



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

VICTOR EZEQUIEL DE LA HOZ CORONELL

FORÇA REPULSIVA DE CASIMIR NUM ESPAÇO-TEMPO  
ESTACIONÁRIO E AXIALMENTE SIMÉTRICO

---

LONDRINA-PR

2022



VICTOR EZEQUIEL DE LA HOZ CORONELL

**FORÇA REPULSIVA DE CASIMIR NUM ESPAÇO-TEMPO  
ESTACIONÁRIO E AXIALMENTE SIMÉTRICO**

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Mario Cesar Baldiotti.

**LONDRINA-PR**

**2022**

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

CORONELL, VICTOR EZEQUIEL DE LA HOZ CORONELL.

FORÇA REPULSIVA DE CASIMIR NUM ESPAÇO-TEMPO ESTACIONÁRIO  
E AXIALMENTE SIMÉTRICO / VICTOR EZEQUIEL DE LA HOZ CORONELL  
CORONELL. - Londrina, 2021.

55 f. : il.

Orientador: MARIO CESAR BALDIOTTI BALDIOTTI.

Tese (Doutorado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2021.  
Inclui bibliografia.

1. Efeito Casimir - Tese. 2. Regularização - Tese. 3. Força Casimir Repulsiva - Tese. 4. Espaço-tempo estacionário - Tese. I. BALDIOTTI, MARIO CESAR BALDIOTTI. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 53

VICTOR EZEQUIEL DE LA HOZ CORONELL

**Repulsive Casimir force in stationary axisymmetric spacetimes**

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

### **BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Mario Cesar Baldiotti.  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Thiago Dos Santos Pereira  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Sandro Dias Pinto Vitenti  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Carlos Molina  
Universidade Estadual de São Paulo - USP

---

Prof. Dr. Oton Henrique Marcori  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 12 de Janeiro de 2022.



## **AGRADECIMENTOS**

Quero agradecer ao professor Mario Cesar Baldiotti por me orientar no doutorado e pelas amplas discussões sobre o tema. Agradeço também ao professor Antonio Edson Gonçalves pela dedicação e sugestões e ao professor Ronaldo Carlotto Batista pelas contribuições para o desenvolvimento do meu trabalho. Agradecimentos especiais à banca examinadora, aos Professores, Carlos Molina, Oton Marcori, Thiago Pereira, Sandro Dias Pinto Vitenti. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



V. DE LA HOZ-CORONELL. **Força repulsiva de Casimir num espaço-tempo estacionário e axialmente simétrico.** 53 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Doutorado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina–PR, 2022.

## RESUMO

Estudamos os efeitos da simetria axial de espaços-tempos estacionários na energia de Casimir. Considerando um campo escalar massivo, analisamos a influência da orientação do aparelho Casimir, com relação ao eixo de simetria, no valor da energia. Mostramos que, para uma orientação não considerada antes na literatura, a energia de Casimir pode mudar de sinal, produzindo uma força repulsiva. Como aplicações, analisamos duas métricas específicas: uma associada ao movimento linear de um cilindro e um movimento equatorial circular em torno de uma fonte gravitacional descrita pela geometria de Kerr.

**Palavras-chave:** Efeito Casimir. Regularização. Força Casimir Repulsiva.



V. DE LA HOZ-CORONELL. **Repulsive Casimir force in stationary axisymmetric spacetimes.** 53 p. Senior Thesis (Phd in Physics) – State University of Londrina, Londrina–PR, 2022.

## ABSTRACT

We study the influence of stationary axisymmetric spacetimes on Casimir energy. We consider a massive scalar field and analyze its dependence on the apparatus orientation with respect to the dragging direction associated with such spaces. We show that, for an apparatus orientation not considered before in the literature, the Casimir energy can change its sign, producing a repulsive force. As applications, we analyze two specific metrics: one associated with a linear motion of a cylinder and a circular equatorial motion around a gravitational source described by Kerr geometry.

**Keywords:** Casimir effect. Regularization. Repulsive Casimir force.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Orientações das placas de Casimir para o espaço-tempo cilíndrico. . . . .	28
Figura 2 – Orientação das placas de Casimir para a metrica de Kerr. . . . .	30
Figura 3 – Gráfico de $\Omega$ com respeito à $r$ para $M = 1$ e $a = 0.7$ . A linha sólida $\Omega_{\pm}$ representa os casos ultra-relativísticos, onde a energia Casimir desaparece na orientação $x$ . As linhas tracejadas $\Omega_{0\pm}$ são as trajetórias onde a energia Casimir desaparece na orientação $y$ . A linha pontilhada $\omega_d$ é a trajetória ZAMO e as linhas traço-ponto as geodésicas. Na orientação $y$ a energia é negativa na região cinza escura e positiva na região cinza clara. As regiões cinza representam todas as trajetórias admissíveis. . .	33



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
1.1	O efeito Casimir	15
1.1.1	A força de Casimir repulsiva	15
1.1.2	A força de Casimir em espaços axialmente simétricos	16
<b>2</b>	<b>A ENERGIA DE CASIMIR E A INFLUÊNCIA DA MÉTRICA ESTACIONÁRIA AXIALMENTE SIMÉTRICA</b>	<b>19</b>
2.1	Campo Escalar em Espaços Curvos	19
2.2	A Métrica e o Espectro	19
2.3	Normalização do Campo	21
2.4	Tensor de Energia-Momento e a Energia do Vácuo	22
2.4.1	O caso não massivo	25
<b>3</b>	<b>APLICAÇÕES</b>	<b>27</b>
3.1	Espaço-tempo Cilíndrico de Momento Linear Constante	27
3.2	Aplicação para a Métrica de Kerr	30
3.3	Discussão	33
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>35</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>39</b>
	<b>APÊNDICE A – OPERADOR DE KLEIN-GORDON E O ESPECTRO</b>	<b>41</b>
A.1	A Métrica inversa e o Vetor Unitário para $\Sigma$	42
A.2	O Tensor de Energia-Momento e a Energia de Casimir	46
	<b>APÊNDICE B – ENERGIA CASIMIR PARA AMBAS AS ORIENTAÇÕES</b>	<b>49</b>
B.1	Integral	50



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 O efeito Casimir

O efeito Casimir toma o nome do físico Holandês H. Casimir que, em 1948 Publicou um documento chamado *attraction of two neutral metallic plates*, na Academia de Ciências dos Países Baixos [1]. Neste artigo, Casimir baseou seus argumentos na quantização do campo eletromagnético e mostrou que existe uma força atrativa entre duas placas condutoras neutras no vácuo, impondo as condições de fronteira do tipo Dirichlet para o campo dentro da cavidade. A introdução destas placas (fronteiras) altera o espetro inicial da energia do ponto zero (ou energia do vácuo) [2]. Desde o aparecimento do trabalho de Casimir [1] uma extensa literatura sobre o assunto foi publicada, da qual citamos somente aquelas mais diretamente relacionadas à nossa linha de estudos. Diversos trabalhos teóricos estenderam o conceito da energia de Casimir [3, 4], para diversas aplicações, considerando diferentes condições de contornos: planas, curvas, condições de contorno mistas, espaços com singularidades cônicas, espaços com curvaturas positivas e negativas, além do desenvolvimento de experimentos comprovando a existência do efeito, cuja origem está nas flutuações quânticas do vácuo [5, 6, 7]. O cálculo da energia de Casimir é efetuado considerando-se a diferença entre a energia do vácuo com condições de fronteiras impostas ao sistema e a energia do vácuo sem as condições de fronteira, ou seja,

$$E_c(\partial\Gamma) = E_0(\partial\Gamma) - E_0(0) , \quad (1.1)$$

onde  $\partial\Gamma$  representa as condições de contorno específicas do problema, ou modelo em consideração, e o segundo termo na equação (1.1) é a energia usual do vácuo. Esta equação é uma subtração de dois termos divergentes, ou seja, para obter uma expressão finita e fisicamente significativa, é necessário usarmos um método de regularização. Portanto, a energia física de Casimir é encontrada através da equação acima e da aplicação de um método de regularização. De posse de uma expressão regularizada da energia é fácil encontrar a força de Casimir.

### 1.1.1 A força de Casimir repulsiva

Um problema que tem atraído uma atenção considerável nos últimos anos é em quais condições a força de Casimir pode mudar de atrativa para repulsiva, veja [8] e suas referências. A força atrativa resulta de uma energia de Casimir negativa. Estamos especialmente interessados em condições que podem causar uma mudança no sinal da energia de Casimir. Isso pode acontecer, por exemplo, se uma condição de contorno mista é considerada. Ou seja, se a condição de contorno de Dirichlet ou Neumann for imposta

em ambas as placas, essa força permanece atrativa, mas torna-se repulsiva ao fixar uma placa com a condição de contorno de Dirichlet e a outra placa com a condição de Neumann [9]. No contexto de materiais dielétricos, Lifshitz previu em 1956 que a força é atrativa para duas placas dielétricas idênticas no vácuo [10]. Alguns anos depois, em 1961, Lifshitz e colegas generalizaram este resultado considerando um meio entre as placas dielétricas [11]. Como resultado, eles mostraram que, se as duas placas e o meio tiverem constantes dielétricas diferentes, a força pode se tornar repulsiva. A verificação experimental do efeito Casimir repulsivo foi realizado em [12], enchendo o meio com um líquido dielétrico, de forma que as constantes dielétricas dos três corpos envolvidos no experimento sejam diferentes, causando um efeito repulsivo. Porém, se as duas placas possuem a mesma constante dielétrica, a força é sempre atrativa, independente da constante dielétrica do meio [11]. De fato, esta última conclusão é um resultado particular de um teorema *no-go* apresentado em [13]. Este teorema afirma que “a força de Casimir entre dois objetos dielétricos, relacionados por reflexão, é atrativa”. Uma possível “brecha” neste teorema pode surgir quando um material quiral é considerado como meio entre as placas [8].

No contexto de espaços-tempos curvos, a Ref. [14] mostra que, no espaço-tempo de Sitter, para um campo escalar massivo minimamente ou conformalmente acoplado à curvatura, a força de Casimir pode mudar seu sinal (para a mesma condição de contorno) se as distâncias próprias entre as placas forem maiores que o raio de curvatura. Ressaltamos que esse efeito é uma consequência de um acoplamento entre o campo e a curvatura do espaço-tempo. Outro resultado importante é exposto no cenário da cosmologia quântica em [15]. Nesse trabalho é mostrado que, em um universo em expansão tipo Friedmann-Robertson-Walker, o caráter atrativo ou repulsivo do efeito Casimir é devido à escolha da condição de contorno, relacionada às propriedades dinâmicas do fator de escala.

### 1.1.2 A força de Casimir em espaços axialmente simétricos

Outros trabalhos consideraram as placas de Casimir imersas em um espaço-tempo estacionário com simetria axial, ou, em outras palavras, um espaço onde a métrica é independente do tempo e possui alguma coordenada axial. O caráter estacionário e axis-simétrico do espaço-tempo requer que os coeficientes métricos sejam independentes do tempo e da coordenada axial [22]. Além do caráter estacionário e da simetria axial, devemos também exigir que o espaço-tempo seja invariante por uma inversão simultânea do tempo e da coordenada axial [25], também chamado de eixo de simetria. Um referencial inercial local é considerado em repouso se sua velocidade  $\mathbf{v}$  é nula. Entretanto, a esse mesmo referencial pode ser atribuído uma velocidade  $\mathbf{v}$  no referencial de coordenadas. Por conta disso,  $\mathbf{v}$  é não nula, o que descreve um “arrasto” do referencial inercial. Esse fenômeno ocorre nesses espaços por causa do termo cruzado da métrica [22]. Essa velocidade  $\mathbf{v}$  é chamada de velocidade de arrasto do espaço-tempo. Para o caso do espaço de Kerr, é possível num

movimento circular ter velocidade angular nula no referencial inercial, mas no referencial das coordenadas uma velocidade angular não nula. uma situação análoga a que temos no espaço-tempo cilíndrico (veja o capítulo 3 para mais detalhes).

Vamos assumir que o aparelho (as placas de Casimir) é muito pequeno em comparação com a escala típica na qual a métrica varia. Neste caso, o efeito Casimir não quebra o princípio da equivalência [16, 17]. A influência da gravidade na energia Casimir em tal cenário foi estudado para algumas geometrias específicas. Considerando o exemplo do espaço-tempo de Kerr, os autores de [18] estudaram as correções da energia de Casimir devido à influência de uma fonte gravitacional rotativa para um aparelho que descreve uma órbita equatorial. No trabalho acima mencionado, as placas do aparelho são orientadas paralelamente à coordenada radial da fonte gravitacional. A extensão para um espaço-tempo estacionário geral foi apresentada em [19].

A partir da discussão acima, vemos que, em um espaço-tempo estacionário, a força de Casimir é conhecida por mudar de atrativa para repulsiva em três casos: para condições de contorno mistas; com uma mudança do meio entre as placas (material quiral) e com um acoplamento entre o campo e a curvatura. Neste trabalho, apresentamos um novo caso quando esta mudança pode ocorrer. Ou seja, a mudança no sinal da energia Casimir de um aparelho de placas idênticas para um campo escalar massivo desacoplado da gravidade é descrito por uma solução de vácuo de uma métrica estacionária com simetria axial. Como nós vamos mostrar, neste cenário, a força de Casimir muda de sinal quando as placas são paralelas à direção de arrasto do espaço-tempo, um caso não considerado antes na literatura. Este efeito está relacionado à presença de termos intrínsecos não diagonais na métrica.

Esta tese está organizada da seguinte forma: No capítulo 2, consideramos um campo escalar massivo imerso em um espaço-tempo estacionário geral com simetria axial, onde resolvemos a equação de Klein-Gordon e determinamos as frequências próprias e as soluções normalizadas. Neste capítulo expomos o nosso principal resultado e alguns casos limites. No capítulo 3 fazemos duas aplicações de nossa abordagem para duas geometrias de fundo estacionárias: uma com simetria cilíndrica e a métrica de Kerr, respectivamente.

Ao longo deste trabalho, usamos unidades naturais  $\hbar = c = G = 1$  e trabalhamos na métrica de assinatura igual  $-2$ .



## 2

## A ENERGIA DE CASIMIR E A INFLUÊNCIA DA MÉTRICA ESTACIONÁRIA AXIALMENTE SIMÉTRICA

Neste capítulo mostramos os principais resultados do presente trabalho. Começamos com a equação que rege a dinâmica do campo escalar num espaço curvo. A seguir consideramos a métrica onde escrevemos o operador de Klein-Gordon e encontramos o espectro das soluções. Finalmente, colocamos a expressão da energia Casimir em uma forma compacta, incluindo duas orientações das placas de Casimir.

### 2.1 Campo Escalar em Espaços Curvos

Usando a formulação Lagrangeana para um campo escalar real e massivo  $\psi(x)$  tem se a equação de movimento

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi(x) + m^2 \psi(x) = 0 , \quad (2.1)$$

onde o parâmetro  $m$  é a massa do campo. Podemos ver que a equação de Klein-Gordon (KG) é, no fundo, uma equação de onda que surgiu originalmente em uma tentativa de fornecer uma generalização relativística da equação de Schrödinger. Para um espaço curvo a equação tem a forma [20]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi \right] + m^2 \psi - \zeta R \psi = 0 , \quad (2.2)$$

onde  $\zeta$  é um parâmetro de acoplamento,  $g^{\mu\nu}$  é a métrica inversa e  $R$  é o escalar de curvatura. No presente caso (vácuo)  $R = 0$  e obtemos

$$\hat{D}\psi = 0 , \quad \hat{D} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu + m^2 . \quad (2.3)$$

Ao longo deste trabalho chamamos  $\hat{D}$  de operador de KG. Estamos interessados em suas autofunções para uma situação específica que descreveremos na próxima seção.

### 2.2 A Métrica e o Espectro

Estamos interessados em soluções de vácuo para um campo escalar massivo dentro de um aparelho Casimir em um espaço-tempo estacionário e axialmente simétrico. Seguindo Sloane e Chandrasekhar [21, 22], exigimos que a métrica deve ser independente do tempo e da coordenada axial. Para garantir que o movimento seja em torno do eixo de simetria exigimos que essa métrica seja invariante por uma reflexão simultânea em relação

ao tempo e coordenada axial. Sob as premissas acima, o elemento de linha mais geral é dado por

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2 , \quad (2.4)$$

onde as componentes do tensor métrico dependem apenas das coordenadas  $x^2$  e  $x^3$ , e  $x^0$ ,  $x^1$  são as coordenadas do tempo e axial respectivamente.

A seguir, consideramos um referencial de coordenadas cartesianas locais  $(x, y, z)$  movendo-se com as placas, que são pequenas em comparação com a escala em que a métrica varia. Esta aproximação é cuidadosamente justificada em [18].

Portanto, temos o seguinte elemento de linha, onde todas as componentes da métrica são consideradas constantes [19]:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tx}dtdx + g_{xx}dx^2 + g_{yy}dy^2 + g_{zz}dz^2 . \quad (2.5)$$

Com determinante  $g$  dado por:

$$g = g_{yy}g_{zz}\tilde{g} , \quad \tilde{g} = g_{tt}g_{xx} - g_{tx}^2 . \quad (2.6)$$

A métrica acima reflete a não reversibilidade do tempo. Isso ocorre pois não é possível encontrar um vetor de Killing globalmente orientado ao tempo ortogonal à hiper-superfície tipo espaço. Já para o caso estático, tal vetor existe, o que implica que  $g_{tx} = 0$ . Isso quer dizer que o espaço estático é mais restritivo, no sentido que todo espaço estático é estacionário, mas nem todo estacionário é estático. Um conhecido exemplo, que será analisado como um caso especial do nosso desenvolvimento, é a geometria de Kerr. Neste caso, o termo cruzado,  $g_{tx}$ , está associado à rotação da fonte do campo gravitacional. No entanto,  $g_{tx}$  não está necessariamente relacionado a uma fonte rotativa [23]. Soluções de vácuo não rotativas com este termo podem ser usadas, por exemplo, para descrever cordas supercondutoras com momento linear [24]. Usando a métrica e a aproximação acima o operador de KG, eq. (2.3), torna-se

$$\hat{D} = g^{tt}\partial_t^2 + 2g^{tx}\partial_t\partial_x + g^{xx}\partial_x^2 + g^{yy}\partial_y^2 + g^{zz}\partial_z^2 + m^2 . \quad (2.7)$$

Para constantes  $K$ ,  $\omega$  e  $N$ , consideramos uma solução na forma

$$\psi = N_n e^{-i\omega_n t} e^{ik_z z} \exp(iK\omega_n x) f(x) g(y) , \quad (2.8)$$

e substituindo (2.8) em (2.7), podemos escolher

$$K = \frac{g^{tx}}{g^{xx}} , \quad (2.9)$$

o que reduz a equação a ser solucionada (veja o Apêndice A para mais detalhes). Vamos considerar um referencial cartesiano local centrado em uma das placas e duas orientações

diferentes dessas placas de Casimir. A primeira com o eixo  $x$  sendo perpendicular às placas, que chamamos de orientação  $x$  (observe que esta é a orientação considerada na Ref. [18, 19]). A segunda com o eixo  $y$  sendo perpendicular às placas, que chamamos de orientação  $y$ . No que segue chamamos  $\xi$  a coordenada perpendicular às placas, então podemos nos referir genericamente a orientação  $\xi$ . Fixamos uma condição de contorno de Dirichlet na primeira placa, que geralmente está associada a um material condutor no caso do campo eletromagnético. Então nós temos

$$\begin{aligned} \text{orientação-}x : f &\equiv \sin(k_x x) , \quad g \equiv \exp(ik_y y) , \quad k_x \equiv k_\xi , \quad k_y \in \mathbb{R} , \\ \text{orientação-}y : f &\equiv \exp(ik_x x) , \quad g \equiv \sin(k_y y) , \quad k_x \in \mathbb{R} , \quad k_y \equiv k_\xi , \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde

$$k_\xi \equiv \frac{\pi}{L} \left[ n - \frac{b}{2} \right] , \quad n \in \mathbb{Z} , \quad (2.11)$$

e  $L$  é a distância (coordenada) entre as placas. O parâmetro  $b$  fixa a condição de contorno na segunda placa. Para  $b = 0$ , a mesma condição de Dirichlet é fixada na segunda placa, enquanto para  $b = 1$ , tem-se a condição de Neumann na segunda placa, que pode ser associada a um material dielétrico (ou reflexivo) para o campo eletromagnético. O segundo caso ( $b = 1$ ) é conhecido como condição de contorno mista (ou híbrida). Usando os resultados acima na eq (2.7) encontramos o espectro para as duas orientações (veja o Apêndice A),

$$\omega^2 = \left( g^{xx} k_x^2 + g^{zz} k_z^2 + g^{yy} k_y^2 - m^2 \right) \left[ \frac{(g^{tx})^2}{g^{xx}} - g^{tt} \right]^{-1} . \quad (2.12)$$

com  $k_{x,y}$  discreto ou contínuo de acordo com (2.10).

## 2.3 Normalização do Campo

Tendo a solução e as frequências próprias, passamos agora para o cálculo da normalização. Para isso, usaremos o produto de Klein-Gordon

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = i \int_{\Sigma} [(\partial_\mu \psi_m) \psi_n^* - \psi_m (\partial_\mu \psi_n^*)] \sqrt{-g_\Sigma} n^\mu d\Sigma . \quad (2.13)$$

O problema é como obter a superfície  $\Sigma$  a fim de evitar problemas de causalidade. Para isso, escolhemos  $\Sigma$  como sendo a superfície de Cauchy tipo espaço. Assim  $g_\Sigma$  é o determinante da métrica induzida em  $\Sigma$ , e  $n^\mu$  é um vetor unitário tipo tempo, ortogonal à  $\Sigma$  [25]. Usando a métrica inversa, conforme o Apêndice A, podemos escolher  $\Sigma = dx dy dz$ . Com isso nós achamos

$$n^\mu = \left( \sqrt{\frac{g_{xx}}{\tilde{g}}}, \frac{g_{tx}}{\sqrt{\tilde{g}g_{xx}}}, 0, 0 \right) . \quad (2.14)$$

Comparando a constante de normalização para ambas as orientações (verifique as eqs. (A.30) e (A.45)), podemos escrever esta constante de normalização em uma forma compacta como

$$|N|^2 = -\frac{g_{tt}\sqrt{-g_{tt}g_{xx}g_{yy}g_{zz}}}{g(2\pi)^2 L} \left[ \omega + \frac{g_{tt}g_{tx}}{\tilde{g}} G_\xi k_x \right]^{-1}, \quad (2.15)$$

onde

$$G_\xi = \begin{cases} 0, & \text{para orientação-}x \\ 1, & \text{para orientação-}y \end{cases}. \quad (2.16)$$

Encontramos a solução de campo e os parâmetros  $K$ ,  $\omega$ ,  $N$ , estão determinados. A principal consequência do nosso desenvolvimento vem da dependência do fator de normalização, eq. (2.15), com a orientação das placas. Na orientação  $x$ , os modos discretos do campo, que não contribuem para a normalização na eq. (2.13), são aqueles influenciados pela parte não diagonal da métrica. Portanto, a componente não diagonal da métrica não afeta a normalização e temos a dependência usual de  $1/\omega$ , como no caso da métrica diagonal (bem como no caso do espaço plano). No entanto, na orientação  $y$ , os modos contínuos do campo, que contribuem para a normalização, são influenciados pelo termo não diagonal na métrica. Portanto,  $N$  se torna dependente de  $g_{tx}$ , que, como veremos, também afeta a energia do vácuo e, consequentemente, a energia de Casimir. Sobre a dependência da normalização com respeito à orientação, é interessante notar que, no caso do aparelho Casimir no formato de uma caixa (ver, por exemplo, [9]), caso em que todos os modos do campo são discretos, a normalização do campo é insensível à orientação. Isso porque esses modos não contribuem para o produto de KG, independentemente do termo não diagonal na métrica.

Agora nosso objetivo é encontrar a energia de Casimir regularizada. Na próxima seção propomos o procedimento para calculá-la, usando algumas ferramentas matemáticas relacionadas à regularização da energia do vácuo.

## 2.4 Tensor de Energia-Momento e a Energia do Vácuo

A densidade de energia do sistema em consideração pode ser obtida a partir do tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . Este valor pode ser reescrito como um escalar de acordo com

$$\epsilon = w^\mu w^\nu T_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

onde  $w^\mu$  é a quadri-velocidade do observador próprio. Seguindo as expressões para o tensor de energia-momento para ambas as orientações, a eq. (A.61), podemos escrever a componente temporal do tensor de energia-momento numa notação unificada:

$$T_{tt} [\psi(\vec{k}), \psi^*(\vec{k})] = -g_{tt} N_n^2 \left\{ \sin^2(k_n \xi) [g^{zz} k_z^2 + g^{\alpha\alpha} k_\alpha^2 - m^2] + \frac{1}{2} g^{\xi\xi} k_n^2 \right\}, \quad (2.18)$$

onde  $k_\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\xi$  é a variável ao longo da orientação das placas

$$\begin{aligned} \text{orientação-}x : \xi &= x \in [0, L] , \quad \alpha = y , \\ \text{orientação-}y : \xi &= y \in [0, L] , \quad \alpha = x . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Estamos interessados em calcular a densidade de energia do vácuo. Desta forma, considerando um observador estático [18, 26],

$$w^\mu = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} \delta^{\mu t}, \quad g_{tt} > 0 ,$$

podemos escrever a eq. (2.17) como

$$\bar{\epsilon}_{vac} = \frac{1}{V_p} \int dx dy dz \sqrt{-g_\Sigma} \epsilon_{vac} , \quad (2.20)$$

onde  $V_p$  é o volume próprio da cavidade, medido pelo observador estático, e

$$\epsilon_{vac} = w^\mu w^\nu \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle = (g_{tt})^{-1} \sum_n \int dk_\alpha dk_z T_{tt} [\psi(\vec{k}), \psi^*(\vec{k})] . \quad (2.21)$$

Da eq. (2.20) e eq. (2.21) temos

$$\bar{\epsilon}_{vac} = \frac{1}{g_{tt}} \sum_n \int dk_\alpha dk_z \left\{ \frac{1}{V_p} \int d\Sigma \sqrt{-g_\Sigma} T_{tt} [\psi(\vec{k}), \psi^*(\vec{k})] \right\} . \quad (2.22)$$

Usando a eq. (2.18) na eq. (2.22) (verifique o Apêndice B para mais detalhes), podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_\Sigma T_{tt} \sqrt{-g_\Sigma} d\Sigma &= \\ &- g_{tt} |N|^2 \int_z \int_\alpha \int_\xi \left[ \sin^2(k_n \xi) \left( g^{zz} k_z^2 + g^{\alpha\alpha} k_\alpha^2 - m^2 \right) + \frac{g^{\xi\xi} k_n^2}{2} \right] \sqrt{-g_\Sigma} dz d\alpha d\xi , \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\frac{1}{V_p} \int d\Sigma \sqrt{-g_\Sigma} T_{tt} [\psi(\vec{k}), \psi^*(\vec{k})] = \frac{|N_n|^2 \omega_n^2}{2} . \quad (2.23)$$

Portanto, a energia do vácuo é dada por

$$\bar{\epsilon}_{vac} = \frac{1}{g_{tt}} \sum_n \int dk_\alpha dk_z \frac{|N_n|^2 \omega_n^2}{2} .$$

Substituindo a eq. (2.15) na equação acima, temos

$$\bar{\epsilon}_{vac} = -\frac{\sqrt{-g_{tt} g_{xx} g_{yy} g_{zz}}}{2g (2\pi)^2 L} \sum_n I_n , \quad (2.24)$$

onde

$$I_n = \int dk_\alpha dk_z \frac{\omega_n^2}{\omega_n + \frac{g_{tt} g_{tx}}{\tilde{g}} G k_\alpha} . \quad (2.25)$$

Vamos avaliar as quantidades  $I_n$ , onde  $\omega_n$  é dado na eq. (2.12). Fazendo as transformações de coordenadas

$$k_\alpha = \sqrt{-\frac{1}{g^{\alpha\alpha}}} k \cos \theta, \quad k_z = \sqrt{-g_{zz}} k \sin \theta, \quad (2.26)$$

(verifique o Apêndice B para mais detalhes) nós reescrevemos o espectro como

$$\omega_n^2 = g_{tt} \left[ k^2 - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2 \right]. \quad (2.27)$$

Então, procedemos ao cálculo da integral na eq. (2.25), que se tornam divergentes. Por esta razão, faz-se necessário introduzir um parâmetro regulador, tal que, usando a continuação analítica da função zeta de Hurwitz [3], tem-se a seguinte expressão regularizada para a energia de Casimir

$$\bar{\epsilon}_{vac}^{(\xi)} = \left( \frac{\tilde{g}}{g_{tt}g_{xx}} \right)^{(4G_\xi-1)/2} \left( 1 + 3G_\xi \frac{g_{tx}^2}{\tilde{g}} \right) \mathcal{E}_m, \quad (2.28)$$

onde,

$$\mathcal{E}_m = -\frac{m^2}{8\pi^2 L_p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{bn}}{n^2} K_2(2mL_p n). \quad (2.29)$$

Para a condição de contorno de Dirichlet ( $b = 0$ )  $\mathcal{E}_m$  é a conhecida energia de Casimir para um campo escalar massivo em um espaço-tempo plano, calculado usando métodos de *cutoff* ou regularização dimensional [27, 28]. Embora o resultado não seja surpreendente, não fomos capazes de encontrar este resultado na literatura para um campo escalar massivo com a condição de contorno mista ( $b = 1$ ).

A equação (2.28) é o nosso principal resultado. Esta expressão não é alterada por  $g_{yy} \leftrightarrow g_{zz}$ , indicando que uma reorientação das placas na direção  $z$  reproduz o mesmo resultado (com  $G_\xi \equiv G_y = 1$ ). Então, enquanto a orientação  $x$  não tem simetria de rotação, esperamos que a orientação  $y$  tenha uma simetria para rotações ao redor do eixo  $x$ . Embora a métrica considerada não possa ser diagonalizada globalmente, ela pode se tornar diagonal em algum ponto (ou região). Neste ponto específico, temos

$$g_{tx} = 0 \Rightarrow \frac{g_{tt}g_{xx}}{\tilde{g}} = 1 \Rightarrow \bar{\epsilon}_{vac}^{(\xi)} = \mathcal{E}_m, \quad (2.30)$$

para qualquer orientação. Se este ponto específico coincidir com a posição do aparelho (a origem), todas as correções induzidas pela gravidade desaparecem. Apresentaremos alguns exemplos concretos nas aplicações.

Por fim, destacamos o último termo entre parênteses em (2.28). Este termo pode causar uma mudança no sinal da energia Casimir, sem a inserção de um meio ou uma mudança na condição de contorno. Um efeito novo e inesperado. Esta mudança ocorre se

$$g_{tx}^2 < -G_\xi \frac{g_{tt}g_{xx}}{2}. \quad (2.31)$$

Para ver se que essa condição pode realmente ser atendida, nas próximas seções analisaremos algumas geometrias específicas.

Esta possível mudança de sinal na energia Casimir pode ser entendida em conexão com a dependência da normalização, eq. (2.15), em  $g_{tx}$  da seguinte forma. Na orientação  $y$ , a normalização do campo  $e$ , consequentemente, a energia do vácuo, é afetada pelo termo não diagonal na métrica. Neste caso, o equilíbrio de energia entre os modos contínuos e discretos dentro das placas podem ser modificados pelo espaço-tempo, mudando o sinal da energia de Casimir. Por outro lado, na direção  $x$ , a normalização não é afetada pelo termo não diagonal, e portanto, o equilíbrio de energia dentro do aparelho não pode ser alterado.

#### 2.4.1 O caso não massivo

Agora, vamos considerar o caso sem massa. As expressões para o campo escalar sem massa podem ser obtidas a partir do limite  $m \rightarrow 0$ . Para este objetivo, usamos o comportamento das funções de Bessel para pequenos argumentos [29]

$$z \rightarrow 0 \Rightarrow K_\nu(z) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}. \quad (2.32)$$

Isso implica que

$$\mathcal{E}_{m \rightarrow 0} \sim -\frac{1}{16\pi^2 L_p^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{bn}}{n^4} = -\left(-\frac{7}{8}\right)^b \frac{\pi^2}{1440L_p^4} \equiv \mathcal{E}. \quad (2.33)$$

Podemos reconhecer  $\mathcal{E}$  como a energia Casimir no espaço-tempo plano. Para  $b = 1$ , temos o fator  $(-7/8)$ , resultando um efeito repulsivo. Para o caso sem massa, esta mudança de sinal, resultante de uma condição de contorno mista, é um efeito bem conhecido [9].

A expressão (2.28) reproduz os resultados em [19] escolhendo a orientação  $x$  ( $G_\xi \equiv G_x = 0$ ) e fazendo  $m \rightarrow 0$ . Ao contrário do espaço-tempo plano, quando a condição (2.31) é satisfeita, temos uma força de Casimir repulsiva para a mesma condição de contorno em ambas as placas ( $b = 0$ ), e uma força atrativa para uma condição de contorno mista ( $b = 1$ ).



### 3 APLICAÇÕES

Neste capítulo, aplicamos nossos resultados em um espaço-tempo estacionário, mais especificamente em uma métrica que possui uma simetria cilíndrica, e também testamos nossos resultados no espaço-tempo de Kerr, onde recuperamos os resultados de [18] para a orientação  $x$ .

#### 3.1 Espaço-tempo Cilíndrico de Momento Linear Constante

Consideramos o espaço-tempo externo a uma distribuição de massa-energia com simetria cilíndrica. A distribuição está em um estado estacionário não rotativo de movimento ao longo do eixo de simetria  $\tilde{x}$ . Esse sistema pode ser descrito pela métrica [24]

$$ds^2 = r^{2q_-} \cos(2k \ln r) (dt^2 - d\tilde{x}^2) - dr^2 - 2r^{2q_-} \sin(2k \ln r) dt d\tilde{x} - r^{2q_+} d\theta^2 , \quad (3.1)$$

onde  $k$  é uma constante (não necessariamente positiva) relacionada com o momento da fonte e

$$q_{\pm} = \frac{1}{3} \left[ 1 \pm 2 \left( 1 + 3k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] . \quad (3.2)$$

Essa métrica é estacionária, mas pode ser estática quando  $k = 0$ . Para  $k \neq 0$  temos um exemplo de uma métrica que satisfaz a condição (2.4). Possíveis fontes físicas para esta métrica são discutidas em [24].

Queremos considerar as placas de Casimir se movendo ao longo da direção  $\tilde{x}$ , com  $r, \theta$  constantes e velocidade  $v = d\tilde{x}/dt$ . As placas têm uma quadri-velocidade

$$\tilde{w}^\mu = S(k, r, v) (1, v, 0, 0) , \quad (3.3)$$

onde

$$S^{-1}(k, r, v) = r^{q_-} \sqrt{(v^2 - 1) \cos(2k \ln r) + 2v \sin(2k \ln r)} . \quad (3.4)$$

As orientações consideradas são ilustradas na Fig. 1.

A fim de mudar para um referencial cartesiano, primeiro consideramos a transformação

$$x' = \tilde{x} - vt . \quad (3.5)$$

Em seguida, consideramos um referencial local cartesiano  $(x, y, z)$  nas placas e centralizado em uma delas. Nestas condições as placas são estáticas, ou seja

$$w^\mu = S(k, r, v) (1, 0, 0, 0) . \quad (3.6)$$

Ademais, para

$$v = v_d \equiv -\tan(2k \ln r) , \quad (3.7)$$

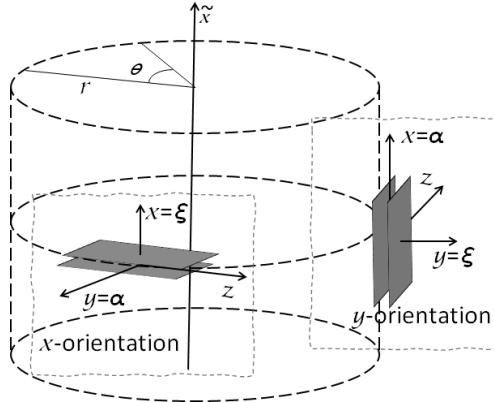


Figura 1 – Orientações das placas de Casimir para o espaço-tempo cilíndrico.

a velocidade  $\vec{w} = 0$  é estática nas coordenadas em que a métrica localmente assume a forma diagonal  $g_{tx} = 0$ , o que corresponde a um observador (ou aparelho) com momento linear zero. Este observador com momento linear zero, e com velocidade diferente de zero em relação à métrica original (3.1), representa uma forma de “arrasto do referencial”, como aquele associado com o espaço-tempo das fontes dotadas de rotação. Em outras palavras, usando os elementos da métrica original (3.1),

$$v_d = -\frac{g_{t\tilde{x}}}{g_{\tilde{x}\tilde{x}}} \quad (3.8)$$

é a velocidade linear de arrasto. Como apontado em [24, 30], para um  $\theta$  fixo, os vetores de Killing  $\partial_t$  e  $\partial_x$  podem intercambiar sua característica espacial/temporal. No entanto, é possível definir uma orientação do tempo em cada ponto do espaço-tempo (exceto  $r = 0$ ). Uma vez que consideramos um  $r$  fixo, esta orientação do tempo não muda. Então, para preservar a orientação do tempo, ou seja  $g_{tt} > 0$ , devemos definir

$$v_- < v < v_+ , \quad v_{\pm} = v_d \pm \sqrt{v_d^2 + 1} . \quad (3.9)$$

$v_{\pm}$  representa os valores limites das velocidades do aparelho, aos quais nos referimos como casos ultrarelativísticos.

Substituindo as componentes da métrica (3.1) na eq (2.28) e escolhendo a orientação  $x$  para o aparelho ( $G_{\xi} = 0$ ), temos

$$\bar{\epsilon}_{vac}^{(x)} = \sqrt{1 - \frac{(v - v_d)^2}{v_d^2 + 1}} \mathcal{E}_m . \quad (3.10)$$

Enquanto para a orientação  $y$ ,

$$\bar{\epsilon}_{vac}^{(y)} = \frac{v_d^2 + 1 - 3(v - v_d)^2}{[(v_d^2 + 1) - (v - v_d)^2]^{\frac{3}{2}}} \sqrt{v_d^2 + 1} \mathcal{E}_m . \quad (3.11)$$

Os valores coincidem para o momento linear zero

$$v = v_d \Rightarrow \bar{\epsilon}_{vac}^{(y)} = \bar{\epsilon}_{vac}^{(x)} = \mathcal{E}_m . \quad (3.12)$$

Entretanto, eles se comportam de maneira completamente diferente para outras velocidades. Em particular, nos regimes ultrarelativísticos,  $v \rightarrow v_{\pm}$ , temos,

$$v \rightarrow v_{\pm} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\epsilon}_{vac}^{(x)} \rightarrow 0 \\ \bar{\epsilon}_{vac}^{(y)} \rightarrow (\pm) \infty \end{cases} , \quad (3.13)$$

com os sinais  $(\pm)$  como sendo para as condições Dirichlet e Neumann, respectivamente.

Enquanto na orientação  $x$  a energia de Casimir vai para zero, na orientação  $y$  essa energia diverge. Lembrando que, como no caso em Minkowski, a energia  $\mathcal{E}_m$  decai com o aumento da massa, na orientação  $y$  um campo escalar muito massivo ainda pode produzir uma força de Casimir. Além disso, na orientação  $y$ , a energia, não apenas diverge, mas com um sinal oposto a  $\mathcal{E}_m$ . Então, sem mudar a condição de contorno, podemos mudar a força de Casimir de atrativa para repulsiva. Ou seja, a energia de Casimir assume a intensidade usual, mas com sinal oposto quando

$$v = \hat{v}_{\pm} = v_d \pm \sqrt{(2\sqrt{3} - 3)(v_d^2 + 1)} \implies \bar{\epsilon}_{vac}^{(y)} = -\mathcal{E}_m . \quad (3.14)$$

A energia se anula para a velocidade

$$v = v_{0\pm} = v_d \pm \sqrt{\frac{v_d^2 + 1}{3}} \implies \bar{\epsilon}_{vac}^{(y)} = 0 , \quad (3.15)$$

sendo atrativa em  $v_{0-} < v < v_{0+}$  e repulsiva fora deste intervalo. É importante notar que todos os valores de  $\hat{v}_{\pm}$  e  $v_{0\pm}$  estão na faixa (3.9). Isto significa que o efeito da mudança no sinal de força de Casimir não pode ser associado com qualquer defeito causal na trajetória, ou outro processo relativístico proibido.

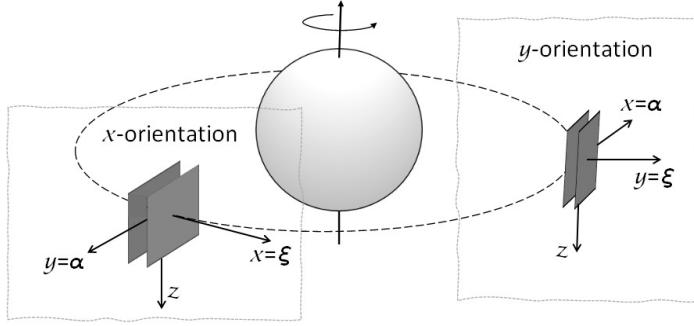


Figura 2 – Orientação das placas de Casimir para a métrica de Kerr.

### 3.2 Aplicação para a Métrica de Kerr

Como um segundo exemplo, agora aplicamos nosso resultado à geometria de Kerr, um caso com aplicações mais diretas em problemas de física. Neste caso, as orientações consideradas são ilustradas na Fig 2. Seguindo [18], iniciamos com a métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 + 2\frac{A}{\Sigma}\omega_d \sin^2 \theta dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\varphi^2 , \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, & \Delta &= r^2 + a^2 - 2Mr , \\ A &= (r^2 + a^2) \Sigma + 2Mra^2 \sin^2 \theta , \end{aligned} \quad (3.17)$$

$a = J/M$  é o momento angular por unidade de massa, e

$$\omega_d = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{2Mar}{A} , \quad (3.18)$$

é a velocidade de arrasto do espaço-tempo. Temos interesse em órbitas circulares equatoriais, então, como no caso anterior, consideramos um observador que se movimenta com as placas, através da transformação

$$\varphi' = \varphi - \Omega t , \quad (3.19)$$

onde  $\Omega$  é a velocidade do aparelho de Casimir. Com a transformação (3.19) a métrica de Kerr (3.16) torna-se

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\varphi'^2 - 2(\Omega - \omega_d) \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta dt d\varphi' , \quad (3.20)$$

onde

$$g_{tt} = 1 - \frac{2A}{\Sigma} \left[ \frac{Mr}{A} - \Omega \left( \omega_d - \frac{\Omega}{2} \right) \sin^2 \theta \right] . \quad (3.21)$$

Para as placas se movendo em uma órbita equatorial ( $\theta = \pi/2$ , não necessariamente geodésica), podemos escrever

$$g_{tt} = \frac{\Delta \Sigma}{A} \left[ 1 - \frac{A^2}{\Delta \Sigma^2} (\Omega - \omega_d)^2 \right] . \quad (3.22)$$

Os observadores permitidos exigem  $g_{tt} > 0$ , portanto

$$\Omega_- < \Omega < \Omega_+ , \quad \Omega_{\pm} = \omega_d \pm \frac{\Sigma \sqrt{\Delta}}{A} . \quad (3.23)$$

Agora consideramos o referencial local cartesiano  $(x, y, z)$  anexado ao aparelho de Casimir e centrado em uma das placas,

$$dx = rd\varphi' , \quad dy = dr , \quad dz = rd\theta . \quad (3.24)$$

Como resultado, a métrica (3.20) se converte em

$$g_{tx} = -\frac{A}{r^3} (\Omega - \omega_d) , \quad g_{xx} = -\frac{A}{r^4} , \quad g_{yy} = -\frac{r^2}{\Delta} , \quad g_{zz} = -1 . \quad (3.25)$$

Substituindo as componentes acima da métrica em (2.28), e escolhendo a orientação- $x$  ( $G_x = 0$ ),

$$\bar{\epsilon}_{vac}^{(x)} = R(r; \Omega, M, a) \mathcal{E}_m , \quad (3.26)$$

onde

$$R(r; \Omega, M, a) = \sqrt{\frac{g_{tt} g_{xx}}{\tilde{g}}} = \left[ 1 - \frac{A^2}{r^4 \Delta} (\Omega - \omega_d)^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (3.27)$$

Esse é o resultado obtido em [18] para o caso sem massa, ou seja,  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}$  com  $\mathcal{E}$  em (2.33), onde se pode encontrar a análise de  $R$  para vários intervalos dos parâmetros.

Para a orientação- $y$  temos

$$\bar{\epsilon}_{vac}^{(y)} = \frac{3}{R} \left( 1 - \frac{2}{3R} \right) \mathcal{E}_m , \quad (3.28)$$

onde foi usado (2.6). Observe que, para  $\Omega = \omega_d$ , chamado de observador de momento angular zero (ZAMO),  $g_{tx} = 0$  e

$$\Omega = \omega_d \Rightarrow \bar{\epsilon}_{vac}^{(y)} = \bar{\epsilon}_{vac}^{(x)} = \mathcal{E}_m . \quad (3.29)$$

Assim (como apontado em [18] para a orientação  $x$ ), neste caso, a simetria do espaço-tempo é restaurada para todas as orientações. No entanto, fora da configuração ZAMO, o comportamento do aparelho Casimir depende fortemente da orientação,

$$\frac{\bar{\epsilon}_{vac}^{(y)}}{\bar{\epsilon}_{vac}^{(x)}} = 1 - g(\delta) [1 + 2g(\delta)] , \quad \delta = |\Omega - \omega_d| \in \left[ 0, \frac{r^2}{A} \sqrt{\Delta} \right] , \quad (3.30)$$

onde

$$g(\delta) = -\frac{g_{tx}^2}{g_{tt} g_{xx}} = \frac{(A\delta)^2}{\Delta r^4 - (A\delta)^2} \in [0, \infty) . \quad (3.31)$$

A partir das expressões acima, vemos que  $\bar{\epsilon}_{vac}^{(y)} \geq \bar{\epsilon}_{vac}^{(x)}$ . Esta diferença na energia pode resultar em uma tendência do aparelho em assumir a configuração de energia mais baixa, isto é, a orientação  $x$ , ou um torque que gera uma precessão em torno do eixo  $x$ .

Como um caso especial, podemos considerar o regime de campo fraco, ou seja, vamos manter os termos de primeira ordem nas quantidades  $M/r$  e  $a/r$  para comparar com o limite Newtoniano. Neste caso, podemos escrever

$$R = 1 - x + O(x^2) \Rightarrow R^{-1} \simeq 1 + x , \quad (3.32)$$

que resulta

$$\frac{\bar{\epsilon}_{vac}^{(y)}}{\mathcal{E}_m} \simeq 1 - 3x , \quad (3.33)$$

o que mostra que, no regime de campo fraco, a correção na orientação  $y$  é três vezes maior do que na orientação  $x$ . Para o exemplo de um dispositivo Casimir orbitando o equador de uma estrela de nêutrons girando, considerando  $M \simeq 1.4M_\odot$ ,  $r \simeq 10^4$  m e  $\Omega \simeq 190$  rad / s, a referência [18] determina  $x = 2.3 \times 10^{-5}$ .

Como no exemplo anterior, no regime ultrarelativístico temos,

$$\Omega \rightarrow \Omega_\pm \Rightarrow \begin{cases} \bar{\epsilon}_{vac}^{(x)} \rightarrow 0 \\ \bar{\epsilon}_{vac}^{(y)} \rightarrow (\pm) \infty \end{cases} , \quad (3.34)$$

com  $(\pm)$  os sinais para as condições do tipo Dirichlet e Neumann, respectivamente. Novamente, no caso da orientação  $x$  a energia de Casimir vai para zero, o mesmo acontece para a geometria de Schwarzschild quando o movimento orbital da cavidade se aproxima da órbita de geodésica nula em  $r = 3M$  [18]. Mas, na orientação  $y$ , a energia diverge para um valor com um sinal oposto à  $\mathcal{E}_m$ . A força Casimir (energia) se anula na velocidade angular

$$\Omega = \Omega_{0\pm} = \omega_d \pm \sqrt{\frac{\Delta}{3} \frac{r^2}{A}} \implies \bar{\epsilon}_{vac}^{(y)} = 0 . \quad (3.35)$$

As trajetórias para as velocidades  $\Omega_{0\pm}$  (3.35) são mostradas na Fig. 3. Neste gráfico  $\Omega_\pm$  corresponde às velocidades (3.23), quando a energia tende à zero para a orientação  $x$ . Na orientação  $x$ , a energia é sempre negativa. Na orientação  $y$  a energia é negativa na região cinza escuro e positiva na região cinza clara. A energia de ambas as orientações coincide na trajetória ZAMO  $\omega_d$ . Este gráfico mostra também as trajetórias geodésicas. Temos trajetórias geodésicas onde a força de Casimir é atrativa, repulsiva ou nula, na orientação  $y$ .

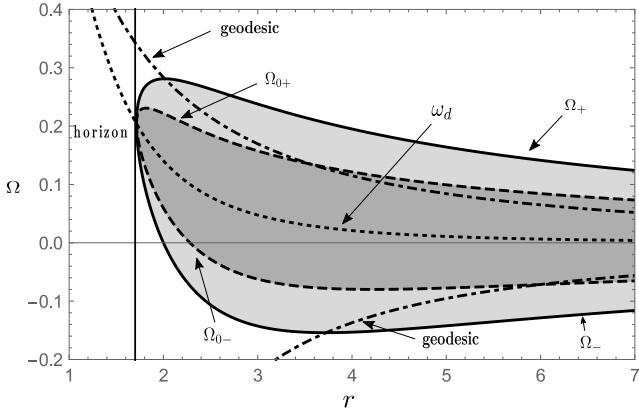


Figura 3 – Gráfico de  $\Omega$  com respeito à  $r$  para  $M = 1$  e  $a = 0.7$ . A linha sólida  $\Omega_{\pm}$  representa os casos ultra-relativísticos, onde a energia Casimir desaparece na orientação  $x$ . As linhas tracejadas  $\Omega_{0\pm}$  são as trajetórias onde a energia Casimir desaparece na orientação  $y$ . A linha pontilhada  $\omega_d$  é a trajetória ZAMO e as linhas traço-ponto as geodésicas. Na orientação  $y$  a energia é negativa na região cinza escura e positiva na região cinza clara. As regiões cinza representam todas as trajetórias admissíveis.

### 3.3 Discussão

Estudamos o efeito Casimir em espaços-tempos axissimétricos estacionários, considerando duas orientações das placas em relação ao arrasto do espaço-tempo. Mostramos que os modos contínuos do campo, que contribuem para a normalização do campo e, consequentemente, para a energia Casimir, pode mudar o sinal da energia de Casimir quando as placas estiverem perpendiculares a direção de arrasto do espaço-tempo. Nossa trabalho reproduz resultados anteriores para o campo escalar sem massa em uma orientação específica e prevê novos efeitos para um campo escalar massivo. Em especial, mostramos que a geometria do espaço-tempo representa um novo mecanismo para mudar o sinal da energia Casimir, mesmo na ausência de acoplamento gravitacional entre os campos escalar e gravitacional e condições de contorno mistas.

Para a geometria de Kerr, mostramos que a energia de Casimir para orientação  $y$  é maior do que a energia para orientação  $x$ , para todas as trajetórias circulares admissíveis, incluindo as geodésicas. Pode-se esperar que esta diferença resulte em uma tendência do aparelho em assumir a orientação mais baixa de energia e se alinhar na direção tangencial com respeito ao objeto em rotação, o que pode ser entendido como uma bússola quântica para o arrasto do espaço-tempo. Além disso, na existência de um torque, isso implica em uma precessão nessa direção, de forma semelhante ao que ocorre no efeito Lense-Thirring. A determinação efetiva desta nova precessão requer a análise da variação contínua da orientação, um trabalho em progresso.

Embora a verificação gravitacional desses efeitos exija configurações envolvendo

órbitas em torno de objetos muito massivos e em rotação rápida (como estrelas de nêutrons), talvez esta verificação possa ser explorada usando algum análogo hidrodinâmico de um buraco negro em rotação, como feito em [31] para estudar os modos quasinormais de tais objetos.

## REFERÊNCIAS

- [1] H. B. G. Casimir. *On the attraction between two perfectly conducting plates.* Kon.Ned.Akad.Wetensch.Proc. 100N3-4 (1997) 61-63.
- [2] E. Elizalde. *et al.* *Expressions for the zeta-function regularized Casimir energy.* J. Math. Phys. 30 (5), (1989).
- [3] E. Elizalde. *et al.*, *Zeta Regularization Techniques with Applications.* World Scientific Publishing Company, 1994.
- [4] E. Elizalde, *Ten physical applications of spectral zeta functions*, Vol. 855, 2012.
- [5] S. Lamoreaux *Demonstration of the Casimir Force in the 06 to 06 $\mu$ m Range.* Phys. Rev **78** (1997).
- [6] G. C. G. Bressi, *Measurement of the casimir force between parallel metallic surfaces*, Phys. Rev. Lett 88 (2002) 041804.
- [7] Z. M. J. Zou, Casimir forces on a silicon micromechanical chip, Nature Communications 4 (2013) 1845.
- [8] Q. D. Jiang and F. Wilczek, *Chiral Casimir forces: Repulsive, enhanced, tunable*, Phys. Rev. B **99**, 125403 (2019).
- [9] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect* (Oxford University Press, 2008).
- [10] E. M. Lifshitz, *The Theory of Molecular Attractive Forces between Solids*, Soviet Physics JETP **2**, 73 (1956).
- [11] I. E. Dzyaloshinskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *The general theory of van der Waals forces*, Advan. Phys. **10**, 165 (1961).
- [12] J. N. Munday, F. Capasso, and V. A. Parsegian, *Measured long-range repulsive Casimir-Lifshitz forces*, Nature **457**, 170 (2009).
- [13] O. Kenneth and I. Klich, *Opposites Attract: A Theorem about the Casimir Force*, Phys. Rev. Lett. **97**, 160401 (2006).
- [14] E. Elizalde, A. A. Saharian, and T. A. Vardanyan, *Casimir effect for parallel plates in de Sitter spacetime*, Phys. Rev. D **81**, 124003 (2010).
- [15] I. Brevik, K. A. Milton, S. D. Odintsov, and K. E. Osetrin, *Dynamical Casimir effect and quantum cosmology*, Phys. Rev. D **62**, 064005 (2000).

- [16] K. A. Milton, S. A. Fulling, P. Parashar, A. Romeo, K. V. Shajesh, and J. Wagner, *Gravitational and inertial mass of Casimir energy*, J. Phys. A **41**, 164052 (2008).
- [17] S. A. Fulling, K. A. Milton, P. Parashar, A. Romeo, K. V. Shajesh, and J. Wagner, *How does Casimir energy fall?*, Phys. Rev. D **76**, 025004 (2007).
- [18] F. Sorge. *Casimir energy in Kerr space-time*. Phys Rev D 90 (2014).
- [19] Zhang, Anwei, Theoretical analysis of Casimir and thermal Casimir effect in stationary space-time, Physics Letters B, 773 (2017) 125.
- [20] N. D. Birrell. P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press 1982.
- [21] A. Sloane, *The Axially Symmetric Stationary Vacuum Field Equations in Einstein's Theory of General Relativity*, Aust. J. Phys. **31**, 427 (1978).
- [22] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, 1983).
- [23] F. Canfora and H.-J. Schmidt, *Vacuum solutions which cannot be written in diagonal form*, Gen. Rel. Grav. **35**, 2117 (2003).
- [24] R. J. Gleiser and M. H. Tiglio, *Exotic spacetimes, superconducting strings with linear momentum, and (not quite) all that*, Phys. Rev. D **61**, 104006 (2000).
- [25] S. Hawking. G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press 1973.
- [26] V. B. Bezerra, H. F. Mota, and C. R. Muniz, *Casimir effect due to a slowly rotating source in the weak-field approximation*, Phys Rev D 89, 044015 (2014).
- [27] G. Plunien, B. Muller, and W. Greiner, *The Casimir effect*, Phys. Rep. **134**, 89 (1986).
- [28] J. Ambjorn and S. Wolfram, *Properties of the vacuum. I. Mechanical and thermodynamic*, Ann. Phys. **147**, 1 (1983).
- [29] M. Abramowitz. And A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards 1972.
- [30] M. J. Thatcher and M. J. Morgan, Phys. Rev. D **58**, 043505 (1998).
- [31] S. Patrick, A. Coutant, M. Richartz, and S. Weinfurtner, Phys. Rev. Lett. **121**, 061101 (2018).

- [32] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. Table of Integrals, Series, and Products. Seventh Edition, Elsevier, (2007).
- [33] E. Elizalde and A. Romeo, *Expressions for the zeta function regularized Casimir energy*, J. Math. Phys. **30**, 1133 (1989).



## Apêndices



## APÊNDICE A – OPERADOR DE KLEIN-GORDON E O ESPECTRO

A métrica axysimétrica que usamos tem a forma

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tx}dtdx + g_{xx}dx^2 + g_{yy}dy^2 + g_{zz}dz^2, \quad (\text{A.1})$$

com tensor métrico dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{tt} & g_{tx} & 0 & 0 \\ g_{tx} & g_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{zz} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Para calcular o determinante, usamos o método do bloco diagonal  $2 \times 2$ , e consideramos as matrizes

$$\tilde{g}_{ab} = \begin{bmatrix} g_{tt} & g_{tx} \\ g_{tx} & g_{xx} \end{bmatrix} \quad \det(\tilde{g}_{ab}) \equiv \tilde{g} = g_{tt}g_{xx} - g_{tx}^2 \quad (\text{A.3})$$

e

$$g'_{cd} = \begin{bmatrix} g_{yy} & 0 \\ 0 & g_{zz} \end{bmatrix} \quad \det(g'_{cd}) \equiv g' = g_{yy}g_{zz}, \quad (\text{A.4})$$

com determinante

$$g = \tilde{g}g' = g_{yy}g_{zz}\tilde{g}.$$

Com isto, a métrica assume a forma

$$\tilde{g}^{ab} = \begin{bmatrix} g_{tt} & g_{tx} \\ g_{tx} & g_{xx} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{g_{xx}}{\tilde{g}} & -\frac{g_{tx}}{\tilde{g}} \\ -\frac{g_{tx}}{\tilde{g}} & \frac{g_{tt}}{\tilde{g}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

e

$$g'^{cd} = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{yy}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_{zz}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Assim, a métrica inversa vale

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{g_{xx}}{\tilde{g}} & -\frac{g_{tx}}{\tilde{g}} & 0 & 0 \\ -\frac{g_{tx}}{\tilde{g}} & \frac{g_{tt}}{\tilde{g}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g_{zz}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Para determinar o operador de KG

$$\hat{D} = g^{tt}\partial_t^2 + 2g^{tx}\partial_t\partial_x + g^{xx}\partial_x^2 + g^{yy}\partial_y^2 + g^{zz}\partial_z^2 + m^2, \quad (\text{A.8})$$

com o campo escrito da forma

$$\psi = e^{-i\omega_n t} e^{ik_z z} \exp(iK\omega_n x) f(x) g(y) , \quad (\text{A.9})$$

primeiro calculamos as derivadas

$$\begin{aligned} \partial_t \psi &= (-i\omega_n) \psi , \quad \partial_t^2 \psi = -\omega_n^2 \psi , \quad \partial_z^2 \psi = -k_z^2 \psi , \\ \partial_y \psi &= \psi (\partial_y \ln g) , \quad \partial_y^2 \psi = \psi \left[ (d_y \ln g)^2 + (d_y^2 \ln g) \right] , \\ \partial_x \psi &= \psi [(iK\omega_n) + d_x \ln f] , \\ \partial_x^2 \psi &= \psi \left\{ -K^2 \omega_n^2 + 2i\omega_n K d_x \ln f + (d_x \ln f)^2 + d_x^2 \ln f \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Usando estas derivadas acima, a eq (A.8) torna se

$$\begin{aligned} \psi \left\{ -g^{tt} \omega_n^2 - 2i\omega_n d_x \ln f g^{xx} \left( \frac{g^{tx}}{g^{xx}} - K \right) + 2g^{tx} K \omega_n^2 + g^{xx} \left[ -K^2 \omega_n^2 + (d_x \ln f)^2 + d_x^2 \ln f \right] \right\} \\ + g^{yy} \partial_y^2 \psi - g^{zz} k_z^2 \psi + m^2 \psi = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A ideia é eliminar o termo linear em  $\omega$ , para isso, podemos fazer

$$K = \frac{g^{tx}}{g^{xx}} = -\frac{g_{tx}}{g_{tt}} , \quad (\text{A.12})$$

Para as duas orientações das placas, (ou seja, se  $g(y) = \sin(k_y y)$  ou  $g = \exp(ik_y y)$ ) nós temos

$$d_y^2 g = -k_y^2 g \Rightarrow -k_y^2 \psi. \quad (\text{A.13})$$

## A.1 A Métrica inversa e o Vetor Unitário para $\Sigma$

A partir do comprimento de arco, Eq. (A.1), podemos calcular o elemento de linha inversa (métrica inversa)

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} = \frac{g_{xx}}{\tilde{g}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2g_{tx}}{\tilde{g}} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + \frac{g_{tt}}{\tilde{g}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{g_{yy}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{g_{zz}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (\text{A.14})$$

O vetor ortonormal para a superfície  $\Sigma$  pode ser construído como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} &= \frac{1}{\tilde{g}} \left[ \left( \sqrt{g_{xx}} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{g_{tx}}{\sqrt{g_{xx}}} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{(g_{tx})^2}{g_{xx}} - g_{tt} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{g_{yy}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{g_{zz}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A partir desta expressão, se escolhermos  $d\Sigma = dx dy dz$ , encontramos

$$n^\mu = \left( \sqrt{\frac{g_{xx}}{\tilde{g}}}, \frac{g_{tx}}{\sqrt{\tilde{g}g_{xx}}}, 0, 0 \right) , \quad g_\Sigma = \frac{g}{g_{tt}} . \quad (\text{A.16})$$

Este é um vetor tipo tempo. Então

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu &= g_{tt}n^0n^0 + g_{xx}n^1n^1 + 2g_{tx}n^0n^1 \\ &= \frac{|g_{xx}|}{|\tilde{g}|}g_{tt} + g_{xx}g_{tx}^2 \frac{1}{|\tilde{g}||g_{xx}|} + \frac{1}{|\tilde{g}|}2g_{tx}^2, \end{aligned}$$

onde

$$|g_{xx}| = -g_{xx}, \quad |\tilde{g}| = -\tilde{g}.$$

Usando o resultado acima em (2.13), juntamente com a solução de campo,

$$\psi_m = N_m e^{-i\omega_m t} e^{ik_{zm} z} \exp \left\{ -i \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_m - k_{xm} \right) x \right\} \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( m + \frac{b}{2} \right) y \right], \quad (\text{A.17})$$

para a orientação  $y$ . Para o caso  $b = 0$  vale a condição de Dirichlet na segunda placa, entretanto para  $b = 1$  vale a condição de Neumann.

$$\begin{aligned} \langle \psi_m, \psi_n \rangle &= i \int_{\Sigma} [(\partial_{\mu} \psi_m) \psi_n^* - \psi_m \partial_{\mu} \psi_n^*] \sqrt{g_{\Sigma}} n^{\mu} d\Sigma \\ &= i \sqrt{g_{\Sigma}} n^0 \int_{\Sigma} [(-i\omega_m \psi_m) \psi_n^* - \psi_m (i\omega_n \psi_n^*)] dx dy dz \\ &+ i \sqrt{g_{\Sigma}} n^1 \int_{\Sigma} \left\{ \left[ -i \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_m - k_{xm} \right) \psi_m \right] \psi_n^* - \psi_m \left[ i \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n - k_{xn} \right) \psi_n^* \right] \right\} dx dy dz. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

(A.19)

Considere

$$I_0 = \sqrt{g_{\Sigma}} n^0 (\omega_m + \omega_n) \int dx dy dz \psi_m \psi_n^*, \quad (\text{A.20})$$

com isso,

$$\begin{aligned} \int dx dy dz \psi_m \psi_n^* &= N_n N_m \underbrace{\int dz e^{i(k_{zm} - k_{zn})z}}_{2\pi \delta(k_{zm} - k_{zn})} \underbrace{\int dy \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( m + \frac{b}{2} \right) y \right] \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( n + \frac{b}{2} \right) y \right]}_{\frac{L}{2} \delta_{mn}} \\ &\times \int dx \exp \left\{ i \left[ \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n - k_{xn} \right) - \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_m - k_{xm} \right) \right] x \right\} \\ &= N_m N_n (2\pi)^2 \frac{L}{2} \delta_{mn} \delta(k_{zm} - k_{zn}) \delta \left\{ \left[ \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n - k_{xn} \right) - \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_m - k_{xm} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

portanto  $I_0$  vale

$$\begin{aligned} I_0 &= \sqrt{g_{\Sigma}} n^0 (\omega_m + \omega_n) (2\pi)^2 \frac{L}{2} N_m N_n \\ &\times \delta_{mn} \delta(k_{zm} - k_{zn}) \delta \left\{ \left[ \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n - k_{xn} \right) - \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_m - k_{xm} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

e

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{g_{\Sigma}} n^1 \left\{ \left[ \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_m - k_{xm} \right) + \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n - k_{xn} \right) \right] \right\} (2\pi)^2 \frac{L}{2} N_m N_n \\ &\times \delta_{mn} \delta(k_{zm} - k_{zn}) \delta \left\{ \left[ \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n - k_{xn} \right) - \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_m - k_{xm} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Podemos escrever  $I_1$  como

$$I_1 = \sqrt{g_\Sigma} n^1 \left\{ \left[ \frac{g_{tx}}{g_{tt}} (\omega_m + \omega_n) - (k_{xm} + k_{xn}) \right] \right\} (2\pi)^2 \frac{L}{2} N_m N_n \\ \times \delta_{mn} \delta(k_{zm} - k_{zn}) \delta \left\{ \left[ \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n - k_{xn} \right) - \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_m - k_{xm} \right) \right] \right\}. \quad (\text{A.24})$$

Com isso, das contribuições de  $I_0$  e  $I_1$  segue que

$$N_n^2 \sqrt{g_\Sigma} (2\pi)^2 \frac{L}{2} \left[ 2\omega_n n^0 + 2n^1 \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n - k_x \right) \right] = 1, \quad (\text{A.25})$$

consequentemente

$$N_n^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 L \sqrt{g_\Sigma} \left[ n^0 \omega_n + \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n - k_x \right) n^1 \right]}. \quad (\text{A.26})$$

Consideremos

$$\omega_n \left( n^0 + \frac{g_{tx}}{g_{tt}} n^1 \right), \quad (\text{A.27})$$

onde

$$n^0 + \frac{g_{tx}}{g_{tt}} n^1 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \left( \sqrt{g_{xx}} + \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \frac{g_{tx}}{\sqrt{g_{xx}}} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \left( \frac{g_{tt} |g_{xx}| + g_{tx}^2}{g_{tt} \sqrt{g_{xx}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \left( \frac{-g_{tt} g_{xx} + g_{tx}^2}{g_{tt} \sqrt{g_{xx}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \left( \frac{-\tilde{g}}{g_{tt} \sqrt{g_{xx}}} \right) = -\frac{\sqrt{\tilde{g}}}{g_{tt} \sqrt{g_{xx}}}, \quad (\text{A.28})$$

portanto

$$N_n^2 = \frac{1}{-(2\pi)^2 L \sqrt{g_\Sigma} \left[ \omega_n \frac{\sqrt{\tilde{g}}}{g_{tt} \sqrt{g_{xx}}} + \frac{g_{tx}}{\sqrt{\tilde{g}} g_{xx}} k_x \right]} = \frac{g_{tt} \sqrt{\tilde{g}} g_{xx}}{-(2\pi)^2 L \sqrt{g_\Sigma} [\omega_n \tilde{g} + g_{tx} g_{tt} k_x]} \quad (\text{A.29})$$

ou

$$N_n^2 = -\frac{g_{tt} \sqrt{g_{tt} g_{xx} g_{yy} g_{zz}}}{g (2\pi)^2 L \left[ \omega_n + \frac{g_{tx} g_{tt}}{\tilde{g}} k_x \right]} = -\frac{g_{tt} \sqrt{-g_{tt} g_{xx} g_{yy} g_{zz}}}{g (2\pi)^2 L \left[ \omega_n + \frac{g_{tx} g_{tt}}{\tilde{g}} k_x \right]}. \quad (\text{A.30})$$

Procedemos agora o cálculo da constante de normalização para a orientação- $x$ , seguimos (2.10), neste caso podemos escrever a solução de campo como

$$\psi_m = e^{-i\omega_m t} e^{ik_{zm} z} e^{ik_{ym} y} e^{-i\frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_m x} \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( m + \frac{b}{2} \right) x \right]. \quad (\text{A.31})$$

Usando o produto Klein-Gordon (A.18), podemos definir

$$I_2 = \sqrt{g_\Sigma} n^0 (\omega_m + \omega_n) \int dx dy dz \psi_m \psi_n^*, \quad (\text{A.32})$$

com

$$\int dx dy dz \psi_m \psi_n^* = \int dz e^{i(k_{zm} - k_{zn}) z} \int dy e^{i(k_{ym} - k_{yn}) y} \\ \times \int dx e^{i\frac{g_{tx}}{g_{tt}} (\omega_n - \omega_m) x} \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( m + \frac{b}{2} \right) x \right] \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( n + \frac{b}{2} \right) x \right] \\ = (2\pi)^2 \delta(k_{zm} - k_{zn}) \delta(k_{ym} - k_{yn}) \int dx e^{i\beta_{nm} x} \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( m + \frac{b}{2} \right) x \right] \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( n + \frac{b}{2} \right) x \right] \\ \beta_{nm} = \frac{g_{tx}}{g_{tt}} (\omega_n - \omega_m) \quad (\text{A.33})$$

e

$$I = \int dx e^{i\beta_{nm}x} \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( m + \frac{b}{2} \right) x \right] \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( n + \frac{b}{2} \right) x \right] = \frac{L^2}{2} (i\beta_{nm}) \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{1}{L^2 \beta_{nm}^2 - (m-n)^2 \pi^2} + \frac{1}{(b+m+n)^2 \pi^2 - L^2 \beta_{nm}^2} \right. \\ & \left. - e^{iL\beta_{nm}} \left( \frac{(-1)^{m-n}}{L^2 \beta_{nm}^2 - (m-n)^2 \pi^2} + \frac{(b+m+n)(-1)^{m+n}}{(b+m+n)^2 \pi^2 - L^2 \beta_{nm}^2} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Pela condição de ortogonalidade  $m = n$  então  $\beta_{nm} \rightarrow 0$ , portanto, calculamos

$$\lim_{\beta_{nm} \rightarrow 0} I = \frac{L^2}{2} \lim_{\beta_{nm} \rightarrow 0} \left[ i\beta_{nm} \frac{1}{L^2 \beta_{nm}^2} - i\beta_{nm} \frac{e^{iL\beta_{nm}}}{L^2 \beta_{nm}^2} \right] = \frac{L}{2} . \quad (\text{A.36})$$

Assim, sem perda de generalidades, podemos escrever

$$I_2 = \sqrt{g_\Sigma} n^0 \omega_n (2\pi)^2 L N_n^2 . \quad (\text{A.37})$$

Para

$$I_3 = i\sqrt{g_\Sigma} n^1 \int [(\partial_1 \psi_m) \psi_n^* - \psi_m (\partial_1 \psi_n^*)] dx dy dz \quad (\text{A.38})$$

a integral

$$\begin{aligned} \int dx dy dz (\partial_1 \psi_m) \psi_n^* &= (2\pi)^2 N_n N_m \delta(k_{ym} - k_{yn}) \delta(k_{zm} - k_{zn}) \\ & \times \left\{ \left( -i \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_m \right) \int_0^L dx e^{i\beta_{nm}x} \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( m + \frac{b}{2} \right) x \right] \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( n + \frac{b}{2} \right) x \right] \right. \\ & \left. + \frac{m\pi}{L} \int_0^L dx e^{i\beta_{nm}x} \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( n + \frac{b}{2} \right) x \right] \cos \left[ \frac{\pi}{L} \left( m + \frac{b}{2} \right) x \right] \right\} , \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

usando

$$\int_0^L dx e^{i\beta_{nm}x} \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] \cos \left[ \frac{\pi}{L} \left( n + \frac{b}{2} \right) x \right] = \begin{cases} 0 & m = n \\ F_{nm} & m \neq n \end{cases} , \quad (\text{A.40})$$

onde

$$\begin{aligned} F_{nm} &= \frac{L}{2} \left\{ \frac{(m-n)\pi}{[(m-n)\pi + L\beta_{nm}][(n-m)\pi + L\beta_{nm}]} \right. \\ &+ \frac{(b+m+n)\pi}{[(b+m+n)\pi - L\beta_{nm}][(b+n+m)\pi + L\beta_{nm}]} \\ &- e^{iL\beta_{nm}} \left[ \frac{(m-n)\pi(-1)^{m-n}}{[(m-n)\pi + L\beta_{nm}][(n-m)\pi + L\beta_{nm}]} \right. \\ &+ \left. \left. \frac{[(b+m+n)\pi + iL\beta_{nm}](-1)^{m+n}}{[(b+m+n)\pi - L\beta_{nm}][(b+n+m)\pi + L\beta_{nm}]} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

(verifique [32] para mais detalhes) mas, para  $m \neq n$ , a função  $\delta$  cancela a contribuição da integral. Agora para a integral

$$\int dx dy dz \psi_m (\partial_1 \psi_n^*) = (2\pi)^2 N_n N_m \delta(k_{ym} - k_{yn}) \delta(k_{zm} - k_{zn}) \left( i \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n \right) \frac{L}{2} , \quad (\text{A.42})$$

então a contribuição para  $I_3$  é

$$I_3 = \sqrt{g_\Sigma} n^1 (2\pi)^2 L \left( \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n \right) N_n^2, \quad (\text{A.43})$$

juntando os resultados acima temos

$$N_n^2 \sqrt{g_\Sigma} (2\pi)^2 L \left( n^0 \omega_n + n^1 \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \omega_n \right) = 1. \quad (\text{A.44})$$

Com isso,

$$\begin{aligned} N_n^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2 L \sqrt{g_\Sigma} \omega_n \left( n^0 + n^1 \frac{g_{tx}}{g_{tt}} \right)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 L \sqrt{g_\Sigma} \omega_n \frac{\sqrt{\tilde{g}}}{g_{tt} \sqrt{g_{xx}}}} = -\frac{g_{tt} \sqrt{\tilde{g} g_{xx}}}{(2\pi)^2 L \sqrt{g_\Sigma} \omega_n \tilde{g}} \\ &= -\frac{g_{tt} \sqrt{-g_{tt} g_{xx} g_{yy} g_{zz}}}{g (2\pi)^2 L \omega_n}. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

## A.2 O Tensor de Energia-Momento e a Energia de Casimir

O próximo cálculo refere-se à orientação  $y$ . Vamos determinar a energia do vácuo

$$\epsilon_{vac} = w^\mu w^\nu \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle, \quad (\text{A.46})$$

para um observador estático

$$w^\mu = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} \delta^{\mu t}, \quad g_{tt} > 0. \quad (\text{A.47})$$

Onde

$$\epsilon_{vac} = (g_{tt})^{-1} \sum_n \int dk_x dk_y T_{tt} [\psi_n(\vec{k}), \psi_n^*(\vec{k})] \quad (\text{A.48})$$

e o tensor energia momento é dado por

$$T_{tt} [\psi(\vec{k}), \psi^*(\vec{k})] = \partial_t \psi \partial_t \psi^* - \frac{1}{2} g_{tt} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \psi \partial_\sigma \psi^* + a g_{tt} m^2 \psi \psi^*. \quad (\text{A.49})$$

Podemos ver que para o tensor de energia e momento, a parte relevante vale

$$\begin{aligned} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \psi \partial_\sigma \psi^* &= |\psi|^2 \left[ g^{tt} \omega_n^2 + g^{zz} k_z^2 + \omega_n K g^{xx} (2k_x + \omega_n K) - 2\omega_n g^{tx} (K \omega_n + k_x) \right. \\ &\quad \left. + g^{yy} |d_g \ln g|^2 + g^{xx} |d_x \ln f|^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Reorganizando os termos

$$\begin{aligned} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \psi \partial_\sigma \psi^* &= |\psi|^2 \times \\ &\quad \omega_n^2 \left[ g^{tt} + (K g^{xx} - 2g^{tx}) K \right] + g^{zz} k_z^2 + 2\omega_n (g^{xx} K - g^{tx}) k_x \\ &\quad + g^{yy} |d_g \ln g|^2 + g^{xx} |d_x \ln f|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Observe agora que

$$g^{xx}K - g^{tx} = g^{tx} - g^{tx} = 0,$$

$$g^{tt} + (Kg^{xx} - 2g^{tx})K = g^{tt} - \frac{(g^{tx})^2}{g^{xx}},$$

com isso

$$g^{\rho\sigma}\partial_\rho\psi\partial_\sigma\psi^* = |\psi|^2 \left\{ \frac{\omega_n^2}{g_{tt}} + g^{zz}k_z^2 + g^{yy}|d_g \ln g|^2 + g^{xx}|d_x \ln f|^2 \right\}. \quad (\text{A.52})$$

Usando

$$|\psi|^2 = |N|^2|f|^2|g|^2 = |N|^2 \sin^2(k_\xi \xi) \quad (\text{A.53})$$

temos

$$\text{orientação-}x, \xi = x \in [0.L], \alpha = y : \begin{cases} g = e^{ik_y y}, f(x) = \sin k_x x \Rightarrow \\ |d_x \ln f|^2 = (d_x \ln f)^2 = -k_x - d_x^2 \ln f = k_x^2 \left( \frac{1}{f^2} - 1 \right), \end{cases} \quad (\text{A.54})$$

$$\text{orientação-}y, \xi = y \in [0.L], \alpha = x : \begin{cases} f = e^{ik_x x} \Rightarrow |d_x \ln f| = k_x^2, g(y) = \sin k_y y \Rightarrow \\ |d_y \ln g|^2 = (d_y \ln g)^2 = -k_y - d_y^2 \ln g = k_y^2 \left( \frac{1}{g^2} - 1 \right), \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

com isso,

$$g^{\rho\sigma}\partial_\rho\psi\partial_\sigma\psi^* = |\psi|^2 \left\{ \frac{\omega_n^2}{g_{tt}} + g^{zz}k_z^2 + g^{\alpha\alpha}k_\alpha^2 + g^{\xi\xi}k_\xi^2 \left( \frac{1}{\sin^2(k_\xi \xi)} - 1 \right) \right\}. \quad (\text{A.56})$$

Usando os resultados acima, o tensor energia momento vale

$$T_{tt} = \omega^2|\psi|^2 - \frac{1}{2}g_{tt} \left[ |\psi|^2 \left\{ \frac{\omega^2}{g_{tt}} + g^{zz}k_z^2 + g^{\alpha\alpha}k_\alpha^2 + g^{\xi\xi}k_\xi^2 \left( \frac{1}{\sin^2(k_\xi \xi)} - 1 \right) \right\} \right] + ag_{tt}m^2|\psi|^2 \quad (\text{A.57})$$

$$= |\psi|^2 \left\{ \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}g_{tt} \left[ g^{zz}k_z^2 + g^{\alpha\alpha}k_\alpha^2 + g^{\xi\xi}k_\xi^2 \left( \frac{1}{\sin^2(k_\xi \xi)} - 1 \right) \right] + ag_{tt}m^2 \right\} \quad (\text{A.58})$$

$$= \frac{1}{2}|\psi|^2g_{tt} \left\{ \frac{\omega^2}{g_{tt}} - \left[ g^{zz}k_z^2 + g^{\alpha\alpha}k_\alpha^2 + g^{\xi\xi}k_\xi^2 \left( \frac{1}{\sin^2(k_\xi \xi)} - 1 \right) \right] + 2am^2 \right\} \quad (\text{A.59})$$

$$= -g_{tt}|N|^2 \left\{ \sin^2(k_\xi \xi) \left[ g^{zz}k_z^2 + g^{\alpha\alpha}k_\alpha^2 - \frac{(2a+1)}{2}m^2 \right] + \frac{1}{2}g^{\xi\xi}k_\xi^2 \right\}, \quad (\text{A.60})$$

com  $a = 1/2$  temos

$$T_{tt}(\psi, \psi^*) = -g_{tt}|N|^2 \left\{ \sin^2(k_\xi \xi) \left[ g^{zz}k_z^2 + g^{\alpha\alpha}k_\alpha^2 - m^2 \right] + \frac{1}{2}g^{\xi\xi}k_\xi^2 \right\}. \quad (\text{A.61})$$



## APÊNDICE B – ENERGIA CASIMIR PARA AMBAS AS ORIENTAÇÕES

Neste apêndice, mostramos alguns resultados do capítulo 2, começando com a eq (2.23)

$$-g_{tt}N_n^2 \int_z \int_\alpha \int_\xi \left[ \sin^2(k_n \xi) (g^{zz}k_z^2 + g^{\alpha\alpha}k_\alpha^2 - m^2) + \frac{g^{\xi\xi}k_n^2}{2} \right] \sqrt{-g_\Sigma} dz d\alpha d\xi = \quad (\text{B.1})$$

$$-g_{tt}N_n^2 \left\{ \frac{1}{2}g^{\xi\xi}k_\xi^2 \int_z dz \int_\alpha d\alpha \int_\xi d\xi + (g^{zz}k_z^2 + g^{\alpha\alpha}k_\alpha^2 - m^2) \int_z dz \int_\alpha d\alpha \int_0^L \sin^2(k_\xi \xi) \right\}$$

$$= -g_{tt}N_n^2 \left\{ \frac{1}{2}g^{\xi\xi}k_\xi^2 L_z L_\alpha L + \frac{1}{2}L_z L_\alpha L (g^{zz}k_z^2 + g^{\alpha\alpha}k_\alpha^2 - m^2) \right\}$$

$$= \frac{-g_{tt}N_n^2}{2} L_z L_\alpha L \left[ g^{\xi\xi}k_\xi^2 + (g^{zz}k_z^2 + g^{\alpha\alpha}k_\alpha^2 - m^2) \right] = \frac{1}{2} L_z L_\alpha L N_n^2 \omega_n^2. \quad (\text{B.2})$$

O volume próprio é dado por

$$V_p = \int dz d\alpha d\xi \sqrt{-g_\Sigma} = \sqrt{-g_\Sigma} L_z L_\alpha L. \quad (\text{B.3})$$

## B.1 Integral

Calculo da integral (2.25)

$$I_n \equiv \int dk_\alpha dk_z \left[ \frac{\omega_n^2}{\omega_n + G \frac{g_{tt}g_{tx}k_\alpha}{\tilde{g}}} \right].$$

Vamos considerar a integral  $I_n$ , onde

$$\omega_n^2 = - \left[ \frac{g_{tt}}{\tilde{g}} k_\alpha^2 + \frac{1}{g_{\xi\xi}} k_\xi^2 + \frac{1}{g_{zz}} k_z^2 - m^2 \right] g_{tt} = - \left[ g^{\alpha\alpha} k_\alpha^2 + g^{\xi\xi} k_\xi^2 + \frac{1}{g_{zz}} k_z^2 - m^2 \right] g_{tt}, \quad (\text{B.4})$$

considerando a transformação

$$k_\alpha = \sqrt{-\frac{1}{g^{\alpha\alpha}}} k \cos \theta, \quad k_z = \sqrt{-g_{zz}} k \sin \theta, \quad (\text{B.5})$$

$$dk_\alpha dk_z = \frac{\partial(k_\alpha, k_z)}{\partial(k, \theta)} dk d\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_\alpha}{\partial k} & \frac{\partial k_z}{\partial k} \\ \frac{\partial k_\alpha}{\partial \theta} & \frac{\partial k_z}{\partial \theta} \end{vmatrix} dk d\theta \quad (\text{B.6})$$

$$= \sqrt{\frac{g_{zz}}{g^{\alpha\alpha}}} k dk d\theta, \quad (\text{B.7})$$

consequentemente

$$I_n = \sqrt{\frac{g_{zz}}{g^{\alpha\alpha}}} \int k dk d\theta \frac{\omega_n^2}{\omega_n + \sqrt{-\frac{G^2 g_{tt}^2 g_{tx}^2}{\tilde{g}^2 g^{\alpha\alpha}}} k \cos \theta}. \quad (\text{B.8})$$

Veja que  $\omega_n$  não depende de  $\theta$ , então

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\omega_n + \sqrt{-\frac{G^2 g_{tx}^2 g_{tt}^2}{\tilde{g}^2 g^{\alpha\alpha}}} k \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 + \frac{G^2 g_{tx}^2 g_{tt}^2}{\tilde{g}^2 g^{\alpha\alpha}}} k^2}. \quad (\text{B.9})$$

Escrevendo o espectro na forma

$$\omega_n^2 = [k^2 - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2] g_{tt},$$

e substituindo na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} I_n &= 2\pi \sqrt{\frac{g_{zz}}{g^{\alpha\alpha}}} \int_0^\infty k dk \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^2 + \frac{G^2 g_{tx}^2 g_{tt}^2}{\tilde{g}^2 g^{\alpha\alpha}}} k^2} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{g_{zz}}{g^{\alpha\alpha}}} \int_0^\infty k dk \frac{g_{tt} [k^2 - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2]}{\sqrt{g_{tt} [k^2 - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2] + \frac{G^2 g_{tx}^2 g_{tt}^2}{\tilde{g}^2 g^{\alpha\alpha}}} k^2} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{g_{zz}}{g^{\alpha\alpha}}} \sqrt{g_{tt}} \int_0^\infty k dk \frac{[k^2 - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2]}{\sqrt{[k^2 - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2] + \frac{G^2 g_{tx}^2 g_{tt}^2}{\tilde{g}^2 g^{\alpha\alpha}}} k^2} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{g_{zz} g_{tt}}{g^{\alpha\alpha}}} \int_0^\infty k dk \frac{[k^2 - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2]}{\sqrt{\left[1 + \frac{G^2 g_{tx}^2 g_{tt}^2}{\tilde{g}^2 g^{\alpha\alpha}}\right] k^2 - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{g_{zz} g_{tt}}{g^{\alpha\alpha}}} \int_0^\infty k dk \frac{[k^2 - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2]}{\sqrt{F k^2 - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

com

$$F = \left[ 1 + \frac{G^2 g_{tx}^2 g_{tt}}{\tilde{g}^2 g^{\alpha\alpha}} \right]. \quad (\text{B.11})$$

Definamos

$$u = Fk^2 - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2, \quad du = 2Fkdk. \quad (\text{B.12})$$

Usando (B.11) e (B.12), (B.10) torna-se

$$\begin{aligned} I_n &= 2\pi \sqrt{\frac{g_{zz}g_{tt}}{g^{\alpha\alpha}}} \int_{u(0)}^{u(\infty)} \frac{du}{2F} \frac{[u + g^{\xi\xi} k_\xi^2 - m^2] - g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2}{\sqrt{u}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{g_{zz}g_{tt}}{g^{\alpha\alpha}}} \int_{u(0)}^{u(\infty)} \frac{du}{2F^2} \frac{[u + g^{\xi\xi} k_\xi^2 - m^2] - Fg^{\xi\xi} k_\xi^2 + Fm^2}{\sqrt{u}} \\ I_n &= \frac{\pi}{F^2} \sqrt{\frac{g_{zz}g_{tt}}{g^{\alpha\alpha}}} \int_{u(0)}^{u(\infty)} du \frac{u + (1 - F)(g^{\xi\xi} k_\xi^2 - m^2)}{\sqrt{u}}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Com isso

$$I_n = \frac{\pi}{F^2} \sqrt{\frac{g_{tt}g_{zz}}{g^{\alpha\alpha}}} \left[ I_+ + (1 - F) (g^{\xi\xi} k_\xi^2 - m^2) I_- \right], \quad (\text{B.14})$$

$$I_\pm = \int_{u(0)}^{u(\infty)} u^{\pm 1/2} du. \quad (\text{B.15})$$

Vamos considerar os seguintes cálculos de integrais divergentes:

$$I_+ = \int_{u(0)}^{u(\infty)} du \sqrt{u} = \int_{u(0)}^{u(\infty)} du u^{-s/2} \Big|_{s=-1} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \int_{u(0)}^{u(\infty)} du u^{-s/2} &= \frac{u^{1-s/2}}{1-s/2} \Big|_{u(0)}^{u(\infty)} \\ &= \frac{u(\infty)^{1-s/2}}{1-s/2} - \frac{u(0)^{1-s/2}}{1-s/2} \\ &= 0 - \frac{2u(0)^{1-s/2}}{2-s}, \quad \Re s > 2; \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

e

$$\begin{aligned} I_- &= \int_{u(0)}^{u(\infty)} du \frac{1}{\sqrt{u}} = \int_{u(0)}^{u(\infty)} du u^{-s/2} \Big|_{s=1} \\ &= 0 - \frac{2u(0)^{1-s/2}}{2-s}, \quad \Re s > 2, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

sendo

$$u(0) = -g^{\xi\xi} k_\xi^2 + m^2. \quad (\text{B.19})$$

Juntando os resultados acima então

$$I_n = -\frac{\pi}{F^2} \sqrt{\frac{g_{tt}g_{zz}}{g^{\alpha\alpha}}} \left[ \frac{u_n(0)^{1-s/2}}{1-s/2} \Big|_{s=-1} - (1-F) u_n(0) \frac{u_n(0)^{1-s/2}}{1-s/2} \Big|_{s=1} \right],$$

ou,

$$I_n = \frac{2\pi}{F^2} \sqrt{\frac{g_{tt}g_{zz}}{g^{\alpha\alpha}}} \left( \frac{2}{3} - F \right) [u_n(0)]^{3/2} . \quad (\text{B.20})$$

Agora podemos avaliar a (continuação analítica da) soma

$$\sum_n u_n(0)^{3/2} = \pi^3 \left[ \frac{\sqrt{-g^{\xi\xi}}}{L} \right]^3 \sum_n \left[ \left( n + \frac{b}{2} \right)^2 + q^2 \right]^{3/2} ,$$

$$q^2 = -\frac{L^2 m^2}{\pi^2 g^{\xi\xi}} , \quad (\text{B.21})$$

usando a relação [3]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \left( n + \frac{b}{2} \right)^2 + q^2 \right]^{-s} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)}$$

$$+ \frac{4\pi^s}{\Gamma(s)} q^{\frac{1}{2}-s} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{bn} n^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi nq) , \quad (\text{B.22})$$

onde  $K_\nu$  é a função modificada de Bessel de segunda classe. Com isso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(0)^{3/2} = E_0 + \frac{3q^2\pi}{2} \left[ \frac{\sqrt{-g^{\xi\xi}}}{L} \right]^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{bn}}{n^2} K_2(2\pi nq) , \quad (\text{B.23})$$

onde usamos  $K_{-2}(x) = K_2(x)$  e

$$E_0 = \frac{3}{8} \left[ \frac{\pi \sqrt{-g^{\xi\xi}}}{L} \right]^3 \Gamma(-2) . \quad (\text{B.24})$$

Do comportamento assintótico da função de Bessel [29]

$$x \gg n \Rightarrow K_n(x) \sim \sqrt{\pi} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x}} , \quad (\text{B.25})$$

observamos que o termo  $E_0$  pode ser associada com o limite  $L \rightarrow \infty$  ( $q \rightarrow \infty$ ) e, consequentemente, corresponde à (sempre divergente) energia do vácuo sem fronteiras. Este termo deve ser descontado no cálculo da energia Casimir [33]. Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \frac{3q^2\pi^2}{F^2} \sqrt{\frac{g_{tt}g_{zz}}{g^{\alpha\alpha}}} \left[ \frac{\sqrt{-g^{\xi\xi}}}{L} \right]^3 \left( \frac{2}{3} - F \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{bn}}{n^2} K_2(2q\pi n) . \quad (\text{B.26})$$

Para nossa consideração de uma métrica constante, o termo entre colchetes da equação acima pode ser reconhecido como o comprimento próprio  $L_p$  [18]

$$L_p = \int_0^L \sqrt{-\frac{1}{g^{\xi\xi}}} d\xi = L \sqrt{-\frac{1}{g^{\xi\xi}}} . \quad (\text{B.27})$$

Finalmente, após algumas manipulações dos elementos da métrica, usando (B.27), (B.26) (B.11) e (B.12) em (2.24), podemos escrever a energia de Casimir na direção  $\xi$  como

$$\bar{\epsilon}_{vac}^{(\xi)} = \left( \frac{\tilde{g}}{g_{tt}g_{xx}} \right)^{(4G_\xi-1)/2} \left( 1 + 3G_\xi \frac{g_{tx}^2}{\tilde{g}} \right) \mathcal{E}_m , \quad (\text{B.28})$$

onde,

$$\mathcal{E}_m = -\frac{m^2}{8\pi^2 L_p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{bn}}{n^2} K_2(2mL_p n) . \quad (\text{B.29})$$