) - C(\alpha)^T K_o^T B(\alpha)P(\alpha) < 0, \quad (4.7)$$

$$B(\alpha)^T P(\alpha) = FC(\alpha), \quad (4.8)$$

$$P(\alpha) > 0, \quad (4.9)$$

para todo  $\alpha_i, i = 1, \dots, r$ , admissível. Então, para a lei de controle (4.3), de (4.1),  $B1 - B4$  e (4.7)-(4.9) chega-se a (4.10), pois:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \alpha) &= [A(\alpha)x - B(\alpha)K_o y - B(\alpha)\beta \text{sign}(Fy) + B(\alpha)\xi]^T P(\alpha)x \\ &\quad + x^T P(\alpha)[A(\alpha)x - B(\alpha)K_o y - B(\alpha)\beta \text{sign}(Fy) + B(\alpha)\xi] \\ &= [A(\alpha)x - B(\alpha)K_o C(\alpha)x - B(\alpha)\beta \text{sign}(Fy) + B(\alpha)\xi]^T P(\alpha)x \\ &\quad + x^T P(\alpha)[A(\alpha)x - B(\alpha)K_o C(\alpha)x - B(\alpha)\beta \text{sign}(Fy) \\ &\quad + B(\alpha)\xi] \\ &= x^T A(\alpha)^T P(\alpha)x - x^T C(\alpha)^T K_o^T B(\alpha)^T P(\alpha)x \\ &\quad - [B(\alpha)\beta \text{sign}(Fy) - B(\alpha)\xi]^T P(\alpha)x + x^T P(\alpha)A(\alpha)x \\ &\quad - x^T P(\alpha)B(\alpha)K_o C(\alpha)x \\ &\quad - x^T P(\alpha)[B(\alpha)\beta \text{sign}(Fy) - B(\alpha)\xi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)K_o C(\alpha) \\
&\quad - C(\alpha)^T K_o^T B(\alpha)^T P(\alpha)]x \\
&\quad + 2x^T P(\alpha)B(\alpha)(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi).
\end{aligned}$$

Mas,  $B(\alpha) = B(I + \Delta\tilde{B})$ , então:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, \alpha) &= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T (I + \Delta\tilde{B})K_o C(\alpha) \\
&\quad - C(\alpha)^T K_o (I + \Delta\tilde{B})^T F C(\alpha)]x \\
&\quad + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T K_o C(\alpha) - C(\alpha)^T F^T \Delta\tilde{B} K_o C(\alpha) \\
&\quad - C(\alpha)^T K_o F C(\alpha) - C(\alpha)^T K_o \Delta\tilde{B}^T F C(\alpha)]x \\
&\quad + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (F^T K_o + K_o F)C(\alpha) \\
&\quad - C(\alpha)^T (F^T \Delta\tilde{B} K_o + K_o \Delta\tilde{B}^T F)C(\alpha)]x \\
&\quad + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (F^T K_o + K_o F)C(\alpha)]x \\
&\quad - x^T C(\alpha)^T F^T \Delta\tilde{B} K_o C(\alpha)x - x^T C(\alpha)^T K_o \Delta\tilde{B}^T F C(\alpha)x \\
&\quad + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (F^T K_o + K_o F)C(\alpha)]x \\
&\quad - y^T F^T \Delta\tilde{B} K_o y - y^T K_o \Delta\tilde{B}^T F y \\
&\quad + 2x^T C(\alpha)^T F^T (I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (F^T K_o + K_o F)C(\alpha)]x \\
&\quad - 2y^T F^T \Delta\tilde{B} K_o y + 2y^T F^T (I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (F^T K_o + K_o F)C(\alpha)]x + J, \tag{4.10}
\end{aligned}$$

sendo:

$$J = -2y^T F^T \Delta\tilde{B} K_o y + 2y^T F^T (I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi). \tag{4.11}$$

Então, a partir de B4 e  $|\cdot|$  definida em B3, definindo-se  $y^T F^T = [f_1 \ \dots \ f_m]$ , note que:

$$\begin{aligned}
J &\leq |2y^T F^T \Delta \tilde{B} K_o y| + |2y^T F^T (I + \Delta \tilde{B}) \xi| - 2y^T F^T (I + \Delta \tilde{B}) \beta \text{sign}(Fy) \\
&\leq 2|y^T F^T| |\Delta \tilde{B} K_o y| + 2|y^T F^T| |I + \Delta \tilde{B}| |\xi| - 2y^T F^T (I + \Delta \tilde{B}) \beta \text{sign}(Fy) \\
&\leq 2|y^T F^T| |\Delta \tilde{B} K_o y| + 2|y^T F^T| |I + \Delta \tilde{B}| (a|x| + b) \\
&\quad - 2\beta f_1 [(1 + \Delta \tilde{B}_{1,1}) \text{sign}(f_1) + \Delta \tilde{B}_{1,2} \text{sign}(f_2) + \dots \\
&\quad + \Delta \tilde{B}_{1,m} \text{sign}(f_m)] - \dots \\
&\quad - 2\beta f_m [\Delta \tilde{B}_{m,1} \text{sign}(f_1) + \Delta \tilde{B}_{m,2} \text{sign}(f_2) + \dots \\
&\quad + (1 + \Delta \tilde{B}_{m,m}) \text{sign}(f_m)] \\
&\leq 2|y^T F^T| |\Delta \tilde{B} K_o y| + 2|y^T F^T| |I + \Delta \tilde{B}| \times (a|x| + b) \\
&\quad - 2\beta |f_1| [(1 + \Delta \tilde{B}_{1,1}) - |\Delta \tilde{B}_{1,2}| - \dots - |\Delta \tilde{B}_{1,m}|] - \dots \\
&\quad - 2\beta |f_m| [-|\Delta \tilde{B}_{m,1}| - |\Delta \tilde{B}_{m,2}| - \dots + (1 + \Delta \tilde{B}_{m,m})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J &\leq 2|y^T F^T| |\Delta \tilde{B} K_o y| + 2|y^T F^T| |I + \Delta \tilde{B}| \times (a|x| + b) - 2\beta \{|f_1| l_1 + \dots + \\
&\quad |f_m| l_m\}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

De B4,  $l_i > l$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
J &\leq 2|y^T F^T| |\Delta \tilde{B} K_o y| + 2|y^T F^T| |I + \Delta \tilde{B}| \times (a|x| + b) - 2\beta \{|f_1| + \dots + \\
&\quad |f_m|\} l.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Mas a norma  $|y^T F^T|$  é dada por:

$$|y^T F^T| = \|y^T F^T\|_1 = |f_1| + \dots + |f_m|. \tag{4.14}$$

Logo,

$$J \leq 2|y^T F^T| |\Delta \tilde{B} K_o y| + 2|y^T F^T| |I + \Delta \tilde{B}| (a|x| + b) - 2\beta |y^T F^T| l,$$

$$J \leq 2|y^T F^T| \{|\Delta \tilde{B} K_o y| + |I + \Delta \tilde{B}| (a|x| + b) - \beta l\},$$

$$J \leq 2|y^T F^T| \{ |\Delta\tilde{B}| |K_o y| + |I + \Delta\tilde{B}| (a|x| + b) - \beta l \}. \quad (4.15)$$

Então, se:

$$\beta > \frac{|\Delta\tilde{B}| |K_o y| + |I + \Delta\tilde{B}| (a|x| + b)}{l}, \quad (4.16)$$

segue, de (4.7), (4.10) e (4.15), que  $\dot{V}(x, \alpha) < 0$ , para  $x \neq 0$  e, portanto, (4.7)-(4.9) são condições suficientes para a estabilidade assintótica global do sistema incerto (4.1) com a lei de controle (4.3) (COVACIC, 2006).

Para sistemas com o mesmo número de entradas e saídas, segundo o Teorema 21, a condição necessária e suficiente para a factibilidade das condições (4.7)-(4.9) é a existência de matrizes  $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ ,  $R$  e  $F$  que satisfazem às seguintes condições: (COVACIC, 2006)

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < 0, \quad (4.17)$$

$$B^T P(\alpha) = F C(\alpha), \quad (4.18)$$

$$P(\alpha) > 0. \quad (4.19)$$

Da hipótese B2, então (4.18) e (4.19) são verificadas, para todo  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  admissível, se e somente, se, (COVACIC, 2006)

$$B^T P_i = F C_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad (4.20)$$

$$P_i = P_i^T > 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (4.21)$$

A condição (4.17) é equivalente a (COVACIC, 2006):

$$[\alpha_1 I \quad \dots \quad \alpha_r I] Q [\alpha_1 I \quad \dots \quad \alpha_r I]^T < 0, \quad (4.22)$$

sendo:

$$Q = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} [A_1 \quad \dots \quad A_r] + \begin{bmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_r^T \end{bmatrix} [P_1 \quad \dots \quad P_r] - \begin{bmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_r^T \end{bmatrix} (R + R^T) [C_1 \quad \dots \quad C_r]. \quad (4.23)$$

Portanto, uma condição suficiente para (4.17) é (COVACIC, 2006):

$$Q < 0. \quad (4.24)$$

Se as LMIs (4.20), (4.21) e (4.24), com  $Q$  definido em (4.23) (que são equivalentes a (4.17)-(4.19)) forem factíveis, então a matriz  $K_o$  pode ser obtida pela expressão  $K_o = (F^T)^{-1}R$  (COVACIC, 2006).

Seguindo as ideias descritas em Teixeira, Pietrobon e Assunção (2000), a LMI (4.23) pode ser flexibilizada através do Teorema 27, proposto por Covacic (2001).

**Teorema 27** (COVACIC, 2006) Considere a matriz  $Q$  dada em (4.23). Então, o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema controlado (4.1) e globalmente assintoticamente estável se existirem matrizes simétricas  $P_i > 0$  e  $P_{ij} > 0$  de modo que:

$$Q_N = Q + \begin{bmatrix} 0 & P_{12} & \dots & P_{1r} \\ P_{12} & 0 & \ddots & P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1r} & P_{2r} & \dots & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (4.25)$$

**Prova** (COVACIC, 2006) A matriz  $Q$  dada em (4.23) pode ser decomposta em:

$$Q = [Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & \ddots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1r}^T & Q_{1r}^T & \dots & Q_{rr} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.26)$$

Então, dada uma candidata a função de Lyapunov  $V(x(t)) = x^T(t)P(\alpha)x(t)$ , de (4.1) e (4.23), tem-se:

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 x^T(t) Q_{ii} x(t) + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i \alpha_j x^T(t) Q_{ij} x(t), \quad (4.27)$$

sendo que:

$$\sum_{i<j}^r \alpha_i \alpha_j x^T(t) Q_{ij} x(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \alpha_i \alpha_j x^T(t) Q_{ij} x(t) \quad (4.28)$$

Dadas as matrizes  $P_{ij} = P_{ij}^T \geq 0$ , segue que:

$$\sum_{i<j}^r \alpha_i \alpha_j x^T(t) P_{ij} x(t) < 0. \quad (4.29)$$

Então:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 x^T(t) Q_{ii} x(t) + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i \alpha_j x^T(t) Q_{ij} x(t) \\ &\quad + \sum_{i<j}^r \alpha_i \alpha_j x^T(t) P_{ij} x(t), \\ \dot{V}(x(t)) &\leq \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 x^T(t) Q_{ii} x(t) + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i \alpha_j x^T(t) (Q_{ij} + P_{ij}) x(t), \end{aligned}$$

$$\dot{V}(x(t)) \leq x^T(t) [\alpha_1 I \quad \alpha_2 I \quad \dots \quad \alpha_r I] \dots$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} + P_{12} & \dots & Q_{1r} + P_{1r} \\ Q_{12}^T + P_{12} & Q_{22} & \ddots & Q_{2r} + P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1r}^T + P_{1r} & Q_{2r}^T + P_{2r} & \dots & Q_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 I \\ \alpha_2 I \\ \vdots \\ \alpha_r I \end{bmatrix} x(t). \quad (4.30)$$

Portanto, se (4.25) for satisfeita,  $\dot{V}(x(t)) < 0$  e o sistema será globalmente assintoticamente estável. ■

**Observação 16** (COVACIC, 2006) Para sistemas com números diferentes de entradas e saídas, as condições estabelecidas nos Teoremas 21-23 são analisadas de maneira equivalente. Na maioria dos casos, não ocorre o produto  $\alpha_i \alpha_j$ , o que torna a análise mais simples.

#### 4.2 ESTABILIDADE, ROBUSTEZ E TAXA DE DECAIMENTO

A taxa de decaimento  $\gamma$  é especificada pela equação (COVACIC, 2006):

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha), \quad (4.31)$$

ou, de forma equivalente,

$$P(\alpha)(A(\alpha) + \gamma I) + (A(\alpha) + \gamma I)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < 0. \quad (4.32)$$

De modo similar à análise de (4.17), descrita nas equações (4.23) e (4.24), uma condição suficiente para a equação (4.32) é

$$Q + [\gamma I \quad \dots \quad \gamma I]^T [P_1 \quad \dots \quad P_r] + [P_1 \quad \dots \quad P_r]^T [\gamma I \quad \dots \quad \gamma I] < 0. \quad (4.33)$$

As LMIs (4.20), (4.21) e (4.33), com  $Q$  definido em (4.23), especificam o projeto que garante estabilidade, robustez e taxa de decaimento, para o sistema a controlar. (COVACIC, 2006).

Assim como a LMI (4.23), a LMI (4.33) pode ser flexibilizada através do Teorema 27, substituindo-se  $Q$  por  $Q_N$ , definido em (4.25).

**Observação 17** (COVACIC, 2006) Para sistemas com números diferentes de entradas e saídas, as condições estabelecidas nos Teoremas 24-26 são analisadas de maneira equivalente. Na maioria dos casos, não ocorre o produto  $\alpha_i \alpha_j$ , o que torna a análise mais simples.

#### 4.3 ESTABILIDADE, ROBUSTEZ, TAXA DE DECAIMENTO E RESTRIÇÕES NA ENTRADA E NA SAÍDA

Considere o sinal:

$$s = Hx, \quad (4.34)$$

sendo  $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $1 \leq q \leq n$  uma matriz constante conhecida. Devido às limitações impostas pelas aplicações práticas de sistemas de controle, muitas vezes devem ser consideradas restrições no projeto, como as descritas abaixo (COVACIC, 2006):

$$\max_{t \geq 0} \|s(t)\| \leq \xi_o, \quad (4.35)$$

sendo  $\xi_o$  uma constante conhecida, para uma dada condição inicial  $x(0)$ .

Em Boyd et al. (1994), foram apresentadas duas LMIs para a especificação destas restrições, para um sinal de controle  $u = Gx$ . Analisando-se a dedução destes resultado em Covacic (2006), observa-se que a lei de controle pode ser arbitrária, deste que exista uma função de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ , com  $P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$  e  $\dot{V}(x) < 0$ , para  $x \neq 0$  (COVACIC, 2006).

As condições apresentadas por Boyd et al. (1994), que asseguram que a condição (4.35) é satisfeita para  $s$  dado em (4.34), são dadas por (COVACIC, 2006):

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & H^T \\ H & \xi_o^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T P(\alpha) \\ P(\alpha)x(0) & P(\alpha) \end{bmatrix} > 0. \quad (4.37)$$

Considerando a definição de  $P(\alpha)$  em (4.6), então (4.36) e (4.37) são, respectivamente, equivalentes às seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} P_i & H^T \\ H & \xi_o^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.38)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T P_i \\ P_i x(0) & P_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (4.39)$$



Se for necessário especificar restrições em mais de um sinal, podemos adicionar LMIs, como as descritas em (4.38) e (4.39), para cada sinal. As LMIs que especificam estas restrições devem ser consideradas juntamente com as LMIs que garantem estabilidade, robustez e taxa de decaimento (COVACIC, 2006).

Para o caso especial, no qual  $s = y$ , com  $y$  dada em (4.1) e considerando-se a condição B5, a LMI (4.36) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} P_i & C_i^T \\ C_i & \xi_o^2 I \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, r. \quad (4.40)$$

Considere, agora, o sinal de entrada:

$$u = -K_o x, \quad (4.41)$$

com a restrição descrita abaixo:

$$\max_{t \geq 0} \|u(t)\| \leq \mu_o, \quad (4.42)$$

sendo  $\mu_o$  uma constante conhecida, para uma dada condição inicial  $x(0)$ .

As condições apresentadas por Boyd et al. (1994), que asseguram que a condição (4.42) é satisfeita para  $u$  dado em (4.41), são dadas por (4.37) e:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & C(\alpha)^T K_o^T \\ K_o C(\alpha) & \mu_o^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.43)$$

Considerando a definição de  $P(\alpha)$  em (4.6), então (4.37) e (4.43) são, respectivamente, equivalentes às LMIs (4.39) e:

$$\begin{bmatrix} P_i & C_i^T K_o^T \\ K_o C_i & \mu_o^2 I \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, r. \quad (4.44)$$

**Observação 17** (COVACIC, 2006) Considere o sinal  $s(t) = [s_1(t) \ \dots \ s_q(t)]$ . A análise do Controle com Estrutura Variável é baseada na norma  $\|s(t)\|_1 = |s_1(t)| + \dots + |s_q(t)|$ . Entretanto, as LMIs que garantem as restrições na entrada e na saída são baseadas na norma

$\|s(t)\|_2 = \left(|s_1(t)|^2 + \dots + |s_q(t)|^2\right)^{1/2}$ . Para contornar este problema, a solução é impor restrições em cada elemento do sinal  $s(t)$ :

$$\|s_i(t)\|_2 \leq \xi_{oi}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (4.45)$$

Assim, a norma  $\|s(t)\|_1$  é dada por:

$$\|s(t)\|_1 = |s_1(t)| + \dots + |s_q(t)| = (s_1(t)^2)^{1/2} + \dots + (s_q(t)^2)^{1/2}$$

$$\|s(t)\|_1 = |s_1(t)|^{1/2} + \dots + |s_q(t)|^{1/2} = \|s_1(t)\|_2 + \dots + \|s_q(t)\|_2$$

$$\|s(t)\|_1 \leq \xi_{o1} + \dots + \xi_{oq} = \xi_o,$$

sendo  $\xi_o = \xi_{o1} + \dots + \xi_{oq}$ .

#### 4.4 CONCLUSÃO PARCIAL: CAPÍTULO 4

Nesta seção, foram relatadas condições propostas por Covacic (2006), em termos de LMIs, para o controle com estrutura variável de sistemas com incertezas politópicas, com acesso somente às saídas da planta. As especificações descritas nesta seção foram quanto a estabilidade, a robustez, a taxa de decaimento e restrições na entrada e na saída de sistemas com o mesmo número de entradas e saídas, além de sistemas com o número de saídas maior que o número de entradas.

No próximo capítulo será redigido sobre os portadores de necessidades especiais, a importância da CRM, uma linha histórica sobre os trabalhos que utilizam a PRM em diversas aplicações e a apresentação do modelo dinâmico que será utilizado para projeto.

## **CAPÍTULO 5**

### **MODELO DINÂMICO DA CRM**

O Brasil encontra-se num processo de organização em termos de dados estatísticos oficiais sobre as pessoas com deficiência. Tal organização intensificou-se após a Lei nº 7.853/89, que tornou obrigatória a inclusão de itens específicos nos censos nacionais, o Censo Demográfico de 1991, pela primeira vez, incluiu questões que atestaram a presença de 2.198.988 pessoas com deficiência, em uma população total de 146.815.750 habitantes, o que representa 1,49 % desta (BRASIL, 2010).

Já o Censo de 2000, utilizando nova abordagem conceitual e metodológica, identificou 24,6 milhões de pessoas com algum tipo de deficiência, ou seja, 14,5% da população brasileira, desde alguma dificuldade para andar, ouvir e enxergar, até as graves lesões incapacitantes. “Foram detectados, no total de 24,6 milhões, 48% de pessoas com deficiência visual, 23% com deficiência motora, 17% com deficiência auditiva, 8% com deficiência intelectual e 4% com deficiência física” (BRASIL, 2010).

A metodologia adotada incluiu, no cômputo, muitos idosos que apresentam dificuldades para se locomover, ver e/ou ouvir. Ao se considerar apenas as pessoas com limitações mais severas, percepção de incapacidade, o percentual encontrado foi de 2,5% do total da população, ou seja, um total de 4,3 milhões de pessoas (BRASIL, 2010).

Para conscientizar e mobilizar a sociedade e organizações, é fundamental estabelecer uma política de inclusão das pessoas com deficiência. Vindo ao encontro desta necessidade, o Ministério da Saúde apresenta a política “[...] voltada para a inclusão das pessoas com deficiência em toda a rede de serviços do Sistema Único de Saúde (SUS), caracteriza-se por reconhecer a necessidade de implementar o processo de respostas às complexas questões que envolvem a atenção à saúde das pessoas com deficiência no Brasil”. (BRASIL, 2010).

Assim, define, como seus propósitos gerais, a prevenção de agravos à proteção da saúde, passando pela reabilitação e desempenho humano, contribuindo para a sua inclusão em todas as esferas da vida social e prevenir agravos que determinam o aparecimento de deficiências (BRASIL, 2010).

As principais diretrizes desta política de inclusão proposta pelo Ministério da Saúde a serem implementadas solidariamente nas três esferas de gestão e incluindo as parcerias interinstitucionais necessárias, são: a promoção da qualidade de vida, a prevenção de deficiências; a atenção integral à saúde, a melhoria dos mecanismos de informação; a

capacitação de recursos humanos, e a organização e funcionamento dos serviços (BRASIL, 2010).

A promoção da qualidade de vida “[...] é uma diretriz que deve ser compreendida como responsabilidade social compartilhada, visando assegurar a igualdade de oportunidades, a construção de ambientes acessíveis e a ampla inclusão sociocultural.” (BRASIL, 2010). As cidades, as escolas, os ambientes públicos, coletivos e de lazer, os serviços de saúde, os meios de transporte, as formas de comunicação e informação devem ser pensadas de maneira a facilitar a convivência, o livre trânsito e a interação de todos os cidadãos em iguais condições de direitos, nos vários aspectos da vida cotidiana das comunidades (BRASIL, 2010).

Para a viabilização desta política nacional deve-se a uma união de esforços que tiveram seu início na decisão política dos governantes de responder positivamente às reivindicações e movimentos sociais de pessoas com deficiência. Os gestores do Sistema Único de Saúde (SUS), nas três esferas de governo, tendo como parceiros potenciais as áreas da educação, desenvolvimento social, direitos humanos, habitação, justiça, transporte, trabalho, esporte e turismo que, de forma articulada e integrada, procuram consolidar compromissos institucionais para a progressiva inclusão das pessoas com deficiência em suas comunidades, habilitando-as e reabilitando-as para o exercício da vida social, segundo as suas possibilidades. Como exemplo de parceiro da área da educação, o departamento de engenharia elétrica da Universidade Estadual de Londrina, investe esforços para melhorar a qualidade de vida de pessoas com deficiência física (BRASIL, 2010; ROSSINI et al., 2012).

Uma vez que, a “[...] mobilidade e a independência são requisitos fundamentais para uma boa qualidade de vida.” (ANTÃO, 2010) existe portanto, um determinado número de pessoas que por terem sofrido lesões graves ao nível da coluna cervical, perderam capacidades físicas para desempenhar tais requisitos de forma satisfatória. Estas pessoas são denominadas tetraplégicas e necessitam uma cadeira de rodas especial para conseguirem se movimentar, alguns casos, não conseguem manipular a cadeira de rodas manual, necessitam de uma cadeira de rodas elétrica, onde a única interface entre a cadeira e o usuário é o *joystick*, isso restringe o número de usuários, por necessitar que o mesmo tenha a destreza para operá-la, o que nem sempre acontece (ANTÃO, 2010).

Ao considerar a estatística de pessoas com deficiência no Brasil, dados divulgados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), constatados pelo censo demográfico de 2000, apontam um contingente de 200.000 paraplégicos e 50.000 tetraplégicos no país em uma população de 169.872.856 pessoas, ou seja, havia no Brasil, 118 paraplégicos por 100.000 habitantes e 29 tetraplégicos por 100.000 habitantes,

correspondendo em cerca de 25% dos paraplégicos são tetraplégicos no Brasil (RAHEB; CALIRI, 2010).

Considerando a política de inclusão das pessoas com deficiência proposta pelo Ministério da Saúde, este trabalho vem ao encontro de promover melhor qualidade de vida a estas pessoas, por meio da possibilidade de locomoção das mesmas auxiliadas por uma Cadeira de Rodas Móvel. O presente trabalho ilustra uma abordagem para projeto de Controlador Robusto via LMIs, aplicado a uma Plataforma Robótica Móvel utilizada a uma Cadeira de Rodas Móvel. A análise de controle do sistema utiliza uma estrutura cinemática modelada por Mazo et al. (1995) e adaptada em Fonseca Sobrinho et al. (2000) e (2003) para tetraplégicos, por meio de sopro e sucção. Em trabalhos mais recentes, Ferreira, Cervantes e Germanovix (2008) adaptaram os comandos, sopro e sucção (FONSECA SOBRINHO et al., 2003) a uma cadeira de rodas comercial com *joystick*. “Um dos objetivos do departamento de engenharia elétrica da UEL é melhorar a expectativa de vida de tetraplégicos, desde o ano de 2000, o departamento está desenvolvendo uma cadeira de rodas para tetraplégicos.” (ROSSINI et al., 2012).

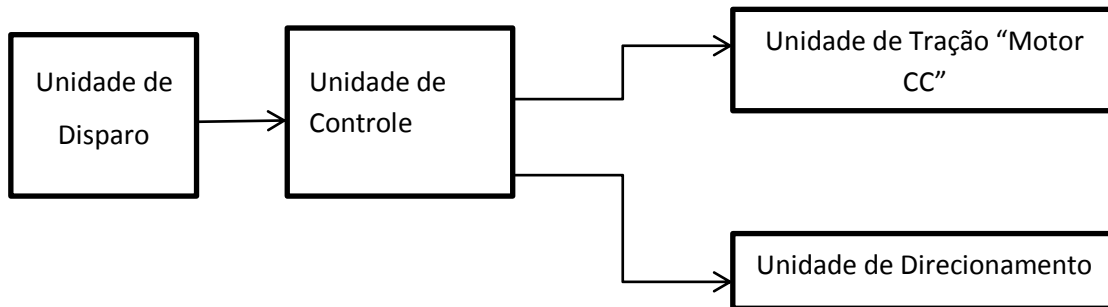
## 5.1 CONSTRUÇÃO DA CADEIRA DE RODAS MOVEIS

“O trabalho de Fonseca Sobrinho et al. (2000) os quais criaram uma cadeira de rodas controlada por um sistema microprocessado e acionado por sopro e sucção, com a finalidade de atender à aplicação a pacientes tetraplégicos dentre outros casos de paralisia.” (ROSSINI et al., 2012). O projeto apresenta uma alternativa de baixo custo a ser aplicada na área médica, em casos de pacientes portadores de paralisias permanentes ou temporárias dos membros inferiores e superiores. O estado da arte do trabalho de Fonseca Sobrinho et al. (2000) é a locomoção do operador da cadeira de rodas, através de comandos de sopros e sucções em um tubo localizado a altura da boca do mesmo.

O comando succionar seria responsável pela seleção de funções básicas como ir para frente, para trás, girar para a esquerda ou direita. Assim a cada sucção executada pelo operador, uma dessas funções seria escolhida. O comando soprar seria responsável pela execução de uma dessas funções previamente selecionada pelo comando succionar, isto é, ao realizar um sopro, a função selecionada (Ex: seguir em frente) seria executada e a cadeira começaria se deslocar para frente. Um segundo sopro interromperia a execução desta função, permitindo que se possa selecionar uma nova função e posteriormente executá-la (FONSECA SOBRINHO et al., 2000).

O projeto da Cadeira de Rodas Móvel de Fonseca Sobrinho et al. (2000) encontra-se discriminado a seguir, conforme Figura 5.1, na qual notam-se quatro unidades do projeto.

Figura 5.1 - Organização das unidades do projeto



**Fonte:** Fonseca Sobrinho et al (2000).

A Unidade de Disparo tem como função gerar sinais correspondentes às ações de sopro e sucção, condicioná-los a forma ideal e enviá-los para a unidade de controle microprocessada. A Unidade de Controle é responsável pela coordenação das ações da Cadeira de Rodas Móveis, sendo assim, comparam-se os sinais de entrada em seguida, a Unidade de Controle, atua sob as unidades de tração e de direcionamento. A Unidade de Direcionamento é comandada pelo microprocessador e formada por CI ULN2003 e Motor de Passo e a Unidade de tração é comandada pelo microprocessador e formada por estágio de potência e Motor CC (FONSECA SOBRINHO et al., 2000).

Dentre várias modificações sugeridas por Fonseca Sobrinho et al. (2000), cita-se:

Outras modificações ainda estão em estudo, como da substituição da unidade de controle por um circuito mais simples, que não faça uso do LVDT e melhorias no estágio de potência usando um conversor CC/CC ao ser implementador o protótipo real. A inclusão de sensores de proximidade para a segurança do usuário e a variação de velocidade de locomoção da cadeira de rodas são os próximos alvos de estudo do grupo.

Ao considerar a modificação da unidade de controle, sugere-se por este trabalho um controlador estático com realimentação da saída utilizando sistemas ERP via LMIs.

## 5.2 PRIMEIRO MODELO DINÂMICO DA CRM

Pode-se ver no trabalho de De La Cruz e Carelli (2006) um modelo completo da dinâmica de uma Plataforma Robótica Móvel similar a estrutura móvel da Cadeira de Rodas

Móvel. Este modelo foi desenvolvido de forma que as velocidades de referência de translação e rotação sendo considerados como os sinais de entrada. Estes sinais são entradas usuais em PRM comerciais, além disso, parametrização linear deste modelo da PRM também é apresentada no trabalho em questão.

Desta forma, a Plataforma Robótica Móvel (DE LA CRUZ; CARELLI, 2006) apresenta as seguintes vantagens: alta mobilidade, alta tração com pneus e simples configuração das rodas (ZHANG et al., 1998).

Devido a essas vantagens, esta estrutura da Plataforma Robótica Móvel tem sido utilizada em aplicações tais como automatização de manutenção de estradas e construções (DE LA CRUZ; CARELLI, 2006).

O modelo dinâmico considerado a seguir refere-se a uma Cadeira de Rodas Motorizada Freedom®, a qual será aplicada a abordagem de Controle Robusto por LMIs, cuja finalidade é obter um conjunto de indicadores de desempenho satisfatórios ao projeto do controlador (ESTEVEZ & SALVADOR LTDA, 2012; ROSSINI et al., 2012).

Ao considerar a variedade existente de Plataforma Robótica Móvel e suas importantes aplicações a toda civilização, desempenhando diferentes tarefas, boa mobilidade e a experiência do grupo de pesquisa de Controle Avançado, Robótica e Engenharia Biomédica da Universidade Estadual de Londrina (UEL), a investigação teve começo na análise do triciclo, como configuração inicial. Alguns estudos e aplicações da Plataforma Robótica Móvel são válidos ressaltar. O controle não-linear para este tipo de PRM tem sido estudado por vários anos por De Wit e Sordalen (1992) e Kanayama et al. (1990), De Wit e Sordalen (1992) a estrutura da PRM tem sido utilizada em várias aplicações, tais como vigilância e limpeza de piso (BIRK; KENN, 2002; PATEL; SANYAL; SOBH, 2006; PRASSLER et al., 2000). Outras aplicações como transporte de cargas industriais utilizando veículos teleguiados (AGVs), manutenção automática de estradas e construção e Cadeiras de Rodas Autônomas (FENG; VELINSKY, 1997; FRIZERA NETO et al., 2006; RAO et al., 2002; STOUTEN; GRAAF, 2004). Além desses, outros autores têm abordado o problema de rastreamento de trajetória, uma funcionalidade importante que permite que um PRM descreva uma trajetória desejada ao realizar uma tarefa (ANTONINI; IPPOLITI; LONGHI, 2006; CORRADINI; ORLANDO, 2002; ROSSINI et al., 2012).

Diante do exposto, considera-se uma questão importante no controle não-linear de AGVs é que a maioria dos controladores projetados até agora são baseadas apenas na cinemática do robô móvel (CARELLI; SECCHI; MUT, 1999; DE WIT; SORDALEN, 1992; FREIRE; CARELLI, 2003; KANAYAMA et al., 1990; KÜNHE; GOMES; FETTER, 2005;

WU et al., 1999). No entanto, quando os movimentos de alta velocidade ou de transporte de carga pesada são necessários, torna-se essencial considerar a dinâmica da PRM, para além da sua cinemática. Assim, alguns controladores que compensam a dinâmica da PRM têm sido propostos, como exemplo, Fierro e Lewis (1995) propôs uma cinemática combinada à lei de controle de torque para robôs móveis não-holonômicos, levando em conta a dinâmica dos veículos modelados. Os comandos de controle usados por eles eram binários, porém esses são difíceis de lidar quando se tratar de robôs comerciais. Além disso, apenas os resultados da simulação foram relatados no artigo. Fierro e Lewis (1997) também propôs um controlador adaptativo robusto baseado em redes neurais para lidar com distúrbios e dinâmica não-modelada, embora não apresentem resultados experimentais, por sua vez, Das e Kar (2006) mostrou uma adaptação do controlador baseado em lógica fuzzy em que a incerteza é estimada por um sistema de lógica fuzzy e seus parâmetros foram sintonizados on-line. Sendo assim, o modelo dinâmico inclui a dinâmica de atuador e os comandos gerados pelo controlador foram tensão para os motores da PRM (MARTINS et al., 2008).

Encontram-se ainda, um controlador de rastreamento de trajetória adaptável com base num modelo dinâmico que gera torques proposto por Fukao, Nakagawa e Adachi (2000). No entanto, apenas os resultados da simulação foram mostrados. Outros controladores de rastreamento de trajetória baseados em dinâmica da PRM foram desenvolvidos por Dong e Huo (1999), Liu et al. (2004) e Dong e Guo (2005), mas apenas os resultados da simulação foram apresentados. Por sua vez, Kim, Shin, e Lee (2000) propuseram uma de duas partes do controlador robusto adaptativo para um robô móvel, cuja primeira parte é baseada na cinemática do robô e é responsável por gerar as referências para a segunda parte, o que compensa a dinâmica do modelados. Mais uma vez, não houve resultados experimentais relatados. Assim, os sinais de controle gerados pela maioria dos controladores dinâmicos relatados na literatura são binários (CORRADINI; ORLANDO, 2002; DONG; GUO, 2005; DONG; HUO, 1999; FIERRO; LEWIS, 1995, 1997; FUKAO; NAKAGAWA; ADACHI, 2000; KIM; SHIN; LEE, 2000; LIU et al., 2004) ou de tensões (DAS; KAR, 2006) para os motores das PRMs, enquanto as PRMs comerciais normalmente recebem comandos de velocidade. Antonini et al. (2006) propuseram um controlador de comutação com aprendizado on-line e arquitetura hierárquica, investigando rede neural com base em metodologias para compensar os efeitos dos fenômenos não-modelados. As redes neurais foram utilizadas para identificação e controle, e os sinais de controle foram velocidades linear e angular, mas a implementação em tempo real de sua solução necessita de uma arquitetura de computador de alto desempenho baseado em um sistema multiprocessador (MARTINS et al., 2008).



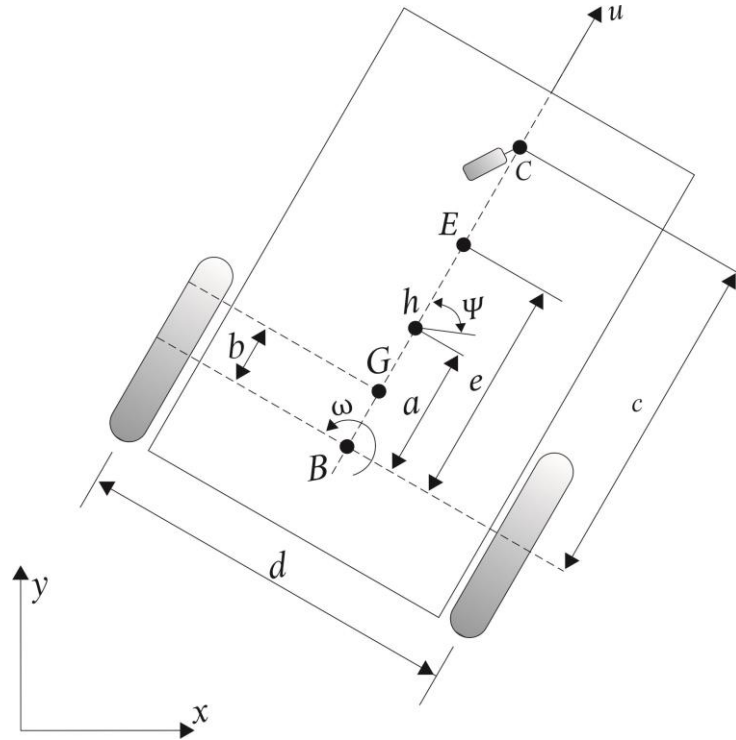
Por outro lado, De La Cruz e Carelli (2006) construiu um modelo dinâmico, usando velocidades linear e angular como entradas, e mostrou o projeto de um controlador de rastreamento de trajetória com base em seu modelo. Uma vantagem de seu controlador é que seus parâmetros estão diretamente relacionados com os parâmetros da PRM. No entanto, se os parâmetros não forem corretamente identificados ou se alteram com o tempo, por exemplo, devido à variação da carga, o desempenho do seu controlador será gravemente afetado. Para reduzir a degradação do desempenho, os parâmetros tornam-se importantes nas aplicações em que os parâmetros da PRM podem variar, tais como o transporte de carga. Também é útil quando o conhecimento dos parâmetros dinâmicos é limitado ou não completamente conhecidos (MARTINS et al., 2008).

A estabilidade assintótica tanto da cinemática e dinâmica dos controladores é comprovada por Martins et al. (2008). Os resultados experimentais sobre os controladores são apresentados e, também, mostram que os controladores propostos são capazes de atualizar seus parâmetros, a fim de reduzir o erro de rastreamento. Um experimento tratando o caso de transporte de carga é também apresentado, e os resultados mostram que o controlador proposto é capaz de guiar o robô para seguir uma trajetória desejada com um erro muito pequeno, mesmo com mudança de parâmetros dinâmicos. As principais contribuições do artigo de Martins et al. (2008) são: o uso de um modelo dinâmico, cuja entrada de comandos são velocidades, o que é usual em robôs móveis comerciais, enquanto a maioria das obras a literatura trabalha com comandos de torque, a concepção de um controlador adaptativo com um termo de incerteza, o que faz com que seja robusto, com o estudo de estabilidade correspondente ao sistema de controle adaptativo e a apresentação de resultados experimentais que mostram o bom desempenho do controlador de uma aplicação industrial típica, a saber transporte de carga (MARTINS et al., 2008).

Em Martins et al. (2008) é tratado o modelo dinâmico da PRM proposto por De La Cruz e Carelli (2006). A Figura 5.2 retrata a PRM, os parâmetros e as variáveis de interesse. Sendo as velocidades longitudinal ( $u$ ) e angular ( $\omega$ ), conforme vista superior ilustrada na Figura 5.2, tal modelo tem como parâmetros,  $G$  o centro de massa da PRM,  $C$  é a posição da roda castor,  $E$  é a localização da ferramenta de bordo,  $h$  é o ponto de interesse com coordenadas  $x$  e  $y$  no plano  $XY$ ,  $\psi$  é a orientação,  $a$  é a distância entre o ponto de interesse ( $h$ ) e o ponto central dos eixos virtuais da CRM, conforme ilustra a Figura 5.2.

Na Figura 5.2 é ilustrada a vista superior da CRM, com os respectivos parâmetros e orientações. (MARTINS et al., 2008).

Figura 5.2: Vista superior da CRM.



Fonte: Martins et al. (2008).

O modelo matemático completo é escrito por De La Cruz e Carelli (2006) como (MARTINS et al., 2008).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \psi - a \omega \sin \psi \\ u \sin \psi + a \omega \cos \psi \\ \omega \\ (\theta_3 \omega^2 - \theta_4 u) \theta_1^{-1} \\ -(u \omega \theta_5 + \omega \theta_6) \theta_2^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \theta_1^{-1} & 0 \\ 0 & \theta_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

sendo  $u_{ref}$  e  $\omega_{ref}$  os valores desejados de velocidades linear e angular, respectivamente, e representam os sinais de entrada do sistema.

O vetor de parâmetros identificados  $\theta$  em (5.2) e um vetor de parâmetros incertos  $\delta$  em (5.3) são associados como mostra o modelo (5.1).

$$\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6]^T \quad (5.2)$$

e

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_x \quad \delta_y \quad 0 \quad \delta_u \quad \delta_\omega]^T \quad (5.3)$$

sendo  $\delta_x$  e  $\delta_y$  são funções de velocidade de deslizamento e orientação,  $\delta_u$  e  $\delta_\omega$  são funções de parâmetros físicos como massa, inércia, roda e diâmetros dos pneus, parâmetros dos motores e servos, força sob as rodas, etc., e são considerados como distúrbios (MARTINS et al., 2008).

Os parâmetros inclusos no vetor  $\boldsymbol{\theta}$  são funções de alguns parâmetros físicos da PRM, assim como a massa  $m$ , momento de inércia  $I_z$  em  $G$ , resistência elétrica  $R_a$  dos motores, constante eletromotor  $k_b$ , constante de torque  $k_a$ , coeficiente de atrito  $B_e$ , momento de inércia  $I_e$  de cada grupo de redução engrenagem-roda, o radio  $r$  da roda, o raio nominal  $R_t$  dos pneus e as distâncias  $b$  e  $d$ . Considere que os motores têm um controlador PD para controlar as velocidades de cada motor, com ganhos proporcionais  $k_{PT} > 0$  e  $k_{PR} > 0$  os ganhos derivativos  $k_{DT} \geq 0$  e  $k_{DR} \geq 0$ , também é suposto que os motores associados a rodas propulsoras são motores DC com características idênticas, com indutância negligenciada, uma vez que a indutância é muito menor que a resistência do mesmo. As equações que descrevem os parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  apresentados em De La Cruz e Carelli (2006) são reproduzidos em Martins et al. (2008) e ilustrados neste trabalho. São eles:

$$\theta_1 = \frac{\left[ \frac{R_a(mR_t r + 2I_e) + 2rk_{DT}}{k_a} \right]}{(2rk_{PT})}, \quad (5.4)$$

$$\theta_2 = \frac{\left[ \frac{R_a(I_e d^2 + 2R_t r(I_z + mb^2)) + 2rdk_{DR}}{k_a} \right]}{(2rdk_{PR})}, \quad (5.5)$$

$$\theta_3 = \frac{R_a}{k_a} \frac{mbR_t}{2k_{PT}}, \quad (5.6)$$

$$\theta_4 = \frac{\frac{R_a(k_a k_b + B_e)}{k_a} \left( \frac{R_a}{R_a} \right)}{(rk_{PT})} + 1, \quad (5.7)$$

$$\theta_5 = \frac{R_a}{k_a} \frac{mbR_t}{dk_{PR}}, \quad (5.8)$$

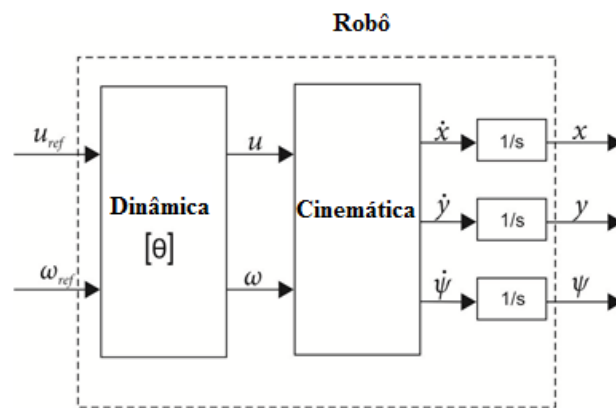
$$\theta_6 = \frac{R_a}{k_a} \left( \frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right) \frac{d}{2rk_{PR}} + 1. \quad (5.9)$$

Deve-se salientar que  $\theta_i > 0$ ,  $i = 1,2,4,6$ . Parâmetros  $\theta_3$  e  $\theta_5$  serão nulos se, e somente se, o centro de massa  $G$  está exatamente no ponto central do eixo virtual das rodas de tração da PRM (ponto  $B$ ), isto é,  $b = 0$ . No artigo de Martins et al. (2008) assumiu-se que  $b \neq 0$  (MARTINS et al., 2008).

O trabalho do Martins et al., (2008), contribui com o modelo matemático dividido na parte cinemática e dinâmica e com o diagrama de blocos para a estrutura de controle, a qual é interessante, pois fica explícita a estrutura do controlador e as estruturas dinâmica e cinemática da CRM, Figura 5.3 (MARTINS et al., 2008).

A Figura 5.3 mostra o Diagrama de blocos da PRM, o qual apresenta as entradas, o bloco da dinâmica, o bloco da cinemática e as saídas do sistema, conforme segue.

Figura 5.3- Diagrama de Blocos, referente à dinâmica e cinemática do Robô



Fonte: Martins et al. (2008).

Porém, o modelo dinâmico da PRM apresentado por Martins et al. (2008) deixa a desejar quanto ao número de rodas castores (Figura 5.2). Outro inconveniente é o CG da PRM: no modelo usado por Martins et al. (2008) e Atesoglu (2006) o CG é um ponto sobre o eixo longitudinal, o qual não é necessariamente verdadeiro (ATESOGLU, 2006; MARTINS et al., 2008).

### 5.3 MODELO COMPLETO DA CRM

Sendo assim, o modelo construído por De La Cruz, Bastos e Carelli (2011) é mais apropriado, sendo que a principal contribuição do trabalho foi a incerteza da posição do CG, uma vez que a CRM considerada pelo autor possui características reais mais próximas do modelo dinâmico de De La Cruz, Bastos e Carelli (2011).

Uma Cadeira de Rodas Móvel é uma aplicação da PRM, desta forma, o modelo dinâmico da PRM torna-se importante para o Grupo de Estudo Controle Avançado, Robótica e Engenharia Biomédica da UEL, uma vez que um dos objetivos do departamento de engenharia elétrica da UEL é melhorar a expectativa de vida de tetraplégicos, o departamento está desenvolvendo uma Cadeira de Rodas Móvel para tetraplégicos (ROSSINI et al., 2012).

A CRM é usada por pessoas deficientes que não são capazes de guiar uma Cadeira de Rodas manual, usando uma interface homem-máquina (IHM) baseada em sinais cerebrais, voz ou no movimento dos olhos as pessoas portadoras de deficiência pode selecionar um alvo desejado. Então, uma trajetória será automaticamente gerada e um controle de rastreamento da trajetória guiará a CMR ao alvo desejado (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

É importante considerar além da dinâmica do veículo a cinemática porque a CRM transportará cargas relativamente altas. Em Atesoglu (2006) um controle baseado no modelo dinâmico de um CRM é projetado. Portanto, este trabalho não considera o fato que o centro de massa pode ser desviado lateralmente devido o movimento do ocupante. Em Johnson e Aylor (1985) um modelo dinâmico de uma Cadeira Elétrica é desenvolvido considerando o desvio lateral do centro de massa. Entretanto, a lei de controle não é projetada neste artigo (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

Existem muitas leis de controle propostas na literatura para robôs móveis que podem ser usados para controlar um CRM. Uma abordagem usada para projetar a lei de controle é baseada em linearização utilizando realimentação (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011). Esta abordagem de controle tem boa performance, contudo, depende dos parâmetros do modelo. Quando os parâmetros do modelo são incertos, um controle adaptativo para o ajuste desses parâmetros é necessário. Alguns autores usam técnicas *backstepping* para projetar a lei de controle adaptativa assim como Do, Jiang e Pan (2004) (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

Por outro lado, outros autores têm usado a abordagem da linearização da realimentação e teorias de Lyapunov, assim como em Barzamini, Yazdizadeh e Rahmani

(2006). Contudo, a maioria dos autores avaliam seus controladores propostos apenas por simulação. Em Martins et al. (2008) os autores têm separado a parte dinâmica da cinemática. Assim, um controlador cinemático, que controla a trajetória da PRM em um nível alto, e um controlador dinâmico, que controla a velocidade da PRM em um nível baixo, foram obtidos. O trabalho de De La Cruz, Bastos e Carelli (2011) avalia o controlador por experimentos.

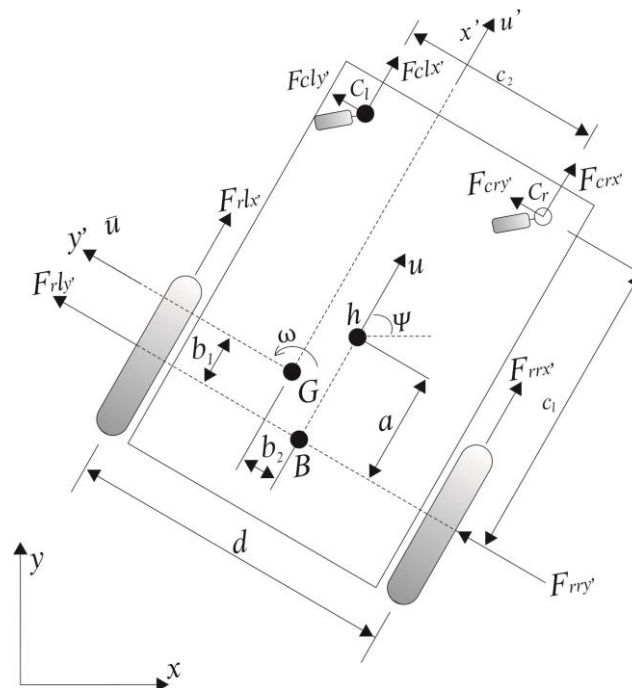
No controle adaptativo, poderão surgir problemas de parâmetros causados por erros de medição ou distúrbios. Tais parâmetros provocam uma divergência, geralmente lenta, dos parâmetros do modelo. Uma forma bem conhecida para evitar esse possível erro no parâmetro é alterar a lei de atualização de parâmetro através da introdução de uma modificação sigma (KAUFMAN; BAR-KANA; SOBEL, 1998; NASISI; CARELLI, 2003). Em Chen e Shieh (1997), no entanto, uma abordagem de controle de comutação tem sido utilizado para eliminar o desvio do parâmetro (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

No trabalho de De La Cruz, Bastos e Carelli (2011), um modelo dinâmico de uma CDM é desenvolvido considerando os desvios laterais do centro de massa originada em movimento do utilizador. Propriedades úteis do modelo são provadas no artigo. O modelo dinâmico obtido tem uma estrutura adequada e propriedades para a concepção do controlador, a entrada de controle pode ser determinada em termos de velocidades de referência, lineares e angulares, como normalmente encontrados em robôs móveis comerciais. Esta última característica é uma vantagem quando se avalia o controle experimentalmente. Em geral, na literatura, os controladores de modo adaptativo, robusto ou deslizante de rodas foram provados por simulações (BARZAMINI; YAZDIZADEH; RAHMANI, 2006; DO; JIANG; PAN, 2004; FIERRO; LEWIS, 1997; PARK et al., 2009; ZHANG et al., 1998; ZHU et al., 2006). A principal dificuldade é que eles usam torques de roda como sinais de controle, não podem ser diretamente manipulados na maioria dos veículos reais. Atualmente, mais estudos sobre aplicações de tarefas reais de controle de modo adaptativo, robusto ou deslizamento são necessários. Outra contribuição de De La Cruz, Bastos e Carelli (2011), foi o projeto de um rastreamento adaptável e controle da posição da CRM. A lei de controle é baseada no modelo dinâmico linearizado obtido através de técnicas de linearização através de realimentação. A análise de estabilidade foi realizada utilizando a teoria de Lyapunov. O controle adaptativo resultante é diferente do Barzamini, Yazdizadeh e Rahmani (2006), porque não são utilizadas as acelerações da PRM e que é diferente de Martins et al. (2008) uma vez que não utiliza uma estrutura de controle em cascata. Um algoritmo de projeção foi incluído para evitar desvios de parâmetros e o seu efeito sobre o controle adaptativo foi analisado. Este algoritmo proporciona uma solução simples e eficaz para o problema de erro dos parâmetros. Vários

experimentos foram realizados para demonstrar o bom desempenho da lei de controle adaptativo (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

O modelo de De La Cruz, Bastos e Carelli (2011) apresentaram um modelo dinâmico de um CRM considerando um plano de trabalho horizontal para os deslocamentos da CRM. A seguir é ilustrada, na Figura 5.4, a CRM considerada por De La Cruz, Bastos e Carelli (2011).

Figura 5.4 - Vista superior da Cadeira Robótica Móvel (CRM) e seus respectivos parâmetros e orientações



Fonte: De La Cruz, Bastos e Carelli (2011).

Através da Figura 5.4 é possível identificar as duas rodas castoras  $C_1$  e  $C_r$ , assim como os parâmetros  $b_1$  e  $b_2$ , que se referem à posição do CG em relação ao eixo de centro das rodas traseiras e ao eixo longitudinal da CRM, cujo vértice é o ponto  $B$ . O ponto de rastreamento  $h = [x \ y]^T$ , o centro de massa  $G$ ,  $u'$  e  $\bar{u}$  são as velocidades longitudinal e lateral do  $G$ ,  $\omega$  e  $\psi$  são a velocidade angular e a direção da CRM. Os parâmetros  $d$ ,  $a$ ,  $c_1$  e  $c_2$  são distâncias (Figura 5.4),  $F_{rrx'}$  e  $F_{rry'}$  são as forças longitudinal e lateral dos pneus da roda direita,  $F_{rlx'}$  e  $F_{rly'}$  são as forças longitudinal e lateral dos pneus da roda esquerda e  $F_{clx'}$ ,  $F_{cly'}$ ,  $F_{crx'}$  e  $F_{cry'}$  são as forças exercidas pelas rodas castoras. Demais parâmetros são enunciados no artigo de De La Cruz, Bastos e Carelli (2011).

A equação da força e a equação do momento para a CRM são

$$\sum F_{x'} = m(\dot{u}' - \bar{u}\omega) = F_{rlx'} + F_{rrx'} + F_{px'}, \quad (5.10)$$

$$F_{px'} = F_{clx'} + F_{crx'},$$

$$\sum F_{y'} = m(\dot{u}' - u'\omega) = F_{rly'} + F_{rry'} + F_{py'}, \quad (5.11)$$

$$F_{py'} = F_{cly'} + F_{cry'},$$

$$\sum M_z = I_z \dot{\omega},$$

$$\sum M_z = \frac{d}{2}(F_{rrx'} - F_{rlx'}) + b_2(F_{rrx'} + F_{rlx'}) - b_1(F_{rly'} + F_{rry'}) + \tau_p, \quad (5.12)$$

$$\tau_p = \left(\frac{c_2}{2} + b_2\right)F_{crx'} - \left(\frac{c_2}{2} - b_2\right)F_{clx'} + (c_1 - b_1)(F_{cry'} + F_{cly'}),$$

sendo  $m$  é a massa da CRM e  $I_z$  é o momento de inércia sob o eixo vertical localizado em  $G$ .

A cinemática no ponto  $h$  é

$$\dot{x} = u \cos \psi - \bar{u} \sin \psi - (a - b_1)\omega \sin \psi, \quad (5.13)$$

$$\dot{y} = u \sin \psi - \bar{u} \cos \psi + (a - b_1)\omega \cos \psi, \quad (5.14)$$

sendo

$$u = u' + b_2\omega. \quad (5.15)$$

De acordo com Zhang et al. (1998), velocidades  $u$ ,  $\omega$  e  $\bar{u}$ , incluem as velocidades de deslizamentos, dadas por

$$u = \frac{1}{2}[r(\omega_r + \omega_l) + (u_r^s + u_l^s)], \quad (5.16)$$

$$\omega = \frac{1}{d}[r(\omega_r - \omega_l) + (u_r^s - u_l^s)], \quad (5.17)$$

$$\bar{u} = b_1\omega + \bar{u}^s, \quad (5.18)$$

sendo  $r$  e  $l$  os raios das rodas direita e esquerda,  $\omega_r$  e  $\omega_l$  são as velocidades das rodas direita e esquerda,  $u_r^s$  e  $u_l^s$  são as velocidades longitudinais de deslizamento das rodas direita e



esquerda e  $\bar{u}^s$  é a velocidade de deslizamento das rodas (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

Por outro lado, os modelos dos motores da CRM, negligenciando as indutâncias, são

$$\tau_r = \frac{k_a}{R_a}(v_r - k_b\omega_r), \quad (5.19)$$

$$\tau_l = \frac{k_a}{R_a}(v_l - k_b\omega_l), \quad (5.20)$$

sendo  $v_r$  e  $v_l$  são as tensões de entrada aplicadas aos motores direito e esquerdo,  $k_b$  é equivalente a constante de tensão multiplicada pelo raio da engrenagem,  $R_a$  é a resistência elétrica constante,  $\tau_r$  e  $\tau_l$  são os torques dos motores direito e esquerdo multiplicado pelo raio da engrenagem e  $k_a$  é a constante de torque multiplicado pelo raio da engrenagem. As equações dinâmicas que relacionam o motor e roda, direita e esquerda, são

$$I_e\dot{\omega}_r + B_e\omega_r = \tau_r - F_{rrx}r, \quad (5.21)$$

$$I_e\dot{\omega}_l + B_e\omega_l = \tau_l - F_{rlx}r, \quad (5.22)$$

sendo  $I_e$  e  $B_e$  são o momento de inércia e o coeficiente de atrito viscoso da combinação motor rotor, caixa de engrenagem e roda.

Conforme De La Cruz, Bastos e Carelli (2011), em geral, a maioria dos veículos autônomos disponíveis no mercado tem controladores proporcional-integral-derivativo (PID) de velocidade de baixo nível para rastrear as velocidades de referência de entrada. Portanto, para manter a sua compatibilidade com outros veículos autônomos, é útil expressar o modelo da CRM de um modo adequado, considerando as velocidades linear e angular de referência como sinais de controle. Assim, os controladores de velocidade são incluídos no modelo. Segundo De La Cruz, Bastos e Carelli (2011), para simplificar o modelo, os controladores de velocidade proporcional-derivativa (PD) foram considerados e são descritos pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{PT}(u_{ref} - u_{me}) - k_{DT}\dot{u}_{me} \\ k_{PR}(\omega_{ref} - \omega_{me}) - k_{DR}\dot{\omega}_{me} \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

sendo

$$u_{me} = \frac{r}{2}(\omega_r + \omega_l), \quad (5.24)$$

$$\omega_{me} = \frac{r}{d}(\omega_r - \omega_l), \quad (5.25)$$

$$v_u = \frac{v_r + v_l}{2}, \quad (5.26)$$

$$v_\omega = \frac{v_r - v_l}{2}, \quad (5.27)$$

sendo  $u_{ref}$  e  $\omega_{ref}$  são as velocidades de referência linear e angular, respectivamente, para os controladores de velocidade PD de baixo nível. As variáveis  $u_{me}$  e  $\omega_{me}$  representam as velocidades mensuradas, calculadas a partir das informações dos codificadores, bem como, assumindo que não há erros de codificação (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

A partir de (5.10)-(5.14), (5.16)-(5.23) o seguinte modelo dinâmico de cadeira da CRM é obtido por De La Cruz, Bastos e Carelli (2011):

$$\dot{h} = Nv + \Omega_h, \quad (5.28)$$

$$\dot{\psi} = \omega, \quad (5.29)$$

$$M\dot{v} + C = v_{ref} + \Omega_v, \quad (5.30)$$

sendo

$$N = \begin{bmatrix} \cos\psi & -a\sin\psi \\ \sin\psi & a\cos\psi \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

$$\Omega_h = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

$$M = \begin{bmatrix} \theta_1 & -\theta_7 \\ -\theta_8 & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

$$C = \begin{bmatrix} \theta_4 u - \theta_3 \omega^2 \\ \theta_6 \omega + \theta_5 u \omega \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

$$v = \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (5.35)$$

$$v_{ref} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

$$\Omega_v = \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

O modelo dinâmico pode ser dividido numa parte cinemática (5.28)-(5.29) e numa parte dinâmica (5.30). As constantes  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , são apresentadas na sequência. As variáveis de perturbação  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_u$  e  $\delta_\omega$  são mostradas no artigo de De La Cruz, Bastos e Carelli (2011) no Apêndice B. Os distúrbios  $\delta_x$  e  $\delta_y$  surgem por causa da possível velocidade de deslizamento lateral das rodas e os distúrbios  $\delta_u$  e  $\delta_\omega$  surgem por causa da velocidade de deslizamento das rodas, das acelerações das rodas e/ou de forças externas (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

$$\theta_1 = \frac{k_{DT}}{k_{PT}} + \frac{R_a r}{2k_{PT}k_a} \left( \frac{2I_e}{r^2} + m \right) \quad (5.38)$$

$$\theta_2 = \frac{R_a r}{dk_{PR}k_a} \left( \frac{I_e d^2}{2r^2} + I_z + mb_1^2 + mb_2^2 \right) + \frac{k_{DR}}{k_{PR}} \quad (5.39)$$

$$\theta_3 = \frac{R_a r m b_1}{2k_{PT}k_a} \quad (5.40)$$

$$\theta_4 = 1 + \frac{k_b}{k_{PT}r} + \frac{B_e R_a}{k_{PT}k_a r} \quad (5.41)$$

$$\theta_5 = \frac{R_a r m b_1}{d k_{PR} k_a} \quad (5.42)$$

$$\theta_6 = 1 + \frac{d k_b}{2 k_{PR} r} + \frac{d B_e R_a}{2 k_{PR} k_a r} \quad (5.43)$$

$$\theta_7 = \frac{R_a r m b_2}{2 k_{PT} k_a} \quad (5.44)$$

$$\theta_8 = \frac{R_a r m b_2}{d k_{PR} k_a} \quad (5.45)$$

Assim, seguem os modelos das incertezas,  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_u$  e  $\delta_\omega$  (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

$$\delta_x = -\bar{u}^s \sin \psi \quad (5.46)$$

$$\delta_y = \bar{u}^s \cos \psi \quad (5.47)$$

$$\delta_u = \frac{1}{2} \theta_4 (u_r^s + u_l^s) + \frac{1}{2} \left( \theta_1 - \frac{R_a r m}{2 k_{PT} k_a} \right) (\dot{u}_r^s + \dot{u}_l^s) + \frac{R_a r}{2 k_{PT} k_a} (m \bar{u}^s \omega + F_{px'}) \quad (5.48)$$

$$\delta_\omega = \frac{\theta_6}{d} (u_r^s - u_l^s) + \frac{c_3}{2} (u_r^s + u_l^s) + \frac{c_2}{2} (\dot{u}_r^s + \dot{u}_l^s) + \delta_0 - \frac{2 k_{PT} b_2}{d k_{DT}} \delta_u \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \delta_0 = & \left( \frac{c_1}{d} - \frac{R_a r}{d^2 k_{PR} k_a} (b_1^2 m + I_z) \right) (\dot{u}_r^s - \dot{u}_l^s) \dots \\ & + \frac{R_a r}{d k_{PR} k_a} (\tau_p + b_1 F_{py'} - b_1 m \dot{u}^s) \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$c_1 = \frac{k_{DR}}{k_{PR}} + \frac{R_a r}{dk_{PR} k_a} \left( \frac{I_e d^2}{2r^2} + b_1^2 m + I_z \right) \quad (5.51)$$

$$c_2 = \frac{2b_2}{dk_{PR}} \left( k_{DT} + \frac{R_a I_e}{k_a r} \right) \quad (5.52)$$

$$c_3 = \frac{2b_2}{dk_{PR}} \left( k_{PT} + \frac{k_b}{r} + \frac{R_a B_e}{k_a r} \right) \quad (5.53)$$

#### 5.4 DESACOPLAMENTO DOS MODELOS DINÂMICO E CINEMÁTICO DA CRM

Considerando o exposto, tomou-se a equação da dinâmica (5.30) e substituíram-se as equações (5.33)-(5.37), assim temos

$M\dot{v} + C = v_{ref} + \Omega_v$ , isto é,

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & -\theta_7 \\ -\theta_8 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_4 u - \theta_3 \omega^2 \\ \theta_6 \omega + \theta_5 u \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}. \quad (5.54)$$

Considerou-se  $\delta_u$  e  $\delta_\omega$  nulos, negligenciando as velocidades de deslizamentos e arranjando no formato matricial nas equações (5.16) e (5.17), (com  $u_r^s$  e  $u_l^s$  nulos)

$$\begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{d} & \frac{-r}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_l \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

e sua derivada

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{d} & -\frac{r}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_l \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

Isolou-se o vetor  $[\dot{\omega}_r \quad \dot{\omega}_l]^T$  da equação (5.55)

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{d} & -\frac{r}{d} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}, \quad (5.57)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Isolando o vetor  $[\dot{u} \quad \dot{\omega}]^T$  na equação (5.54), temos

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \theta_1 & -\theta_7 \\ -\theta_8 & \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \theta_4 u - \theta_3 \omega^2 \\ \theta_6 \omega + \theta_5 u \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} \right\}, \quad (5.59)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta_7 \theta_8 - \theta_1 \theta_2} \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_7 \\ \theta_8 & \theta_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \theta_4 u - \theta_3 \omega^2 \\ \theta_6 \omega + \theta_5 u \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} \right\}, \quad (5.60)$$

Sendo assim, substitui-se a equação (5.60) em (5.58)

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_l \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta_7 \theta_8 - \theta_1 \theta_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_7 \\ \theta_8 & \theta_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \theta_4 u - \theta_3 \omega^2 \\ \theta_6 \omega + \theta_5 u \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} \right\}. \quad (5.61)$$

Efetuando-se a substituição da equação (5.55) em (5.61)

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\omega}_l \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta_7 \theta_8 - \theta_1 \theta_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 & \theta_7 \\ \theta_8 & \theta_1 \end{bmatrix} \dots$$

$$\dots \left\{ \left[ \begin{array}{c} \theta_4(\omega_r + \omega_l) \frac{r}{2} - \theta_3 \left( \frac{r^2}{d^2} \right) (\omega_r - \omega_l)^2 \\ \theta_6(\omega_r - \omega_l) \frac{r}{d} + \theta_5(\omega_r + \omega_l)(\omega_r - \omega_l) \frac{r^2}{2d} \end{array} \right] + \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} \right\}.$$

(5.62)

Assim, obteve-se o modelo dinâmico (5.62) da CRM, sendo o vetor de entrada  $[u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$  e o vetor de estados  $[u \ \omega]^T$ . Considerou-se para tal projeto a possibilidade de acesso a todos os estados, sendo assim, a matriz de saída de tal modelo é a matriz  $I_{2 \times 2}$ .

Já ao considerar o modelo cinemático (5.13) e (5.14) e negligenciando-se a velocidade de escorregamento ( $\bar{u}$ ), tem-se

$$\dot{x} = u \cos \psi - (a - b_1) \omega \sin \psi, \quad (5.63)$$

$$\dot{y} = u \sin \psi + (a - b_1) \omega \cos \psi, \quad (5.64)$$

$$\dot{\psi} = \omega. \quad (5.65)$$

Para dar andamento no projeto do controlador robusto, aplicando-se ferramentas lineares propostas por Covacic (2006), é necessário que os modelos dinâmico (5.62) e cinemático (5.63)-(5.65) sejam lineares. Portanto, no próximo capítulo será relatada a linearização de tais modelos.

## 5.5 CONCLUSÃO PARCIAL: CAPÍTULO 5

Considerando o exposto anteriormente, observou-se o esforço do Ministério da Saúde para a inclusão de pessoas com deficiência. Constatou-se a quantidade de pessoas que serão beneficiadas com tal política de inclusão, em particular os tetraplégicos (50.000 pessoas) (BRASIL, 2010).

Uma das formas de auxiliar a inclusão dos tetraplégicos na sociedade e melhorar a expectativa de vida dos mesmos é o desenvolvimento de instrumentos para a mobilidade e independência. Neste sentido, este trabalho buscou-se identificar o modelo matemático que

melhor descreve a CRM do departamento de engenharia elétrica da UEL, a fim de projetar um controlador robusto para a mesma, sendo esta acionada por sopro e sucção (ANTÃO, 2010; DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011; DE LA CRUZ; CARELLI, 2006; FONSECA SOBRINHO et al., 2000, 2003; MARTINS et al., 2008; ROSSINI et al., 2012).

Um trabalho inicial para projetar um controlador robusto publicado pelo autor (ROSSINI et al., 2012), considerou o modelo dinâmico constituído por De La Cruz, Bastos e Carelli (2011). Tal como Lawton, Beard e Young (2003) o modelo dinâmico foi linearizado em torno da origem, constituída a realimentação dos estados e usados parâmetros estimados para a CRM do laboratório onde está sendo desenvolvida a pesquisa. Além do mais, consideraram-se os parâmetros de incertezas as medidas de posições longitudinal  $x$  e lateral  $y$  da CRM ( $\delta_x$  e  $\delta_y$ ), uma vez que há atraso no transporte de tais informações, conforme sugerido no artigo. (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011; LAWTON; BEARD; YOUNG, 2003; ROSSINI et al., 2012).

No próximo capítulo será apresentada a nova malha de controle, a aplicação da linearização aos modelos dinâmico e cinemático, assim como, uma tabela com os parâmetros considerados para o projeto do controlador robusto.



## CAPÍTULO 6

### LINEARIZAÇÃO EM TORNO NA ORIGEM

Para o projeto e a análise do controlador robusto, necessita-se representar o sistema no espaço de estados, uma vez que a teoria abordada por este trabalho, encontra-se nesta configuração. Essa representação envolve três tipos de variáveis na modelagem de sistemas dinâmicos: são as variáveis de entrada, as variáveis de saída e as variáveis de estado. Em (6.1) e (6.2) são apresentadas as equações de estado e de saída do sistema, respectivamente, para um sistema linear e invariante no tempo (OGATA, 2010).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6.2)$$

sendo  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz de estados,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a matriz de entrada,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  a matriz de saída,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$  a matriz de transmissão direta,  $\mathbf{u}(t)$  a entrada de controle de ordem  $m \times 1$ ,  $\mathbf{x}(t)$  o vetor de estado de ordem  $n \times 1$  e  $\mathbf{y}(t)$  o vetor de saída do sistema de ordem  $p \times 1$ .

#### 6.1 LINEARIZAÇÃO DO MODELO DINÂMICO

Considerando o modelo dinâmico (5.62) tal modelo tem como parâmetros constantes  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ ,  $r$  e  $d$ , como variáveis de estado  $\omega_r$  e  $\omega_l$  e variáveis de entrada  $u_{ref}$  e  $\omega_{ref}$ .

Tomando-se (5.62) e aplicando-se o método de linearização de Lyapunov (2.13) para constituição da matriz característica do sistema  $A_d$  e a matriz de entrada  $B_d$ , sendo

$$A_d = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e} \quad (6.3)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

cujos elementos são obtidos via algoritmo implementado no MatLab®, conforme Apêndice D, sendo assim têm-se:

$$\begin{aligned}
 a_{11} = & -\frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{r\theta_4}{2} + \frac{2\theta_3(\omega_l-\omega_r)r^2}{d^2}\right)\left(\frac{\theta_2}{r} + \frac{d\theta_8}{2r}\right)\dots \\
 & \dots - \frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{\theta_7}{r} + \frac{d\theta_1}{2r}\right)\left(\frac{r\theta_6}{d} - \frac{\theta_5(\omega_l-\omega_r)r^2}{2d} + \frac{\theta_5(\omega_l+\omega_r)r^2}{2d}\right),
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
 a_{21} = & \frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{r\theta_4}{2} + \frac{2\theta_3(\omega_l-\omega_r)r^2}{d^2}\right)\left(\frac{\theta_8}{2} - \frac{\theta_2}{r}\right)\dots \\
 & \dots + \frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_7}{r}\right)\left(\frac{r\theta_6}{d} - \frac{\theta_5(\omega_l-\omega_r)r^2}{2d} + \frac{\theta_5(\omega_l+\omega_r)r^2}{2d}\right),
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
 a_{12} = & -\frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{r\theta_4}{2} - \frac{2\theta_3(\omega_l-\omega_r)r^2}{d^2}\right)\left(\frac{\theta_2}{r} + \frac{d\theta_8}{2r}\right)\dots \\
 & \dots + \frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{\theta_7}{r} + \frac{d\theta_1}{2r}\right)\left(\frac{r\theta_6}{d} - \frac{\theta_5(\omega_l-\omega_r)r^2}{2d} + \frac{\theta_5(\omega_l+\omega_r)r^2}{2d}\right),
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}
 a_{22} = & \frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{r\theta_4}{2} - \frac{2\theta_3(\omega_l-\omega_r)r^2}{d^2}\right)\left(\frac{\theta_8}{2} - \frac{\theta_2}{r}\right)\dots \\
 & \dots - \frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_7}{r}\right)\left(\frac{r\theta_6}{d} + \frac{\theta_5(\omega_l-\omega_r)r^2}{2d} + \frac{\theta_5(\omega_l+\omega_r)r^2}{2d}\right),
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$b_{11} = -\frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{\theta_2}{r} + \frac{d\theta_8}{2r}\right), \tag{6.9}$$

$$b_{21} = -\frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{\theta_2}{r} - \frac{\theta_8}{2}\right), \tag{6.10}$$

$$b_{12} = -\frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{\theta_7}{r} + \frac{d\theta_1}{2r}\right), \tag{6.11}$$

$$b_{22} = \frac{1}{\theta_1\theta_2-\theta_7\theta_8}\left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\theta_7}{r}\right). \tag{6.12}$$

Obtidos os respectivos elementos das matrizes  $A$  e  $B$ , para o modelo linear, consideraram-se os parâmetros  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , sugeridos por De La Cruz, Bastos e Carelli (2011), conforme Tabela 6.1.

Tabela 6.1 - Identificação dos parâmetros da CRM

	Deslocamento lateral para esquerda	Sem deslocamento	Deslocamento lateral para direita
Massa do ocupante ( $kg$ )	62	62	62
$\theta_1$	0,4605	0,4087	0,4703
$\theta_2$	0,2304	0,1925	0,2274
$\theta_3$	0,0023	-0,0047	0,0009
$\theta_4$	1,0187	1,0042	1,0068
$\theta_5$	0,0277	0,0044	0,0291
$\theta_6$	0,9103	0,8744	0,9008
$\theta_7$	-0,0143	-0,0104	-0,0106
$\theta_8$	-0,0658	-0,0711	-0,0280

**Fonte:** De La Cruz, Bastos e Carelli (2011).

Sendo o desvio lateral de aproximadamente  $0,145 [m]$  ( $b_1 = 0,145 [m]$ ) em relação ao ponto  $B$  e a distância  $a = 0,35 [m]$  (Figura 5.4), sendo estes parâmetros usados para construção da Tabela 6.1, conforme experimento desenvolvido pelos autores De La Cruz, Bastos e Carelli (2011).

Manipulando as equações (5.42), (5.44) e (5.45) e o parâmetro  $b_1$  obteve-se o parâmetro  $b_2 \cong 0,151 [m]$ . Considerando as informações de  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  e  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , da Tabela 6.1, foram construídas as matrizes correspondentes aos vértices dos politopos, sendo as variáveis incertas para o projeto  $-0,151 \leq b_2 \leq 0,151 [m]$ ,  $0,15 \leq r \leq 0,35 [m]$  e

$0,40 \leq d \leq 0,70$  [m], respectivamente, a posição lateral do  $CG$ , ponto  $G$ , sendo  $0,151$  [m] deslocado para a esquerda e  $-0,151$  [m] deslocado para a direita, o raio das rodas traseiras e a distância entre as rodas traseiras da CRM (Figura 5.4). Também, podem-se manipular as formulações a fim de considerar outros parâmetros com incertezas, por exemplo, a distância,  $a$ , do elemento rastreador, da CRM em relação ao eixo transversal. Outro exemplo de incerteza paramétrica é a massa do ocupante da CRM.

Para a constituição das matrizes do sistema, usaram-se as velocidades angulares nulas e associadas aos vértices dos politopos. Portanto seguem os vértices  $P(r, d, b_2)$  e as respectivas matrizes  $A_d$  e  $B_d$  linearizadas do sistema dinâmico, (6.13)-(6.28):

$$\text{Primeiro vértice: } P_{d1}(0,15; 0,40; 0,151), A_{d1} = \begin{bmatrix} 0,9305 & 1,1739 \\ 1,3462 & 1,0133 \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

$$\text{Segundo vértice: } P_{d2}(0,15; 0,70; 0,151), A_{d2} = \begin{bmatrix} 0,8731 & 1,1357 \\ 1,3844 & 1,0707 \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

$$\text{Terceiro vértice: } P_{d3}(0,35; 0,70; 0,151), A_{d3} = \begin{bmatrix} 0,8731 & 1,1357 \\ 1,3844 & 1,0707 \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\text{Quarto vértice: } P_{d4}(0,35; 0,40; 0,151), A_{d4} = \begin{bmatrix} 0,9305 & 1,1739 \\ 1,3462 & 1,0133 \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

$$\text{Quinto vértice: } P_{d5}(0,15; 0,40; -0,151), A_{d5} = \begin{bmatrix} 0,9921 & 1,1017 \\ 1,1685 & 1,0311 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

$$\text{Sexto vértice: } P_{d6}(0,15; 0,70; -0,151), A_{d6} = \begin{bmatrix} 0,9693 & 1,0849 \\ 1,1853 & 1,0539 \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

$$\text{Sétimo vértice: } P_{d7}(0,35; 0,70; -0,151), A_{d7} = \begin{bmatrix} 0,9693 & 1,0849 \\ 1,1853 & 1,0539 \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

$$\text{Oitavo vértice: } P_{d8}(0,35; 0,40; -0,151), A_{d8} = \begin{bmatrix} 0,9921 & 1,1017 \\ 1,1685 & 1,0311 \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

$$\text{Primeiro vértice: } P_{d1}(0,15; 0,40; 0,151), B_{d1} = \begin{bmatrix} 13,7723 & 4,9322 \\ 15,4409 & -6,7454 \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

$$\text{Segundo vértice: } P_{d2}(0,15; 0,70; 0,151), B_{d2} = \begin{bmatrix} 13,1465 & 9,3114 \\ 16,0666 & -11,1245 \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

$$\text{Terceiro vértice: } P_{d3}(0,35; 0,70; 0,151), B_{d3} = \begin{bmatrix} 5,6342 & 3,9906 \\ 6,8857 & -4,7676 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

$$\text{Quarto vértice: } P_{d4}(0,35;0,40;0,151), B_{d4} = \begin{bmatrix} 5,9024 & 2,1138 \\ 6,6175 & -2,8909 \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

$$\text{Quinto vértice: } P_{d5}(0,15;0,40;-0,151), B_{d5} = \begin{bmatrix} 13,8647 & 5,2171 \\ 14,5649 & -6,5423 \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

$$\text{Sexto vértice: } P_{d6}(0,15;0,70;-0,151), B_{d6} = \begin{bmatrix} 13,6022 & 9,6269 \\ 14,8274 & -10,9521 \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$

$$\text{Sétimo vértice: } P_{d7}(0,35;0,70;-0,151), B_{d7} = \begin{bmatrix} 5,8295 & 4,1258 \\ 6,3546 & -4,6937 \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

$$\text{Oitavo vértice: } P_{d8}(0,35;0,40;-0,151), B_{d8} = \begin{bmatrix} 5,9420 & 2,2359 \\ 6,2421 & -2,8038 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

Além das matrizes de estados do sistema, considerou-se que as variáveis de estados encontram-se todas disponíveis para medição, logo a matriz de saída será  $C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

## 6.2 LINEARIZAÇÃO DO MODELO CINEMÁTICO

O segundo modelo analisado é o modelo cinemático, sendo linearizado via método de linearização de Lyapunov, sendo tal algoritmo implementado no software MatLab®, conforme Apêndice E. Por meio de tal ferramenta obteve-se as seguintes matrizes linearizadas do novo sistema,  $A_c$  e  $B_c$ :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{r(a-b_1)(\omega_l - \omega_r)\cos(\psi)}{d} & -\frac{r(\omega_l + \omega_r)\sin(\psi)}{2} \\ 0 & 0 & \frac{r(a-b_1)(\omega_l - \omega_r)\sin(\psi)}{d} & -\frac{r(\omega_l + \omega_r)\cos(\psi)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$B_c \begin{bmatrix} \frac{r \cos(\psi)}{2} - \frac{r(a-b_1) \sin(\psi)}{d} & \frac{r \cos(\psi)}{2} + \frac{r(a-b_1) \sin(\psi)}{d} \\ \frac{r \sin(\psi)}{2} + \frac{r(a-b_1) \cos(\psi)}{d} & \frac{r \sin(\psi)}{2} - \frac{r(a-b_1) \cos(\psi)}{d} \\ \frac{r}{d} & -\frac{r}{d} \end{bmatrix}$$

(6.30)

Prosseguindo com o projeto de controlador robusto, são consideradas as incertezas  $0,15 \leq r \leq 0,35$  [m],  $0,40 \leq d \leq 0,70$  [m] e  $-\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{\pi}{6}$  [rad] e como parâmetros constantes de operação  $\omega_r = \omega_l = 0,75$  [rad/s],  $b_1 = 0,145$  [m] e  $a = 0,35$  [m]. A malha de controle é apresentada na Figura 6.1, na qual nota-se um dispositivo adicional  $\kappa(t)$  na mesma, cuja finalidade é detectar a existência de sinal na entrada do modelo dinâmico e adiantar um sinal na forma de impulso para a entrada do modelo cinemático para auxiliar no movimento inicial da CRM. A seguir são construídas as matrizes do sistema cinemático para cada vértice do polítopo,  $P(r, d, \psi)$  em (6.31)-(6.46):

$$\text{Primeiro vértice: } P_{c1} \left( 0,15; 0,40; -\frac{\pi}{6} \right), A_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0562 \\ 0 & 0 & 0,0974 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

$$\text{Segundo vértice: } P_{c2} \left( 0,15; 0,70; -\frac{\pi}{6} \right), A_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0562 \\ 0 & 0 & 0,0974 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

$$\text{Terceiro vértice: } P_{c3} \left( 0,35; 0,40; -\frac{\pi}{6} \right), A_{c3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,1312 \\ 0 & 0 & 0,2273 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.33)$$

$$\text{Quarto vértice: } P_{c4} \left( 0,35; 0,70; -\frac{\pi}{6} \right), A_{c4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,1312 \\ 0 & 0 & 0,2273 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.34)$$

$$\text{Quinto vértice: } P_{c5} \left( 0,15; 0,40; \frac{\pi}{6} \right), A_{c5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0562 \\ 0 & 0 & 0,0974 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

$$\text{Sexto vértice: } P_{c6} \left( 0,15; 0,70; \frac{\pi}{6} \right), A_{c6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0562 \\ 0 & 0 & 0,0974 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.36)$$

$$\text{Sétimo vértice: } P_{c7} \left( 0,35; 0,40; \frac{\pi}{6} \right), A_{c7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,1312 \\ 0 & 0 & 0,2273 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.37)$$

$$\text{Oitavo vértice: } P_{c8} \left( 0,35; 0,70; \frac{\pi}{6} \right), A_{c8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,1312 \\ 0 & 0 & 0,2273 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

$$\text{Primeiro vértice: } P_{c1} \left( 0,15; 0,40; -\frac{\pi}{6} \right), B_{c1} = \begin{bmatrix} 0,1023 & 0,0276 \\ 0,0271 & -0,1021 \\ 0,3750 & -0,3750 \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

$$\text{Segundo vértice: } P_{c2} \left( 0,15; 0,70; -\frac{\pi}{6} \right), B_{c2} = \begin{bmatrix} 0,0863 & 0,0436 \\ -0,0006 & -0,0744 \\ 0,2143 & -0,2143 \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

$$\text{Terceiro vértice: } P_{c3} \left( 0,35; 0,40; -\frac{\pi}{6} \right), B_{c3} = \begin{bmatrix} 0,2386 & 0,0645 \\ 0,0633 & -0,2383 \\ 0,8750 & -0,8750 \end{bmatrix}, \quad (6.41)$$

$$\text{Quarto vértice: } P_{c4} \left( 0,35; 0,70; -\frac{\pi}{6} \right), B_{c4} = \begin{bmatrix} 0,2013 & 0,1018 \\ -0,0013 & -0,1737 \\ 0,5000 & -0,5000 \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

$$\text{Quinto vértice: } P_{c5} \left( 0,15; 0,40; \frac{\pi}{6} \right), B_{c5} = \begin{bmatrix} 0,0276 & 0,1023 \\ 0,1021 & -0,0271 \\ 0,3750 & -0,3750 \end{bmatrix}, \quad (6.43)$$

$$\text{Sexto vértice: } P_{c6} \left( 0,15; 0,70; \frac{\pi}{6} \right), B_{c6} = \begin{bmatrix} 0,0436 & 0,0863 \\ 0,0744 & 0,0006 \\ 0,2143 & -0,2143 \end{bmatrix}, \quad (6.44)$$

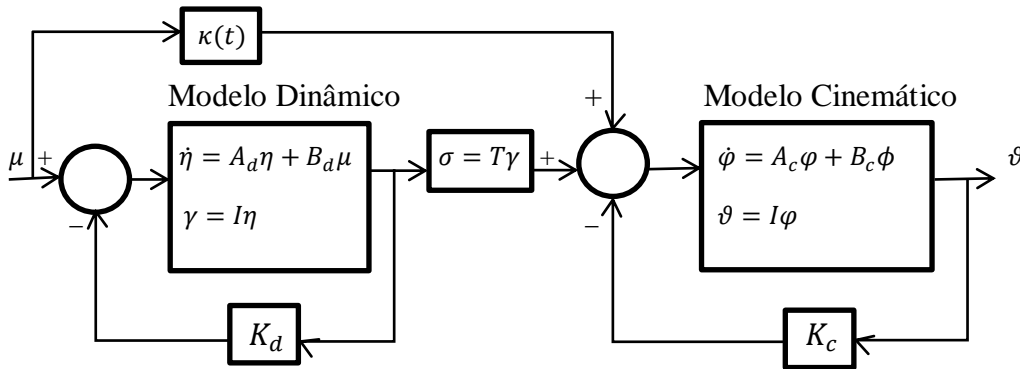
$$\text{Sétimo vértice: } P_{c7} \left( 0,35; 0,40; \frac{\pi}{6} \right), B_{c7} = \begin{bmatrix} 0,0645 & 0,2386 \\ 0,2383 & -0,0633 \\ 0,8750 & -0,8750 \end{bmatrix}, \quad (6.45)$$

$$\text{Oitavo vértice: } P_{c8} \left( 0,35; 0,70; \frac{\pi}{6} \right), B_{c8} = \begin{bmatrix} 0,1018 & 0,2013 \\ 0,1737 & 0,0013 \\ 0,5000 & -0,5000 \end{bmatrix}. \quad (6.46)$$

Além das matrizes de estados do sistema cinemático, considerou-se que as variáveis de estados encontram-se disponíveis, sendo a matriz de saída será  $C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Considerando o exposto acima, arranjados os modelos dinâmico (5.62) e cinemático (6.29)-(6.30) e, também, constituiu-se a malha de controle conforme é apresentada a seguir:

Figura 6.1 - Constituição da malha de controle do sistema: modelo dinâmico, matriz de transformação, matriz de ganho e modelo cinemático.



Fonte: Do próprio autor.

sendo,  $\mu = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$  o vetor de entrada do modelo dinâmico linearizado,  $\kappa(t)$  é o dispositivo detector de sinal para auxiliar no movimento inicial do sistema cinemático,  $B_d$  é a matriz de entrada do modelo dinâmico em (6.4), constituída por oito vértices em (6.21)-(6.28) sendo as incertezas  $r, d, b_2$ ,  $\eta = [\omega_r \ \omega_l]^T$  é o vetor de estados do modelo dinâmico,  $A_d$  a matriz característica do sistema em (6.3), constituída também por oito vértices em (6.13)-(6.20) cujas incertezas são  $r, d, b_2$ ,  $I$  é a matriz identidade de saída de ordem dois e  $K_d$  é a matriz dos ganhos estáticos do controlador referente ao sistema dinâmico de ordem  $2 \times 2$ . A matriz de ganhos  $T$  para amplificar os sinais de saída do sistema dinâmico. Já para o modelo cinemático,  $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$  é o vetor de entrada,  $B_c$  a matriz de entrada do sistema em (6.30), constituída por oito vértices em (6.39)-(6.46) sendo as incertezas  $r, d, \psi, \varphi =$



$[x \ y \ \psi]^T$  é o vetor de estados,  $A_c$  a matriz característica do sistema em (6.29), constituída por oito vértices em (6.31)-(6.38) cujas incertezas são  $r, d, \psi, I$  é a matriz identidade de saída de ordem três e  $K_c$  é a matriz do controlador estático do sistema cinemático de ordem  $2 \times 3$ .

### 6.3 CONCLUSÃO PARCIAL: CAPÍTULO 6

Uma vez arranjados os modelos dinâmico e cinemático, os mesmos foram linearizados por meio do método de linearização de Lyapunov. Em seguida, constataram-se as incertezas no modelo físico, as quais foram utilizadas para a constituição dos vértices do politopo e as matrizes correspondentes para os modelos. E ao final deste capítulo, ilustrou-se a Figura 6.1 para elucidar o sistema em estudo assim como as variáveis de entrada, de estados e de saídas do mesmo.

No próximo capítulo serão apresentados os resultados referentes aos modelos dinâmico e cinemático, a fim de torná-los sistemas ERP e estável via LMIs. Também será apresentado o controlador dinâmico e estático por meio da CEV.

## CAPÍTULO 7

### ABORDAGEM LMI PARA PROJETO DE CONTROLADOR

Neste capítulo são apresentados os resultados do projeto e análise dos controladores estáticos de realimentação da saída dos modelos dinâmico e cinemático da CRM, referente à proposta de controle ilustrada na Figura 6.1.

#### 7.1 SISTEMA ERP INCERTOS COM ESPECIFICAÇÃO DA TAXA DE DECAIMENTO

Para o projeto dos controladores estáticos dos modelos dinâmico e cinemático, consideraram-se incertezas quanto aos parâmetros,  $b_1$ ,  $r$  e  $d$ , para o modelo dinâmico e  $r$ ,  $d$  e  $\psi$ , para o modelo cinemático e a imposição da taxa de decaimento para ambos os modelos.

##### 7.1.1 Sistema Com o Mesmo Número de Entradas e Saídas: Modelo Dinâmico

Nesta seção foi projeto e analisado o controlador estático de realimentação da saída do modelo dinâmico com incertezas paramétricas e imposição da taxa de decaimento.

Considere o sistema dinâmico (5.62), linearizado em (6.3)-(6.4) em torno do ponto de operação  $\omega_r = \omega_l = 0$  [rad/s], cujas incertezas são  $-0,151 \leq b_2 \leq 0,151$  [m],  $0,15 \leq r \leq 0,35$  [m] e  $0,40 \leq d \leq 0,70$  [m], sendo tal sistema linearizado controlável e observável.

Para o sistema dinâmico linearizado, foram obtidas as matrizes associadas aos oito vértices do politopo dadas em (6.13)-(6.28). O projeto do controlador constitui-se em aplicar o Teorema 24, proposto por Covacic (2006), cuja lei de controle é  $u = -K_o y$  e programação foi desenvolvido no ambiente do software MatLab®. Considerando o exposto, seguem as LMIs implementadas, as quais devem ser factíveis para o sistema ser ERP e atender a taxa de decaimento imposta, sendo  $i = 1, \dots, 8$ :

$$P_i A_i + A_i^T P_i - C_i^T (R + R^T) C_i < -2\gamma P_i, \quad (7.1)$$

$$B_i^T P_i = F C_i, \quad (7.2)$$

$$P_i > 0. \quad (7.3)$$

Por meio do Teorema 24, implementou-se (7.1)-(7.3), sendo as matriz dos vértices do politopo (6.13)-(6.28), obteve-se a matriz

$$F = \begin{bmatrix} 4,1115 & 4,3869 \\ 1,1434 & -1,6047 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

que torna o sistema ERP, a matriz

$$R = \begin{bmatrix} 48,7880 & 0,9477 \\ 0,9477 & 48,7880 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

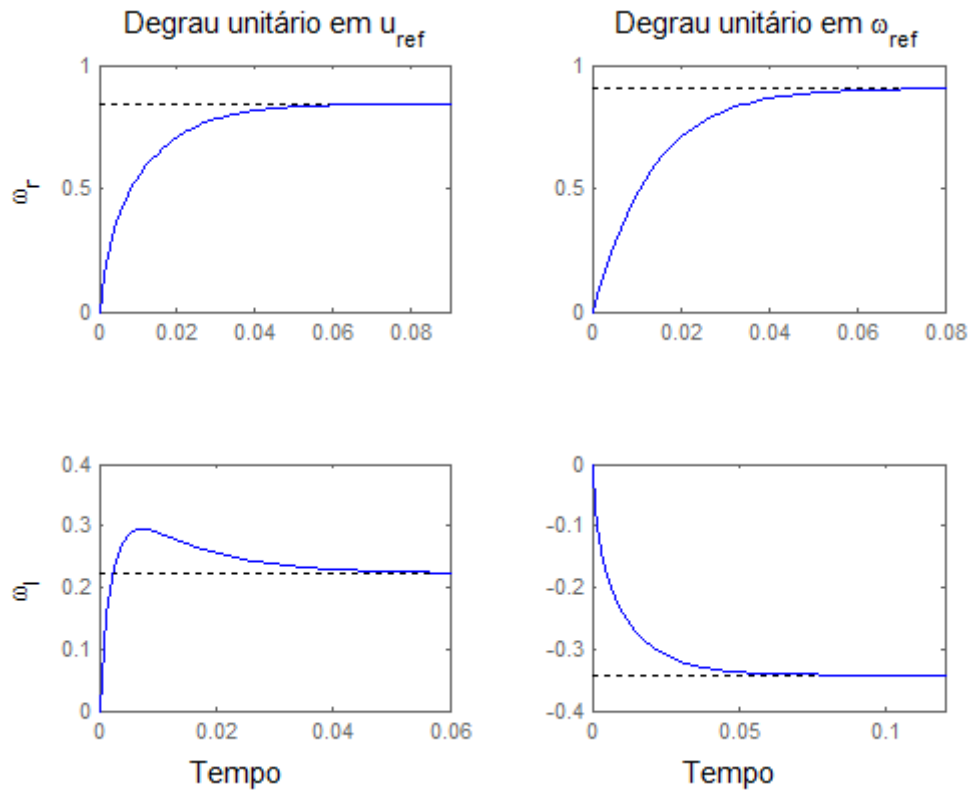
e a matriz

$$K_o = (F^{-1})R = \begin{bmatrix} 7,0517 & 18,5654 \\ 4,5123 & -17,1836 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

a qual estabiliza o sistema ERP com uma taxa de decaimento 33,3875.

A seguir é ilustrada na Figura 7.1 a respostas do sistema ERP com realimentação da saída (7.6) a entrada ao degrau unitário para o primeiro vértice do politopo (6.13) e (6.21), cuja lei de controle é  $u = -K_o y$ .

Figura 7.1- Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\mu = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ ), sendo a saída ( $\eta = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) multiplicada por uma matriz de ganho  $T = 10I_{2 \times 2}$ , para o primeiro vértice do polítopo.



**Fonte:** Do próprio autor.

Portanto é possível constatar a performance o sistema através da ilustração gráfica anterior (Figura 7.1), sendo o sistema ERP com realimentação da saída e taxa de decaimento de 33,3875. O ganho ( $T$ ) do sistema dinâmico linearizado é 10, o qual condiciona os sinais de saída num intervalo de  $[-0,4; 1]$ . No Apêndice F são apresentados as demais Figuras F.1-F.7 associadas aos demais vértices do polítopo (6.14)-(6.20) e (6.22)-(6.28).

Na próxima seção, serão descritos os resultados de projeto e análise do modelo cinemático da CRM.

### 7.1.2 Sistema Com Números de Saídas Maior Que os Números de Entradas: Modelo Cinemático

Considere o modelo cinemático linearizado em (6.29)-(6.30) cujos parâmetros de velocidades angulares são  $\omega_r = \omega_l = 0,75 [rad/s]$ , a distância é  $a = 0,35 [m]$  e as matrizes que correspondem aos vértices do polítopo (6.31)-(6.46) associadas às incertezas  $0,15 \leq r \leq 0,35 [m]$ ,  $0,40 \leq d \leq 0,70 [m]$  e  $-\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{\pi}{6} [rad]$ .

Para que o sistema seja ERP uma das condições (i) – (xi) do Teorema 25 deve ser satisfeita, cuja lei de controle é  $u = -K_o y$ . Assim construíram-se as rotinas no software MatLab® para investigar qual condição que apresenta melhor resultado. Portanto, a condição que apresentou melhor resultado foi à condição (xi), com taxa de decaimento 0,0919. Sendo a matriz que torna o sistema ERP dada por

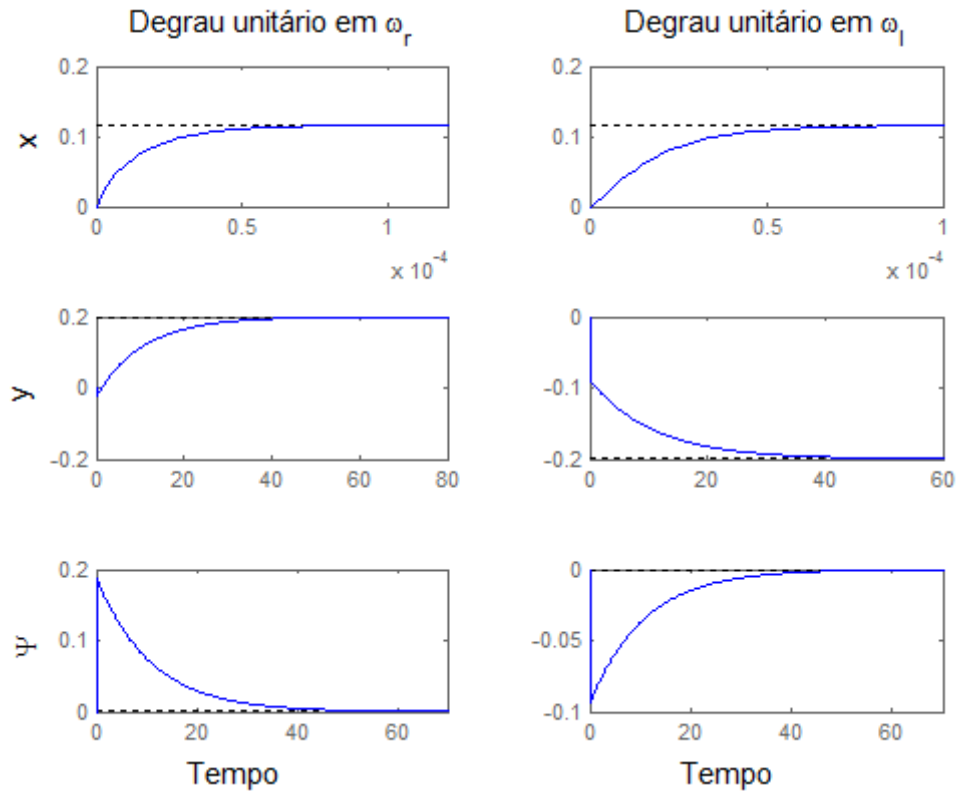
$$F = \begin{bmatrix} 0,0010 & 0,0002 & 0,0014 \\ 0,0010 & -0,0002 & -0,0014 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

e a matriz que estabiliza o sistema com taxa de decaimento de 0,0919 dada por

$$K_o = (10^5) \begin{bmatrix} 4,3238 & 2,4986 & 2,9554 \\ 4,3260 & -2,5066 & -2,9650 \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

A matriz de saída do modelo cinemático,  $\vartheta = I\varphi$ , foi multiplicada por um ganho de  $10^5$  para construção da Figura 7.2 referente ao primeiro vértice (6.31) e (6.39) do modelo cinemático, apresentada a seguir. Enquanto para os demais vértices (6.32)-(6.38) e (6.40)-(6.46), as figuras são ilustradas no Apêndice G, Figura G.1-G.7. Sendo a entrada ao degrau unitário dado no vetor de entrada  $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$  e a saída dada por  $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ .

Figura 7.2 - Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do primeiro vértice do politopo.



**Fonte:** Do próprio autor.

Ao analisar a simulação (Figuras 7.2 e G.1-G.7) referente ao modelo cinemático, especificamente a taxa de decaimento (0,0919) obtida via sistema ERP com LMIs, propõem-se a aplicação do método de projeto de CEV utilizando LMIs, a fim de comparar os resultados das taxa e evidenciar a maior delas.

Na próxima seção são apresentados e discutidos os resultados do CEV utilizando LMIs.

## 7.2 CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL UTILIZANDO LMIS: ROBUSTEZ, ESTABILIDADE E TAXA DE DECAIMENTO

O CEV utilizando LMIs é outro método de projeto aplicado ao modelo cinemático da CRM, cuja finalidade é superar a taxa de decaimento obtida anterior de 0,0919.

### 7.2.1 Sistema Com Números de Saídas Maior Que os Números de Entradas

Considere o modelo cinemático linearizado em (6.29)-(6.30) cujas matrizes correspondem aos vértices do politopo são dadas em (6.31)-(6.46). Para analisar a estabilidade, robustez e a taxa de decaimento do modelo cinemático, tornou-se necessário arranjar o mesmo.

Adequando-se (4.20)-(4.22) para o número de saídas maior que o número de entradas, Teorema 25 cujas LMIs são (3.247)-(3.248), com especificação da taxa de decaimento (4.33), tem-se

$$\begin{aligned}
 [I_n \quad P(\alpha)] & \begin{bmatrix} -2P(\alpha) & \dots \\ A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)_o C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & \dots \\ \dots & A(\alpha)^T - C(\alpha)^T K(\alpha)_o^T B(\alpha)^T + P(\alpha) + I_n \\ \dots & -2I_n & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P(\alpha) \end{bmatrix} \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [-2P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)K(\alpha)_o C(\alpha) + P(\alpha)^2 + P(\alpha) \quad \dots \\
 \dots \quad A(\alpha)^T - C(\alpha)^T K(\alpha)_o^T B(\alpha)^T + P(\alpha) + I_n - 2P(\alpha)] & \begin{bmatrix} I_n \\ P(\alpha) \end{bmatrix} \quad (7.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)K(\alpha)_o C(\alpha) + P(\alpha)^2 + P(\alpha) + \quad \dots \\
 \dots \quad A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T K(\alpha)_o^T B(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)^2 + P(\alpha) - 2P(\alpha)^2 \quad (7.11)
 \end{aligned}$$

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)K(\alpha)_o C(\alpha) - C(\alpha)^T K(\alpha)_o^T B(\alpha)^T P(\alpha) \quad (7.12)$$

$$P(\alpha)[A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)_o C(\alpha)] + [A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)_o C(\alpha)]^T P(\alpha) \quad (7.13)$$

sendo  $A(\alpha)_f = A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)_oC(\alpha)$ .

Para o projeto proposto e aplicação do Controle com Estrutura Variável, consideraram-se as

matrizes de incertezas  $P(\alpha) = [\alpha_1^T \quad \dots \quad \alpha_r^T] \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix}$ ,  $A(\alpha) = [A_1 \quad \dots \quad A_r] \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_r^T \end{bmatrix}$ ,  $B(\alpha) = [\alpha_1^T \quad \dots \quad \alpha_r^T] \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_r \end{bmatrix}$  e  $C(\alpha) = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_r \end{bmatrix}$ , com  $K = K_1 = \dots = K_r$  e  $C = C_1 = \dots = C_r$ ,

sendo  $i = 1, \dots, 8$  os vértices do politopo (6.31)-(6.46). Substituindo-se as matrizes de incertezas em (7.12) temos a equação equivalente à (4.23) descrita por

$$Q = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} [A_1 \quad \dots \quad A_r] + \begin{bmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_r^T \end{bmatrix} [P_1 \quad \dots \quad P_r] - \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} [B_1 \quad \dots \quad B_r] \dots$$

$$\dots \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_r \end{bmatrix} [C_1 \quad \dots \quad C_r] - \begin{bmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_r^T \end{bmatrix} [K_1^T \quad \dots \quad K_r^T] \begin{bmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_r^T \end{bmatrix} [P_1 \quad \dots \quad P_r].$$

(7.14)

Para imposição da taxa de decaimento uma condição suficiente é dada em (4.33), assim tem-se

$$Q + [\gamma I \quad \dots \quad \gamma I]^T [P_1 \quad \dots \quad P_r] + [P_1 \quad \dots \quad P_r]^T [\gamma I \quad \dots \quad \gamma I] < 0 \quad (7.15)$$

tem-se

$$Q + \begin{bmatrix} \gamma P_1 & \dots & \gamma P_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma P_1 & \dots & \gamma P_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma P_1 & \dots & \gamma P_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma P_r & \dots & \gamma P_r \end{bmatrix} < 0, \quad (7.16)$$



$$Q + \begin{bmatrix} 2\gamma P_1 & \dots & \gamma(P_1 + P_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(P_1 + P_r) & \dots & 2\gamma P_r \end{bmatrix} < 0. \quad (7.17)$$

Substituindo-se (7.14) em (7.17), temos

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} [A_1 \quad \dots \quad A_r] + \begin{bmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_r^T \end{bmatrix} [P_1 \quad \dots \quad P_r] - \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} [B_1 \quad \dots \quad B_r] \dots \\ & \dots \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_r \end{bmatrix} [C_1 \quad \dots \quad C_r] - \begin{bmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_r^T \end{bmatrix} [K_1^T \quad \dots \quad K_r^T] \begin{bmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_r^T \end{bmatrix} [P_1 \quad \dots \quad P_r] + \dots \\ & \dots \begin{bmatrix} 2\gamma P_1 & \dots & \gamma(P_1 + P_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(P_1 + P_r) & \dots & 2\gamma P_r \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

A partir de (7.18) desenvolveu-se a programação no software MatLab® juntamente com (7.19) e (7.20), como segue

$$B(\alpha)^T P(\alpha) = FC(\alpha), \quad (7.19)$$

$$P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0. \quad (7.20)$$

Porém o programa não encontrou factibilidade para o conjunto de incertezas,  $i = 1, \dots, 8$ . Logo, consideram-se as matrizes com incertezas (6.31)-(6.34) e (6.39)-(6.42) para a direção  $\psi = -\frac{\pi}{6}$  [rad] e as matrizes com incertezas (6.35)-(6.38) e (6.43)-(6.46) para a

direção  $\psi = \frac{\pi}{6}$  [rad], a fim de encontrar um controlador estático associado à cada direção e possibilitar o uso dos mesmos através do modelo Fuzzy para controlar a CRM.

Tomaram-se as condições (7.18)-(7.20) e as matrizes correspondentes aos vértices do polítopo (6.35)-(6.38) e (6.43)-(6.46),  $(\psi = \frac{\pi}{6}$  [rad]), sendo obtidos os gráficos referentes à simulação ilustrado na Figura 7.3, nesta seção, e nas Figuras H.1-H.3, no Apêndice H. Encontrou-se uma taxa de decaimento de 0,021, portanto inferior à taxa obtida por meio da implementação do Teorema 25, condição (xi). O intervalo do sinal de saída é de aproximadamente  $[-6,4]$ , considerando o ganho na saída de  $10^5$ .

Foi determinada a matriz  $F$ , (7.21):

$$F = (10^{-3}) \begin{bmatrix} 0,8644 & 0,5112 & 0,8649 \\ 0,8240 & 0,4682 & -0,8519 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

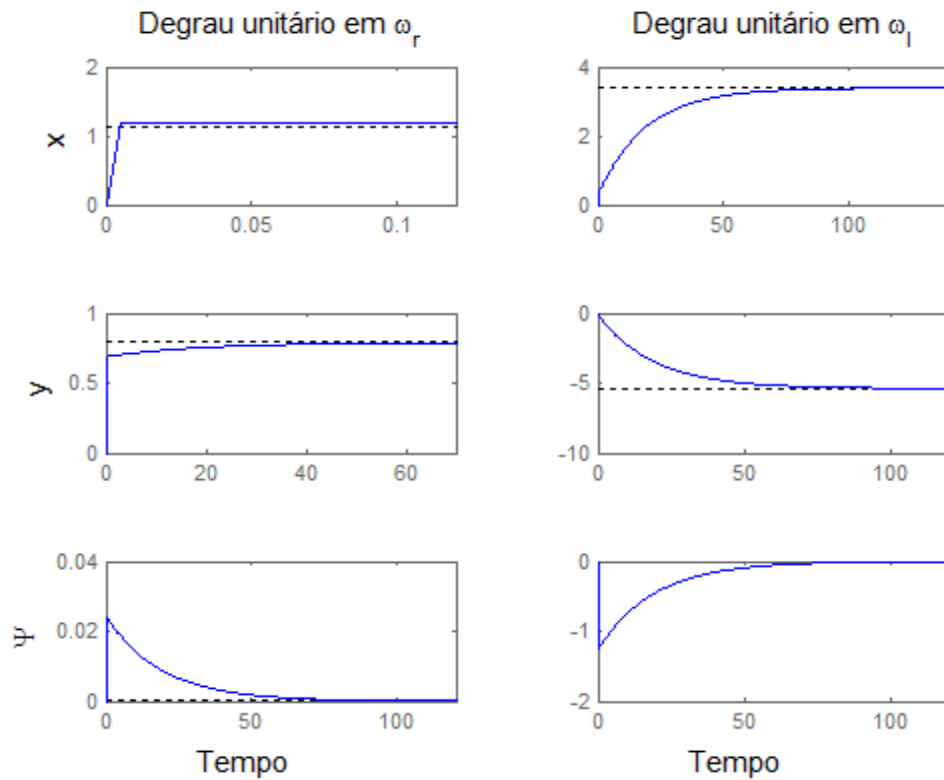
e a matriz  $K_o$  da realimentação da saída, (7.22):

$$K_o = (10^4) \begin{bmatrix} 6,1739 & 3,8768 & 1,0899 \\ 0,9047 & -1,2862 & -7,5811 \end{bmatrix}, \quad (7.22)$$

sendo as matrizes (7.21) e (7.22) tornam o sistema ERP e estabilizam o mesmo a uma taxa de decaimento especificada de 0,021.

A seguir apresenta-se a Figura 7.3, sendo a resposta do primeiro vértice, (6.38) e (6.46), ao degrau unitário à entrada do sistema cinemático em (6.29)-(6.30). Os gráficos, ilustrados as Figura H.1-H.3, referentes às respostas ao degrau unitário para os demais vértices encontram-se no Apêndice H.

Figura 7.3- Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do quarto vértice do polítopo.



Fonte: Do próprio autor.

Agora, consideraram-se novamente as condições (7.18)-(7.20), porém as matrizes correspondentes aos vértices do polítopo (6.31)-(6.34) e (6.39)-(6.42), ( $\psi = -\frac{\pi}{6} [rad]$ ), encontrou-se uma taxa de decaimento de 0,021, a mesma especificada para a direção  $\psi = \frac{\pi}{6} [rad]$ .

Obteve-se a matriz  $F$ , (7.23):

$$F = (10^{-3}) \begin{bmatrix} 0,8240 & -0,4682 & 0,8519 \\ 0,8644 & -0,5112 & -0,8649 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

e a matriz  $K_o$  da realimentação da saída, (7.24):

$$K_o = (10^4) \begin{bmatrix} -0,7897 & 2,6785 & 9,3830 \\ 8,0912 & -4,5752 & 0,6884 \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

### 7.3 CONCLUSÃO PARCIAL: CAPÍTULO 7

O método de projeto de CEV, utilizando sistemas ERP com LMIs, para sistemas com incertezas paramétricas, considerando robustez paramétrica e taxa de decaimento não obteve melhor resultado ao método de projeto baseado em LMIs de sistemas ERP. Uma vez que o método de projeto de CEV utilizou o Teorema 25, sendo taxa de decaimento obtida foi de 0,021 para as direções  $|\psi| = \frac{\pi}{6}$  [rad], e o método de projeto baseado em LMI de sistemas ERP analisou todas as condições do Teorema 25, obtendo-se assim uma taxa de decaimento de 0,0919, superior a taxa de 0,021.

## CAPÍTULO 8

### DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O presente projeto de controlador robusto aplicado a CRM via LMIs, utilizou os modelos dinâmico e cinemático linearizados em (6.3)-(6.4) e (6.29)-(6.30), respectivamente, em torno de um ponto de operação, sendo as velocidades angulares de  $\omega_r = \omega_l = 0 [rad/s]$  para o modelo dinâmico e de  $\omega_r = \omega_l = 0,75 [rad/s]$  para o modelo cinemático. Consideraram-se como incertezas para o modelo dinâmico  $-0,151 \leq b_2 \leq 0,151 [m]$ ,  $0,15 \leq r \leq 0,35 [m]$  e  $0,40 \leq d \leq 0,70 [m]$ , respectivamente, a posição lateral do CG, o raio da roda e a distância entre as rodas traseiras da CRM. Assim, constituíram-se as matrizes associadas aos vértices do polítopo sendo apresentadas em (6.13)-(6.28). Para projeto e análise do sistema com realimentação da saída, sendo este sistema com duas entradas e duas saídas, aplicou-se o Teorema 24 (COVACIC, 2001), cujas LMIs (7.1)-(7.3) apresentaram factibilidade, sendo as matrizes (7.4) e (7.6) tornam o sistema ERP e estabilizam o sistema com uma taxa de decaimento especificada de 33,3875. Na Figura 7.1 é ilustrada a resposta do sistema ERP com realimentação da saída a entrada ao degrau unitário para o primeiro vértice do polítopo. E as respostas ao degrau unitário dos demais vértices são ilustradas as Figuras F.1-F.7 no Apêndice F.

Para o modelo cinemático linearizado em (6.29)-(6.30), foram obtidas as matrizes correspondentes aos vértices do polítopo (6.31)-(6.46) associadas às incertezas  $0,15 \leq r \leq 0,35 [m]$ ,  $0,40 \leq d \leq 0,70 [m]$  e  $-\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{\pi}{6} [rad]$ , respectivamente, o raio da roda traseira, distância entre as rodas traseiras e a direção da CRM. O modelo cinemático possui duas entradas e três saídas, portanto foi necessário aplicar o Teorema 25 (COVACIC, 2006), condições (i) – (xi), para analisar a factibilidade das LMIs. Logo, encontraram-se várias soluções, porém a condição de melhor resultado foi à condição (xi), para esta condição, a matriz (7.7) torna o sistema ERP e a matriz de ganho (7.8) de realimentação da saída que estabiliza o modelo cinemático com taxa de decaimento 0,0919. Nas Figuras 7.2 e G.1-G.7, ilustram-se os resultados da simulação para cada vértice do polítopo.

Com a finalidade de investigar a taxa de decaimento do modelo cinemático, aplicou-se o método de CEV utilizando LMIs ao Teorema 25. (COVACIC, 2006) Para tal frente de projeto, houve a necessidade de arranjar o Teorema 25 para flexibilizá-lo através do Teorema 27 em (7.9)-(7.18), uma vez que o Teorema 27 foi elaborado para sistemas com o mesmo

número de entradas e saídas. Implementaram-se as LMIS (7.18)-(7.20), usaram-se as matrizes (6.35)-(6.38) e (6.43)-(6.46) correspondentes aos vértices do polítopo para a direção  $\psi = \frac{\pi}{6}$  [rad]. A partir das LMIs (7.18)-(7.20) foram obtidas as matrizes (7.21) e (7.22) que tornam o sistema ERP e estabilizam o sistema com uma taxa de decaimento de 0,021. Nas Figuras 7.3 e H.1-H.3, encontram-se ilustrados os resultados gráficos obtidos para cada vértice do polítopo à entrada em degrau unitário. Projetaram-se as matrizes (7.23) e (7.24) que tornam o sistema ERP e estabilizam o sistema com taxa de decaimento especificada de 0,021, para os vértices (6.31)-(6.34) e (6.39)-(6.42), correspondentes à direção  $\psi = -\frac{\pi}{6}$  [rad].

As matrizes (7.21)-(7.24), serão úteis para projetos de controladores estáticos por realimentação da saída usando o modelo Fuzzy, o qual não faz parte do escopo deste trabalho.

Assim a melhor taxa de decaimento para o modelo cinemático foi de 0,0919 obtida pelas LMIs do Teorema 25 condição (xi), por meio das matrizes (7.7) e (7.8).

## CAPÍTULO 9

### CONCLUSÃO

Apresentou-se no capítulo 2, métodos de linearização já consolidados na literatura. Relatou-se a expansão em Série de Taylor como uma ferramenta inicial para linearização de sistemas, considerou-se, porém, que o Método de Linearização de Lyapunov é uma ferramenta mais ampla, quando comparada à Série de Taylor. (FALEIRO; YONEYAMA, 2002; OGATA, 2010; SLOTINE; LI, 1991).

No capítulo 3 escreveu-se sobre condições baseadas em LMIs para sistemas ERP. Considerou-se a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável. Apresentaram-se as condições para que um sistema seja ERP usando LMIs, com realimentação da saída, número de entradas igual ao número de saídas e os números diferentes de entradas e saídas. Também a mesma abordagem para imposição da taxa de decaimento para sistemas sem e com incertezas paramétricas. (ANDERSON, 1968; COVACIC, 2006, COVACIC et al., 2008; LORDELO, 2000; TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000).

No capítulo 4, foram descritos os métodos de projeto de CEV para sistemas com incertezas paramétricas e sujeitos a distúrbios. Considerou-se robustez paramétrica, taxa de decaimento e restrições na entrada e saída, para sistemas lineares invariantes no tempo com número de entradas igual ao número de saída e a sugestão para estender o estudo para sistemas com o número de saídas maior que o número de entradas. (COVACIC, 2006)

No capítulo 5, relatou-se sobre o modelo matemático da CRM. Para a escolha do modelo matemático, levou-se em consideração as características físicas da CRM existentes no Laboratório de Controle Avançado, Robótica e Engenharia Biomédica da Universidade Estadual de Londrina no Departamento de Engenharia Elétrica, assim, selecionou-se um modelo matemático similar ao sistema físico em estudo, sendo que este modelo considera como parâmetro incerto o CG da CRM. Outra contribuição do trabalho é o desacoplamento do modelo dinâmico do modelo. (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011; FONSECA SOBRINHO et al., 2000; MARTINS et al., 2008).

No Capítulo 6, ilustram-se os arranjos nos modelos dinâmico e cinemático, cuja finalidade é a linearização dos mesmos. As contribuições neste capítulo foram os modelos lineares da dinâmica em (6.3)-(6.4) e da cinemática em (6.29)-(6.30), as matrizes associadas aos vértices do politopo (6.13)-(6.28) e (6.31)-(6.46) e a malha de controle da CRM, ilustrada na Figura 6.1. (DE LA CRUZ; BASTOS; CARELLI, 2011).

No capítulo 7, relatam-se os resultados do projeto e análise do controlador robusto aplicado a CRM com realimentação da saída. As contribuições foram as matrizes (7.4) e (7.6) que tornam o sistema dinâmico ERP e estabilizam o modelo dinâmico com incertezas paramétricas à taxa de decaimento especificada de 33,3875, as matrizes (7.7) e (7.8) que tornam o sistema cinemático ERP e estabilizam o modelo cinemático com incertezas paramétricas à taxa de decaimento de 0,0919, a demonstração (7.9)-(7.18) para aplicação do método de CEV utilizando LMIs e as matrizes (7.21)-(7.24), que tornam o modelo cinemático com incertezas paramétricas ERP e estabilizam o sistema a uma taxa de 0,021. (COVACIC, 2006)

Por meio das taxas de decaimento obtidas, torna-se evidente que o controlador estático da realimentação da saída do modelo dinâmico deve ser (7.6) e o controlador estático da realimentação da saída do modelo cinemático deve ser (7.8), com taxas de 33,3875 e 0,0919, respectivamente.

#### 9.1 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Pesquisas futuras relacionadas ao projeto de controlador robusto aplicado a CRM via LMIs são:

- (i) otimizar a taxa de decaimento obtida no modelo cinemático;
- (ii) implementar na CRM a malha de controle;
- (iii) considerar outros parâmetros incertos, como a massa do ocupante;
- (iv) usar o modelo Fuzzy para implementar um controlador usando as matrizes (7.21)-(7.24).

#### 9.2 ARTIGO PUBLICADO E ARTIGO SUBMETIDO

ROSSINI, F. L.; SANTOS, N. M.; GAINO, R.; COVACIC, M. R. Projeto de controlador robusto aplicado à cadeira de rodas móveis via abordagem por LMIs. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 19., 2012, Campina Grande. *Anais...* Campina Grande, 2012. p. 2966-2972.

ROSSINI, F. L.; GAINO, R.; COVACIC, M. R. Robust controller desing of a wheelchair mobile via LMI approach to ERP Systems with feedback output. *Revista do IEEE América Latina*, São Paulo, 2013. (Submetido).



## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. *Enciclopédia de automática: controle e automação*. São Paulo: Blucher, 2007. v. 1.
- ANDERSON, B. D. O. A simplified viewpoint of hyperstability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 13, p. 292–294, 1968.
- ANTÃO, P. D. M. F. *Cadeira de rodas eléctrica adaptada a tetraplégicos*. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Electrónica e Telecomunicações) - Universidade de Aveiro, Aveiro. 2010.
- ANTONINI, P.; IPPOLITI, G.; LONGHI, S. Learning control of mobile robots using a multiprocessor system. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 14, p. 1279-1295, 2006.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. *Controle linear I: parte a : sistemas contínuos no tempo*. Ilha Solteira: UNESP, 2013. Disponível em: <<http://falcao.feis.unesp.br/dee/projetos/lpc/Downloads/Apostila%20de%20Controle%20Linear%20I.pdf>>. Acesso em: 29 jan. 2013.
- ATESOGLU, O. Nearly time-optimal point to point navigation control design for power wheelchair dynamics. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 2006. *Proceedings...* 2006. p. 953-959.
- BARZAMINI, R.; YAZDIZADEH, A. R.; RAHMANI, A. H. A new adaptive tracking control for wheeled mobile robot. In: IEEE CONFERENCE ON ROBOTICS, AUTOMATION AND MECHATRONICS, 2006. p. 1-6.
- BIRK, A.; KENN, H. Roboguard, a teleoperated mobile security robot. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 10, p. 1259-1264, 2002.
- BOYD, S.; EL GHAUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V.. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- BRASIL. Ministério da Saúde. *Política nacional de saúde da pessoa com deficiência*. Brasília: Editora do Ministério da Saúde, 2010.
- CARELLI, R.; SECCHI, H.; MUT, V. Algorithms for stable control of mobile robots with obstacle avoidance. *Latin American Applied Research*, Bahia Blanca, v. 29, p. 191-196, 1999.
- CASTRUCCI, P. L.; BITTAR, A.; SALES, R. M. *Controle automático*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- CHEN, C. T. *Linear system theory and design*. 3. ed. Oxford: Oxford University Press, 1999.
- CHEN, H.; LIU, Z. Y.; SUN, P. Y. Application of constrained  $H$  control to active suspension systems on half-car models. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions: ASME*, New York, v. 127, n. 3, p. 345-354, 2005.
- CHEN, L. W.; SHIEH, S. D. Robust variable structure and switching adaptive control of single-arm dynamics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL

APPLICATIONS: IEEE, 1997, Taiwan. *Proceedings...* Taiwan: Chinese Naval Academy, 1997. v. 44, n. 6, p. 595–597.

CHOI, H. H. Na Explicit formula of sliding surfaces for a class of uncertain dynamics systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, Elmsford, v. 34, n. 8, p. 1015-1020, 1998.

CORRADINI, M. L.; ORLANDO, G. Control of mobile robots with uncertainties in the dynamical model: a discrete time sliding mode approach with experimental results. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 10, n. 1, p. 23-34, 2002.

COVACIC, M. R. *Controle automático com estrutura variável utilizando sistemas ERP e LMI*. 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2001.

COVACIC, M. R. *Síntese de sistemas ERP baseada em LMIs e controle com estrutura variável*. Tese. (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

COVACIC, M. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Comparative study of LMI-based output feedback SPR synthesis for plants with different numbers of inputs and outputs. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS, 2008. *Proceedings...* Antalya, Turkey, p. 130-135, 2008.

CRUSIUS, C. A. R.; TROFINO, A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 44, n. 5, p. 1053-1057, 1999.

DAS, T.; KAR, I. N. Design and implementation of an adaptive fuzzy logicbased controller for wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, New York, v. 14, n. 3, p. 501-510, 2006.

DE OLIVEIRA, M. C.; FARIAS, D. P.; GEROMEL, J. C. *LMISol, User's guide*. UNICAMP, Campinas-SP, Brasil, 1997.

DE LA CRUZ, C.; BASTOS, T. F.; CARELLI, R. Adaptive motion control law of a robotic wheelchair. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 19, p. 113-125, 2011.

DE LA CRUZ, C.; CARELLI, R. Dynamic modeling and centralized formation control of mobile robots. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY, 30., 2006. *Proceedings...* Paris, 2006. p. 3880-3885.

DE WIT C. C.; SORDALEN, O. J. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 37, n. 11, p. 1791-1797, 1992.

DO, K. D.; JIANG, Z. P.; PAN, J. Simultaneous tracking and stabilization of mobile robots: an adaptive approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 49, n. 7, p. 1147–1152, 2004.

DONG, W.; GUO, Y. Dynamic tracking control of uncertain mobile robots. In: IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS, p. 2774-2779, 2005.

DONG, W.; HUO, W.: Tracking control of wheeled mobile robots with unknown dynamics. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS & AUTOMATION, 1999, Detroit. *Proceedings...* Detroit, p. 2645-2650, 1999.

DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P. P.; FRANCIS, B. A. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 34, n. 8, p. 831-847, 1989.

EDWARDS, C.; AKOACHERE, A.; SPURGEON, S. K. Sliding-mode output feedback controller design using linear matrix inequalities. *IEEE Transaction on Automatic Control*, New York, v. 46, n. 1, p. 115–119, 2001.

EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K.; AKOACHERE, A. A sliding mode static out put feedback controller based on linear matrix inequalities applied to an aircraft system. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, New York, v. 122, n. 4, p. 656–662, 2000.

ESTEVES & SALVADOR LTDA. *Manual da cadeira de rodas freedom*. Disponível em <<https://www.freedom.ind.br/arquivos/produto/manual/manual.pdf>>. Acesso em: 1 mar. 2012.

FALLEIRO, A. C.; YONEYAMA, T. *Teoria matemática de sistemas*. São José dos Campos: ITA, 2002.

FENG, X.; VELINSKY, S. A. Development of a distributed mobile robot control system for automatic highway maintenance and construction. In: IEEE MIDWEST SYMPOSIUM ON CIRCUITS AND SYSTEMS, 40., 1997. *Proceedings... 1997*. p. 489-492.

FERREIRA, C. L. L.; CERVANTES, S. G. S.; GERMANOVIX, W. Cadeira de rodas controlada por sopro e sucção. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 2008. *Anais...*, Juiz de Fora: SBA, 2008.

FIERRO, R.; LEWIS, F. L. Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics. *Journal of Robotics Systems*, Arlington, v. 14, n. 3, p. 149-163, 1997.

FIERRO, R.; LEWIS, F. L. Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 34., 1995, New Orleans, 1995. *Proceedings...* New Orleans, 1995. p. 3805-3810.

FONSECA SOBRINHO, A. S.; FELIZARDO, K. R.; SILVA, M. A.; OLIVEIRA, H. P.; LONE, L. P.; GERMANOVIX, W.; GAINO, R. Cadeira de rodas controlada por sopros e sucções. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas*, Londrina, v. 21, n. 4, p. 3-7, 2000.

FONSECA SOBRINHO, A. S.; PRADO, L.; FELIZARDO, K. R.; GERMANOVIX, W.; GAINO, R. Sistemas de controle para cadeira de rodas comandados por supro e sucção, VI *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Bauru, p.1-6, 2003.

FREIRE, E.; CARELLI, R. Corridor navigation and wall-following stable control for sonar-based mobile robots. *Robotics and Autonomous Systems*, Amsterdam, v. 45, p. 235-247, 2003.

FRIZERA NETO, A.; CELESTE, W. C.; BASTOS-FILHO, T. F.; MARTINS, V. R.; SARCINELLI-FILHO, M. Human-machine interface based on electro-biological signals for mobile vehicle control. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, 2006. *Proceedings...* 2006. p. 2954-2959.

FUKAO, T.; NAKAGAWA, H.; ADACHI, N.: Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, New York, v. 16, n. 5, p. 609-615, 2000.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI control toolbox: for use with MATLAB®*. Natick: The Math Works, 1995.

GARCIA, C. *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.

GERMANOVIX, W.; GAINO, R.; FELIZARDO, K. R.; FONSECA SOBRINHO, A. S. Sistemas de controle para cadeira de rodas comandados por sopro e sucção. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 6., Bauru. *Anais...* Bauru: Sociedade Brasileira de Automática, 2003. p. 1-6.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. *Controle linear de sistemas dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2011.

HASSIBI, B.; SAYED, A. H.; KAILATH, T. Indefinite-quadratic estimation and control – a unified approach to  $H_2$  and  $H_\infty$  theories. *Studies in applied and numerical mathematics*. Philadelphia: *Society for Industrial and Applied Mathematics* (SIAM), 1999.

HECK, B. S.; YALLAPRAGADA, S. V.; FAN, M. K. H. Numerical methods to design the reaching phase of output feedback variable structure control. *Automatica*, Elmsford, v. 31, n. 2, p. 275–279, 1995.

HSU, L.; KASZKUREWICZ, E.; BHAYA, A. Matrix-theoretic conditions for the realizability of sliding manifolds. In: WORLD CONGRESS OF IFAC, 14., 1999, Beijing. *Proceedings...* Beijing, 1999.

HUANG, C. H.; IOANNOU, P. A.; MAROULAS, J.; SAFONOV, M.G. Design of strictly positive real systems using constant output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 44, n. 3, p. 569–573, 1999.

HWANG, C. L.; HAN, S. Y. Mixed  $H_2/H_\infty$  design for a decentralized discrete variable structure control with application to mobile robots. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, New York, v. 35, n. 4, p. 736-750, 2005.

JOHNSON, B. W.; AYLOR, J. H. Dynamic modeling of an electric wheelchair. *IEEE Transactions on Industry Applications*, New York, v. 21, n. 5, p. 1284-1293, 1985.

KANAYAMA, Y.; KIMURA, Y.; MIYAZAKI, F.; NOGUCHI, T. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1990. *Proceedings...* 1990. p. 384-389.

KAUFMAN, H.; BAR-KANA, I.; SOBEL, K. *Direct adaptive control algorithms: theory and applications*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1994. (Communications and Control Engineering Series).

KAUFMAN, H.; BAR-KANA, I.; SOBEL, K. *Direct adaptive control algorithms, theory and applications*. New York: Springer, 1998.

KIM, M. S., SHIN, J. H.; LEE, J. J. Design of a robust adaptive controller for a mobile robot. In: IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS, 2000. *Proceedings...* 2000. p. 1816-1821.

JBILOU, K.; MESSAOUDI, A.; TABAÂ, K. Some Schur complement identities and applications to matrix extrapolation methodo. *Linear Algebra and its Applications*, New York, v. 392, p.195-210, 2004.

KÜNHE, F.; GOMES, J.; FETTER, W. Mobile robot trajectory tracking using model predictive control. In: IEEE LATIN-AMERICAN ROBOTICS SYMPOSIUM, 2., 2005, São Luis. *Anais...* São Luis, 2005.

LATHI, B.P: *Sinais e sistemas lineares*. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

LAWTON, J. R. T.; BEARD, R. W.; YOUNG, B. J. A decentralized approach to formation maneuvers. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, New York, v. 19, n. 6, p. 933-941, 2003.

LIU, S.; ZHANG, H.; YANG, S. X.; YU, J.: Dynamic control of a mobile robot using an adaptive neurodynamics and sliding mode strategy. In: WORLD CONGRESS ON INTELLIGENT CONTROL AND AUTOMATION, 5., 2004, Hangzhou. *Proceedings...* Hangzhou, 2004. p. 5007-5011.

LORDELO, A. D. S. *Controle automático com estrutura variável utilizando sistemas ERP e LMI*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, Ilha Solteira, 2000.

LUNDSTRÖM, P.; SKOGESTAD, S.; DOYLE, J. C. Two-degree-of-freedom controller design for an ill-conditioned distillation process using  $\mu$ -synthesis. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, New York, v. 7, n. 1, p. 12-21, 1999.

MARCOS, A.; BALAS, G. J. A robust integrated controller/diagnosis aircraft application. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Chichester, v. 15, n. 12, p. 531-551, 2005.

MARTINS, F. N.; CELESTE, W. C.; CARELLI R.; SARCINELLI-FILHO, M.; BASTOS FILHO, T. F. An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 16, p. 1354-1363, 2008.

MAZO, M.; RODRÍGUEZ, F. J.; LÁZARO, J. L.; UREÑA, J.; GARCÍA, J. C.; SANTISO, E.; REVENGA, P. A. Eletronic control of a wheelchair guided by voice commands. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 3, n. 5, p. 665-674, 1995.

- MEI, S.; SHEN, T.; HU, W.; LU, Q.; SUN, L. Robust  $H_\infty$  control of a hamiltonian system with uncertainty and its applications to a multi-machine power systems. *IEEE Proceedings- Control Theory and Applications*, London, v. 152, n. 2, p. 202-210, 2005.
- NASISI, O.; CARELLI, R. Adaptive servo visual robot control. *Robotics and Autonomous Systems*, New York, v. 43, p. 51-78, 2003.
- NISE, N. S. *Engenharia de sistemas de controle*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 5. ed., São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- OWENS, D. H.; PRATZEL-WOLTERS, D.; ILCHMANN, A. Positive-real structure and high-gain adaptive stabilization. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Southend-on-Sea, v. 4, n. 2, p. 167-181, 1987.
- PARK, B. S.; YOO, S. J.; PARK, J. B.; CHOI, Y. H.: Adaptive neural sliding mode control of nonholonomic wheeled mobile robots with model uncertainty. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, New York, v. 17, n. 1, p. 207-214, 2009.
- PATEL, S.; SANYAL, R; SOBH, T. Riscbot: a WWW-enabled mobile surveillance and identification robot. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Arlington, v. 45, n. 1, p. 15-30, 2006.
- PRASSLER, E.; RITTER, A.; SCHAEFFER, C.; FIORINI, P. A short history of cleaning robots. *Autonomous Robots*, Dordrecht, v. 9, n. 3, p. 211-226, 2000.
- RABEH, S. A. N.; CALIRI, M. H. L. Capacidade funcional em indivíduos com lesão de medula espinhal. *Acta Paulista de Enfermagem*, São Paulo, v. 23, n. 3, p. 312-327, 2010.
- RAO, R. S.; CONN, K.; JUNG, S. H.; KATUPITIYA, J.; KIENZT, T.; KUMAR, V. Human robot interaction: application to smart wheelchairs. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 2002, Washington. *Proceedings...* Washington, 2002. p. 3583-3588.
- ROSSINI, F. L.; SANTOS, N. M.; GAINO, R.; COVACIC, M. R. Projeto de controlador robusto aplicado à cadeira de rodas móveis via abordagem por LMIs. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 19., 2012, Campina Grande. *Anais...* Campina Grande, 2012. p. 2966-2972.
- SLOTINE, J. J.; LI, W. *Applied nonlinear control*. New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- SOUZA, A. C. Z.; PINHEIRO, C. A. M. *Introdução à modelagem, análise e simulação de sistemas dinâmicos*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2008.
- STOUTEN, B.; GRAAF, A. J. Cooperative transportation of a large object development of an industrial application. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 3, 2004. *Proceedings...* ICRA, 2004. p. 2450-2455.
- TEIXEIRA, M. C. M. Control of uncertain dynamical systems using strictly positive real systems. *Analysis and Optimization of Systems*. Berlin, v. 144, p. 900-911, 1990.

\_\_\_\_\_. Output control with dynamical compensators and strictly positive real systems. *International Journal of Control*, London, v. 57, n. 5, p. 1101–1105, 1993.

\_\_\_\_\_. *Sistemas reais positivos e controle adaptativo*. 1989. Tese (Doutorado) – PUC-RJ, Rio de Janeiro, 1989.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 5, p. 613-623, 2003. –não foi citado

TEIXEIRA, M. C. M.; LORDELO, A. D. S.; ASSUNÇÃO, E. On LMI based design of SPR systems and output variable structure controllers. In: IEEE INTERNATIONAL WORKSHOP ON VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS, 6., 2000, Singapore. *Proceedings...* Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000. p. 199-208.

TEIXEIRA, M. C. M.; PIETROBOM, H. C.; ASSUNÇÃO, E. Novos resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos Fuzzy e LMI. *Revista Controle & Automação*, Campinas, v. 11, n. 1, p. 37-48, 2000.

UTKIN, V. I. *Sliding modes in control optimization*. Berlin: Springer Verlag, 1992.

VAN DER SCHAFT, A. F.  $\mathcal{L}_2$ -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear State feedback  $H_\infty$  control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 37, n. 6, p. 770-784, 1992.

VAN DER SCHAFT, A. F. On a state space approach to nonlinear  $H_\infty$ . *System and Control Letters*, Amsterdam, v. 16, n. 1, p. 1-8, 1991.

WU, W.; CHEN, H.; WANG, Y.; WOO, P.: Adaptive exponential stabilization of mobile robots with uncertainties. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 38., 1999, Phoenix. *Proceedings...* Phoenix, 1999. p. 3484-3489.

ZAK, S. H.; HUI, S. On variable structure output feedback controllers for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 38, n. 10, p. 1509-1512, 1993.

ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative, seminorms and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 26, n. 2, p. 301-320, 1981.

ZHANG, Y.; HONG, D.; CHUNG, J. H.; VELINSKY, S. A. Dynamic model based robust tracking control of a differentially steered wheeled mobile robot. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1998, Philadelphia. *Proceedings...* Philadelphia, 1998. p. 850-855, 1998.

ZHOU, K; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and optimal control*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.

ZHU, X.; DONG, G.; HU, D.; CAI, Z. Robust stabilization of wheeled mobile robots moving on uncertain uneven surface. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT SYSTEMS DESIGN AND APPLICATIONS, 16., 2006.

## APÊNDICES



## APÊNDICE A

### Complemento de Schur

O Complemento de Schur é um artifício muito utilizado para converter uma desigualdade não-linear em uma LMI ou vice-versa. (GEROMEL; KOROGUI, 2011; SOUZA; PINHEIRO, 2008).

A desigualdade matricial linear (GEROMEL; KOROGUI, 2011).

$$A(x) = \begin{bmatrix} S(x) & V(x) \\ V(x)' & Q(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.1})$$

É equivalente a qualquer das duas seguintes desigualdades não lineares:

$$a) S(x) < 0 \text{ e } Q(x) - V(x)'S(x)^{-1}V(x) < 0. \quad (\text{A.2})$$

$$b) Q(x) < 0 \text{ e } S(x) - V(x)Q(x)^{-1}V(x)' < 0. \quad (\text{A.3})$$

Prova: Para provar a primeira parte, consideremos  $x \in \mathbb{R}^n$  arbitrário e observamos que  $S(x) < 0$  também implica na existência de sua inversa  $S(x)^{-1}$ . Assim sendo, a matriz

$$U(x) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ V(x)'S(x)^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

é não singular e permite obter a fatoração  $A(x) = U(x)B(x)U(x)'$ , onde

$$B(x) = \begin{bmatrix} S(x) & 0 \\ 0 & Q(x) - V(x)'S(x)^{-1}V(x) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Portanto, a matriz  $A(x)$  é definida negativa se e somente se o mesmo ocorrer com  $B(x)$  que é o resultado desejado. A segunda parte é provada de forma idêntica. ■

## APÊNDICE B

### Formulação para Resolver LMEs

Considere a matriz  $M \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , dada por: (COVACIC, 2006)

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1q} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & \dots & m_{pq} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

e definida:

$$l_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \ l_2 = [0 \ 1 \ \dots \ 0], \ \dots \ l_p = [0 \ 0 \ \dots \ 1], \quad (\text{B.2})$$

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \dots \ c_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

O elemento pertence à linha  $i$  e à coluna  $j$  de  $M$ , dado por  $m_{ij}$  é igual a:

$$m_{ij} = l_i M c_j, \ i = 1, \dots, p, \ j = 1, \dots, q. \quad (\text{B.4})$$

A matriz  $M$  é nula se e somente se todos os elementos forem nulos, isto é,

$$M = 0 \Leftrightarrow m_{ij} = l_i M c_j = 0, \ i = 1, \dots, p, \ j = 1, \dots, q. \quad (\text{B.5})$$

Uma forma aproximada para a equação  $M = 0$  é dada por:

$$\begin{aligned} |m_{ij}| &= (m_{ij}^T m_{ij})^{\frac{1}{2}} < \epsilon \Leftrightarrow m_{ij}^T m_{ij} < \epsilon^2 \Leftrightarrow \epsilon^2 - m_{ij}^T \cdot 1 \cdot m_{ij} > 0, \dots \\ &\dots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \epsilon^2 & m_{ij}^T \\ m_{ij} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon^2 & c_j^T M^T l_i^T \\ l_i M c_j & 1 \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

para  $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$  e  $\epsilon \approx 0$ .

Com base no Lema 12, a LME  $B^T P = FC$ , que é equivalente a  $B^T P - FC = 0$ , pode ser aproximada por  $mn$  LMIs, dadas por:

$$\begin{bmatrix} \epsilon^2 & c_j^T (B^T P - FC)^T l_i^T \\ l_i (B^T P - FC) c_j & 1 \end{bmatrix} > 0,$$

(B.7)

sendo  $\epsilon \approx 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e  $j = 1, \dots, n$ .

## APÊNDICE C

### Zeros de Transmissão de um Sistema

Considere  $A(s) = B(s)C(s)$ , sendo  $A(s)$ ,  $B(s)$  e  $C(s)$  polinômios de ordens compatíveis. Assim,  $C(s)$  é um *divisor à direita* de  $A(s)$  e  $A(s)$  é um *múltiplo à esquerda* de  $C(s)$ . De maneira similar,  $B(s)$  é um *divisor à esquerda* de  $A(s)$  e  $A(s)$  é um *múltiplo à direita* de  $B(s)$ . Considere, também, duas matrizes polinomiais  $D(s)$  e  $N(s)$ , com o mesmo número de colunas,  $p$ . Então, uma matriz polinomial quadrada  $R(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  é um *divisor comum à direita* de  $D(s)$  e  $N(s)$ , desde que existam matrizes polinomiais  $\widehat{D}(s)$  e  $\widehat{N}(s)$  tais que:

$$D(s) = \widehat{D}(s)R(s) \quad (\text{H.1})$$

$$N(s) = \widehat{N}(s)R(s) \quad (\text{H.2})$$

Uma matriz polinomial quadrada  $M(s)$  é *unimodular* se o seu determinante for diferente de zero e independente de  $s$ .

Uma matriz polinomial  $R(s)$  é o *maior divisor comum à direita* de  $D(s)$  e  $N(s)$  se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (i)  $R(s)$  é um divisor à direita de  $D(s)$  e  $N(s)$ ;
- (ii)  $R(s)$  é um múltiplo à esquerda de todos os divisores comuns à direita de  $D(s)$  e  $N(s)$ .

Se um maior divisor comum à direita é uma matriz unimodular, então  $D(s)$  e  $N(s)$  são ditas *coprimas à direita*.

Considere uma matriz  $\widehat{G}(s) = N(s)D(s)^{-1}$ ,  $\widehat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  racional *própria* ( $\widehat{G}(s)$  é própria  $\Leftrightarrow$  grau  $D(s) \geq$  grau  $N(s) \Leftrightarrow \widehat{G}(\infty) = 0$  ou  $\widehat{G}(\infty)$  é igual a uma constante diferente de zero), sendo que  $N(s)$  e  $D(s)$  são coprimas à direita. Então, um número  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um *zero de transmissão* de  $\widehat{G}(s)$ , se o posto de  $N(\lambda) < \min(p, q)$ . (CHEN, 1999).

Os zeros de transmissão também podem ser definidos através da realização mínima de  $\widehat{G}(s)$ . Considere  $\{A, B, C, D\}$  qualquer realização mínima de dimensão  $n$  de uma matriz própria racional  $\widehat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ , com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ . Então, os zeros de transmissão são os valores de  $s = \lambda \in \mathbb{C}$ , tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} < n + \min(p, q). \quad (\text{H.3})$$

Para maiores detalhes sobre a teoria exposta neste apêndice o artigo de Chen (1999) deve ser consultado.

## APÊNDICE D

### Algoritmo de Linearização do Modelo Dinâmico

A seguir encontra-se listado o programa utilizado para manipulação e linearização do modelo dinâmico do sistema.

Para a construção do programa no software MatLab®, houve a necessidade de estabelecer uma correspondência entre a notação das variáveis utilizadas na dissertação e as variáveis a serem declaradas no software. Sendo assim, seguem tais correspondências:  $\theta_1 = t1, \dots, \theta_8 = t8$ ,  $r$ ,  $d$ ,  $\omega_r = w_r$ ,  $\omega_l = w_l$ ,  $u_{ref} = u_{ref}$ ,  $\omega_{ref} = w_{ref}$ ,  $\delta_u = \text{delta}_u$  e  $\delta_\omega = \text{delta}_w$ .

Usou-se o *toolbox* de matemática simbólica do MatLab® para a manipulação e linearização do modelo, assim para fazer uso de tais ferramentas matemáticas torna-se necessário a declaração das variáveis do modelo dinâmico, conforme segue:

```
>> syms t1 t2 t3 t4 t5 t6 t7 t8 r d w_r w_l u_ref w_ref delta_u delta_w
```

A partir das variáveis declaradas, reescreveram-se as matrizes  $A$  e  $B$ :

```
>> A = [r./2,r./2;r./d,-r./d]; B = [t1 -t7;-t8 t2];
```

Também, houve a necessidade de construir as equações de conversão entre as variáveis  $w_r$   $w_l$  em  $u$  e  $w$ :

```
>> u = (r./2).*(w_r+w_l); w = (r./d).*(w_r-w_l);
```

Para obter o modelo, substituiu-se (5.59) em (5.57), sendo reescrita a seguir:

```
>> A_wr_wl = inv(A)*inv(B)*([t4.*u-t3.*w.^2+u_ref+delta_u;
    t8.*w+t5.*u.*w+w_ref+delta_w]);
```

A matriz  $A_{wr\_wl}$  obtida anteriormente é a equação (5.62), correspondente ao modelo dinâmico da CRM.

A fim de aplicar as ferramentas de projeto e análise de controle de sistemas lineares descritas neste trabalho, há necessidade de linearização do modelo  $A_{wr\_wl}$ . O método de linearização aplicado é o método de linearização de Lyapunov, sendo o modelo linear obtido

aplicando-se a cada linha da matriz  $A_{wr\_wl}$  derivadas parciais, sendo estas com relação a  $w\_r$ ,  $w\_l$ ,  $u\_ref$  e  $w\_ref$ , conforme segue:

```
>> A_B_linear = jacobian([A_wr_wl(1,1) A_wr_wl(2,1)],[w_r w_l u_ref w_ref]);
```

A partir da matriz  $A_B\_linear$  seleciona-se a submatriz correspondente a matriz característica do sistema dinâmico ( $Ad$ ):

```
>> Ad=A_B_linear(1:2,1:2)
```

$$Ad = [ ((r*t4)/2 + (r^2*t3*(2*w_l - 2*w_r))/d^2)*(t2/(r*(t1*t2 - t7*t8)) + (d*t8)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8))) + (t7/(r*(t1*t2 - t7*t8)) + (d*t1)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8)))*((r*t8)/d - (r^2*t5*(w_l - w_r))/(2*d)) + (r^2*t5*(w_l + w_r))/(2*d), ((r*t4)/2 - (r^2*t3*(2*w_l - 2*w_r))/d^2)*(t2/(r*(t1*t2 - t7*t8)) + (d*t8)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8))) - (t7/(r*(t1*t2 - t7*t8)) + (d*t1)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8)))*((r*t8)/d + (r^2*t5*(w_l - w_r))/(2*d)) + (r^2*t5*(w_l + w_r))/(2*d);$$

$$((r*t4)/2 + (r^2*t3*(2*w_l - 2*w_r))/d^2)*(t2/(r*(t1*t2 - t7*t8)) - (d*t8)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8))) + (t7/(r*(t1*t2 - t7*t8)) - (d*t1)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8)))*((r*t8)/d - (r^2*t5*(w_l - w_r))/(2*d)) + (r^2*t5*(w_l + w_r))/(2*d), ((r*t4)/2 - (r^2*t3*(2*w_l - 2*w_r))/d^2)*(t2/(r*(t1*t2 - t7*t8)) - (d*t8)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8))) - (t7/(r*(t1*t2 - t7*t8)) - (d*t1)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8)))*((r*t8)/d + (r^2*t5*(w_l - w_r))/(2*d)) + (r^2*t5*(w_l + w_r))/(2*d)]$$

Executa-se o mesmo procedimento anterior, para a matriz de entrada do sistema  $Bd$ :

```
>> Bd = A_B_linear(1:2,3:4)
```

$$Bd = [t2/(r*(t1*t2 - t7*t8)) + (d*t8)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8)), t7/(r*(t1*t2 - t7*t8)) + (d*t1)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8));$$

$$t2/(r*(t1*t2 - t7*t8)) - (d*t8)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8)), t7/(r*(t1*t2 - t7*t8)) - (d*t1)/(2*r*(t1*t2 - t7*t8))];$$

Assim, obteve-se o modelo linear para o sistema (5.62), descrito pelas matrizes  $Ad$  e  $Bd$ , sendo estas utilizadas para projeto e análise do controlador robusto aplicado a CRM.

## APÊNDICE E

### Algoritmo de Linearização do Modelo Cinemático

A seguir encontra-se listado o programa utilizado para manipulação e linearização do modelo cinemático do sistema.

Para a construção do programa no software MatLab®, houve a necessidade de estabelecer uma correspondência entre a notação das variáveis utilizadas na dissertação e as variáveis há serem declaradas no software. Sendo assim, seguem tais correspondências:  $a$ ,  $b_1 = b1$ ,  $r$ ,  $d$ ,  $\omega_r = w_r$ ,  $\omega_l = w_l$  e  $\psi = psi$ .

Usou-se o *toolbox* de matemática simbólica do MatLab® para a manipulação e linearização do modelo, assim para fazer uso de tais ferramentas matemáticas torna-se necessário a declaração das variáveis do modelo dinâmico, conforme segue:

```
syms a b1 d r psi x y wr wl
```

A partir das variáveis declaradas, construíram-se as funções correspondentes  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{\psi}$ , a  $f1$ ,  $f2$  e  $f3$ , respectivamente.

```
>>f1=((r./2).*cos(psi)-(a-b1).*(r./d).*sin(psi)).*wr+((r./2).*cos(psi)+(a-b1).*(r./d).*sin(psi)).*wl;
```

```
>>f2=((r./2).*sin(psi)+(a-b1).*(r./d).*cos(psi)).*wr+((r./2).*sin(psi)-(a-b1).*(r./d).*cos(psi)).*wl;
```

```
>>f3=(r./d).*wr-(r./d).*wl;
```

```
>> f=[f1;f2;f3];
```

Como no *Apêndice C*, fim de aplicar as ferramentas de projeto e análise de controle de sistemas lineares descritas neste trabalho, há necessidade de linearização do modelo  $f$ . O método de linearização aplicado é o método de linearização de Lyapunov, sendo o modelo

linear obtido aplicando-se a cada linha da matriz  $f$  derivadas parciais, sendo estas com relação a  $x$  y  $\psi$   $w_r$   $w_l$ , conforme segue:

```
>> A_B_linear=jacobian([f(1,1) f(2,1) f(3,1)],[x y psi wr wl]);
```

A partir da matriz  $A\_B\_linear$  seleciona-se a submatriz correspondente a matriz característica do modelo cinemático ( $A_c$ ):

```
>> Ac=A_B_linear(:,1:3)
```

```
Ac = [ 0, 0, - wl*((r*sin(psi))/2 - (r*cos(psi)*(a - b1))/d) - wr*((r*sin(psi))/2 + (r*cos(psi)*(a - b1))/d);
```

```
0, 0, wl*((r*cos(psi))/2 + (r*sin(psi)*(a - b1))/d) + wr*((r*cos(psi))/2 - (r*sin(psi)*(a - b1))/d);
```

```
0, 0, 0]
```

Executa-se o mesmo procedimento anterior, para a matriz de entrada do sistema  $B_c$ :

```
>> Bc=A_B_linear(:,4:5)
```

```
Bc = [ (r*cos(psi))/2 - (r*sin(psi)*(a - b1))/d, (r*cos(psi))/2 + (r*sin(psi)*(a - b1))/d;
```

```
(r*sin(psi))/2 + (r*cos(psi)*(a - b1))/d, (r*sin(psi))/2 - (r*cos(psi)*(a - b1))/d;
```

```
r/d, -r/d]
```

Assim, obteve-se o modelo linear para o sistema (5.63)-(5.65), descrito pelas matrizes  $A_c$  e  $B_c$ , sendo estas utilizadas para projeto e análise do controlador robusto aplicado a CRM.

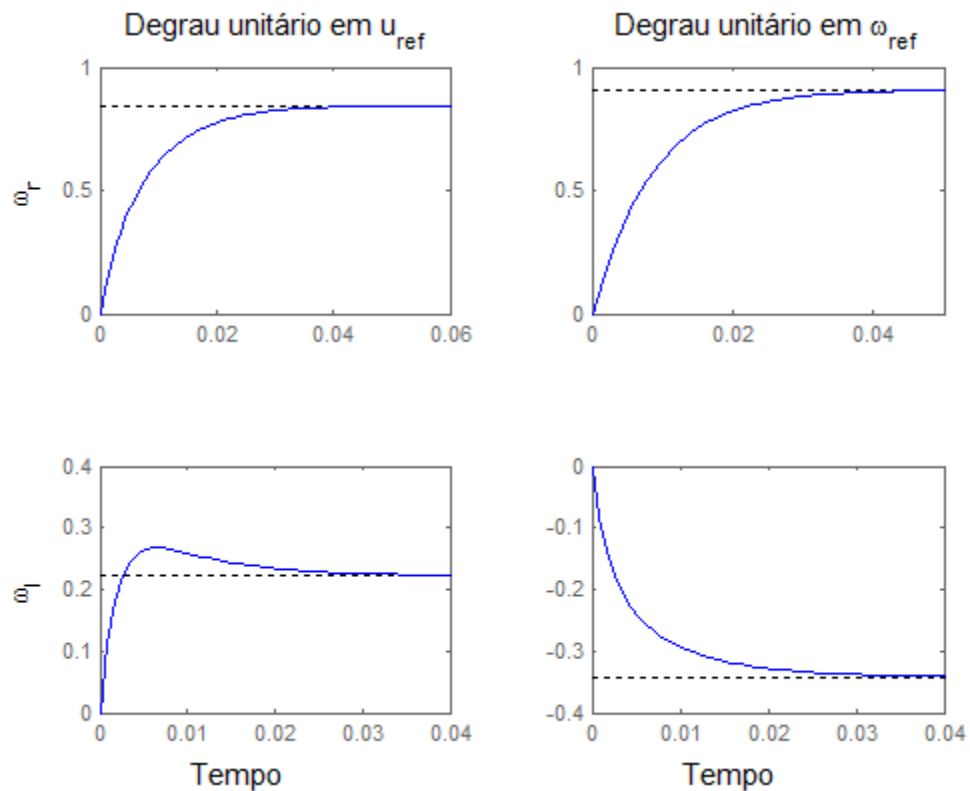


## APÊNDICE F

### Gráficos dos Vértices dos Politopos do Modelo Dinâmico da CRM

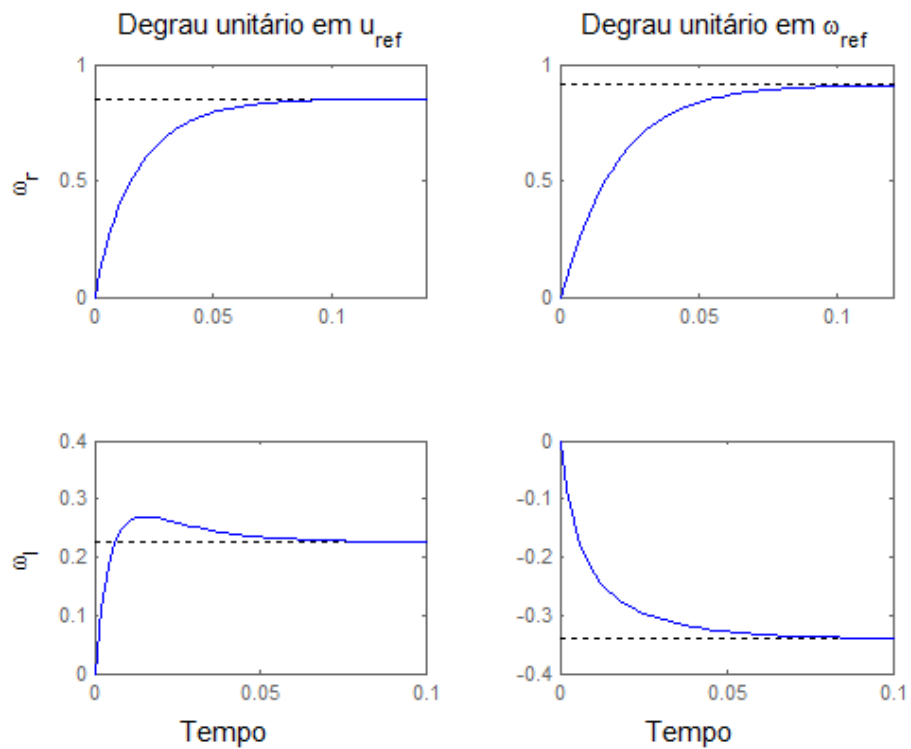
Para o sistema dinâmico linearizado, foram obtidas as matrizes associadas aos oito vértices do politopo dadas em (6.13)-(6.28). O projeto do controlador constitui-se em aplicar o Teorema 24, proposto por Covacic (2006), cuja programação foi desenvolvido no ambiente do software MatLab®. Assim, encontram-se listadas a seguir as Figuras F.1-F.7 para os vértices associados a (6.14)-(6.20) e (6.22)-(6.28).

Figura F.1: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\mu = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ ), sendo a saída ( $\eta = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) multiplicada por uma matriz de ganho  $T = 10I_{2 \times 2}$ , para o segundo vértice do politopo.



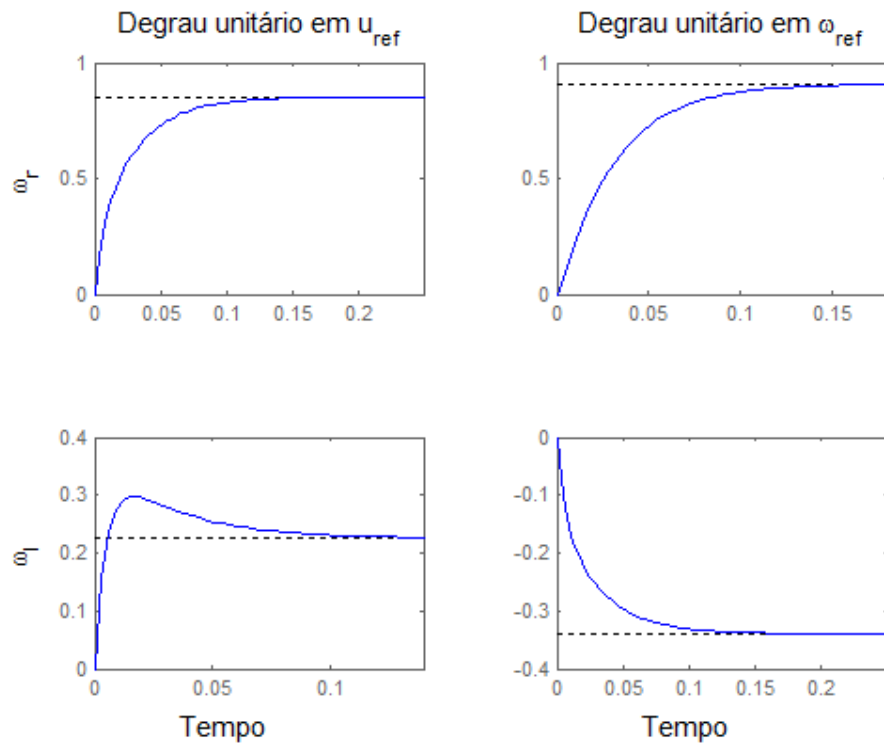
Fonte : Do próprio autor

Figura F.2: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\mu = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ ), sendo a saída ( $\eta = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) multiplicada por uma matriz de ganho  $T = 10I_{2 \times 2}$ , para o primeiro terceiro do politopo.



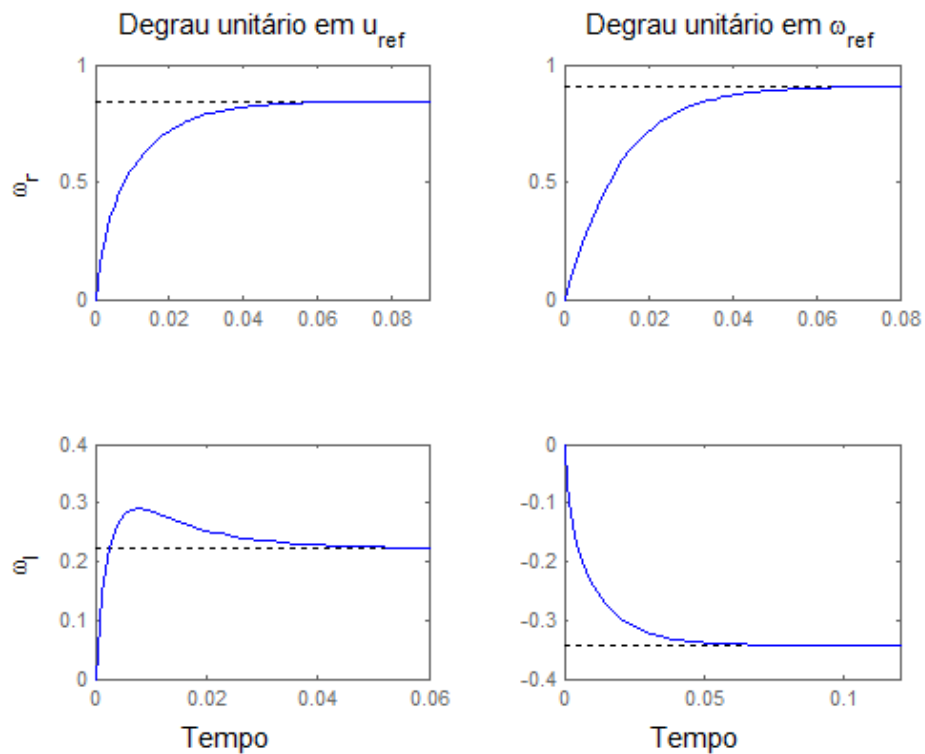
**Fonte :** Do próprio autor

Figura F.3: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\mu = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ ), sendo a saída ( $\eta = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) multiplicada por uma matriz de ganho  $T = 10I_{2 \times 2}$ , para o quarto vértice do politopo.



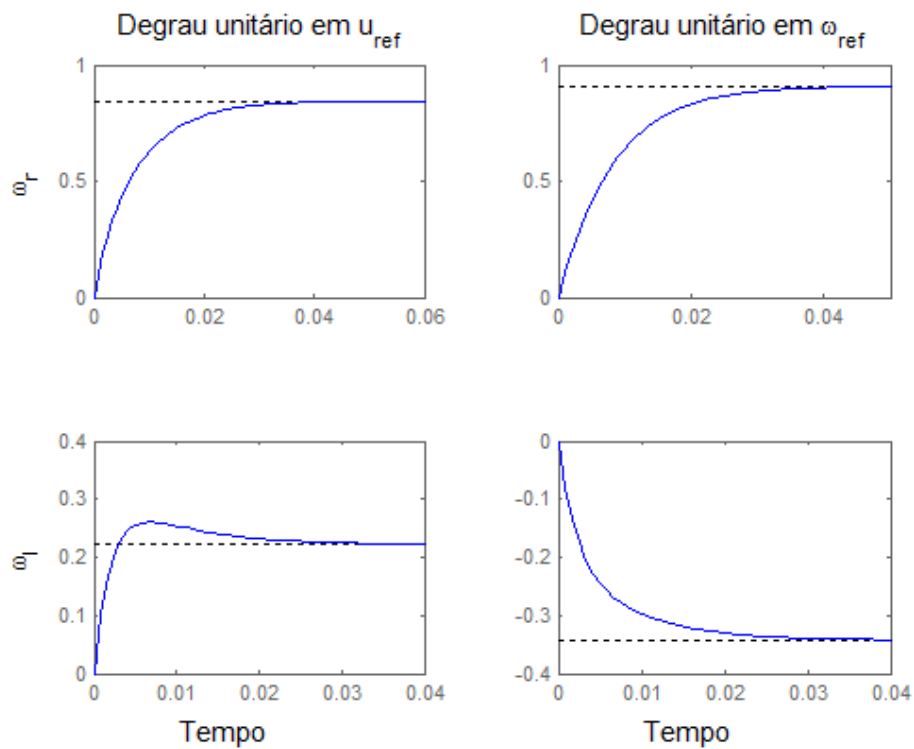
Fonte : Do próprio autor

Figura F.4: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\mu = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ ), sendo a saída ( $\eta = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) multiplicada por uma matriz de ganho  $T = 10I_{2 \times 2}$ , para o quinto vértice do politopo.



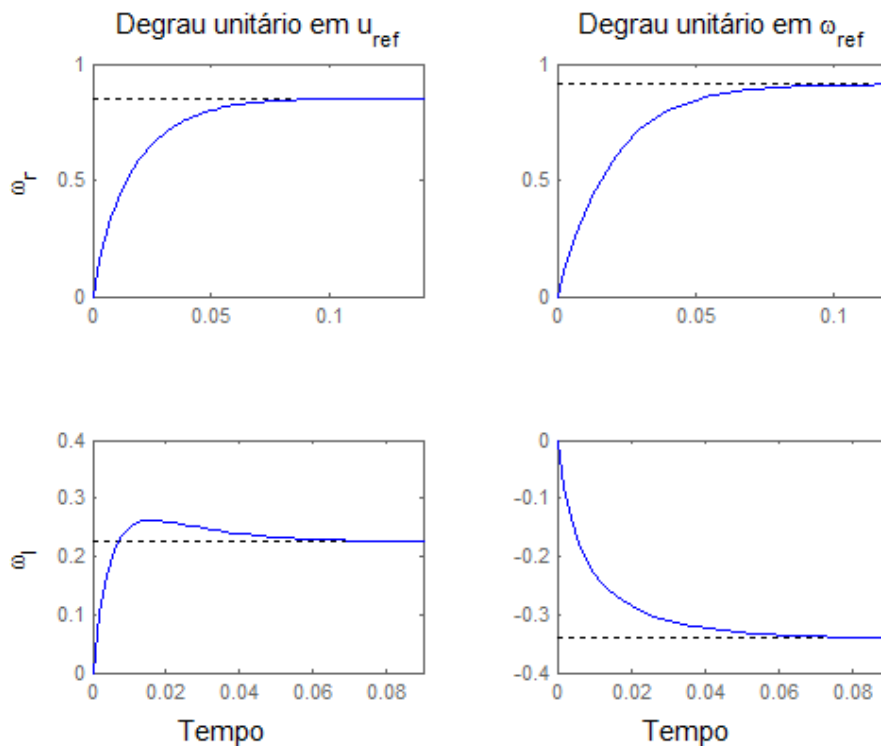
**Fonte :** Do próprio autor

Figura F.5: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\mu = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ ), sendo a saída ( $\eta = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) multiplicada por uma matriz de ganho  $T = 10I_{2 \times 2}$ , para o sexto vértice do politopo.



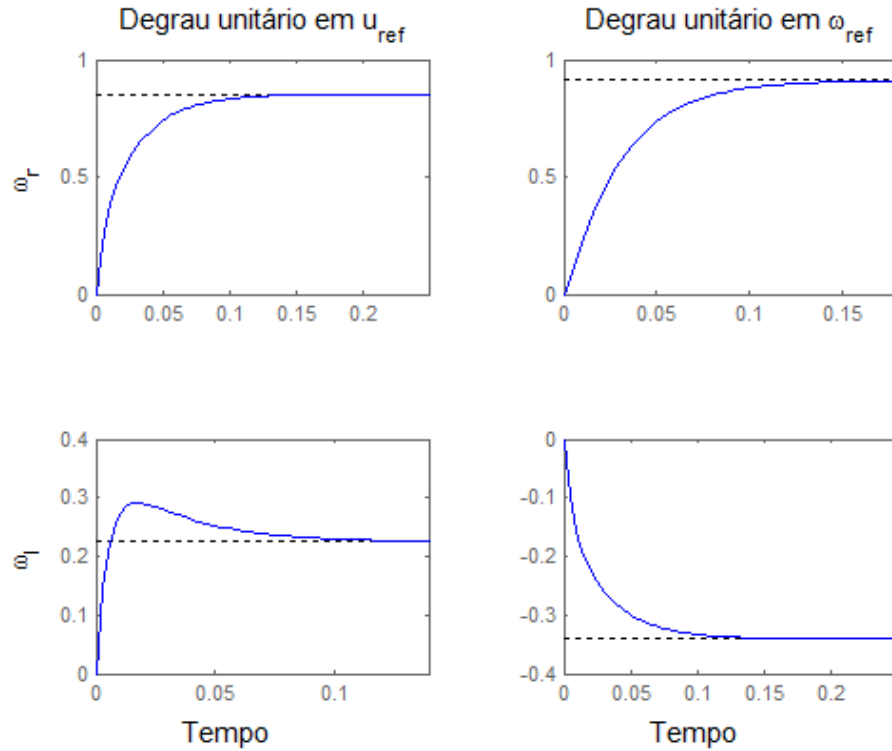
Fonte : Do próprio autor

Figura F.6: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\mu = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ ), sendo a saída ( $\eta = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) multiplicada por uma matriz de ganho  $T = 10I_{2 \times 2}$ , para o sétimo vértice do politopo.



Fonte : Do próprio autor

Figura F.7: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\mu = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ ), sendo a saída ( $\eta = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) multiplicada por uma matriz de ganho  $T = 10I_{2 \times 2}$ , para o oitavo vértice do politopo.



Fonte : Do próprio autor

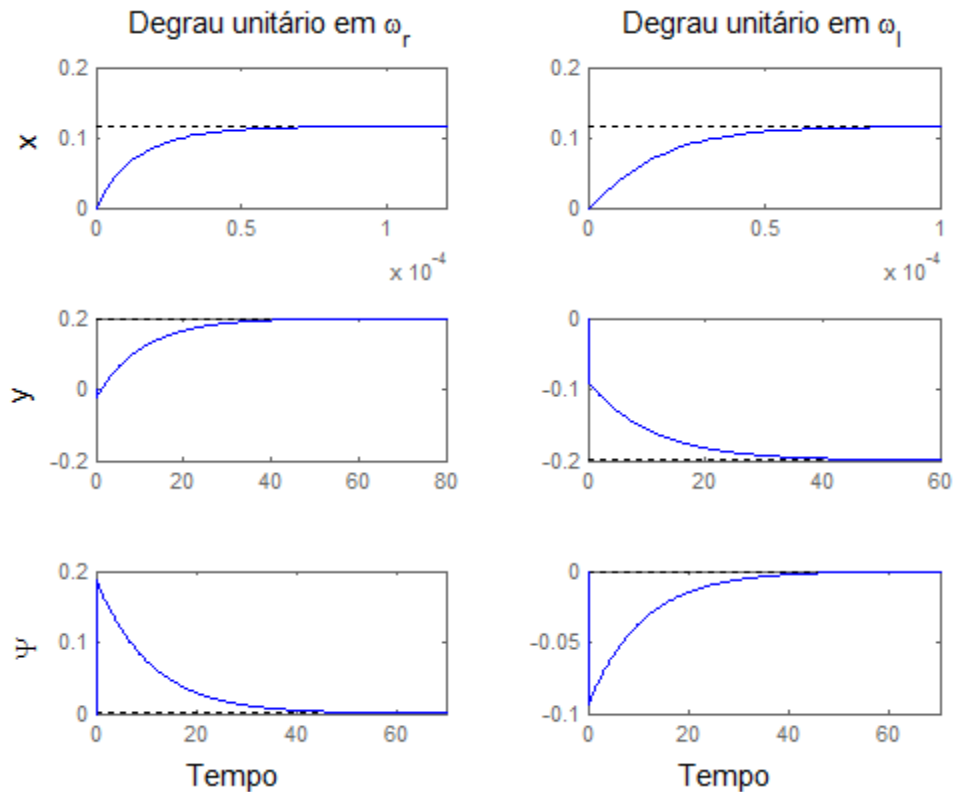
Portanto é possível constatar a performance o sistema através da ilustração gráfica anterior (Figuras F.1-F.7), sendo o sistema ERP com realimentação da saída e taxa de decaimento de 33,3875. O ganho do sistema dinâmico linearizado é 10, o qual condiciona os sinais de saída de num intervalo de  $[-0,4; 1]$ .

## APÊNDICE G

### Gráficos dos Vértices dos Polítopos do Modelo Cinemático da CRM

A seguir encontram-se ilustrados os gráficos referentes aos vértices (6.32)-(6.38) e (6.40)-(6.46) do modelo cinemático para a condição  $(xi)$ , com taxa de decaimento 0,0919. A matriz de saída,  $\vartheta = I\varphi$ , foi multiplicada por um ganho de  $10^5$  para construção das Figuras G.1-G.7. Sendo a entrada ao degrau unitário dado no vetor de entrada  $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$  e a saída dada por  $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ .

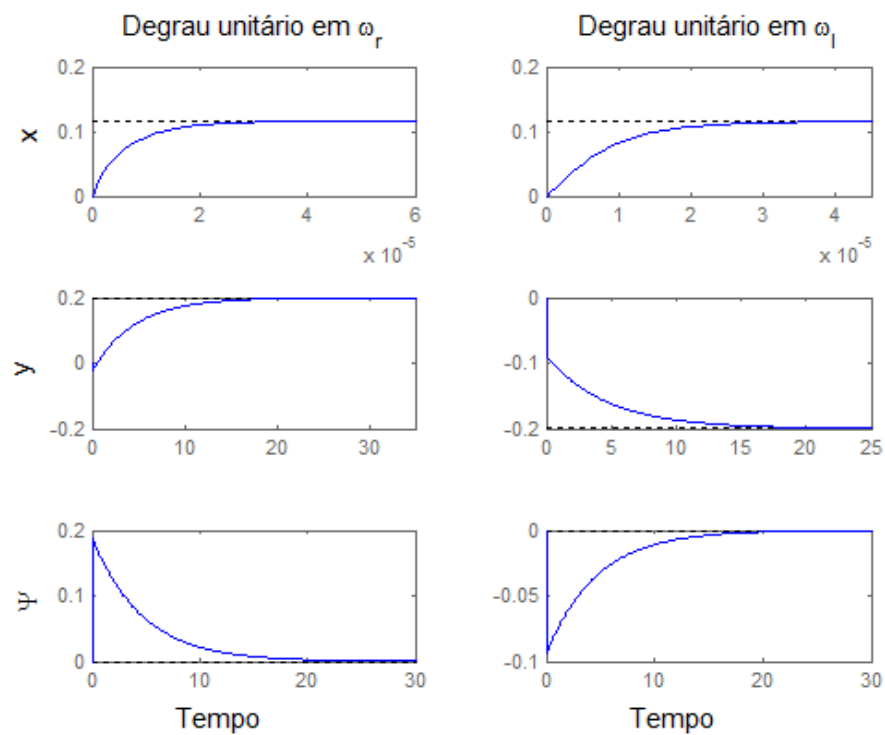
Figura G.1: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do segundo vértice do politopo.



**Fonte :** Do próprio autor

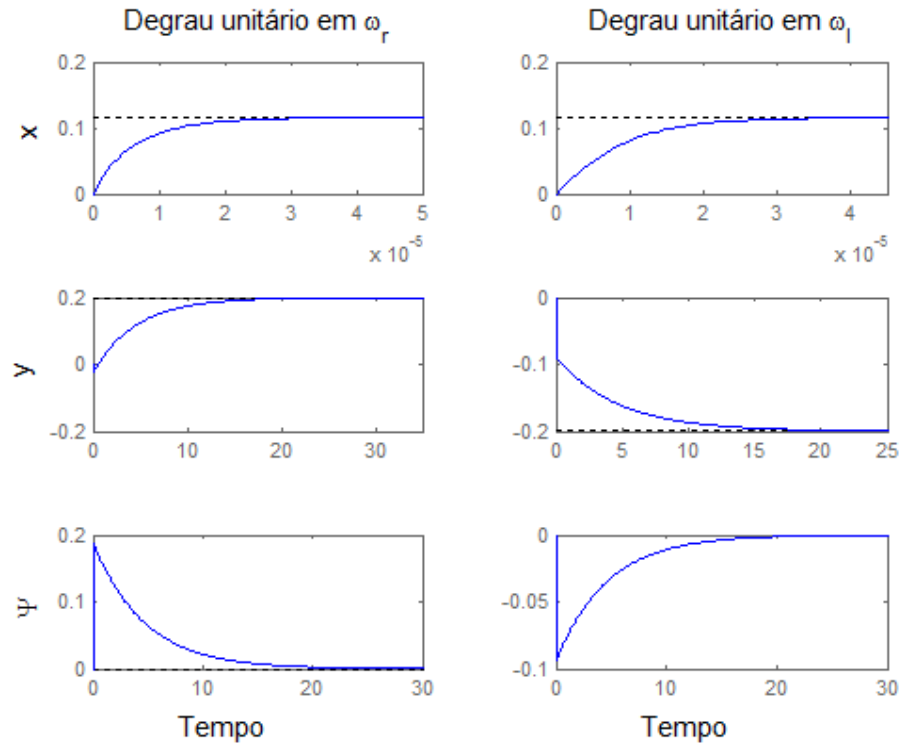


Figura G.2: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do terceiro vértice do politopo.



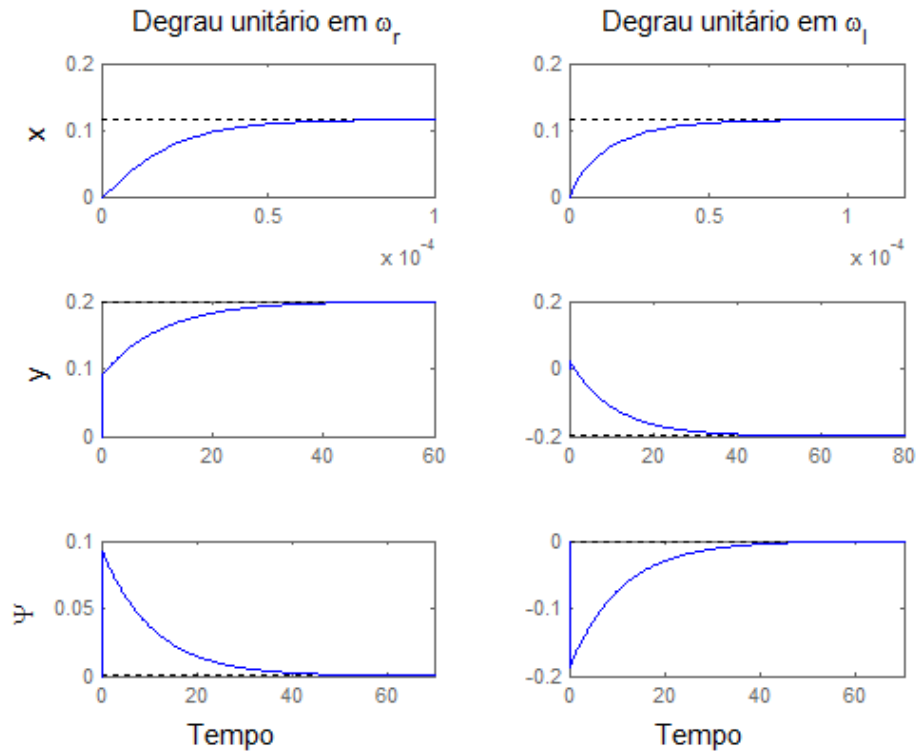
**Fonte :** Do próprio autor

Figura G.3: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do quarto vértice do politopo.



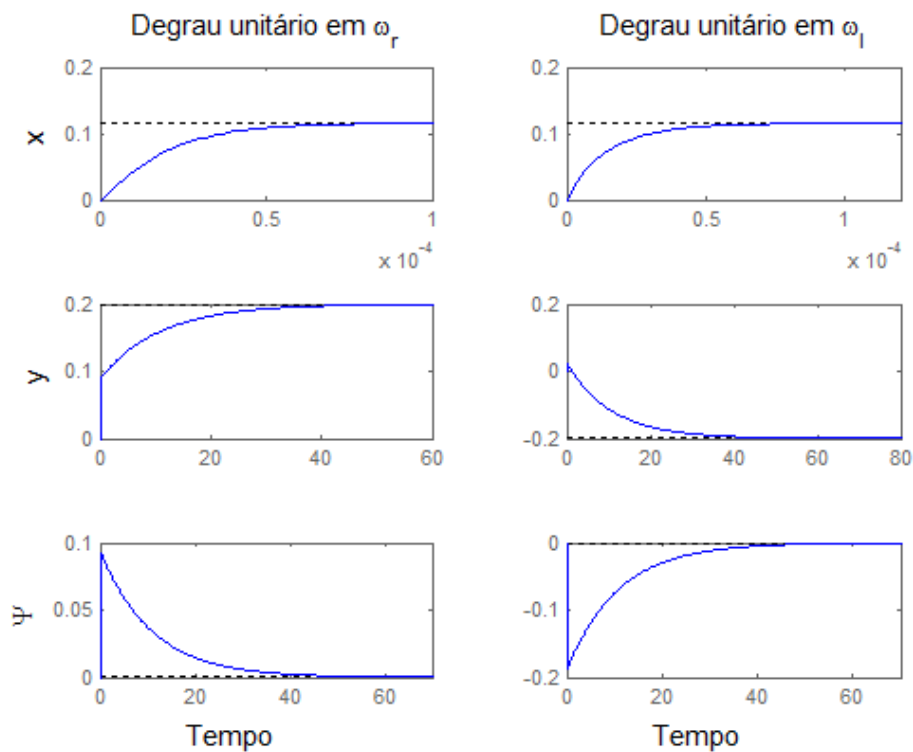
Fonte : Do próprio autor

Figura G.4: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do quinto vértice do politopo.



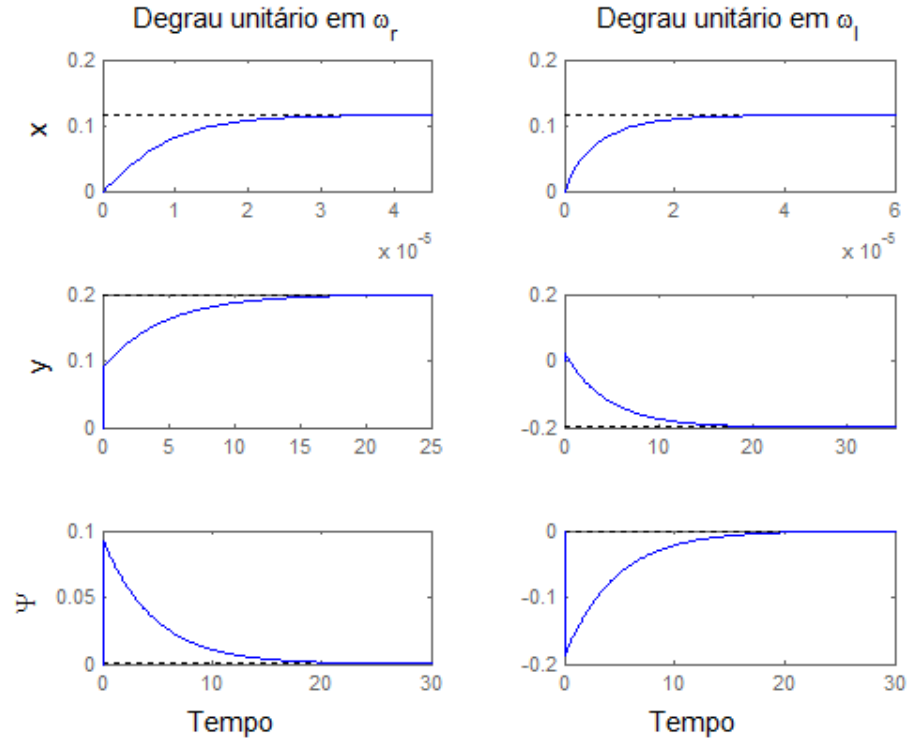
Fonte : Do próprio autor

Figura G.5: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do sexto vértice do politopo.



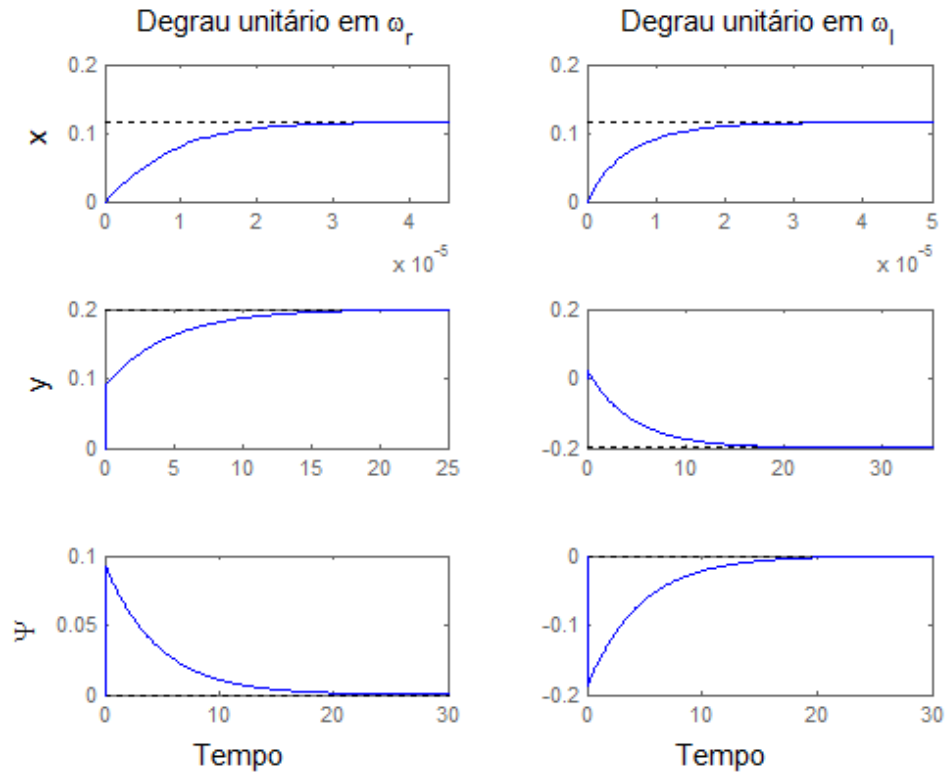
Fonte : Do próprio autor

Figura G.6: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do sétimo vértice do politopo.



Fonte : Do próprio autor

Figura G.7: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do oitavo vértice do politopo.



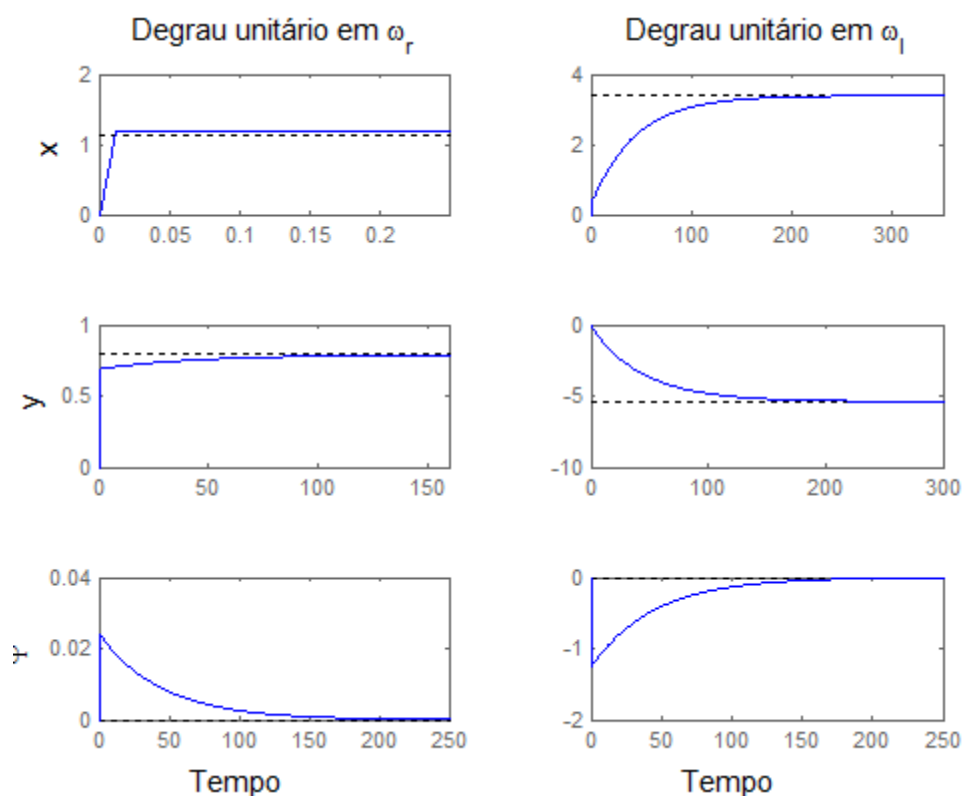
**Fonte :** Do próprio autor

Ao analisar a simulação (Figuras 7.2 e G.1-G.7), obteve-se uma taxa de decaimento 0,0919.

## APÊNDICE H

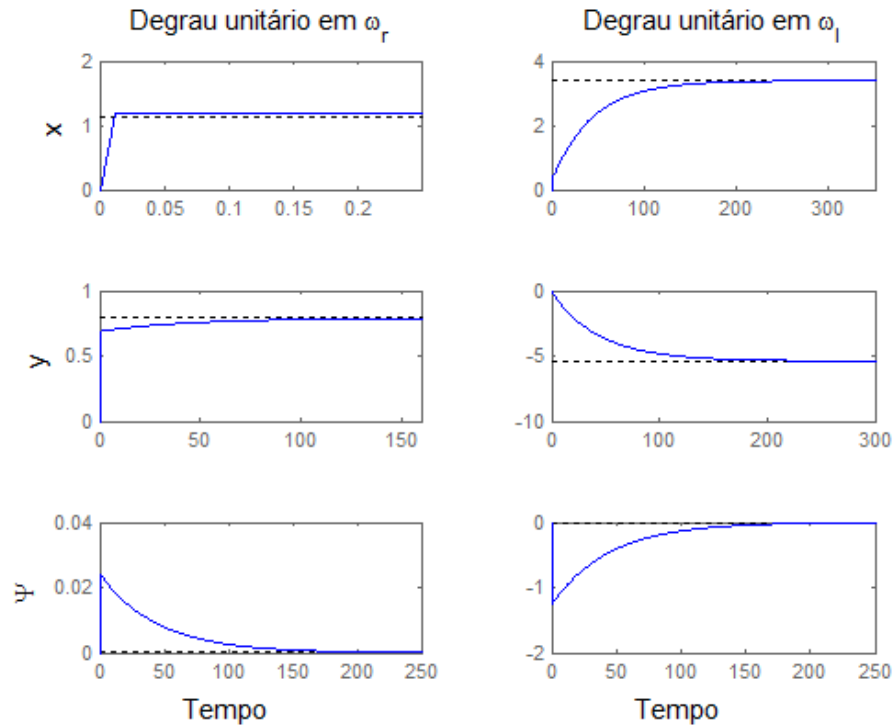
Gráficos dos Vértices dos Polítopos do Modelo Cinemático da CRM: CEV com LMIs

Figura H.1 - Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do primeiro vértice do polítopo.



**Fonte:** Do próprio autor.

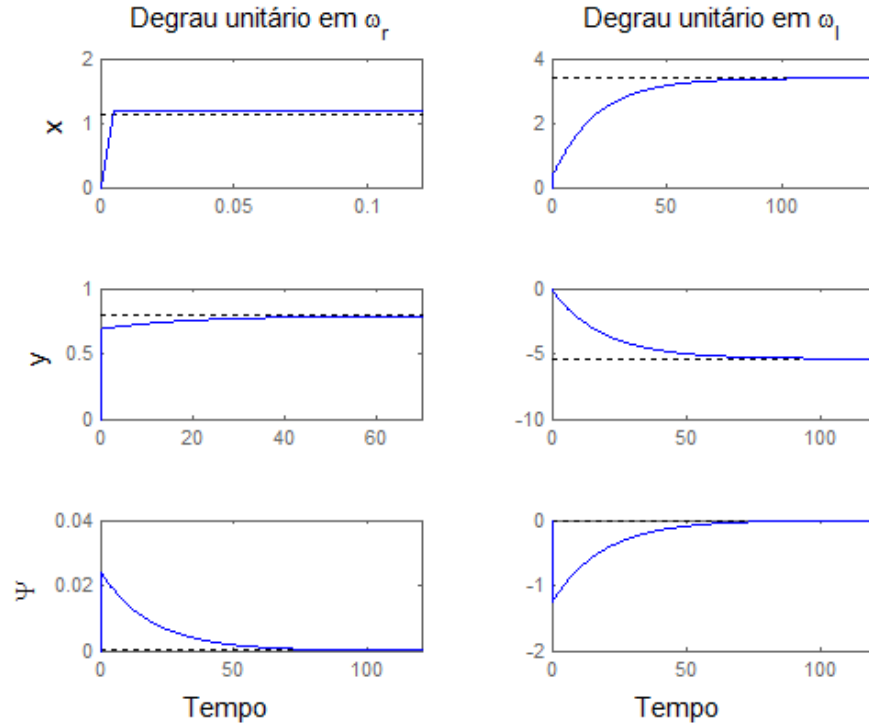
Figura H.2: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do segundo vértice do politopo.



Fonte : Do próprio autor



Figura H.3: Resposta ao degrau unitário na entrada ( $\phi = [\omega_r \ \omega_l]^T$ ) sendo a saída ( $\varphi = [x \ y \ \psi]^T$ ) multiplicada por um ganho de  $10^5$ . Representação do terceiro vértice do politopo.



Portanto o método de projeto de CEV utilizando LMIs, para sistemas com incertezas paramétricas, considerando robustez paramétrica e taxa de decaimento não obteve melhor resultado ao método de projeto baseado em LMIs de sistemas ERP. Uma vez que o método de projeto de CEV utilizou o Teorema 25 obtendo uma taxa de decaimento de 0,021 e o método de projeto de sistemas ERP analisou todas as condições do Teorema 25 obtendo-se uma taxa de decaimento de 0,0919.