

Introdução ao Método QR

Osmar do Nascimento
4º Ano - Matemática
Orientador: Marcos E. Valle

Universidade Estadual de Londrina
PET-Matemática - MEC/Sesu

XX Encontro Anual de Iniciação Científica - EAIC
X Encontro de Pesquisa - EPUEPG
UEPG, 22 de outubro de 2011



Introdução

Características



Introdução

Características

- Método iterativo (computacional) para determinar autovalores de matrizes genéricas.



Definições



Definições

Matriz Unitária

Uma matriz quadrada $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é unitária se

$$Q^* = Q^{-1},$$

isto é, se $Q^* Q = I_n$.



Definições

Matriz Unitária

Uma matriz quadrada $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é unitária se

$$Q^* = Q^{-1},$$

isto é, se $Q^*Q = I_n$.

Matrizes Unitariamente Semelhantes

Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é dita unitariamente semelhante a uma matriz B se existe uma matriz unitária Q tal que

$$B = Q^*AQ$$

e escrevemos $A \sim B$.



Fatoração



Fatoração

Fatoração de Shur

Toda matriz quadrada A possui uma fatoração de Shur, isto é, existe uma matriz unitária Q tal que

$$A = QTQ^*$$

e T é triangular superior.



Fatoração

Fatoração de Shur

Toda matriz quadrada A possui uma fatoração de Shur, isto é, existe uma matriz unitária Q tal que

$$A = QTQ^*$$

e T é triangular superior.

Fatoração QR

Seja $A_{m \times n}$, então A pode ser fatorada como

$$A = QR,$$

sendo $Q_{m \times n}$ unitária e $R_{n \times n}$ triangular superior inversível.



Fatoração

Fatoração de Shur

Toda matriz quadrada A possui uma fatoração de Shur, isto é, existe uma matriz unitária Q tal que

$$A = QTQ^*$$

e T é triangular superior.

Fatoração QR

Seja $A_{m \times n}$, então A pode ser fatorada como

$$A = QR,$$

sendo $Q_{m \times n}$ unitária e $R_{n \times n}$ triangular superior inversível.



Exemplo (Fatoração QR)

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 8,75 & -0,11 & 0,70 & 0,10 \\ 0,55 & 5,99 & -1,407 & -2,30 \\ -2,08 & -0,05 & 4,05 & 3,95 \\ 1,02 & -0,05 & -1,41 & 1,21 \end{pmatrix}.$$



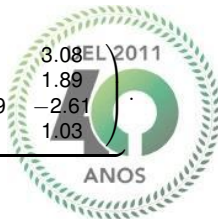
Exemplo (Fatoração QR)

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 8,75 & -0,11 & 0,70 & 0,10 \\ 0,55 & 5,99 & -1,407 & -2,30 \\ -2,08 & -0,05 & 4,05 & 3,95 \\ 1,02 & -0,05 & -1,41 & 1,21 \end{pmatrix}.$$

Sua fatoração QR é

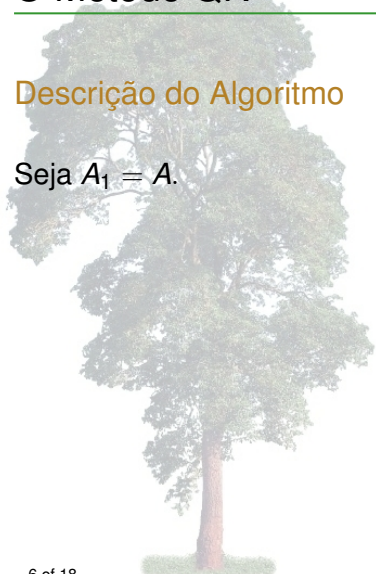
$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.59 & 0.14 & -0.74 & -0.28 \\ -0.19 & -0.98 & -0.04 & 0.02 \\ 0.70 & -0.10 & -0.66 & 0.23 \\ -0.34 & 0.09 & -0.06 & 0.93 \end{pmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2.95 & -0.49 & 4.78 & 3.08 \\ 0 & -2.95 & 0.94 & 1.89 \\ 0 & 0 & -2.69 & -2.61 \\ 0 & 0 & 0 & 1.03 \end{pmatrix}}_R.$$



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Seja $A_1 = A$.



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Seja $A_1 = A$.

Fatoração QR: $A_1 = Q_1 R_1$.



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Seja $A_1 = A$.

Fatoração QR: $A_1 = Q_1 R_1$.

Seja $A_2 = R_1 Q_1$.



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Seja $A_1 = A$.

Fatoração QR: $A_1 = Q_1 R_1$.

Seja $A_2 = R_1 Q_1$.

Fatoração QR: $A_2 = Q_2 R_2$.



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Seja $A_1 = A$. Fatoração QR: $A_1 = Q_1 R_1$.

Seja $A_2 = R_1 Q_1$. Fatoração QR: $A_2 = Q_2 R_2$.

Note que $A_2 \sim A_1$, pois

$$A_2 = R_1 Q_1 \Leftrightarrow Q_1 A_2 = Q_1 R_1 Q_1 = A_1 Q_1.$$

Logo,

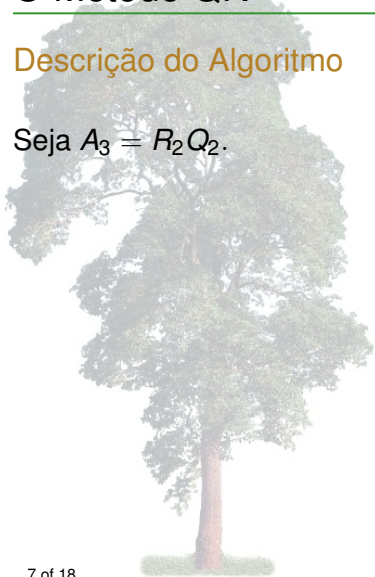
$$A_2 = Q_1^* A Q_1 \quad \text{e} \quad A_2 \sim A_1.$$



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Seja $A_3 = R_2 Q_2$.



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Seja $A_3 = R_2 Q_2$. Fatoração QR: $A_3 = Q_3 R_3$.



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Seja $A_3 = R_2 Q_2$. Fatoração QR: $A_3 = Q_3 R_3$.

Analogamente, tem-se $A_3 \sim A_2$ e

$$A_3 = Q_2^* A_2 Q_2 = Q_2^* Q_1^* A Q_1 Q_2 = (Q_1 Q_2)^* A Q_1 Q_2.$$

De modo geral, para $k \geq 1$,

calcula-se $A_k = Q_k R_k$ e define-se $A_{k+1} = R_k Q_k$.

Além disso, prova-se que $A_k \sim A, \forall k \geq 1$, ou seja,

$$A_k = Q_{k-1}^* A Q_{k-1}.$$



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Em síntese, temos

$$A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^* A_1 Q_1 = Q_1^* A Q_1,$$



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Em síntese, temos

$$A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^* A_1 Q_1 = Q_1^* A Q_1,$$

$$A_3 = R_2 Q_2 = Q_2^* A_2 Q_2 = Q_2^* Q_1^* A Q_1 Q_2 = (Q_1 Q_2)^* A (Q_1 Q_2),$$



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Em síntese, temos

$$A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^* A_1 Q_1 = Q_1^* A Q_1,$$

$$A_3 = R_2 Q_2 = Q_2^* A_2 Q_2 = Q_2^* Q_1^* A Q_1 Q_2 = (Q_1 Q_2)^* A (Q_1 Q_2),$$

$$A_4 = R_3 Q_3 = Q_3^* A_3 Q_3 = Q_3^* Q_2^* Q_1^* A Q_1 Q_2 Q_3 = (Q_1 Q_2 Q_3)^* A (Q_1 Q_2 Q_3),$$

$$\vdots = \vdots$$



O Método QR

Descrição do Algoritmo

Em síntese, temos

$$A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^* A_1 Q_1 = Q_1^* A Q_1,$$

$$A_3 = R_2 Q_2 = Q_2^* A_2 Q_2 = Q_2^* Q_1^* A Q_1 Q_2 = (Q_1 Q_2)^* A (Q_1 Q_2),$$

$$A_4 = R_3 Q_3 = Q_3^* A_3 Q_3 = Q_3^* Q_2^* Q_1^* A Q_1 Q_2 Q_3 = (Q_1 Q_2 Q_3)^* A (Q_1 Q_2 Q_3),$$

$$\vdots = \vdots$$

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^* A_k Q_k = \cdots = (Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_k)^* A (Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_k),$$

$$\vdots = \vdots$$



Exemplo

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 8.75 & -0.11 & -0.70 & 0.10 \\ 0.55 & 5.99 & -1.70 & -2.30 \\ -2.08 & -0.05 & 4.05 & 3.95 \\ 1.02 & -0.05 & -1.41 & 1.21 \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = 1$.



O Método QR

Definamos

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8.75 & -0.11 & -0.70 & 0.10 \\ 0.55 & 5.99 & -1.70 & -2.30 \\ -2.08 & -0.05 & 4.05 & 3.95 \\ 1.02 & -0.05 & -1.41 & 1.21 \end{pmatrix}.$$



O Método QR

Aplicando a fatoração QR em A_1 , obtemos



O Método QR

Aplicando a fatoração QR em A_1 , obtemos

$$A_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.59 & 0.14 & -0.74 & -0.28 \\ -0.19 & -0.98 & -0.04 & 0.02 \\ 0.70 & -0.10 & -0.66 & 0.23 \\ -0.34 & 0.09 & -0.06 & 0.93 \end{pmatrix}}_{Q_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2.95 & -0.49 & 4.78 & 3.08 \\ 0 & -2.95 & 0.94 & 1.89 \\ 0 & 0 & -2.69 & -2.61 \\ 0 & 0 & 0 & 1.03 \end{pmatrix}}_{R_1}.$$



O Método QR

Aplicando a fatoração QR em A_1 , obtemos

$$A_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.59 & 0.14 & -0.74 & -0.28 \\ -0.19 & -0.98 & -0.04 & 0.02 \\ 0.70 & -0.10 & -0.66 & 0.23 \\ -0.34 & 0.09 & -0.06 & 0.93 \end{pmatrix}}_{Q_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2.95 & -0.49 & 4.78 & 3.08 \\ 0 & -2.95 & 0.94 & 1.89 \\ 0 & 0 & -2.69 & -2.61 \\ 0 & 0 & 0 & 1.03 \end{pmatrix}}_{R_1}.$$

Definamos $A_2 = R_1 Q_1$,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4.15 & -0.13 & -1.12 & 4.77 \\ 0.56 & 2.97 & -0.61 & 1.92 \\ -0.99 & 0.04 & 1.93 & -3.05 \\ -0.35 & 0.09 & -0.06 & 0.96 \end{pmatrix}.$$



O Método QR

Aplicando a fatoração QR em A_2 , obtemos



O Método QR

Aplicando a fatoração QR em A_2 , obtemos

$$A_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.96 & 0.12 & -0.22 & 0.11 \\ -0.13 & -0.99 & 0.00 & -0.03 \\ 0.23 & -0.03 & -0.97 & 0.08 \\ 0.08 & -0.04 & 0.11 & 0.99 \end{pmatrix}}_{Q_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4.32 & -0.24 & 1.60 & -5.46 \\ 0 & -2.96 & 0.41 & -1.26 \\ 0 & 0 & -1.62 & 1.99 \\ 0 & 0 & 0 & 1.16 \end{pmatrix}}_{R_2}.$$



O Método QR

Aplicando a fatoração QR em A_2 , obtemos

$$A_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.96 & 0.12 & -0.22 & 0.11 \\ -0.13 & -0.99 & 0.00 & -0.03 \\ 0.23 & -0.03 & -0.97 & 0.08 \\ 0.08 & -0.04 & 0.11 & 0.99 \end{pmatrix}}_{Q_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4.32 & -0.24 & 1.60 & -5.46 \\ 0 & -2.96 & 0.41 & -1.26 \\ 0 & 0 & -1.62 & 1.99 \\ 0 & 0 & 0 & 1.16 \end{pmatrix}}_{R_2}.$$

Definamos $A_3 = R_2 Q_2$,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4.10 & -0.14 & -1.17 & -5.73 \\ 0.37 & 2.97 & -0.53 & -1.13 \\ -0.21 & -0.02 & 1.79 & 1.84 \\ 0.09 & -0.04 & 0.12 & 1.14 \end{pmatrix}.$$



O Método QR

Aplicando a fatoração QR em A_3 , obtemos



O Método QR

Aplicando a fatoração QR em A_3 , obtemos

$$A_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.99 & 0.09 & -0.05 & -0.03 \\ -0.09 & -1.00 & -0.01 & 0.01 \\ 0.05 & 0.00 & -1.00 & -0.08 \\ -0.02 & 0.02 & -0.08 & 1.00 \end{pmatrix}}_{Q_3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4.12 & -0.13 & 1.30 & 5.87 \\ 0 & -2.97 & 0.43 & 0.63 \\ 0 & 0 & -1.73 & -1.64 \\ 0 & 0 & 0 & 1.14 \end{pmatrix}}_{R_3}.$$



O Método QR

Aplicando a fatoração QR em A_3 , obtemos

$$A_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.99 & 0.09 & -0.05 & -0.03 \\ -0.09 & -1.00 & -0.01 & 0.01 \\ 0.05 & 0.00 & -1.00 & -0.08 \\ -0.02 & 0.02 & -0.08 & 1.00 \end{pmatrix}}_{Q_3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4.12 & -0.13 & 1.30 & 5.87 \\ 0 & -2.97 & 0.43 & 0.63 \\ 0 & 0 & -1.73 & -1.64 \\ 0 & 0 & 0 & 1.14 \end{pmatrix}}_{R_3}.$$

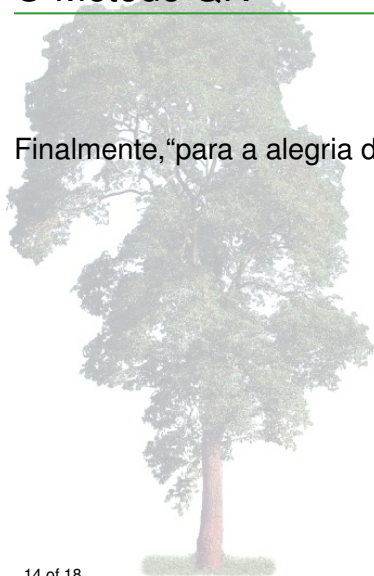
Definamos $A_4 = R_3 Q_3$,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4.04 & -0.15 & -1.59 & 5.85 \\ 0.28 & 2.97 & -0.45 & 0.56 \\ -0.05 & -0.03 & 1.86 & -1.48 \\ -0.03 & 0.02 & -0.10 & 1.13 \end{pmatrix}.$$



O Método QR

Finalmente, “para a alegria do seu coração”,



O Método QR

Finalmente, “para a alegria do seu coração”,

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 4.00 & -0.28 & -2.36 & 5.60 \\ 0.00 & 3.00 & 0.12 & -0.89 \\ 0.00 & 0.00 & 2.00 & -1.29 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{pmatrix}.$$



Convergência do Método QR

Suponha que A é uma matriz inversível tal que todos seus autovalores são distintos e não-nulos, ou seja, existe uma matriz P tal que

$$A = P\Lambda P^{-1}, \text{ com } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

e

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0.$$

Suponha que a matriz P^{-1} tem a fatoração LU. Então a sequência de matrizes $(A_k)_{k \geq 1}$ é tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A_k)_{ii} = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A_k)_{ij} = 0, \quad j < i.$$









Conclusão

- De fato, o método QR é muito eficiente para determinar autovalores de matrizes genéricas;
- É baseado na fatoração QR e busca a fatoração de Shur;
- Fácil de implementar e possui convergência rápida (satisfeitas as hipóteses).



Referências

-  ALLAIRE, G., AND KABER, S. M.
Numerical Linear Algebra.
Springer, New York, NY, USA, 2008.
-  GOLUB, G., AND ORTEGA, J. M.
Scientific Computing and Differential Equations.
Academic Press, San Diego, CA, USA, 1992.
-  GOLUB, G., AND VAN LOAN, C.
Matrix Computations, 3th ed.
John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
-  POOLE, D.
Álgebra Linear, 1ª ed.
Pioneira Thomson Learning, São Paulo, BRA., 2004.
-  TREFETHEN, L. N., AND BAU III, D.
Numerical Linear Algebra.
SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1997.
-  WATKINS, D.
Fundamentals of Matrix Computations, 2th ed.
John Wiley and Sons, New York, USA., 2002.



Agradecimentos

Muito obrigado a todos!

