

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
PROGRAMA DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

JAIME LAELSON JACOB

**DETECÇÃO MULTIUSUÁRIO  
DS/CDMA BASEADA NA TÉCNICA  
DE PROJEÇÃO DE SINAIS**

Londrina

2006

JAIME LAELSON JACOB

**DETECÇÃO MULTIUSUÁRIO  
DS/CDMA BASEADA NA TÉCNICA  
DE PROJEÇÃO DE SINAIS**

Texto de Dissertação apresentado à Universidade  
Estadual de Londrina como parte dos requisitos para a  
obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Taufik Abrão

Londrina

2006

JAIME LAELSON JACOB

**DETECÇÃO MULTIUSUÁRIO**  
**DS/CDMA BASEADA NA TÉCNICA**  
**DE PROJEÇÃO DE SINAIS**

Texto de Dissertação apresentado à Universidade  
Estadual de Londrina como parte dos requisitos para a  
obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Paul Jean E. Jeszensky

Escola Politécnica da USP

Prof. Dr. Robinson Hoto

Departamento de Matemática UEL

Prof. Dr. Taufik Abrão

Departamento de Eng. Elétrica UEL

**Londrina, 10 Outubro de 2006**

## AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Dr. Taufik Abrão pela dedicação, insistência e colaboração em todas as etapas. A sua participação foi essencial para a conclusão deste trabalho.

A minha família pela paciência, apoio e compreensão.

Aos meus chefes imediatos na empresa, de início Francisco Carlos Vitório e atualmente Lino Luiz Enz, que permitiram minha participação nas aulas nos horários de trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho são analisados detectores multiusuários (MuD) cegos e grupos-cegos (Bld-MuD e SBld-MuD, respectivamente) do ponto de vista do compromisso desempenho versus complexidade; especificamente, são caracterizados os detectores cegos e grupo-cegos baseados na inversão direta de matriz (DMI), no erro médio quadrático mínimo (MMSE) e os SBld-MuD híbridos nas formas I e II. São realizadas simulações Monte Carlo (MCS) visando comprovar os resultados analíticos de desempenho, evidenciando-se a superioridade de desempenho dos SBld-MuD. Foram realizadas análises considerando erros nas estimativas de fase de portadora e nos coeficientes de canal (módulo e fase) tendo em vistas caracterizar comparativamente a degradação de desempenho dos três detectores. A partir da notação *flop*, comparou-se a complexidade computacional resultante para o detector SBld-MuD híbrido na forma II com aproximação polinomial baseada em três formas: traço da matriz de correlação, teorema da similaridade e através dos círculos de Gershgorin. Na presença de erros de estimativas de parâmetros de canal e fase da portadora, resultados MCS indicaram a superioridade dos detectores SBld-MuD Híbrido I e SBld-MuD Híbrido II com aproximação polinomial obtida através da abordagem dos círculos de Gershgorin.

**Palavras-chave:** DS/CDMA, Detecção Multiusuário, Detectores Grupos-cegos e Cegos, Vetores Ortogonais, Subespaço do Sinal, Expansão Polinomial, Círculos de Gershgorin.

## ABSTRACT

In this work blind and group-blind multiuser detectors (Bld-MuD and SBld-MuD, respectively) are analyzed from the point of view of the performance-complexity tradeoff; specifically, the blind and group-blind detectors are characterized based on the direct matrix inversion (DMI), in the minimum mean squared error (MMSE) and hybrid SBld-MuD in the forms I and II. Monte Carlo simulations (MCS) are accomplished seeking to confirm analytical results of performance, being evidenced the superiority of SBld-MuD. Analysis considering errors in the phase carrier estimates and in the channel coefficients (module and phase) estimates is driven seeking to characterize the bit error rate (BER) degradation for the three detectors. Using flop notation, the complexity computational for the three forms of SBld-MuD-II hybrid detector based on polynomial approximation was compared. MCS results indicated the superiority of the SBld-MuD-I detector in the presence of parameters errors estimates and for the SBld-MuD-II detector with polynomial approach based on Gershgorin circles.

**Key-words:** Blind and Group-Blind Detection, Multiuser Detection, DS/CDMA, Orthogonal Vectors, Signal Subspace, Polynomial Expansion, Gershgorin Circles.

# Lista de Figuras

1.1	$BER_1$ para os detectores Convencional, Descorrelacionador e MMSE síncronos; sinais equicorrelacionados ( $\rho_{\text{sinc}} = 0,12$ ) e de mesma energia para os casos: a) $K = 9$ usuários; b) $K = 20$ usuários, obtido de (ABRÃO, 2001). . . . .	25
1.2	Desempenho médio sobre todos os usuários ativos para receptores Convencional, Descorrelacionador e MMSE síncronos com população crescente. Controle perfeito de potência recebida; $E_b/N_0 = 8 \text{ dB}$ e $N = 15$ ; seqüências de Gold e Aleatórias, obtido de (ABRÃO, 2001). . . . .	27
2.1	Modelo genérico em banda base equivalente discreto para um sistema DS/CDMA. a) Transmissor equivalente; b) Canal; c) Receptor. Para detecção multiusuário linear, $\mathbf{T}$ representa a matriz de transformação linear. . . . .	32
2.2	Modelo genérico em banda base equivalente discreto para um sistema DS/CDMA. a) Transmissor equivalente; b) Canal; c) Receptor. Detecção multiusuário com projeção em subespaço. . . . .	36
3.1	Representação de $\langle \mathbf{A} \rangle$ e $\langle \mathbf{H} \rangle$ ortogonais entre si. . . . .	40
3.2	Subespaços $\langle \mathbf{H} \rangle$ e $\langle \mathbf{S} \rangle$ e o complemento ortogonal da matriz concatenada $[\mathbf{HS}]$ representado pelo subespaço $\langle \mathbf{HS} \rangle^\perp$ . . . . .	41
3.3	O plano $\mathbf{P}_\mathbf{S}$ e seu complementar ortogonal $\mathbf{P}_\mathbf{S}^\perp$ . . . . .	42
3.4	O plano $\mathbf{P}_\mathbf{H}$ e seu complementar ortogonal $\mathbf{P}_\mathbf{H}^\perp$ . . . . .	42
5.1	Taxa de erro de bit $\times$ número de amostras $M$ utilizadas na estimativa da matriz de correlação. $K = 11$ , $\tilde{K} = 7$ , $SNR = 10 \text{ dB}$ , $NFR = 0 \text{ dB}$ . . . . .	69
5.2	$\overline{SINR} \times$ número de amostras $M$ do sinal e controle perfeito de potência, $K = 11$ , $\tilde{K} = 7$ , $SNR = 10 \text{ dB}$ . . . . .	70

5.3	$\overline{SINR}$ de saída versus o número total de usuários $K$ para os diferentes MUD lineares. Adotou-se $M = 50$ e $500$ , $SNR = 10$ dB. . . . .	71
5.4	$\overline{SINR}$ de saída para o usuário 1 $\times$ desbalanço de potência dos usuários interferentes $A_2^2, \dots, A_K^2$ . $K = 11$ , $\tilde{K} = 7$ , $SNR = 10$ dB e quantidade de bits $M = 50$ e $500$ . . . . .	72
5.5	BER $\times$ quantidade de usuários desconhecidos $\check{K}$ para os diferentes MUD lineares. $SNR = 12$ dB, $M = 50$ ou $M = 500$ , $\tilde{K} = K - \check{K} = 14, 13, \dots, 1$ . . . . .	72
5.6	$\overline{SINR} \times SNR$ dos detectores cego e grupo-cego para o caso de sinais ortogonais. Sequências de Hadamard, $N = 32$ , $K = 16$ , $\tilde{K} = 12$ e $M = 200$ . . . . .	73
5.7	Curva analítica da $SNR \times \rho$ de acordo com o desempenho relativo dos dois detectores cegos. . . . .	74
5.8	BER $\times$ SNR em canal AWGN com quadro de bits de valor fixo $F = 60.000$ , comprimento da amostra $M = 200$ e $M = 1000$ . . . . .	74
5.9	BER $\times$ SNR em canal AWGN com $F = 60.000$ , $K_c = 7$ e $K_u = 4$ , erros na estimativa da fase da portadora conforme eq. (5.1) e comprimento da amostra: $M = 200$ e $M = 1000$ . . . . .	76
5.10	BER $\times$ SNR em canal AWGN com $F = 60.000$ , $K_c = 7$ e $K_u = 4$ , erros na estimativa da fase da portadora conforme eq. (5.2) e comprimento da amostra: a) $M = 200$ ; b) $M = 1000$ . . . . .	76
5.11	BER $\times$ SNR para o sistema síncrono em canal Rayleigh plano e estimativas perfeitas para coeficiente de canal; $K_c = 7$ e $K_u = 4$ , para o DMI obteve-se a inversa bit-a-bit ( $M = 1$ ); $f_m = 5Hz$ : a) $F = M = 200$ ; b) $F = M = 1000$ . . . . .	77
5.12	BER $\times$ SNR para o sistema síncrono em canal Rayleigh plano com erros nas estimativas do <b>módulo</b> dos coeficientes de canal conforme eq. (5.1); $K_c = 7$ e $K_u = 4$ , para o DMI obteve-se a inversa bit-a-bit ( $M = 1$ ); $f_m = 5Hz$ : a) $F = M = 200$ ; b) $F = M = 1000$ . . . . .	78
5.13	BER $\times$ SNR para o sistema síncrono em canal Rayleigh plano com erros nas estimativas do <b>módulo</b> dos coeficientes de canal conforme eq. (5.2); $K_c = 7$ e $K_u = 4$ , para o DMI obteve-se a inversa bit-a-bit ( $M = 1$ ); $f_m = 5Hz$ : a) $F = M = 200$ ; b) $F = M = 1000$ . . . . .	79



- 5.14 BER  $\times$  SNR para o sistema síncrono em canal Rayleigh plano com erros nas estimativas da **fase** dos coeficientes de canal conforme eq. (5.1);  $K_c = 7$  e  $K_u = 4$ , para o DMI obteve-se a inversa bit a bit (5% e 30%). a)  $F = M = 200$ ; b)  $F = M = 1000$ . 80
- 5.15 BER  $\times$  SNR para o sistema síncrono em canal Rayleigh plano com erros nas estimativas da **fase** dos coeficientes de canal conforme eq. (5.2);  $K_c = 7$  e  $K_u = 4$ , para o DMI obteve-se a inversa bit a bit (30%). a)  $F = M = 200$ ; b)  $F = M = 1000$ . 80
- 6.1 Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbridos I e II em canal AWGN;  $M = 200$ ;  $N = 15$ ; gold 15. (a)  $K_c = 7$ ;  $K_u = 4$ . (b)  $K_c = 10$ ;  $K_u = 5$ . . . . . 93
- 6.2 Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $K_c = 7$ ;  $K_u = 4$ ;  $M = 200$ ;  $N = 15$ . (a)  $f_m = 22Hz$  (b)  $f_m = 400Hz$  . . . . . 94
- 6.3 Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $M = 200$ ;  $N = 15$ ;  $f_m = 22Hz$ . (a)  $K_c = 5$ ;  $K_u = 10$ . (b)  $K_c = 10$ ;  $K_u = 5$ . . . . . 95
- 6.4 Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $K_c = 10$ ;  $K_u = 5$ ;  $f_m = 22Hz$  e número de iterações  $It = 10$ . . . . . 96
- 6.5 Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $K_c = 10$ ;  $K_u = 5$ ; metade dos usuários conhecidos com  $NFR = 10dB$  e metade dos desconhecidos com  $NFR = 6dB$  . . . . . 97
- 6.6 Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $K_c = 10$ ;  $K_u = 5$ ; um usuário conhecido com  $NFR = 20dB$  e um desconhecido com  $NFR = 12dB$  . . . . . 97
- 6.7 Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal AWGN.  $K_c = 7$ ;  $K_u = 4$ ;  $M = 200$ . Com erro na estimativa da fase da portadora de: (a)  $\epsilon_\varphi = 5, 30$  e  $45\%$ ; (b)  $\epsilon_\varphi = 10\%$ . . . . . 98
- 6.8 Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $K_c = 10$ ;  $K_u = 5$ ;  $f_m = 5Hz$ ;  $M = 200$ . Com erro nas estimativas do módulo e da fase de: (a)  $\epsilon_\alpha$  e  $\epsilon_\theta = 0, 5$  e  $30\%$ . (b)  $\epsilon_\alpha$  e  $\epsilon_\theta = 3\%$ . . . . . 99
- 6.9 BER  $\times$  quantidade total de usuários  $K$  para os diferentes MUD lineares. Canal AWGN; SNR = 12 dB;  $K = \tilde{K} + \check{K} = 3, 5, \dots, 15$ . (a)  $M = 200$ ; (b)  $M = 1000$ . 100
- 6.10 BER  $\times$  quantidade total de usuários  $K$  para os diferentes MUD lineares. Canal Rayleigh plano; SNR = 30 dB;  $M = 200$ ;  $K = \tilde{K} + \check{K} = 3, 5, \dots, 15$ . (a)  $f_m = 5Hz$ ; (b)  $f_m = 22Hz$ . . . . . 101

6.11	Comparação da complexidade computacional para os principais detectores e condições de operação do sistema: a) $M = 200$ b) $M = 1000$ . Canal Rayleigh Plano Síncrono; Ganho de processamento $N = [7, 15, 31, 63, 255, 511, 1023]$ e $L \approx 73,3\%$ . . . . .	105
8.1	Projeção Ortogonal . . . . .	133

# Lista de Tabelas

3.1	Cenários da detecção multiusuário . . . . .	49
5.1	Parâmetros de sistema e canal utilizados nas simulações MCS . . . . .	67
6.1	Parâmetros de sistema e canal utilizados nas simulações MCS com aproximação por PE . . . . .	92
6.2	Complexidade Computacional para a decomposição de SVD, (COMON; GOLUB, 1990)	103
6.3	Complexidade Computacional dos Detectores Grupo-Cegos ou Cegos . . . . .	104

## Lista de Abreviaturas e Acrônimos

1G	Sistemas de comunicação celular de primeira geração
2G	Sistemas de comunicação celular de segunda geração
3G	Sistemas de comunicação celular de terceira geração
AMPS	<i>Advanced Mobile Phone System</i> : Sistema de Telefonia Móvel Avançado
AREA	<i>Adaptive Rank Estimation Algorithm</i> : Algoritmo de Estimativa Adaptativa de Posto
AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise</i> : Ruído Branco Gaussiano Aditivo
BER	<i>Bit Error Rate</i> : Taxa de Erro de Bit
BPSK	<i>Binary Phase-Shift-Keying</i> : Chaveamento por Deslocamento de Fase Binária
CCD	<i>Canonical Correlation Decomposition</i> : Decomposição com Correlação Canônica
CDMA	<i>Code Division Multiple Access</i> : Múltiplo Acesso por Divisão de Código
CONV	Convencional
DF	<i>Decision-Feedback</i>
DMI	( <i>Direct-Matrix-Inversion</i> ) Inversão Direta de uma Matriz de Correlação
DS/CDMA	<i>Direct Sequence CDMA</i> : CDMA de Seqüência Direta
DSP	<i>Digital Signal Processor</i> : Processador Digital de Sinais
EVD	<i>Eigenvalues Decomposition</i> : Decomposição em Auto-valores
FASIR	<i>Fast Subspace Iteration with Ritz Acceleration</i> : Iteração Rápida em Subespaço com Aceleração Ritz
FH/CDMA	<i>Frequency Hopping CDMA</i> : CDMA com Salto em Frequência
FSK	<i>Frequency-Shift-Keying</i> : Chaveamento por Deslocamento de Frequência
GSM	<i>Global System for Mobile Communication</i> : Sistema Global para Comunicação Móvel
IC	<i>Interference Cancelation</i> : Cancelamento de Interferência
ILSP	<i>Iterative Least Squares with Projection</i> : Iteração Mínima Quadrática com Projeção
IS-95	<i>Interim Standard-95</i> : Padrão Intermediário-95

ISI	<i>Intersymbol Interference</i> : Interferência Intersimbólica
MAI	<i>Multiple Access Interference</i> : Interferência por Múltiplo Acesso
MCS	<i>Monte Carlo Simulation</i> : Simulação Monte Carlo
MLSE	<i>Maximum Likelihood Sequence Estimator</i> : Estimador de Sequência de Máxima Verossimilhança
MMSE	<i>Minimum Mean-square Error</i> : Mínimo Erro Médio Quadrático
MSE	<i>Mean-Square Error</i> : Erro Médio Quadrático
MUD	<i>Multiuser Detection</i> : Detecção Multiusuário
NA-CSVD	<i>Noise Average Cross-Terms Singular Value Decomposition</i> : Decomposição em Valores Singulares de Termos Cruzados de Ruído Médio
NFR	<i>Near-Far Ratio</i>
NMT	<i>Nordic Mobile Telephone</i> : Telefone Móvel Nórdico
pdf	<i>Probability Density Function</i> : Função Densidade de Probabilidade
PE	<i>Polynomial Expansion</i> : Expansão Polinomial
PE1	expansão polinomial utilizando a aproximação do $\lambda_{\max}$ através da operação $tr(\cdot)$
PE2	expansão polinomial utilizando a aproximação do $\lambda_{\max}$ via o teorema da similaridade
PEG	expansão polinomial utilizando a aproximação de $\alpha$ via o círculo de gershgorin
PIC	<i>Parallel Interference Cancellers</i> : Cancelamento de Interferência Paralelo
PR	<i>Projection Receiver</i> : Receptor com Projeção
PSK	<i>Phase Shift Keying</i> : Chaveamento por Deslocamento de Fase
QoS	<i>Quality of Service</i> : Qualidade de Serviço
QPSK	<i>Quaternary Phase Shift Keying</i> : Chaveamento por Deslocamento de Fase Quaternário
SIC	<i>Successive Interference Cancellers</i> : Cancelamento de Interferência Sucessivo
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i> : Potência do Sinal em relação à Potência de Ruído
SINR	<i>Signal-to-Interference-Plus-Noise Ratio</i> : Relação entre Sinal e Interferente mais Ruído
SS	<i>Spread Spectrum</i> : Espalhamento Espectral
STAR	<i>Subspace-Tracking Array-Receiver</i> : Arranjo do Receptor para Captura em Subespaço

SVD	<i>Singular Value Decomposition</i> : Decomposição em Valores Singulares
TAC	<i>Total Access Communication System</i> : Sistema de Comunicação com Total Acesso
TDMA	<i>Time Division Multiple Access</i> : Múltiplo Acesso por Divisão do Tempo
ZF	<i>Zero-Forcing</i>

## Lista de Símbolos

$\alpha$	fator de normalização da expansão polinomial
$\alpha_k[i]$	módulo do coeficiente de desvanecimento do canal Rayleigh do $k$ -ésimo usuário e do $i$ -ésimo bit
$\theta_k$	fase do coeficiente de desvanecimento do canal do $k$ -ésimo usuário
$\lambda_n$	autovalores
$\lambda_{\max}$	autovalor máximo
$\lambda_{\min}$	autovalor mínimo
$\Lambda$	matriz diagonal de autovalores resultante da decomposição de uma determinada matriz
$\Lambda_s$	matriz diagonal com $K$ autovalores da resultante da decomposição de uma determinada matriz
$\Lambda_n$	matriz diagonal com $N - K$ autovalores da resultante da decomposição de uma determinada matriz
$\rho_{pq}(k)$	função de correlação cruzada discreta normalizada entre as seqüências $p$ e $q$
$\sigma^2$	potência do ruído branco
$\psi$	pulso retangular de amplitude unitária
$\mathbf{A}$	matriz diagonal das amplitudes dos sinais dos usuários conhecidos
$\tilde{\mathbf{A}}$	matriz diagonal das amplitudes dos sinais dos usuários desconhecidos
$A_k$	amplitude do sinal do $k$ -ésimo usuário conhecido
$\tilde{A}_k$	amplitude do sinal do $k$ -ésimo usuário desconhecido
$b_k[i]$	bits de dados do $k$ -ésimo usuário do $k$ -ésimo usuário e do $i$ -ésimo bit
$\hat{b}_k[i]$	bit de dados estimado do $k$ -ésimo usuário e do $i$ -ésimo bit
$c_k[i]$	seqüência de espalhamento do $k$ -ésimo usuário e do $i$ -ésimo bit
$\mathbf{C}_r$	matriz de autocorrelação do sinal recebido
$\hat{\mathbf{C}}_r$	matriz de autocorrelação estimada do sinal recebido
$\hat{\mathbf{d}}$	estimativa dos símbolos dos dados
$\tilde{\mathbf{d}}_1$	detector descorrelacionador linear
$D$	dimensão do sinal recebido
$\mathbf{E}$	matriz de projeções oblíquas

$F$	comprimento do frame (número de bits)
$\mathbf{G}_c$	equação do detector MuD Grupo-cego forma II a ser invertida utilizando a expansão polinomial
$G_k[i]$	coeficiente de desvanecimento do canal Rayleigh do $k$ -ésimo usuário e do $i$ -ésimo bit
$\mathbf{H}$	matriz diagonal ganho de canal
$\mathbf{I}$	matriz identidade
$\mathbf{I}_N$	matriz identidade de ordem $N \times N$
$K$	número total de usuários
$\tilde{K}$	número de usuários conhecidos
$\check{K}$	número de usuários desconhecidos
$\mathbf{L}_{\text{dec}}$	matriz inversa do detector descorrelacionador
$\mathbf{L}_{\text{gc}}$	equação aproximação polinomial da inversa do detector grupo-cego forma II
$\mathbf{L}_{\text{mmse}}$	matriz inversa do detector MMSE
$\mathbf{L}_{\text{pe}}$	equação aproximação polinomial da inversa de uma determinada matriz
$M$	número de amostras
$m$	número de bits por símbolo
$\tilde{\mathbf{m}}_1$	detector MMSE linear
$n$	densidade espectral de potência do ruído branco
$N$	ganho de processamento em um sistema DS/CDMA
$N_0$	densidade espectral unilateral do ruído branco
$N_{\text{Iter}}$	número de iterações da expansão polinomial
$\mathbf{P}$	matriz de projeções ortogonais
$\bar{\mathbf{P}}$	matriz complementar da projeção ortogonal dos usuários conhecidos
$\mathbf{P}_X$	matriz de projeções ortogonais do vetor $X$
$\mathbf{r}[i]$	vetor sinal recebido DS/CDMA do $i$ -ésimo bit
$R$	taxa de bit de dados
$\mathbf{R}$	matriz de correlação normalizada da seqüência de espalhamento
$\tilde{s}_k$	seqüência de espalhamento do $k$ -ésimo usuário conhecido
$\check{s}_k$	seqüência de espalhamento do $k$ -ésimo usuário desconhecido
$\mathbf{S}$	matriz da seqüência de espalhamento dos usuários conhecidos e desconhecidos



$\tilde{\mathbf{S}}$	matriz da seqüência de espalhamento dos usuários conhecidos
$\check{\mathbf{S}}$	matriz da seqüência de espalhamento dos usuários desconhecidos
$\mathbf{t}_k$	é a $k$ -ésima linha da matriz de transformação linear
$T$	período de bit ou símbolo de informação
$\mathbf{T}$	matriz de transformação linear na recepção
$T_c$	período de chip da seqüência de espalhamento
$\mathbf{U}$	matriz de autovetores resultante da decomposição de uma determinada matriz
$\mathbf{U}_s$	matriz com $K$ autovetores resultante da decomposição de uma determinada matriz
$\mathbf{U}_n$	matriz com $N - K$ autovetores resultante da decomposição de uma determinada matriz
$\mathbf{u}_n$	autovetores
$\mathbf{v}$	vetor ruído colorido
$\mathbf{w}_k$	matriz do detector linear com projeção em subespaço do $k$ -ésimo usuário
$W$	largura de banda disponível do sinal
$\mathbf{W}$	matriz do detector linear com projeção em subespaço dos usuários de interesse
$x[i]$	sinal a ser transmitido em banda base do $i$ -ésimo bit
$y[i]$	sinal de saída do filtro casado na recepção do $i$ -ésimo bit
$z$	vetor do bit ser detectado
$z_k$	bit a ser detectado do $k$ -ésimo usuário
$\langle \cdot \rangle$	subespaço de um vetor
$(\cdot)^H$	hermitiano de uma matriz, ou seja, transposto complexo conjugado
$(\cdot)^\perp$	complemento ortogonal de uma matriz
$(\cdot)^*$	complexo conjugado
$(\cdot)^T$	transposto de uma matriz
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	esperança de uma variável aleatória
$\mathcal{O}(\cdot)$	ordem de complexidade computacional
$Re[\cdot]$	parte real de um número
$\text{sgn}(\cdot)$	sinal de um número real
$tr(\cdot)$	traço de uma matriz, ou seja, a soma dos valores da diagonal principal de uma matriz
$var[\cdot]$	variância de $[\cdot]$

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>21</b>
1.1	Decomposição de Sinais em Subespaços Vetoriais . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Modelos de Canal e Sistema DS/CDMA com Detecção Multiusuário</b>	<b>31</b>
2.1	Motivação . . . . .	31
2.2	Modelos de Sistema com Detecção MuD . . . . .	32
2.2.1	Detecção Convencional <i>versus</i> MuD Lineares Em Canais AWGN . . . . .	33
2.2.2	Detecção Convencional <i>versus</i> MuD Lineares Canais Rayleigh Plano . . . . .	36
2.2.3	Estrutura da Detecção por Aproximação em Subespaço . . . . .	38
<b>3</b>	<b>A Técnica de Projeção em Subespaços</b>	<b>39</b>
3.1	Decomposição de Sinais por Projeção Ortogonal e Oblíqua . . . . .	39
3.2	Auto-Decomposição de Sinais e Decomposição em Valores Singulares . . . . .	44
3.3	Detecção MuD por Projeção de Subespaços: Revisão da Literatura . . . . .	45
3.4	Técnica de Projeção em Subespaços Aplicada ao Problema da Detecção MuD Grupo-Cego e Cego . . . . .	48
3.5	Modelo do Sistema com Projeção em Subespaços . . . . .	50
3.5.1	Detectores Descorrelacionadores Grupo-Cegos . . . . .	50
3.5.2	Detectores Grupo-Cegos Híbridos . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Desempenho dos Detectores Multiusuário Grupo-Cegos e Cegos</b>	<b>53</b>
4.1	Forma Geral para o Desempenho Analítico de Detectores Lineares Adaptativos Cegos ou Grupo-Cegos . . . . .	54
4.2	Teorema do Limite Assintótico para Detecção Cega e Grupo-Cega . . . . .	57
4.2.1	Detectores Cego MMSE Linear . . . . .	57
4.2.2	Detectores Grupo-Cego Lineares . . . . .	58

<i>SUMÁRIO</i>	19
4.2.3 Resultados para os SINRs de Saída Assintóticos dos Detectores Cegos . . .	60
4.2.4 Resultados para os SINRs de Saída Assintóticos dos Detectores Grupo-Cegos	62
4.2.5 Resultados para Sinais Ortogonais e Sinais Equicorrelacionados em Detectores Grupo-Cegos e Cegos . . . . .	64
<b>5 Resultados Numéricos</b>	<b>67</b>
5.1 Sistemas em Canais AWGN Síncronos . . . . .	69
5.2 Sistemas em Canais AWGN com Erros nas Estimativas da Fase da Portadora . . .	75
5.3 Sistemas em Canais com Desvanecimento Plano . . . . .	75
5.4 Sistemas em Canais com Desvanecimento Plano e Erros nas Estimativas . . . . .	77
<b>6 Expansão Polinomial</b>	<b>81</b>
6.1 Introdução . . . . .	82
6.2 Aproximação Polinomial para MuD Lineares . . . . .	83
6.3 Realizações do Detector PE com Baixa Complexidade . . . . .	84
6.4 Convergência do Detector PE . . . . .	84
6.4.1 Condição de Convergência para o Detector PE . . . . .	84
6.4.2 Estimativa do $\lambda_{\max}$ via $\text{traço}(\mathbf{R})$ . . . . .	85
6.4.3 Estimativa do $\lambda_{\max}$ via Teorema da Similaridade . . . . .	86
6.4.4 Velocidade de Convergência do Detector PE . . . . .	87
6.4.5 Alta Velocidade de Convergência do Detector PE . . . . .	87
6.5 Estimativa dos Autovalores . . . . .	88
6.5.1 Teorema do Círculo Gershgorin . . . . .	88
6.5.2 Estimativa dos Autovalores dos Detectores PE . . . . .	89
6.6 Detectores Lineares Grupo-Cego com Expansão Polinomial . . . . .	90
6.6.1 Detector Grupo-Cego MuD-PE1 . . . . .	91
6.6.2 Detector Grupo-Cego MuD-PE2 . . . . .	92
6.6.3 Detector Grupo-Cego MuD-PEG . . . . .	92
6.7 Resultados de Simulação MCS . . . . .	92
6.7.1 PE em Canal AWGN . . . . .	93
6.7.2 PE em Canal com Desvanecimento Rayleigh Plano . . . . .	93
6.7.3 Desempenho com Efeito <i>Near-Far</i> . . . . .	96

6.7.4	Desempenho com Erro nas Estimativas de Fase da Portadora – Canal AWGN	98
6.7.5	Desempenho com Erro nas Estimativas dos Coeficientes de Canal – Rayleigh Plano . . . . .	99
6.7.6	Desempenho em Sistema com Carregamento Variável – Canal AWGN . . .	99
6.7.7	Desempenho em Sistema com Carregamento Variável – Canal Rayleigh Plano	101
6.8	Análise de Complexidade Computacional . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>106</b>
<b>8</b>	<b>Apêndices</b>	<b>114</b>
8.1	APÊNDICE A - Teorema do Limite Central . . . . .	114
8.2	APÊNDICE B - Conceitos de Algebra Linear (MEYER, 2000) . . . . .	116

# Capítulo 1

## Introdução

Os primeiros sistemas celulares, ou sistemas de primeira geração (1G), surgiram no mundo das telecomunicações na década de 80 do século passado. Estes sistemas utilizavam tecnologia analógica de acesso múltiplo por divisão de frequência (FDMA - *Frequency Division Multiple Access*) para prover canais de voz, tais como: (AMPS - *Advanced Mobile Phone System*), (NMT - *Nordic Mobile Telephone*) e (TAC - *Total Access Communication System*). Estes sistemas eram bastante limitados, principalmente devido a pouca cobertura, baixa capacidade espectral, baixa qualidade de voz, pouca imunidade às interferências e ao baixo sigilo nas conversações. Na segunda metade da década de 80, com o objetivo de ter maiores taxas de transmissão, maior sigilo e maior robustez à interferência, foram desenvolvidos os sistemas de segunda geração (2G) utilizando tecnologia digital. Estes sistemas aumentaram cerca de 10 vezes a capacidade espectral, comparado aos sistemas 1G. O primeiro sistema 2G utilizava a técnica de acesso múltiplo por divisão do tempo (TDMA - *Time Division Multiple Access*), sendo adotado em 1990 no sistema comercial europeu GSM (*Global System for Mobile Communication*). Em 1991 adota-se no sistema americano USDC (*United States Digital Cellular System*) o padrão IS-54 (*Interim Standard-54*). Em meados de 1990, a técnica de acesso múltiplo por divisão de códigos (CDMA - *Code Division Multiple Access*) surgiu como um novo princípio de sistemas de 2G, sendo adotado no padrão IS-95 (*Interim Standard-95*).

O termo 2,5G, muito comentado atualmente, faz referência aos sistemas com taxas e serviços adicionais àqueles oferecidos pelos sistemas 2G, porém ainda não caracterizados como 3G. Hoje, a indústria está caminhando para sistemas de maior capacidade que suportam altas taxas de transmissão e aplicações multimídia. Assim, surgindo nesta primeira década do século XXI, estão os sistemas de terceira geração (3G), todos baseados na técnica de multiplexação CDMA.

Esse trabalho está focado em técnicas avançadas de detecção da informação aplicáveis a sistemas

DS/CDMA, utilizam a técnica de espalhamento espectral (SS - *Spread Spectrum*), onde o sinal transmitido ocupa uma banda muito maior que a banda da informação e cujo espalhamento é obtido por meio de um código independente da informação. A demodulação é acompanhada pela correlação do sinal recebido, ou seja, o produto no domínio do tempo, com uma réplica sincronizada do código de espalhamento usado na transmissão.

Decorrente da codificação e do aumento da banda de transmissão, sinais SS possuem três propriedades que os diferem de sinais de banda estreita (VITERBI, 1995) e (PRASAD; HARA, 1997):

- **Privacidade:** O sinal transmitido somente pode ser desespalhado e os dados recuperados se o código for conhecido pelo receptor.
- **Alta rejeição à interferência de banda estreita:** Desespalhando o sinal no receptor na presença de interferência de banda estreita, seja intencional (*jamming*) ou não, a informação útil voltará a ocupar uma banda estreita, enquanto que a componente interferente ficará espalhada sobre toda a banda disponível  $W$ . Desta forma, a informação útil é recuperada sem ser consideravelmente degradada pela componente interferente.
- **Resistência ao canal multipercurso:** A técnica SS permite que multipercursos com atrasos relativos maiores que  $1/W$  sejam discerníveis no receptor, o que possibilita a utilização da técnica de diversidade de percurso para combinar convenientemente as energias dos percursos no receptor (receptor *Rake*).

Admitindo que o período de bit do sinal a ser transmitido seja  $T$  e o período de bit da seqüência de espalhamento conhecido na literatura como período de *chip*,  $T_c$ , o ganho de processamento é dado por:

$$N = \frac{T}{T_c} \quad (1.1)$$

Quando o comprimento da seqüência de espalhamento coincidir com o período de bit de informação, o sistema DS/CDMA denomina-se de código curto; caso contrário, isto é quando o comprimento de seqüência for maior do que período de bit de informação, o sistema é denominado DS/CDMA de código longo.

Os sistemas CDMA podem ser classificados conforme o tipo de modulação da seqüência de códigos, constituindo os esquemas: (DS/CDMA - *Direct Sequence CDMA*) e (FH/CDMA - *Frequency Hopping CDMA*). O espalhamento de seqüência direta (DS), similar a uma modulação em fase PSK, é obtido pelo produto de sinais no domínio do tempo ou pela convolução no domínio

da frequência. Já o espalhamento por salto em frequência (FH), similar a uma modulação em frequência binária FSK, é uma forma de espalhamento espectral em que o sinal modulado salta aleatoriamente de uma frequência para outra dentro de uma banda relativamente larga. Existem duas caracterizações básicas, independentes da tecnologia, de saltos em frequência: salto em frequência lento em que um ou mais símbolos, são transmitidos a cada salto de frequência; salto de frequência rápida em que o salto do sinal modulado ocorre diversas vezes durante a transmissão de um único símbolo (HAYKIN, 2004). Neste trabalho foi usado a técnica de seqüência direta DS com modulação digital binária por chaveamento de fase (BPSK - *Binary Phase-Shift-Keying*).

As seqüências de espalhamento empregadas neste trabalho foram: seqüências (PN - *pseudo-noise*), seqüências de Gold e seqüências ortogonais de Walsh-Hadamard. As seqüências PN possuem qualquer comprimento e são geradas de forma aleatória, assumem, para modulação BPSK, valores bipolares equiprováveis, ou seja, iguais a  $-1$  e  $+1$ . As seqüências Gold possuem comprimento  $N = 2^m - 1$ , um conjunto relativamente grande de  $N + 2$  seqüências, resultando em valores de auto-correlação e correlação cruzada limitadas e bem conhecidas. As seqüências ortogonais de Walsh-Hadamard possuem como característica a ortogonalidade na condição de fase preferencial, correlação cruzada igual a zero ( $\rho_{i,j} = 0 \quad \forall i, j$ ), facilidade de geração, comprimento e número das seqüências do conjunto Walsh-Hadamard idênticos e iguais ao número de linhas ou colunas da matriz:  $N = 2^m$ , geração recursiva, sendo que cada linha da matriz de Walsh-Hadamard define um código de espalhamento ortogonal Walsh-Hadamard (HAYKIN, 2004).

Considere a seqüência de espalhamento representado por  $c(i) = \{\pm 1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  (bipolarizada). A função de correlação cruzada discreta normalizada das seqüências do conjunto é dada, por definição:

$$\rho_{pq}(k) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} c_p(i)c_q(i+k) \quad (1.2)$$

onde  $k$  é o atraso discreto entre as seqüências  $p$  e  $q$ .

Quando  $p = q$ , ou seja, seqüência do mesmo usuário, a equação (1.2) resulta na função de autocorrelação. A condição para que os vetores  $c_p$  e  $c_q$  sejam ortogonais entre si é que a correlação cruzada seja igual a zero,  $\rho_{pq} = 0$ . Adicionalmente, define-se sinais DS/CDMA equicorrelacionados quando  $\rho_{pq} = \rho$ ,  $\forall p, q$ , referência (VERDU, 1998).

Em sistemas DS/CDMA há dois modos de se obter a detecção da informação, a convencional (CONV) e a multiusuário (MUD). O detector convencional segue a estratégia do detector usuário simples: cada ramo detecta um único usuário sem levar em consideração a existência

dos demais usuários. Não há compartilhamento das informações no processamento dos demais usuários ativos que aparecem naturalmente como interferentes em um sistema de múltiplo acesso CDMA. O sucesso da convencional depende das propriedades de correlação cruzada dos códigos de espalhamento envolvidos e de um rigoroso controle de potência.

Propostas de método de detecção multiusuário têm sido feitas nas últimas duas décadas, desde o trabalho seminal de S. Verdú (VERDU, 1984), (VERDU, 1986a) e (VERDU, 1986b), e atualizado em (VERDU, 1998). Vários métodos eficientes têm sido propostos considerando os mais variados cenários de comunicações, combinando diversos tipos de canal, transmissão e recepção. Na detecção multiusuário (ou conjunta) (ABRÃO, 2001), informações dos usuários ativos no sistema são utilizadas conjuntamente a fim de melhor detectar usuários de interesse, aumentando o desempenho e/ou a capacidade do sistema de comunicação móvel celular.

Em sistemas DS/CDMA, a limitação de desempenho é resultado principalmente da interferência de múltiplo acesso MAI (*Multiple Access Interference*). Esta interferência é resultado dos *offsets* temporais aleatórios entre os sinais dos usuários ativos, tornando impossível o projeto de formas de onda de códigos de espalhamento completamente ortogonais. A MAI torna-se substancial quando o número de usuários cresce e/ou quando as potências dos usuários interferentes crescem. Um conjunto de seqüências com boas propriedades de correlação torna o sistema mais imune à MAI, o que possibilita um aumento no número de usuários ativos. Assim, enquanto a detecção convencional (*single user*) considera todos os usuários interferentes como ruído, a detecção multiusuário constitui uma melhor estratégia justamente por utilizar as informações dos demais usuários interferentes no processo de detecção do usuário de interesse, possibilitando “desacoplar” ou cancelar os sinais do sinal de interesse.

A capacidade de uso dos sistemas CDMA sem fio está limitada pela interferência de múltiplo acesso (MA) gerada pelas transmissões de outros usuários móveis, e por estações-base do usuário de interesse (interferência intercelular e intracelular) dentro e fora da célula. Nos enlaces reversos, a interferência é proveniente principalmente de outros transmissores móveis. O controle de potência do sistema tenta manter a potência recebida em valores que equilibram a interferência causada pelas estações móveis; entretanto, desvanecimento e mobilidade também contribuem para produzir interferência em excesso em muitos casos. As estações móveis com diferentes taxas de transmissão são suportadas dentro de uma mesma célula; com isso, as altas taxas de transmissão das unidades móveis causam fortes interferências nas unidades móveis com baixa taxas de trans-



missão. No enlace direto, transmissões da estação base de outras células (intercelulares), assim como os interferentes fortes da mesma base para outras estações móveis, podem resultar em fortes interferências para o sinal desejado. O controle de potência no enlace direto pode ser impreciso ou inexistente. Em todos estes casos, tem-se o problema denominado de perto-longe (*near-far*), causando redução na qualidade de recepção e detecção ou na capacidade do sistema como um todo. Com isso, para a mesma qualidade de transmissão, QoS (*Quality of Service*), o número de chamadas suportadas dentro da célula pode ser aumentada e a utilização espectral otimizada, caso o sistema CDMA tenha um controle de potência acurado.

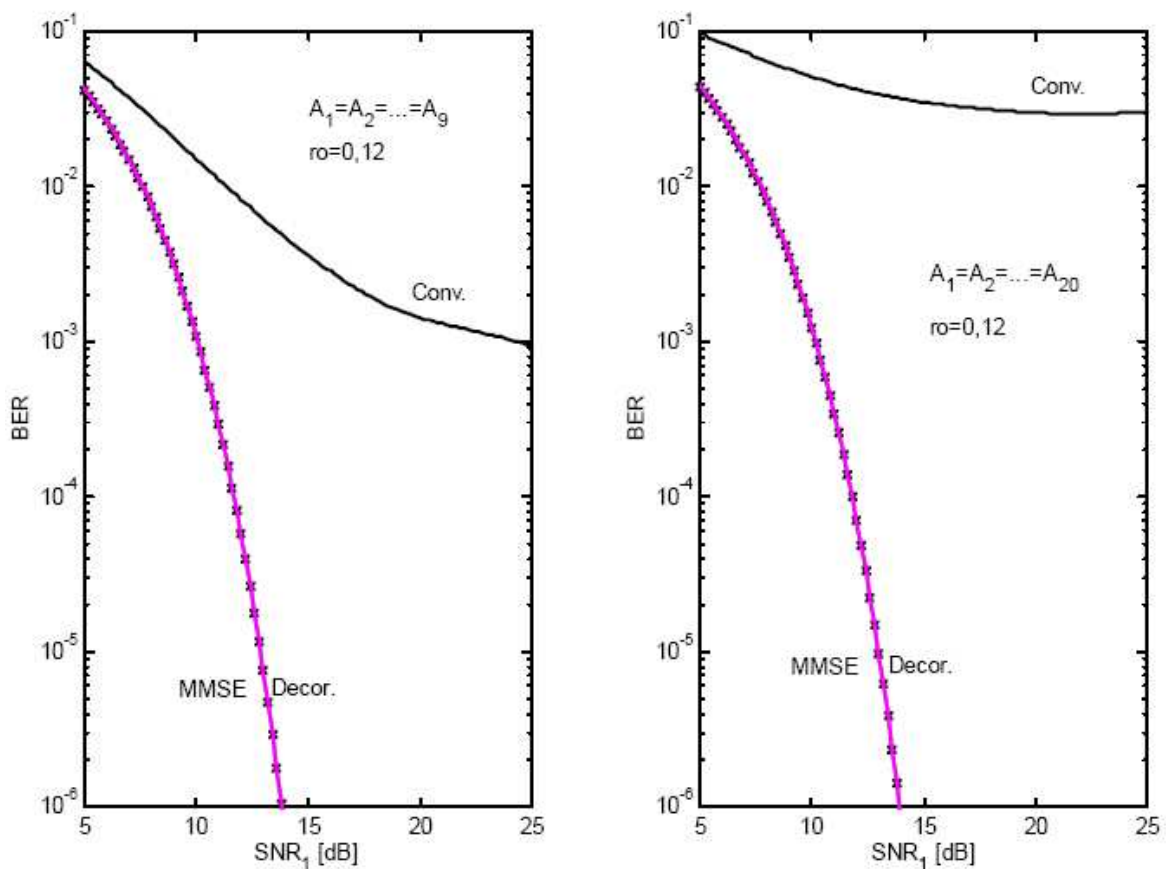


Figura 1.1:  $BER_1$  para os detectores Convencional, Descorrelacionador e MMSE síncronos; sinais equicorrelacionados ( $\rho_{\text{sinc}} = 0,12$ ) e de mesma energia para os casos: a)  $K = 9$  usuários; b)  $K = 20$  usuários, obtido de (ABRÃO, 2001).

O controle de potência é atualmente utilizado para minimizar o problema do efeito *near-far*, quando o tráfego é de igual taxa e a razão entre o sinal desejado e o sinal interferente (SIR - *Signal-to-Interference Ratio*). Tráfego com taxas diferentes requer um controle de potência diferenciado para alcançar as respectivas metas de SIR. Uma estratégia largamente utilizada consiste na busca de implementações de detectores multiusuários (DUEL-HALLEN; ZVONAR, 1995) e (MO-

SHAVI, 1996a) com cancelamento de interferentes visando obter melhoramentos na capacidade e reduzir o requisito de controle de potência.

Como citado anteriormente, a complexidade dos detectores de seqüência de máxima verossimilhança MLSD, ótimo do ponto de vista de desempenho (VERDU, 1986a) e (VERDU, 1986b), é exponencial em relação ao número de sinais interferentes, tornando sua implementação impraticável para um grande número de interferentes. Alternativamente, detectores sub-ótimos podem ser classificados em dois grupos: lineares e não-lineares. Como exemplo de lineares temos o Descorrelacionador, o MMSE (*Minimum Mean-Square Error*) (VERDU, 1988) e os baseados em projeção em subespaços, como não-lineares temos os canceladores de interferência subtrativos (MOSHAVI, 1996a) e (DUEL-HALLEN, 1993) e as abordagens sub-ótimas heurísticas na forma de programação evolucionária e de procura local (CIRIACO; JESZENSKY, 2005), redes neurais (CHUAH; HINTON, 2001), e outros. Entre os detectores lineares, o descorrelacionador (SCHNEIDER, 1979) e (LUPAS; VERDU, 1990) e o detector de mínimo erro quadrático médio MMSE (VERDU, 1998) oferece alta resistência ao efeito *near-far*. No entanto, a carga de processamento para ambos ainda apresenta dificuldades de implementação em DSP. Os detectores de cancelamento de interferência (IC - *Interference Cancellation*) subtrativos (MOSHAVI, 1996a) e (DUEL-HALLEN, 1993) tem a forma de cancelamento de interferência paralelo PIC ou cancelamento de interferência sucessivo SIC (PA-TEL; HOLTZMAN, 1994). Oferecem reduzida complexidade mas tem o problema de sensibilidade para erros de decisão *hard* na realimentação da reconstrução do sinal. Os detectores híbridos ZF (*zero-forcing*) e DF (*decision-feedback*) combinam um descorrelacionador linear parcial com um detector SIC e também evita o realce do ruído devido ao descorrelacionador completo. Entretanto, este detector realça a complexidade de recepção linear e a sensibilidade de IC para estimar erros. Via de regra, detectores multiusuário sub-ótimos resultam em substancial aumento de desempenho e capacidade em relação ao sistema com detecção convencional.

O melhor desempenho, em termos da taxa de erro de bit (BER - *Bit Error Rate*), de dois detectores multiusuário lineares, descorrelacionadores e MMSE, em relação ao detector convencionais é ilustrado no gráfico da figura 1.1, assim como, a degradação de desempenho do detector convencional quando aumentamos o número de usuários. O gráfico da figura 1.2, mostra o desempenho BER *versus*  $K$  (número de usuários) do detector convencional em relação a alguns detectores MUD. Note-se mais uma vez que o desempenho do detector CONV é bastante degradado com o aumento do número de usuários, o mesmo não acontecendo para os detectores MUD.

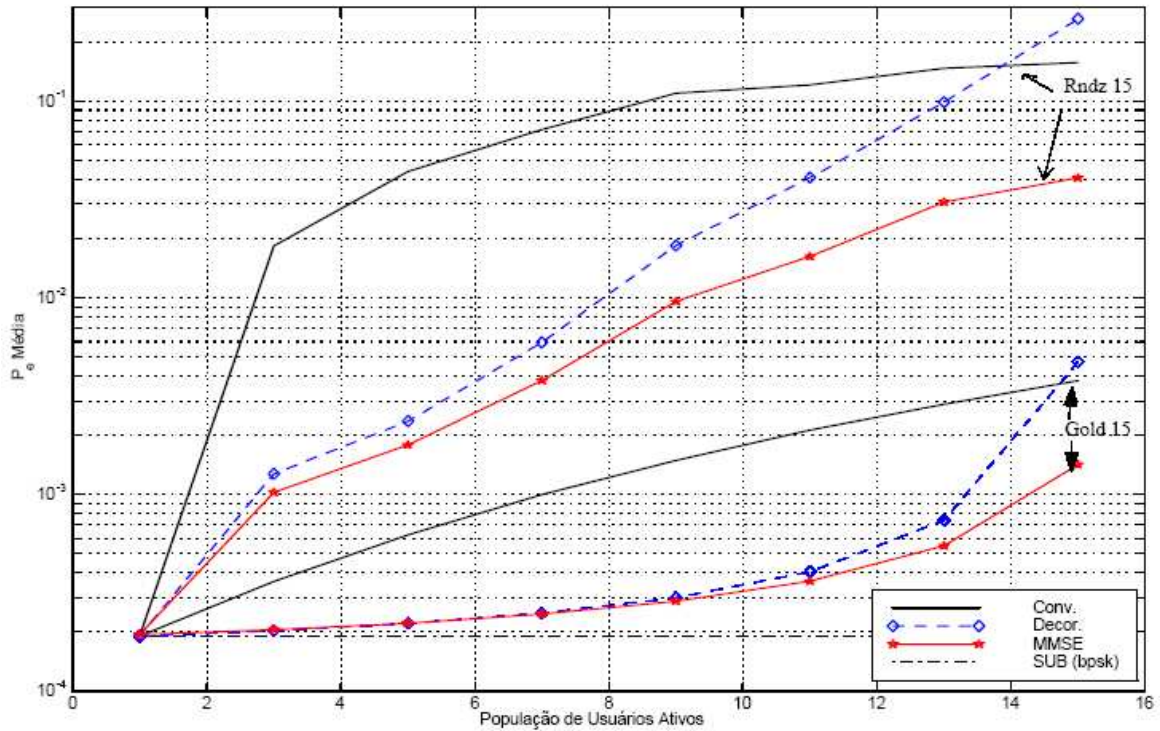


Figura 1.2: Desempenho médio sobre todos os usuários ativos para receptores Convencional, Decorrelacionador e MMSE síncronos com população crescente. Controle perfeito de potência recebida;  $E_b/N_0 = 8 \text{ dB}$  e  $N = 15$ ; seqüências de Gold e Aleatórias, obtido de (ABRÃO, 2001).

## 1.1 Decomposição de Sinais em Subespaços Vetoriais

Estimativas baseadas em subespaços usando técnicas como decomposição por valores singulares (SVD - *Singular Value Decomposition*) é uma ferramenta poderosa usada em muitas aplicações de processamento de sinais, tais como:

- Processamento de sinais em arranjo de antenas;
- Análise de harmônicas;
- Análise de fatores;
- Identificação de sistemas;
- Equalização cega de canais;
- Estimativa de tempo;
- Processamento de imagem;
- Separação de sinal em comunicações de múltiplo acesso.

No caso da última aplicação, basicamente, a decomposição do sinal de múltiplo acesso DS-CDMA em subespaços vetoriais visa reduzir ou mesmo eliminar a interferência de múltiplo acesso MAI no processo de detecção multiusuário do sinal do usuário de interesse. De acordo com (XU, 2000), os MUD lineares baseados no princípio da projeção, também denominado de projeção do sinal recebido (PR - *Projection Receiver*) são muito atrativos por possuir uma alta resistência ao efeito *near-far*.

Comum a todas estas áreas de aplicações está o modelo de sinal parametrizado e o uso da técnica de decomposição para extrair o subespaço dominante ou seu complemento ortogonal. Os parâmetros do sinal a serem analisados podem ser estimados associando-se adequadamente a estimativa do subespaço ao modelo de sinal parametrizado.

A análise do sinal na forma matricial produz autovalores e autovetores, os quais são empregados na obtenção de aproximações de baixo posto dos dados, visando reduzir a complexidade de implementação. Comumente, são utilizadas as decomposições em valores singulares SVD ou em autovetores (EVD - *Eigenvalue Decomposition*) para a obtenção da análise do sinal sujeita à interferência e ruído.

Especificamente para a aplicação em sistemas de múltiplo acesso DS/CDMA, identificam-se a interferência por múltiplo acesso MAI e a distorção causada pelo canal multipercurso como os dois maiores obstáculos para a comunicação de múltiplo acesso por divisão de código.

Dado o vetor de sinais DS/CDMA recebido,  $\mathbf{r}(t)$ , a MAI pode ser eliminada projetando-se  $\mathbf{r}(t)$  no subespaço ortogonal ao espaço vetorial constituído pelas seqüências de espalhamento de todos os sinais interferentes. Após esta projeção, teoricamente, obtém-se um modelo de sinais equivalente a um sistema DS/CDMA com um único usuário (*single-user*). O conjunto de bases ortogonais com espaço complementar ao espaço dos códigos interferentes é primeiro obtido pela decomposição em valores singulares SVD na correspondente linha/coluna da matriz de códigos, interferentes. Os dados recebidos amostrados são então projetados nesse espaço<sup>1</sup>. Em seguida, aplica-se alguma técnica de detecção adequada para se obter estimativas confiáveis para os dados transmitidos.

Várias técnicas de detecção podem ser aplicadas em conjunto com a projeção em subespaço (técnicas de detecção conjunta), com sucesso, para estimar iterativamente o símbolo transmitido e os coeficientes de canal multipercurso do usuário desejado. Em geral, pode-se aplicar, com

---

<sup>1</sup>Técnica de detecção conjunta

reduzida complexidade relativa e ótimo desempenho, as seguintes técnicas (XU, 2000):

- SNR (*Signal-to-Noise Ratio*) máximo;
- Método de otimização dos coeficientes (TSATSANIS; XU, 1998);
- Estimadores de seqüência de máxima verossimilhança MLSE (*Maximum Likelihood Sequence Estimator*);
- Subespaço (WANG; POOR, 1998b);
- Método de otimização limitada, isto é baseada em restrições ou confinamentos (TSATSANIS; XU, 1998);
- Detecção iterativa baseada no mínimo erro quadrático com projeção ILSP (*Iterative Least Squares with Projection*) (LI; SIDIROUPOULOS, 1999);
- Outros.

Conforme descrito em (HOST-MADSEN, 1999), trabalhos recentes em detecção multiusuário mostram que os códigos usuários na estação de rádio base permitem que a detecção de todos os usuários seja feita, de forma simultânea. Se a detecção é feita na estação base de um sistema de comunicação móvel, os códigos de todos os usuários são conhecidos. Por outro lado, se a detecção for feita na estação móvel, conhece-se somente o código do usuário de interesse. Portanto, nesse caso, utiliza-se o detector multiusuário cego (WANG; POOR, 1998b), pois esses detectores necessitam conhecer somente o código do usuário desejado.

Embora a estação base conheça todos os códigos dos usuários de dentro da célula, tipicamente não conhece os códigos dos usuários interferentes das células vizinhas. Isto é um sério problema para detectores multiusuários, já que em média um terço dos interferentes são de outras células, ou seja, interferência intercelular (DUEL-HALLEN; ZVONAR, 1995). Os detectores cegos não usam o fato de que os códigos dos usuários intracelulares são conhecidos na estação base e também o fato de que esses outros usuários tem que ser detectados.

Isto leva a considerar detectores multiusuários que podem cancelar interferentes dos usuários conhecidos e desconhecidos utilizando as informações dos códigos de todos os usuários conhecidos e o fato de que a detecção pode ser feita simultaneamente para todos os usuários conhecidos. Os detectores multiusuários cegos em alguns casos precisam estimar os códigos dos usuários interferentes e se usasse os códigos dos usuários conhecidos a estimativa seria melhorada. Muitos

usuários tem que ser detectados conjuntamente, isto também é vantajoso considerando a complexidade computacional, se alguns dos processos forem comuns para todos os usuários. O detector que satisfaz a esses dois critérios denomina-se detectores multiusuários grupos-cegos (HOST-MADSEN, 1999), (HOST-MADSEN, 1998), (WANG; MADSEN, 1999b) e (ZHANG; ZHANG, 2005).

Os capítulos subsequentes estão organizados da seguinte forma: o capítulo 2 traz uma descrição matricial vetorial para o problema de detecção em subespaço; o capítulo 3 apresenta a técnica de projeção em subespaço propriamente dita e o capítulo 4 mostra o desempenho analítico dos detectores lineares adaptativos grupo-cegos e cegos. No capítulo 5 apresentam-se resultados numéricos, através de simulação Monte Carlo, visando confirmar a validade das equações analíticas de desempenho apresentados por Madsen (H.-MADSEN; WANG, 2002). O capítulo 6 traz uma contribuição ao estudo e a análise de sistemas DS/CDMA com detecção MuD baseada na projeção em subespaços. Neste capítulo, foi proposto o uso de aproximação polinomial na implementação dos detectores grupo-cegos desenvolvidos por Madsen (H.-MADSEN; WANG, 2002), especialmente com a utilização do teorema dos círculos de Gershgorin na destinação dos coeficientes (pesos) da solução da expansão polinomial. No capítulo 7 concluí-se os resultados numéricos obtidos nas simulações de forma a indicar os pontos fortes e fracos dos detectores estudados e da aproximação polinomial.

## Capítulo 2

# Modelos de Canal e Sistema DS/CDMA com Detecção Multiusuário

### 2.1 Motivação

A principal motivação para o desenvolvimento da presente investigação reside nos resultados promissores reportados na literatura sinalizando as potencialidades da técnica de detecção baseada na projeção em subespaços vetoriais enquanto se verifica crescentes avanços na capacidade dos DSPs (DSP - *Digital Signal Processor*).

A partir de estudos apresentados em (AFFES; MERMELSTEIN, 1998) e com trabalho mais completo em (AFFES; MERMELSTEIN, 2002) tem-se uma formulação completa do processo de recepção com a técnica de projeção em subespaço aplicando algoritmos cegos. Nestes estudos, principalmente em (AFFES; MERMELSTEIN, 2002), Affes *et al* mostraram que o desempenho da técnica de projeção em subespaço sempre supera o desempenho do sistema PIC (*Parallel Interference Cancellers*) e SIC (*Successive Interference Cancellers*) enquanto requer aproximadamente a mesma complexidade. A evolução da tecnologia dos processadores digitais de sinais, que tende a dobrar em desempenho a cada um ano e meio, pode gradativamente baixar o custo efetivo de implementação de receptores MUD que requerem intensivo processamento matricial de sinais, viabilizando completamente a técnica de projeção em subespaço.

Em (HOST-MADSEN, 1998) para sistema síncronos e em (WANG; MADSEN, 1999b) para sistema assíncronos também são propostos vários MUD, utilizando a técnica de projeção em subespaço, mas que diferem de estudos anteriores por apresentarem um sistema grupo-cego, ou seja, considera o fato do receptor conhecer o código dos usuários da mesma célula e ignorar os códigos dos sinais

interferentes de outras células. Com isso obtém-se um sistema com melhor desempenho e menor complexidade em relação aos sistemas cegos citados anteriormente.

Estes fatos motivam o desenvolvimento do presente trabalho de investigação, pois colocado em perspectiva a implementação destes receptores MUD utilizando a técnica DSP, a técnica de processamento de sinais baseada na projeção em subespaço vem atingindo maior acurácia, viabilizando a maior parte das aplicações citadas anteriormente.

Nas seções subsequentes serão apresentados modelos matemáticos incluindo o transmissor, dois tipos canais e o receptor tendo em vista a análise e caracterização do processo de detecção convencional (CONV) e alguns detectores MUD. Basicamente, serão caracterizando matematicamente cada processo de detecção, bem como suas diferenças, visando melhor entendimento das formas de detecção. Indicaremos as modificações propostas na obtenção de detectores MUD baseado na projeção em subespaço, objeto de nossa análise.

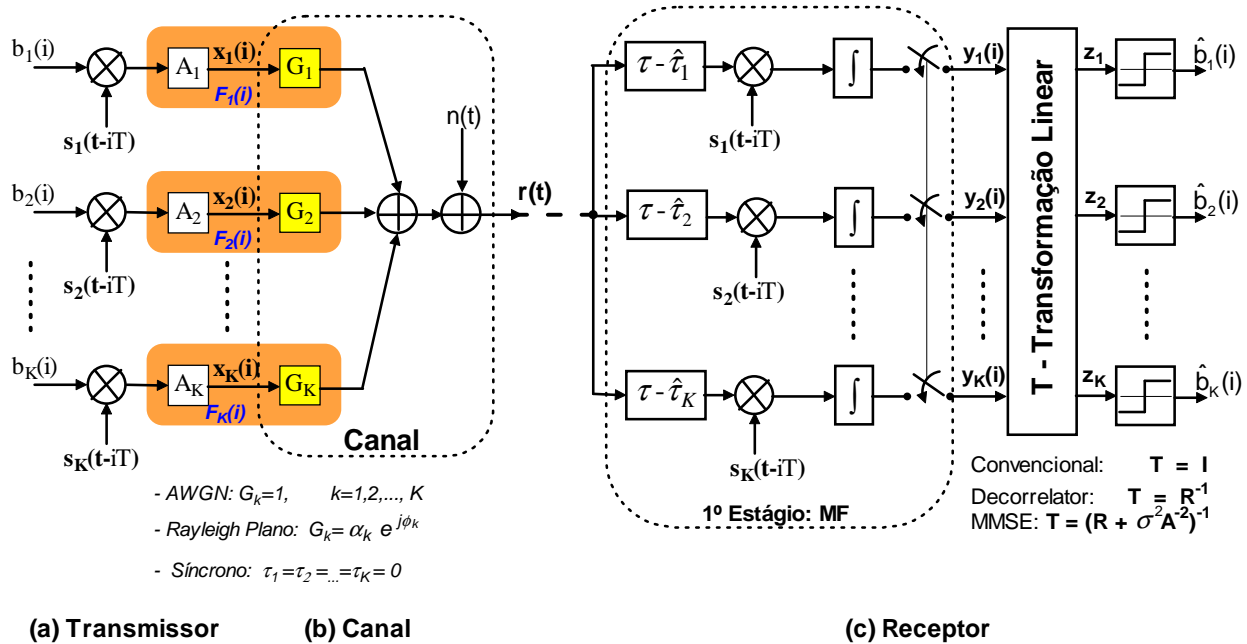


Figura 2.1: Modelo genérico em banda base equivalente discreto para um sistema DS/CDMA. a) Transmissor equivalente; b) Canal; c) Receptor. Para detecção multiusuário linear,  $\mathbf{T}$  representa a matriz de transformação linear.

## 2.2 Modelos de Sistema com Detecção MuD

A seguir, apresenta-se o modelo matemático para o transmissor, canal e receptor DS/CDMA; o princípio de detecção CONV e alguns detectores MUD são discutidos; particularmente, mostrar-se-á as modificações necessárias em relação ao detector convencional para se obter MUD baseados



na projeção em subespaço.

Para melhor entendimento do texto será apresentado, de forma separada, o modelo de sistema MuD DS/CDMA em canais AWGN e em canais Rayleigh plano. A apresentação neste formato acarreta algumas redundâncias que são aceitas em prol da maior clareza, uma vez que o leitor terá um melhor entendimento da construção do modelo de sistema nas duas condições de canal.

### 2.2.1 Detecção Convencional *versus* MuD Lineares Em Canais AWGN

O  $i$ -ésimo símbolo amostrado  $\mathbf{x}(i)$ , assumindo-se modulação BPSK para simplificação na análise, do sinal DS/CDMA transmitido equivalente em banda base pode ser escrito, genericamente, como (ver figura 2.1(a)):

$$\mathbf{x}(i) = \sum_{k=1}^K F_k b_k(i) \mathbf{s}_k \quad (2.1)$$

onde  $b_k \in \{-1, 1\}$  é o conjunto de bits transmitidos, assumidos equiprováveis e independentes;  $F_k = A_k G_k$  é o ganho do canal do  $k$ -ésimo usuário dado pelo produto da amplitude do  $k$ -ésimo usuário e o coeficiente de canal;  $K$  é o número total de usuários. A seqüência de espalhamento  $s_k$  empregada na transmissão do símbolo  $b_k$  é definida por:

$$s_k(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} c_k[i] \psi(t - iT_c) \quad (2.2)$$

onde  $c_k[i] = \pm 1$  ( $0 \leq i \leq N - 1$ ) é a seqüência de espalhamento alocada para o  $k$ -ésimo usuário e  $\psi(t)$  é o pulso retangular de amplitude unitária com duração de  $T_c = T/N$ .

O ruído considerado é o branco gaussiano aditivo (AWGN - *Additive White Gaussian Noise*), representado por  $n(t)$ . Este ruído possui valor médio igual a zero e densidade espectral de potência bilateral  $N_0/2$  e potência de ruído  $\sigma^2 \cong N_0 W = \frac{N_0}{T_c}$ . Para o caso de sistema síncrono com ruído AWGN, o coeficiente de canal, conforme figura 2.1(b),  $G_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) resulta igual a 1, ou seja, sem desvanecimento.

Considere o mesmo sistema de comunicação por espalhamento espectral de seqüência direta DS/CDMA síncrono com usuários transmitidos através de um canal AWGN. Em nosso caso a população consiste de  $\tilde{K}$  usuários com códigos conhecidos e  $\check{K}$  usuários com códigos desconhecidos; portanto, o sinal recebido pode ser escrito como:

$$r(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{K}} \tilde{b}_k \tilde{A}_k \tilde{s}_k(t) + \sum_{k=1}^{\check{K}} \check{b}_k \check{A}_k \check{s}_k(t) + n(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.3)$$

onde  $\tilde{s}_k$  é a forma de onda do código normalizado do  $k$ -ésimo usuário conhecido com intervalo de  $[0, T]$ ,  $\check{s}_k$  a forma de onda dos  $k$ -ésimo usuário desconhecido,  $\tilde{b}_k$  e  $\check{b}_k$  são os bits transmitidos ( $\pm 1$ ),

admitidos equiprováveis;  $\tilde{A}_k$  e  $\check{A}_k$  são as respectivas amplitudes e  $n$  o ruído gaussiano branco. Assumindo-se que os códigos são constituídos por chips formatados, a equação (2.2) passa a ser:

$$\tilde{s}_k(t) = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{c}_k^i \psi(t - iT/N), \quad \text{onde } \tilde{c}_k^i \in \{-1, 1\} \quad (2.4)$$

onde  $M$  é o número de bits amostrados em cada frame ; de forma similar, considere as mesmas definições para os  $\check{K}$  usuários desconhecidos.

O sinal recebido pode ser escrito na forma vetorial por:

$$\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{\check{K}} \tilde{b}_k \tilde{A}_k \tilde{\mathbf{s}}_k + \sum_{k=1}^{\check{K}} \check{b}_k \check{A}_k \check{\mathbf{s}}_k + n = \underbrace{\tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{b}}}_{\text{conhecido}} + \underbrace{\check{\mathbf{S}} \check{\mathbf{A}} \check{\mathbf{b}}}_{\text{desconhecido}} + \mathbf{n} \quad (2.5)$$

onde  $\tilde{\mathbf{S}} = [\tilde{\mathbf{s}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{s}}_{\check{K}}]$  e  $\check{\mathbf{S}} = [\check{\mathbf{s}}_1, \check{\mathbf{s}}_2, \dots, \check{\mathbf{s}}_{\check{K}}]$ .

O sinal recebido em banda base após passar pelo filtro casado e pela transformação linear, responsável por "desacoplar" os sinais dos usuários interferentes, chega até o processo de decisão. Em um receptor linear multiusuário, a decisão de símbolo é obtida por:

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{sgn}(\mathbf{z}) \quad (2.6)$$

onde:  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ ; com  $\mathbf{y}$  igual a saída do banco de filtros casados;  $\mathbf{T}$  é igual a matriz de transformação linear, conforme figura 2.1.c. Para o usuário  $k$ , a estimativa de símbolo será:

$$\hat{b}_k = \text{sgn}(z_k) \quad (2.7)$$

com

$$z_k = \mathbf{t}_k^H \mathbf{y} \quad (2.8)$$

$\mathbf{t}_k$  é a  $k$ -ésima linha da matriz de  $\mathbf{T}$ .

O detector convencional da figura 2.1.c obtém as decisões de bits realizando a transformação linear  $\mathbf{T} = \mathbf{I}_K$  em  $\mathbf{y}$ , onde  $\mathbf{I}_K$  é a matriz identidade de dimensão  $K$ , enquanto que para os receptores multiusuário linear de decorrelacionador esta transformação linear resulta em  $\mathbf{T} = \mathbf{R}^{-1}$  e para o MMSE resulta  $\mathbf{T} = (\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2})^{-1}$ , onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de correlação (auto e cruzada) normalizada definida por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}^T \mathbf{S} \quad (2.9)$$

com  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_K]$  de dimensão  $N \times K$ .

O receptor convencional em banda base representado na figura 2.1.c ao receber o sinal  $\mathbf{r}$  faz a correlação com as seqüências de espalhamento dos respectivos usuários em um sistema DS/CDMA,

passando então os sinais desespalhados por integradores e amostradores à taxa de bit de dados,  $R = 1/T$ . A operação de desespalhamento é feita a partir de uma réplica da sequência de espalhamento no receptor, sincronizada ao sinal recebido do usuário de interesse. Finalmente, estimativas de bits transmitidos são obtidas comparando-se os sinais amostrados com o limiar zero em dispositivos de decisão de bits *hard*. A decisão para o  $k$ -ésimo usuário é simplesmente:

$$\hat{b}_k(i) = \text{sgn}[z_k(i)] = \text{sgn} \{ \text{Re}[t_k^H(i)\mathbf{y}_k] \} = \begin{cases} -1, & z_i < 0 \\ +1, & z_i \geq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

O detector multiusuário linear descorrelacionador aplica a matriz de correlação inversa,  $\mathbf{T} = \mathbf{R}^{-1}$ , à saída do detector convencional objetivando o desacoplamento dos sinais dos usuários interferentes (VERDU, 1998). As saídas, contendo os sinais descorrelacionadores, são:

$$\mathbf{z}(i) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}(i) = \mathbf{G}(i)\mathbf{b}(i) + \mathbf{v}(i) \quad (2.11)$$

onde:  $\mathbf{z}$  é igual a métrica de decisão;  $\mathbf{v}(i) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{n}(i)$  é o vetor ruído colorido.

O desempenho do descorrelacionador em canal AWGN não é afetado pelas disparidades de potência dos usuários, possibilitando a detecção sem o conhecimento das amplitudes dos sinais recebidos.

O detector multiusuário MMSE leva em conta o ruído de fundo, resultando em igual ou melhor desempenho, em termos de BER, que o detector descorrelacionador. Quando o ruído AWGN tender a zero, o detector MMSE converge, em termos de desempenho, para o descorrelacionador. No entanto, a obtenção do vetor de dados estimado é necessário conhecer as potências dos sinais recebidos. O detector MMSE substitui a transformação do descorrelacionador por:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2})^{-1} \quad (2.12)$$

As saídas do MUD MMSE seguem as decisões:

$$\hat{b}_k(i) = \text{sgn}([\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2}]^{-1}\mathbf{y})_k \quad (2.13)$$

O receptor com projeção em subespaço, figura 2.2, é constituído de um amostrador à taxa de *chip* amostrado,  $R_c = 1/T_c$  e da formação, a partir do sinal recebido, de um vetor de projeção, que opera diretamente sobre o sinal recebido. O vetor projeção é obtido a partir das sequências de espalhamento e por processos de decomposição de matrizes que será descrito nas seções seguintes.

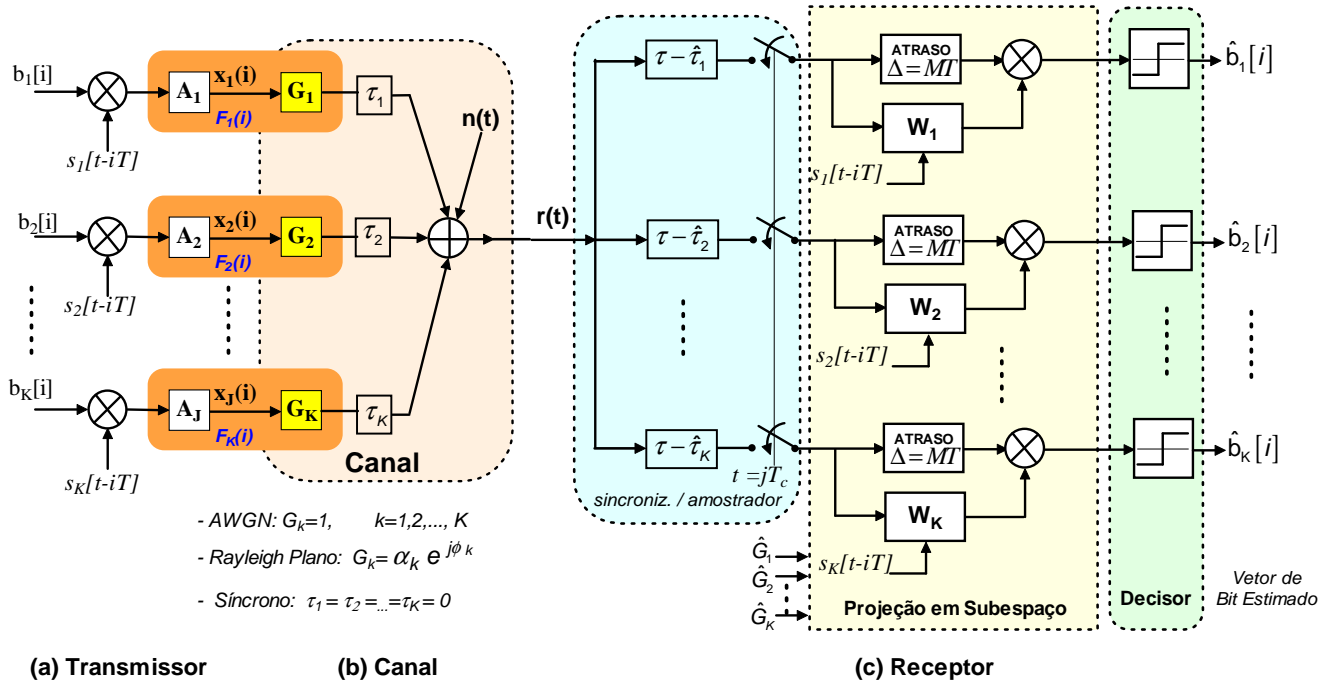


Figura 2.2: Modelo genérico em banda base equivalente discreto para um sistema DS/CDMA. a) Transmissor equivalente; b) Canal; c) Receptor. Detecção multiusuário com projeção em subespaço.

### 2.2.2 Detecção Convencional *versus* MuD Lineares Canais Rayleigh Plano

O  $i$ -ésimo símbolo amostrado  $\mathbf{x}(i)$ , assumindo-se modulação BPSK do sinal DS/CDMA transmitido pode ser escrito como, figura 2.1.(a):

$$\mathbf{x}(i) = \sum_{k=1}^K \mathbf{h}_k b_k(i) \cos(\omega_c t + \varphi_k) \quad (2.14)$$

onde  $b_k \in \{\pm 1\}$  é o conjunto de bits transmitidos, assumido valores equiprováveis e independentes; a matriz de bits é representada por  $\mathbf{b}[i] = [b_1[i] \cdots b_K[i]]$ ;  $\mathbf{h}_k(i) = F_k(i)\mathbf{s}_k$  é dado pelo produto do ganho do canal do  $k$ -ésimo usuário  $F_k(i)$  e a sequência de espalhamento normalizada;  $K$  é o número total de usuários,  $\omega_c = 2\pi f_c$  é a portadora e  $\varphi_k$  a respectiva fase.

Em um sistema sujeito a desvanecimento, a amplitude do sinal recebido sofre profundas variações de acordo com o tempo e com distâncias compatíveis ao comprimento de onda da portadora; essa variação pode ser construtiva ou destrutiva; a esse fenômeno é dado o nome de desvanecimento de pequena escala do sinal. O coeficiente de canal para o sinal do  $k$ -ésimo usuário sujeito a desvanecimento Rayleigh plano é dado por:

$$G_k(t) = \alpha_k(t)e^{j\theta_k(t)} \quad (2.15)$$

onde a envoltória  $\alpha_k(t)$  apresenta distribuição estatística de Rayleigh e a fase  $\theta_k(t)$ , distribuição

uniforme no intervalo  $[0, 2\pi)$ . Define-se ainda a matriz diagonal ganho de canal:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= \text{diag}[F_1(t), F_2(t), \dots, F_K(t)] \\ &= \text{diag}[A_1 G_1(t), \dots, A_k G_k(t), \dots, A_K G_K(t)] \\ &= \text{diag}[A_1 \alpha_1(t) e^{j\theta_1(t)}, \dots, A_K \alpha_K(t) e^{j\theta_K(t)}] \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde  $A_k$  é a amplitude do  $k$ -ésimo usuário, admitida constante ao longo de todo o quadro de bits transmitidos, constituindo a matriz  $\mathbf{A} \triangleq \text{diag}(A_1, \dots, A_K)$ .

Em sistemas DS/CDMA síncronos, tem-se  $\tau_k = 0$ , para  $k = 1, \dots, K$ , figura 2.1.(c). Adicionalmente, considerando sistemas DS/CDMA intercelulares sujeitos ao desvanecimento Rayleigh plano, ter-se-á  $\tilde{K}$  usuários com códigos conhecidos e  $\check{K}$  usuários com códigos desconhecidos em um total de  $K = \tilde{K} + \check{K}$  usuários; nestas condições, o sinal recebido em banda base pode ser escrito como:

$$r(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{K}} \tilde{\mathbf{h}}_k(t) \tilde{b}_k + \sum_{k=1}^{\check{K}} \check{\mathbf{h}}_k(t) \check{b}_k + n(t), \quad (2.17)$$

onde  $t \in [0, T]$ ,  $\tilde{\mathbf{h}}_k(t) = \tilde{F}_k(t) \tilde{\mathbf{s}}_k(t)$  é a matriz coluna do  $k$ -ésimo usuário conhecido,  $\check{\mathbf{h}}_k(t) = \check{F}_k(t) \check{\mathbf{s}}_k(t)$  idem para  $k$ -ésimo usuário desconhecido (usuário intercelular),  $\tilde{b}_k$  e  $\check{b}_k$  são os respectivos bits transmitidos ( $\pm 1$ ), admitidos equiprováveis, e  $n$  o ruído Gaussiano branco. Define-se ainda:

$$\tilde{\mathbf{S}} \triangleq [\mathbf{s}_1 \cdots \mathbf{s}_{\tilde{K}}], \quad (2.18)$$

$$\check{\mathbf{S}} \triangleq [\mathbf{s}_{\tilde{K}+1} \cdots \mathbf{s}_K], \quad (2.19)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} \triangleq \text{diag}(F_1, \dots, F_{\tilde{K}}), \quad (2.20)$$

$$\check{\mathbf{F}} \triangleq \text{diag}(F_{\tilde{K}+1}, \dots, F_K), \quad (2.21)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}(t) \triangleq [b_1(t) \cdots b_{\tilde{K}}(t)], \quad (2.22)$$

$$\check{\mathbf{b}}(t) \triangleq [b_{\tilde{K}+1}(t) \cdots b_K(t)], \quad (2.23)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(t) \triangleq [\mathbf{h}_1(t) \cdots \mathbf{h}_{\tilde{K}}(t)], \quad (2.24)$$

$$\check{\mathbf{H}}(t) \triangleq [\mathbf{h}_{\tilde{K}+1}(t) \cdots \mathbf{h}_K(t)]. \quad (2.25)$$

Reescrevendo o sinal recebido, eq. (2.17), na forma vetorial, amostrado a uma taxa de  $R_c = \frac{1}{T_c}$ , tem-se:

$$\mathbf{r} = \underbrace{\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{b}}}_{\text{conhecido}} + \underbrace{\check{\mathbf{H}}\check{\mathbf{b}}}_{\text{desconhecido}} + \mathbf{n} \quad (2.26)$$

Reescrevendo (2.26) para o total de usuários  $K$  tem-se (H.-MADSEN; WANG, 2002):

$$\mathbf{r}[i] = \sum_{k=1}^K \mathbf{H}_k b_k + \mathbf{n}[i] = \mathbf{H}\mathbf{b} + \mathbf{n}[i], \quad (2.27)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, M$ , com  $M =$  número total de amostras processadas,  $\mathbf{n}[i] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$  é o ruído Gaussiano branco aditivo de média zero e variância  $\sigma^2$  e  $\mathbf{I}_N$  é a matriz identidade  $N \times N$ .

A obtenção da matriz de correlação  $\mathbf{R}$  (auto e cruzada) obtido para os sistemas com canal AWGN na equação (2.9) passa a ser calculada a partir de  $\mathbf{H}$  em sistemas com canal Rayleigh plano dado por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}^H \mathbf{H} \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{H}$  é a matriz concatenada  $\mathbf{H} = [\tilde{\mathbf{H}} \check{\mathbf{H}}]$ .

A estimativa de dados para canais com desvanecimento Rayleigh plano depende das estimativas da fase dos coeficientes de canal,  $\hat{\theta}_k(i)$ :

$$\hat{b}_k(i) = \text{sgn} \{ \text{Re}[z_k(i)] \} = \text{sgn} \left\{ \text{Re} \left[ z_k(i) e^{-j\hat{\theta}_k(i)} \right] \right\} \quad (2.29)$$

Na seqüência será mostrado o vetor de recepção para o caso em que são considerados os usuários interferentes intracelular e intercelular.

### 2.2.3 Estrutura da Detecção por Aproximação em Subespaço

De forma análoga ao obtido com a estrutura de detecção descorrelacionadora e MMSE, obtida aplicando-se a transformação linear  $\mathbf{t}_k$ , equação (2.8), ao sinal recebido, o detector linear baseado na projeção em subespaço, para o  $i$ -ésimo usuário, é:

$$\hat{b}_i = \text{sgn} (\mathbf{w}_i^H \mathbf{r}) \quad (2.30)$$

onde  $\mathbf{w}_i$  é o vetor de projeção  $N \times 1$ .

Para detectar simultaneamente todos os usuários, a equação (2.30) pode ser escrita como:

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{sgn} (\mathbf{W}^H \mathbf{r}) \quad (2.31)$$

onde  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_K]$  é a matriz de projeção, dimensão  $N \times K$ . Este detector deve ter  $\mathbf{w}_i \in \text{Im} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \tilde{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \right)$  para canais AWGN ou  $\mathbf{w}_i \in \text{Im} \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}} & \check{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \right)$  (ver Anexo B) para canais Rayleigh plano. Com isso, as componentes vetoriais de  $\mathbf{w}_i$  que não pertencer a este subespaço contribuirão somente para o acréscimo de ruído sem reduzir a interferência.

No capítulo 3 será apresentado a técnica projeção em subespaço através da decomposição em valores singulares tanto para os detectores MuD grupo-cego como para o cego. Mostram-se também algumas equações de detecção para diferentes detectores que usam a técnica de projeção em subespaço. É apresentado também um resumo literário do assunto.

## Capítulo 3

# A Técnica de Projeção em Subespaços

Existem vários métodos de separação de sinais discretos, entre eles está a projeção em subespaços obtido a partir do espaço vetorial de sinais. O detector multiusuário de sinal é especificamente projetado para rejeitar alguma correlação cruzada da estrutura interferente, enquanto ainda é capaz de observar o sinal desejado. O princípio básico do método de projeção oblíqua e algumas aplicações foram descritos inicialmente em (BEHRENS; SCHARF, 1994), enquanto que a detectabilidade do sinal para técnica de projeção foi descrito em (SCHARF; FRIEDLANDER, 1994) pela primeira vez. A seguir tem-se um resumo breve deste método; mas para maiores detalhes consultar as referências (BEHRENS; SCHARF, 1994) e (SCHARF; FRIEDLANDER, 1994).

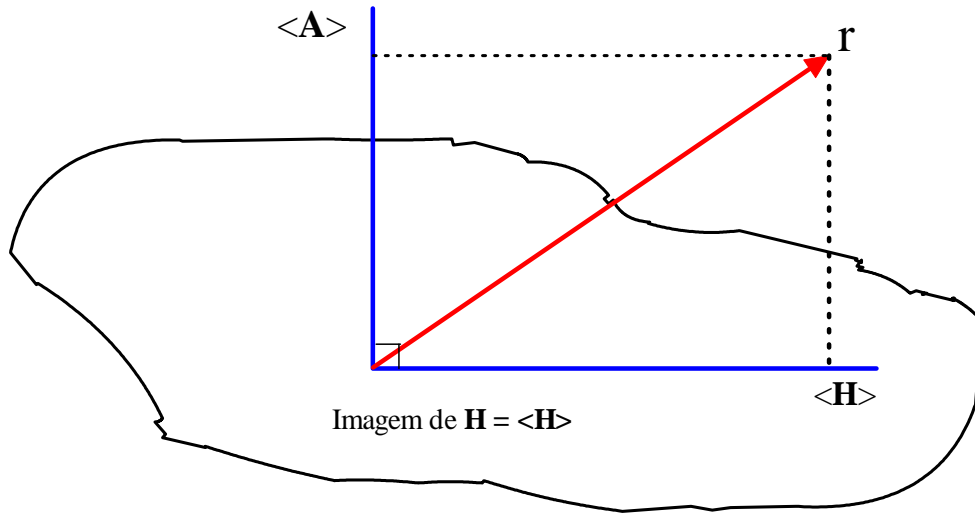
### 3.1 Decomposição de Sinais por Projeção Ortogonal e Oblíqua

Esta seção apresenta o equacionamento para a obtenção da projeção oblíqua e a projeção ortogonal, dado uma estrutura de sinais discretos adequados. As projeções ortogonais são representadas pela letra  $\mathbf{P}$  e usualmente com um índice subscrito que indica a imagem (ver Apêndice B). As projeções oblíquas são representadas pela letra  $\mathbf{E}$  e usualmente com um índice duplo subscrito ao qual o primeiro se refere a imagem e o segundo ao espaço nulo.

**Projeções Ortogonais:** Uma projeção ortogonal tem um espaço nulo que é ortogonal a sua imagem. Uma condição necessária e suficiente para uma projeção ser ortogonal é a simetria Hermitiana:

$$\mathbf{P}^H = \mathbf{P} \quad (3.1)$$

Para uma projeção ortogonal  $\mathbf{P}_{\mathbf{H}}$  cujo a imagem é  $\langle \mathbf{H} \rangle$  e o espaço nulo é  $\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{H} \rangle^\perp$ , representado na figura 3.1, tem-se:

Figura 3.1: Representação de  $\langle \mathbf{A} \rangle$  e  $\langle \mathbf{H} \rangle$  ortogonais entre si.

$$\mathbf{P}_H \mathbf{H} = \mathbf{H} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{P}_H \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

**Projeções Oblíquas:** Matrizes de projeção que não são ortogonais são chamadas de projeções oblíquas. Por definição, para as projeções oblíquas temos  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$ , mas não são simétricas. Para uma projeção oblíqua  $\mathbf{E}_{HS}$  cuja a imagem é  $\langle \mathbf{H} \rangle$  e o espaço nulo é  $\langle \mathbf{S} \rangle$  tem-se:

$$\mathbf{E}_{HS} \mathbf{H} = \mathbf{H} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{E}_{HS} \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Considere um operador linear que pode ser construído, usando várias projeções com respeito as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{S}$  e os respectivas imagens  $\langle \mathbf{H} \rangle$  e  $\langle \mathbf{S} \rangle$ , visto na figura 3.2. Em (SCHARF; FRIEDLANDER, 1994) mostra-se que a projeção ortogonal  $\mathbf{P}_{HS}$  dentro do subespaço  $\langle \mathbf{HS} \rangle$  (o subespaço da matriz concatenada  $[\mathbf{HS}]$ ) pode ser decomposta em várias projeções diferentes, como será descrito a seguir. É um requisito necessário que os vetores em  $\langle \mathbf{H} \rangle$  e  $\langle \mathbf{S} \rangle$  sejam linearmente independentes, ou seja, a interseção dos dois subespaços contenha somente o vetor nulo.

Considere o subespaço sinal  $\langle \mathbf{H} \rangle$  e o subespaço interferente  $\langle \mathbf{S} \rangle$  representados pelos vetores  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{s}_1$  respectivamente, onde  $\mathbf{h}_1 = [1, 0, 0]^T$  e  $\mathbf{s}_1 = [0, 2, 0, 9, 0]^T$ . Primeiramente deve-se notar que  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{s}_1$  são linearmente independentes, então o vetor comum para ambos os subespaços é somente o vetor zero  $\mathbf{0} = [0, 0, 0]$  e portanto a condição inicial em  $\langle \mathbf{H} \rangle$  e  $\langle \mathbf{S} \rangle$  é satisfeita. Note-se ainda que  $\mathbf{h}_1^T \mathbf{s}_1$  é 0,2, então os dois vetores não são ortogonais.



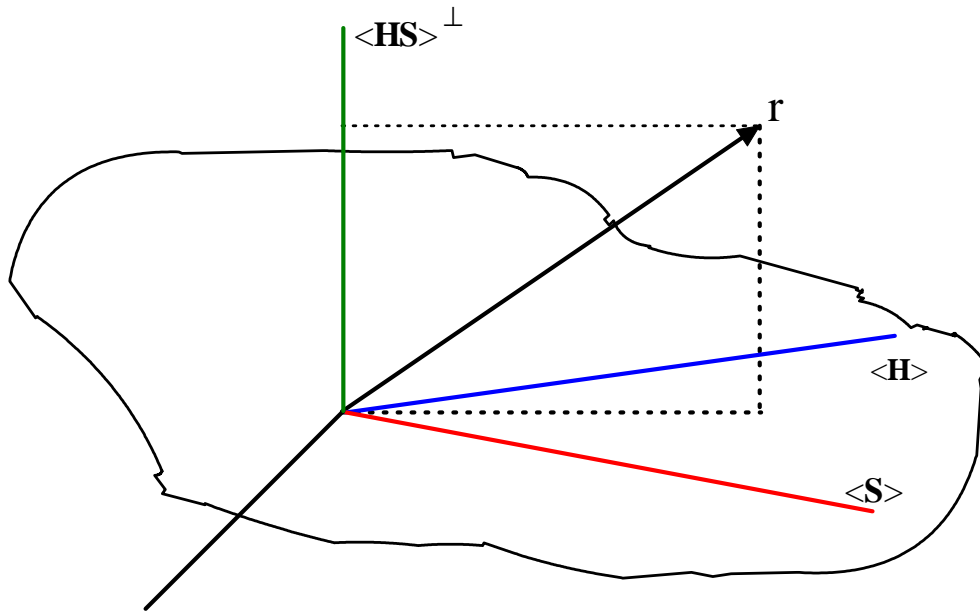


Figura 3.2: Subespaços  $\langle \mathbf{H} \rangle$  e  $\langle \mathbf{S} \rangle$  e o complemento ortogonal da matriz concatenada  $[\mathbf{HS}]$  representado pelo subespaço  $\langle \mathbf{HS} \rangle^\perp$ .

Para esse exemplo, a projeção ortogonal do sinal sobre o subespaço interferente é, por definição:

$$\mathbf{P}_S \triangleq \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} 0,0471 & 0,2118 & 0 \\ 0,2118 & 0,9529 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

e o complemento ortogonal de  $\mathbf{P}_S$  é dado por:

$$\mathbf{P}_S^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_S = \begin{pmatrix} 0,9529 & -0,2118 & 0 \\ -0,2118 & 0,0471 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Observe na figura 3.3 que o plano  $\mathbf{P}_S^\perp$  realmente é ortogonal ou perpendicular ao plano  $\mathbf{P}_S$ , isto é  $\mathbf{P}_S \cdot \mathbf{P}_S^\perp = \mathbf{P}_S^\perp \cdot \mathbf{P}_S = \vec{\mathbf{0}}$ . O mesmo pode ser observado na figura 3.4 para os planos  $\mathbf{P}_H^\perp$  e  $\mathbf{P}_H$ . Os valores, de forma similar ao anterior, são obtidos a seguir:

$$\mathbf{P}_H \triangleq \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

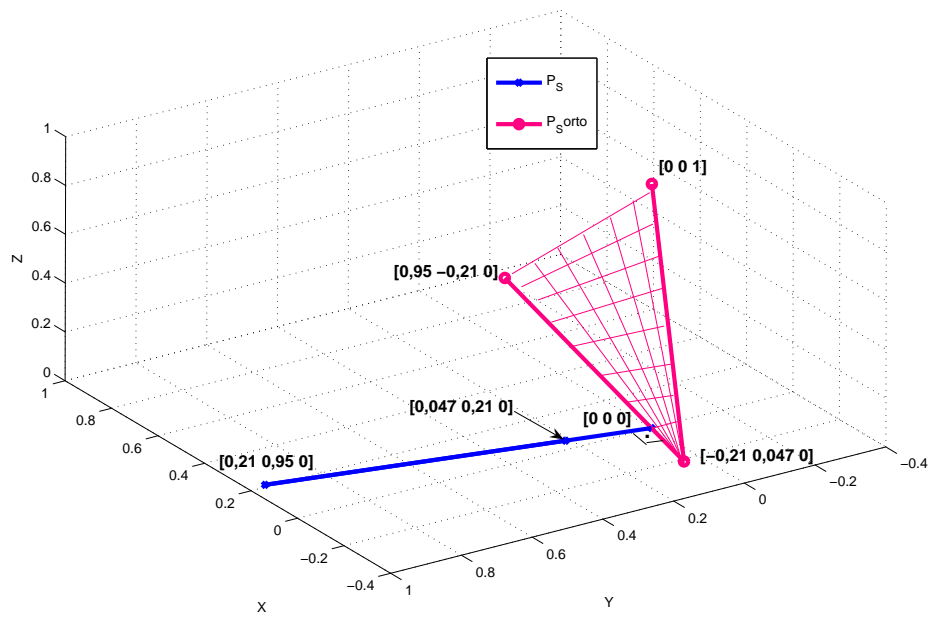


Figura 3.3: O plano  $P_S$  e seu complementar ortogonal  $P_S^\perp$

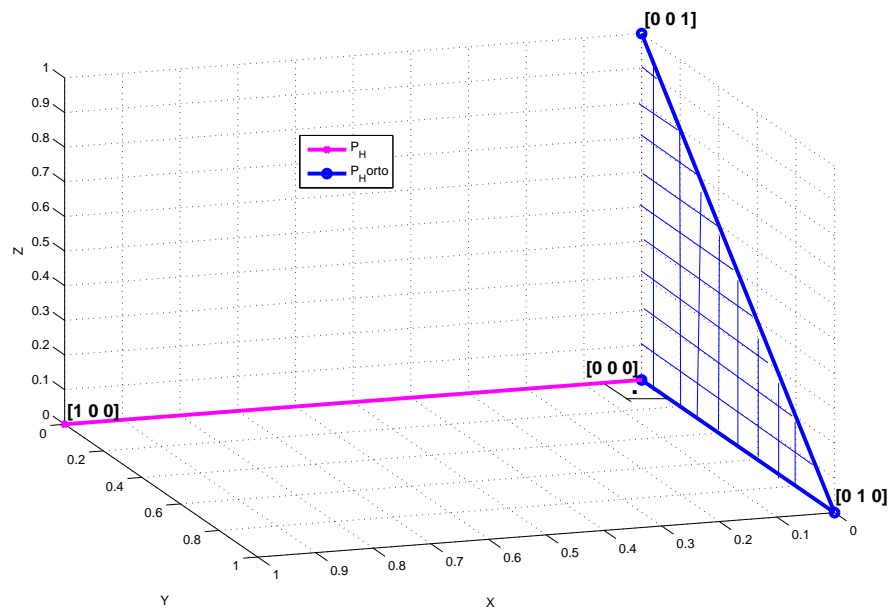


Figura 3.4: O plano  $P_H$  e seu complementar ortogonal  $P_H^\perp$

e o complemento ortogonal de  $\mathbf{P}_{\mathbf{H}}$  é dado por:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{H}}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

O plano representado por  $\mathbf{P}_{\mathbf{HS}}$  é a projeção ortogonal cuja abrangência encontra-se dentro de ambos, ou seja, do subespaço interferente  $\langle \mathbf{S} \rangle$  e do subespaço do sinal  $\langle \mathbf{H} \rangle$  e no contexto da detecção MUD remove efetivamente a porção do ruído que não pertence a este subespaço. Considerando-se ainda os valores numéricos do exemplo anterior, calcula-se o subespaço  $\mathbf{P}_{\mathbf{HS}}$  e o seu complemento ortogonal  $\mathbf{P}_{\mathbf{HS}}^{\perp}$ , obtendo-se:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{H} \ \mathbf{S}] = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 0 & 0,9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{HS}} \triangleq \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Uma decomposição de  $\mathbf{P}_{\mathbf{HS}}$  está em duas projeções oblíquas  $\mathbf{E}_{\mathbf{HS}}$  e  $\mathbf{E}_{\mathbf{SH}}$ , onde  $\mathbf{E}_{\mathbf{HS}}$  e  $\mathbf{E}_{\mathbf{SH}}$  foi especificamente construído para ter um espaço que abrange  $\langle \mathbf{H} \rangle$  e  $\langle \mathbf{S} \rangle$ , respectivamente, e espaços nulos  $\langle \mathbf{S} \rangle$  e  $\langle \mathbf{H} \rangle$ , respectivamente.

Outra decomposição de interesse é a projeção ortogonal representada por  $\mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{\perp} \mathbf{H}}$ . Trata-se da projeção dentro do subespaço vetorial definido por  $\langle \mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{\perp} \mathbf{H} \rangle$ , isto é o subespaço definido pela concatenação das matrizes  $\mathbf{H}$  e o complemento da projeção ortogonal de  $\mathbf{S}$  sobre o  $\mathbf{H}$ . Para melhoria da correlação cruzada, tem-se um particular interesse por  $\mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{\perp} \mathbf{H}}$  já que elimina a componente do sinal no subespaço  $\langle \mathbf{H} \rangle$  que não se encontra dentro do subespaço  $\langle \mathbf{S} \rangle$ . A partir do exemplo tem-se:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{\perp} \mathbf{H}} = \mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{\perp} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{\perp} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{\perp} = \mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{\perp} \mathbf{E}_{\mathbf{HS}} = \begin{bmatrix} 0,9529 & -0,2118 & 0 \\ -0,2118 & 0,0471 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

e as respectivas projeções oblíquas:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{HS}} \triangleq \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{\perp} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P}_{\mathbf{S}}^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & -0,222 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

e

$$\mathbf{E}_{\text{SH}} = \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{P}_{\text{H}}^\perp \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{P}_{\text{H}}^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 0,222 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Ao somar o resultado das projeções oblíquas, equações (3.13) e (3.14), o valor obtido é o mesmo da equação (3.11) conforme mostrado abaixo. O mesmo é válido para as projeções ortogonais  $\mathbf{P}_{\text{S}}$  e  $\mathbf{P}_{\text{P}_{\text{S}}^\perp \text{H}}$ .

$$\mathbf{P}_{\text{HS}} = \mathbf{E}_{\text{HS}} + \mathbf{E}_{\text{SH}} = \mathbf{P}_{\text{S}} + \mathbf{P}_{\text{P}_{\text{S}}^\perp \text{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

### 3.2 Auto-Decomposição de Sinais e Decomposição em Valores Singulares

Outra forma para se obter o subespaço desejado é o uso da decomposição em autovalores e autovetores (EVD - *eigendecomposition*) ou decomposição em valores singulares (SVD - *singular value decomposition*) para detectores cegos (WANG; POOR, 1998b). Por conveniência e sem perda de generalidade, assume-se que as formas de onda de assinatura  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$  dos  $K$  usuários são linearmente independentes. Representa-se  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_K]$ , dimensão  $N \times K$  e  $\mathbf{A} = \text{diag}(A_1^2, \dots, A_K^2)$ , dimensão  $K \times K$ . A matriz de autocorrelação do sinal recebido é dado por:

$$\mathbf{C}_r = \mathbb{E}\{\mathbf{r}\mathbf{r}^T\} = \sum_{k=1}^K A_k^2 \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T + \sigma^2 \mathbf{I}_N = \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_N. \quad (3.16)$$

onde  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  é igual ao operador esperança estatística.

A autodecomposição da matriz  $\mathbf{C}_r$  é dada por:

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_s & \\ & \Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^T \\ \mathbf{U}_n^T \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_s \mathbf{U}_n]$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\Lambda_s, \Lambda_n)$ ;

- $\Lambda_s = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$  contém os  $K$  maiores autovalores de  $\mathbf{C}$  em ordem decendente;
- $\mathbf{U}_s = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_K]$  contém os correspondentes autovetores unitários ortogonais;
- $\Lambda_n = \sigma^2 \mathbf{I}_{N-K}$  e  $\mathbf{U}_n = [\mathbf{u}_{K+1} \dots \mathbf{u}_N]$  contém os  $(N - K)$  autovetores unitários ortogonais associados aos autovalores  $\sigma^2$ ;

- $\sigma^2$  é a potência do ruído AWGN;
- O espaço abrangido por  $\mathbf{U}_s$  é chamado de subespaço do sinal;
- O espaço abrangido por  $\mathbf{U}_n$  é chamado de subespaço do ruído.

Para cada forma de detecção multiusuário linear baseada em subespaços, essas matrizes são processadas juntamente com o sinal de múltiplo acesso recebido  $\mathbf{r}$  para se obter estimativas de bits de informação de interesse.

### 3.3 Detecção MuD por Projeção de Subespaços: Revisão da Literatura

Em (WANG; POOR, 1998b) é mostrado que, baseado na estimativa de sinal em subespaço, o detector descorrelacionador e o detector MMSE linear podem ser obtidos de forma cega, isto é, podem ser estimados a partir do sinal recebido com o conhecimento somente da seqüência de espalhamento e do atraso  $\tau_k$  de chegada do sinal do usuário de interesse.

Utilizando a aproximação em subespaço de (WANG; POOR, 1998b) e do fato que, tipicamente, a estação rádio base conhece a seqüência de espalhamento de todos os usuários, foi apresentado em (HOST-MADSEN, 1999) um detector que utiliza as seqüências de espalhamento não somente do usuário de interesse, mas de todos os usuários intracelulares. Esses detectores são denominados de MuD grupo-cego. Nas detecções grupo-cega e cega são usadas as decomposições SVD para a formulação do detector.

Em (HOST-MADSEN, 1999) é mostrado que o desempenho do MuD grupo-cego, para um sistema síncrono e ruído AWGN, supera o desempenho do MuD cego apresentado em (WANG; POOR, 1998b).

Existem algoritmos simplificados para a obtenção da decomposição SVD, conforme é mostrado também em (HOST-MADSEN, 1999); em (COMON; GOLUB, 1990) é apresentado um compêndio com vários algoritmos simplificados para a decomposição SVD, cada um com suas aplicações específicas. Em (COMON; GOLUB, 1990) é sugerido o uso dos algoritmos G e F2 por apresentar melhor desempenho e menor complexidade, sendo utilizado em (HOST-MADSEN, 1999) o algoritmo F2 por apresentar maior regularidade.

Foi desenvolvido em (WANG; MADSEN, 1999a), e de forma mais completa em (WANG; MADSEN, 1999b), a partir da idéia do método de detecção cego em subespaço em (WANG; POOR, 1998a),

um MUD grupo-cego e cego em canal de ruído colorido. Considerou-se, neste desenvolvimento, a supressão adaptativa da MAI e da interferência intersimbólica (ISI - *Intersymbol Interference*) em um canal CDMA dispersivo. Neste caso, onde o ruído do canal é correlacionado, duas antenas são necessárias para estimar o canal e para a detecção do sinal de forma satisfatória. Nestas condições, o MUD grupo-cego ainda supera o desempenho do MUD cego conforme é mostrado em (WANG; MADSEN, 1999b) e (WANG; MADSEN, 1999a).

Em (WANG; POOR, 1999) é feita uma comparação entre dois métodos de subespaço para estimar a resposta do canal: baseado na SVD e na decomposição de correlação canônica (CCD - *Canonical Correlation Decomposition*) da matriz de correlação cruzada do sinal recebido pelas duas antenas. O resultado da simulação mostra que o método baseado na CCD supera o desempenho do método baseado na SVD. Maiores detalhes da CCD podem ser obtidos em (WU; WONG, 1994).

Considerou-se em (YU; MADSEN, 1999) a implementação em tempo real usando a captura em subespaço (NA-CSVD - *Noise Average Cross-Terms Singular Value Decomposition*), descrito em (PANGO; CHAMPAGNE, 1998), adaptado para o MUD grupo-cego híbrido. O algoritmo NA-CSVD é um novo e eficiente algoritmo de captura em subespaço do tipo QR *Jacobi* que tem complexidade  $O(N\tilde{K})$ , onde  $N$  é o ganho de processamento e  $\tilde{K}$  é o número de usuários intracelular. É mostrado em (YU; MADSEN, 1999) que a implementação do NA-CSVD do MUD híbrido supera o desempenho do detector puramente cego. Os resultados de simulação em (YU; MADSEN, 1999) mostram que o detector grupo-cego híbrido com algoritmo NA-CSVD tem a vantagem de ter baixa complexidade enquanto tem, claramente, pior desempenho do que as implementações SVD e FASIR (FASIR - *Fast Subspace Iteration with Ritz Acceleration*) encontrado em (HOST-MADSEN, 1999).

A partir da forma de detecção apresentada em (WANG; MADSEN, 1999a) é apresentado em (WANG; MADSEN, 2000) uma potente técnica de iteração que suprime a interferência de múltiplo acesso e realiza a decodificação da informação de forma realimentada, denominado MUD turbo, que é especialmente útil para comunicações sem fio por pacote multimídia. Como em (WANG; MADSEN, 1999a), em (WANG; MADSEN, 2000) emprega-se múltiplas antenas para suprimir a interferência e aprimorar o sinal. Apresenta também uma breve discussão sobre os problemas de supressão da interferência de banda estreita e do ruído impulsivo, duas outras fontes de interferência em rádio frequência presente em rede multimídia sem fio. As simulações em (WANG; MADSEN, 2000) mostram que o desempenho do sistema com MUD turbo apresenta desempenho próximo a sistema de usuário simples (*single-user*).

O desempenho analítico do detector apresentado em (HOST-MADSEN, 1999) e em (HOST-MADSEN, 1998) foi desenvolvido em (H.-MADSEN; WANG, 2002), onde são analisados o desempenho de alguns detectores lineares, incluindo o detector MMSE cego de inversão direta da matriz (DMI - *Direct-Matrix-Inversion*), o detector MMSE linear cego baseado em projeção em subespaço e os detectores híbridos grupo-cego nas formas I e II. São estabelecidos os teoremas de limite assintótico para cada um dos estimadores destes detectores (quando o tamanho de amostras do sinal é suficientemente grande), baseado na expressão aproximada das SINR de saída e BER. Estes resultados analíticos são comparados com o desempenho destes detectores em um sistema CDMA equicorrelacionado. Resultados de simulação são comparados aos resultados analíticos mostrando excelente consistência para um número grande de amostras do sinal recebido.

Até o presente, na literatura especializada referente a MUD grupo-cego considera-se conhecidos os parâmetros dos usuários intercelulares e portanto não caracteriza um cenário totalmente realista. Visando resolver esse problema, foi proposto em (XU; CHENG, 2003) um algoritmo adaptativo de estimativa de posto (AREA - *Adaptive Rank Estimation Algorithm*) para modelo de ruído AWGN ou ruído colorido. As três principais contribuições neste artigo são:

1. A caracterização de problema de posto mal condicionado tem sido associada à degradação de desempenho em MUD grupo-cego. A introdução de erros na estimativa de posto pode causar degradação ou mesmo ganho de desempenho. Na região de alta SNR a sobre-estimativa do posto pode resultar em ganho de desempenho do detector; por outro lado, essa sobre-estimativa pode conduzir a uma degradação significativa de desempenho na região de alta SNR. Já para a sub-estimativa de posto ocorre degradação de desempenho tanto em alta como em baixa SNR. No entanto, a sobre-estimativa do posto resultará em estimativa de canal inadequada (HOST-MADSEN, 1999), (HOST-MADSEN, 1998) e (H.-MADSEN; WANG, 2002).
2. O artigo ainda propõe um critério heurístico para a estimativa inicial do posto que é robusto para casos de ruídos não branco.
3. A introdução de um critério hipotético de teste para a decisão do subespaço do sinal e do posto, reduz o problema do posto mal dimensionado, selecionando o mais provável posto para o MUD grupo-cego.

Resultados de simulação em (XU; CHENG, 2003) mostram que o desempenho do MUD grupo-cego usando o algoritmo AREA é comparável ao MUD grupo-cego com o conhecimento perfeito

do posto.

O sistema considerado em (H.-MADSEN; WANG, 2002) é um sistema CDMA síncrono com modulação BPSK transmitido através de um canal AWGN. Investiga-se em (MADSEN; BAHNG, 2004) o desempenho do MUD cego em sistemas CDMA multipercurso com múltiplas antenas e com modulação arbitrária. Obteve-se um teorema de limite assintótico para a estimativa do detector linear cego, quando o tamanho do sinal recebido amostrado é grande; adicionalmente, obteve-se uma expressão estimada para o SINR de saída médio e a BER, considerando modulações BPSK e QPSK (QPSK - *Quaternary Phase-Shift Keying*). Correspondentes resultados foram obtidos para o MUD grupo-cego. Exemplos numéricos em (MADSEN; BAHNG, 2004) demonstram o excelente casamento entre os valores analíticos e os resultados de simulação.

Em (WANG; MADSEN, 1999b) foi desenvolvido um MUD grupo-cego para o enlace reverso em sistemas CDMA (unidade móvel para a estação rádio base). O detector faz uso da seqüência de espalhamento dos usuários conhecidos para construir os coeficientes de grupo para cancelar a interferência intracelular. Entretanto, esta técnica demanda a estimativa do canal multipercurso e os atrasos de todos os usuários conhecidos (intracelular). A modificação proposta em (ZHANG; ZHANG, 2005) para os sistemas CDMA com detecção linear cega e canal com desvanecimento de multipercurso, utiliza a informação de correlação entre os consecutivos sinais recebidos para gerar os correspondentes coeficientes do grupo. É mostrado em (ZHANG; ZHANG, 2005) que, incorporando este grupo de coeficientes, o detector proposto tem ganho de desempenho em ambientes de enlace direto e de enlace reverso. Comparando com o detector grupo-cego, o novo método necessita somente da estimativa do canal multipercurso do usuário desejado e não requer a estimativa do canal dos outros usuários. Resultados de simulação em (ZHANG; ZHANG, 2005) mostram que o detector proposto supera o desempenho do MUD cego convencional e apresenta desempenho um pouco degradado em relação ao MUD grupo-cego.

### **3.4 Técnica de Projeção em Subespaços Aplicada ao Problema da Detecção MuD Grupo-Cego e Cego**

Em um sistema celular todos os códigos dos usuários dentro de uma célula são conhecidos, enquanto tipicamente os códigos dos usuários interferentes fora e ao redor da célula são desconhecidos. Estes usuários interferentes das células vizinhas é um sério problema para detecção multiusuário já que,



em média, de acordo com (HOST-MADSEN, 1998) um terço dos interferentes são provenientes de outra célula, ou seja, causam interferência de múltiplo acesso intercelular (VITERBI, 1994). Os detectores cegos, utilizando técnica de aproximação em subespaço inicialmente proposto em (WANG; POOR, 1998b), não consideram o fato de que os códigos dos usuários interferentes dentro da célula são conhecidos pela estação base, somente do usuário de interesse.

Em (HOST-MADSEN, 1998) foi proposto um detector multiusuário a partir da utilização da técnica de aproximação em subespaço, que desacopla a interferência gerada pelos dois tipos de interferentes conhecidos e desconhecidos, e que utiliza as informações dos códigos dos usuários conhecidos e o fato de que a detecção é feita para todos os usuários conhecidos na estação rádio-base. Esse detector é denominado em (HOST-MADSEN, 1998) de detector grupo-cego. Pelo fato de não envolver o conhecimento dos códigos dos usuários interferentes intercelulares, a detecção grupo-cega é claramente vantajosa, em termos de complexidade computacional em relação à cega.

Considere o problema da detecção multiusuário linear em diferentes cenários, tabela 3.1, onde são conhecidos parcialmente os parâmetros dos usuários ativos no sistema, onde  $L$  é o número de ramos utilizados para a recuperação do sinal. Para cada cenário, existe uma forma mais conveniente de se apresentar a formulação do sistema visando o melhor entendimento das variáveis envolvidas no processo de detecção.

Tabela 3.1: Cenários da detecção multiusuário

Canal	Parâmetros p/ o $k$ -ésimo usuário
1. AWGN síncrono;	$A_k; \sigma^2; \{S_k\}$ .
2. AWGN assíncrono;	$\tau_k; A_k; \sigma^2; \{S_k\}$ .
3. Desvanecimento plano síncrono (Rayleigh Plano síncrono);	$\alpha_k; \theta_k; A_k; \sigma^2; \{S_k\}$ .
4. Desvanecimento plano assíncrono (Rayleigh Plano assíncrono);	$\alpha_k; \theta_k; \tau_k; A_k; \sigma^2; \{S_k\}$ .
5. Desvanecimento multipercurso (Rayleigh Seletivo em frequência);	$\alpha_{k,1} \dots \alpha_{k,L}; \theta_{k,1} \dots \theta_{k,L}; \tau_{k,1} \dots \tau_{k,L};$ $A_{k,1} \dots A_{k,L}; \sigma^2; \{S_{k,1} \dots S_{k,L}\}$ .

A seguir, para um melhor entendimento, inicia-se a formulação do problema da detecção multiusuário em canal AWGN síncrono, onde são conhecidas apenas as seqüências de espalhamento dos usuários pertencentes a uma determinada célula, enquanto os usuários das demais células<sup>1</sup> são tratados como interferentes, porém desconhece-se seus parâmetros (número de usuários, seqüências de espalhamento, atrasos, ganhos de canal, etc). A este cenário denomina-se detecção MUD semi-cega ou grupo-cega.

<sup>1</sup>Considera-se aqui ambiente de comunicação sem fio multicelular

Na fase de desenvolvimento deste trabalho, a formulação do problema e a análise dos detectores grupo-cegos serão estendidas a canais mais realistas.

### 3.5 Modelo do Sistema com Projeção em Subespaços

A matriz de autocorrelação de  $\mathbf{r}$ , equação (2.5), é dada por:

$$\mathbf{C}_r = \mathbb{E}[\mathbf{r}\mathbf{r}^T] = \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{S}}^T + \check{\mathbf{S}}\check{\mathbf{A}}^2\check{\mathbf{S}}^T + \sigma^2\mathbf{I} \quad (3.18)$$

Assumiremos que todos os códigos, representado pelas equações (2.3), (2.4) e (2.5), dos usuários conhecidos e desconhecidos são linearmente independentes.

#### 3.5.1 Detectores Descorrelacionadores Grupo-Cegos

De acordo com (HOST-MADSEN, 1998), a detecção multiusuário linear capaz de desacoplar usuários interferentes pode ser obtida desenvolvendo-se um método que requer somente uma decomposição em valores singulares SVD, comum a todos os usuários. Este método é baseado na aproximação ortogonal. Primeiro define-se a projeção no espaço  $\tilde{\mathbf{S}}$  dado por:

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{S}}^T\tilde{\mathbf{S}})^{-1}\tilde{\mathbf{S}}^T \quad (3.19)$$

com  $\tilde{\mathbf{S}} = [\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_{\tilde{K}}]$ . E o complemento da ortogonal da projeção é dado por:

$$\mathbf{P}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P} \quad (3.20)$$

A decomposição em autovalores da matriz  $\mathbf{P}^\perp\mathbf{C}_r\mathbf{P}^\perp$  é dada por:

$$\mathbf{P}^\perp\mathbf{C}_r\mathbf{P}^\perp = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_s & \tilde{\mathbf{U}}_n & \tilde{\mathbf{U}}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_s^T \\ \tilde{\mathbf{U}}_n^T \\ \tilde{\mathbf{U}}_o^T \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

onde  $\tilde{\Lambda}_s = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{\tilde{K}})$  com  $\tilde{\lambda}_i > \sigma^2$ ,  $\text{diag}(\cdot)$  é a matriz cujo diagonal principal assume os valores do parênteses e os outros valores são zero,  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{\tilde{K}}^2$  são os autovetores correspondentes aos autovalores,  $\tilde{\mathbf{U}}_o$  tem  $\tilde{K}$  colunas<sup>3</sup> e  $\tilde{\mathbf{U}}_n$  tem  $N - (\tilde{K} - \check{K})$  colunas. Esta forma de detecção, conforme (WANG; MADSEN, 1999b), denomina-se detector grupo-cego da forma I. Da forma I porque é obtido da decomposição da matriz  $\mathbf{P}^\perp\mathbf{C}_r\mathbf{P}^\perp$  enquanto o detector grupo-cego da forma II é obtido da decomposição da matriz  $\mathbf{C}_r$ .

<sup>2</sup>Na equação o til é o valor aproximado e  $\check{K}$  é o número de usuários desconhecidos

<sup>3</sup> $\tilde{K}$  é o número de usuários conhecidos

Conforme demonstrado em (HOST-MADSEN, 1998) o detector descorrelacionado é dado por:

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{sgn} \left( \left( \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^T \left( \mathbf{I} - \mathbf{C}_r \tilde{\mathbf{U}}_s \left( \tilde{\Lambda}_s - \sigma^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_s^T \right) \mathbf{r} \right) \quad (3.22)$$

### 3.5.2 Detectores Grupo-Cegos Híbridos

Os detectores grupo-cegos híbridos são assim chamados por combinar os detectores descorrelacionadores e os detectores MMSE. Conforme (HOST-MADSEN, 1999) adota-se o descorrelacionador entre os usuários conhecidos e o MMSE entre os usuários desconhecidos.

Como no caso dos detectores descorrelacionadores grupo-cegos, para a solução dos detectores híbridos, calcula-se uma vez o subespaço de forma que seja comum para todos os usuários. Conforme demonstrado em (HOST-MADSEN, 1999) os detectores grupo-cegos híbridos são dados por:

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{sgn} \left( \left( \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^T \left( \mathbf{I} - \mathbf{C}_r \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\Lambda}_s^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_s^T \right) \mathbf{r} \right) \quad (3.23)$$

cujas matrizes são obtidas das equações (3.19), (3.20) e (3.21), assim como, pelo sinal recebido  $\mathbf{r}$ .

Note-se que o detector grupo-cego híbrido da equação (3.23) é muito similar ao detector descorrelacionador grupo-cego da equação (3.22). A única diferença é que  $\tilde{\Lambda}_s - \sigma^2 \mathbf{I}$  é trocado por  $\tilde{\Lambda}_s$ .

Em geral, os detectores MMSE têm desempenho superior em relação aos detectores descorrelacionadores (POOR; VERDU, 1997) e seria natural estudar os detectores MMSE grupo-cegos. Entretanto, os detectores híbridos têm algumas vantagens. Para os usuários conhecidos, o detector descorrelacionador não precisa estimar a amplitude dos sinais recebidos de interesse, enquanto que a solução MMSE requer a estimativa das potências dos usuários. Por outro lado, o detector descorrelacionador requer, para os usuários desconhecidos, a estimativa da potência do ruído e é também dependente da estimativa precisa do número de usuários, enquanto o detector MMSE não possui esta deficiência, equação (3.22). Com isso, justifica-se o uso do detector descorrelacionador para os usuários conhecidos e o uso do detector MMSE para os usuários desconhecidos no detector grupo-cego híbrido, resultando em (3.23).

Para (HOST-MADSEN, 1999) não parece possível derivar o detector MMSE verdadeiro pelo método usado para os detectores grupo-cegos híbridos ou descorrelacionadores, mas um caminho para fazer a equação (3.23) se aproximar da equação do MMSE verdadeiro é usar a seguinte expressão:

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{sgn} \left( \left( \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}} + \sigma^2 \tilde{\mathbf{A}}^{-2} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^T \left( \mathbf{I} - \mathbf{C}_r \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\Lambda}_s^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_s^T \right) \mathbf{r} \right) \quad (3.24)$$

O argumento da equação (3.24) é heurístico. Primeiro encontra-se a solução MMSE no subespaço representado pelos usuários conhecidos, ignorando todos os interferentes intercelulares com usuários desconhecidos. Para cada usuário, acha-se a solução MMSE no subespaço representado por esta solução e  $\tilde{\mathbf{U}}_s$ . Esta solução pode evitar a amplificação de ruído, inerente à equação (3.23), mas isto não é uma solução MMSE e não satisfaz a ortogonalidade ou as condições do detector MMSE.

No capítulo 4 será analisado o desempenho analítico dos detectores MuD grupo-cegos e cegos através do teorema do limite assintótico. Será analisado, para melhor entendimento dos resultados analíticos, dois casos especiais: resultados para sinais ortogonais e sinais equicorrelacionados, em que compara-se a saída média SINR dos diferentes detectores.

## Capítulo 4

# Desempenho Analítico dos Detectores Multiusuário Grupo-Cegos e Cegos

Neste capítulo obtém-se o desempenho analítico dos detectores lineares: DMI, MMSE cego, MMSE grupo-cego e os detectores híbridos da forma I e da forma II. São estabelecidos também o teorema do limite assintótico para cada um destes detectores baseado na expressão aproximada dos SINRs e dos BERs.

Em (H.-MADSEN; WANG, 2002) é feita uma análise de desempenho de detetores multiusuário cego e grupo-cego aplicáveis a sistemas DS/CDMA síncronos. Reescrevendo a equação (2.5) para o total de usuários  $K$  tem-se:

$$\mathbf{r}[i] = \sum_{k=1}^K A_k b_k[i] \mathbf{s}_k + \mathbf{n}[i] = \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{b}[i] + \mathbf{n}[i], \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4.1)$$

onde  $K$  é o número total de usuários,  $A_k > 0$  são as amplitudes recebidas,  $b_k[i] \in \{+1, -1\}$  são amostras de bits de dados e  $\mathbf{s}_k$  a seqüência de assinatura de energia unitária do  $k$ -ésimo usuário;  $\mathbf{n}[i] \approx \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$  isto é ruído gaussiano branco aditivo de média zero e variância  $\sigma^2$  ( $\mathbf{I}_N$  é a matriz identidade  $N \times N$ ). Os sinais DS/CDMA são coletados em forma de vetor construindo as matrizes sinal: amplitude  $\mathbf{A} = \text{diag}(A_1, \dots, A_K)$ , e bits de informação  $\mathbf{b}[i] = [b_1[i], \dots, b_K[i]]^T$ . Em um sistema de espalhamento espectral de seqüência direta com ganho de processamento,  $N = \frac{T}{T_c}$  onde  $T$  é igual ao período de bit de informação e  $T_c$  é o período de chip, a seqüência da assinatura do  $k$ -ésimo usuário é da forma:

$$\mathbf{s}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} [s_{1,k} \ s_{2,k} \ \dots \ s_{N,k}]^T, \quad s_{n,k} \in \{+1, -1\} \quad (4.2)$$

As pesquisas nessa área têm sido focadas no desenvolvimento de algoritmos de processamento de sinal para alcançar melhoria no desempenho dos receptores MUD. A avaliação do desempenho

é largamente feita via simulação computacional. A dificuldade principal em se obter expressões para o desempenho analítico confiáveis está no fato que nesses métodos cegos, as estimativas são obtidas a partir dos sinais recebidos. No entanto, estas estimativas coincidem com os sinais verdadeiros somente quando o número de sinais recebidos  $M$  tendem para o infinito. A partir do teorema de limite central (veja Apêndice A), (H.-MADSEN; WANG, 2002) derivou resultados para o desempenho utilizando método de múltiplo acesso de detecção cego e grupo-cego. Para canal AWGN síncrono, estes resultados resultam bem ajustados com os de simulação.

## 4.1 Forma Geral para o Desempenho Analítico de Detectores Lineares Adaptativos Cegos ou Grupo-Cegos

Considere a expressão para o sinal DS/CDMA recebido (4.1). Assuma que o usuário 1, na equação (2.30), é o usuário de interesse. Um detector linear para o usuário 1 é um vetor determinístico  $\mathbf{w}_1 \in \Re^N$  tal que  $b_1[i]$  é demodulado de acordo com:

$$\hat{b}_1[i] = \text{sign}(\mathbf{w}_1^T \mathbf{r}[i]) \quad (4.3)$$

A saída deste detector linear no tempo discreto (correspondente ao período de bit  $T$ )  $i$  é dado por:

$$\mathbf{w}_1^T \mathbf{r}[i] = A_1 b_1[i] \mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_1 + \sum_{k=2}^K A_k b_k[i] \mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_k + \mathbf{w}_1^T \mathbf{n}[i] \quad (4.4)$$

Em (4.4), o primeiro termo é o sinal projetado, o segundo termo é a interferência de múltiplo acesso MAI projetada no subespaço e o último termo é o ruído de fundo filtrado por  $\mathbf{w}_1$ . Assuma que o fluxo de bit dos usuários são independentes e o ruído é independente dos bits dos usuários.

A relação sinal interferente mais ruído, SINR na saída do detector linear  $\mathbf{w}_1$  é dada por:

$$\begin{aligned} \text{SINR}(\mathbf{w}_1) &\triangleq \frac{\mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left\{ \mathbf{w}_1^T \mathbf{r}[i] | b_1[i] \right\}^2 \right\}}{\mathbb{E} \left\{ \text{var} \left\{ \mathbf{w}_1^T \mathbf{r}[i] | b_1[i] \right\} \right\}} \\ &= \frac{A_1^2 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_1)^2}{\sum_{k=2}^K A_k^2 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_k)^2 + \sigma^2 \|\mathbf{w}_1\|^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde  $\mathbb{E} \left\{ \mathbf{w}_1^T \mathbf{r}[i] | b_1[i] \right\}^2$  é o valor médio quadrático de projeção  $\mathbf{w}_1^T \mathbf{r}[i]$ , dado que  $b_1[i]$  foi transmitido.

A taxa de erro de bit BER do detector linear  $\mathbf{w}_1$  é dada pela média aritmética das taxas de

erros correspondentes a todas as possíveis combinações dos bits dos usuários interferentes<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} P_e(\mathbf{w}_1) &= P\left(\hat{b}_1[i] \neq b_1[i]\right) \\ &= \frac{1}{2^{K-1}} \sum_{[b_2 \dots b_K] \subset \{\pm 1\}^{K-1}} Q\left(\frac{A_1 \mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_1 + \sum_{k=2}^K A_k b_k \mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_k}{\|\mathbf{w}_1\| \sigma}\right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Agora suponha que a estimativa  $\hat{\mathbf{w}}_1$  do detector linear  $\mathbf{w}_1$  é obtida a partir do sinal recebido  $\{\mathbf{r}[i]\}_{i=1}^M$ , onde  $M$  corresponde ao tamanho da janela de observação. Define-se  $\Delta \mathbf{w}_1 \triangleq \hat{\mathbf{w}}_1 - \mathbf{w}_1$ . Aparentemente,  $\hat{\mathbf{w}}_1$  e  $\Delta \mathbf{w}_1$  são vetores aleatórios e são função das quantidades aleatórias  $\{\mathbf{b}[i], \mathbf{n}[i]\}_{i=1}^M$ . Em cenários típicos de detectores multiusuários adaptativos (WANG; POOR, 1998b), a estimativa para o detector linear  $\hat{\mathbf{w}}_1$  é empregada em futuras demodulações do sinal recebido  $\mathbf{r}[j]$ ,  $j > M$ . Assim, a saída do detector linear é dada por:

$$\hat{\mathbf{w}}_1^T \mathbf{r}[j] = \mathbf{w}_1^T \mathbf{r}[j] + \Delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{r}[j], \quad j > M \quad (4.7)$$

onde o primeiro termo em (4.7) representa a saída do detector linear verdadeiro  $\mathbf{w}_1$ , que tem a mesma forma de (4.4). O segundo termo representa um termo de ruído adicional causado pelo erro na estimativa de  $w_1$ ,  $\Delta \mathbf{w}_1$ . De (4.7) a SINR média na saída do detector linear estimado  $\hat{\mathbf{w}}_1$  é dado por:

$$\overline{SINR(\hat{\mathbf{w}}_1)} = \frac{A_1^2 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_1)^2}{\sum_{k=2}^K A_k^2 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_k)^2 + \sigma^2 \|\mathbf{w}_1\|^2 + \mathbb{E}\left\{(\Delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{r}[j])^2\right\}} \quad (4.8)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{(\Delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{r}[j])^2\right\} &= tr\left(\mathbb{E}\left\{\Delta \mathbf{w}_1 \Delta \mathbf{w}_1^T\right\} \mathbb{E}\left\{\mathbf{r}[j] \mathbf{r}[j]^T\right\}\right) \\ &= \frac{1}{M} tr(\mathbf{C}_w \mathbf{C}_r) \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde as matrizes de correlação para o erro de estimativa do detector linear e para o sinal recebido são, respectivamente, dados por:  $\frac{1}{M} \mathbf{C}_w \triangleq \mathbb{E}\left\{\Delta \mathbf{w}_1 \Delta \mathbf{w}_1^T\right\}$  e  $\mathbf{C}_r \triangleq \mathbb{E}\left\{\mathbf{r}[j] \mathbf{r}[j]^T\right\}$ . O operador matricial  $tr(\cdot)$  é calculado pela soma dos elementos da diagonal principal de uma determinada matriz  $tr(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^N c_{ii}$  com  $\mathbf{C}$  de dimensão  $N \times N$ .

Note-se que no processamento em série, por outro lado, o detector linear estimado também é usado para demodular o sinal  $\mathbf{r}[i]$ ,  $1 \leq i \leq M$ . Desde que  $\Delta \mathbf{w}_1$  é uma função de  $\{\mathbf{r}[i]\}_{i=1}^M$ , para valores fixos de  $i$ ,  $\Delta \mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{r}[i]$  são, em geral, correlacionados (H.-MADSEN; WANG, 2002). Entretanto, neste caso ainda são empregadas as equações (4.8), (4.9) como expressão aproximada de SINR. Evidentemente, à medida que  $M$  cresce, a correlação é reduzida.

<sup>1</sup>Combinação de todos os possíveis "padrões" de interferência de múltiplo acesso, resultando em uma expressão binomial

Define-se a função densidade de probabilidade (pdf) para o detector linear estimado  $\hat{\mathbf{w}}_1$  como  $f(\hat{\mathbf{w}}_1)$ . A BER média deste detector é dada por (H.-MADSEN; WANG, 2002):

$$\overline{P_e(\hat{\mathbf{w}}_1)} = \int P_e(\hat{\mathbf{w}}_1) f(\hat{\mathbf{w}}_1) d\hat{\mathbf{w}}_1 \quad (4.10)$$

onde  $P_e(\hat{\mathbf{w}}_1)$  é obtido diretamente de (4.6). Para obter a SINR média na saída do detector linear estimado  $\hat{\mathbf{w}}_1$  é suficiente encontrar a matriz de autocorrelação  $\mathbf{C}_w$ . A BER média do detector linear estimado depende de sua distribuição  $f(\hat{\mathbf{w}}_1)$ . Pode-se mostrar através de simulação<sup>2</sup>, que a BER pode ser bem aproximada por:

$$\overline{P_e(\hat{\mathbf{w}}_1)} \cong Q\left(\sqrt{SINR(\hat{\mathbf{w}}_1)}\right) \quad (4.11)$$

para os detectores cegos e grupo-cegos quando  $M$  é razoavelmente grande ( $M \rightarrow \infty$ ).

Os detectores lineares MMSE cegos minimizam o valor do erro quadrático médio (MSE - *mean-square error*) entre a saída do detector e os bits de dados transmitidos dos usuários de interesse. O detector de inversão direta da matriz de correlação (DMI - *Direct-Matrix-Inversion*) implementa diretamente a inversão da matriz de correlação, enquanto que detectores baseados em subespaço fazem a inversão após identificar um sinal-subespaço, projetando o sinal recebido neste subespaço. Ambos os detectores cegos MMSE e DMI podem ser estimados baseando-se diretamente no sinal recebido  $\{\mathbf{r}[i]\}_{i=1}^M$ , com conhecimento somente da forma de onda de espalhamento do usuário desejado  $\mathbf{s}_1$ . Para os detectores grupos-cegos, além do  $\mathbf{s}_1$ , a forma de onda de espalhamento de alguns outros usuários (usuários pertencentes à mesma célula do usuário de interesse) são conhecidos no receptor. Assim os detectores grupo-cegos suprimem os interferentes devido ao uso do código de espalhamento dos usuários conhecidos através do método de subespaço.

Em (H.-MADSEN; WANG, 2002), a partir do estabelecimento do teorema do limite assintótico<sup>3</sup> para cada uma das estimativas dos detectores acima, foi mostrado que, para valores fixos de  $K$  e  $N$ , e conjuntos com valores fixos de seqüência de espalhamento,  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ , o erro de estimativa para o detector MUD linear tende a uma distribuição Gaussiana:

$$\sqrt{M}(\hat{\mathbf{w}}_1 - \mathbf{w}_1) \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_w), \text{ quando } M \rightarrow \infty \quad (4.12)$$

A covariância do erro  $\mathbf{C}_w$  é dada para cada um dos detectores MUD lineares baseado em expressões aproximadas das saídas médias de SINR e BER dadas. A expressão do desempenho

<sup>2</sup>Veja resultados numéricos na seção 5

<sup>3</sup>Veja subseção 4.2



analítico de vários detectores estimados ajustam-se bem aos resultados simulados para o tamanho da amostragem  $M$  finito relativamente grande.

Através dos resultados analíticos obtidos em (H.-MADSEN; WANG, 2002), pode-se concluir que os detectores cegos baseados em subespaço superam o desempenho dos detectores cegos DMI em altas relações sinal-ruído SNR (*signal-to-noise*) e em regiões de baixa correlação cruzada dos sinais DS/CDMA; entretanto em baixa SNR e em regiões de alta correlação cruzada este resultado se inverte. Os detectores grupo-cego da forma II em (H.-MADSEN; WANG, 2002) são resistentes a sinais com altas correlações cruzadas e superam o desempenho dos detectores cegos. O detector grupo-cego forma I é resistente a ambos os sinais: com altas correlações cruzada e com baixo SNR.

## 4.2 Teorema do Limite Assintótico para Detecção Cega e Grupo-Cega

Nesta secção são apresentados os principais resultados do teorema do limite assintótico para os detectores multiusuários linear grupo-cego e cego. Os resultados das subsecções subsequentes são baseadas na referência (H.-MADSEN; WANG, 2002).

### 4.2.1 Detectores Cego MMSE Linear

Considere novamente o sinal de múltiplo acesso recebido e amostrado em banda base, expresso em (4.1). O detector MMSE linear para o usuário 1 é definido como:

$$\mathbf{w}_1 = \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \mathbb{E} \left\{ \left( \frac{1}{\mu} b_1[i] - \mathbf{w}^T \mathbf{r}[i] \right)^2 \right\} = \frac{A_1}{\mu} \mathbf{C}_r^{-1} \mathbf{s}_1 \quad (4.13)$$

com

$$\mathbf{C}_r \triangleq \mathbb{E} \{ \mathbf{r}[i] \mathbf{r}[i]^T \} = \mathbf{S} \mathbf{A}^2 \mathbf{S}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_N \quad (4.14)$$

onde  $\mu$  é uma constante positiva qualquer. Já que a regra de detecção linear (4.3) é invariante para um escalar positivo o detector linear em (4.13) também é invariante para a constante positiva  $\frac{A_1}{\mu}$ . Para simplificar, escolhe-se  $\mu = A_1$  portanto  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{C}_r^{-1} \mathbf{s}_1$ .

A autodecomposição da matriz de autocorrelação  $\mathbf{C}_r$  em (4.14) é:

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{U}_s \Lambda_s \mathbf{U}_s^T + \sigma^2 \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T \quad (4.15)$$

onde  $\Lambda_s = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$  contém os  $K$  maiores autovalores de  $\mathbf{C}_r$ ;  $\mathbf{U}_s = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K]$  contém os autovetores correspondentes aos  $K$  maiores autovalores em  $\Lambda_s$ ;  $\mathbf{U}_n = [\mathbf{u}_{K+1}, \dots, \mathbf{u}_N]$  contém os  $(N - K)$  autovetores correspondentes aos menores autovalores  $\sigma^2$  de  $\mathbf{C}_r$ . Sabe-se que  $\text{Im}(\mathbf{U}_s) =$

$\text{Im}(\mathbf{S})$  é o subespaço do sinal e  $\text{Im}(\mathbf{U}_n) \perp \text{Im}(\mathbf{S})$  é subespaço de ruído (para detalhes sobre posto ver Apêndice B). O detector MMSE linear  $\mathbf{w}_1$  em (4.13) pode também ser escrito em termos das componentes do subespaço do sinal (WANG; POOR, 1998b):

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T \mathbf{s}_1 \quad (4.16)$$

Correspondendo às duas formas do detector linear MMSE descritas em (HOST-MADSEN, 1999), existem duas aproximações para a implementação cega, ou seja, a implementação que assume conhecimento da seqüência de espalhamento do usuário desejado. No método DMI, a matriz de autocorrelação  $\mathbf{C}_r$  em (4.13) é substituída pela correspondente amostra estimada:

$$\hat{\mathbf{C}}_r = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{r}[i] \mathbf{r}[i]^T \quad (4.17)$$

$$\hat{\mathbf{w}}_1 = \hat{\mathbf{C}}_r^{-1} \mathbf{s}_1 \quad (\text{DMI}) \quad (4.18)$$

Enquanto que no método do subespaço, os autocomponentes  $\Lambda_s$  e  $\mathbf{U}_s$  em (4.16) são substituídos pelos correspondentes autovalores e autovetores da matriz de autocorrelação estimada  $\hat{\mathbf{C}}_r$ , resultando em:

$$\hat{\mathbf{C}}_r = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{r}[i] \mathbf{r}[i]^T = \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\Lambda}_s \hat{\mathbf{U}}_s^T + \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\Lambda}_n \hat{\mathbf{U}}_n^T \quad (4.19)$$

$$\hat{\mathbf{w}}_1 = \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\Lambda}_s^{-1} \hat{\mathbf{U}}_s^T \mathbf{s}_1 \quad (\text{Subespaço}) \quad (4.20)$$

onde  $\hat{\Lambda}_s$  e  $\hat{\mathbf{U}}_s$  contém, respectivamente, os  $K$  maiores autovalores e os correspondentes autovetores de  $\hat{\mathbf{C}}_r$ ;  $\hat{\Lambda}_n$  e  $\hat{\mathbf{U}}_n$  contém, respectivamente, os dos autovalores e autovetores restantes de  $\hat{\mathbf{C}}_r$ . As equações representam o detector MMSE linear em subespaço cego obtido a partir de (4.19) e (4.20).

#### 4.2.2 Detectores Grupo-Cego Lineares

Nos detectores multiusuários grupo-cego é assumido que os receptores tem o conhecimento das formas de ondas das assinaturas dos usuários intracelular, mas não dos usuários intercelulares. Sem perder a generalidade, assume-se que as primeiras formas de onda dos  $\tilde{K}$  usuários são conhecidos pelos receptores, enquanto que o restante  $\check{K}$  são dos usuários desconhecidos. Define-se  $\tilde{\mathbf{S}} \triangleq [\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_{\tilde{K}}]$ . Assume-se que  $\tilde{\mathbf{S}}$  tem posto de coluna completo. Define-se  $\tilde{\mathbf{e}}_k$  como o  $k$ -ésimo vetor unitário em  $\mathfrak{R}^{\tilde{K}}$ . O detector híbrido grupo-cego linear reduz a zero a interferência causada pelos  $\tilde{K}$  usuários conhecidos e minimiza a interferência advinda dos restantes  $\check{K}$  usuários desconhecidos

de acordo com o critério MMSE. Em particular, o detector para o usuário 1 é dado pela solução de otimização do seguinte problema:

$$\mathbf{w}_1 = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \mathbb{E} \left\{ (A_1 b_1[i] - \mathbf{w}^T \mathbf{r}[i])^2 \right\}, \quad \mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{e}}_1^T \quad (4.21)$$

Conforme mostrado em (WANG; MADSEN, 1999b) a solução de (4.21) é dada em termos das componentes do subespaço de sinal de  $\mathbf{C}_r$ :

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T \tilde{\mathbf{S}} \left( \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T \tilde{\mathbf{S}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (4.22)$$

O detector híbrido grupo-cego linear na forma II é obtido substituindo-se as autocomponentes de  $\mathbf{C}_r$  em (4.22) por aquelas da correspondente matriz de correlação estimada  $\hat{\mathbf{C}}_r$  dada pela equação (4.19). Neste caso, observe-se que apesar do sistema desconhecer os parâmetros e a quantidade  $\check{K}$  usuários, a dimensão da matriz na decomposição na forma II é obtida avaliando-se os  $K = \tilde{K} + \check{K}$  maiores autovalores da decomposição de  $\hat{\mathbf{C}}_r$  em (4.22).

Define-se a seguinte matriz projeção:

$$\bar{\mathbf{P}} \triangleq \mathbf{I}_N - \tilde{\mathbf{S}} \left( \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^T \quad (4.23)$$

com projeção do sinal no subespaço ortogonal  $\ker(\tilde{\mathbf{S}}^T)$ , (ver Apêndice B). Então é facilmente visto que a matriz  $\bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}_r \bar{\mathbf{P}}$  tem uma autodecomposição da forma:

$$\bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}_r \bar{\mathbf{P}} = [\bar{\mathbf{U}}_s \bar{\mathbf{U}}_n \bar{\mathbf{U}}_0] \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \mathbf{I}_{N-K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_s^T \\ \bar{\mathbf{U}}_n^T \\ \bar{\mathbf{U}}_0^T \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

onde  $\bar{\Lambda}_s = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{\check{K}})$ , com  $\bar{\lambda}_k > \sigma^2$ ; as colunas de  $\bar{\mathbf{U}}_s$  formam uma base ortonormal do subespaço  $\text{Im}(\mathbf{S}) \cap \ker(\tilde{\mathbf{S}}^T)$  (Apêndice B). Define-se  $\tilde{\mathbf{d}}_1$  e  $\tilde{\mathbf{m}}_1$  como, respectivamente, o detector decorrelacionador linear e o detector MMSE linear para o usuário desejado, assumindo que somente os primeiros  $\tilde{K}$  usuários estão presentes conforme (WANG; MADSEN, 1999b):

$$\tilde{\mathbf{d}}_1 \triangleq \tilde{\mathbf{S}} \left( \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (4.25)$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_1 \triangleq \tilde{\mathbf{S}} \left( \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}} + \sigma^2 \mathbf{I}_{\tilde{K}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (4.26)$$

Também é mostrado em (WANG; MADSEN, 1999b) que o detector híbrido grupo-cego linear definido por (4.21) pode ser expresso em termos das componentes do sinal subespaço de  $(\bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}_r \bar{\mathbf{P}})$  como:

$$\mathbf{w}_1 = (\mathbf{I}_N - \bar{\mathbf{U}}_s \bar{\Lambda}_s^{-1} \bar{\mathbf{U}}_s^T \mathbf{C}_r) \tilde{\mathbf{d}}_1 \quad (4.27)$$

Entretanto, conforme é mostrado em (WANG; MADSEN, 1999b) o detector MMSE grupo-cego linear é dado por:

$$\mathbf{w}_1 = (\mathbf{I}_N - \bar{\mathbf{U}}_s \bar{\Lambda}_s^{-1} \bar{\mathbf{U}}_s^T \mathbf{C}_r) \tilde{\mathbf{m}}_1 \quad (4.28)$$

Os detectores grupo-cego da forma I são formados pela substituição dos autocomponentes  $(\bar{\mathbf{P}}\mathbf{C}_r\bar{\mathbf{P}})$  em (4.27) e (4.28) por aqueles dos correspondentes amostragens estimadas  $(\widehat{\bar{\mathbf{P}}}\widehat{\mathbf{C}}_r\widehat{\bar{\mathbf{P}}})$ .

### 4.2.3 Resultados para os SINRs de Saída Assintóticos dos Detectores Cegos

A seguir são dados os resultados da distribuição assintótica dos detectores MMSE cegos conforme a equação (4.20). A prova é encontrada em (H.-MADSEN; WANG, 2002).

**Teorema 1** *Considere  $\mathbf{w}_1$  o detector MMSE linear verdadeiro dado por (4.13) [ou equivalente em (4.16)], e  $\hat{\mathbf{w}}_1$  como sendo o detector MMSE cego linear estimado dado por (4.20). Considere (4.15) a autodecomposição da matriz de autocorrelação  $\mathbf{C}_r$  do sinal recebido. Então:*

$$\sqrt{M}(\hat{\mathbf{w}}_1 - \mathbf{w}_1) \rightarrow \mathcal{N}(0, \mathbf{C}_w), \text{ quando } M \rightarrow \infty \quad (4.29)$$

com

$$\mathbf{C}_w = (\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_1) \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T + \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T - 2 \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^T \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T + \tau \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T \quad (4.30)$$

onde

$$\mathbf{D} \triangleq \text{diag}\{A_1^4(\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_1)^2, A_2^4(\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_2)^2, \dots, A_K^4(\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_K)^2\} \quad (4.31)$$

$$\tau \triangleq \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{s}_1^T \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T \mathbf{s}_1 \quad (\text{DMI cego}) \quad (4.32)$$

$$\triangleq \sigma^2 \mathbf{s}_1^T \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} (\Lambda_s - \sigma^2 \mathbf{I}_K)^{-2} \mathbf{U}_s^T \mathbf{s}_1 \quad (\text{Subespaço Cego}) \quad (4.33)$$

Para grandes valores de  $M$ , a covariância do detector cego linear  $\mathbf{C}_w = M \cdot \mathbb{E}\{\Delta \mathbf{w}_1 \Delta \mathbf{w}_1^T\}$  pode ser aproximado para a equação (4.30). Tem-se a equação (2.9) onde:

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}^T \mathbf{S} \quad (4.34)$$

O próximo resultado dá a expressão para o SINR médio de saída, definida por (4.30), do detector cego linear. A prova é encontrada em (H.-MADSEN; WANG, 2002).

*Corolário 1:*

$$\overline{\text{SINR}(\hat{\mathbf{w}}_1)} = \frac{A_1^2(\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_1)^2}{\sum_{k=2}^K A_k^2(\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_k)^2 + \sigma^2 \|\mathbf{w}_1\|^2 + \frac{1}{M} X} \quad (4.35)$$

$$X = \left[ (K+1)\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_1 - 2 \sum_{k=1}^K A_k^4 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_k)^2 (\mathbf{w}_k^T \mathbf{s}_k) + (N-K)\tau\sigma^2 \right]$$

O SINR médio de saída do detector linear cego é dado por (4.35) onde:

$$\mathbf{w}_l^T \mathbf{s}_k = \frac{1}{A_l^2} [\mathbf{R}(\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2})^{-1}]_{k,l}, \quad k, l = 1, \dots, K \quad (4.36)$$

$$\|\mathbf{w}_1\|^2 = \frac{1}{A_1^4} [(\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2})^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2})^{-1}]_{1,1} \quad (4.37)$$

$$\tau\sigma^2 = \mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_1 \quad (\text{DMI cego}) \quad (4.38)$$

$$= \frac{\sigma^4}{A_1^4} [(\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2})^{-1} \mathbf{A}^{-2} \mathbf{R}^{-1}]_{1,1} \quad (\text{Subespaço cego}) \quad (4.39)$$

Nota-se a partir da equação (4.35) que o desempenho diferente entre o detector cego DMI e o detector cego subespaço é causado pelo parâmetro  $\tau$  dado pelas equações (4.32) e (4.33). O detector com menor  $\tau$  tem um valor alto de saída SINR. Considere os  $\mu_1, \dots, \mu_K$  os autovalores da matriz  $\mathbf{R}$  dada por (2.9). Define-se  $\mu_{\min} = \min\{\mu_k\}$  e  $\mu_{\max} = \max\{\mu_k\}$ ,  $1 \leq k \leq K$ . Define-se também  $A_{\min} = \min\{A_k\}$  e  $A_{\max} = \max\{A_k\}$ ,  $1 \leq k \leq K$ . Os resultados a seguir dão condições o suficiente para o entendimento do porque um detector cego supera o outro em termos da SINR média de saída.

*Corolário 2:* Se  $\frac{A_{\min}^2}{\sigma^2} > \mu_{\max}$ , então:

$$\overline{SINR}_{\text{subespaço}} > \overline{SINR}_{\text{DMI}} \quad (4.40)$$

e se  $\frac{A_{\min}^2}{\sigma^2} < \mu_{\max}$ , então:

$$\overline{SINR}_{\text{subespaço}} < \overline{SINR}_{\text{DMI}}$$

*Prova:* Pode-se reescrever as equações (4.32) e (4.33) como:

$$\tau = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k} (\mathbf{s}_1^T \mathbf{u}_k)^2 \quad (\text{DMI Cego}) \quad (4.41)$$

$$\tau = \sigma^2 \sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k (\lambda_k - \sigma^2)^2} (\mathbf{s}_1^T \mathbf{u}_k)^2 \quad (\text{Subespaço Cego}) \quad (4.42)$$

Obtém-se a seguinte condição suficiente para que  $\tau_{\text{subespaço}} < \tau_{\text{DMI}}$ :

$$\lambda_k > 2\sigma^2, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4.43)$$

Por outro lado note que:

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{S} \mathbf{A}^2 \mathbf{S}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_N \succ A_{\min}^2 \mathbf{S} \mathbf{S}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_N. \quad (4.44)$$

Desde que os autovalores não zero de  $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$  são os mesmos daqueles de  $\mathbf{R} = \mathbf{S}^T\mathbf{S}$  e segue de (4.44) que:

$$\lambda_k \geq A_{\min}^2 \mu_k + \sigma^2, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4.45)$$

A primeira parte do *corolário* é formada pela combinação das equações (4.43) e (4.45). A segunda parte do *corolário* é provada de forma similar a primeira parte.

O próximo resultado dá um limite superior e inferior para o parâmetro  $\tau$  em termos da amplitude do usuário desejado  $A_1$ , da variância do ruído  $\sigma^2$  e dos dois autovalores extremos de  $\mathbf{C}_r$ .

*Corolário 3:* O parâmetro  $\tau$  definido em (4.32) e (4.33) satisfaz:

$$\left(1 - \frac{\sigma^2}{\lambda_{\min}}\right) \frac{1}{A_1^2} \leq \tau \sigma^2 \leq \left(1 - \frac{\sigma^2}{\lambda_{\max}}\right) \frac{1}{A_1^2} \quad (\text{DMI Cego}) \quad (4.46)$$

$$\frac{1}{\lambda_{\max} \left(\frac{\lambda_{\max}}{\sigma^2} - 1\right)} \cdot \frac{1}{A_1^2} \leq \tau \sigma^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min} \left(\frac{\lambda_{\min}}{\sigma^2} - 1\right)} \cdot \frac{1}{A_1^2} \quad (\text{Subespaço Cego}) \quad (4.47)$$

*Prova:* A prova da equação (4.42) e da igualdade seguinte é encontrado em (WANG; V.POOR, 1999):

$$\frac{1}{A_1^2} = \sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k - \sigma^2} (\mathbf{s}_1^T \mathbf{u}_k)^2 \quad (4.48)$$

#### 4.2.4 Resultados para os SINRs de Saída Assintóticos dos Detectores Grupo-Cegos

Os resultados seguintes mostram a distribuição assintótica do detector híbrido grupo-cego forma II. A prova é encontrada em (H.-MADSEN; WANG, 2002).

**Teorema 2** *Considere  $\hat{\mathbf{w}}_1$  o detector híbrido grupo-cego linear forma II dado por:*

$$\hat{\mathbf{w}}_1 = \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\Lambda}_s^{-1} \hat{\mathbf{U}}_s^T \tilde{\mathbf{S}} \left( \tilde{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\Lambda}_s^{-1} \hat{\mathbf{U}}_s^T \tilde{\mathbf{S}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (4.49)$$

*Então:*

$$\sqrt{M}(\hat{\mathbf{w}}_1 - \mathbf{w}_1) \rightarrow N(0, \mathbf{C}_w), \quad M \rightarrow \infty \quad (4.50)$$

com

$$\mathbf{C}_w = \mathbf{Q} \left[ (\mathbf{w}_1^T \mathbf{v}_1) \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T - 2 \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^T \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T \right] \mathbf{Q}^T + \tau \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T \quad (4.51)$$

onde

$$\mathbf{v}_1 \triangleq \tilde{\mathbf{S}} \left( \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T \tilde{\mathbf{S}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (4.52)$$

$$\mathbf{D} \triangleq \text{diag} \{ A_1^4 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_1)^2, \dots, A_K^4 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_K)^2 \} \quad (4.53)$$

$$\tau = \sigma^2 \mathbf{v}_1^T \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} (\Lambda_s - \sigma^2 \mathbf{I}_K)^{-2} \mathbf{U}_s^T \mathbf{v}_1 \quad (4.54)$$

$$\mathbf{Q} \triangleq \mathbf{I}_N - \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T \tilde{\mathbf{S}} \left( \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T \tilde{\mathbf{S}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^T \quad (4.55)$$

Define-se a seguinte matriz:

$$\mathbf{R} (\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2})^{-1} \mathbf{A}^{-2} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

onde a dimensão de  $\Psi_{11}$  é  $\tilde{K} \times \tilde{K}$ . Note que o lado direito da equação (4.56) é igual a  $(\mathbf{S}^T \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^T \mathbf{S})$  e portanto é simétrico. Define-se também:

$$\Pi \triangleq \left[ \mathbf{A}^{-2} (\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2})^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2})^{-1} \mathbf{A}^{-2} \right]_{1:\tilde{K}, 1:\tilde{K}} \quad (4.57)$$

$$\Xi \triangleq \left[ \mathbf{A}^{-2} (\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{A}^{-2})^{-1} \mathbf{A}^{-2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^{-2} \right]_{1:\tilde{K}, 1:\tilde{K}} \quad (4.58)$$

O próximo resultado fornece a expressão para a saída média SINR do detector híbrido grupo-cego forma II. A prova é encontrada em (H.-MADSEN; WANG, 2002).

*Corolário 4:* A saída média SINR do detector híbrido grupo-cego linear forma II estimado é dado por:

$$\overline{\text{SINR}(\hat{\mathbf{w}}_1)} = \frac{A_1^2}{\sum_{k=1}^{K-\tilde{K}} A_{\tilde{K}+k}^2 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_{\tilde{K}+k})^2 + \sigma^2 \|\mathbf{w}_1\|^2 + \text{tr}(\mathbf{C}_w \mathbf{C}_r)} \quad (4.59)$$

onde

$$\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_{\tilde{K}+k} = [\Psi_{12}^T \Psi_{11}^{-1}]_{k,1} \quad (4.60)$$

$$\|\mathbf{w}_1\|^2 = [\Psi_{11}^{-1} \Pi \Psi_{11}^{-1}]_{1,1} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{C}_w \mathbf{C}_r) &= \frac{1}{M} (K - \tilde{K}) [\Psi_{11}^{-1}]_{1,1} - 2 \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{K-\tilde{K}} A_{\tilde{K}+k}^4 [\Psi_{12}^T \Psi_{11}^{-1}]_{k,1}^2 \\ &\quad \cdot [\Psi_{22} - \Psi_{12}^T \Psi_{11}^{-1} \Psi_{12}]_{k,k} + \frac{1}{M} (N - K) \sigma^4 [\Psi_{11}^{-1} \Pi \Psi_{11}^{-1}]_{1,1} \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde  $\tilde{\mathbf{S}} \triangleq [\mathbf{s}_{\tilde{K}+1}, \dots, \mathbf{s}_K]$ .

Os resultados seguintes fornecem a distribuição assintótica dos detectores grupo-cego linear forma I. A prova é encontrada em (H.-MADSEN; WANG, 2002).

**Teorema 3** Considere  $\hat{\mathbf{C}}_r$  dado pela equação (4.19) como a matriz de autocorrelação amostrada do sinal recebido baseado em  $M$  amostras. Os valores de  $\hat{\Lambda}_s$  e  $\hat{\mathbf{U}}_s$  contém, respectivamente, o maior  $(K - \tilde{K})$  autovalores de  $(\tilde{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{C}}_r \tilde{\mathbf{P}})$  e os correspondentes autovetores. A equação do detector grupo-cego linear da forma I estimado  $\hat{\mathbf{w}}_1$  é dado por:

$$\hat{\mathbf{w}}_1 = \left( \mathbf{I}_N - \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\Lambda}_s^{-1} \hat{\mathbf{U}}_s^T \hat{\mathbf{C}}_r \right) \mathbf{v} \quad (4.63)$$

onde  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{d}}_1$  para o detector híbrido grupo-cego linear; e  $\mathbf{v} \triangleq \tilde{\mathbf{m}}_1$  para o detector MMSE grupo-cego linear. Então:

$$\sqrt{M}(\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_1) \rightarrow N(0, \mathbf{C}_w), \quad M \rightarrow \infty$$

com

$$\mathbf{C}_w = (\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_r \mathbf{v}) \bar{\mathbf{U}}_s \bar{\Lambda}_s^{-1} \bar{\mathbf{U}}_s^T - 2 \bar{\mathbf{U}}_s \bar{\Lambda}_s^{-1} \bar{\mathbf{U}}_s^T \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{U}}_s \bar{\Lambda}_s^{-1} \bar{\mathbf{U}}_s^T + \tau \bar{\mathbf{U}}_n \bar{\mathbf{U}}_n^T \quad (4.64)$$

onde

$$\tau = \sigma^2 (\mathbf{C}_r \mathbf{v})^T \bar{\mathbf{U}}_s \bar{\Lambda}_s^{-1} (\bar{\Lambda}_s - \sigma^2 \mathbf{I}_{K-\tilde{K}})^{-2} \bar{\mathbf{U}}_s^T (\mathbf{C}_r \mathbf{v}) \quad (4.65)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \text{diag} \left\{ A_{\tilde{K}+1}^4 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_{\tilde{K}+1})^2, \dots, A_K^4 (\mathbf{w}_1^T \mathbf{s}_K)^2 \right\} \quad (4.66)$$

Como antes, o SINR para os detectores grupo-cego forma I pode ser expresso em termos de  $\mathbf{R}$ ,  $\sigma^2$  e  $\mathbf{A}$ . Entretanto, a expressão para SINR é complicada para este caso e não será apresentada aqui.

#### 4.2.5 Resultados para Sinais Ortogonais e Sinais Equicorrelacionados em Detectores Grupo-Cegos e Cegos

Para obter melhor entendimento dos resultados analíticos nas secções anteriores, consideramos dois casos especiais em que comparamos a saída média SINRs dos diferentes detectores.

*Sinais Ortogonais:* Neste caso, temos  $\mathbf{u}_k = \mathbf{s}_k$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_K$  e  $\lambda_k = A_k^2 + \sigma^2$ ,  $k = 1, \dots, K$ .

Substituindo estes resultados nas equações (4.41) e (4.42) temos:

$$\tau \sigma^2 = \frac{1}{A_1^2 + \sigma^2} \quad (\text{DMI Cego}) \quad (4.67)$$

$$= \left( \frac{\sigma^2}{A_1^2} \right) \frac{1}{A_1^2 + \sigma^2} \quad (\text{Subespaço Cego}) \quad (4.68)$$

Substituindo as equações (4.67) e (4.68) em (4.35) e usando o fato de que neste caso  $\mathbf{w}_k = \frac{1}{A_k^2 + \sigma^2} \mathbf{s}_k$  obtemos a seguinte expressão da saída média SINRs para os dois detectores cegos:

$$\overline{\text{SINR}(\hat{\mathbf{w}}_1)} = \frac{\phi_1}{1 + \frac{1}{M} \left[ (\phi_1 + 1)(N + 1) - \frac{2\phi_1^2}{1 + \phi_1} \right]} \quad (\text{DMI Cego}) \quad (4.69)$$

$$= \frac{\phi_1}{1 + \frac{1}{M} \left[ (\phi_1 + 1) \left( K + 1 + \frac{N-K}{\phi_1^2} \right) - \frac{2\phi_1^2}{1 + \phi_1} \right]} \quad (\text{Subespaço Cego}) \quad (4.70)$$

onde  $\phi_1 \triangleq \frac{A_1^2}{\sigma^2}$  é a SNR do usuário desejado. É facilmente visto que neste caso, a condição suficiente e necessária para o detector subespaço cego superar o desempenho do detector DMI cego é que  $\phi_1 > 1$ , isto é,  $\text{SNR}_1 > 0$  dB.



Na seqüência considere o detector grupo-cego na forma II. Usando a equação (4.59), depois de algumas manipulações, temos a saída média SINR dada por:

$$\overline{SINR(\widehat{\mathbf{w}}_1)} = \frac{\phi_1}{1 + \frac{1}{M}(\phi_1 + 1) \left( K - \widetilde{K} + \frac{N-K}{\phi_1^2} \right)} \quad (\text{Grupo-Cego forma II}) \quad (4.71)$$

Comparando as equações (4.69) e (4.70) com a equação (4.71) obtemos a seguinte necessária e suficiente condição para o detector grupo-cego híbrido superar o desempenho do detector subespaço cego:

$$\widetilde{K} + 1 > \frac{2\phi_1^2}{(1 + \phi_1)^2} \quad (4.72)$$

Desde que  $\widetilde{K} \geq 1$  a condição acima é sempre satisfeita. Concluimos, neste caso, que o detector grupo-cego híbrido sempre supera o detector subespaço cego. Por outro lado, baseado nas equações (4.69), (4.70) e (4.71) podemos também obter o seguinte necessária e suficiente condição em que o detector grupo-cego híbrido supera o detector DMI cego:

$$\left( 1 - \frac{1}{\phi_1^2} \right) (N - K) + \widetilde{K} + 1 > \frac{2\phi_1^2}{(1 + \phi_1)^2} \quad (4.73)$$

De acordo com (4.73) para baixos valores de SNR, em geral,  $\phi_1 \ll 1$  o detector DMI supera o detector grupo-cego híbrido. Entretanto, uma condição suficiente para o detector grupo-cego híbrido superar o detector DMI é  $\phi_1 \geq 1$  ( $= 0$  dB). Para o detector grupo-cego híbrido na forma I temos :  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v} = \mathbf{s}_1$ ,  $\overline{\mathbf{U}}_s = [\mathbf{s}_{\widetilde{K}+1} \cdots \mathbf{s}_K]$  e

$$\overline{\Lambda}_s = \text{diag}\{A_{\widetilde{K}+1}^2, \dots, A_K^2\} + \sigma^2 \mathbf{I}_{K-\widetilde{K}} \quad (4.74)$$

Entretanto,  $\overline{\mathbf{U}}_s^T \mathbf{C}_r \mathbf{v} = 0$  então  $\tau = 0$ ,  $\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_r \mathbf{v} = A_1^2 + \sigma^2$ , e  $\overline{\mathbf{D}} = 0$ . Portanto:

$$\mathbf{C}_w = \frac{A_1^2 + \sigma^2}{M} \overline{\mathbf{U}}_s \overline{\Lambda}_s^{-1} \overline{\mathbf{U}}_s^T \quad (4.75)$$

Substituindo estes resultados em (4.35) e depois de algumas manipulações obtemos:

$$\overline{SINR(\widehat{\mathbf{w}})} = \frac{\phi_1}{1 + \frac{1}{M}(\phi_1 + 1) (K - \widetilde{K})} \quad (\text{Grupo-Cego forma I}) \quad (4.76)$$

Comparando as equações (4.71) e (4.76) vemos que no caso de sinais ortogonais o detector grupo-cego híbrido da forma I sempre supera o detector grupo-cego híbrido da forma II.

*Sinais Equicorrelacionados:* Neste caso é assumido que  $\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_l = \rho$ , para  $k \neq l$ ,  $1 \leq k, l \leq K$ . A matriz de correlação da forma de onda da assinatura usada é dada por:

$$\mathbf{R} \triangleq \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \rho \mathbf{1}\mathbf{1}^T + (1 - \rho) \mathbf{I}_K \quad (4.77)$$

onde  $\mathbf{1}$  é um vetor de comprimento  $K$  com todos valores um.

Consideramos um sistema com controle perfeito de potência, ou seja,  $A_1 = \dots = A_K = A$  e detectores cegos. Por definição  $\phi \triangleq \frac{A^2}{\sigma^2}$ . Então a condição necessária e suficiente para o detector subespaço cego superar o detector DMI cego é  $\eta_{\text{DMI}} > \eta_{\text{subespaço}}$ , depois de algumas manipulações reduz a:

$$(\mu_1\mu_2)^3 + (\mu_1\mu_2)^2\phi^2 > \mu_1^3\phi + \mu_1 \left[ \mu_1 + \frac{\mu_2^3 - \mu_1^3}{K} \right] \quad (4.78)$$

onde  $\mu_1 \triangleq 1 + (K-1)\rho$  e  $\mu_2 \triangleq 1 - \rho$  são os dois distintos autovalores de  $\mathbf{R}$ . A relação entre SNR e  $\rho$  é, de acordo com a *corolário* 1 dada por:

$$\frac{A^2}{\sigma^2} > \mu_1 = 1 + (K-1)\rho \quad (4.79)$$

então o desempenho do detector subespaço cego é melhor; enquanto se:

$$\frac{A^2}{\sigma^2} < \mu_2 = 1 - \rho \quad (4.80)$$

então o desempenho do detector DMI cego é melhor.

Vimos que o desempenho do detector subespaço cego deteriora rapidamente em baixos valores de SNR e em região de alta correlação cruzada; o detector grupo-cego forma II é resistente a altos valores de correlação cruzada, mas não a valores baixos de SNR; e o detector grupo-cego na forma I é resistente a ambos: alta correlação cruzada e baixo SNR. Embora o detector DMI cego seja também insensível a ambos: alta correlação cruzada e baixo SNR, seu desempenho em outras regiões é inferior a todos os detectores baseados em subespaço: cego e grupo-cego. Concluimos que o detector grupo-cego forma I tem o melhor desempenho do que todos os detectores considerados aqui.

No próximo capítulo, avaliaremos numericamente o desempenho dos diversos detectores MuD analisados até aqui, principalmente aqueles baseados na projeção em subespaços. Desta forma, poder-se-á comparar a precisão das expressões analíticas desenvolvidas neste capítulo.

## Capítulo 5

# Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos através de simulações Monte Carlo (MCS) visando confirmar a validade das equações analíticas de desempenho apresentadas no capítulo 4. Todos os resultados foram obtidos utilizando ambiente MatLab versão 7.0. Considerou-se um sistema DS/CDMA síncrono, modulação BPSK, conjunto de sequência de espalhamento pseudo-Gold (de comprimento igual a 15) e ganho de processamento  $N = 15$ ; os principais parâmetros de sistema e de canal estão sintetizados na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Parâmetros de sistema e canal utilizados nas simulações MCS

Carga	$\tilde{K}$	$\check{K}$	$M$	$SNR$ [dB]	$f_m$ [Hz]	Parâmetro	Seq.
$L_1$	7	4	50 e 500	[0 : 5 : 15] AWGN	5	$\epsilon_\varphi = [0 \ 5 \ 30 \ 45] \%$	Pseudo
$L_2$	10	5	200 e 1000	[0 : 5 : 45] Rayl Plano	22	$\epsilon_\alpha = [0 \ 5 \ 30] \%$	Gold,
$L_3$	5	10	Process. Rx	Relação Sinal-Ruído	400	$\epsilon_\theta = [0 \ 5 \ 30] \%$	$N = 15$
Carregamento				$NFR = [-5 : 5 : 20]$	Doppler	Erro Estim.	Espalham

Nas simulações MCS utilizou-se três carregamentos:

- $L_1 = \frac{K}{N} = \frac{\tilde{K} + \check{K}}{N} = \frac{11}{15}$  ou 73,3%, sendo  $\tilde{K} = 7$  usuários conhecidos e  $\check{K} = 4$  interferentes intercelulares;
- $L_2 = 100\%$ , sendo  $\tilde{K} = 10$  usuários conhecidos e  $\check{K} = 5$  interferentes intercelulares;
- $L_3 = 100\%$ , sendo  $\tilde{K} = 5$  usuários conhecidos e  $\check{K} = 10$  com parâmetros desconhecidos.

A partir de um único conjunto de sequência Gold, a cada nova iteração MCS procedeu-se à troca da sequência da primeira linha (usuário de interesse) por uma outra, obtida de forma aleatória.

Em nossas simulações, utilizou-se o processo em série, onde o detector linear estimado  $\hat{\mathbf{w}}_1$  foi usado para demodular todos os bits do usuário 1 a partir do vetor de recepção  $\mathbf{r}[i]$ . O comprimento

do vetor recebido amostrado em banda base para estimar a matriz de correlação é  $i = 1, 2, \dots, M$ , enquanto que o comprimento dos quadros de bits transmitidos é dado por  $j = 1, 2, \dots, F$  e necessariamente  $F > M$ . Assim, o detector estimado  $\hat{\mathbf{w}}_1$  detecta todos os bits recebidos, para o usuário 1 inclusive aqueles utilizados para a formação da matriz de correlação.

A seguir são comparados os resultados de desempenho para os detectores MMSE linear cego por Inversão direta da matriz de conversão (DMI) (VERDU, 1998), (HONIG; VERDU, 1995), o detector MMSE linear cego baseado em subespaço (WANG; POOR, 1998b), o detector híbrido linear grupo-cego baseado em subespaço da forma I (WANG; MADSEN, 1999b). A escolha do detector grupo-cego forma I se deve, conforme salientado anteriormente, à superioridade (ou igualdade) de desempenho em relação ao detector grupo-cego forma II.

São analisados resultados de desempenho para os casos AWGN e desvanecimento Rayleigh plano, com estimativas perfeitas e com erros. Assim, a degradação de desempenho dos Bld-MUD e SBld-MUD foi analisada considerando erros nas estimativas de fase da portadora  $\varphi_k$ , para o caso de canal AWGN, e de amplitude  $\alpha_k$  e de fase  $\theta_k$  dos coeficientes de canal com desvanecimento Rayleigh plano. Estes erros foram introduzidos separada e conjuntamente, sendo modelados através de distribuições estatísticas Uniformes,  $\mathcal{U}$ , e Gaussianas  $\mathcal{N}$ :

1. *Com média igual ao valor verdadeiro:*

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_k &= \mathcal{U}[1 \pm \epsilon_\varphi] \cdot \varphi_k \quad (\text{Fase da Portadora, Canal AWGN}) \\ \hat{\alpha}_k &= \mathcal{U}[1 \pm \epsilon_\alpha] \cdot \alpha_k \quad (\text{Módulo do Coeficiente de Canal Rayleigh}) \\ \hat{\theta}_k &= \mathcal{U}[1 \pm \epsilon_\theta] \cdot \theta_k \quad (\text{Fase do Coeficiente de Canal Rayleigh})\end{aligned} \quad (5.1)$$

com  $\epsilon_\varphi, \epsilon_\alpha$  e  $\epsilon_\theta \in [0; 0,05; 0,10; 0,30]$ .

2. *Com média deslocada pelo valor do erro:*

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_k &= \mathcal{N}\left[\frac{\epsilon_\varphi}{\pi}, \sigma_\varphi\right] + \varphi_k \quad (\text{Fase da Portadora, Canal AWGN}) \\ \hat{\alpha}_k &= \mathcal{N}[g\epsilon_\alpha, \sigma_\alpha] + \alpha_k \quad (\text{Módulo do Coeficiente de Canal Rayleigh}) \\ \hat{\theta}_k &= \mathcal{N}\left[\frac{\epsilon_\theta}{\pi}, \sigma_\theta\right] + \theta_k \quad (\text{Fase do Coeficiente de Canal Rayleigh})\end{aligned} \quad (5.2)$$

com  $\epsilon_\varphi, \epsilon_\alpha$  e  $\epsilon_\theta \in [0; 0,05; 0,10; 0,30]$ , variância  $\sigma^2 = 10^{-2}$  e a variável aleatória  $g$  assumindo um dos dois valores  $\{\pm 1\}$  com igual probabilidade.

Neste capítulo, o desempenho dos sistemas DS/CDMA foram avaliados considerando erros nas estimativas dos coeficientes de canal e da fase da portadora recebida de acordo com as duas

distribuições estatísticas acima, ou seja, a uniforme, equação (5.1), e a Gaussiana, equação (5.2). Já no capítulo 6, os erros nas estimativas dos coeficientes de canal e da fase da portadora foram introduzidos somente de acordo com a distribuição Gaussiana.

## 5.1 Sistemas em Canais AWGN Síncronos

As figuras 5.1 e 5.2 indicam, para  $SNR = 10 \text{ dB}$  e controle perfeito de potência ( $NFR = 0 \text{ dB}$ ), resultados de desempenho, analíticos e de simulação Monte Carlo, para os dois primeiros detectores em função do número de bits ( $M$ ) usados para estimar a matriz de correlação. Para cada detector é plotado a BER, figura 5.1, e a SINR, figura 5.2. Observe-se que existe alguma discordância entre os desempenhos analíticos e os simulados para baixos valores de  $M$ . Isto é esperado, pois o desempenho analítico é baseado na análise assintótica. Pode ser visto que o SBId-MuD forma I requer menos amostras  $M$  para alcançar o mesmo desempenho dos demais detectores cegos (DMI e subespaço).

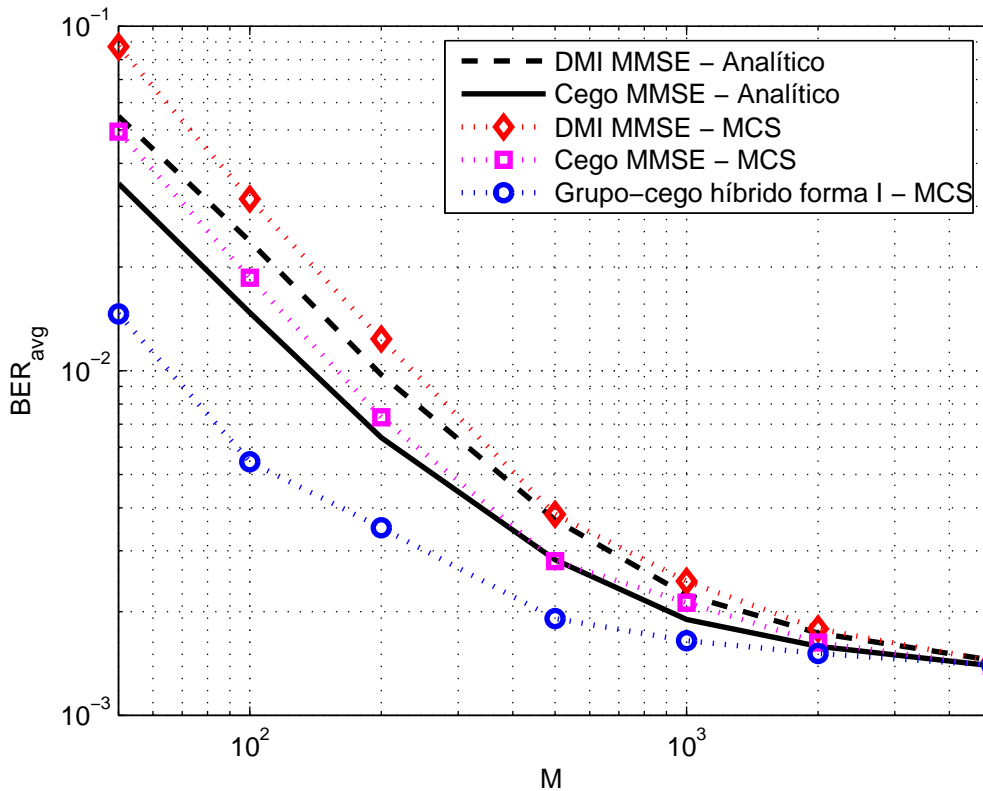


Figura 5.1: Taxa de erro de bit  $\times$  número de amostras  $M$  utilizadas na estimativa da matriz de correlação.  $K = 11$ ,  $\tilde{K} = 7$ ,  $SNR = 10 \text{ dB}$ ,  $NFR = 0 \text{ dB}$ .

Na figura 5.3 é apresentado resultado MCS para a SINR, em função do incremento no carregamento total do sistema. Para o cálculo do número de usuários conhecidos  $\tilde{K}$  foi mantida

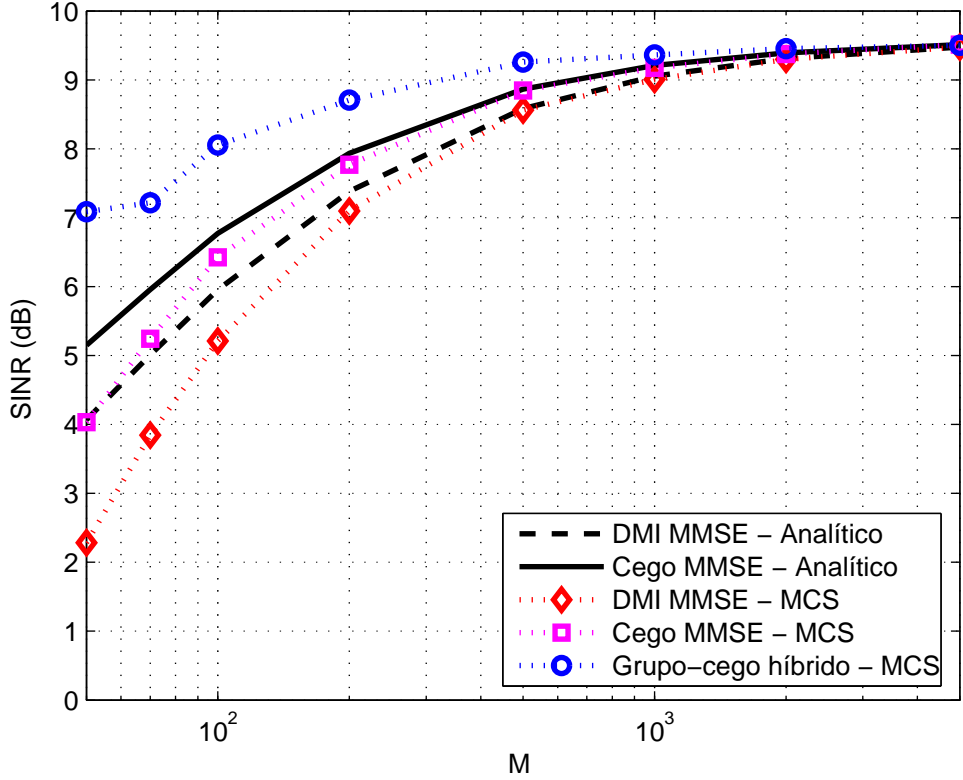


Figura 5.2:  $\overline{SINR}$   $\times$  número de amostras  $M$  do sinal e controle perfeito de potência,  $K = 11$ ,  $\tilde{K} = 7$ ,  $SNR = 10$  dB.

a proporcionalidade inicial entre usuários conhecidos em relação ao número de usuários total,  $\frac{\tilde{K}}{K} \approx \text{cte} = \frac{7}{11}$  com  $K = 3, 4, \dots, 15$  usuários. Para baixos valores de  $K$  o ganho de desempenho do detector subespaço cego é maior e diminui à medida que  $K$  aumenta. Pode ser visto também que o desempenho do detector DMI cego é insensível à variação do carregamento  $K$ . Pela incorporação da conhecida seqüência de espalhamento de outros usuários, o detector grupo cego oferece um melhor desempenho do que o detector DMI cego e o detector subespaço cego. Conforme é aumentado a quantidade de bits  $M$ , o desempenho do detector grupo-cego tende a se igualar ao do detector subespaço cego. Porém, quando  $M$  é relativamente pequeno, o ganho de SINR do detector grupo-cego é maior em relação aos demais, evidenciando seu uso em aplicações onde não for possível operar com um grande número de bits  $M$ .

Para avaliar o desempenho dos MUD em relação ao efeito *near-far*, ( $NFR \neq 0$ ), analisa-se na figura 5.4 a  $\overline{SINR}$  de saída em relação à disparidade de potências dos usuários interferentes em relação ao usuário 1. Os usuários interferentes possuem as mesmas potências, ou seja,  $A_2 = \dots = A_K$ . O desempenho de todos os detectores é invariante para os diferentes valores de ( $NFR$ ), ou seja,  $NFR = 20 \log \frac{A_k}{A_1}$  [dB] para  $k = 2, \dots, K$ . O detector grupo-cego supera o desempenho dos outros dois detectores, mas essa diferença é reduzida conforme o número de bits  $M$  é incrementado, tendendo a se igualar quando  $M \rightarrow \infty$ . O detector grupo-cego apresenta uma deterioração na

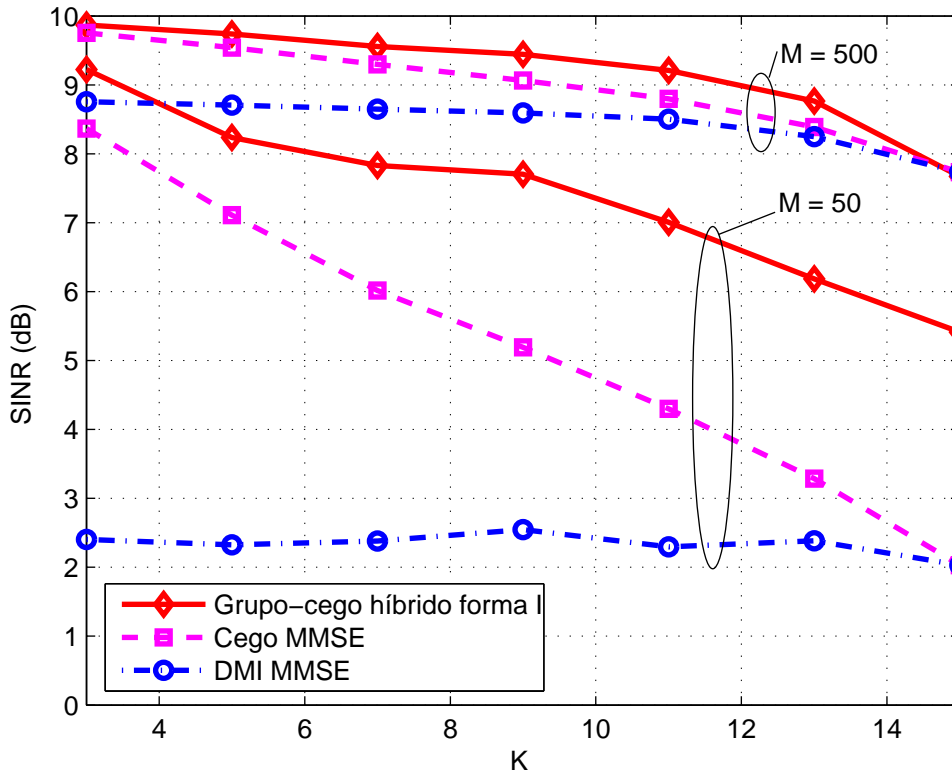


Figura 5.3:  $\overline{SINR}$  de saída versus o número total de usuários  $K$  para os diferentes MUD lineares. Adotou-se  $M = 50$  e  $500$ ,  $SNR = 10$  dB.

SINR de saída em torno de  $2$  dB, quando  $M = 50$  em relação a  $M \rightarrow \infty$ , enquanto que nos demais esta perda está em torno de  $6,5$  dB para o DMI e  $5$  dB para o MMSE.

A figura 5.5 analisa o efeito do aumento da interferência intercelular sobre o desempenho dos três MUD, considerando distintas quantidades de bits de amostra  $M$ . Observe-se que para quantidade de amostras baixa,  $M = 50$ , e  $SNR = 12$  dB, conforme a quantidade de usuários desconhecidos é incrementada o desempenho do detector grupo-cego decresce até atingir o desempenho dos outros dois detectores. Em contrapartida, para  $M = 500$  verifica-se que praticamente não há redução no desempenho do detector grupo-cego (apenas marginal) à medida que o número de usuários intercelulares cresce  $\check{K}$ , até atingir o desempenho dos outros dois detectores.

Na figura 5.6 a  $\overline{SINR}$  de saída dos dois detectores cegos (DMI e subespaço) e do detector grupo-cego híbrido forma I, dados pelas equações (4.69), (4.70) e (4.76), respectivamente, são comparadas, a partir de resultados analíticos e de simulação Monte Carlo em função do SNR do usuário desejado,  $\phi_1$ , para o caso de sinais ortogonais (utilização de seqüências de Hadamard). Para regiões de alto SNR o detector DMI cego tem o pior desempenho entre os detectores em questão. Na região de baixo SNR, entretanto, o detector subespaço cego possui pior desempenho do que o detector DMI cego. O detector grupo-cego forma I possui o melhor desempenho em

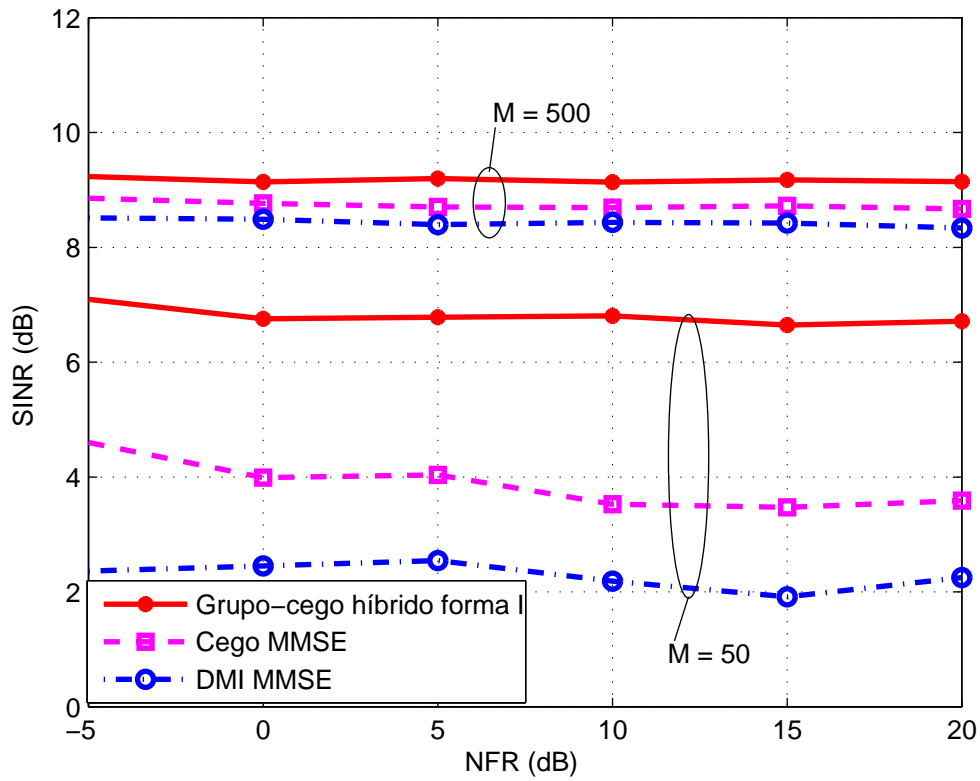


Figura 5.4:  $\overline{SINR}$  de saída para o usuário 1  $\times$  desbalanço de potência dos usuários interferentes  $A_2^2, \dots, A_K^2$ .  $K = 11$ ,  $\tilde{K} = 7$ ,  $SNR = 10 \text{ dB}$  e quantidade de bits  $M = 50$  e  $500$ .

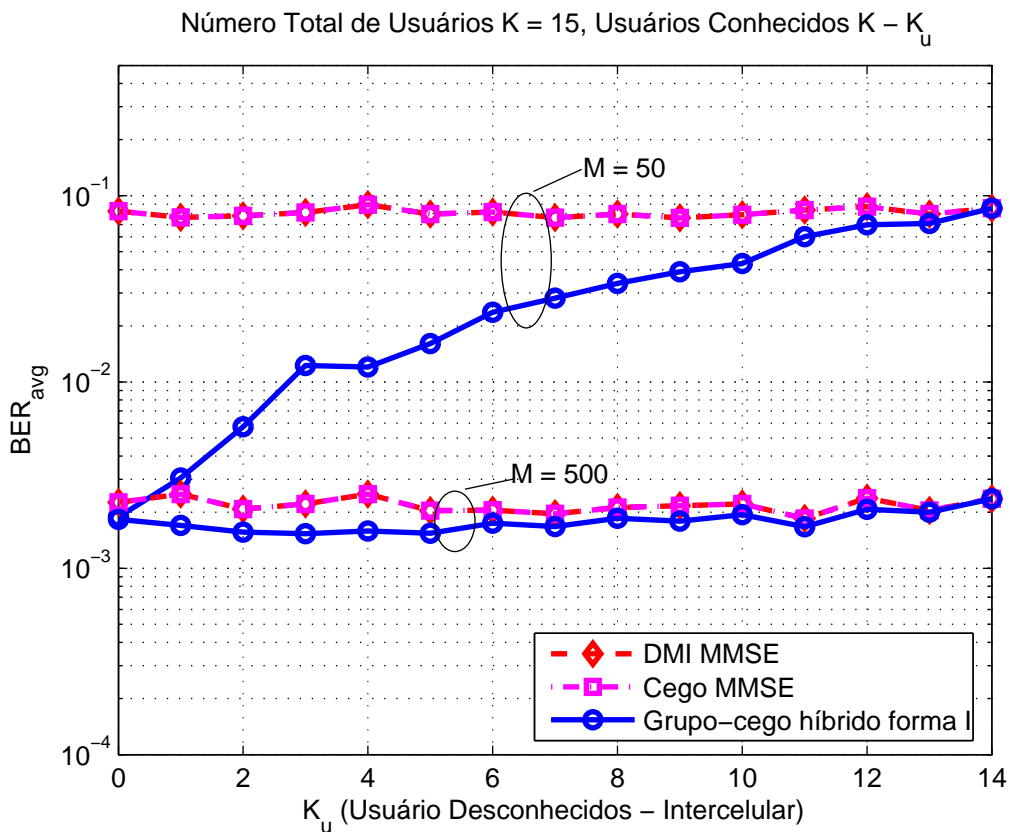


Figura 5.5:  $BER_{avg} \times$  quantidade de usuários desconhecidos  $\tilde{K}$  para os diferentes MUD lineares.  $SNR = 12 \text{ dB}$ ,  $M = 50$  ou  $M = 500$ ,  $\tilde{K} = K - \tilde{K} = 14, 13, \dots, 1$ .



todos os casos.

A partir da equação (4.78) obtém-se o gráfico da figura 5.7,  $\text{SNR} \times \rho$  para dois valores de  $K$ . Esta curva analítica mostra que para sinais DS/CDMA equicorrelacionados existe regiões onde o detector subespaço cego supera o detector DMI cego. Em geral, o método em subespaço possui melhor desempenho nas regiões de baixa correlação cruzada e alto SNR, pois de (4.40), onde  $\phi_1 = \frac{A^2}{\sigma^2}$ , tem-se que o Bld-MuD subespaço resulta em melhor desempenho quando (4.79) é satisfeita; enquanto que o desempenho do Bld-MuD DMI superará o do Bld-MuD subespaço quando (4.80) for satisfeita.

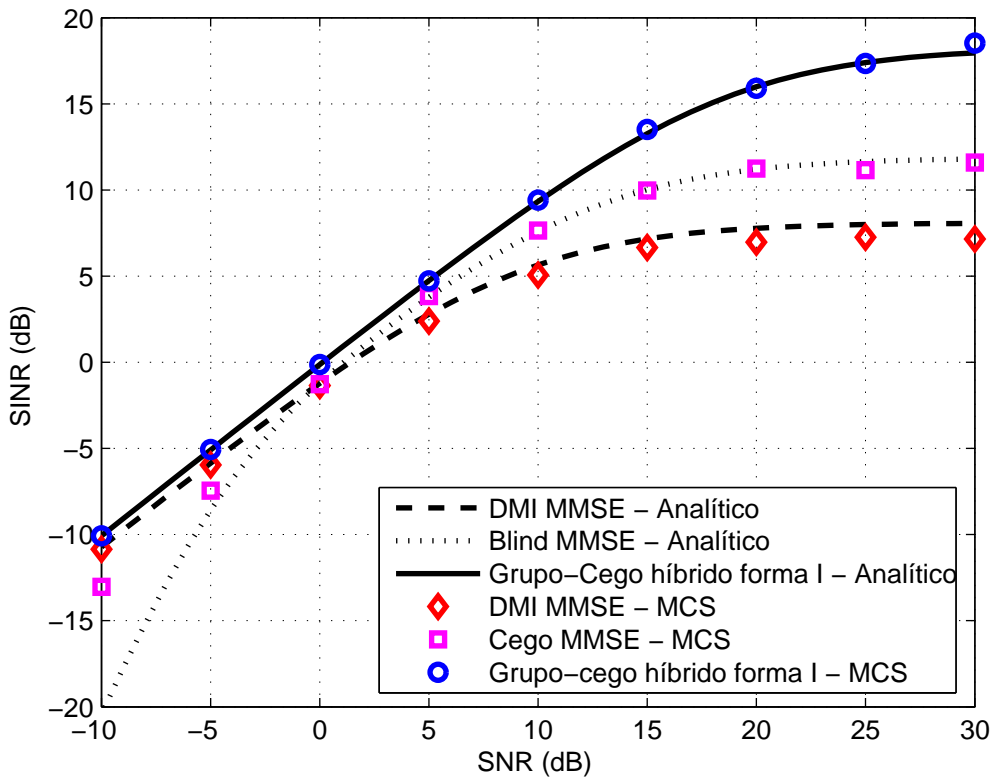


Figura 5.6:  $\overline{\text{SINR}} \times \text{SNR}$  dos detectores cego e grupo-cego para o caso de sinais ortogonais. Sequências de Hadamard,  $N = 32$ ,  $K = 16$ ,  $\tilde{K} = 12$  e  $M = 200$ .

As figuras 5.8 confirma o melhor desempenho dos detectores Grupo-Cego em relação aos detectores DMI e os detectores cegos na análise da relação  $\text{BER} \times \text{SNR}$ , principalmente nas regiões de médio e alto SNR. Essa figura evidencia a melhoria de desempenho dos detectores analisados com o aumento do número de bits  $M$ . Os desempenhos resultaram semelhantes nesses detectores para  $\text{SNR} \leq 5\text{dB}$  quando  $M = 200$  e para  $\text{SNR} \leq 10\text{ dB}$ , com  $M = 1000$ , a partir do qual, o desempenho do SBld-MuD forma I supera significativamente o desempenho dos detectores DMI e o cego.

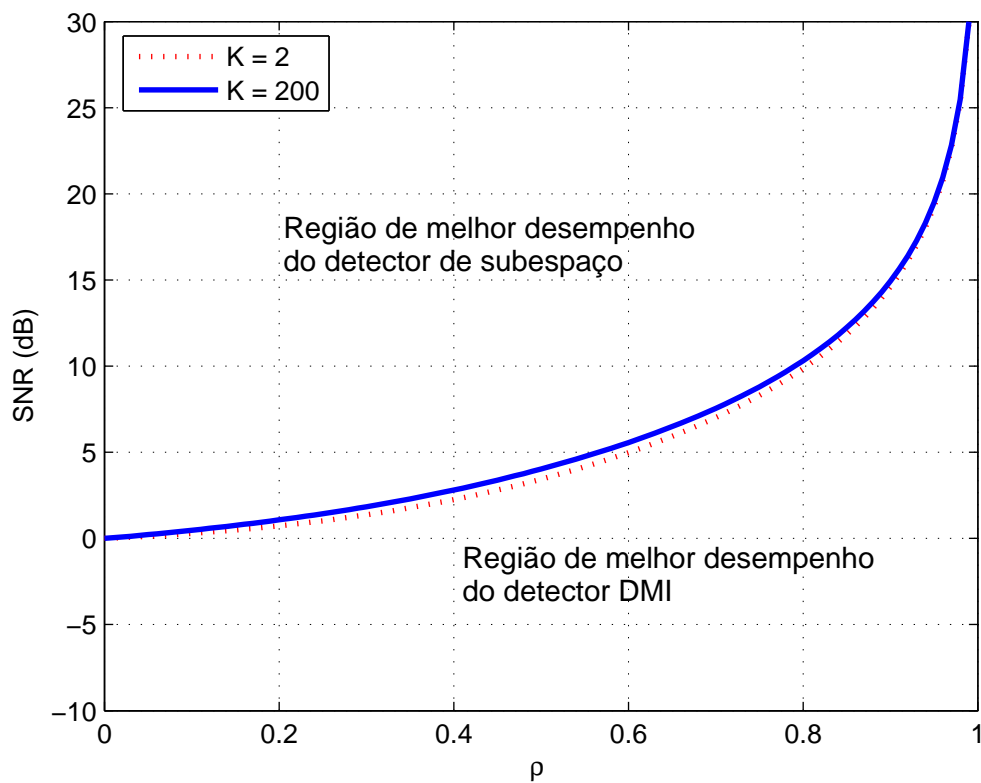


Figura 5.7: Curva analítica da  $SNR \times \rho$  de acordo com o desempenho relativo dos dois detectores cegos.

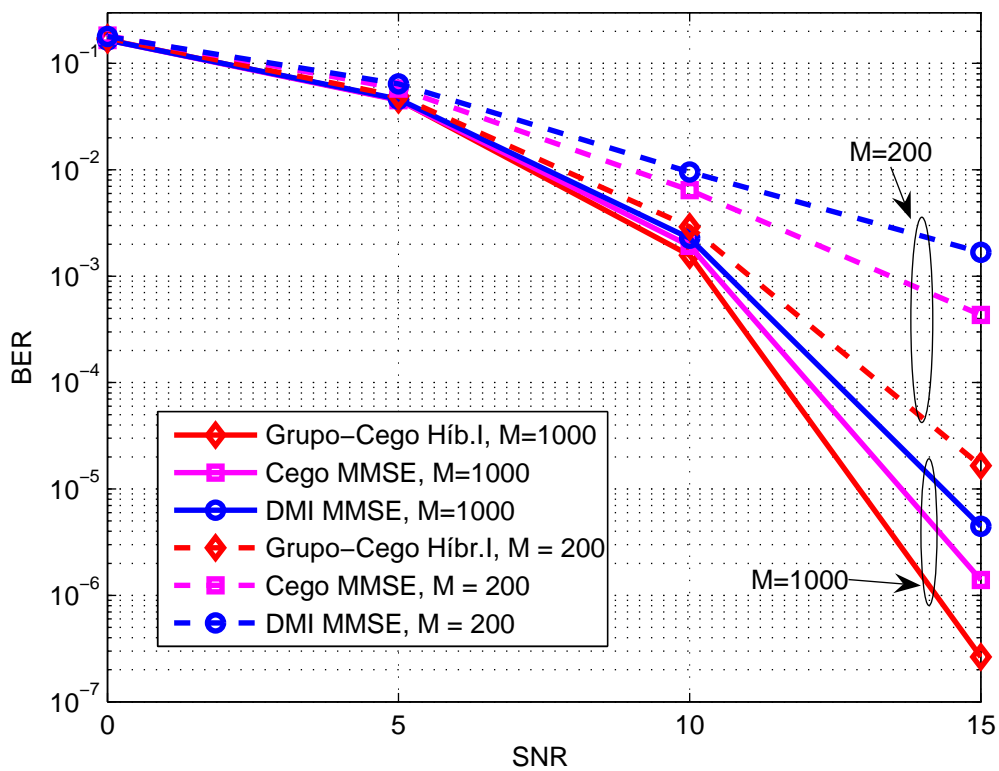


Figura 5.8: BER  $\times$  SNR em canal AWGN com quadro de bits de valor fixo  $F = 60.000$ , comprimento da amostra  $M = 200$  e  $M = 1000$ .

## 5.2 Sistemas em Canais AWGN com Erros nas Estimativas da Fase da Portadora

Analisou-se a degradação de desempenho para os três detectores quando há erros nas estimativas da fase da portadora  $\epsilon_\varphi$ . Obteve-se a figura 5.9 considerando erros com distribuição uniforme conforme , equação (5.1),  $\epsilon_\varphi \in [0, 30]$  e comprimento da amostra  $M = 200$  e  $M = 1000$ . Nesta figura observa-se, comparando com a figura 5.8, que praticamente não houve variação para erro de fase de portadora de 30% gerado de acordo com a equação (5.1).

Gerou-se a figura 5.10 considerando comprimento das amostras  $M = 200$  e  $M = 1000$ , erros com distribuição Gaussiana, equação (5.2),  $\epsilon_\varphi \in [0, 05 \ 0, 30 \ 0, 45]$ .

Analisando a degradação de desempenho para comprimento da amostra para  $M = 1000$ , figura 5.10.b, verifica-se a mesma tendência de degradação entre os detectores Grupo-Cego, Cego e DMI em relação ao comprimento da amostra  $M = 200$ . No entanto, expressiva degradação de desempenho para os três detectores pôde ser observada quando o número de observações é reduzido de  $M = 1000$  para  $M = 200$ , afetados por erros de até  $\epsilon_\varphi \leq 0, 10$  com variância fixada em  $\sigma = 10^{-2}$ . Por sua vez, o detector DMI MMSE sofre a maior degradação em todas as condições analisadas ( $M$  e  $\epsilon_\varphi$ ), atingindo o pior desempenho entre os três detectores analisados.

Assim, sistemas DS/CDMA AWGN síncronos com detecção Grupo-cego, Cego e DMI são relativamente robustos aos erros nas estimativa da fase da portadora em até 10%, porém essa degradação será proporcionalmente ainda maior quando o comprimento das observações for pequena. A menor degradação relativa ocorre para o detector Grupo-cego.

## 5.3 Sistemas em Canais com Desvanecimento Plano

Neste conjunto de resultados de simulação Monte Carlo foi considerado um sistema síncrono com desvanecimento Rayleigh plano e link direto para estimativas perfeitas da fase da portadora e coeficientes de canal ( $\epsilon_\varphi = \epsilon_\alpha = \epsilon_\theta = 0$ ).

Admitiu-se canal lentamente variável no tempo: os coeficientes de Rayleigh são constantes dentro de um intervalo de bit. Visando obter boas estimativas para a matriz de autocorrelação, adotou-se quadro de mesmo tamanho do comprimento da amostra,  $M = F$ . Para os detectores DMI, para essa seção, executou-se a inversa da matriz bit a bit. Analisou-se o desempenho do sistema no enlace direto, resultando o mesmo coeficiente de canal para todos os usuários

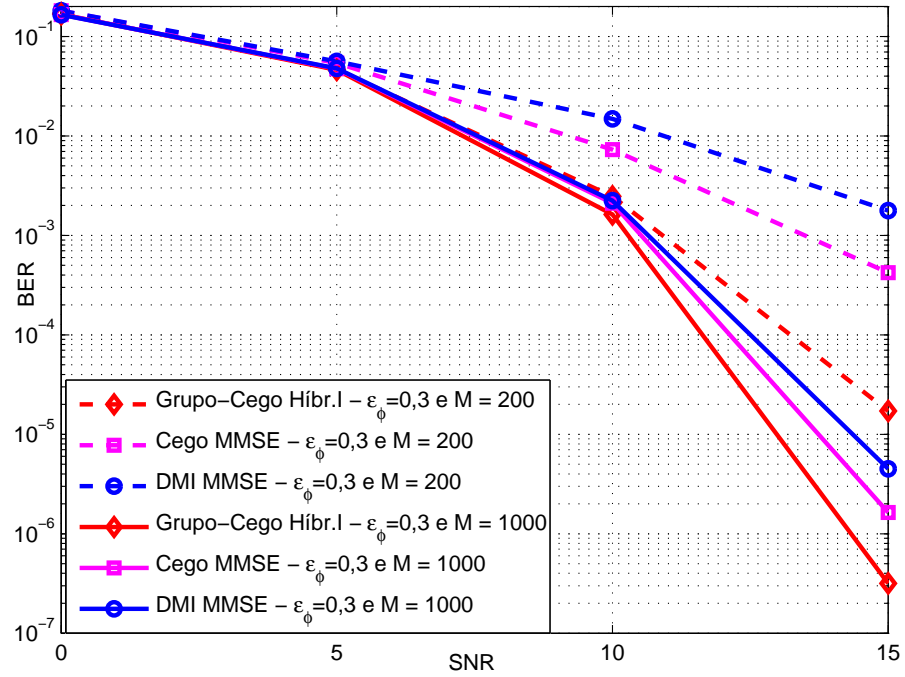


Figura 5.9: BER  $\times$  SNR em canal AWGN com  $F = 60.000$ ,  $K_c = 7$  e  $K_u = 4$ , erros na estimativa da fase da portadora conforme eq. (5.1) e comprimento da amostra:  $M = 200$  e  $M = 1000$ .

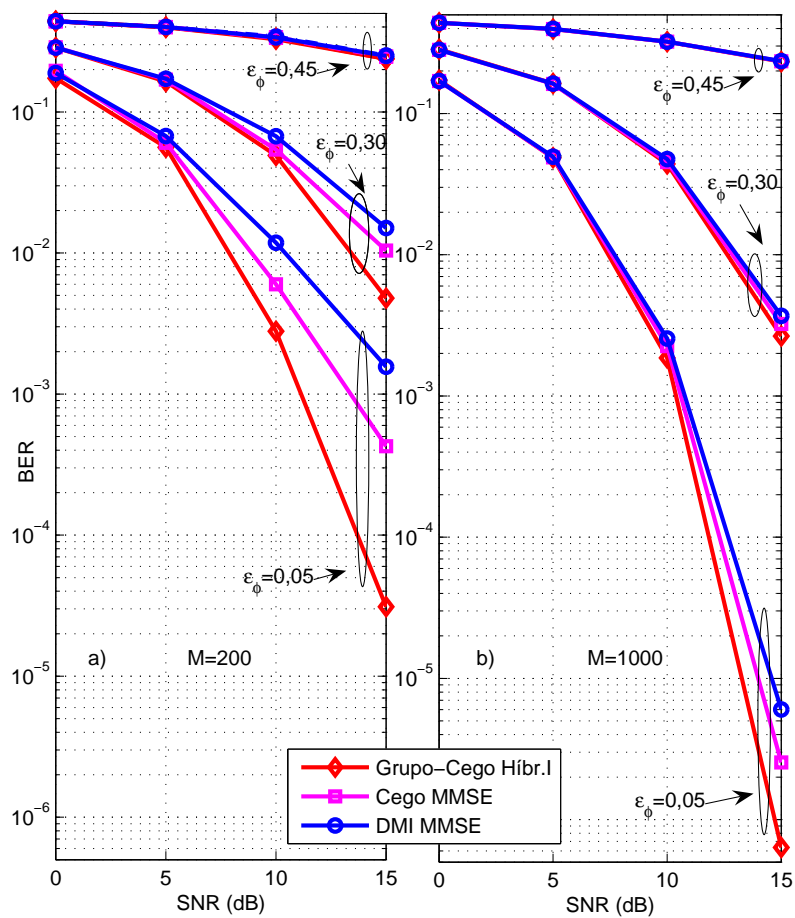


Figura 5.10: BER  $\times$  SNR em canal AWGN com  $F = 60.000$ ,  $K_c = 7$  e  $K_u = 4$ , erros na estimativa da fase da portadora conforme eq. (5.2) e comprimento da amostra: a)  $M = 200$ ; b)  $M = 1000$ .

simultaneamente. Adotou-se unidades móveis com baixa velocidade (pedestre), resultando em valores de frequência Doppler máxima igual a 5 Hz.

Adotando-se os mesmos parâmetros de sistema considerados anteriormente, obteve-se desempenhos para o sistema síncrono com desvanecimento plano caracterizado pelo piso de BER na região de alto SNR para o detector cego, figura 5.11.a. Incrementando-se o número de amostras para  $M = 1000$ , verifica-se através da figura 5.11.b elimina-se o efeito de piso de BER, igualando-se o desempenho dos três sistemas na faixa de  $E_b/N_0$  considerada.

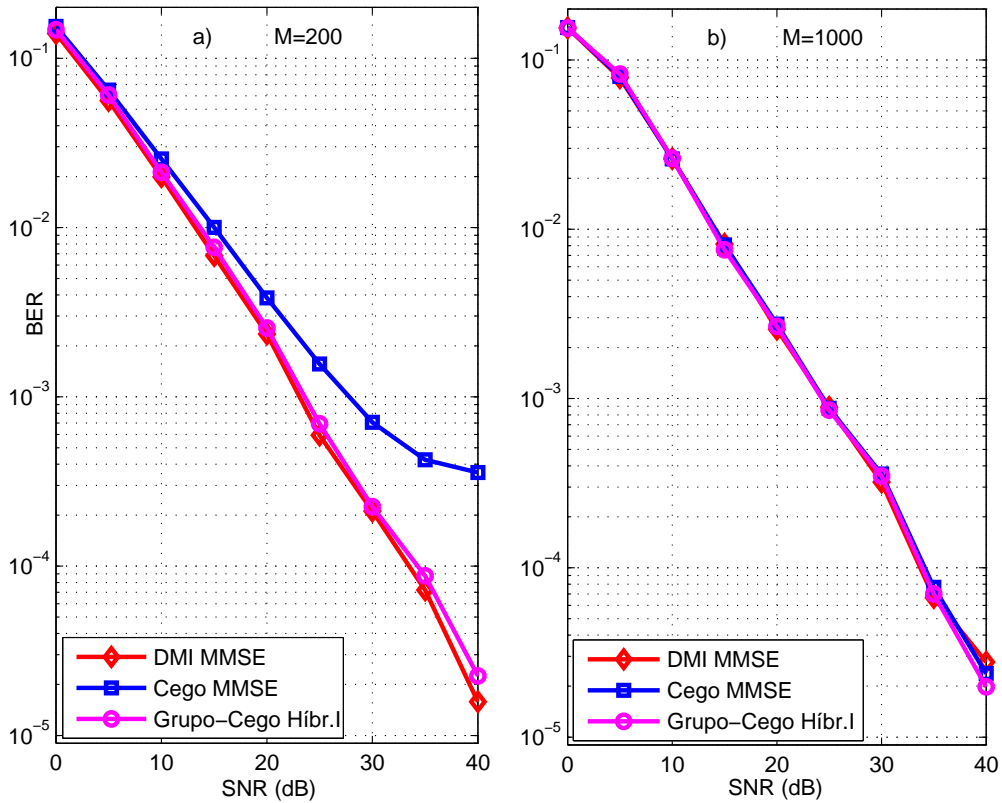


Figura 5.11: BER  $\times$  SNR para o sistema síncrono em canal Rayleigh plano e estimativas perfeitas para coeficiente de canal;  $K_c = 7$  e  $K_u = 4$ , para o DMI obteve-se a inversa bit-a-bit ( $M = 1$ );  $f_m = 5Hz$ : a)  $F = M = 200$ ; b)  $F = M = 1000$ .

## 5.4 Sistemas em Canais com Desvanecimento Plano e Erros nas Estimativas

Resultados de desempenho com erros na estimativa do módulo dos coeficientes de canal  $\epsilon_\alpha$ , considerando distribuição uniforme, eq. (5.1), para os três sistemas são sintetizados na figura 5.12. Erros da ordem de até  $\approx 30\%$  nas estimativas do módulo dos coeficientes de canal para o sistema Grupo-Cego Híbrido síncrono em canal com desvanecimento plano ( $\epsilon_\alpha \approx 0,30$ ) não acarretaram

degradação significativa de desempenho para os dois valores do número de amostras ( $M = 200$  e  $M = 1000$ ), confirmando a robustez desta forma de detecção contra erros de estimativa no módulo do coeficiente de canal com distribuição uniforme, eq. (5.1). Por sua vez, o detector Cego MMSE é bastante sensível a esse tipo de erros nas estimativas de canal (módulo) quando o número de amostras é reduzido significativamente ( $\ll 1000$ ).

Obteve-se o gráfico da figura 5.13 com erros na estimativa do módulo dos coeficientes de canal  $\epsilon_\alpha$ , considerando agora distribuição Gaussiana, eq. (5.2). Neste caso, com a introdução sistemática de erros nos coeficientes de canal (quase determinística, pois adotou-se  $\sigma^2 = 0,01$ ), já para erros de 5% no módulo dos coeficientes, o desempenho do sistema é relativamente degradado, indicando a presença do piso de BER. A sensibilidade é menor quando o número de amostras é menor, neste gráfico, para  $M = 200$ ; no entanto, nos dois casos resulta um piso de BER na faixa de  $[10^{-4} ; 10^{-3}]$ . Observa-se também que dos três detectores, o grupo-cego híbrido forma I apresenta a menor sensibilidade a esse tipo de erros.

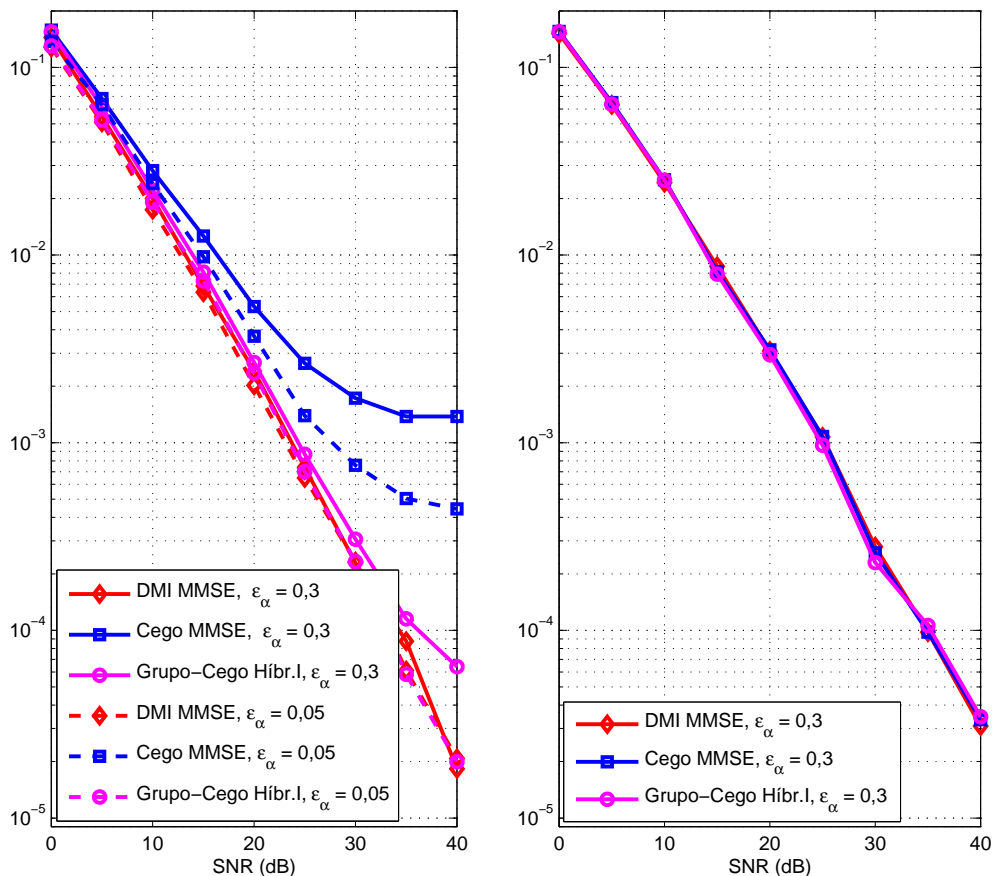


Figura 5.12: BER  $\times$  SNR para o sistema síncrono em canal Rayleigh plano com erros nas estimativas do **módulo** dos coeficientes de canal conforme eq. (5.1);  $K_c = 7$  e  $K_u = 4$ , para o DMI obteve-se a inversa bit-a-bit ( $M = 1$ );  $f_m = 5Hz$ : a)  $F = M = 200$ ; b)  $F = M = 1000$ .

A degradação no desempenho dos três sistemas devido a erros nas estimativas das fases dos

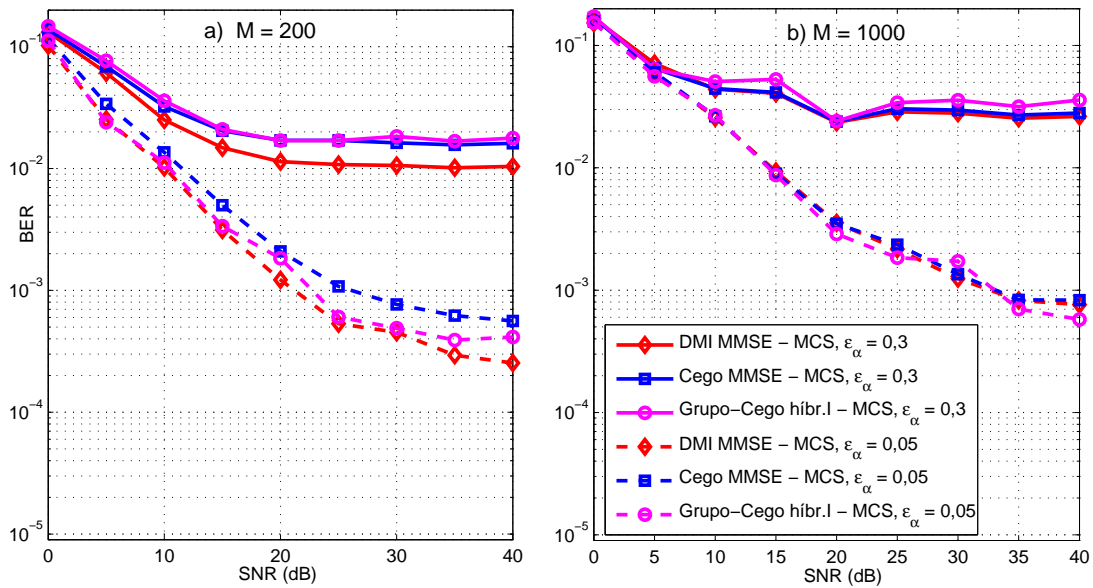


Figura 5.13: BER  $\times$  SNR para o sistema síncrono em canal Rayleigh plano com erros nas estimativas do **módulo** dos coeficientes de canal conforme eq. (5.2);  $K_c = 7$  e  $K_u = 4$ , para o DMI obteve-se a inversa bit-a-bit ( $M = 1$ );  $f_m = 5\text{Hz}$ : a)  $F = M = 200$ ; b)  $F = M = 1000$ .

coeficiente de canal e distribuição uniforme, eq. (5.1), é mostrada na figura 5.14. Foram considerados erros da ordem de 5% e 30% (i.e.,  $\epsilon_\theta \in [0,05; 0,30]$ ) e número de amostras  $M = 200$  e  $M = 1000$ . Observe-se que o detector Grupo-Cego Híbrido é mais sensível a erros na estimativas de fase do que no módulo dos coeficientes de canal (compare a degradação de desempenho na região de alto SNR nas figura 5.12 e 5.14), enquanto que a tendência contrária ocorre com o detector Cego MMSE, visível na condição  $M = 200$ . Evidentemente, a robustez dos detectores DMI MMSE é obtida às custas de uma elevada complexidade devido à inversão bit a bit inviabilizando a sua aplicação, enquanto que o detector grupo-cego apresenta uma pequena degradação e uma menor complexidade de implementação.

A figura 5.15 mostra o desempenho, da mesma forma que mostrado na figura 5.14, mas com distribuição Gaussiana, eq. (5.2), erro de 30% (i.e.,  $\epsilon_\theta \in [0,30]$ ) e reduzida variância,  $\sigma^2 = 10^{-2}$ . Note-se neste caso que erros quase determinísticos na fase do coeficiente de canal da ordem de 30%, não afetam significativamente o desempenho dos três sistemas apresentados para um número de amostras  $M = 1000$ . Neste caso verifica-se que o detector Cego MMSE é mais sensível aos erros nas estimativas de fase do que as formas de detecção semi-cega e de inversão direta da matriz de correlação.

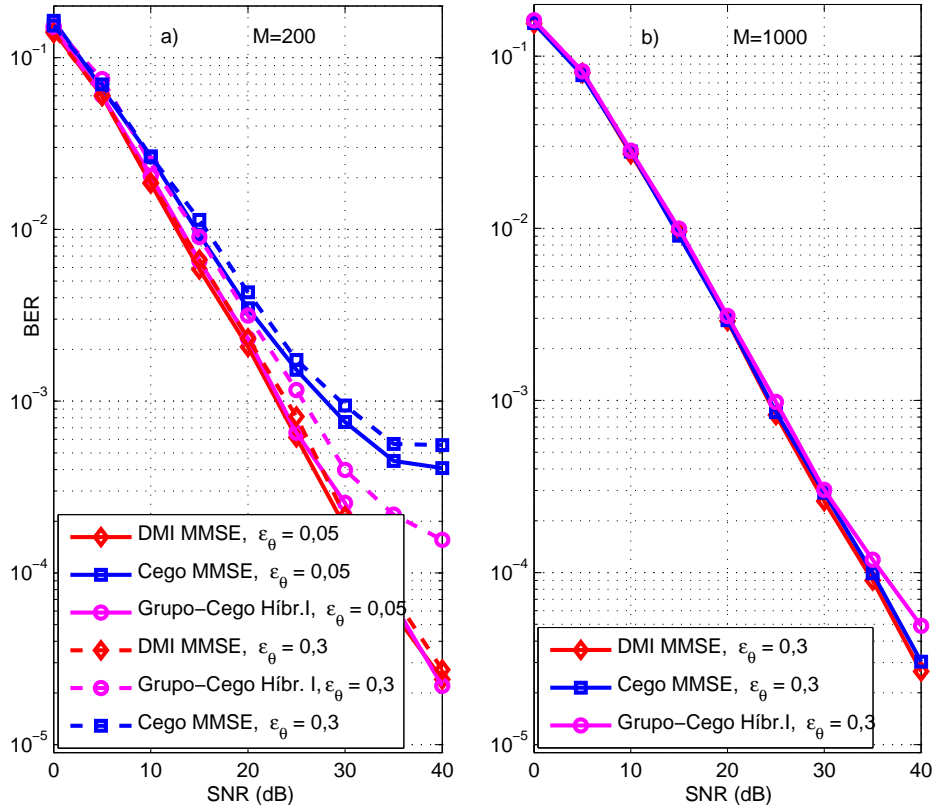


Figura 5.14: BER  $\times$  SNR para o sistema síncrono em canal Rayleigh plano com erros nas estimativas da **fase** dos coeficientes de canal conforme eq. (5.1);  $K_c = 7$  e  $K_u = 4$ , para o DMI obteve-se a inversa bit a bit (5% e 30%). a)  $F = M = 200$ ; b)  $F = M = 1000$ .

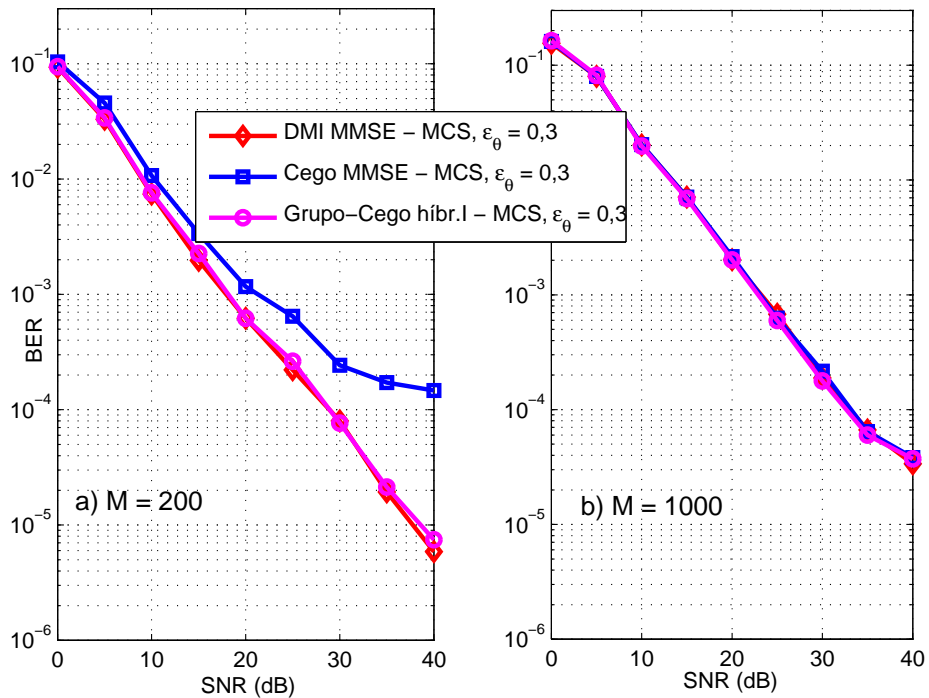


Figura 5.15: BER  $\times$  SNR para o sistema síncrono em canal Rayleigh plano com erros nas estimativas da **fase** dos coeficientes de canal conforme eq. (5.2);  $K_c = 7$  e  $K_u = 4$ , para o DMI obteve-se a inversa bit a bit (30%). a)  $F = M = 200$ ; b)  $F = M = 1000$ .



## Capítulo 6

# Expansão Polinomial

Neste capítulo apresenta-se a maior contribuição desse trabalho. Procura-se reduzir a complexidade do detector estudado utilizando um dos métodos iterativos existentes na literatura: método SOR (Successive Over-relaxation) (NAVARRO; GRANT, 2000) e (AXELSSON, 1996), método de Chebyshev (NAVARRO; GRANT, 2000) e (AXELSSON, 1996), método da expansão polinomial (SESSLER; JONDRAL, 2005) e outros, dos quais utiliza-se nesse trabalho o método da expansão polinomial. Para tanto, dividiu-se o capítulo em oito seções. Na seção 6.1 discute-se a introdução da aproximação polinomial e as formas de estimativa dos autovalores máximos e mínimos para obter o fator de normalização. Na seção 6.2 mostra-se a fórmula geral da aproximação polinomial e para os casos particulares dos detectores MMSE e descorrelacionador. Apresenta-se uma forma recursiva, na seção 6.3, para obter a aproximação polinomial para os detectores MMSE e o descorrelacionador. A seção 6.4 mostra as condições de convergência para a aproximação polinomial e duas formas simples, mas não muito precisas, de obter os valores máximos e mínimos dos autovalores via o traço ( $\text{tr}(\cdot)$ ) e via o teorema da similaridade, valores usados para o cálculo do fator de normalização. Apresenta também uma forma para o cálculo do fator de normalização ótimo tanto para o detector MMSE como para o descorrelacionador. Já a seção 6.5 apresenta uma forma mais precisa de aproximação dos autovalores máximos e mínimos utilizando o círculo de Gershgorin em conjunto com o fator de normalização ótimo. Na seção 6.6 apresenta-se o equacionamento para obter-se a aproximação polinomial para o detector grupo-cego, que é o foco deste trabalho. Calcula-se o fator de normalização de diferentes formas. Apresenta-se, na seção 6.7, os resultados de simulação obtidos utilizando-se a aproximação polinomial para os diferentes cenários: com efeito perto-longe, erro de fase da portadora para canais AWGN, erros nas estimativas de módulo e fase nos canais Rayleigh plano e variação do total de usuários  $K$  para canal

AWGN e Rayleigh Plano. A última secção compara a complexidade computacional dos detectores estudados.

## 6.1 Introdução

Esta secção mostra como os detectores multiusuário lineares MMSE e o descorrelacionador podem ser aproximados por expansões polinomiais (detector multiusuário linear MUD-PE) (MOSHAVI, 1996b). O detector descorrelacionador é descrito por:

$$\mathbf{L}_{\text{dec}} = \mathbf{R}^{-1}, \quad (6.1)$$

onde  $\mathbf{R} = \mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A}$ , matriz de correlação do sistema; enquanto que o detector MMSE é descrito por:

$$\mathbf{L}_{\text{mmse}} = [\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{I}]^{-1}, \quad (6.2)$$

onde  $\sigma^2$  representa a potência normalizada do ruído AWGN e  $\mathbf{I}$  representa a matriz unitária.

O maior problema associado aos MUD lineares MMSE e descorrelacionador é a alta complexidade computacional, da ordem de  $K^3$ , i.e.,  $\mathcal{O}(K^3)$ , resultante das operações associadas à inversão da matriz de correlação. Assim, esta matriz inversa será aproximada por uma expansão polinomial, resultando no detector PE. Em geral, o MUD-PE pode ser representado como:

$$\mathbf{L}_{\text{pe}} = \sum_{i=0}^{N_{\text{Iter}}} w_i \tilde{\mathbf{R}}^i, \quad (6.3)$$

onde  $N_{\text{Iter}}$  representa simultaneamente o número de iterações do detector PE e a precisão da aproximação;  $w_i$  indica os coeficientes ou pesos, responsáveis pela melhoria na taxa de convergência da solução PE. Observe-se que tanto  $\tilde{\mathbf{R}}$  quanto  $w_i$  devem ser escolhidos de forma a obter a melhor aproximação do detector descorrelacionador ou MMSE.

A seguir serão discutidas três formas para a aproximação PE, equação (6.3), tendo em vista incrementar a convergência PE para a solução MMSE e/ou descorrelacionador:

- Expansão polinomial baseada no traço da matriz de correlação, PE1 (LEI; LIM, 1998);
- Expansão polinomial baseada no teorema da similaridade, PE2 (DETERT; LINDUSKA, 2003);
- Expansão polinomial através dos círculos de Gershgorin (SESSLER; JONDRAL, 2005).

Em seguida, essas aproximações polinomiais para matriz de correlação inversa serão utilizadas junto aos detectores semi-cegos visando reduzir a complexidade de implementação

Existem ainda formas adaptativas para a obtenção ótima dos pesos  $w_i$  do detector PE (ZHONG-JIE; SER, 2005; DUA, 2001). Estas formas adaptativas não serão analisadas aqui, pois introduzem complexidade adicional de implementação.

## 6.2 Aproximação Polinomial para MuD Lineares

Os detectores multiusuários lineares baseados na inversão da matriz de correlação  $\mathbf{R}$  podem ser aproximados baseados na expansão da série de Taylor:

$$(1+x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-x)^i = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad |x| < 1. \quad (6.4)$$

Para  $|x| \ll 1$  esta equação pode ser aproximada, usando somente o primeiro e o segundo termo:  $1 - x$ . A série de Taylor em (6.4) pode ser generalizada pela matriz (MEYER, 2000):

$$(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-\mathbf{X})^i, \quad \forall \mathbf{X} \text{ com } |\lambda_j(\mathbf{X})| < 1 \quad \forall j \quad (6.5)$$

onde  $\lambda_j(\mathbf{X})$  representa o  $j$ -ésimo autovalor de  $\mathbf{X}$ .

A complexidade dos detectores descorrelacionador e MMSE cresce com terceira potência do tamanho da matriz, enquanto a complexidade dos detectores PE cresce somente com a segunda potência, resultando em uma redução significativa de complexidade. Reescrevendo-se a aproximação geral do detector PE dado por (6.3), obtém-se:

$$\mathbf{L}_{pe} = \alpha \sum_{i=0}^{N_{Iter}} \mathbf{X}^i \approx \alpha (\mathbf{I} - \mathbf{X})^{-1} \quad \forall \mathbf{X} \text{ com } |\lambda_n(\mathbf{X})| < 1 \quad \forall n \quad (6.6)$$

onde

$$\mathbf{X} = \mathbf{I} - \alpha \mathbf{R} \quad \text{MuD Descorrelacionador} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{I} - \alpha (\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{I}) \quad \text{MuD MMSE} \quad (6.8)$$

e  $\lambda_n(\mathbf{X})$  representando o  $n$ -ésimo autovalor de  $\mathbf{X}$ .

É importante notar que a série na equação (6.6) converge somente se todos os autovalores  $\lambda_n(\mathbf{X})$  localizarem-se no interior do círculo unitário. Para garantir essa condição de convergência acrescenta-se o fator de normalização  $\alpha$ . Assim, a escolha apropriada de  $\alpha$  garante não somente a convergência da série mas também maior velocidade de convergência.

O erro residual  $\mathbf{R}_L$  da aproximação em (6.6) resulta:

$$\mathbf{R}_L = \alpha \sum_{i=N_{Iter}+1}^{\infty} \mathbf{X}^i. \quad (6.9)$$

### 6.3 Realizações do Detector PE com Baixa Complexidade

O vetor da estimativa dos símbolos dos dados  $\hat{\mathbf{d}}$  no detector pode ser obtido por:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{y}_{MF} \quad (6.10)$$

onde  $\mathbf{y}_{MF}$  indica o sinal na saída do filtro casado (MF) e  $\mathbf{L}$  representa um detector linear qualquer.

A baixa complexidade do detector PE em (6.6) pode ser alcançada se as equações (6.10) e (6.6) forem combinadas obtendo-se os símbolos estimados  $\hat{\mathbf{d}}_{PE}$ :

$$\hat{\mathbf{d}}_{PE} = \alpha \sum_{i=0}^{N_{Iter}} \mathbf{X}^i \mathbf{y}_{MF} \quad (6.11)$$

Esta equação pode ser reescrita usando o plano Horner em que recai somente na multiplicação vetor-matriz não sendo necessário a multiplicação matriz-matriz. Uma aproximação recursiva é obtida em (SESSLER; JONDRAL, 2001):

$$\hat{\mathbf{d}}_{PE}(i+1) = \alpha \mathbf{y}_{MF} + \mathbf{X} \hat{\mathbf{d}}_{PE}(i) \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, N_{Iter} - 1 \quad (6.12)$$

onde a âncora da iteração é  $\hat{\mathbf{d}}_{PE}(0) = \alpha \mathbf{y}_{MF}$ . A complexidade desta aproximação é definida pela multiplicação vetor-matriz e é  $\mathcal{O}(N^2)$ , que é consideravelmente menor do que o  $\mathcal{O}(N^3)$  necessário para os detectores multiusuários MMSE e decorrelacionador.

### 6.4 Convergência do Detector PE

#### 6.4.1 Condição de Convergência para o Detector PE

A condição de convergência dada em (6.6) resulta diretamente do seguinte teorema cujo a prova está referenciada em (SESSLER; JONDRAL, 2005) é:

**Teorema 4** *A potência da matriz  $\mathbf{X}^i$  da matriz  $\mathbf{X}$  com os autovalores  $\lambda_n(\mathbf{X})$  tem os autovalores  $(\lambda_n(\mathbf{X}))^i$  onde  $i$  é um valor positivo ou, no caso de uma matriz não singular  $\mathbf{X}$ , expoente inteiro negativo.*

Então a matriz  $\mathbf{X}^i$  em (6.6) converge para a matriz zero para  $N_{Iter}$  tendendo para o infinito somente se todos autovalores  $\lambda_n(\mathbf{X})$  forem menores do que a unidade e também todos os autovalores da potência da matriz  $(\lambda_n(\mathbf{X}))^i$  convergirem para zero para  $i$  tendendo para o infinito. Se somente um autovalor de  $\lambda_n(\mathbf{X})$  é maior do que um, então a matriz  $\mathbf{X}^i$  diverge já que o correspondente autovalor  $(\lambda_n(\mathbf{X}))^i$  para  $i$  tendendo para o infinito diverge.

A condição de convergência do detector PE para o detector multiusuário descorrelacionador aproximado ( $\mathbf{L}_{Dec} = \mathbf{R}^{-1}$ ) leva para a seguinte condição do fator de normalização  $\alpha$ :

$$|\lambda_n(\mathbf{X})| < 1 \quad \forall n \quad 0 < |\alpha \lambda_{\max}(\mathbf{R})| < 2 \quad (6.13)$$

$$0 < \alpha < \frac{2}{|\lambda_{\max}(\mathbf{R})|} \quad (\text{convergência - PE1 descorrelacionador}) \quad (6.14)$$

onde  $\lambda_{\max}(\mathbf{R})$  representa o autovalor máximo da matriz  $\mathbf{R}$ . Daqui para frente, o MUD linear baseado na expansão polinomial com este limitante será denominado MUD PE1. Similarmente, o detector PE para aproximação do detector multiusuário MMSE ( $\mathbf{L}_{\text{mmse}} = [\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{I}]^{-1}$ ) aplica-se a seguinte condição de convergência para  $\alpha$ :

$$|\lambda_{\max}(\mathbf{I} - \alpha \mathbf{R} - \alpha \sigma^2 \mathbf{I})| < 1 \quad 0 < \alpha < \frac{2}{|\lambda_{\max}(\mathbf{R}) + \sigma^2|} \quad (\text{convergência - PE1 MMSE}) \quad (6.15)$$

A propriedade de convergência do detector PE pode ser visualizada no plano complexo usando a distribuição dos autovalores. Em geral os autovalores de uma matriz quadrada são distribuídas como uma *nuvem* no plano complexo. Para uma matriz de correlação a distribuição dos autovalores pode ser especificada mais precisamente. As matrizes de correlação são sempre positivas definidas e Hermitianas, entretanto todos os autovalores são positivos e reais (HORN; JOHNSON, 1985).

Aplicam-se propriedades similares para os autovalores da matriz  $\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{I}$  que é necessário para a aproximação do detector multiusuário MMSE.

Todos os autovalores têm que estar dentro do círculo unitário para garantir a convergência. A área de convergência da equação (6.13) corresponde a aproximação do detector multiusuário descorrelacionadora referente a matriz  $\mathbf{R}$  e da equação (6.15) corresponde a aproximação do detector multiusuário MMSE referente a matriz  $\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{I}$ .

Em geral, os autovalores das matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{I}$  não caem dentro da área de convergência. Entretanto, os autovalores podem ser mudados usando o fator de normalização  $\alpha$ . Se  $\alpha$  é escolhido de forma que as condições (6.14) e (6.15) sejam satisfeitas, então obtém-se uma distribuição dos autovalores, onde todos os autovalores caem dentro da área de convergência.

#### 6.4.2 Estimativa do $\lambda_{\max}$ via $\text{traço}(\mathbf{R})$

A determinação exata de  $\lambda_{\max}(\mathbf{R})$  requer relativamente um grande esforço computacional. Em geral, a determinação do maior autovalor resulta na mesma ordem de complexidade necessária à determinação de todos os autovalores, ou seja,  $\mathcal{O}(N^3)$ . Portanto, calcular os autovalores eliminaria

a vantagem de menor complexidade do detector multiusuário PE. Neste caso, a estimativa do autovalor  $\lambda_{\max}(\mathbf{R})$  é vantajoso. Em (LEI; LIM, 1998) é proposto uma estimativa, muito simples, mas também muito grosseira, para o  $\lambda_{\max}(\mathbf{R})$  do detector PE. Esta estimativa usa a operação traço ( $tr(\cdot)$ ) e obtém-se o fator de normalização para o detector multiusuário descorrelacionador

$$\alpha = \frac{2}{tr(\mathbf{R})} \quad (6.16)$$

enquanto  $\alpha$  é

$$\alpha = \frac{2}{tr(\mathbf{R}) + \sigma^2} \quad (6.17)$$

para a aproximação do detector multiusuário MMSE.

A complexidade da estimativa é da ordem de  $\mathcal{O}(N)$  e portanto não significa aumento na complexidade dos detectores. Entretanto, considerando que a estimativa de  $\hat{\lambda}_{\max}$  é relativamente grosseira, a velocidade de convergência ainda não é ótima.

### 6.4.3 Estimativa do $\lambda_{\max}$ via Teorema da Similaridade

A matriz de correlação  $\mathbf{R}$  é similar a  $s\mathbf{I} - \mathbf{R}$  (DETERT; LINDUSKA, 2003),

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{T} = s\mathbf{I} - \mathbf{R} \quad (6.18)$$

onde  $s$  é um escalar,  $\mathbf{T}$  uma matriz arbitrária inversível, se  $\mathbf{R}$  e  $s\mathbf{I} - \mathbf{R}$  tiverem os mesmos autovalores. Ordenando os autovalores de  $\mathbf{R}$  em ordem crescente obtemos:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N-1} \leq \lambda_N, \quad (6.19)$$

e os autovalores de  $s\mathbf{I} - \mathbf{R}$

$$0 \leq s - \lambda_N \leq s - \lambda_{N-1} \leq \dots \leq s - \lambda_2 \leq s - \lambda_1 \quad (6.20)$$

Como os autovalores de  $\mathbf{R}$  e  $s\mathbf{I} - \mathbf{R}$  são iguais:

$$\lambda_1 + \lambda_N = \lambda_2 + \lambda_{N-1} = \dots = s. \quad (6.21)$$

Com  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = tr(\mathbf{R})$ , obtemos:

$$\frac{2 \cdot tr(\mathbf{R})}{N} \geq \lambda_{\max}(\mathbf{R}) \geq \frac{tr(\mathbf{R})}{N} \quad (\text{convergência - PE2 descorrelacionador}) \quad (6.22)$$

onde  $N$  = número de autovalores. Daqui para frente, a condição de convergência dada por (6.22) que caracteriza o MUD linear baseado na expansão polinomial será denominada PE2.

#### 6.4.4 Velocidade de Convergência do Detector PE

A velocidade de convergência é importante para o desempenho do detector PE. A condição de convergência discutida na seção 6.4.1 não especifica a velocidade de convergência ou como ela cresce. Na sequência, apresenta-se um novo método para visualizar uma convergência ótima do detector PE.

Desde que os autovalores de  $\mathbf{X}^i$  sejam dados por  $(\lambda_n(\mathbf{X}))^i$ , os autovalores de  $\mathbf{X}$  não somente determina a existência de velocidade mas também a rapidez em que a matriz polinomial  $\mathbf{X}^i$  converge para a matriz zero. Assintoticamente, somente o autovalor com maior valor absoluto é importante. Todos os outros em que  $|\lambda_n(\mathbf{X})| < |\lambda_{\max}(\mathbf{X})|$  manter-se terá influência na velocidade de convergência assintótica desde que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{|\lambda_n(\mathbf{X})|}{|\lambda_{\max}(\mathbf{X})|} \right)^i = 0, \quad \forall n \text{ que satisfaz } |\lambda_n(\mathbf{X})| < |\lambda_{\max}(\mathbf{X})|. \quad (6.23)$$

Relativamente ao autovalor máximo assintótico, na equação (6.23), todos os autovalores de  $(\lambda_n(\mathbf{X}))^i$  convergem para zero, para  $\mathbf{X} = \mathbf{I} - \alpha\mathbf{R}$ . Entretanto, a velocidade de convergência assintótica é definida através de autovalores mais próximos da unidade. Isto pode ser provado para o detector multiusuário descorrelacionador pela modificação da equação (6.23) para

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{|1 - \alpha\lambda_n(\mathbf{R})|}{|1 - \alpha\lambda_{\min/\max}(\mathbf{R})|} \right)^i = 0, \quad \forall n \text{ que satisfaz } |1 - \alpha\lambda_n(\mathbf{R})| < |1 - \alpha\lambda_{\min/\max}(\mathbf{R})|. \quad (6.24)$$

Entretanto, a velocidade de convergência é dada pelo autovalor que tem o maior valor absoluto, i.e.,  $|1 - \alpha\lambda_{\min}(\mathbf{R})|$  ou  $|1 - \alpha\lambda_{\max}(\mathbf{R})|$  ou ambos, como será mostrado.

Similarmente, para o detector multiusuário MMSE aproximado aplica-se:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{|1 - \alpha\lambda_n(\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{I})|}{|1 - \alpha\lambda_{\min/\max}(\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{I})|} \right)^i = 0, \quad \forall n \text{ } |1 - \alpha\lambda_n(\mathbf{R})| < |1 - \alpha\lambda_{\min/\max}(\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{I})|. \quad (6.25)$$

Em resumo, isto significa que o raio do círculo com centro em um, inclui todos os autovalores de  $\mathbf{R}$  (ou  $\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{I}$ ) e determina a velocidade de convergência. Quanto menor o raio do círculo, maior é a velocidade de convergência.

#### 6.4.5 Alta Velocidade de Convergência do Detector PE

A velocidade de convergência pode ser influenciada pelo fator de normalização  $\alpha$ . Troca-se o fator de normalização mudando os autovalores da matriz normalizada  $\alpha\mathbf{R}$  (ou  $\alpha(\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{I})$ ). Para a

velocidade de convergência somente são mais relevantes os autovalores mais distantes da unidade (do centro do círculo de convergência). Portanto, isto propõe a troca do fator de normalização  $\alpha$  pelo autovalor mínimo  $\alpha\lambda_{\min}\mathbf{R}$  (ou  $\alpha\lambda_{\min}(\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{I})$ ) e o autovalor máximo  $\alpha\lambda_{\max}\mathbf{R}$  (ou  $\alpha\lambda_{\max}(\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{I})$ ) equidistantes da unidade. Isto conduz para a minimização da velocidade de convergência conforme equações (6.24) e (6.25). Então, o fator de normalização ótimo  $\alpha_{\text{opt}}$  em relação a velocidade de convergência assintótica para o detector multiusuário descorrelacionador aproximado (SESSLER; JONDRAL, 2005) é

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min}(\mathbf{R}) + \lambda_{\max}(\mathbf{R})} \quad (\text{PEG descorrelacionador}) \quad (6.26)$$

Escolhendo  $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$  conduz para uma distribuição ótima dos autovalores. Com a mesma aproximação, o  $\alpha_{\text{opt}}$  para o detector multiusuário MMSE aproximado é determinado por

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min}(\mathbf{R}) + \lambda_{\max}(\mathbf{R}) + 2\sigma^2} \quad (\text{PEG MMSE}) \quad (6.27)$$

Daqui para frente, o detector PE caracterizado pelas equações (6.26) e (6.27) é denominado PEG descorrelacionador e PEG MMSE, respectivamente.

## 6.5 Estimativa dos Autovalores

Na última secção foi mostrado que, para o cálculo do fator de normalização ótimo, é necessário o conhecimento dos autovalores  $\lambda_{\min}(\mathbf{R})$  e  $\lambda_{\max}(\mathbf{R})$ . A complexidade para o cálculo destes autovalores é da ordem de  $\mathcal{O}(N^3)$  e requer um grande esforço computacional. Em contraste a isto, a estimativa discutida na secção 6.4.2 é relativamente simples, mas infelizmente muito grosseira. Portanto, isto conduz para o detector multiusuário PE de baixa convergência. A seguir, mostra-se um método acurado de baixa complexidade computacional para a estimativa dos autovalores. Esse método é baseado no teorema do círculo Gershgorins (SESSLER; JONDRAL, 2005).

### 6.5.1 Teorema do Círculo Gershgorin

**Teorema 5** *Considere  $\mathbf{S} = (s_{n,m})$  como uma matriz quadrada  $M \times M$  arbitrária e  $\lambda_{n'}(\mathbf{S})$  com  $n' \in (1, M)$  autovalores arbitrários de  $\mathbf{S}$ . Então existe um  $n \in (1, M)$  em que o estado do teorema do círculo Gershgorin garante a seguinte condição*

$$|s_{n,n} - \lambda_{n'}(\mathbf{S})| \leq \sum_{m=1, m \neq n}^M |s_{n,m}|. \quad (6.28)$$



De acordo com esse teorema (a prova está referenciada em (SESSLER; JONDRAL, 2005)), todos os autovalores da  $M$ -ésima linha da matriz quadrada arbitrária  $\mathbf{S} = (s_{n,m})$  cai dentro do círculo  $M$  chamado de círculo Gershgorin. Cada centro do círculo Gershgorin  $M$  corresponde a um elemento diagonal exato  $M$  da matriz. O raio de cada círculo pode ser determinado pela soma dos valores absolutos dos  $M - 1$  elementos restantes de cada linha ou coluna, respectivamente.

### 6.5.2 Estimativa dos Autovalores dos Detectores PE

Para a matriz  $\mathbf{R} = (r_{n,m})$ , que é necessária para o detector PE, a posição dos autovalores pode ser especificada mais precisamente, já que a matriz de correlação ( $\mathbf{R}$ ) é sempre positiva definida e Hermitiana, portanto todos os autovalores são positivos e reais. Então, todos os autovalores estão no eixo positivo do plano complexo. Consequentemente, o círculo Gershgorin pode ser reduzido a intervalos, isto é, cada autovalor  $\lambda_{n'}(\mathbf{R})$  cai dentro de pelo menos um dos intervalos [ $n \in (1, N)$ ]:

$$\lambda_{n'}(\mathbf{R}) \in \left[ \left\{ r_{n,n} - \sum_{m=1, m \neq n}^N |r_{n,m}| \right\}, \left\{ \sum_{m=1}^N |r_{n,m}| \right\} \right] \quad \forall n' \quad (6.29)$$

Os termos entre chaves representam os limites inferior e superior dos intervalos.

De (6.29) e da propriedade de que todos os autovalores são positivos, propõem-se a seguinte estimativa inferior para  $\lambda_{\min}(\mathbf{R})$  para o detector PE:

$$\hat{\lambda}_{\min}(\mathbf{R}) = \max \left\{ \min_{n \in (1, N)} \left\{ r_{n,n} - \sum_{m=1, m \neq n}^N |r_{n,m}| \right\}, \epsilon \right\} \leq \lambda_{\min}(\mathbf{R}). \quad (6.30)$$

em que  $\epsilon$  representa um número pequeno arbitrário ( $\epsilon > 0$ ). Portanto, de (6.29) o limite superior para  $\lambda_{\max}(\mathbf{R})$  é obtido por:

$$\hat{\lambda}_{\max}(\mathbf{R}) = \max_{n \in (1, N)} \left\{ \sum_{m=1}^N |r_{n,m}| \right\} \geq \lambda_{\max}(\mathbf{R}). \quad (6.31)$$

O tamanho do intervalo dado em (6.29) e a estrutura da matriz determinam a precisão da estimativa dos autovalores. Para sistemas CDMA a matriz de correlação são normalizadas pela diagonal dominante. Para cada matriz o raio do círculo Gershgorin (ou o tamanho do intervalo) determinado pela soma dos elementos diagonais em uma linha ou coluna é muito pequeno comparado com o centro do círculo Gershgorin (ou intervalo) determinado por um dos elementos diagonais. A estimativa proposta estreita os limites dos autovalores.

Portanto, estas estimativas podem ser usadas para calcular o fator de normalização ótimo

obtido em (6.26) e (6.27):

$$\alpha = \frac{2}{\hat{\lambda}_{\min}(\mathbf{R}) + \hat{\lambda}_{\max}(\mathbf{R})} \quad (6.32)$$

$$= 2 \cdot \left[ \max \left\{ \min_{n \in (1, N)} \left\{ r_{n,n} - \sum_{m=1, m \neq n}^N |r_{n,m}| \right\}, \epsilon \right\} + \max_{n \in (1, N)} \left\{ \sum_{m=1}^N |r_{n,m}| \right\} \right]^{-1} \quad (6.33)$$

A condição de convergência em (6.14) é satisfeita sempre, já que a substituição de  $\hat{\lambda}_{\max}(\mathbf{R}) \geq \lambda_{\max}(\mathbf{R})$  e  $\hat{\lambda}_{\min}(\mathbf{R}) \geq \epsilon > 0$  em (6.32) resulta em:

$$\alpha = \frac{2}{\hat{\lambda}_{\min}(\mathbf{R}) + \hat{\lambda}_{\max}(\mathbf{R})} \leq \frac{2}{\epsilon + \hat{\lambda}_{\max}(\mathbf{R})} < \frac{2}{\lambda_{\max}(\mathbf{R})}. \quad (6.34)$$

Para a aproximação do detector multiusuário MMSE obtem-se:

$$\alpha = \frac{2}{\hat{\lambda}_{\min}(\mathbf{R}) + \hat{\lambda}_{\max}(\mathbf{R}) + 2\sigma^2} \quad (6.35)$$

$$= 2 \cdot \left[ \max \left\{ \min_{n \in (1, N)} \left\{ r_{n,n} - \sum_{m=1, m \neq n}^N |r_{n,m}| \right\}, \epsilon \right\} + \max_{n \in (1, N)} \left\{ \sum_{m=1}^N |r_{n,m}| \right\} + 2\sigma^2 \right]^{-1}$$

Similarmente a condição de convergência dada em (6.15) é sempre satisfeita:

$$\alpha = \frac{2}{\hat{\lambda}_{\min}(\mathbf{R}) + \hat{\lambda}_{\max}(\mathbf{R}) + 2\sigma^2} < \frac{2}{\lambda_{\max}(\mathbf{R}) + 2\sigma^2} \quad (6.36)$$

A convergência do detector PE é obtido quando se usa o autovalor estimado da equação (6.33).

Para a matriz de autocorrelação usada em sistemas CDMA, o autovalor estimado das equações (6.30) e (6.31) calculam somente um menor estreitamento do círculo de convergência. Adicionalmente, pode-se notar que pela escolha de um limite inferior  $\lambda_{\min}(\mathbf{R})$  e um limite superior  $\lambda_{\max}(\mathbf{R})$ , uma parte do erro de estimativa é cancelada e obtém-se também uma alta velocidade de convergência.

Finalmente, pode-se ainda dizer que a estimativa dada em (6.30) e (6.31) também é aplicada para matriz de correlação diagonal não dominante. Portanto, o detector PE converge tanto para matriz de diagonal dominante como para matriz de diagonal não dominante, mas a velocidade de convergência normalizada é maior para matriz de diagonal dominante. A estimativa do autovalor proposta deliberadamente explora a estrutura da matriz sem que isto seja um pré-requisito para sua convergência.

## 6.6 Detectores Lineares Grupo-Cego com Expansão Polinomial

O detector linear baseado na projeção em subespaço, para o usuário 1, é:

$$\hat{b}_1 = \text{sgn}(\mathbf{w}_1^H \mathbf{r}) \quad (6.37)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor do sinal recebido e  $\mathbf{w}_1$  é o vetor projeção em subespaço.

O vetor projeção em subespaço apresentado com maior ênfase até o momento é o detector híbrido grupo-cego linear da forma I. De acordo com (WANG; MADSEN, 1999b) os detectores híbridos grupo-cego linear da forma I e II para sistemas de transmissão com desvanecimento apresentam praticamente o mesmo desempenho e o detector da forma II apresenta bem menor complexidade computacional do que a forma I. Desta forma justifica-se o uso do detector da forma II para os sistemas com desvanecimento.

O vetor projeção em subespaço do detector híbrido grupo-cego linear da forma II é dado por:

$$\hat{\mathbf{w}}_1 = \hat{\mathbf{U}}_s \Lambda_s^{-1} \hat{\mathbf{U}}_s^H \tilde{\mathbf{H}} \left( \tilde{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{U}}_s \Lambda_s^{-1} \hat{\mathbf{U}}_s^H \tilde{\mathbf{H}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (6.38)$$

O intuito desta secção é utilizar a expansão polinomial para diminuir a complexidade da equação (6.38). A equação em que será aplicado a expansão polinomial do detector grupo-cego será representada por  $\mathbf{G}_c$  dada pela equação inversa:

$$\mathbf{G}_c = \left( \tilde{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{U}}_s \Lambda_s^{-1} \hat{\mathbf{U}}_s^H \tilde{\mathbf{H}} \right)^{-1}. \quad (6.39)$$

Portanto, a matriz  $\mathbf{X}$  da equação (6.6) será dada por:

$$\mathbf{X} = \mathbf{I} - \alpha \mathbf{G}_c \quad \text{MuD Grupo-Cego Forma II} \quad (6.40)$$

substituindo na equação (6.6) temos:

$$\mathbf{L}_{gc} = \alpha \sum_{i=0}^{N_{Iter}} \mathbf{X}^i = \alpha \sum_{i=0}^{N_{Iter}} (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{G}_c)^i \quad (6.41)$$

O resultado da iteração dada pela equação (6.41) deve ser substituído na equação (6.38) no lugar da equação inversa  $\left( \tilde{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{U}}_s \Lambda_s^{-1} \hat{\mathbf{U}}_s^H \tilde{\mathbf{H}} \right)^{-1}$  onde obtém-se o seguinte resultado:

$$\hat{\mathbf{w}}_1 = \hat{\mathbf{U}}_s \Lambda_s^{-1} \hat{\mathbf{U}}_s^H \tilde{\mathbf{H}} (\mathbf{L}_{gc}) \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (6.42)$$

### 6.6.1 Detector Grupo-Cego MuD-PE1

Para obter-se o detector híbrido grupo-cego forma II com expansão polinomial utilizando a aproximação do  $\lambda_{\max}$  através da operação traço ( $tr(\cdot)$ ) da equação (6.16), deve-se substituir  $\mathbf{R}$  por  $\mathbf{G}_c$  resultando em:

$$\alpha = \frac{2}{tr(\mathbf{G}_c)} \quad (6.43)$$

Este resultado deve ser substituído na equação (6.41) para se calcular a inversa através da expansão polinomial com aproximação pela operação traço ( $tr(\cdot)$ ) para o cálculo de  $\alpha$ , representada por PE1.

### 6.6.2 Detector Grupo-Cego MuD-PE2

Para o mesmo detector grupo-cego do item anterior a aproximação do  $\lambda_{\max}$  pode ser feita também via teorema da similaridade conforme equação (6.22) substituindo-se a matriz  $\mathbf{R}$  por  $\mathbf{G}_c$  resultando em:

$$\alpha = \frac{2}{\frac{2 \cdot \text{tr}(\mathbf{G}_c)}{N}} = \frac{N}{\text{tr}(\mathbf{G}_c)} \quad (6.44)$$

para substituição na equação (6.41). Esta aproximação é representada por PE2.

### 6.6.3 Detector Grupo-Cego MuD-PEG

Outra aproximação para o cálculo de  $\alpha$  da equação (6.41) é dada pelo círculo de Gershgorin. Para obter-se essa aproximação para o detector grupo-cego substitui-se nas equações (6.32) e (6.33) a matriz  $\mathbf{R}$  por  $\mathbf{G}_c$  com o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{\hat{\lambda}_{\min}(\mathbf{G}_c) + \hat{\lambda}_{\max}(\mathbf{G}_c)} \\ &= 2 \cdot \left[ \max \left\{ \min_{n \in (1, N)} \left\{ g_{n,n} - \sum_{m=1, m \neq n}^N |g_{n,m}| \right\}, \epsilon \right\} + \max_{n \in (1, N)} \left\{ \sum_{m=1}^N |g_{n,m}| \right\} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (6.45)$$

O valor deste alfa deve ser substituído na equação (6.41). Esta aproximação é representada por PEG.

## 6.7 Resultados de Simulação MCS

Nesta secção foram utilizados os mesmos critérios usados no capítulo 4 e os principais parâmetros de sistema e de canal estão sintetizados na tabela 6.1. Ressalte-se que em todos os resultados apresentados foram analisados os desempenhos dos enlaces diretos, resultando um sinal composto DS/CDMA completamente síncrono na unidade móvel para os dois tipos de canais considerados, AWGN e Rayleigh plano.

Tabela 6.1: Parâmetros de sistema e canal utilizados nas simulações MCS com aproximação por PE

Carga	$\tilde{K}$	$\check{K}$	$M$	$SNR$ [dB]	$f_m$ [Hz]	Parâmetro	Seq.
$L_1$	7	4	200	[0 : 5 : 15] AWGN	5	$\epsilon_\varphi = [5 \ 10 \ 30 \ 45] \%$	Pseudo-
$L_2$	10	5	1000	[0 : 5 : 45] Rayl Plano	22	$\epsilon_\alpha = [0 \ 3 \ 5 \ 30] \%$	Gold,
$L_3$	5	10	Process. Rx	Relação Sinal-Ruído	400	$\epsilon_\theta = [0 \ 3 \ 5 \ 30] \%$	$N = 15$
Carregamento				$NFR = [6 \ 10 \ 12 \ 20]$	Doppler	Erro Estim.	Espalham.

## 6.7.1 PE em Canal AWGN

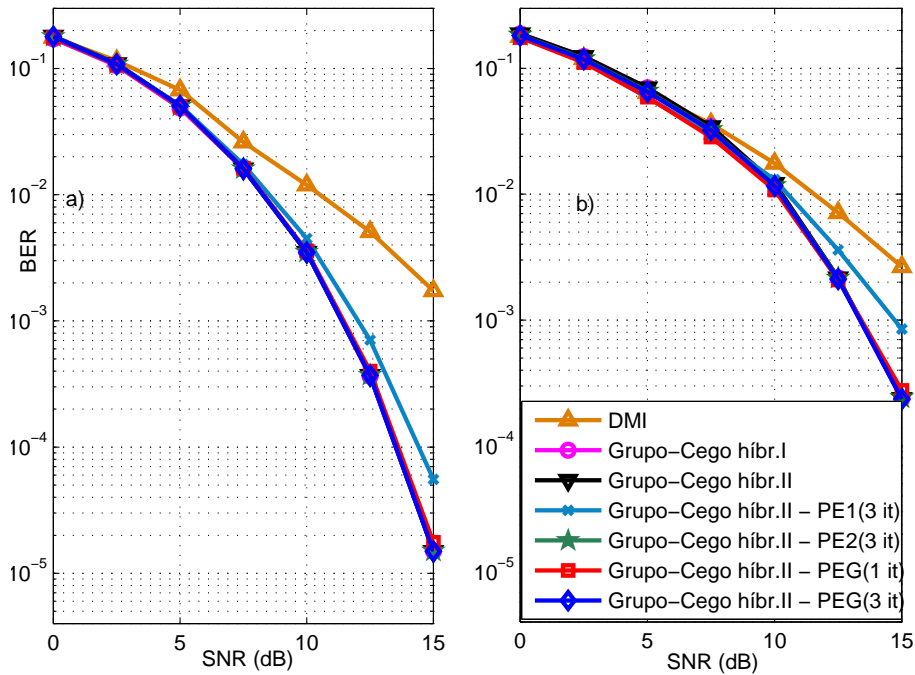


Figura 6.1: Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbridos I e II em canal AWGN;  $M = 200$ ;  $N = 15$ ; gold 15.

(a)  $K_c = 7$ ;  $K_u = 4$ .      (b)  $K_c = 10$ ;  $K_u = 5$ .

Adotou-se para essa simulação o sistema DS/CDMA com sequência de espalhamento pseudo-Gold 15. Na figura 6.1 (a), considerou-se  $\tilde{K} = 7$  e  $\check{K} = 4$  e quantidade de amostras para obtenção da autocorrelação  $M = 200$  em canal AWGN. Para a aproximação PE2, 3 iterações foram suficientes para se alcançar o resultado de desempenho sem aproximação, o mesmo não pode ser dito em relação a PE1 para 3 iterações. Somente uma iteração foi suficiente para obter o desempenho esperado para a aproximação PEG, conforme pode-se confirmar na figura 6.1 (a). O mesmo comportamento obtém-se, com desempenho pior, conforme esperado, na figura 6.1 (b) onde foi aumentado o total de usuários para  $\tilde{K} = 10$  e  $\check{K} = 5$  e manteve-se o valor dos outros parâmetros.

## 6.7.2 PE em Canal com Desvanecimento Rayleigh Plano

Considera-se para essa simulação o sistema DS/CDMA com link direto. Na figura 6.2 mostra-se o desempenho dos detectores DMI e grupo cego da forma I e II. Observa-se que o desempenho dos detectores grupo-cego forma I e forma II são muito próximos, mas o detector grupo-cego da forma II possui a vantagem de menor complexidade já que a decomposição SVD é executada a partir da auto-correção do sinal recebido. Para a figura 6.2 (b) tem-se quantidade de usuários conhecidos  $\tilde{K} = 7$  e total de usuários desconhecidos  $\check{K} = 4$ , canal Rayleigh plano de link direto,

com amostragem  $M = 200$  e  $f_m = 400Hz$ . A aproximação polinomial PE2 e PEG para três iterações apresentaram praticamente o mesmo desempenho e a aproximação polinomial PE1 com três iterações mostra desempenho ligeiramente pior do que apenas uma iteração da aproximação polinomial PEG para  $SNR > 35dB$ . Para valores de  $SNR < 35dB$  as aproximações polinomiais apresentaram praticamente o mesmo desempenho. Na figura 6.2 (a), altera-se somente a máxima

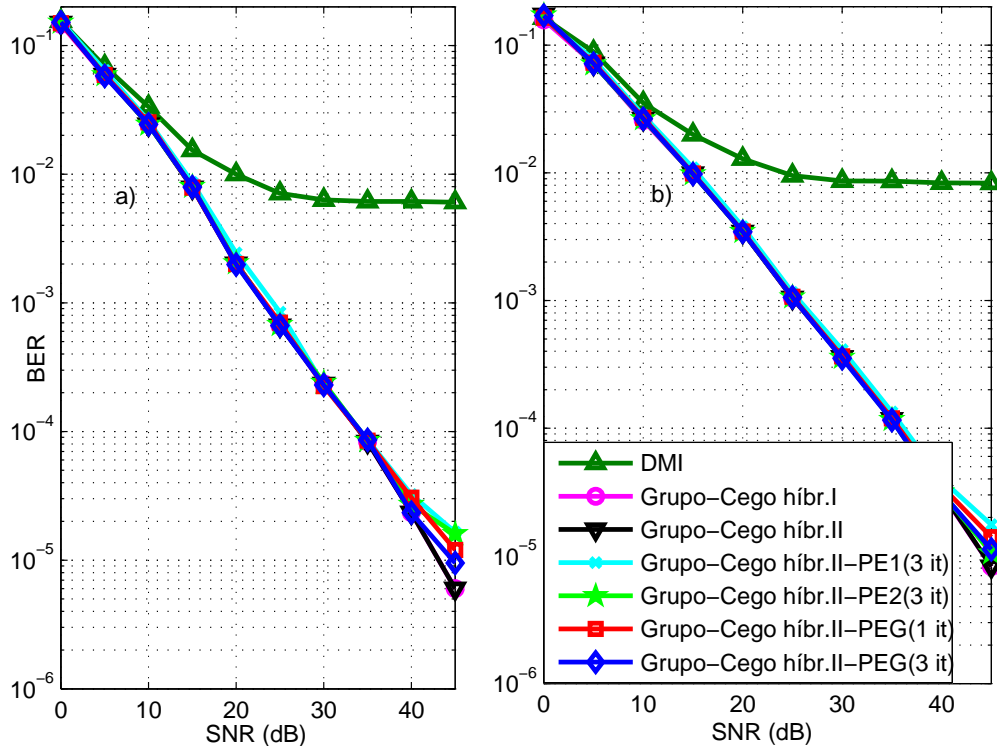


Figura 6.2: Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $K_c = 7$ ;  $K_u = 4$ ;  $M = 200$ ;  $N = 15$ . (a)  $f_m = 22Hz$  (b)  $f_m = 400Hz$

velocidade de deslocamento do móvel; para isso, adota-se  $f_m = 22Hz$ , representando uma mobilidade menor em relação à figura 6.2 (b). Observe-se que, nesse caso, houve uma redução marginal de desempenho quando  $SNR > 35dB$  para todas as aproximações polinomiais em relação aos respectivos resultados para o caso de  $f_m = 400Hz$  da figura 6.2 (b). Ainda na região de alta  $SNR$ , as aproximações PE1 e PE2 com três iterações apresentaram desempenho marginalmente inferior em relação à aproximação polinomial PEG com apenas uma iteração, [PEG(1 it) na legenda]. A aproximação polinomial PEG com três iterações mostrou-se com desempenho muito próximo da curva de desempenho sem aproximação, portanto resulta melhor desempenho em relação às formas de aproximação PE1 e PE2 para a região de alta  $SNR$ . Obteve-se o desempenho da figura 6.3 (a) a partir dos dados da figura 6.2 (a) alterando-se apenas a quantidade de usuários conhecidos para  $\tilde{K} = 5$  e usuários desconhecidos para  $\tilde{K} = 10$  (representando uma situação de maior interferência intercelular) em que a aproximação polinomial PEG com três iterações apresentou o

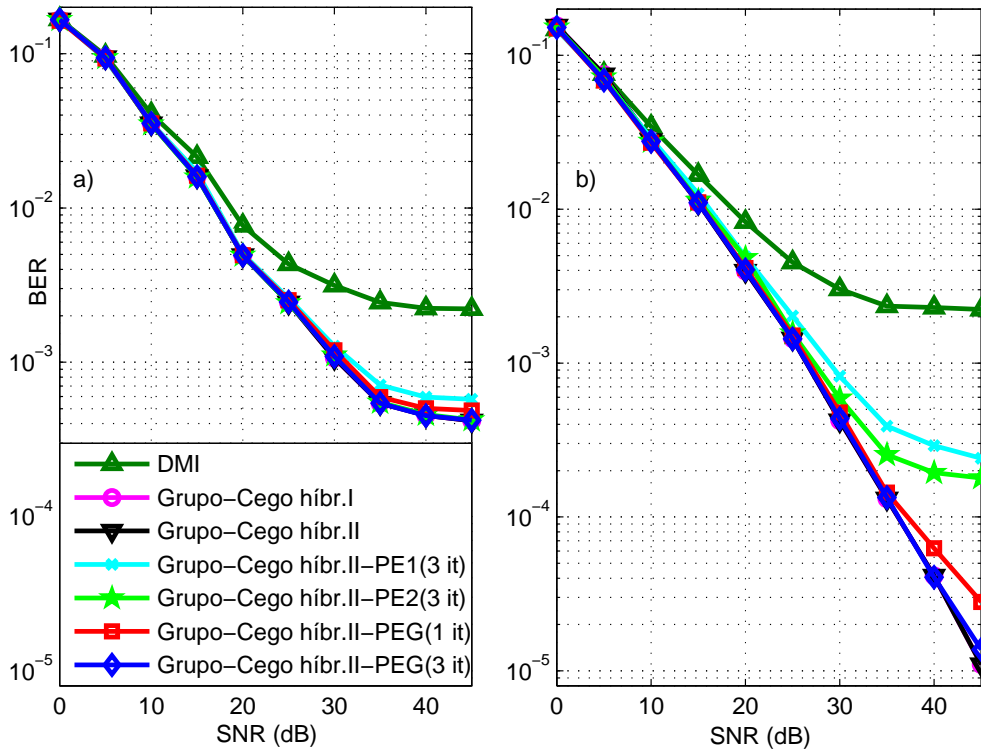


Figura 6.3: Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $M = 200$ ;  $N = 15$ ;  $f_m = 22Hz$ . (a)  $K_c = 5$ ;  $K_u = 10$ . (b)  $K_c = 10$ ;  $K_u = 5$ .

mesmo resultado da curva de desempenho na ausência de aproximação (Grupo-Cego híbr. II, na legenda). Novamente, as aproximações PE1 e PE2 apresentaram desempenho marginalmente degradado para a região de alto  $SNR$  em relação à aproximação PEG. Evidencia-se, ainda, através da figura 6.3 (a), cuja quantidade de sinais inteferentes desconhecidos é elevadíssima, a limitação em interferência dos detectores grupo-cego: quando  $E_b/N_0$  tende ao infinito, surge um piso de BER irreduzível.

O desempenho da figura 6.3 (b) apresenta o resultado obtido com alteração, em relação a figura 6.3 (a), somente do número de usuários conhecidos que passou para  $\tilde{K} = 10$  e usuários desconhecidos para  $\tilde{K} = 5$ . Nessa figura, evidencia-se a superioridade da aproximação polinomial PEG em relação às PE1 e PE2 quando o número de iterações é pequeno ( $It \leq 3$ ). A aproximação polinomial PE1 apresenta o pior piso de BER irreduzível ( $SNR > 25dB$ ), seguido pela aproximação PE2 e finalmente PEG com piso de BER irreduzível ocorrendo acima de  $SNR > 40dB$ . Finalmente, observe-se que na região de elevada  $SNR$  da figura 6.3 (b) a aproximação polinomial PEG apresenta desempenho superior a uma década em relação às aproximações PE1 e PE2.

Quando o número de iterações é incrementado para  $It = 10$ , resultando em maior complexidade computacional, o desempenho do MUD-PE1 aproxima-se do obtido através do Grupo-Cego híbrido forma II, figura 6.4, enquanto a aproximação MUD-PE2 não mostrou igual melhoria, evidenciando

ainda um piso de BER irreduzível em torno de  $2 \times 10^{-4}$  a partir de  $SNR = 40dB$ , mesmo com um número de iterações da ordem de 10.

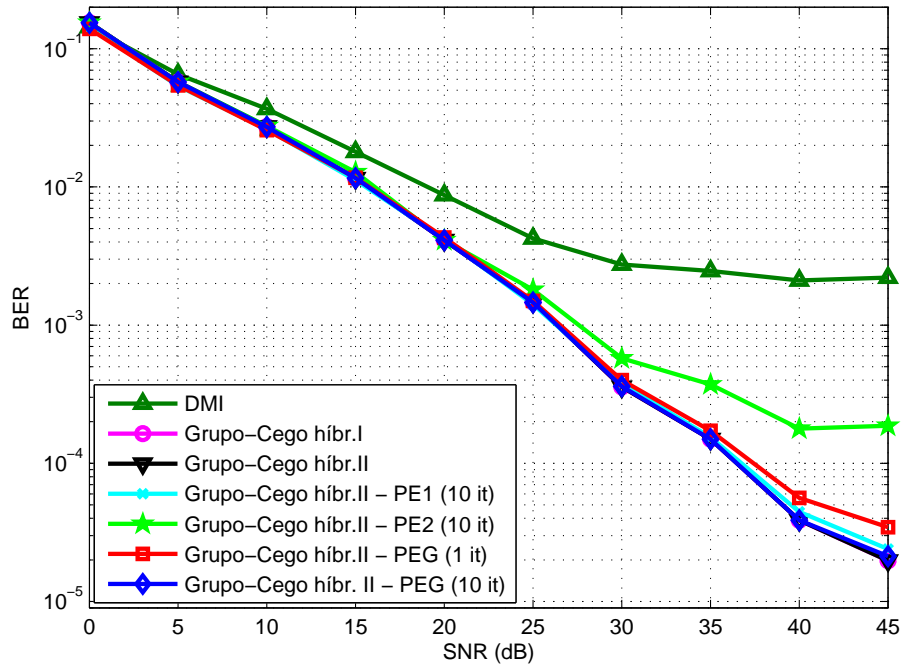


Figura 6.4: Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $K_c = 10; K_u = 5$ ;  $f_m = 22Hz$  e número de iterações  $It = 10$ .

### 6.7.3 Desempenho com Efeito *Near-Far*

Na figura 6.5 incluiu-se o efeito perto-longe impondo uma elevação de potência nos sinais dos usuários interferentes; como resultado, impôs-se à metade dos usuários conhecidos uma razão *near-far* de  $NFR = 10 \log_{10} \frac{P_{interf}}{P_{interesse}} = 10dB$  e à metade dos usuários desconhecidos uma  $NFR = 6dB$ <sup>1</sup>. Comparando-se com a figura 6.3 (b) observa-se que o desempenho das aproximações polinomiais se mantem na mesma ordem, ou seja, a aproximação PEG apresenta melhor desempenho. Já a figura 6.6, para o qual tem-se um usuário conhecido com  $NFR = 20dB$  e um usuário desconhecido com  $NFR = 12dB$ , o desempenho da aproximação PE2 apresentou-se semelhante ao desempenho da aproximação PE1 e a aproximação PEG para uma iteração resultou em melhor desempenho e mais próxima do desempenho para PEG com três iterações.

As figuras 6.5 e 6.6 mostram que as aproximações polinomiais PE1, PE2 e PEG são resistentes ao efeito perto-longe, destacando-se a aproximação PEG por apresentar menor degradação de desempenho que as demais para um menor número de iterações.

<sup>1</sup>Entre todos os usuários desconhecidos, metade é recebido com potência  $6dB$  acima, relativo à potência dos usuários de interesse, conhecidos, e a outra metade com mesma potência.



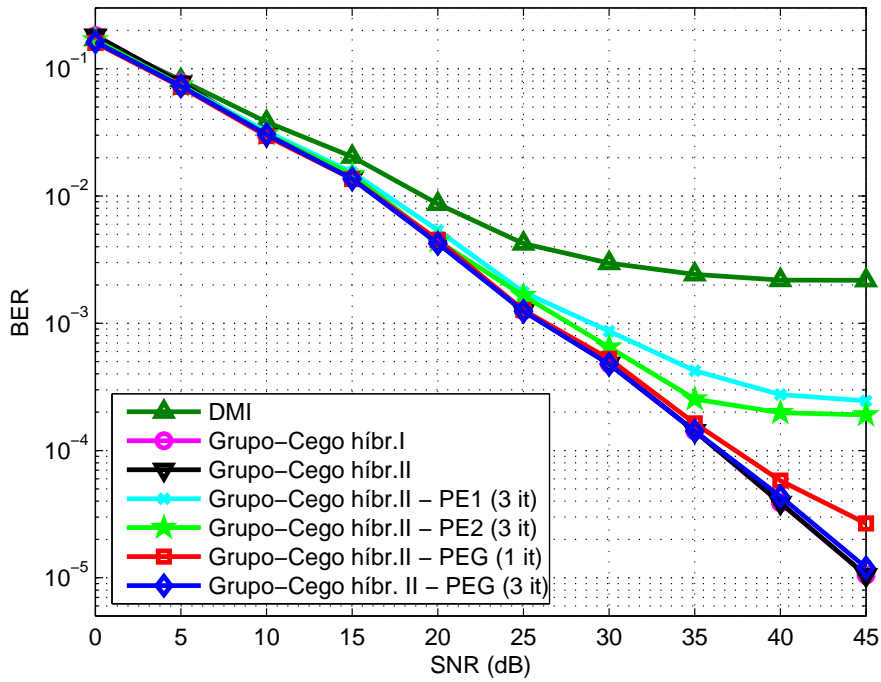


Figura 6.5: Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $K_c = 10; K_u = 5$ ; metade dos usuários conhecidos com  $NFR = 10dB$  e metade dos desconhecidos com  $NFR = 6dB$

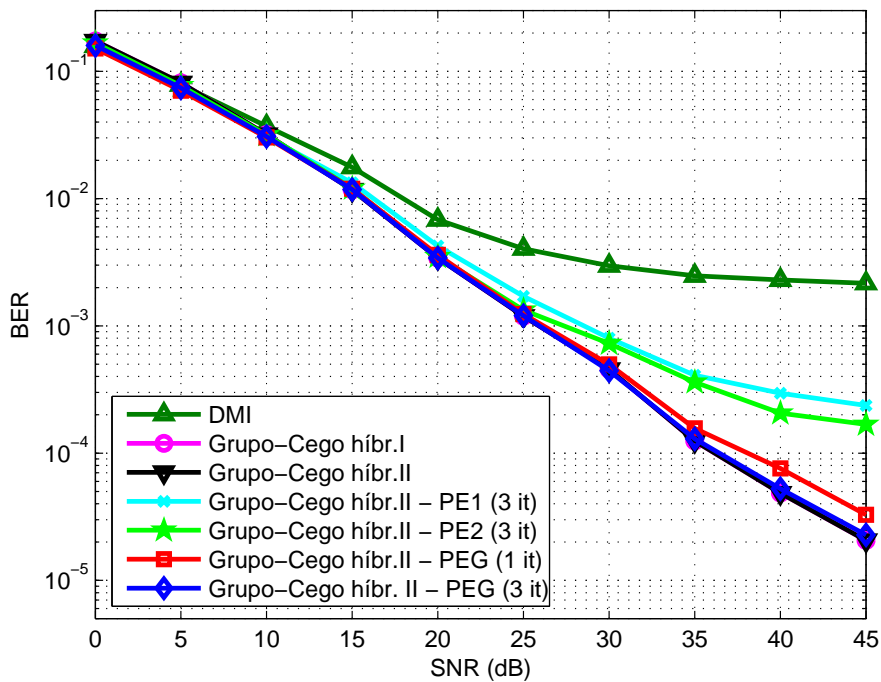


Figura 6.6: Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $K_c = 10; K_u = 5$ ; um usuário conhecido com  $NFR = 20dB$  e um desconhecido com  $NFR = 12dB$

## 6.7.4 Desempenho com Erro nas Estimativas de Fase da Portadora – Canal AWGN

Obeve-se a perda de desempenho do sistema, quando há erros na estimativa de fase da portadora  $\epsilon_\phi$ , para a detecção DMI e Grupo-Cega em canal AWGN e carregamento de  $L_2 = 11/15 = 73,33\%$ . Obeve-se a figura 6.7 considerando erros com distribuição Gaussiana  $\epsilon_\phi \in [0,05; 0,10; 0,30; 0,45]$  e  $\sigma = 0,1$ , conforme equação (5.2), para comprimento da amostra  $M = 200$ . No resultado obtido na figura 6.7 observa-se que para a aproximação PEG com somente uma iteração obtém-se o melhor desempenho entre os detectores comparados nas três condições de erros de fase da portadora. O pior desempenho é observado para a aproximação PE1 na figura 6.7 (a) cujo o desempenho, a partir de  $7dB$  e erro de  $5\%$ , deteriora-se significativamente. Essa diferença diminui gradativamente conforme aumenta-se o erro percentual médio  $\epsilon_\phi$  das estimativas das fases da portadora. Finalmente, verifica-se que o detector DMI, seguindo a tendência de desempenho anterior, apresenta a maior degradação de em relação aos detectores Grupo-Cegos, com e sem aproximação, para todas as condições de erros nas estimativas de fase da portadora.

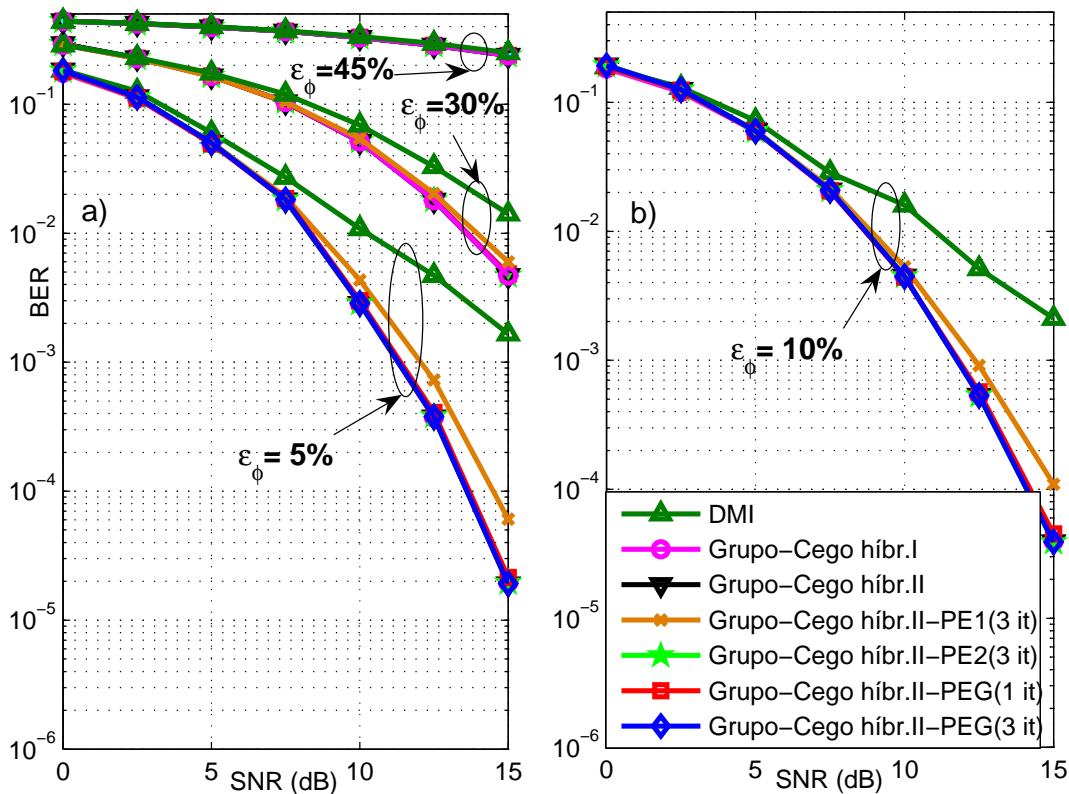


Figura 6.7: Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal AWGN.  $K_c = 7; K_u = 4; M = 200$ . Com erro na estimativa da fase da portadora de: (a)  $\epsilon_\phi = 5, 30$  e  $45\%$ ; (b)  $\epsilon_\phi = 10\%$ .

### 6.7.5 Desempenho com Erro nas Estimativas dos Coeficientes de Canal – Rayleigh Plano

Analisou-se a perda de desempenho do sistema com detecção Grupo-Cega em canal com desvanecimento Rayleigh plano, enlace direto e elevado carregamento,  $L_2 = 100\%$ . Adotou-se o erros com distribuição Gaussiana conforme equação (5.2).

Mesmo com erros nas estimativas do módulo e da fase de forma simultânea, figura 6.8, pode-se observar que as aproximações polinomiais acompanham a curva de desempenho do detector Grupo-Cego Híbrido. Observe-se ainda que todos os detectores Grupo-Cego Híbrido, forma I e II, e suas respectivas aproximações polinomiais, resultaram em piso de BER irreduzível para  $SNR \gtrsim 25$  dB, indicando perda de robustez, na condição de sistema altamente carregamento ( $L = 100\%$ ), quando há erros nas estimativas de módulo e/ou fase dos coeficientes de canal  $\geq 5\%$ .

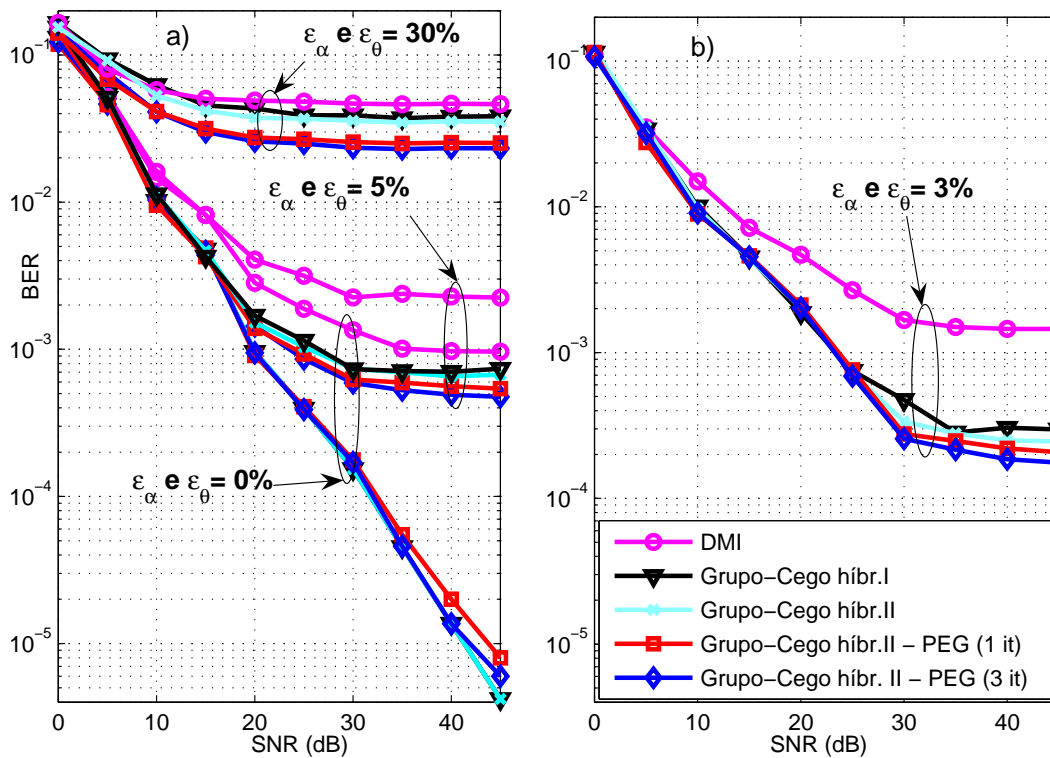


Figura 6.8: Comparação de Detectores Grupo-Cegos híbr. II em canal Rayleigh plano.  $K_c = 10; K_u = 5; f_m = 5Hz;$   $M = 200$ . Com erro nas estimativas do módulo e da fase de: (a)  $\epsilon_\alpha$  e  $\epsilon_\theta = 0, 5$  e  $30\%$ . (b)  $\epsilon_\alpha$  e  $\epsilon_\theta = 3\%$ .

### 6.7.6 Desempenho em Sistema com Carregamento Variável – Canal AWGN

A figura 6.9 mostra o desempenho do sistema DS/CDMA com  $N = 15$ ,  $SNR = 12$  dB, número de amostras de  $M = 200$  e  $M = 1000$ , total de usuários ativos no sistema variável:  $K = 3, 5, \dots, 15$

e o total de usuários conhecidos  $\tilde{K}$  variando de acordo com a proporção de 7 para 11, ou seja, em média  $\approx 64\%$ , do total de usuários é conhecido e o restante, desconhecido.

Observe-se através dos resultados da figura 6.9 que os detectores em questão não apresentam robustez em relação à variação total do número de usuários para canal AWGN. Evidentemente, para um número de amostras maior,  $M = 1000$ , figura 6.9 (b), a degradação de desempenho com o aumento de carregamento  $L = \frac{K}{N}$  é um pouco menor do que para  $M = 200$  figura 6.9 (a). O detector DMI apresenta robustez em seu desempenho para a variação do total de usuários quando o número de amostra é  $M = 200$ , já para o número de amostras  $M = 1000$  sua robustez é perdida a partir do total de usuários  $K = 11$ , ou seja, quando se aproxima da carga máxima. O desempenho da maioria das aproximações está de acordo com o esperado; de acordo com a figura 6.9 (a) a aproximação PE1 acompanha esse desempenho até  $K = 7$ , a partir do qual seu desempenho se torna pior do que das aproximações PE2 e PEG para uma ou três iterações. Para  $M = 1000$  na figura 6.9 (b) o desempenho da aproximação PE1 é somente ligeiramente pior do que as aproximações PE2 e PEG para valores intermediários de carregamento. Já a aproximação PEG é ligeiramente melhor do que as aproximações PE1 e PE2 para valores iguais ou próximo à carga máxima do sistema.

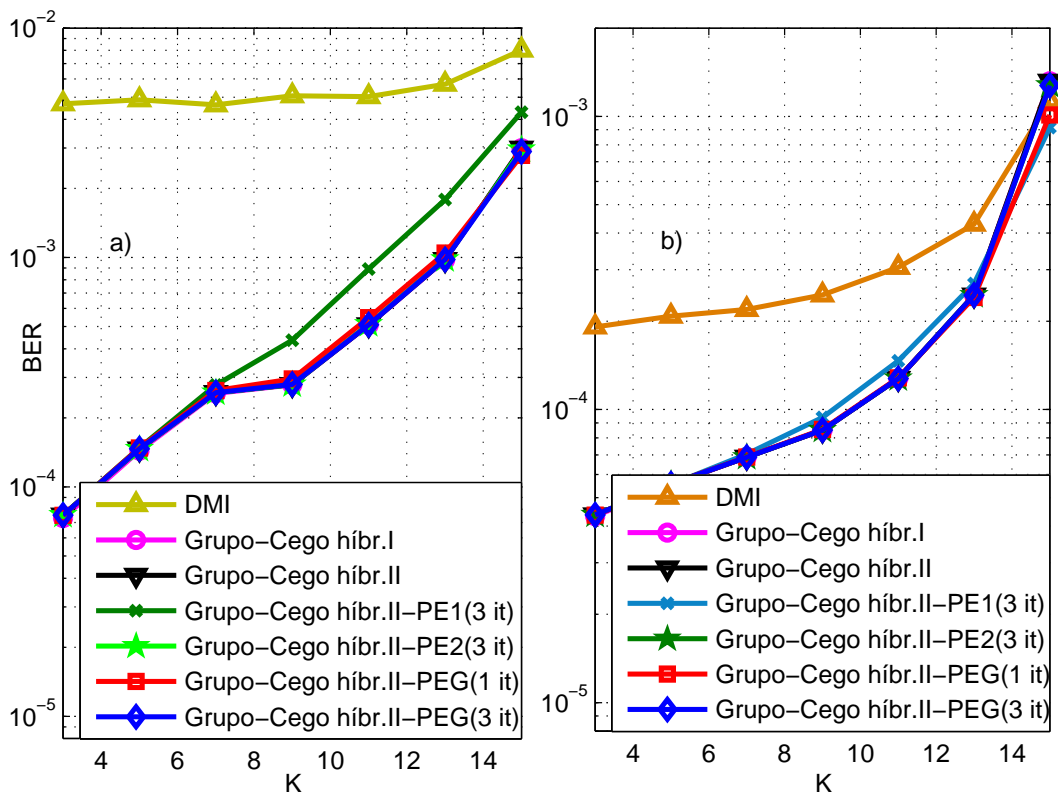


Figura 6.9: BER  $\times$  quantidade total de usuários  $K$  para os diferentes MUD lineares. Canal AWGN; SNR = 12 dB;  $K = \tilde{K} + \check{K} = 3, 5, \dots, 15$ . (a)  $M = 200$ ; (b)  $M = 1000$ .

## 6.7.7 Desempenho em Sistema com Carregamento Variável – Canal Rayleigh Plano

A figura 6.10 mostra o desempenho para os detectores Grupo-cegos e DMA em sistemas DS/CDMA no enlace direto e sujeito a canais Rayleigh Plano; foram adotados os seguintes parâmetros de sistema e canal: seqüências de espalhamento pseudo-Gold com  $N = 15$ ,  $SNR = 30 \text{ dB}$ ,  $f_m = 5 \text{ Hz}$  e  $f_m = 22 \text{ Hz}$ , total de usuários com variação de  $K = 3, 5, \dots, 15$ , sendo o total de usuários conhecidos  $\tilde{K}$  variando de acordo com a proporção de 7 para 11, ou seja, em média,  $\approx 64\%$  do total de usuários é conhecido.

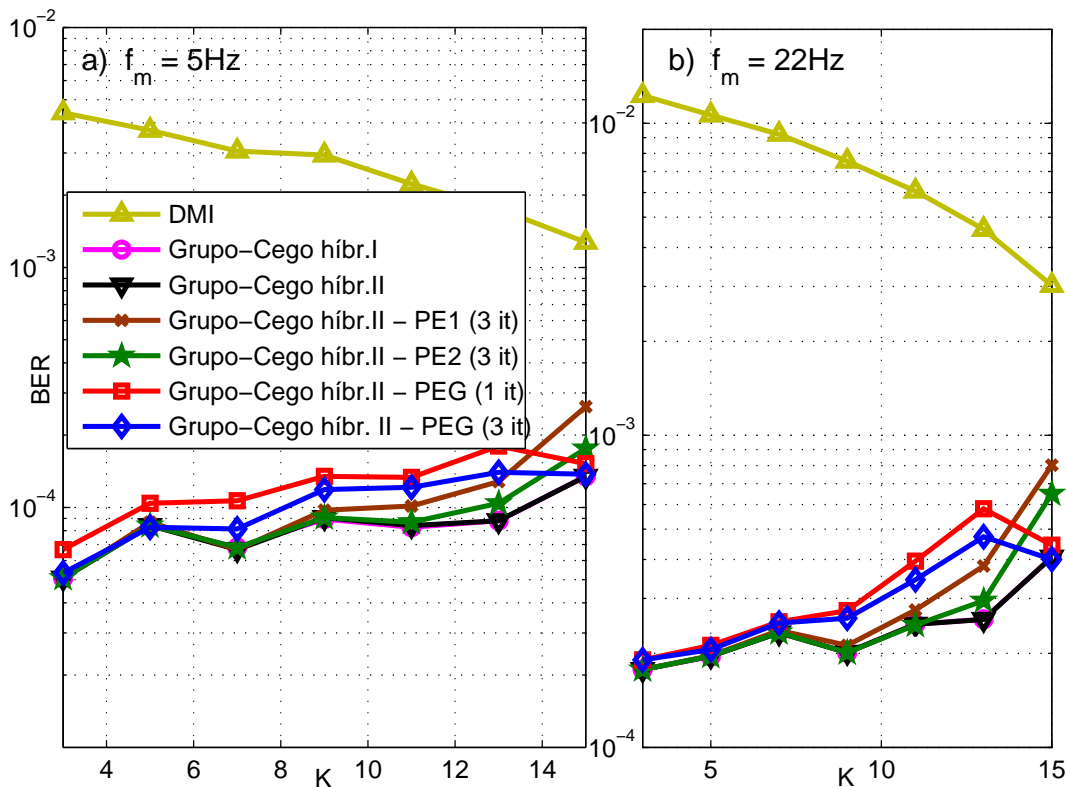


Figura 6.10: BER  $\times$  quantidade total de usuários  $K$  para os diferentes MUD lineares. Canal Rayleigh plano;  $SNR = 30 \text{ dB}$ ;  $M = 200$ ;  $K = \tilde{K} + \check{K} = 3, 5, \dots, 15$ . (a)  $f_m = 5 \text{ Hz}$ ; (b)  $f_m = 22 \text{ Hz}$ .

Observe-se nas figuras 6.10 (a) e (b) que os sistemas DS/CDMA Rayleigh plano em enlace direto para diferentes mobilidades (resultando em diferentes atrasos de espalhamento de canal) apresentam uma relativa robustez ao carregamento do sistema,  $L$ . Comum também às duas condições de  $f_m$  é que a aproximação PEG apresenta uma inversão de tendência de desempenho para valores de  $K$  próximo ao carregamento total, em nosso caso  $K = 15$ . Ainda para a aproximação PEG, a figura 6.10 (a) apresenta diferença maior para a variação do número de iterações do que para a figura 6.10 (b). Em ambas as figuras tem-se o desempenho das aproximações PE1 e PE2 para o número de usuários até  $K = 9$  dentro do desempenho desejado, a partir do qual há uma degradação considerável desempenho, indicando menor robustez dessas aproximações ao

aumento da interferência de múltiplo acesso presente no sistema (aumento do carregamento do sistema).

Finalmente, apesar do desempenho do detector DMI ser inferior aos dos demais detectores para qualquer  $L$ , curiosamente apresenta uma tendência contrária aos demais quando há um aumento no carregamento do sistema.

## 6.8 Análise de Complexidade Computacional

Para a análise de complexidade computacional dos detectores Grupo-Cegos analisados neste trabalho, nesta seção será utilizado a notação *flop* nos moldes de (COMMON; GOLUB, 1990). Sabe-se que a multiplicação de uma matriz triangular superior envolve menor esforço computacional do que para as matrizes completas.

*Flop* é a unidade do custo computacional de uma operação em ponto flutuante. Uma operação de produto ponto-a-ponto de comprimento  $n$  envolve  $2n$  *flops*, porque existem  $n$  multiplicações e  $n$  adições nesta operação de vetores. *Flop* é um método de contagem rápida, porém imprecisa, que captura uma das muitas dimensões da complexidade computacional de um algoritmo que realiza cálculos com matrizes.

Para obter-se a complexidade computacional do produto de matrizes em termos de *flops*, deve-se calcular o número de operações, tanto de multiplicação como de somas, de forma genérica.

A multiplicação das matrizes  $C = AB + C$  onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  envolve  $2mnp$  *flops*.

Já a complexidade de cômputo para a inversão de uma matriz, a partir do método convencional Gauss-Jordan de inversão, caso a matriz seja quadrada de dimensão  $N$  necessita de  $N^3$  multiplicações e divisões e  $N^3 - 2N^2 + N$  operações para adições e subtrações, resultando em na complexidade total de  $2N^3 - 2N^2 + N$ , de acordo (MEYER, 2000).

A complexidade da decomposição SVD pode ser analisada a partir da necessidade de se conhecer explicitamente as matrizes resultantes da decomposição. Adicionalmente, há na literatura (COMMON; GOLUB, 1990) dois métodos para o cômputo eficiente da etapa de diagonalização de matrizes: R-diagonalização e Golub-Reinsch SVD. Conforme a tabela 6.2, o custo computacional para se obter explicitamente as matrizes resultantes da decomposição SVD varia de acordo com a escolha do método de diagonalização. O método de diagonalização R-SVD resultará menos complexo que o de Golub-Reinsch quando a matriz a ser decomposta, dimensão  $m \times n$ , satisfizer à condição  $m \geq n$

Tabela 6.2: Complexidade Computacional para a decomposição de SVD, (COMON; GOLUB, 1990)

Calcular	Golub-Reinsch SVD	R-SVD
1. $\sum$	$4mn^2 - 4n^3/3$	$2mn^2 + 2n^3$
2. $\sum, V$	$4mn^2 + 8n^3$	$2mn^2 + 11n^3$
3. $\sum, U$	$4m^2n - 8mn^2$	$4m^2n + 13n^3$
4. $\sum, U_1$	$14mn^2 - 2n^3$	$6mn^2 + 11n^3$
5. $\sum, U, V$	$4m^2n + 8mn^2 + 9n^3$	$4m^2n + 22n^3$
6. $\sum, U_1, V$	$14mn^2 + 8n^3$	$6mn^2 + 20n^3$

(COMON; GOLUB, 1990). Esta condição não é satisfeita no problema da detecção multiusuário analisado neste trabalho, uma vez que a matriz em questão possui dimensão quadrada; portanto da tabela 6.2 conclui-se que é computacionalmente mais vantajoso utilizar o método de diagonalização de Golub-Reinsch SVD. Adicionalmente, para o problema MUD deve-se conhecer explicitamente as matrizes  $\sum, U$  e  $V$ ; portanto a complexidade total para o cômputo da decomposição SVD é  $4m^2n + 8mn^2 + 9n^3$  operações, mostrado na linha 5 da tabela 6.2.

Na tabela 6.3 é sintetizado a complexidade computacional total para cada um dos detectores multiusuários Semi-Cegos ou Cegos envolvidos em nossas análises, utilizando o método de diagonalização de Golub-Reinsch. Por sua vez, na figura 6.11 compara-se numericamente a complexidade dos detectores DMI, Cego, Grupo-Cego-II e os Grupo-Cego com aproximação polinomial PE1 e PEG nas principais condições de operação do sistema:  $M = 200$  e  $M = 1000$ , diferentes ganhos de processamento, porém mantido a proporcionalidade dos carregamentos :

$$\tilde{L} = \frac{7}{15} \cong 0,4667 \quad (\text{us. conhec.}) \qquad \check{L} = \frac{4}{15} \cong 0,2667 \quad (\text{us. desconhec.})$$

Verifica-se que o DMI-MUD apresenta a menor complexidade, porém associada aos piores desempenhos, conforme analisado na seção 6.7. Já os demais detectores apresentam complexidade de mesma ordem de grandeza para  $N < 1023$ , figura 6.11. Neste conjunto, o MuD-Cego resulta em menor complexidade, porém também às custas de um pior desempenho, conforme analisado no Capítulo 5 (canal AWGN, figuras 5.10 e 5.8).

Finalmente, os detectores Grupo-Cego II e a respectiva aproximação polinomial PEG apresentaram aproximadamente a mesma figura de mérito complexidade-desempenho, indicando que a aproximação polinomial por círculos de Gershgorin para detectores Semi-Cegos representa ainda um custo computacional relativamente elevado devido à decomposição SVD. A aproximação PE1, apesar de atingir desempenho compatível com a obtida com a PEG, resulta em complexidade

adicional devido à necessidade de maior número de iterações.

Tabela 6.3: Complexidade Computacional dos Detectores Grupo-Cegos ou Cegos

Detector	Complexidade
1. DMI	$2N^3 + (M + 2)N^2 + 4N$
2. Cego	$21N^3 + 2KN^2 + 4N^2 + MN^2 + 4N + 2K^2N +$ $+NK + 2K^3 - 2K^2 + K.$
3. Grupo-Cego Forma I	$27N^3 + 2\tilde{K}N^2 + MN^2 + 2\check{K}N^2 + 5N^2 +$ $+8N\tilde{K}^2 + 8N\tilde{K} + 5N + 2N\check{K} + 2N\check{K}^2 +$ $+4N\tilde{K}^3 - 4\tilde{K}^2 + 2\tilde{K} + 2\check{K}^3 + 2\check{K}^2 + \check{K}.$
4. Grupo-Cego Forma II	$23N^3 + 2N^2K + 4N^2\tilde{K} + 2NK^2 + 3N\tilde{K}^2 +$ $+2NK + 4N\tilde{K} + MN^2 + 2N^2 + 5N + 2K^3 +$ $+2\tilde{K}^3 - 2K^2 - 2\tilde{K}^2 + K + \tilde{K}.$
5. Grupo-cego Forma II Aprox. Polin. PE1	$23N^3 + 2N^2K + 4N^2\tilde{K} + 2NK^2 + 3N\tilde{K}^2 +$ $+2NK + 4N\tilde{K} + MN^2 + 2N^2 + 5N + 2K^3 +$ $+N_{it}2\tilde{K}^3 - 2K^2 + \tilde{K}^2 + K + 3\tilde{K} + 1.$
6. Grupo-cego Forma II Aprox. Polin. PE2	$23N^3 + 2N^2K + 4N^2\tilde{K} + 2NK^2 + 3N\tilde{K}^2 +$ $+2NK + 4N\tilde{K} + MN^2 + 2N^2 + 5N + 2K^3 +$ $+N_{it}2\tilde{K}^3 - 2K^2 + \tilde{K}^2 + K + 3\tilde{K} + 4.$
7. Grupo-cego Forma II Aprox. Polin. PEG	$23N^3 + 2N^2K + 4N^2\tilde{K} + 2NK^2 + 3N\tilde{K}^2 +$ $+2NK + 4N\tilde{K} + MN^2 + 2N^2 + 5N + 2K^3 +$ $+N_{it}2\tilde{K}^3 - 2K^2 + \tilde{K}^2 + K + 6\tilde{K} + 5.$



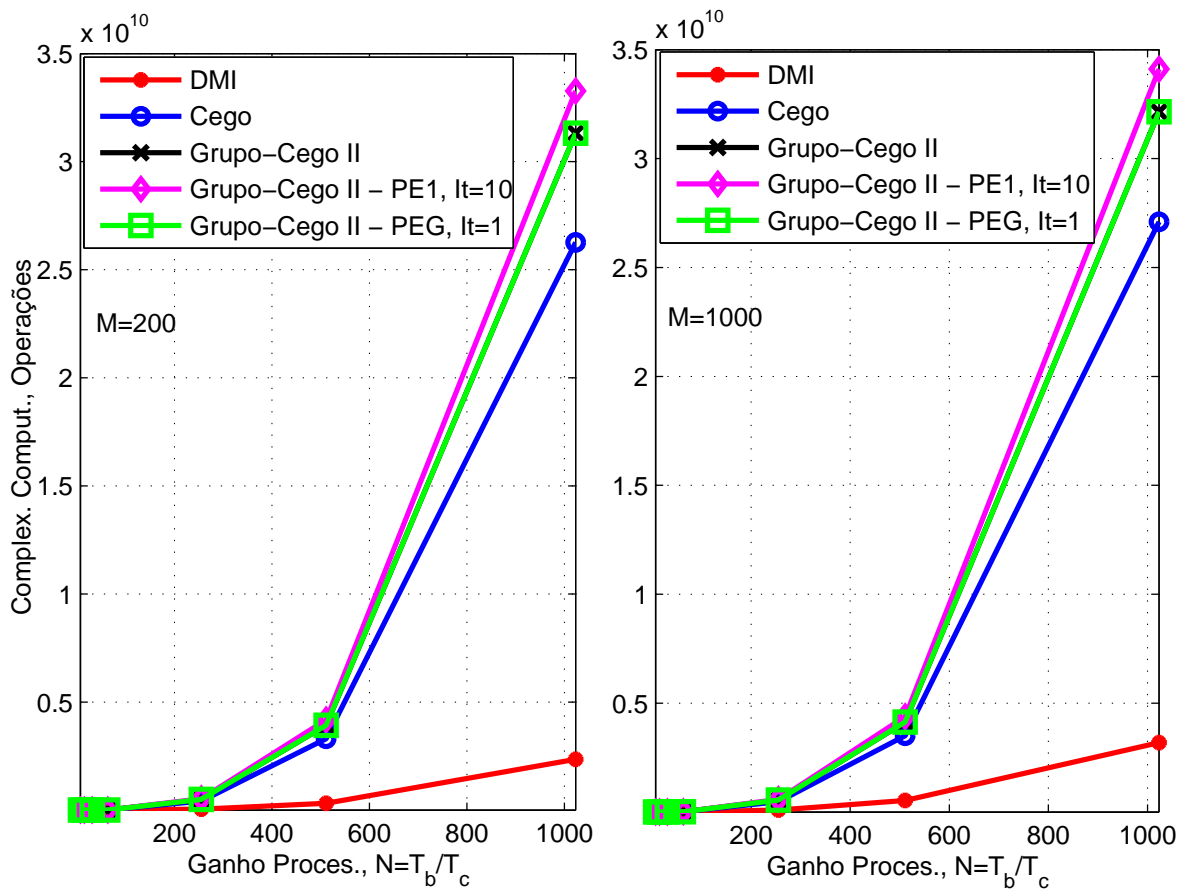


Figura 6.11: Comparação da complexidade computacional para os principais detectores e condições de operação do sistema: a)  $M = 200$  b)  $M = 1000$ . Canal Rayleigh Plano Síncrono; Ganho de processamento  $N = [7, 15, 31, 63, 255, 511, 1023]$  e  $L \approx 73,3\%$ .

## Capítulo 7

# Conclusões e Perspectivas

O detector descorrelacionador descrito na literatura tem desempenho inferior ou igual ao detector MMSE, dependendo da região de SNR; por isso, a utilização do detector grupo-cego linear híbrido que combina as qualidades dos dois detectores citados é uma alternativa atraente.

A utilização da técnica de projeção em subespaço na detecção multiusuário em sistemas DS/CDMA apresenta alguma degradação de desempenho para baixa relação sinal-ruído.

O detector multiusuário grupo-cego apresenta melhor desempenho em relação aos detectores cegos e, em muitos casos, também atinge desempenhos superiores em relação a várias classes de detectores não cegos, além de apresentar menor complexidade computacional em relação aos MUD cegos. No entanto, requer o conhecimento dos parâmetros de sistema de parte dos usuários interferentes (intracelulares).

Para os métodos em que é usado o vetor observação, amostrado  $\mathbf{r}[i]$ , os resultados são imprecisos para um número pequeno de observações; porém o detector grupo-cego híbrido é capaz de operar satisfatoriamente, com pouca perda de desempenho e SINR quando o número de observações é relativamente pequeno ( $M \approx 50$ ).

Das três formas de detecção analisadas nos capítulos 4 e 5, o detector Grupo-cego apresentou a melhor robustez relativa ao erro de estimativa da fase da portadora, tanto em sistemas síncronos com ruído AWGN (da ordem de 30% para o erro na estimativa de fase da portadora) quanto em sistemas síncronos com desvanecimento Rayleigh plano (da ordem de 30% para o erro de estimativa do módulo ou fase dos coeficientes de canal) para distribuições estatísticas uniformes. Para a distribuição estatística Gaussiana o detector grupo-cego apresentou sensibilidade ao erro nas estimativas da fase da portadora em sistemas AWGN e ao erro no módulo do coeficiente de canal em sistemas com desvanecimento Rayleigh plano. Particularmente, em canais com desvanecimento

plano, algum tipo de diversidade deve ser incorporado aos detectores Cego e Grupo-Cego, quando o número de observações for pequeno, tendo em vista a redução ou mesmo eliminação do efeito do piso de BER.

As técnicas utilizadas para a obtenção da inversa por aproximação polinomial para parte de equação de detecção grupo-cego híbrida da forma II indicaram algum ganho em termos de redução da complexidade computacional, principalmente aquela utilizando o conceito de círculo de Gershgorin, aproximação PEG, em que com pouquíssimas iterações (1 a 3 iterações), para diversas condições de operação do sistema, obteve-se desempenho muito próximo daquele alcançado pelos grupo-cego híbridos, de maior complexidade computacional devido à necessidade de inversão da matriz. Por sua vez, as outras duas aproximações polinomiais analisadas, PE1 e PE2, requerem um número muito maior de iterações para atingir desempenho semelhante.

Mesmo com erro na estimativa dos coeficientes de canal observa-se que a aproximação polinomial é robusta acompanhando o desempenho do detector estudado.

Na análise de degradação de desempenho com a aumento de carregamento do sistema em canal síncrono AWGN, para as aproximações polinomiais exceto, a aproximação PE1 na condição de  $M = 200$ , apresentaram degradação significativa, indicando perda de robustez com incremento da interferência de múltiplo acesso. Já em canal síncrono com desvanecimento Rayleigh plano resulta uma menor degradação de desempenho com o aumento de carregamento, indicando uma relativa robustez ao incremento da MAI. Para a aproximação polinomial PEG, observou-se ainda uma inversão de tendência de desempenho para carga no sistema próxima a 100%.

Em termos de complexidade computacional, o DMI-MuD apresenta a menor complexidade entre os detectores (Grupos-)Cegos analisados neste trabalho; no entanto, às custas dos piores desempenhos. Os demais detectores apresentam complexidade de mesma ordem de grandeza para todos os ganhos de processamento analisados ( $N < 1023$ ). Deste conjunto, o MuD-Cego resulta em menor complexidade, porém também às custas de um pior desempenho. Já os detectores Grupo-Cego II e a respectiva aproximação polinomial PEG apresentaram aproximadamente a mesma figura de mérito complexidade-desempenho, indicando que a aproximação polinomial por círculos de Gershgorin para detectores Grupos-Cegos representa ainda um custo computacional relativamente elevado devido à decomposição SVD, diferentemente dos detectores lineares não-cegos. A aproximação PE1, apesar de atingir desempenho semelhante à obtida com a PEG, resulta em complexidade adicional devido à necessidade de um maior número de iterações.

Um das possibilidades de trabalhos futuros inclui a comparação entre o método de expansão polinomial com os métodos iterativos SOR (Successive Over-relaxation) e o método de Chebyshev, citados no início do capítulo 6, em conjunto com um método iterativo para a decomposição SVD.

# Referências Bibliográficas

ABRÃO, T. *Canceladores de interferência multiusuário aplicados a sistemas DS/CDMA de múltipla taxa*. Tese (Tese de Doutorado) — Depto de Eng. Telecomunicações e Controle - EPUSP, Fevereiro 2001.

AFFES, H. H. S.; MERMELSTEIN, P. Interference subspace rejection: A framework for multiuser detection in wideband cdma. *IEEE Journal on Sel. Areas in Communications*, v. 20, n. 2, p. 287–302, February 2002.

AFFES, S.; MERMELSTEIN, P. A new receiver structure for asynchronous cdma: Star - the spatio-temporal array-receiver. *IEEE J. Select Areas Commun.*, v. 16, n. 8, p. 1141–1422, Oct. 1998.

AXELSSON, O. *Iterative Solution Methods*. [S.l.]: Cambridge University, 1996.

BEHRENS, R.; SCHARF, L. Signal processing applications of oblique projection operations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 42, n. 6, p. 1413–1424, 1994.

CHUAH, B. S. S. T. C.; HINTON, O. R. Robust adaptive spread-spectrum receiver with neural-net preprocessing in non-gaussian noise. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 12, p. 546–558, May 2001.

CIRIACO, T. A. F.; JESZENSKY, P. J. E. Algoritmos heurísticos aplicados à detecção multiusuário ds/cdma. *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, 2005. Em processo de impressão.

COMON, P.; GOLUB, G. H. Tracking a few extreme singular values and vectors in signal processing. *Proc. IEEE*, v. 78, n. 8, p. 1327–1343, Aug. 1990.

DEPERT, T.; LINDUSKA, A. A fast converging polynomial expansion multiuser detector applied to ultra fdd uplink. In: IEEE (Ed.). *Proceedings of the 3rd IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology - ISSPIT*. [S.l.: s.n.], 2003. p. 1–4.

- DUA, A. Adaptive implementation of polynomial expansion detector for multi-user detection in ds-cdma systems. *Electronics Letters*, v. 37, n. 23, p. 1384–1386, November 8 2001.
- DUEL-HALLEN, A. Decorrelating decision-feedback multiuser detector for synchronous cdma channel. *IEEE Transactions on Communications*, v. 41, n. 2, p. 285–290, Feb. 1993.
- DUEL-HALLEN, J. H. A.; ZVONAR, Z. Multiuser detection for cdma systems. *IEEE Pers. Commun.*, p. 46–58, April 1995.
- H.-MADSEN, A.; WANG, X. Performance of blind and group-blind multiuser detectors. *IEEE Trans. Information Theory*, v. 48, n. 7, p. 1849–1872, 2002.
- HAYKIN, S. *Sistemas de Comunicação: Analógicos e Digitais*. 4ª. ed. [S.l.]: Bookman Companhia Editora, 2004.
- HONIG, U. M. M.; VERDU, S. Blind adaptive multiuser detection. *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 41, p. 994–960, July 1995.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. U.K.: Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1985.
- HOST-MADSEN, A. Semi-blind decorrelating multiuser detectors for cdma: Subspace methods. In: *IEEE PIMRC*. Boston, USA: [s.n.], 1998.
- HOST-MADSEN, A. *Semi-Blind Multiuser Detectors for CDMA: Subspace Methods*. University of Calgary, 1999.
- JR., J. C. L.; LONGO, G. *Analysis of CDMA Cellular Radio Systems Employing Adaptive Antennas*. Tese (Doutorado) — Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, August 1995.
- LEI, Z. D.; LIM, T. J. Simplified polynomial-expansion linear detectors for ds-cdma systems. *Electron. Lett.*, v. 34, n. 16, p. 1561–1563, Aug. 1998.
- LI, T.; SIDIROUPOULOS, N. D. Blind separation of linear mixtures of signals using successive interference cancellation interactive least squares. *Proc. of ICASSP99*, v. 5, p. 2703–6, March 1999.
- LUPAS, R.; VERDU, S. Near-far resistance of multiuser detectors in asynchronous channels. *IEEE Trans. Commun.*, v. 38, p. 496–508, April 1990.

- MADSEN, X. W. A. H.; BAHNG, S. Asymptotic analysis of blind multiuser detection with blind channel estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 52, n. 6, p. 1722–1738, June 2004.
- MEYER, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. [S.l.]: SIAM, 2000.
- MOSHAVI, S. Multi-user detection for ds-cdma communications. *IEEE Communications Magazine*, p. 124–136, Oct. 1996.
- MOSHAVI, S. Multistage linear receivers for ds-cdma systems. *International Journal of Wireless Information Networks*, v. 3, n. 1, p. 1–17, 1996.
- NAVARRO, M.; GRANT, A. Iterative implementations of linear receivers for spatial diversity channels. In: *Vehicular Technology Conference Fall-2000*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 2503–2509.
- PANGO, P. A.; CHAMPAGNE, B. On the issue of rank estimation in subspace tracking: the nacsvd solution. In: RHODES (Ed.). *Proc. European Signal Processing Conference, Eu*. [S.l.: s.n.], 1998.
- PATEL, P.; HOLTZMAN, J. Analyzis of a simple successive interference cancellation scheme in a ds/cdma system. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, v. 12, p. 796–807, June 1994.
- POOR, H. V.; VERDU, S. Probability of error in mmse multiuser detection. *IEEE Trans. Information Theory*, v. 43, n. 3, p. 858–881, May 1997.
- PRASAD, R.; HARA, S. An overview of multi-carrier cdma. *IEEE Communications Magazine*, p. 126–133, December 1997.
- SCHARF, L.; FRIEDLANDER, B. Matched subspace detectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 42, n. 8, p. 2146–2157, 1994.
- SCHNEIDER, K. S. Optimum detection of code division multiplexed signals. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, v. 15, p. 181–185, January 1979.
- SESSLER, G. M. A.; JONDRAL, F. K. Multiuser detection for ultra tdd based on polynomial expansion. In: *in proc. IEEE 54th. Veh. Technol. Conf. Fall*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 4, p. 2290–2293.
- SESSLER, G. M. A.; JONDRAL, F. K. Low complexity polynomial expansion multiuser detector for cdma systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 54, n. 4, p. 1379–1391, July 2005.

- TSATSANIS, M. K.; XU, Z. Performance analysis of minimum variance cdma receivers. *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 46, n. 11, p. 3014–3022, Nov. 1998.
- URKOWITZ, H. *Signal Theory and Random Processes*. [S.l.]: Artech House, 1983.
- VERDU, S. *Optimum Multi-user Signal Detection*. Tese (PhD Thesis) — Dep. Elec. Comput. Eng. University of Illinois, 1984.
- VERDU, S. Minimum probability of error for asynchronous gaussian multiple-access channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 32, n. 1, p. 85–96, Jan. 1986.
- VERDU, S. Optimum multiuser asymptotic efficiency. *IEEE Transactions on Communications*, COM-34, n. 9, p. 890–7, 1986.
- VERDU, S. Recent progress in multiuser detection. *in Proc. 1988 Int. Conf. Advances in Communications and Control Systems*, I, p. 66–77, Oct. 1988.
- VERDU, S. *Multiuser Detection*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1998.
- VITERBI, A. J. The orthogonal-random wave form dichotomy for digital mobile communications. *IEEE Personal Communications*, p. 18–24, First Quarter 1994.
- VITERBI, A. J. *CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication*. [S.l.]: MA: Addison-Wesley, 1995.
- WANG, W.; MADSEN, A. H. *Advanced Signal Processing for Wireless Multimedia Communications*. University of Calgary, 2000.
- WANG, X.; MADSEN, A. H. *Blind and Group-Blind Detection in Colored Noise*. University of Calgary, 1999.
- WANG, X.; MADSEN, A. H. Group-blind multiuser detection for uplink cdma. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, v. 17, n. 11, p. 1971–1984, November 1999.
- WANG, X.; POOR, H. V. Blind equalization and multiuser detection in dispersive cdma channels. *IEEE Transactions on Communications*, v. 46, n. 1, p. 91–103, January 1998.
- WANG, X.; POOR, H. V. Blind multiuser detection: A subspace approach. *IEEE Trans. Information Theory*, v. 44, n. 2, p. 677–690, March 1998.



- WANG, X.; POOR, H. V. Blind joint equalization and multiuser detection for ds-cdma in unknown correlated noise. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, v. 46, n. 7, p. 886–895, July 1999.
- WANG, X.; POOR, H. Robust multiuser detection in non-gaussian channels. *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 47, p. 289–305, February 1999.
- WOZENCRAFT, J. M.; JACOBS, I. M. *Principles of Communication Engineering*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1965.
- WU, Q.; WONG, K. M. Un-music and un-cle: An application of generalized correlation analyzes to the estimation of the direction of arrival of signals in unknown correlated noise. *IEEE Transactions Signal Processing*, v. 42, n. 9, p. 2331–2343, September 1994.
- XU, Z. Asymptotically optimal cdma receiver: Perfect mai cancellation. In: IEEE (Ed.). *Wireless Communications and Networking Conference, WCNC'00*. [S.l.: s.n.], 2000. v. 3, p. 1496 – 1500.
- XU, Z.; CHENG, R. S. A robust rank estimation algorithm of group-blind mmse multiuser detectors for cdma systems. *IEEE Transactions on Communications*, v. 51, n. 4, p. 547–552, April 2003.
- YU, J. C.; MADSEN, A. H. *Subspace Tracking for Group-Blind Multiuser Detectors*. University of Calgary, 1999.
- ZHANG, G. B. G.; ZHANG, L. Group-blind intersymbol multiuser detection for downlink cdma with multipath. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, v. 4, n. 2, p. 434–443, March 2005.
- ZHONGJIE, L.; SER, W. An adaptive wpe multiuser detector. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 12, n. 4, p. 305–308, April 2005.

# Capítulo 8

## Apêndices

### 8.1 APÊNDICE A - Teorema do Limite Central

Seja  $S_U$  de  $U$  variáveis aleatórias  $x_i$  independentes e identicamente distribuídas que apresentam média e variância finita, dadas por  $\mathbb{E}[x_i] = \mu_x$  e  $\text{VAR}[x_i] = \sigma_x^2$ . Pode-se obter um novo conjunto de variáveis aleatórias  $V_i$  de média 0 e variância 1, normalizando os termos de  $S_U$  por:

$$V_i = \frac{(x_i - \mu_x)}{\sigma_x} \quad (8.1)$$

Desta forma, pode-se obter uma expressão para a soma normalizada das  $U$  variáveis aleatórias, dada por:

$$Z_{norm} = \frac{1}{\sqrt{U}} \cdot \sum_{i=1}^U V_i \quad (8.2)$$

Desde que cada elemento da soma apresenta média 0 e variância 1, a soma normalizada (por  $\frac{1}{\sqrt{U}}$ ) apresentará também média 0 e variância 1.

De acordo com (WOZENCRAFT; JACOBS, 1965), o Teorema do Limite Central estabelece que a função de distribuição de probabilidade  $F_{Z_{norm}}$  da variável aleatória  $Z_{norm}$  se aproxima de uma distribuição gaussiana, à medida que o número  $U$  de variáveis aumenta. Assim, para um dado  $\alpha$ , tem-se:

$$\lim_{U \rightarrow \infty} F_{Z_{norm}}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\beta \quad (8.3)$$

Como consequência, para quaisquer 2 números  $a$  e  $b$ , obtém-se:

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \int_a^b p_{Z_{norm}}(\alpha) d\alpha = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\beta \quad (8.4)$$

Considerando  $b = \infty$ , a expressão (8.4) pode ser representada por:

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} p_{Z_{norm}}(\alpha) d\alpha = Q(a) \quad (8.5)$$

Assim, pode-se representar a probabilidade de  $Z_{norm}$  ser maior ou igual a um limiar  $z$  como:

$$P(Z_{norm} \geq z) \approx Q(z) \quad (8.6)$$

Para a situação onde as variáveis não apresentam a mesma distribuição, é necessário empregar uma forma mais geral do Teorema do Limite Central, apresentada em (URKOWITZ, 1983), por exemplo, para justificar a aproximação gaussiana, como mostrado a seguir.

Seja  $S_U$  a soma de  $U$  variáveis aleatórias  $x_i$  independentes cada uma apresentando média e variância finitas, dadas por  $\mathbb{E}[x_i] = \mu_{x_i}$  e  $\text{VAR}[x_i] = \sigma_{x_i}^2$ . Pode-se obter uma nova soma normalizada das  $U$  variáveis aleatórias dada por:

$$W_{norm} = \frac{1}{\sqrt{U}} \cdot \sum_{i=1}^U x_i \quad (8.7)$$

De acordo com (JR.; LONGO, 1995), a função de distribuição de probabilidade  $F_{W_{norm}}$  da variável aleatória  $W_{norm}$  se aproximará de uma distribuição gaussiana, à medida que  $U$  apresente valores elevados, desde que:

$$\sigma_{W_{norm}}^2 \gg \frac{1}{U} \cdot \sigma_{x_i}^2 \quad (8.8)$$

Onde, a média e variância de  $W_{norm}$  são dadas por:

$$\mu_{W_{norm}} = \frac{1}{\sqrt{U}} \cdot \sum_{i=1}^U \mu_{x_i} \quad (8.9)$$

$$\sigma_{W_{norm}}^2 = \frac{1}{U} \cdot \sum_{i=1}^U \sigma_{x_i}^2 \quad (8.10)$$

Assim, a probabilidade de  $W_{norm}$  ser maior ou igual a um limiar  $w$  será dada por:

$$P(W_{norm} \geq w) \approx Q\left(\frac{w - \mu_{W_{norm}}}{\sigma_{W_{norm}}}\right) \quad (8.11)$$

A condição apresentada em (8.8) é equivalente a dizer que nenhuma componente ou conjunto de componentes domina a soma apresentada em (8.7).

O Teorema do Limite Central não implica que a função densidade de probabilidade se aproxima de uma função densidade de probabilidade gaussiana; implica que sua integral, dentro de limites fixados, se aproxima do valor dado pela integral de uma função de densidade gaussiana.

A precisão desta aproximação, na determinação da probabilidade, melhora à medida que o número finito  $U$  de variáveis aleatórias aumenta.

## 8.2 APÊNDICE B - Conceitos de Algebra Linear (MEYER, 2000)

### Eliminação Gaussiana

Os problemas mais comuns encontrados na prática é o caso em que existem  $n$  equações e  $n$  incognitas, chamado de sistema quadrado, onde existe uma única solução. Em seguida é feito, para um sistema quadrado, uma descrição detalhada de como aplicar a eliminação Gaussiana. Será utilizado sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1, \\ 6x + 2y + z &= -1, \\ -2x + 2y + z &= 7. \end{aligned}$$

Em cada etapa, a estratégia é focar em uma posição chamada de posição pivô e eliminar todos os termos abaixo desta posição usando as três operações elementares. O coeficiente na posição pivô é chamado de elemento pivotal, ou simplesmente de pivô, enquanto a equação em que o pivô está é referenciada como a equação pivotal. Somente os coeficientes diferentes de zero são pivôs. Se o coeficiente na posição pivô for 0, então a equação pivotal é trocada com uma equação abaixo da equação pivotal para produzir um pivô diferente de zero. Isto é sempre possível para sistemas quadrados que possuem uma única solução. Por exemplo, o coeficiente 2 em negrito no sistema abaixo é o pivô para a primeira etapa:

$$\begin{aligned} \mathbf{2}x + y + z &= 1, \\ 6x + 2y + z &= -1, \\ -2x + 2y + z &= 7. \end{aligned}$$

**Etapa 1:** Eliminar todos os termos abaixo do primeiro pivô.

- Subtrair três vezes a primeira equação da segunda para produzir o sistema equivalente:

$$\begin{aligned} \mathbf{2}x + y + z &= 1, \\ -y + -2z &= -4, \quad (E_2 - 3E_1), \\ -2x + 2y + z &= 7. \end{aligned}$$

- Adicionar a primeira equação a terceira equação para produzir o sistema equivalente:

$$\begin{aligned} \mathbf{2}x + y + z &= 1, \\ -y + -2z &= -4, \\ 3y + 2z &= 8. \quad (E_3 + E_1). \end{aligned}$$

**Etapa 2:** Selecione um novo pivô.

- Selecione o novo pivô movendo abaixo e a direita. Se o coeficiente é diferente de 0, então este é o novo pivô. Caso contrário, troque com uma equação abaixo desta posição que tenha na posição pivotal um número diferente de 0. Em nosso exemplo, -1 é o segundo pivô como identificado abaixo:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1, \\ -1y - 2z &= -4, \\ 3y + 2z &= 8. \end{aligned}$$

**Etapa 3:** Eliminar todos os termos abaixo do segundo pivô.

- Adicionar três vezes a segunda equação a terceira equação para produzir o sistema equivalente:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1, \\ -1y - 2z &= -4, \\ -4z &= -4. \quad (E_3 + 3E_2). \end{aligned}$$

- Em geral, em cada etapa move-se para baixo e para a direita para a seleção do novo pivô, então elimina-se todos os termos abaixo do pivô até não poder prosseguir. Neste exemplo, o terceiro pivô é -4, mas não existe nada abaixo do terceiro pivô para eliminar, com isso o processo está completado.

Neste ponto, diz-se que o sistema está triangularizado. Um sistema triangular é facilmente resolvido pelo método de substituição em que a última equação é resolvida para achar o valor da última incógnita e então substituída na penúltima equação, que é resolvida para a penúltima incógnita, etc, até cada incógnita ser determinada. Pelo nosso exemplo, resolvendo a última equação obtem-se:

$$z = 1.$$

Substitui-se  $z = 1$  na segunda equação e calcula-se:

$$y = 4 - 2z = 4 - 2(1) = 2$$

Finalmente, substitui-se  $z = 1$  e  $y = 2$  na primeira equação para obter:

$$x = \frac{1}{2}(1 - y - z) = \frac{1}{2}(1 - 2 - 1) = -1,$$

que completa a solução.

Parece claro que não existe razão para escrever cada símbolos como "x", "y", "z" e "=" em cada etapa já que manipulamos somente os coeficientes. Se cada símbolo for descartado, então o sistema de equações lineares reduz-se a um arranjo retangular de números em que cada linha retangular representa uma equação. O nosso exemplo reduz-se ao seguinte arranjo:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right). \quad (\text{A linha enfatiza onde o igual aparece.})$$

No arranjo de coeficientes, os números do lado esquerdo da linha vertical é chamado de matriz de coeficiente do sistema e os números do lado direito da linha vertical é chamado de matriz argumento associado com o sistema. Se a matriz coeficiente é representado por  $\mathbf{A}$  e o lado direito é representado por  $\mathbf{b}$ , então a matriz argumento associada com o sistema é representada por  $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ .

### Método de Gauss-Jordan

O propósito desta seção é introduzir uma variação da eliminação Gaussiana que é conhecido como método de Gauss-Jordan. Existem dois fatores que diferenciam o método de Gauss-Jordan da eliminação Gaussiana que são:

- Em cada etapa, o elemento pivô deve ser 1.
- Em cada etapa, todos os termos acima do pivô, assim como, todos os termos abaixo do pivô são eliminados.

Em outras palavras, se:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

é uma matriz argumento associada com um sistema linear, então usa-se operações elementares de linha para reduzir esta matriz para:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_n \end{array} \right).$$

A solução aparece na última coluna (isto é,  $x_i = s_i$ ), portanto este procedimento evita a substituição nas equações anteriores.

**Exemplo:** Aplicar o método de Gauss-Jordan para resolver o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 &= 6, \\ -2x_1 - 6x_2 - 7x_3 &= -1. \end{aligned}$$

**Solução:** A seqüência de operações é indicada em parênteses e os pivôs são negritados.

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \\ -2 & -6 & -7 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (R_1/2) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \\ -2 & -6 & -7 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ (R_2 - 2R_1) \\ (R_3 + 2R_1) \end{array} \\ &\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ (-R_2) \\ \end{array} \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (R_1 - R_2) \\ \\ (R_3 + 4R_2) \end{array} \\ &\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ (-R_3/5) \end{array} \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (R_1 - 4R_3) \\ (R_2 + R_3) \\ \end{array} \\ &\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Portanto, a solução é  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### Forma de Escalonamento por Linha

Uma matriz  $\mathbf{E}_{m \times n}$  com  $\mathbf{E}_{i^*}$  linhas e  $\mathbf{E}_{*j}$  colunas é da forma escalonada por linha desde que as duas condições seguintes sejam mantidas.

- Se  $\mathbf{E}_{i^*}$  consiste totalmente de zeros então todas as linhas abaixo de  $\mathbf{E}_{i^*}$  são totalmente de zeros; isto é, todas as linhas de zeros são as últimas linhas.

- Se as primeiras entradas não zero em  $\mathbf{E}_{i*}$  cai na  $j$ -ésima posição, então todas as entradas abaixo da  $i$ -ésima posição nas colunas  $\mathbf{E}_{*1}, \mathbf{E}_{*2}, \dots, \mathbf{E}_{*j}$  são zero.

Os pivôs são as primeiras entradas não zero em cada linha. Uma estrutura típica para uma matriz em forma escalonada de linha é ilustrada abaixo com os pivôs em negrito.

$$\begin{pmatrix} \underline{*} & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \underline{*} & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \underline{*} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{*} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Devido a flexibilidade de escolha das operações de linha para reduzir uma matriz  $\mathbf{A}$  para uma forma escalonada por linha  $\mathbf{E}$ , as entradas em  $\mathbf{E}$  não são únicas. Entretanto, pode-se provar que as posições dos pivôs são únicas em  $\mathbf{E}$ . Como as posições de pivôs são únicas, conclui-se que o número de pivôs, que é o mesmo que o número de linhas não zero em  $\mathbf{E}$ , é também única. Este número é chamado de posto de  $\mathbf{A}$ .

### Posto de Uma Matriz

Suponha que  $\mathbf{A}_{m \times n}$  seja reduzido pelas operações de linha para uma forma escalonada  $\mathbf{E}$ . O posto de  $\mathbf{A}$  é definido como:

$$\begin{aligned} \text{posto}(\mathbf{A}) &= \text{número de pivôs} \\ &= \text{número de linhas não zero em } \mathbf{E} \\ &= \text{número de colunas básicas em } \mathbf{A} \end{aligned}$$

onde as colunas básicas de  $\mathbf{A}$  são definidas como aquelas colunas em  $\mathbf{A}$  que contêm as posições pivôs.

**Exemplo:** Determine o posto e identifique as colunas básicas em:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$



**Solução:** Reduza  $\mathbf{A}$  para a forma de escalonamento por linha como mostrado abaixo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Conseqüentemente,  $\text{posto}(\mathbf{A}) = 2$ . Os pivôs estão na primeira e quarta coluna, então as colunas básicas de  $\mathbf{A}$  são  $\mathbf{A}_{*1}$  e  $\mathbf{A}_{*4}$  representadas por:

$$\text{Colunas Básicas} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Preste atenção no fato de que as colunas básicas são extraídas de  $\mathbf{A}$  e não da forma escalonada por linha  $\mathbf{E}$ .

### Forma Escalonada Reduzida por Linha

Uma matriz  $\mathbf{E}_{m \times n}$  é uma forma escalonada reduzida por linha desde que as três condições seguintes sejam mantidas:

- $\mathbf{E}$  é uma forma escalonada por linha;
- A primeira entrada não zero em cada linha (isto é, em cada pivô) é 1;
- Todas entradas acima de cada pivô são zero.

Uma estrutura típica para uma matriz em forma de escalonamento reduzido por linha é mostrado abaixo, onde as entradas marcadas com \* podem ter números iguais a zero ou não zero:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A forma de escalonamento reduzido por linha  $\mathbf{E}_{\mathbf{A}}$  produzido pela matriz  $\mathbf{A}$  é independente do esquema de eliminação usado. Para a matriz  $\mathbf{A}$ , o símbolo  $\mathbf{E}_{\mathbf{A}}$  representa a única forma de escalonamento reduzido por linha de  $\mathbf{A}$  por meio de operações de linhas.

**Exemplo:** Determine  $\mathbf{E}_A$ , calcule  $\text{posto}(\mathbf{A})$  e identifique as colunas básicas de:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Solução:**

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,  $\text{posto}(\mathbf{A}) = 3$  e  $\{\mathbf{A}_{*1}, \mathbf{A}_{*3}, \mathbf{A}_{*5}\}$  são as três colunas básicas.

### Transposto

O transposto de  $\mathbf{A}_{m \times n}$  é definido como a matriz  $n \times m$  representada por  $\mathbf{A}^T$  obtida pela troca das linhas pelas colunas em  $\mathbf{A}$ . Mais precisamente, se  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ , então  $[\mathbf{A}^T]_{ij} = a_{ji}$ . Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Parece ser evidente que para todas as matrizes,  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ .

### Hermitiano

Hermitiano de uma matriz é o transposto conjugado dessa matriz. Para  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ , o conjugado da matriz é definido como  $\overline{\mathbf{A}} = [\overline{a_{ij}}]$ , e o transposto conjugado de  $\mathbf{A}$  é definido como  $\overline{\mathbf{A}}^T = \overline{\mathbf{A}^T}$ . De agora em diante,  $\overline{\mathbf{A}}^T$  será representado por  $\mathbf{A}^H$ , então  $[\mathbf{A}^H]_{ij} = \overline{a_{ji}}$ . Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 - 4i & i & 2 \\ 3 & 2 + i & 0 \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} 1 + 4i & 3 \\ -i & 2 - i \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}$  para todas as matrizes, e  $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^T$  quando  $\mathbf{A}$  conter somente valores reais.

### Propriedades do Transposto

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são duas matrizes de mesmo tamanho e se  $\alpha$  é um escalar, então cada uma das seguintes propriedades são verdadeiras:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T & \text{e} & & (\mathbf{A} + \mathbf{B})^H &= \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H \\ (\alpha\mathbf{A})^T &= \alpha\mathbf{A}^T & \text{e} & & (\alpha\mathbf{A})^H &= \overline{\alpha}\mathbf{A}^H \end{aligned}$$

### Matriz Identidade

A matriz  $n \times n$  com 1's na diagonal principal e 0's nos outros lugares

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

é chamada de matriz identidade de ordem  $n$ . Para todas as matrizes  $\mathbf{A}_{m \times n}$ ,

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

### Lei da Ordem Reversa para a Transposição

Para as matrizes equivalentes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ,

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

O caso do Hermitiano é similar, ou seja,

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^H = \mathbf{B}^H\mathbf{A}^H.$$

## Matriz Inversa

Para uma determinada matriz quadrada  $\mathbf{A}_{n \times n}$ , a matriz  $\mathbf{B}_{n \times n}$  que satisfaz a condição:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n \quad \text{e} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

é chamada de inversa de  $\mathbf{A}$  e é representada por  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ . Nem todas as matrizes quadradas são inversíveis, a matriz zero é um exemplo trivial, mas existem também muitas matrizes não zero que não são inversíveis. Uma matriz inversível é chamada de não singular e uma matriz quadrada não inversível é chamada de matriz singular.

### Condições para uma Matriz ser Inversível

Para uma matriz  $\mathbf{A}_{n \times n}$ , as seguintes representações são equivalentes:

- Se  $\mathbf{A}^{-1}$  existe então  $\mathbf{A}$  é não singular.
- $\text{posto}(\mathbf{A}) = n$ .
- $\mathbf{A} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \mathbf{I}$ .
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  implica que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

### Calculando uma Matriz Inversa

A eliminação de Gauss-Jordan pode ser usada para inverter a matriz  $\mathbf{A}$  pela redução:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [\mathbf{I}|\mathbf{A}]$$

A única condição para essa redução falhar é quando aparecer uma linha de zeros no lado esquerdo e isto ocorre se e somente se  $\mathbf{A}$  for uma matriz singular.

### Propriedades de uma Matriz Inversa

Para as matrizes não singular  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , as seguintes propriedades se mantêm:

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ .
- O produto  $\mathbf{AB}$  é também não singular.
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$  (lei da ordem reversa para a inversão).
- $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$  e  $(\mathbf{A}^{-1})^H = (\mathbf{A}^H)^{-1}$ .

### Definição de Espaços Vetoriais

Um vetor espaço envolve quatro itens: dois conjuntos  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}$  e duas operações algébricas chamadas de adição de vetores e multiplicação escalar.

- $\mathcal{V}$  é um conjunto não vazio de elementos chamados de vetores. Embora  $\mathcal{V}$  seja geral, usualmente considera-se  $\mathcal{V}$  um conjunto de matrizes.
- $\mathcal{F}$  é um conjunto de valores escalares.  $\mathcal{F}$  é também o conjunto de números reais  $\mathfrak{R}$  ou o conjunto de números complexos  $\mathbb{C}$ .
- O vetor adição (representado por  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ) é uma operação entre os elementos de  $\mathcal{V}$ .
- Multiplicação escalar (representada por  $\alpha\mathbf{x}$ ) é uma operação entre os elementos de  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}$ .

O conjunto  $\mathcal{V}$  é chamado de espaço vetorial de  $\mathcal{F}$  quando as operações de adição de vetores e multiplicação de escalares satisfazem as seguintes condições:

- (A1)  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ . Isto é chamado de propriedade fechada para adição de vetores.
- (A2)  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}$ .
- (A3)  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ .
- (A4) Existe um elemento  $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$  em que  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ .
- (A5) Para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  existe um elemento  $(-\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$  em que  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .
- (M1)  $\alpha\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  para todo  $\alpha \in \mathcal{F}$  e  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ . Esta é a propriedade fechada para multiplicação escalar.
- (M2)  $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$  e todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ .
- (M3)  $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$  para todo  $\alpha \in \mathcal{F}$  e todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ .
- (M4)  $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$  e todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ .
- (M5)  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ .

### Subespaço

Considere  $\mathcal{S}$  um subconjunto não vazio de um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{F}$  (simbolicamente,  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ ). Se  $\mathcal{S}$  é também um espaço vetorial de  $\mathcal{F}$  usando as mesmas operações de adição e multiplicação

escalar, então  $\mathcal{S}$  é chamado de subespaço de  $\mathcal{V}$ . Não é necessário checar todas as 10 propriedades para determinar se um subconjunto é também um subespaço, somente as condições fechadas **(A1)** e **(M1)** precisam ser consideradas. Um subconjunto não vazio  $\mathcal{S}$  de um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  é um subespaço de  $\mathcal{V}$  se e somente se:

$$\text{(A1)} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{S} \quad \implies \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{S}$$

$$\text{(M1)} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad \implies \quad \alpha \mathbf{x} \in \mathcal{S} \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{F}.$$

O conceito de subespaço nos espaços visuais  $\mathfrak{R}^2$  e  $\mathfrak{R}^3$  são os planos que passam pela origem.

### Conjuntos Geradores

• Para um conjunto de vetores  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ , o subespaço:

$$\text{ger}(\mathcal{S}) = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{v}_r\}$$

gerado pela combinação linear de vetores de  $\mathcal{S}$  é chamado de espaço gerado por  $\mathcal{S}$ .

• Se  $\mathcal{V}$  é um espaço vetorial em que  $\mathcal{V} = \text{ger}(\mathcal{S})$ , diz-se que  $\mathcal{S}$  é um conjunto gerador de  $\mathcal{V}$ . Em outras palavras,  $\mathcal{S}$  gera  $\mathcal{V}$  portanto cada vetor em  $\mathcal{V}$  é uma combinação linear dos vetores de  $\mathcal{S}$ .

### Espaços Imagem

A imagem de uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é definida como um subespaço  $\text{Im}(\mathbf{A})$  de  $\mathfrak{R}^m$  que é gerado pela imagem de  $f(x) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Representado por:

$$\text{Im}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n\} \subseteq \mathfrak{R}^m.$$

Similarmente, a imagem de  $\mathbf{A}^T$  é um subespaço de  $\mathfrak{R}^n$  definido por:

$$\text{Im}(\mathbf{A}^T) = \{\mathbf{A}^T \mathbf{y} | \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^m\} \subseteq \mathfrak{R}^n.$$

**Exemplo:** Determine o conjunto gerador de  $\text{Im}(\mathbf{A})$  e  $\text{Im}(\mathbf{A}^T)$ , onde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Solução:** Reduzindo  $\mathbf{A}$  para uma forma escalonada por linha  $\mathbf{U}$  fornece a solução: as colunas básicas em  $\mathbf{A}$  correspondem a posições dos pivôs em  $\mathbf{U}$ , e as linhas não zero de  $\mathbf{U}$  gera o espaço

linha de  $\mathbf{A}$ . Usando  $\mathbf{E}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  produz:

$$\text{Im}(\mathbf{A}) = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \text{Im}(\mathbf{A}^T) = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

### Espaços Colunas e Linhas

Para  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , as seguintes afirmações são verdadeiras:

- $\text{Im}(\mathbf{A})$  = espaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{A}$  (espaço coluna).
- $\text{Im}(\mathbf{A}^T)$  = espaço gerado pelas linhas de  $\mathbf{A}$  (espaço linha).
- $\mathbf{b} \in \text{Im}(\mathbf{A}) \iff \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  para qualquer  $\mathbf{x}$ .
- $\mathbf{a} \in \text{Im}(\mathbf{A}^T) \iff \mathbf{a}^T = \mathbf{y}^T \mathbf{A}$  para qualquer  $\mathbf{y}^T$ .

### Imagens Iguais

Para duas matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  de mesmo tamanho temos:

- $\text{Im}(\mathbf{A}^T) = \text{Im}(\mathbf{B}^T)$  se e somente se  $\mathbf{A} \stackrel{\text{linha}}{\approx} \mathbf{B}$ .
- $\text{Im}(\mathbf{A}) = \text{Im}(\mathbf{B})$  se e somente se  $\mathbf{A} \stackrel{\text{coluna}}{\approx} \mathbf{B}$ .

### Gerando os Espaços de Linha e de Coluna

Considere a matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$  e  $\mathbf{U}$  a forma de escalonamento de linha derivado de  $\mathbf{A}$ . Os conjuntos gerados pelos espaços de linha e de coluna são os seguintes:

- As linhas diferentes de zero de  $\mathbf{U}$  geram  $\text{Im}(\mathbf{A}^T)$ .
- As colunas básicas de  $\mathbf{A}$  geram  $\text{Im}(\mathbf{A})$ .

## Espaços Nulos

Para uma matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$ , o conjunto  $\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x}_{n \times 1} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathfrak{R}^n$  (ker de kernel) é chamado de espaço nulo de  $\mathbf{A}$ . Em outras palavras,  $\ker(\mathbf{A})$  é simplesmente o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

O conjunto  $\ker(\mathbf{A}^T) = \{\mathbf{y}_{m \times 1} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathfrak{R}^m$  é chamado de espaço nulo a esquerda de  $\mathbf{A}$ , porque  $\ker(\mathbf{A}^T)$  é o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo a esquerda  $\mathbf{y}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ .

**Exemplo:** Determine o conjunto que gera  $\ker(\mathbf{A})$ , onde  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ .

**Solução:**  $\ker(\mathbf{A})$  é meramente uma solução geral de  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , e isto é determinado pela redução de  $\mathbf{A}$  para uma forma escalonada por linha  $\mathbf{U}$ . Usa-se o resultado  $\mathbf{E}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , conseqüentemente,  $x_1 = -2x_2 - 3x_3$ , onde  $x_2$  e  $x_3$  são livres, então a solução geral de  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  é:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Em outras palavras,  $\ker(\mathbf{A})$  é o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores:

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e portanto  $\text{ger}\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\} = \ker(\mathbf{A})$ . Para este exemplo,  $\ker(\mathbf{A})$  é o plano em  $\mathfrak{R}^3$  que passa pela origem e os dois pontos  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$ .

## Espaços Nulos Zero

Seja a matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$ , então:

- $\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$  se e somente se  $\text{posto}(\mathbf{A}) = n$ ;
- $\ker(\mathbf{A}^T) = \{\mathbf{0}\}$  se e somente se  $\text{posto}(\mathbf{A}) = m$ .

## Espaços Nulos Iguais

Para duas matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  de mesmo tamanho temos:

- $\ker(\mathbf{A}) = \ker(\mathbf{B})$  se e somente se  $\mathbf{A} \stackrel{\text{linha}}{\approx} \mathbf{B}$ .



- $\ker(\mathbf{A}^T) = \ker(\mathbf{B}^T)$  se e somente se  $\mathbf{A} \stackrel{\text{coluna}}{\approx} \mathbf{B}$ .

### Linearmente Independentes e Matrizes

Seja a matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$ , então:

- Cada uma das seguintes afirmativas é equivalente a dizer que as colunas de  $\mathbf{A}$  forma um conjunto linearmente independente.

$$\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}.$$

$$\text{posto}(\mathbf{A}) = n.$$

- Cada uma das seguintes afirmativas é equivalente a dizer que as linhas de  $\mathbf{A}$  forma um conjunto linearmente independente.

$$\ker(\mathbf{A}^T) = \{\mathbf{0}\}.$$

$$\text{posto}(\mathbf{A}) = m.$$

- Quando  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada, cada uma das seguintes afirmações é equivalente a dizer que  $\mathbf{A}$  é não singular.

As colunas de  $\mathbf{A}$  forma um conjunto linearmente independente.

As linhas de  $\mathbf{A}$  forma um conjunto linearmente independente.

### Características de uma Base

Um conjunto linearmente independente que gera um vetor espaço  $\mathcal{V}$  é chamado de uma base de  $\mathcal{V}$ .

Considere  $\mathcal{V}$  um subespaço de  $\mathfrak{R}^m$ , e  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathcal{V}$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- $\mathcal{B}$  é uma base de  $\mathcal{V}$ .
- $\mathcal{B}$  é um conjunto gerador mínimo de  $\mathcal{V}$ .
- $\mathcal{B}$  é um subconjunto linearmente independente máximo de  $\mathcal{V}$ .

## Dimensão

A dimensão de um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  é definido como:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{V} &= \text{número de vetores em uma base de } \mathcal{V} \\ &= \text{número de vetores em um conjunto gerador mínimo de } \mathcal{V} \\ &= \text{número de vetores em algum subconjunto linearmente independente máximo de } \mathcal{V}. \end{aligned}$$

### Posto e o Teorema da Nulidade

- $\dim \text{Im}(\mathbf{A}) + \dim \ker(\mathbf{A}) = n$  para todas matrizes  $m \times n$ .
- $\dim \ker(\mathbf{A}) = \text{nulidade}(\mathbf{A})$  e  $\dim \text{Im}(\mathbf{A}) = \text{posto}(\mathbf{A})$ .

**Exemplo:** Determine a dimensão assim como a base do espaço gerado por:

$$\mathbf{S} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \right) \right\}.$$

**Solução:** Considera-se os vetores como coluna na matriz  $\mathbf{A}$  e reduz-se a:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Já que  $\text{ger}(\mathcal{S}) = \text{Im}(\mathbf{A})$ , temos:

$$\dim(\text{ger}(\mathcal{S})) = \dim(\text{Im}(\mathbf{A})) = \text{posto}(\mathbf{A}) = 2.$$

As colunas básicas  $\mathcal{B} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right) \right\}$  são as bases de  $\text{Im}(\mathbf{A}) = \text{ger}(\mathcal{S})$ . São possíveis ou-

tras bases. Examinando  $\mathbf{E}_{\mathbf{A}}$  encontra-se dois vetores em  $\mathcal{S}$  que formam um conjunto independente e portanto um par de vetores de  $\mathcal{S}$  que constitui uma base  $\text{ger}(\mathcal{S})$ .

### Vetor Normal Euclidiano

Para o vetor  $\mathbf{x}_{n \times 1}$ , a norma euclidiana é definida como:

- $\|\mathbf{x}\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$  para qualquer  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ ,

$$\bullet \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in \mathcal{C}^{n \times 1}.$$

### Produto Interno Padrão

Os termos escalares definidos por:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathfrak{R} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^H \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \in \mathcal{C}$$

são chamados de produto interno padrão para  $\mathfrak{R}^n$  e  $\mathcal{C}^n$ , respectivamente.

### Produto Interno Geral

O produto interno em um espaço vetorial real (ou complexo)  $\mathcal{V}$  é uma função que mapeia cada par ordenado de vetores  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  para um escalar real (ou complexo)  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$  em que as quatro propriedades seguintes se mantem:

- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle$  é real com  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0$ , e  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0$  se e somente se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,
- $\langle \mathbf{x} | \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$  para todo escalar  $\alpha$ ,
- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle$ ,
- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle}$  (para o espaço real isto torna-se  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle$ ).

Note que cada valor fixo de  $\mathbf{x}$ , a segunda e a terceira propriedade diz-se que  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$  é uma função linear de  $\mathbf{y}$ .

### Ortogonalidade

Em um espaço de produto interno  $\mathcal{V}$ , dois vetores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$  são ditos ortogonais (um em relação ao outro) para qualquer  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 0$  e a ortogonalidade é representada por  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ .

- Para  $\mathfrak{R}^n$  com produto interno padrão,  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- Para  $\mathcal{C}^n$  com produto interno padrão,  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \mathbf{x}^H \mathbf{y} = \mathbf{0}$

### Conjunto Ortonormal

$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  é chamado de conjunto ortonormal quando  $\|\mathbf{u}_i\| = 1$  para cada  $i$  e  $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$  para todo  $i \neq j$ . Em outras palavras:

$$\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{quando } i = j, \\ 0 & \text{quando } i \neq j. \end{cases}$$

- Todo conjunto ortonormal é linearmente independente.
- Todo conjunto ortonormal de  $n$  vetores de um espaço  $n$ -dimensional  $\mathcal{V}$  é uma base ortonormal de  $\mathcal{V}$ .

### Subespaço Complementar

Os subespaços  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  de um espaço  $\mathcal{V}$  são ditos complementares quando:

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \quad \text{e} \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0}$$

em que  $\mathcal{V}$  é uma soma direta de  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , e isto é representado por  $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ .

- Para um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  com subespaços  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  que tem respectivamente as bases  $\mathcal{B}_\mathcal{X}$  e  $\mathcal{B}_\mathcal{Y}$ , as seguintes afirmações são verdadeiras:
  - ◊  $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ .
  - ◊ Para cada  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  existem os vetores únicos  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  e  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  em que  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ .
  - ◊  $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cap \mathcal{B}_\mathcal{Y} = \emptyset$  e  $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y}$  é uma base de  $\mathcal{V}$ .

### Projeção

Suponha que  $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$  então para cada  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  existem os vetores únicos  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  e  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  em que  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ .

- O vetor  $\mathbf{x}$  é chamado de projeção de  $\mathbf{v}$  em  $\mathcal{X}$  ao longo de  $\mathcal{Y}$ .
- O vetor  $\mathbf{y}$  é chamado de projeção de  $\mathbf{v}$  em  $\mathcal{Y}$  ao longo de  $\mathcal{X}$ .

### Projetores

Considere  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  subespaços complementares de um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  então cada  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  pode ser resolvido de forma única como  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , onde  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  e  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ . O operador linear único  $\mathbf{P}$  definido por  $\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{x}$  é chamado de projetor em  $\mathcal{X}$  ao longo de  $\mathcal{Y}$ , e  $\mathbf{P}$  tem as seguintes propriedades:

- $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ .
- $\mathbf{I} - \mathbf{P}$  é um projetor complementar em  $\mathcal{Y}$  ao longo de  $\mathcal{X}$ .
- $\text{Im}(\mathbf{P}) = \{\mathbf{x} | \mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}\}$  (o conjunto de pontos fixos de  $\mathbf{P}$ ).

•  $\text{Im}(\mathbf{P}) = \ker(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathcal{X}$  e  $\text{Im}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \ker(\mathbf{P}) = \mathcal{Y}$ .

• Se  $\mathcal{V} = \mathfrak{R}^n$  ou  $\mathcal{C}^n$ , então  $\mathbf{P}$  é dado por:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{X}|\mathbf{0}][\mathbf{X}|\mathbf{Y}]^{-1} = [\mathbf{X}|\mathbf{Y}] \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} [\mathbf{X}|\mathbf{Y}]^{-1},$$

onde as colunas  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  são respectivamente bases de  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ .

### Projeção Ortogonal

Para  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , considere  $\mathbf{v} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ , onde  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$  e  $\mathbf{n} \in \mathcal{M}^\perp$ .

- $\mathbf{m}$  é chamado de projeção ortogonal de  $\mathbf{v}$  em  $\mathcal{M}$ .
- O projetor  $\mathbf{P}_\mathcal{M}$  em  $\mathcal{M}$  ao longo de  $\mathcal{M}^\perp$  é chamado de projetor ortogonal em  $\mathcal{M}$ .
- $\mathbf{P}_\mathcal{M}$  é um operador linear único em que  $\mathbf{P}_\mathcal{M}\mathbf{v} = \mathbf{m}$ .

Esta ideia é ilustrada na figura 8.1 para  $\mathcal{V} = \mathfrak{R}^3$ .

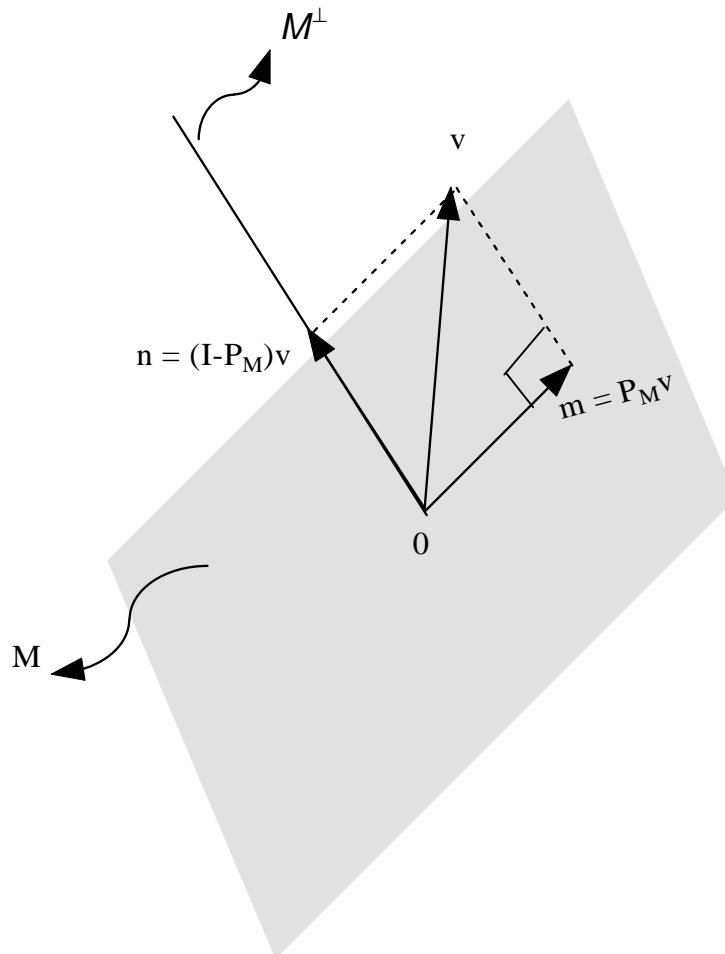


Figura 8.1: Projeção Ortogonal

### Construindo o Projetor Ortogonal

Considere  $\mathcal{M}$  um subespaço  $r$ -dimensional de  $\mathfrak{R}^n$ , e as colunas de  $\mathbf{M}_{n \times r}$  e  $\mathbf{N}_{n \times n-r}$  bases de  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}_\perp$ , respectivamente. As projeções ortogonais de  $\mathcal{M}$  e  $e\mathcal{M}_\perp$  são:

$$\bullet \mathbf{P}_{\mathcal{M}} = \mathbf{M}(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \text{ e } \mathbf{P}_{\mathcal{M}^\perp} = \mathbf{N}(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T.$$

Se  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  contem bases ortonormais para  $\mathcal{M}$  e  $e\mathcal{M}_\perp$ , então:

$$\bullet \mathbf{P}_{\mathcal{M}} = \mathbf{M} \mathbf{M}^T \text{ e } \mathbf{P}_{\mathcal{M}^\perp} = \mathbf{N} \mathbf{N}^T.$$

$$\bullet \mathbf{P}_{\mathcal{M}} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{U}^T, \text{ onde } \mathbf{U} = (\mathbf{M} | \mathbf{N}).$$

$$\bullet \mathbf{P}_{\mathcal{M}^\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathcal{M}} \text{ em todos os casos.}$$

### Autovalores e Autovetores

Para uma matriz  $\mathbf{A}_{n \times n}$ , com escalares  $\lambda$  e vetores  $\mathbf{x}_{n \times 1} \neq \mathbf{0}$  satisfazendo  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  são chamados de autovalores e autovetores de  $\mathbf{A}$ , respectivamente, e cada par  $(\lambda, \mathbf{x})$  é chamado de autopar de  $\mathbf{A}$ . O conjunto de autovalores distintos, representado por  $\sigma(\mathbf{A})$  é chamado de spectrum de  $\mathbf{A}$ .

$$\bullet \lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \iff \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \text{ é singular} \iff \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

$$\bullet \{\mathbf{x} \neq \mathbf{0} | \mathbf{x} \in \ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\} \text{ é o conjunto de todos autovetores associados com } \lambda. \ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \text{ é chamado de autoespaço de } \mathbf{A}.$$

**Exemplo:** Determine os autovalores e os autovetores de  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Solução:** O polinômio característico é:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

então a equação característica é  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ . Aplicando a fórmula quadrática temos:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm i,$$

então o espectro de  $\mathbf{A}$  é  $\sigma(\mathbf{A}) = \{1 + i, 1 - i\}$ . Note que os autovalores são complexos conjugados entre si como devem ser, porque autovalores complexos de matrizes reais devem ocorrer em pares conjugados. Agora achando os autoespaços temos:

Para  $\lambda = 1 + i$ ,

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para  $\lambda = 1 - i$ ,

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \text{ger} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Em outras palavras, os autovetores associados com  $\lambda_1 = 1 + i$  são todos os valores não zeros múltiplos de  $x_1 = (i \ 1)^T$ , os autovetores associados com  $\lambda_2 = 1 - i$  são todos os valores não zeros múltiplos de  $x_2 = (-i \ 1)^T$ .