



UNIVERSIDADE
Estadual de Londrina

LUCAS GABRIEL DOS SANTOS

MODELO ESFÉRICO QUÂNTICO
SUPERSIMÉTRICO

Londrina
2021

LUCAS GABRIEL DOS SANTOS

**MODELO ESFÉRICO QUÂNTICO
SUPERSIMÉTRICO**

Tese de doutorado apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.
Orientadora: Prof^ª. Dra. Paula Fernanda Bienzobas

Londrina
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Santos, Lucas Gabriel dos.

Modelo esférico quântico supersimétrico / Lucas Gabriel dos Santos. - Londrina, 2021.
52 f. : il.

Orientador: Paula Fernanda Bienzobas.

Tese (Doutorado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Transição de fase clássica - Tese. 2. Diagramas de fase - Tese. 3. Criticalidade quântica - Tese. 4. Transição de fase quântica - Tese. I. Bienzobas, Paula Fernanda . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 53

LUCAS GABRIEL DOS SANTOS

MODELO ESFÉRICO QUÂNTICO SUPERSIMÉTRICO

Tese de doutorado apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profa. Dra. Paula Fernanda Bienzobas
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Pedro Rogério Sérgio Gomes
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Carlos André Hernaski
Universidade Tecnológica Federal do Paraná –
UTFPR

Prof. Dr. Mário José de Oliveira
Universidade de São Paulo – USP

Prof. Dr. Leandro Ibiapina Bevilaqua
Universidade Federal do Rio Grande do Norte –
UFRN

Londrina, 30 de agosto de 2021.

Agradecimentos

À princípio ao meu pai, Ademir dos Santos, a minha mãe, Maria Clarete Pinto dos Santos, a minha irmã, Daniella Fernanda dos Santos e ao meu irmão Bruno Fernando dos Santos, por sempre estarem ao meu lado diante de todas as adversidades encontradas.

À minha orientadora, Prof^a. Paula Bienzobas, por me apresentar a Física Teórica e por toda dedicação, paciência e auxílio nas mais diversas situações, sempre acreditando em meu potencial e pelos preciosos conselhos que levarei comigo eternamente.

Ao Prof. Pedro Gomes, por dividir todo o seu conhecimento que colaboraram de forma substancial para a minha formação.

Aos meus amigos de pós graduação, por todas as conversas e pelos momentos de descontração. Agradeço em especial ao meu grande amigo e companheiro de trabalho Ladislau Tavares, por sempre fornecer um ombro amigo.

À minha namorada Érika Kanaoka, que sempre me apoiou e incentivou durante todo este período. Obrigado por toda atenção, carinho, amor e por dividir a vida comigo.

Ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina que sempre me acolheu da melhor maneira possível durante toda a minha jornada.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e a Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Resumo

O modelo esférico pertence a uma pequena classe de modelos em mecânica estatística que são solúveis exatamente em dimensões arbitrárias, o que o torna atraente para o estudo de transições de fase. Assim, apresentamos o modelo esférico clássico e suas propriedades, incluindo o comportamento patológico da entropia para baixas temperaturas. Em seguida, introduzimos a versão quântica do modelo, em que analisamos o seu comportamento crítico para interações de primeiros vizinhos, tanto para o caso de temperatura finita quanto para temperatura nula. Como o foco principal deste trabalho é investigar o comportamento crítico de uma extensão supersimétrica do modelo esférico quântico, julgamos apropriado discutir inicialmente as principais propriedades de supersimetria, que são fundamentais para a construção da versão supersimétrica a partir de uma formulação no superespaço. Esta construção no superespaço é conveniente para garantir que a estrutura de vínculo da teoria seja compatível com a supersimetria. A extensão supersimétrica do modelo é parametrizada por uma energia de interação $U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$, que governa a interação entre os supercampos nos diferentes sítios. Em particular, o cálculo da função de partição é apresentado considerando uma energia de interação que depende apenas do módulo da distância entre dois sítios, $U = U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Porém, a análise do comportamento crítico é apresentada para interações de campo médio. No geral, é possível mostrar que a versão de campo médio apresenta uma transição de fase quântica, sem quebra de supersimetria para temperatura nula, assim como uma transição de fase a temperatura finita com uma quebra de supersimetria. Apresentamos os expoentes críticos da magnetização e da susceptibilidade em ambos os casos de temperatura finita e temperatura nula. Com relação a susceptibilidade, encontramos dois regimes no caso de temperatura finita caracterizados por expoentes críticos distintos. A entropia para a extensão supersimétrica do modelo é bem comportada no limite de baixas temperaturas, $s \rightarrow 0$.

Palavras-chave: 1. Transição de fase clássica. 2. Diagramas de fase. 3. Criticalidade quântica. 4. Transição de fase quântica.

SANTOS, Lucas Gabriel dos. **Modelo Esférico Quântico Supersimétrico**. 2021. Tese de Doutorado em Física - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

Abstract

The spherical model belongs to a small class of models in statistical mechanics that are exactly soluble in arbitrary dimensions, which makes it attractive for the study of phase transitions. Therefore, we start by presenting the classic spherical model and its properties, including the pathological behavior of the entropy at low temperatures. Then, we introduce the quantum version of the model, in which we analyze its critical behavior for first-neighbor interactions for both finite and zero temperature. As the main focus of this work is to investigate the critical behavior of a supersymmetric extension of the spherical quantum model, we consider it appropriate to initially discuss the main properties of the supersymmetry, which are fundamental for the construction of the supersymmetric version from a formulation in the superspace. This construction in the superspace is convenient to ensure that constraint structure is compatible with supersymmetry. The supersymmetric extension of the model is parameterized by an interaction energy, $U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$, which governs the interactions between the superfields of different sites. In particular, the calculation of the partition function is presented considering an interaction energy that depends only on the distances between two sites, $U = U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. However, the analysis of the critical behavior is presented for the mean-field interactions. In fact, it can be shown that the mean-field version exhibits a quantum phase transition without breaking supersymmetry at zero temperature, as well as a phase transition at finite temperature with broken supersymmetry. We compute critical exponents of the usual magnetization and susceptibility in both cases of zero and finite temperature. Concerning the susceptibility, there are two regimes in the case of finite temperature characterized by distinct critical exponents. The entropy for the supersymmetric extension of the model is well behaved at the low temperature, $s \rightarrow 0$.

Keywords: 1. Classical phase transition. 2. Phase diagrams. 3. Quantum criticality. 4. Quantum phase transition.

SANTOS, Lucas Gabriel dos. **Supersymmetric Quantum Spherical Model**. 2021. PhD Thesis in Physics - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

Lista de ilustrações

Figura 1 – A rede do lado esquerdo corresponde ao caso do modelo esférico quântico usual, em que existe apenas uma variável de spin $S_{\mathbf{r}}$ em cada sítio. O lado direito corresponde à extensão supersimétrica, na qual temos quatro variáveis em cada sítio, estas variáveis podem ser escritas como componentes de um supercampo $\Phi_{\mathbf{r}} = S_{\mathbf{r}} + \bar{\theta}\psi_{\mathbf{r}} + \bar{\psi}_{\mathbf{r}}\theta + \bar{\theta}\theta F_{\mathbf{r}}$	27
Figura 2 – Interações presentes em (4.30) para uma rede quadrada em duas dimensões.	31
Figura 3 – Formação do ponto de não analiticidade de acordo com (4.70) conforme N cresce. Os gráficos são com $U \equiv 1$ na figura esquerda e $U \equiv -1$ na figura da direita.	40
Figura 4 – Espaço dos parâmetros a temperatura nula para o caso $U < 0$ ($U \equiv -1$), exibindo uma transição de fase quântica sem quebra de supersimetria.	40
Figura 5 – Formação do ponto de não analiticidade no caso de temperatura finita a medida que N cresce. Os plots são com $\mu = -1$ e $H_B = 0$ e com $U \equiv 1$ na figura do lado esquerdo e $U \equiv -1$ na figura da direita. Neste caso $k_B T_c = 3,82843$, de acordo com a equação (4.86).	43
Figura 6 – O ponto de não analiticidade surgindo da equação (4.84) no limite termodinâmico para diferentes valores de μ	44
Figura 7 – Espaço dos parâmetros para temperatura finita com $U \equiv -1$	44
Figura 8 – Diagrama de fase da versão de campo médio do modelo esférico quântico supersimétrico, com $\mu = 0$ e $\gamma_c = + U \equiv 1$. O ponto crítico quântico ocorre em $g_c = 4 U ^2 = 4$	45

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	MODELO ESFÉRICO	5
2.1	Modelo Esférico Clássico	5
2.1.1	Comportamento Crítico	6
2.2	Modelo Esférico Quântico	9
2.2.1	Comportamento Crítico Quântico	12
2.2.2	Comportamento Crítico a Temperatura Finita	14
3	SUPERSIMETRIA	17
3.1	Aspectos Gerais	17
3.2	Formalismo no Superespaço	20
4	MODELO ESFÉRICO QUÂNTICO SUPERSIMÉTRICO . .	26
4.1	Extensão Supersimétrica	26
4.2	Formulação <i>On-shell</i>	29
4.2.1	Interações de Primeiros Vizinhos	31
4.2.2	Campo Médio	33
4.3	Função de Partição	34
4.3.1	Soluções de Ponto de Sela e Quebra de Supersimetria	37
4.4	Comportamento Crítico de Campo Médio	38
4.4.1	Comportamento Crítico Quântico	39
4.4.1.1	Magnetização, Condensado Fermiônico e Susceptibilidade	41
4.4.2	Comportamento Crítico a Temperatura Finita	42
4.4.2.1	Magnetização, Condensado Fermiônico e Susceptibilidade	45
5	COMENTÁRIOS FINAIS	47
	REFERÊNCIAS	49

1 Introdução

Há muito tempo foi observado que a supersimetria pode ser aplicada em certos sistemas de matéria condensada [1–3]. De uma forma geral, ela pode ocorrer em sistemas que envolvem ambos graus de liberdade bosônicos e fermiônicos ou pelo menos em sistemas onde os graus básicos de liberdade efetivamente se comportam como bosônicos e fermiônicos. Ajustando um ou mais parâmetros do modelo, a supersimetria pode ser eventualmente obtida, neste caso dizemos que temos uma supersimetria emergente.

Um dos modelos mais interessantes em que tal mecanismo ocorre é o modelo de Ising tricrítico em duas dimensões [2, 3]. Uma característica especial deste modelo é que, em uma representação em teoria de campo conforme (CFT), ele é retratado por uma teoria superconforme, isto é, uma teoria de campo, que junto com a invariância conforme, exhibe supersimetria [2, 3]. Então, a conexão com a CFT revela uma supersimetria oculta no modelo de Ising tricrítico.

Uma compreensão microscópica do modelo de Ising tricrítico é dado em termos do modelo de Blume-Emery-Griffiths [4], em que envolve uma variável de spin 1, $S_i = 0, \pm 1$. Podemos formular este modelo em termos de duas variáveis, uma variável de spin 1/2, $\sigma_i = \pm 1$, e a vacância $t_i = 0, 1$, em que são conectados através de $S_i \equiv t_i \sigma_i$. Este modelo tem uma rica estrutura, pois possui mais do que um parâmetro de ordem, como $\langle S_i \rangle$ e $\langle S_i^2 \rangle$, abrindo a possibilidade para exibir um comportamento tricrítico, na qual tem sido aplicado na descrição da transição lambda em misturas de ^3He e ^4He [4]. As variáveis σ_i e t_i podem ser pensadas ingenuamente como partes fermiônicas e bosônicas, tais que para certos valores dos parâmetros envolvidos (correspondentes ao ponto tricrítico), o modelo efetivamente se comporta de uma forma supersimétrica, em que é capturada em uma descrição de CFT. Modelos como esse fornecem uma interação interessante entre supersimetria e transições de fase.

Estudos anteriores de supersimetria em modelos de spins podem ser encontrados em [5–7]. Mais recentemente, tem havido muito interesse em identificar modelos com potencial para exibir comportamento supersimétrico, bem como os seus ingredientes básicos. Neste contexto, a supersimetria tem sido retratada surgindo em certos modelos de rede [8–10] e também em sistemas ordenados topologicamente [11–14]. Estes estudos são atraentes por reunirem ingredientes de grande interesse como supersimetria, quebra de supersimetria e comportamento crítico quântico. Seguindo essas linhas, investigamos as propriedades de uma extensão supersimétrica do modelo esférico quântico, em que é um modelo teórico passível de uma série de cálculos exatos.

O modelo esférico quântico é a versão quantizada do modelo esférico clássico, introduzido muitos anos atrás por Berlin e Kac [15]. Ele pertence a uma rara classe de modelos que são exatamente solúveis em dimensões arbitrárias, mesmo na presença de

um campo externo. Além disso, para redes hipercúbicas com $2 < d < 4$, o modelo exibe um comportamento crítico não trivial. Devido a essas razões, o modelo esférico, junto com o modelo de Ising, constitui um excelente protótipo para investigar propriedades de comportamento crítico [16].

As versões quantizadas do modelo esférico remontam a [17, 18] e nos anos mais recentes a [19–21]. Em [19], a introdução de flutuações quânticas foi proposta como um mecanismo natural para corrigir o comportamento anômalo a baixas temperaturas (a entropia diverge para $T \rightarrow 0$). Por outro lado, era esperado que flutuações quânticas, devido ao princípio da incerteza de Heisenberg, podiam conduzir uma transição de fase a temperatura zero [22–24]. Neste contexto, foi mostrado que junto com o comportamento crítico a temperatura finita, o modelo esférico quântico exibe uma transição de fase quântica, isto é, uma transição de fase à temperatura nula [20]. As versões clássica e quântica possuem uma correspondência com o modelo clássico de Heisenberg [25] e com o modelo sigma não linear [20, 26], respectivamente, no limite de N muito grande.

Assim sendo, a extensão supersimétrica do modelo esférico quântico coloca a supersimetria em um rico contexto, em que as flutuações térmicas e quânticas podem dar origem a uma transição de fase. Ao mesmo tempo, é interessante explorar um modelo relativamente simples que contem propriedades não triviais, que são compartilhados com outros sistemas de grande interesse. Sabemos que a supersimetria é quebrada pela temperatura, essencialmente devido as diferentes distribuições térmicas para bósons e férmions [27, 28]. Então, qualquer transição de fase para temperatura finita acontece com a supersimetria quebrada. No entanto, a temperatura nula, uma transição de fase quântica, pode ou não, envolver uma quebra espontânea de supersimetria. Essas questões são investigadas ao longo deste trabalho.

De forma contrária aos modelos em que a supersimetria é alcançada ajustando os parâmetros envolvidos, em nossa proposta a supersimetria não é emergente. Na verdade, a supersimetria é usada como ponto de partida para o modelo como um requerimento de simetria. No entanto, o modelo resultante é melhor compreendido como descrevendo efetivamente graus de liberdade quânticos. Além da variável de spin esférico usual $S_{\mathbf{r}}$ fixada em cada sítio, onde $-\infty < S_{\mathbf{r}} < \infty$ são sujeitas ao vínculo $\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 = N$, consideramos também parceiros fermiônicos, $\psi_{\mathbf{r}}$ e $\bar{\psi}_{\mathbf{r}}$, além de um grau de liberdade auxiliar bosônico auxiliar $F_{\mathbf{r}}$, a fim de obter uma supersimetria *off-shell*. Logo, o modelo supersimétrico é exatamente solúvel em dimensões arbitrárias e possui um comportamento crítico interessante.

A primeira proposta de uma extensão supersimétrica do modelo esférico quântico foi apresentado em [29], em que neste caso, a versão supersimétrica foi obtida começando com a formulação *on-shell*. Um ponto importante, principalmente na descrição *on-shell*, é conciliar os requisitos de supersimetria com a estrutura de vínculo do modelo esférico. Os resultados apresentados em [29] leva a um predição peculiar para o comportamento

a temperatura nula no regime supersimétrico, isto é, o modelo não exibe uma transição de fase quântica quando a supersimetria não é quebrada. Para contornar esse problema, analisamos a formulação *off-shell* diretamente no superespaço, onde a supersimetria é manifesta.

Esta versão *off-shell* coincide com o modelo proposto em [30], que foi obtido no contexto de quantização estocástica, explorando o mapeamento entre uma teoria de campos em d -dimensões e uma teoria em $(d + 1)$ -dimensões, onde o tempo fictício não é eliminado, conduzindo a uma supersimetria na direção deste tempo [31]. É claro que a prescrição da quantização estocástica, automaticamente mantém todas as sutilezas que envolvem a supersimetria e o vínculo. O que está por trás disso tudo é que a equação de Langevin constitui uma realização explícita do mapa de Nicolai [32], em que é útil para a caracterização de teorias supersimétricas por meio de medidas de integração funcional. Além disso, em [30], foi determinado as dimensões críticas para uma interação em que a transformada de Fourier é parametrizada como $\hat{U}(\mathbf{q}) \sim |\mathbf{q}|^{\frac{x}{2}}$.

Todas as interações entre as variáveis bosônicas e fermiônicas de diferentes sítios são dadas em termos de uma única energia de interação, $U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$. Isto é um requisito da supersimetria, uma vez que interações independentes no modelo levariam a uma quebra explícita de supersimetria. Propriedades interessantes podem ser extraídas considerando a formulação *on-shell*, em que eliminamos os graus de liberdade auxiliar. Em particular, mostramos que interações competitivas no setor bosônico podem surgir mesmo quando $U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$ envolve apenas interações de primeiros vizinhos. Ilustramos esse ponto no caso de uma rede quadrada em duas dimensões, mas a conclusão estende-se para redes de dimensões maiores. Portanto, vemos que o modelo supersimétrico tem um potencial para exibir um ponto de Lifshitz [33, 34].

Apresentamos também um estudo detalhado sobre a versão de campo médio do modelo esférico supersimétrico, em que todas as expressões podem ser escritas explicitamente. Embora esta versão não seja capaz de capturar o ponto de Lifshitz, ela exibe um comportamento crítico interessante, revelando características gerais das fases do modelo e de uma quebra de supersimetria. Existem transições de fase governadas pelas flutuações térmicas para temperatura finita, assim como transições de fase governadas pelas flutuações quânticas para temperatura nula. Em geral, a supersimetria é quebrada para temperatura finita, devido a diferença entre as distribuições térmicas envolvendo bósons e férmions. Nesta situação, temos dois regimes em nosso modelo que levam a diferentes expoentes críticos para a susceptibilidade. Esses dois regimes correspondem a diferentes valores de ponto de sela dos parâmetros envolvidos, em que acontece somente no caso de temperatura finita. A temperatura nula, existe uma única solução possível, em que as frequências bosônicas e fermiônicas são iguais, levando a uma energia do estado fundamental nula. Logo, o modelo está sujeito a uma transição de fase quântica sem quebra de supersimetria. Analisando o comportamento da magnetização, mostramos também que

todas as transições de fase presentes no modelo são do tipo ordem-desordem.

Este trabalho está organizado como segue. No capítulo 2 apresentamos o comportamento crítico do modelo esférico clássico com interações de campo médio e do modelo quântico com interações de curto alcance. Mostramos explicitamente que a entropia apresenta um comportamento não físico no limite de baixas temperaturas na versão clássica e que este comportamento é corrigido quando analisamos a versão quântica. No capítulo 3, apresentamos brevemente as principais propriedades de supersimetria, facilitando assim o entendimento da versão supersimétrica do modelo esférico que é apresentado no capítulo subsequente. Por último, a extensão supersimétrica é construída diretamente no superespaço e a função de partição é apresentada considerando $U = U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. No entanto, o comportamento crítico do modelo esférico quântico supersimétrico, tanto para temperatura nula quanto para temperatura finita, é apresentado considerando interações de campo médio.

Este trabalho é baseado nas publicações:

- **SANTOS, L. G.**; TAVARES, L.; BIENZOBAS, P.; GOMES, P. R. Supersymmetric quantum spherical spins. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP, v. 2018, 2018.
- TAVARES, L.; **SANTOS, L. G.**, LANDI, G. T.; BIENZOBAS, P.; GOMES, P. R. Supersymmetric quantum spherical spins with short-range interactions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP, v. 2020, 2020.

2 Modelo Esférico

Neste capítulo iniciaremos uma discussão detalhada sobre o modelo esférico, começando com a sua versão clássica e mostraremos o seu comportamento patológico a baixas temperaturas. Em seguida, abordaremos o modelo esférico quântico, expondo o seu comportamento nas proximidades do ponto crítico para temperatura finita e temperatura nula.

2.1 Modelo Esférico Clássico

A proposta do modelo de Ising [35] na primeira metade do século XX impulsionou vários outros modelos em mecânica estatística para descrever transições de fase. Neste contexto, Lars Onsager apresentou uma complexa solução do modelo de Ising em redes quadradas [36] e despertou a atenção do matemático Marc Kac, que relatou em uma carta em homenagem a Theodore Berlin [37], o interesse em investigar modelos que apresentassem soluções mais amigáveis quando comparadas com as do modelo de Ising.

A primeira tentativa de Kac foi uma generalização do modelo de Ising, promovendo as variáveis discretas para variáveis contínuas e válidas para qualquer dimensão. Assim, na presença de campo externo, a Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H}_G = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - H \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

em que as somas são realizadas sobre os N sítios da rede cristalina em d -dimensões, $S_{\mathbf{r}}$ é a variável de spin, $-\infty < S_{\mathbf{r}} < \infty$, o parâmetro $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \equiv J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ é a energia de interação que depende apenas do módulo da distância entre os sítios \mathbf{r} e \mathbf{r}' e H é um campo externo. Neste caso, para garantir a convergência da função de partição é necessário introduzir um peso gaussiano, ou seja

$$\mathcal{Z}_G = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\mathbf{r}} dS_{\mathbf{r}} \right) \exp \left[\beta \left(\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} + H \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} - \frac{b}{2} \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 \right) \right], \quad (2.2)$$

em que $\beta = 1/k_B T$ é o inverso da temperatura absoluta T , k_B é a constante de Boltzmann e $b > 0$. Apesar desta proposta, denominada modelo gaussiano, ser exatamente solúvel em qualquer dimensão, ela é ineficaz do ponto de vista físico, visto que o modelo é definido apenas acima de uma determinada temperatura [15].

Embora o modelo gaussiano não seja determinado para qualquer temperatura, ele serviu como um protótipo para o próximo modelo proposto por Kac [37], em que desta vez o peso gaussiano é substituído por um vínculo esférico,

$$\delta \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right). \quad (2.3)$$

Uma interpretação geométrica desta equação pode ser feita se assumirmos um espaço N -dimensional, em que as configurações permitidas para as variáveis de spins são representadas por pontos sobre uma hipersfera,

$$\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 = N, \quad (2.4)$$

de raio \sqrt{N} . Vale ressaltar que no contexto das variáveis de Ising, $\sigma_{\mathbf{r}} = \pm 1$, o conjunto discreto das 2^N configurações também satisfazem o vínculo esférico, sendo que, as configurações do modelo de Ising residem nos vértices da estrutura hipercúbica. A função de partição do modelo esférico, no ensemble canônico, é dada por

$$\mathcal{Z}_E = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\mathbf{r}} dS_{\mathbf{r}} \right) \delta \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) \exp \left(\frac{\beta}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} + \beta H \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} \right), \quad (2.5)$$

em que podemos usar uma representação integral para a função delta para implementar o vínculo esférico,

$$\delta \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\mu \exp \left[\mu \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) \right]. \quad (2.6)$$

Desta forma, as integrais sobre as variáveis de spin são obtidas sem muitas dificuldades e a integral remanescente em μ pode ser realizada pelo método do ponto de sela no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$). O modelo esférico é exatamente solúvel em qualquer dimensão, inclusive na presença de um campo externo e definido para qualquer temperatura, apresentando uma transição de fase.

Uma formulação alternativa para o modelo esférico surgiu pouco tempo depois dos trabalhos de Berlin e Kac. Proposta por Lewis e Wannier [38], consisti em impor um vínculo esférico médio nas variáveis de spin,

$$\sum_{\mathbf{r}} \langle S_{\mathbf{r}}^2 \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi_{EM} = N, \quad (2.7)$$

tal que a função de partição no ensemble grande canônico é

$$\Xi_{EM} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\mathbf{r}} dS_{\mathbf{r}} \right) \exp \left(\frac{\beta}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} + \beta H \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} - \beta \mu \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 \right), \quad (2.8)$$

com μ sendo interpretado como um potencial químico, garantindo o vínculo esférico médio (2.7). Esta nova versão ficou conhecida como modelo esférico médio, e apesar dos vínculos serem diferentes, os modelos são equivalentes no limite termodinâmico, conduzindo as mesmas quantidades termodinâmicas [16].

2.1.1 Comportamento Crítico

Para analisar o comportamento crítico da versão contínua do modelo de Ising, usaremos o vínculo esférico médio. Neste caso, por conveniência, escrevemos a função de

partição grande canônica do modelo esférico médio no espaço de Fourier,

$$S_{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} S_{\mathbf{q}}, \quad (2.9)$$

em que o vetor \mathbf{q} pertence a primeira zona de Brillouin. Essa parametrização nos leva a seguinte forma para a função de partição

$$\begin{aligned} \Xi_{EM} &= \int \prod_{\mathbf{q}} dS_{\mathbf{q}} \exp \left(\frac{\beta}{2} \sum_{\mathbf{q}} J(\mathbf{q}) S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} + \beta \sqrt{N} H S_0 - \beta \mu \sum_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} \right) \\ &= \int \prod_{\mathbf{q}>0} dS_{\mathbf{q}} dS_0 \exp \left[-2\beta \sum_{\mathbf{q}>0} \left(\mu - \frac{J(\mathbf{q})}{2} \right) |S_{\mathbf{q}}|^2 \right] \\ &\times \exp \left[-\beta \left(\mu - \frac{J(0)}{2} \right) S_0^2 + \beta \sqrt{N} H S_0 \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que a energia de interação é escrita como

$$J(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{h}} J(|\mathbf{h}|) e^{i\mathbf{h}\cdot\mathbf{q}}, \quad \text{com } \mathbf{h} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \quad (2.11)$$

Note que a função de partição pode ser expressa como integrais realizadas apenas sobre a metade da primeira zona de Brillouin e levamos em conta o fato que $S_{-\mathbf{q}} = S_{\mathbf{q}}^{\dagger}$. Decompondo as variáveis de spin em parte real e parte imaginária,

$$S_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{Re} S_{\mathbf{q}} + i \text{Im} S_{\mathbf{q}}), \quad \text{para } \mathbf{q} \neq 0, \quad (2.12)$$

mantendo o modo zero S_0 , a equação (2.10) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Xi_{EM} &= \int \prod_{\mathbf{q}>0} d(\text{Re} S_{\mathbf{q}}) d(\text{Im} S_{\mathbf{q}}) dS_0 \exp \left[-\beta \sum_{\mathbf{q}>0} \left(\mu - \frac{J(\mathbf{q})}{2} \right) ((\text{Re} S_{\mathbf{q}})^2 + (\text{Im} S_{\mathbf{q}})^2) \right] \\ &\times \exp \left[-\beta \left(\mu - \frac{J(0)}{2} \right) S_0^2 + \beta \sqrt{N} H S_0 \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Desta forma, o conjunto de integrais gaussianas, na parte real e imaginária, são independentes tornando o cálculo da função de partição trivial. Como o vetor \mathbf{q} pertence a primeira zona de Brillouin, temos,

$$\Xi_{EM} = \prod_{\mathbf{q}} \left[\frac{\pi}{\beta \left(\mu - \frac{J(\mathbf{q})}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{\beta N H^2}{4 \left(\mu - \frac{J(0)}{2} \right)} \right]. \quad (2.14)$$

Por fim, a partir de (2.14) é possível obter a energia livre,

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{N\beta} \ln \Xi_{EM} \\ &= -\frac{H^2}{4 \left(\mu - \frac{J(0)}{2} \right)} - \frac{1}{2N\beta} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[\frac{\pi}{\beta \left(\mu - \frac{J(\mathbf{q})}{2} \right)} \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

permitindo então uma conexão com a termodinâmica e a forma explícita do vínculo (2.7),

$$\beta = \frac{\beta H^2}{4 \left(\mu - \frac{J(0)}{2} \right)^2} + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\left(\mu - \frac{J(\mathbf{q})}{2} \right)}. \quad (2.16)$$

É importante ressaltar que a energia livre e a equação de vínculo ditam o comportamento crítico do sistema e nos fornecem as quantidades termodinâmicas de interesse. Note também que a função de partição (2.14), e posteriormente a energia livre, são válidas para qualquer dimensão e qualquer tipo de interação que dependa apenas da distância entre dois sítios.

Por simplicidade, apresentamos o comportamento crítico do modelo médio clássico considerando interações de campo médio do tipo Curie-Weiss,

$$J_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = \frac{J}{N} \quad \Rightarrow \quad J(\mathbf{q}) = J\delta_{\mathbf{q},0}. \quad (2.17)$$

Admitindo $H = 0$, obtemos a seguinte expressão para o vínculo esférico

$$\beta = \frac{1}{2\mu} + \frac{J}{4N\mu \left(\mu - \frac{J}{2} \right)}, \quad (2.18)$$

indicando uma potencial divergência no limite $\mu \rightarrow J/2$. Com um pouco de álgebra em (2.18), obtemos uma solução para μ no limite termodinâmico,

$$\mu = \begin{cases} \frac{J}{2}, & \text{para } k_B T < J \\ \frac{k_B T}{2}, & \text{para } k_B T > J \end{cases}, \quad (2.19)$$

o que define a temperatura crítica do sistema $k_B T_c = J$.

Embora o modelo esférico clássico apresente solução exata, ele exibe uma anomalia no limite de baixas temperaturas. Podemos verificar esse comportamento analisando a entropia, que pode ser obtida através da energia livre de campo médio,

$$f = -\frac{1}{2N\beta} \ln \left[\frac{\pi}{\beta \left(\mu - \frac{J}{2} \right)} \right] - \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{\pi}{\beta\mu} \right), \quad (2.20)$$

o que nos conduz a entropia de campo médio

$$\begin{aligned} s &= -\frac{\partial f}{\partial T} \\ &= \frac{k_B}{2N} \left[1 + \ln \left(\frac{\pi k_B T}{\mu - \frac{J}{2}} \right) \right] + \frac{k_B}{2} \left[1 + \ln \left(\frac{\pi k_B T}{\mu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

No limite termodinâmico, a entropia assume diferentes valores de acordo com o regime de temperatura, como mostra (2.19). Portanto, para $T > T_c$ temos,

$$s = \frac{k_B}{2} [1 + \ln(2\pi)], \quad (2.22)$$

o que resulta em uma entropia constante e independente da temperatura, como esperado. O comportamento interessante acontece quando $T < T_c$, pois neste caso $\mu = J/2 = k_B T_c/2$, conduzindo a

$$s = \frac{k_B}{2} \left[\ln \left(\frac{2\pi T}{T_c} \right) + 1 \right]. \quad (2.23)$$

No limite de baixas temperaturas $T \rightarrow 0$, a entropia diverge com o logaritmo da temperatura, não sendo fisicamente aceitável.

O comportamento no limite de $T \rightarrow 0$ não é característico apenas da solução de campo médio. O mesmo acontece na análise do modelo esférico com interações que dependem apenas do módulo da distância entre dois sítios. Em particular, uma interação de primeiros vizinhos nos levaria a um comportamento crítico e a uma transição de fase não trivial para dimensões entre $2 < d < 4$ [20]. Como dito anteriormente, apesar do modelo esférico clássico ser versátil e atraente para o estudo de transições de fase, ele apresenta uma patologia a baixas temperaturas. Esse tipo de comportamento conduziu a uma versão quântica para o modelo, o que nos leva a próxima seção.

2.2 Modelo Esférico Quântico

Como vimos anteriormente, a versão clássica do modelo esférico apresenta inconsistências para baixas temperaturas, sugerindo então correções de caráter quântico. Uma maneira de construir uma versão quântica para o modelo é adicionando um termo cinético, que envolve a variável de momento conjugada a $S_{\mathbf{r}}$, na Hamiltoniana (2.1),

$$\mathcal{H} = \frac{g}{2} \sum_{\mathbf{r}} P_{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - H \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}, \quad (2.24)$$

em que as variáveis agora são operadores que satisfazem as relações de comutação,

$$[S_{\mathbf{r}}, P_{\mathbf{r}'}] = i\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}, \quad [S_{\mathbf{r}}, S_{\mathbf{r}'}] = 0, \quad [P_{\mathbf{r}}, P_{\mathbf{r}'}] = 0. \quad (2.25)$$

A constante de acoplamento g em (2.24) mede a relevância das flutuações quânticas e o limite de $g \rightarrow 0$ recuperamos o caso clássico. A Hamiltoniana pode ser diagonalizada pelo método canônico [20], e nessa formulação, o potencial químico é definido a partir do vínculo esférico médio (2.7).

Uma alternativa de quantizar o modelo esférico, que apresentamos a seguir, é via integração funcional e neste caso o potencial químico é definido pelo vínculo esférico estrito, equação (2.3). O cálculo da função de partição é realizado no formalismo do tempo imaginário, tal que precisamos considerar o tempo imaginário euclidiano $\tau = it$, sendo $\tau \in [0, \beta]$. De uma forma geral, temos

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}S \, \delta \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) e^{-\int_0^\beta d\tau \, L_E}, \quad (2.26)$$

com a medida de integração $\mathcal{D}S \equiv \prod_{\mathbf{r}} \mathcal{D}S_{\mathbf{r}}$ e a Lagrangiana euclidiana

$$L_E = \frac{1}{2g} \sum_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial S_{\mathbf{r}}}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'}, \quad (2.27)$$

em que a energia de interação $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \equiv J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ depende apenas do módulo da distância entre os sítios, \mathbf{r} e \mathbf{r}' . Neste formalismo as variáveis de spins satisfazem a condição periódica de contorno

$$S_{\mathbf{r}}(0) = S_{\mathbf{r}}(\beta), \quad (2.28)$$

na qual produzem as frequências de Matsubara $w_n = 2n\pi/\beta$ com $n \in \mathbb{Z}$.

O vínculo esférico (2.3) é implementado na função de partição a partir da representação integral funcional da função delta,

$$\delta \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) = \int \mathcal{D}\mu \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \mu \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) \right], \quad (2.29)$$

tal que a função de partição do modelo esférico quântico pode ser reescrita como

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}S \mathcal{D}\mu \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2g} \sum_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial S_{\mathbf{r}}}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} + \mu \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) \right] \right\}. \quad (2.30)$$

Para calcular explicitamente a equação (2.30) é conveniente passarmos para o espaço dos momentos,

$$S_{\mathbf{r}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} S_{\mathbf{q}}(\tau), \quad (2.31)$$

em que a função de partição assume a forma

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}S \mathcal{D}\mu \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left[\sum_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{q}} \left(-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \mu - \frac{J(\mathbf{q})}{2} \right) S_{-\mathbf{q}} \right] - \mu N \right\}, \quad (2.32)$$

identificando

$$J(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{h}} J(|\mathbf{h}|) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{h}}, \quad (2.33)$$

e $\mathbf{h} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ como sendo a distância entre dois sítios. Calculando as integrais Gaussianas nas variáveis $S_{\mathbf{q}}$ e usando fato que $\det A = e^{\text{Tr} \ln A}$, obtemos

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\mu e^{-N S_{\text{eff}}}, \quad (2.34)$$

sendo S_{eff} a ação efetiva

$$S_{\text{eff}} \equiv - \int_0^\beta d\tau \mu + \frac{1}{2N} \text{Tr} \left[\sum_{\mathbf{q}} \ln \left(-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \mu - \frac{J(\mathbf{q})}{2} \right) \right]. \quad (2.35)$$

A integral remanescente em (2.34) é efetuada usando o método do ponto de sela, que se torna exata no limite termodinâmico, $N \rightarrow \infty$. Neste caso, a condição de ponto de sela,

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \mu(\tau)} = 0, \quad (2.36)$$

conduz a expressão

$$1 - \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \int d\tau \langle \tau | \frac{\delta(\tau - \tau')}{\left(-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \mu - \frac{J(\mathbf{q})}{2}\right)} | \tau \rangle = 0, \quad (2.37)$$

em que usamos $\delta \text{Tr} \ln A = \text{Tr} A^{-1} \delta A$ e a base $|\tau\rangle$ para o cálculo do traço. Na equação de ponto de sela é suficiente procurarmos por soluções em que μ não dependa do tempo. Assim, podemos introduzir a relação de completeza $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$, com

$$\langle \tau | n \rangle = \frac{e^{i w_n \tau}}{\sqrt{\beta}}, \quad (2.38)$$

em que nesta base o operador $\partial^2 / \partial \tau^2$ é diagonal

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} |n\rangle = -w_n^2 |n\rangle. \quad (2.39)$$

Desta forma, a expressão de ponto de sela é dada por

$$1 - \frac{1}{2N\beta} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{w_n^2}{2g} + \mu - \frac{J(\mathbf{q})}{2}\right)} = 0. \quad (2.40)$$

Note que, as variáveis τ e n são escolhidas para desempenharem o mesmo papel das variáveis canônicas q e p em mecânica quântica.

A soma sobre as frequências de Matsubara w_n são realizadas com o auxílio da identidade

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} \coth(\pi y), \quad \text{para } y > 0, \quad (2.41)$$

cujos resultado final é

$$1 = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{g}{w_{\mathbf{q}}} \coth\left(\frac{\beta w_{\mathbf{q}}}{2}\right), \quad (2.42)$$

com a frequência definida como

$$w_{\mathbf{q}}^2 \equiv 2g \left(\mu - \frac{J(\mathbf{q})}{2} \right). \quad (2.43)$$

A equação de ponto de sela é válida para qualquer temperatura e no limite $g \rightarrow 0$ recuperamos o caso clássico, (2.16). Além disso, a partir dela podemos obter o comportamento crítico do sistema e mostrar que a versão quântica do modelo esférico apresenta transição de fase tanto para temperatura finita quanto para temperatura nula.

Visto que a expressão do vínculo, equação (2.42), é válida para qualquer energia de interação que depende apenas do módulo da distância entre dois sítios, apresentamos a seguir o comportamento crítico considerando interações apenas entre primeiros vizinhos,

$$J(\mathbf{q}) = 2J \sum_{i=1}^d \cos(q_i), \quad (2.44)$$

com $J > 0$ correspondendo ao caso ferromagnético. Trataremos os casos de temperatura nula e finita separadamente.

2.2.1 Comportamento Crítico Quântico

O comportamento crítico quântico é descrito pela expressão (2.42) no limite de baixas temperaturas, ou seja $\beta \rightarrow \infty$. Neste caso, a expressão do vínculo no limite termodinâmico assume a forma

$$1 = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{g}{\sqrt{2g(\mu - J \sum_i \cos q_i)}}, \quad (2.45)$$

em que usamos o comportamento assintótico da função cosseno hiperbólico, $\cosh(\beta w_{\mathbf{q}}/2) \rightarrow 1$. O ponto crítico é determinado pela singularidade da integral (2.45), desde que a integral convirja neste ponto. Assim, analisando o integrando, verificamos que o potencial deve satisfazer a condição $\mu > J_{\max}(\mathbf{q}) = J \max(\sum_i \cos q_i)$. Com isso, é possível definir o ponto crítico

$$\mu_c = Jd. \quad (2.46)$$

A partir da identidade

$$\frac{1}{X^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty dt t^{p-1} e^{-tX}, \quad \text{com } X, p > 0, \quad (2.47)$$

é possível calcular explicitamente a expressão do vínculo (2.45)

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{\frac{g}{2\pi J}} \int_0^\infty dt t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu}{J}t} \left[\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \exp\left(t \sum_i \cos q_i\right) \right] \\ 2 &= \sqrt{\frac{g}{2\pi J}} \int_0^\infty dt t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu}{J}t} [I_0(t)]^d, \end{aligned} \quad (2.48)$$

em que $I_0(t)$ é a função de Bessel modificada de primeiro tipo. A análise do comportamento crítico é realizado analisando a integral em (2.48), desta forma definimos

$$\mathcal{I}_d(\mu) \equiv \int_0^\infty dt t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu}{J}t} [I_0(t)]^d \quad (2.49)$$

e iremos verificar a sua convergência ao redor do ponto crítico. A partir dos comportamentos assintóticos da função de Bessel

$$\begin{aligned} I_0(t) &\sim 1, & t \rightarrow 0, \\ I_0(t) &\sim \frac{e^t}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}}, & t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.50)$$

verificamos que a integral pode apresentar uma divergência no limite de $t \rightarrow \infty$, ou seja

$$\mathcal{I}_d(\mu) \sim \int dt t^{-(\frac{d+1}{2})} \exp \left[-t \frac{(\mu - \mu_c)}{J} \right]. \quad (2.51)$$

No ponto crítico, a integral converge para $d > 1$, que neste caso, define a dimensão crítica inferior $d_l^0 = 1$. Desta forma, o modelo exhibe um ponto crítico quando μ alcança μ_c , com um correspondente valor $\sqrt{g} = \sqrt{g_c}$.

O comportamento de $(\mu - \mu_c)$ de acordo com a dimensionalidade para $d > 1$, pode ser encontrado tomando a derivada de \mathcal{I}_d com relação a μ no limite de t grande

$$\mathcal{I}'_d(\mu) \sim - \int_0^\infty dt t^{\frac{1-d}{2}} \exp \left[-t \frac{(\mu - \mu_c)}{J} \right], \quad (2.52)$$

em que quando avaliada no ponto crítico, converge se $d > 3$, resultando na dimensão crítica superior $d_u^0 = 3$. Assim sendo, para $1 < d < 3$ o comportamento de $(\mu - \mu_c)$ é encontrado calculando (2.52)

$$\mathcal{I}'_d(\mu) \sim - (\mu - \mu_c)^{\frac{d-3}{2}} \Gamma \left(\frac{3-d}{2} \right). \quad (2.53)$$

Em seguida, integrando em μ obtemos

$$\mathcal{I}_d(\mu) - \mathcal{I}_d(\mu_c) \sim - (\mu - \mu_c)^{\frac{d-1}{2}} \Gamma \left(\frac{3-d}{2} \right). \quad (2.54)$$

De acordo com (2.48), a integral $\mathcal{I}_d(\mu)$ é proporcional a $1/\sqrt{g}$, o que nos permite obter o comportamento crítico a partir de (2.54) como

$$(\mu - \mu_c) \sim \tau_g^{\frac{2}{d-1}}, \quad \text{para } 1 < d < 3, \quad (2.55)$$

em que $\tau_g \equiv (\sqrt{g} - \sqrt{g_c}) / \sqrt{g_c}$.

O comportamento na dimensão crítica superior é realizado separadamente ao caso $d > d_u$. Para o primeiro caso, $d = 3$, tomamos a derivada de (2.49) com respeito a μ

$$\mathcal{I}'_3(\mu) \sim - \int_0^\infty dt t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu}{J}t} [I_0(t)]^3, \quad (2.56)$$

e dividimos a região de integração em dois intervalos

$$\mathcal{I}'_3(\mu) \sim - \int_0^1 dt t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu}{J}t} [I_0(t)]^3 - \int_1^\infty dt t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu}{J}t} [I_0(t)]^3. \quad (2.57)$$

O primeiro termo é finito, enquanto o segundo pode ser reescrito com a ajuda do comportamento assintótico da função de Bessel para t grande

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_3(\mu) &\sim - \int_1^\infty dt t^{-1} \exp \left[-t \frac{(\mu - \mu_c)}{J} \right] \\ &\sim - \Gamma \left(0, \frac{\mu - \mu_c}{J} \right), \end{aligned} \quad (2.58)$$

no qual $\Gamma\left(0, \frac{\mu - \mu_c}{J}\right)$ é a função Gamma incompleta. Como o argumento $(\mu - \mu_c)$ é pequeno, expandimos a função Gamma incompleta,

$$\Gamma\left(0, \frac{\mu - \mu_c}{J}\right) = -\ln\left(\frac{\mu - \mu_c}{J}\right) + \Gamma'(1) + \mathcal{O}(\mu - \mu_c), \quad (2.59)$$

em que $\Gamma'(1)$ é a constante de Euler, e reescrevemos (2.58) como

$$\mathcal{I}'_3(\mu) \sim -\ln(\mu - \mu_c). \quad (2.60)$$

Integrando a equação acima em μ

$$\mathcal{I}_3(\mu) - \mathcal{I}_3(\mu_c) \sim (\mu - \mu_c) \ln(\mu - \mu_c), \quad (2.61)$$

e usando novamente que $\mathcal{I}_d(\mu) \sim 1/\sqrt{g}$, temos

$$(\mu - \mu_c) \sim -\frac{\tau_g}{\ln \tau_g}, \quad \text{para } d = 3. \quad (2.62)$$

Para $d > 3$ a análise é trivial visto que \mathcal{I}'_d é convergente no ponto crítico, ou seja,

$$\mathcal{I}(\mu) = \mathcal{I}(\mu_c) + (\mu - \mu_c) \mathcal{I}'(\mu_c) + \dots. \quad (2.63)$$

Reescrevendo em termos de \sqrt{g} , obtemos

$$(\mu - \mu_c) \sim \tau_g \quad \text{para } d > 3. \quad (2.64)$$

Todo o comportamento à temperatura nula nas proximidades do ponto crítico pode ser sintetizado como segue

$$(\mu - \mu_c) \sim \begin{cases} \tau_g^{\frac{2}{d-1}} & \text{para } 1 < d < 3 \\ -\frac{\tau_g}{\ln \tau_g} & \text{para } d = 3 \\ \tau_g & \text{para } d > 3 \end{cases}, \quad (2.65)$$

em que exhibe uma transição de fase quântica não trivial para $1 < d < 3$ e uma transição de campo médio para $d > 3$.

2.2.2 Comportamento Crítico a Temperatura Finita

O comportamento crítico à temperatura finita é feita no limite de altas temperaturas, $\beta \rightarrow 0$, e neste caso o parâmetro responsável pela transição é a temperatura. Assim, a partir do comportamento assintótico da função cosseno hiperbólico, a equação do vínculo (2.42), assume a forma

$$2\beta \sim \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mu - J \sum_i \cos q_i)}. \quad (2.66)$$

A análise do comportamento crítico é similar é caso de temperatura nula e o ponto crítico é $\mu_c = Jd$ com a condição que $w_{\mathbf{q}}$ deve ser real, $\mu > J \max(\sum_i \cos q_i)$.

Aqui também é interessante escrevermos a expressão do vínculo em termos da função de Bessel e para isso fazemos o uso da identidade (2.47),

$$\begin{aligned}\frac{2J}{k_B T} &= \int_0^\infty dt e^{-\frac{\mu}{J}t} \left[\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \exp \left(t \sum_i \cos q_i \right) \right] \\ \frac{2J}{k_B T} &= \int_0^\infty dt e^{-\frac{\mu}{J}t} [I_0(t)]^d.\end{aligned}\quad (2.67)$$

O comportamento crítico é dado pela análise de convergência da integral

$$\mathcal{I}_d(\mu) \equiv \int_0^\infty dt e^{-\frac{\mu}{J}t} [I_0(t)]^d \quad (2.68)$$

e a partir dos comportamentos assintóticos da função Bessel, equação (2.50), verificamos que, ao redor do ponto crítico, a integral pode apresentar uma divergência no limite de $t \rightarrow \infty$

$$\mathcal{I}_d(\mu) \sim \int dt t^{-\frac{d}{2}} \exp \left[-t \frac{(\mu - \mu_c)}{J} \right]. \quad (2.69)$$

De fato, analisando (2.69), verificamos que no ponto crítico a integral converge para $d > 2$, definindo então a dimensão crítico inferior, $d_l = 2$. Consequentemente, para $d > 2$ podemos obter a dependência de $(\mu - \mu_c)$ em termos da dimensão. Para isso, consideramos a derivada da integral em relação ao parâmetro μ

$$\mathcal{I}'_d(\mu) \sim - \int dt t^{1-\frac{d}{2}} \exp \left[-t \frac{(\mu - \mu_c)}{J} \right]. \quad (2.70)$$

No ponto crítico a derivada converge para $d > 4$, definindo a dimensão crítica superior, $d_u = 4$. Portanto, para $2 < d < 4$ o comportamento de $(\mu - \mu_c)$ é obtido a partir da equação (2.70),

$$\mathcal{I}'_d(\mu) \sim -(\mu - \mu_c)^{\frac{d-4}{2}} \Gamma \left(\frac{4-d}{2} \right). \quad (2.71)$$

Integrando a equação acima em μ e levando em conta que $T \sim 1/\mathcal{I}_d$, equação (2.67), obtemos o seguinte comportamento

$$(\mu - \mu_c) \sim \tau_\beta^{\frac{2}{d-2}}, \quad \text{para } 2 < d < 4, \quad (2.72)$$

em que $\tau_\beta \equiv (T - T_c) / T_c$.

Como no caso quântico, precisamos analisar o comportamento crítico na dimensão crítica superior separadamente, assim como para $d > d_u$. Para $d = 4$, temos

$$\mathcal{I}_4(\mu) = \int_0^\infty dt e^{-\frac{\mu}{J}t} [I_0(t)]^4. \quad (2.73)$$

Tomando a derivada com relação a μ e dividindo o intervalo de integração em $[0, 1]$ e $[1, \infty]$, vemos que a divergência aparece apenas no segundo intervalo. Neste caso, para grandes valores de t reescrevemos (2.73) como

$$\begin{aligned}\mathcal{I}'_4(\mu) &\sim - \int_1^\infty dt t^{-1} \exp [-t (\mu - \mu_c)] \\ &\sim -\Gamma(0, \mu - \mu_c),\end{aligned}\quad (2.74)$$

cuja solução é dada em termos da função Gamma incompleta. Expandindo a equação acima para pequenos argumentos e integrando em μ , podemos escrever,

$$(\mu - \mu_c) \sim -\frac{\tau_\beta}{\ln \tau_\beta} \quad \text{para } d = 4. \quad (2.75)$$

Para dimensões acima da dimensão crítica superior, $d > 4$, o cálculo do comportamento de $(\mu - \mu_c)$ é análogo ao que foi feito no caso do comportamento quântico para $d > 3$, que corresponde a $d > d_u$. De uma forma geral, temos

$$(\mu - \mu_c) \sim \begin{cases} \tau_\beta^{\frac{2}{d-2}} & \text{para } 2 < d < 4 \\ -\frac{\tau_\beta}{\ln \tau_\beta} & \text{para, } d = 4 \\ \tau_\beta & \text{para } d > 4 \end{cases}. \quad (2.76)$$

Os resultados acima mostram que o sistema apresenta uma transição de fase não trivial para $2 < d < 4$ e para $d > 4$ uma transição de campo médio.

As dimensões críticas para o caso de temperatura nula diferem sempre de uma unidade para as dimensões a temperatura finita. Esse comportamento não é por acaso, ele envolve o expoente crítico dinâmico z , que de certa forma retrata a equivalência entre os graus de liberdade espacial e temporal. Além disso, o modelo esférico apresentado aqui foi proposto para interações de primeiros vizinhos, resultando em uma transição de fase quântica e clássica.

3 Supersimetria

O ponto de partida para a supersimetria é considerar que existe uma igualdade entre bósons e férmions, o que exige uma equivalência entre os graus de liberdade fermiônicos e bosônicos. Apesar de parecer uma ideia distante da realidade, acredita-se que a supersimetria se manifesta como uma simetria espontaneamente quebrada.

A partir do oscilador harmônico supersimétrico, $\mathcal{N} = 2$, podemos ilustrar e discutir as propriedades mais elementares de supersimetria. Além disso, exploramos o formalismo do superespaço em mecânica quântica com $\mathcal{N} = 1, 2$ [39, 40], o que proporciona uma base para introduzir uma versão do modelo esférico quântico supersimétrico.

3.1 Aspectos Gerais

Um sistema com dois mecanismos de supersimetria, $\mathcal{N} = 2$, é constituído por um par de supercargas Grassmanianas, Q e \bar{Q} , sendo elas as responsáveis por gerarem as transformações de supersimetria. A álgebra supersimétrica é dada por,

$$\{Q, \bar{Q}\} = H, \quad [Q, H] = [\bar{Q}, H] = 0, \quad \{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0, \quad (3.1)$$

em que H é a Hamiltoniana responsável pelas translações temporais. Uma transformação de supersimetria sobre o estado de vácuo da teoria, definido como $|0\rangle$, pode ser escrita como

$$e^{iQ}|0\rangle = |0\rangle \quad \text{e} \quad e^{i\bar{Q}}|0\rangle = |0\rangle, \quad (3.2)$$

tal que

$$Q|0\rangle = \bar{Q}|0\rangle = 0, \quad (3.3)$$

o que nos diz que o estado de vácuo da teoria é aniquilado pelas supercargas. Dessa forma, a Hamiltoniana atuando sobre o estado de vácuo produz

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= 0 \\ \{Q, \bar{Q}\}|0\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

o que nos diz que teorias supersimétricas apresentam um estado fundamental com energia nula, caracterizando uma propriedade básica.

Uma quebra espontânea de supersimetria eventualmente acontece quando uma das equações em (3.2) não é mais satisfeita, ou seja, pelo menos uma das supercargas não aniquila o vácuo,

$$Q|0\rangle \neq 0 \quad \text{ou} \quad \bar{Q}|0\rangle \neq 0, \quad (3.5)$$

o que necessariamente conduz a um estado de vácuo com energia não nula,

$$H|0\rangle \neq 0 \Rightarrow E_0 \neq 0. \quad (3.6)$$

Assim, considerando

$$H|0\rangle_B = E_0|0\rangle_B, \quad (3.7)$$

podemos analisar, de forma qualitativa, essa quebra espontânea de supersimetria, em que pelo menos uma das supercargas ainda aniquila o vácuo, $\bar{Q}|0\rangle = 0$. Além disso, podemos construir um estado fermiônico,

$$|0\rangle_F \equiv \frac{Q}{\sqrt{E_0}}|0\rangle_B \Rightarrow |0\rangle_B \equiv \frac{\bar{Q}}{\sqrt{E_0}}|0\rangle_F, \quad (3.8)$$

e a partir da álgebra de supersimetria, equação (3.1), mostrar que

$$H|0\rangle_F = E_0|0\rangle_F. \quad (3.9)$$

Das equações (3.7) e (3.9), verificamos que o estado fundamental bosônico e fermiônico são degenerados com energia E_0 .

O par de estados acima são também chamados de parceiros supersimétricos e eles surgem como uma consequência da álgebra (3.1). Isso é uma característica de estados com energia não nula. De uma forma geral, temos

$$|\text{boson}\rangle \sim \bar{Q}|\text{fermion}\rangle \quad \text{e} \quad |\text{fermion}\rangle \sim Q|\text{boson}\rangle, \quad (3.10)$$

em que fica evidente que as supercargas transformam estados bosônicos em fermiônicos e vice-versa.

É evidente que uma quebra de supersimetria requer uma análise mais detalhada, porém no contexto de transições de fase, podemos intuitivamente analisar apenas alguns pontos. Para qualquer temperatura finita, sabemos que temos estatísticas diferentes, os férmions são guiados pela estatística de Fermi-Dirac, ao passo que os bósons pela estatística de Bose-Einstein. Então, a supersimetria estará sempre quebrada para qualquer temperatura finita, devido as diferentes distribuições envolvendo bósons e férmions. Por outro lado, para temperatura nula, uma transição de fase quântica ocorre com uma energia diferente de zero para o estado fundamental, tal que próximo do ponto crítico,

$$E_0 \sim |g - g_c|^{z\nu}, \quad (3.11)$$

em que z é o expoente crítico dinâmico, ν o expoente associado ao comprimento de correlação e g é o parâmetro não térmico. Contudo, de acordo com (3.11), o comportamento crítico surge com uma energia do estado fundamental diferente de zero, neste caso a supersimetria está quebrada, resultando em uma transição de fase a temperatura nula com

uma quebra de supersimetria. Se a supersimetria estiver presente, o sistema não apresenta comportamento crítico, visto que $E_0 = 0$.

Um exemplo é o oscilador harmônico supersimétrico unidimensional que é constituído por dois osciladores, um bosônico e outro fermiônico,

$$H_B = w_B \left(a_B^\dagger a_B + \frac{1}{2} \right), \quad [a_B, a_B^\dagger] = 1 \quad (3.12)$$

e

$$H_F = w_F \left(a_F^\dagger a_F - \frac{1}{2} \right), \quad \{a_F, a_F^\dagger\} = 1, \quad (3.13)$$

respectivamente. Assim, a Hamiltoniana do oscilador harmônico supersimétrico é dada por

$$H = w \left(a_B^\dagger a_B + a_F^\dagger a_F \right), \quad (3.14)$$

em que fizemos $w_B = w_F \equiv w$. Se $w_B \neq w_F$, a supersimetria estaria quebrada, com energia

$$E_0 = \frac{(w_B - w_F)}{2}. \quad (3.15)$$

O espaço de Hilbert deste sistema é composto por estados na seguinte forma

$$|n_B, n_F\rangle \equiv |n_B\rangle \otimes |n_F\rangle, \quad (3.16)$$

com os operadores número atuando de forma usual,

$$N_B |n_B, n_F\rangle = n_B |n_B, n_F\rangle \quad \text{e} \quad N_F |n_B, n_F\rangle = n_F |n_B, n_F\rangle, \quad (3.17)$$

em que

$$N_B = a_B^\dagger a_B \quad \text{e} \quad N_F = a_F^\dagger a_F. \quad (3.18)$$

A energia é obtida através do operador Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} H |n_B, n_F\rangle &= E_{n_B, n_F} |n_B, n_F\rangle \\ &= w (n_B + n_F) |n_B, n_F\rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

e é fácil notar que o estado fundamental da teoria possui energia nula,

$$H |0, 0\rangle = E_{0,0} |0, 0\rangle \Rightarrow E_{0,0} = 0, \quad (3.20)$$

o que indica que a supersimetria está presente.

Podemos ver também o efeito das supercargas sobre os estados deste sistema, e para isso os geradores são escritos em termos dos operadores de criação e destruição,

$$Q \equiv \sqrt{w} a_B^\dagger a_F \quad \text{e} \quad \bar{Q} \equiv \sqrt{w} a_F^\dagger a_B. \quad (3.21)$$

As supercargas definidas acima são compatíveis com a álgebra de supersimetria (3.1) e tem o efeito de aniquilarem o estado de vácuo,

$$Q|0\rangle = \bar{Q}|0\rangle = 0. \quad (3.22)$$

Como as supercargas são construídas a partir dos operadores de criação e destruição, fica evidente através de (3.21) que Q cria um bóson e aniquila um férmion e \bar{Q} faz a operação contrária. De uma forma geral, a atuação de Q sobre um estado com um férmion produz

$$Q|0, 1\rangle \sim |1, 0\rangle. \quad (3.23)$$

Por outro lado, quando \bar{Q} atua sobre um estado com um bóson, temos

$$\bar{Q}|1, 0\rangle \sim |0, 1\rangle. \quad (3.24)$$

Os estados $|1, 0\rangle$ e $|0, 1\rangle$ são parceiros supersimétricos e formam estados degenerados com energia w .

3.2 Formalismo no Superespaço

O superespaço consiste em uma generalização do espaço-tempo usual a fim de acomodar as variáveis de Grassmann, $\{\theta_i, \theta_j\} = 0$. Para isso, definimos

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}(1) \equiv \int d\theta_i(1) \equiv 0 \quad \text{e} \quad \int d\theta_i \theta_j \equiv \frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j \equiv \delta_{ij}, \quad (3.25)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}(\theta_j \theta_k) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j \right) \theta_k - \theta_j \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_k \right) = \delta_{ij} \theta_k - \delta_{ik} \theta_j. \quad (3.26)$$

Na mecânica quântica, o superespaço com $\mathcal{N} = 1$ apresenta apenas um grau de liberdade bosônico, $x(t)$, e esta escolha corresponde a uma teoria $(0+1)$ -dimensões, cujo espaço-tempo é composto apenas pelo tempo t . O superespaço mais simples é formado pela variável t acompanhada de apenas uma variável de Grassmann θ .

As transformações de supersimetria correspondem a translações no superespaço,

$$t \rightarrow t' = t + i\epsilon\theta \quad \text{e} \quad \theta \rightarrow \theta' = \theta + \epsilon, \quad (3.27)$$

em que ϵ é o parâmetro de Grassmann infinitesimal da translação, gerado pela supercarga

$$Q = \frac{\partial}{\partial \theta} + i\theta \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.28)$$

No superespaço, podemos considerar uma função escalar real $\Phi(t, \theta)$, denominada de supercampo escalar real, cuja expansão em potências de θ fica

$$\Phi(t, \theta) = x(t) + i\theta\psi(t), \quad (3.29)$$

usando o fato que $\theta^2 = 0$. O termo $x(t)$ é identificado como o grau de liberdade bosônico usual e $\psi(t)$ como um grau de liberdade fermiônico dinâmico. Note que a supersimetria incorpora simultaneamente graus de liberdade bosônicos e fermiônicos, e além disso, vale verificar que o número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos são equivalentes no supercampo, satisfazendo o requerimento básico da supersimetria. Sendo um escalar, sobre translações (3.27), o supercampo deve transformar como

$$\Phi'(t', \theta') = \Phi(t, \theta). \quad (3.30)$$

Analisando o lado esquerdo da equação acima,

$$\Phi'(t', \theta') = \Phi'(t + i\epsilon\theta, \theta + \epsilon) = \Phi'(t, \theta) + i\epsilon\theta \frac{\partial}{\partial t} \Phi' + \epsilon \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi', \quad (3.31)$$

vemos que existe uma certa arbitrariedade com relação ao último termo, pois poderíamos ter escrito com o parâmetro ϵ a direita da derivada, isto é $\frac{\partial}{\partial \theta} \Phi' \epsilon$. Como $\{\frac{\partial}{\partial \theta}, \epsilon\} = 0$, isso produz um sinal de menos se tentarmos arranja-lo na forma acima. Neste trabalho, por conveniência, usamos a definição em (3.31) para a expansão em Taylor envolvendo variáveis que anti-comutam.

De acordo com (3.31), segue que

$$\delta_\epsilon \Phi \equiv \Phi'(t, \theta) - \Phi(t, \theta) = -\epsilon Q \Phi. \quad (3.32)$$

Escrevendo explicitamente a variação funcional do supercampo na forma

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \Phi = \delta_\epsilon x + i\theta \delta_\epsilon \psi &= -\epsilon Q \Phi \\ &= -i\epsilon \psi + i\theta \epsilon \dot{x}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

obtemos as transformações das componentes x e ψ ,

$$\delta_\epsilon x = -i\epsilon \psi \quad \text{e} \quad \delta_\epsilon \psi = \epsilon \dot{x}. \quad (3.34)$$

Estas são as transformações de supersimetria e, de uma forma geral, elas transformam um bóson em um férmion e vice-versa, o que nos leva ao real sentido de uma simetria envolvendo bósons e férmions.

Um ponto interessante é que a supersimetria vincula simetrias internas e geométricas (espaço-tempo),

$$\{Q, Q\} = 2i \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.35)$$

Em outras palavras, o anti-comutador das supercargas é proporcional ao gerador das translações temporais, isto é, a Hamiltoniana do sistema.

Existe um outro operador que tem um papel fundamental na construção da ação no superespaço, chamado de derivada supercovariante,

$$D = \frac{\partial}{\partial \theta} - i\theta \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.36)$$

este operador satisfaz a relação $\{Q, D\} = 0$, o que implica que $D\Phi$ se transforma sobre supersimetria como os próprios supercampos,

$$\delta_\epsilon(D\Phi) = -\epsilon Q(D\Phi). \quad (3.37)$$

O mesmo acontece para a derivada temporal do supercampo,

$$\delta_\epsilon \dot{\Phi} = -\epsilon Q \dot{\Phi}. \quad (3.38)$$

Isso tem uma consequência muito importante, pois qualquer ação escrita em termos de Φ , $D\Phi$ e $\dot{\Phi}$ é manifestamente supersimétrica. De fato, uma ação no superespaço pode ser expressa como

$$S = \int dt d\theta \mathcal{L}(\Phi, D\Phi, \dot{\Phi}), \quad (3.39)$$

e a Lagrangiana \mathcal{L} deve ser um número de Grassmann a fim de produzir uma ação escalar que não se anula. Sobre uma transformação de supersimetria, a ação automaticamente desaparece,

$$\delta_\epsilon S = \int dt d\theta \delta_\epsilon \mathcal{L} = \int dt d\theta (-\epsilon Q) \mathcal{L} = 0, \quad (3.40)$$

uma vez que é uma derivada total.

Uma ação simples invariante sobre as transformações (3.34) é a de uma partícula livre supersimétrica,

$$S = \frac{i}{2} \int dt d\theta \dot{\Phi} D\Phi = \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{i}{2} \dot{\psi} \psi \right), \quad (3.41)$$

Poderíamos tentar construir termos de potencias, como por exemplo, um termo proporcional a x^2 . Isso é fundamental para o propósito deste trabalho, visto que termos de interações do modelo esférico, $J_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'}$, são essencialmente dessa forma. A conclusão é que, com $\mathcal{N} = 1$ não somos capazes de construir termos de interações, o que nos leva a considerar uma supersimetria estendida.

O próximo caso é o de duas supersimetrias, $\mathcal{N} = 2$. Neste cenário, o superespaço é dimensionalmente maior e contém, além do tempo, duas variáveis de Grassmann, θ e $\bar{\theta}$, que podem ser pensadas como complexo conjugada uma da outra. Dessa forma, consideramos duas translações independentes no superespaço¹, em que corresponde a duas transformações independentes de supersimetria,

$$\begin{aligned} \epsilon : \quad t &\rightarrow t + i\bar{\theta}\epsilon, & \theta &\rightarrow \theta - \epsilon, & \text{e} \quad \bar{\theta} &\rightarrow \bar{\theta} \\ \bar{\epsilon} : \quad t &\rightarrow t - i\bar{\epsilon}\theta, & \theta &\rightarrow \theta, & \text{e} \quad \bar{\theta} &\rightarrow \bar{\theta} - \bar{\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

sendo ϵ e $\bar{\epsilon}$ parâmetros de Grassman infinitesimais. Estas translações são geradas por duas supercargas,

$$Q \equiv -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i\theta \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \bar{Q} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} + i\bar{\theta} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.43)$$

¹ Na realidade, é a combinação dessas duas transformações que produzem uma translação real para a coordenada temporal, $t \rightarrow t + i(\bar{\theta}\epsilon - \bar{\epsilon}\theta)$, mas nós podemos considerar uma de cada vez.

que satisfazem as relações de anti-comutação

$$\{Q, Q\} = 0, \quad \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0 \quad \text{e} \quad \{Q, \bar{Q}\} = -2i \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.44)$$

Podemos agora considerar um supercampo escalar real, $\Phi(t, \theta, \bar{\theta})$, em que sua expansão em potências das variáveis de Grassmann possui mais componentes que no caso anterior,

$$\Phi(t, \theta, \bar{\theta}) = x + \bar{\theta}\psi + \bar{\psi}\theta + \bar{\theta}\theta F. \quad (3.45)$$

Temos aqui dois graus de liberdade bosônicos, x e F , e dois graus de liberdade fermiônicos, ψ e $\bar{\psi}$. Novamente, destacamos a equivalência entre os graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. Contudo, ao contrário de $\mathcal{N} = 1$, uma importante distinção sobre a correspondência nos graus de liberdade acontece neste caso. Para entender isso, note que até o momento nada foi dito com relação as equações de movimento, as quais são responsáveis pela dinâmica do modelo. Dessa forma, dizemos que a equivalência é *off-shell*. O ponto é que nem todas as variáveis presentes no supercampo correspondem a um grau de liberdade físico. Para uma ação simples, que iremos considerar, as equações de movimento implicam que F é um grau de liberdade auxiliar, enquanto os graus de liberdade fermiônicos ψ e $\bar{\psi}$ não são independentes. Voltaremos a esta discussão no final desta seção.

Sobre translações, o supercampo transforma-se como

$$\Phi'(t', \theta', \bar{\theta}') = \Phi(t, \theta, \bar{\theta}). \quad (3.46)$$

Usando a expansão em Taylor como em (3.31), obtemos as variações funcionais

$$\delta_\epsilon \Phi = -\bar{Q}\epsilon\Phi \quad \text{e} \quad \delta_{\bar{\epsilon}} \Phi = -\bar{\epsilon}Q\Phi \quad (3.47)$$

e essas relações nos levam as transformações para as componentes do supercampo. Para o parâmetro ϵ , temos

$$\delta_\epsilon x = \bar{\psi}\epsilon, \quad \delta_\epsilon \psi = -i\dot{x}\epsilon + F\epsilon, \quad \delta_\epsilon \bar{\psi} = 0, \quad \text{e} \quad \delta_\epsilon F = i\dot{\bar{\psi}}\epsilon, \quad (3.48)$$

e para $\bar{\epsilon}$

$$\delta_{\bar{\epsilon}} x = \bar{\epsilon}\psi, \quad \delta_{\bar{\epsilon}} \psi = 0, \quad \delta_{\bar{\epsilon}} \bar{\psi} = i\dot{x}\bar{\epsilon} + F\bar{\epsilon}, \quad \text{e} \quad \delta_{\bar{\epsilon}} F = -i\bar{\epsilon}\dot{\psi}. \quad (3.49)$$

As derivadas supercovariantes são construídas tomando as combinações opostas das derivadas das supercargas em (3.43),

$$D \equiv -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + i\theta \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \bar{D} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} - i\bar{\theta} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.50)$$

satisfazendo as relações de anti-comutação com as supercargas,

$$\{D, Q\} = \{D, \bar{Q}\} = \{\bar{D}, Q\} = \{\bar{D}, \bar{Q}\} = 0. \quad (3.51)$$

Como já discutido no caso $\mathcal{N} = 1$, estas relações garantem que qualquer ação no superespaço envolvendo os supercampos e as derivadas supercovariantes dos supercampos seja manifestamente supersimétrica. Em geral, temos,

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} \mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}, D\Phi, \bar{D}\Phi), \quad (3.52)$$

em que, em contraste com o caso $\mathcal{N} = 1$, a Lagrangiana é um escalar.

Considerando aqui uma ação simples,

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} \left(\frac{1}{2} \bar{D}\Phi D\Phi - U(\Phi) \right), \quad (3.53)$$

em que U é uma função arbitrária do supercampo. Para escrever a ação em termos das componentes, expandimos o potencial U em potências de θ e $\bar{\theta}$ e então selecionamos a contribuição $\bar{\theta}\theta$,

$$U(x + \bar{\theta}\psi + \bar{\psi}\theta + \bar{\theta}\theta F) \Big|_{\bar{\theta}\theta} = U'(x)F - U''(x)\bar{\psi}\psi, \quad (3.54)$$

sendo U' e U'' derivadas com relação a x . Portanto, a ação em componentes assume a forma

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + i\bar{\psi}\dot{\psi} + \frac{1}{2} F^2 - U'(x)F + U''(x)\bar{\psi}\psi \right). \quad (3.55)$$

Essa é a ação *off-shell* para a mecânica quântica supersimétrica com $\mathcal{N} = 2$, invariante sobre (3.48) e (3.49). Essa expressão mostra também que F é um grau de liberdade auxiliar, pois não temos derivada temporal de F , sua equação de movimento é apenas uma equação algébrica,

$$F = U'. \quad (3.56)$$

Assim, podemos eliminá-lo da Lagrangiana e obter a formulação *on-shell*,

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + i\bar{\psi}\dot{\psi} - \frac{1}{2} (U'(x))^2 + U''(x)\bar{\psi}\psi \right). \quad (3.57)$$

Desta forma, é imediato construir termos de potenciais que nos interessa. Por exemplo, o potencial do oscilador harmônico corresponde a $U' = wx$, em que por sua vez, vem do seguinte termo no superespaço,

$$U(\Phi) = \frac{1}{2} \omega \Phi^2. \quad (3.58)$$

Como último ponto, discutimos a contagem dos graus de liberdade na formulação *on-shell*. À primeira vista, parece que não há uma equivalência, pois temos um grau de liberdade bosônico, x , contra dois graus de liberdade fermiônicos, ψ e $\bar{\psi}$. Contudo, as equações de movimento para os férmions são

$$i\dot{\bar{\psi}} + U''\bar{\psi} = 0 \quad \text{e} \quad i\dot{\psi} - U''\psi = 0, \quad (3.59)$$

indicando que são apenas o complexo conjugado uma da outra. Logo, escrevemos o grau de liberdade fermiônico como

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2, \quad (3.60)$$

sendo ψ_1 e ψ_2 variáveis de Grassmann reais, o que indica que elas não são totalmente independentes,

$$\dot{\psi}_2 + U''\psi_1 = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\psi}_1 - U''\psi_2 = 0. \quad (3.61)$$

A conclusão é que temos apenas um grau de liberdade fermiônico independente. A equivalência entre os graus de liberdade só é alcançada depois do uso das equações de movimento na formulação *on-shell*. Isso é uma propriedade geral de teorias supersimétricas. Observamos também que não existe tal distinção como no caso $\mathcal{N} = 1$, discutido anteriormente.

Por fim, no caso $\mathcal{N} = 2$, o formalismo do superespaço naturalmente entrega uma formulação *off-shell*, onde a equivalência entre os graus de liberdade é automática, tendo como preço a introdução de variáveis auxiliares. Por outro lado, a formulação *on-shell*, considera graus de liberdade físicos e a equivalência é alcançada a partir das equações de movimento.

4 Modelo Esférico Quântico Supersimétrico

Neste capítulo abordamos o modelo esférico quântico supersimétrico. A primeira seção é dedicada a construção do modelo diretamente no superespaço na formulação *off-shell*. Em seguida, apresentamos uma seção para a formulação *on-shell* no contexto de interações de primeiros vizinhos e discutimos também o possível surgimento de um ponto de Lifshitz emergindo no limite do contínuo. As demais seções são realizadas na formulação *off-shell*, em que a função de partição é obtida via ponto de sela no limite termodinâmico. Além disso, para interações de campo médio, analisamos o comportamento crítico para temperatura finita e temperatura nula, encontrando uma transição de fase em ambos regimes de temperatura. Por fim, calculamos algumas quantidades termodinâmicas de interesse e os seus respectivos expoentes críticos.

4.1 Extensão Supersimétrica

A extensão supersimétrica do modelo esférico quântico consiste em introduzir um parceiro fermiônico para cada variável bosônica $S_{\mathbf{r}}$, de tal forma que a supersimetria seja respeitada. É evidente que a inserção de graus de liberdade fermiônicos também afeta o vínculo da teoria, de tal forma que devemos nos assegurar que os requisitos de supersimetria sejam compatíveis com a estrutura de vínculo do modelo esférico. Uma forma eficaz de incorporar essas condições é realizar toda a construção do modelo diretamente no superespaço, em que a supersimetria está presente.

Para a formulação no superespaço, é suficiente considerarmos uma supersimetria estendida $\mathcal{N} = 2$, que como vimos, é o caso em que o superespaço consiste do tempo t e um par de variáveis de Grassmann, θ e $\bar{\theta}$, que podem ser consideradas como complexo conjugadas uma da outra. A variável usual de spin $S_{\mathbf{r}}$ dá lugar a uma variável de superspin, $\Phi_{\mathbf{r}}$, também chamado de supercampo, que pode ser escrita em potências de θ e $\bar{\theta}$,

$$\Phi_{\mathbf{r}} = S_{\mathbf{r}} + \bar{\theta}\psi_{\mathbf{r}} + \bar{\psi}_{\mathbf{r}}\theta + \bar{\theta}\theta F_{\mathbf{r}}. \quad (4.1)$$

Na expansão do supercampo, a variável $S_{\mathbf{r}}$ aparece na primeira componente, as variáveis de Grassmann $\psi_{\mathbf{r}}$ e $\bar{\psi}_{\mathbf{r}}$ são os parceiros fermiônicos, enquanto $F_{\mathbf{r}}$ é o campo bosônico auxiliar, inerente na supersimetria *off-shell*. De uma forma geral, no caso supersimétrico, temos mais graus de liberdade por sítio, quando comparado com o modelo esférico quântico usual. Isso está ilustrado na figura 1.

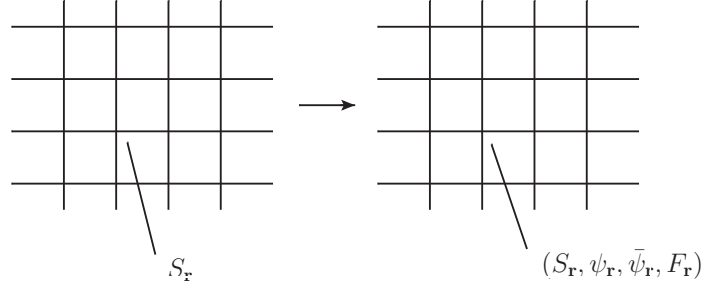


Figura 1 – A rede do lado esquerdo corresponde ao caso do modelo esférico quântico usual, em que existe apenas uma variável de spin $S_{\mathbf{r}}$ em cada sítio. O lado direito corresponde à extensão supersimétrica, na qual temos quatro variáveis em cada sítio, estas variáveis podem ser escritas como componentes de um supercampo $\Phi_{\mathbf{r}} = S_{\mathbf{r}} + \bar{\theta}\psi_{\mathbf{r}} + \bar{\psi}_{\mathbf{r}}\theta + \bar{\theta}\theta F_{\mathbf{r}}$.

Com relação as interações do modelo, a escolha de $\mathcal{N} = 2$ é suficiente para construirmos interações quadráticas do tipo $J_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}S_{\mathbf{r}}S_{\mathbf{r}'}$. O próximo passo é a generalização do vínculo esférico para o caso supersimétrico, em que agora a condição de vínculo é imposta sobre o supercampo $\Phi_{\mathbf{r}}$,

$$\sum_{\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{r}}^2 = N. \quad (4.2)$$

O vínculo sobre as componentes surge quando comparamos as potências das variáveis de Grassmann, θ e $\bar{\theta}$, em ambos os lados da expressão acima, o que produz

$$\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 = N, \quad \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}\psi_{\mathbf{r}} = 0, \quad \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}\bar{\psi}_{\mathbf{r}} = 0, \quad \text{e} \quad \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}F_{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}}\psi_{\mathbf{r}}. \quad (4.3)$$

Note que, além da presença do vínculo esférico usual, a inclusão da supersimetria no modelo exige uma estrutura de vínculo mais geral.

Definido o supercampo e a estrutura de vínculos da teoria, é importante investigar as transformações de supersimetria do modelo, que para $\mathcal{N} = 2$, são geradas pelas supercargas

$$Q \equiv -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i\theta \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \bar{Q} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} + i\bar{\theta} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.4)$$

que satisfazem as relações de anti-comutação dadas em (3.44). As supercargas geram translações no superespaço

$$\begin{aligned} \epsilon : \quad & t \rightarrow t + i\bar{\theta}\epsilon, \quad \theta \rightarrow \theta - \epsilon, \quad \text{e} \quad \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} \\ \bar{\epsilon} : \quad & t \rightarrow t - i\bar{\epsilon}\theta, \quad \theta \rightarrow \theta, \quad \text{e} \quad \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} - \bar{\epsilon}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que ϵ e $\bar{\epsilon}$ são os parâmetros de Grassmann infinitesimais da transformação. Sobre translações, a lei de transformação para o supercampo é dada por

$$\Phi'_{\mathbf{r}}(t', \theta', \bar{\theta}') = \Phi_{\mathbf{r}}(t, \theta, \bar{\theta}). \quad (4.6)$$

A variação funcional, $\delta\Phi_{\mathbf{r}} \equiv \Phi'_{\mathbf{r}}(t, \theta, \bar{\theta}) - \Phi_{\mathbf{r}}(t, \theta, \bar{\theta})$, nos leva a

$$\delta_{\epsilon}\Phi_{\mathbf{r}} = -\bar{Q}\epsilon\Phi_{\mathbf{r}} \quad \text{e} \quad \delta_{\bar{\epsilon}}\Phi_{\mathbf{r}} = -\bar{\epsilon}Q\Phi_{\mathbf{r}}, \quad (4.7)$$

para os dois parâmetros ϵ e $\bar{\epsilon}$. Novamente, podemos comparar as potências de θ e $\bar{\theta}$ e obter as transformações de supersimetria para as componentes

$$\epsilon: \quad \delta_{\epsilon}S_{\mathbf{r}} = \bar{\psi}_{\mathbf{r}}\epsilon, \quad \delta_{\epsilon}\psi_{\mathbf{r}} = -i\dot{S}_{\mathbf{r}}\epsilon + F_{\mathbf{r}}\epsilon, \quad \delta_{\epsilon}\bar{\psi}_{\mathbf{r}} = 0, \quad \text{e} \quad \delta_{\epsilon}F_{\mathbf{r}} = i\dot{\psi}_{\mathbf{r}}\epsilon; \quad (4.8)$$

e

$$\bar{\epsilon}: \quad \delta_{\bar{\epsilon}}S_{\mathbf{r}} = \bar{\epsilon}\psi_{\mathbf{r}}, \quad \delta_{\bar{\epsilon}}\psi_{\mathbf{r}} = 0, \quad \delta_{\bar{\epsilon}}\bar{\psi}_{\mathbf{r}} = i\dot{S}_{\mathbf{r}}\bar{\epsilon} + F_{\mathbf{r}}\bar{\epsilon}, \quad \text{e} \quad \delta_{\bar{\epsilon}}F_{\mathbf{r}} = -i\bar{\epsilon}\dot{\psi}_{\mathbf{r}}. \quad (4.9)$$

A formulação supersimétrica precisa ainda ser complementada com um termo cinético. Isso pode ser realizado através das derivadas supercovariantes, que de certa forma generalizam a noção de derivada temporal no superespaço,

$$D \equiv -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\theta\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \bar{D} \equiv \frac{\partial}{\partial\theta} - i\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.10)$$

em que são escolhidas para satisfazer as seguintes relações de anti-comutação com as supercargas,

$$\{D, Q\} = \{D, \bar{Q}\} = \{\bar{D}, Q\} = \{\bar{D}, \bar{Q}\} = 0 \quad \text{e} \quad \{D, \bar{D}\} = 2i\frac{\partial}{\partial t}. \quad (4.11)$$

Mais uma vez enfatizamos que as relações acima são de suma importância, pois atestam que a derivada supercovariante de um supercampo se transforma da mesma maneira que um supercampo, perante uma transformação de supersimetria. Isso nos dá a liberdade de escrever qualquer ação no superespaço envolvendo apenas supercampos e derivadas supercovariantes dos supercampos da seguinte forma

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} L(\Phi_{\mathbf{r}}, D\Phi_{\mathbf{r}}, \bar{D}\Phi_{\mathbf{r}}), \quad (4.12)$$

que é manifestamente supersimétrica. Com isso, podemos generalizar o modelo esférico quântico para o caso supersimétrico

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} \left(\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \bar{D}\Phi_{\mathbf{r}} D\Phi_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \Phi_{\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{r}'} \right), \quad (4.13)$$

sujeito ao vínculo (4.2). O vínculo pode ser implementado diretamente na ação no superespaço via um super multiplicador de Lagrange

$$\Xi(t, \theta, \bar{\theta}) = \gamma + \bar{\theta}\xi + \bar{\xi}\theta + \bar{\theta}\theta\mu, \quad (4.14)$$

o que resulta em

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} \left[\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \bar{D}\Phi_{\mathbf{r}} D\Phi_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \Phi_{\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{r}'} - \Xi \left(\sum_{\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{r}}^2 - N \right) \right]. \quad (4.15)$$

Realizando as integrações sobre as variáveis de Grassmann, obtemos uma expressão em função das componentes do supercampo. O primeiro termo em (4.15) fornece a dinâmica do modelo,

$$\begin{aligned} \int d\theta d\bar{\theta} \left[\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \bar{D}\Phi_{\mathbf{r}} D\Phi_{\mathbf{r}} \right] &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \left[\dot{S}_{\mathbf{r}}^2 + F_{\mathbf{r}}^2 + i \left(\bar{\psi}_{\mathbf{r}} \dot{\psi}_{\mathbf{r}} - \dot{\bar{\psi}}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \dot{S}_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}}^2 + i \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \dot{\psi}_{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

enquanto o segundo termo é referente as interações,

$$\int d\theta d\bar{\theta} \left[\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \Phi_{\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{r}'} \right] = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} (S_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}'} - \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}'}). \quad (4.17)$$

A partir do super multiplicador de Lagrange (4.14) e das equações (4.16) e (4.17), podemos escrever uma Lagrangiana supersimétrica em termos das componentes,

$$\begin{aligned} L_{SUSY} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \dot{S}_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}}^2 + i \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \dot{\psi}_{\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} (S_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}'} - \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}'}) \\ &+ \gamma \sum_{\mathbf{r}} (S_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}} - \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}}) - \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \xi S_{\mathbf{r}} - \sum_{\mathbf{r}} \bar{\xi} \psi_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} - \mu \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que redefinimos os multiplicadores de Lagrange para absorver fatores numéricos. É importante ressaltar que o parâmetro g presente em (2.27), responsável pelas flutuações quânticas do sistema, também deve estar presente no modelo supersimétrico. Ele pode ser introduzido reescalando a coordenada temporal, $t \rightarrow \sqrt{g}t$. Além disso, assim como no modelo esférico quântico usual, a interação $U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ deve ser uma função apenas do módulo da distância entre os sítios, isto é, $U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \equiv U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Na próxima seção discutimos algumas consequências físicas de considerar o caso explícito de interações de primeiros vizinhos entre os supercampos.

4.2 Formulação *On-shell*

Uma maneira de entender a natureza das interações envolvidas na extensão supersimétrica do modelo esférico quântico, é útil considerar a formulação *on-shell*, em que é obtida integrando o campo bosônico auxiliar $F_{\mathbf{r}}$. Para isso, selecionamos apenas os termos dependentes de $F_{\mathbf{r}}$ em (4.18),

$$L_F = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}}^2 + \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} F_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} + \gamma \sum_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}. \quad (4.19)$$

Como $F_{\mathbf{r}}$ é um campo auxiliar, sua equação de movimento é apenas uma equação algébrica

$$\frac{\partial L_F}{\partial F_{\mathbf{r}}} = 0 \Rightarrow F_{\mathbf{r}} = -\gamma S_{\mathbf{r}} - \sum_{\mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}'}, \quad (4.20)$$

que pode ser usada para reescrever (4.19) como

$$L_F = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \left(\sum_{\mathbf{r}''} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}''} U_{\mathbf{r}'', \mathbf{r}'} \right) S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - \gamma \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - \frac{1}{2} \gamma^2 N. \quad (4.21)$$

Ao eliminar o campo auxiliar, temos o surgimento de dois tipos diferentes de interações entre as variáveis de spins bosônicas $S_{\mathbf{r}}$, ou seja,

$$\gamma U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \quad \text{e} \quad J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \equiv \sum_{\mathbf{r}''} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}''} U_{\mathbf{r}'', \mathbf{r}'} \quad (4.22)$$

Reunindo todas as contribuições, a Lagrangiana *on-shell* que segue de (4.18) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \dot{S}_{\mathbf{r}}^2 + i \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \dot{\psi}_{\mathbf{r}} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}'} - \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} (\bar{\psi}_{\mathbf{r}} \xi + \bar{\xi} \psi_{\mathbf{r}}) \\ & - \mu \sum_{\mathbf{r}} (S_{\mathbf{r}}^2 - N) - \frac{1}{2} \gamma^2 N - \gamma \left(\sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

cujas correspondentes transformações de supersimetria são

$$\epsilon : \quad \delta_{\epsilon} S_{\mathbf{r}} = \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \epsilon, \quad \delta_{\epsilon} \psi_{\mathbf{r}} = -i \dot{S}_{\mathbf{r}} \epsilon - \left(\gamma S_{\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}'} \right) \epsilon, \quad \text{e} \quad \delta_{\epsilon} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} = 0; \quad (4.24)$$

e

$$\bar{\epsilon} : \quad \delta_{\bar{\epsilon}} S_{\mathbf{r}} = \bar{\epsilon} \psi_{\mathbf{r}}, \quad \delta_{\bar{\epsilon}} \psi_{\mathbf{r}} = 0, \quad \text{e} \quad \delta_{\bar{\epsilon}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} = i \dot{S}_{\mathbf{r}} \bar{\epsilon} - \left(\gamma S_{\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}'} \right) \bar{\epsilon}. \quad (4.25)$$

A estrutura de vínculo na Lagrangiana (4.23) é composta pelos mesmos três vínculos presentes na formulação *off-shell*, implementados pelos multiplicadores de Lagrange μ , ξ e $\bar{\xi}$. Por outro lado, o multiplicador de Lagrange γ , que na formulação *off-shell* implementa o último vínculo de (4.3), na expressão *on-shell*, equação (4.23), ele implementa um vínculo como uma média de uma distribuição Gaussiana (ao invés de uma delta) devido ao termo proporcional a γ^2 . Sua equação de movimento é

$$\gamma = -\frac{1}{N} \left(\sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right). \quad (4.26)$$

Usando esta relação em (4.23), obtemos

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \dot{S}_{\mathbf{r}}^2 + i \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \dot{\psi}_{\mathbf{r}} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}'} - \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} (\bar{\psi}_{\mathbf{r}} \xi + \bar{\xi} \psi_{\mathbf{r}}) \\ & - \mu \sum_{\mathbf{r}} (S_{\mathbf{r}}^2 - N) + \frac{1}{2N} \left(\sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Portanto, o efeito final de eliminar γ é o de introduzir interações quárticas entre as variáveis físicas. No cálculo da função de partição na seção 4.3, não seguimos dessa

forma. Em vez disso, mantemos todos os multiplicadores de Lagrange e iremos procurar por soluções de ponto de sela para $(\mu, \xi, \bar{\xi}, \gamma)$ no limite termodinâmico.

Antes de seguirmos em frente, é oportuno nesse momento compararmos essa abordagem com a feita em [29]. A diferença crucial é que, em [29] a equação de movimento do campo auxiliar F foi usada de forma independente na estrutura de vínculo. Então, se compararmos (4.20) com a correspondente expressão em [29], vemos que no último não existe contribuição proporcional ao multiplicador de Lagrange γ . A consequência é que, na Lagrangiana *on-shell* considerada em [29], os termos quárticos são ausentes, levando a uma predição incompleta para o comportamento crítico a temperatura nula.

4.2.1 Interações de Primeiros Vizinhos

Ao analisar a formulação *on-shell* do modelo, podemos ver o surgimento de diferentes interações, o que nos motiva a retornar na Lagrangiana (4.23) e analisar explicitamente o efeito de interações de primeiros vizinhos entre as variáveis de supercampo (lembre-se do termo de interação em (4.15)), isto é, vamos analisar o efeito de assumir a seguinte forma para $U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$,

$$U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \equiv U \sum_{I=1}^d \left(\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' + \mathbf{e}^I} + \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' - \mathbf{e}^I} \right), \quad (4.28)$$

em que U é a energia de interação que pode ser positiva (ferro) ou negativa (anti-ferro). Estamos considerando uma rede hipercúbica d -dimensional, com \mathbf{e}^I sendo um conjunto de vetores unitários ortogonais ao longo de todas as direções,

$$\{\mathbf{e}^I\} = \{(1, 0, \dots, 0); (0, 1, 0, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 0, 1)\}. \quad (4.29)$$

Dada a interação (4.28), $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ assume a forma

$$J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = U^2 \sum_{I, J=1}^d \left(\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' + \mathbf{e}^I + \mathbf{e}^J} + \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' - \mathbf{e}^I - \mathbf{e}^J} + \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' + \mathbf{e}^I - \mathbf{e}^J} + \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' - \mathbf{e}^I + \mathbf{e}^J} \right). \quad (4.30)$$

Vemos que essa expressão contém interações entre segundos vizinhos assim como interações diagonais. Isso é ilustrado na figura 2 para o caso de uma rede quadrada bidimensional.

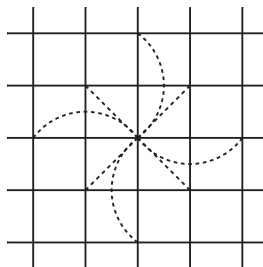


Figura 2 – Interações presentes em (4.30) para uma rede quadrada em duas dimensões.

Podemos ver o efeito das interações acima sobre as variáveis de spin selecionando os termos de interação na Lagrangiana *on-shell* (4.23), o que nos permite definir

$$\begin{aligned}
L_{int} &\equiv -\gamma \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}'} \\
&= -\gamma U \sum_{\mathbf{r}} \sum_{I=1}^d \left(S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}+\mathbf{e}^I} + S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}-\mathbf{e}^I} \right) \\
&\quad - \frac{U^2}{2} \sum_{\mathbf{r}} \sum_{I, J=1}^d \left(S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}+\mathbf{e}^I+\mathbf{e}^J} + S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}+\mathbf{e}^I-\mathbf{e}^J} + S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}-\mathbf{e}^I+\mathbf{e}^J} + S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}-\mathbf{e}^I-\mathbf{e}^J} \right) \\
&\quad - U \sum_{\mathbf{r}} \sum_{I=1}^d \left(\bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}+\mathbf{e}^I} + \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}-\mathbf{e}^I} \right). \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Podemos extrair algumas propriedades físicas desta expressão. Note que, junto das interações de primeiros vizinhos, existem também interações de segundos vizinhos e interações diagonais envolvendo as variáveis bosônicas $S_{\mathbf{r}}$. Portanto, se o sinal de γU for negativo, isso pode resultar em uma competição no setor bosônico, já que U^2 é sempre positivo. Esse tipo de ingrediente geralmente produz um rico diagrama de fase, com a presença de fases moduladas e um ponto de Lifshitz [33]. Interações competitivas foram investigadas no modelo esférico quântico usual [34, 41–43] e o comportamento das interações para o modelo esférico quântico supersimétrico é descrito em [44].

A presença das interações diagonais está conectada com a isotropia das interações na rede, isso é refletido como uma teoria invariante rotacional emergindo no limite do contínuo. Investigamos esse comportamento construindo a versão contínua das interações presentes em (4.31) e isso pode ser feito resgatando o espaçamento da rede, a , e reescalando as variáveis de campo,

$$S_{\mathbf{r}}(t) \rightarrow a^{\frac{(d-z)}{2}} S(t, \mathbf{r}), \quad \psi_{\mathbf{r}}(t) \rightarrow a^{\frac{(2d-z)}{4}} \psi(t, \mathbf{r}), \quad \text{e} \quad \bar{\psi}_{\mathbf{r}}(t) \rightarrow a^{\frac{(2d-z)}{4}} \bar{\psi}(t, \mathbf{r}), \tag{4.32}$$

junto com $\sum_{\mathbf{r}} \rightarrow \int \frac{d^d r}{a^d}$. Para ter uma ideia deste procedimento, considere por exemplo o termo bosônico de primeiros vizinhos em (4.31)

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{r}} \sum_{I=1}^d \left(S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}+a\mathbf{e}^I} + S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}-a\mathbf{e}^I} \right) &= \int \frac{d^d r}{a^d} \sum_I a^{d-z} S \left[S + (ae_{\alpha}^I) \partial_{\alpha} S \right. \\
&\quad + \frac{1}{2!} (ae_{\alpha}^I) (ae_{\beta}^I) (\partial_{\alpha} \partial_{\beta}) S + \cdots + S + (-ae_{\alpha}^I) \partial_{\alpha} S \\
&\quad \left. + \frac{1}{2!} (-ae_{\alpha}^I) (-ae_{\beta}^I) (\partial_{\alpha} \partial_{\beta}) S + \cdots \right], \tag{4.33}
\end{aligned}$$

em que estamos usando a convenção de soma para os índices gregos e estamos omitindo a dependência sobre as variáveis. Note que as contribuições vindas das derivadas lineares se cancelam, o que resulta em

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{r}} \sum_{I=1}^d \left(S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}+a\mathbf{e}^I} + S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}-a\mathbf{e}^I} \right) &= \int d^d r \sum_I a^{-z} S \left[2S + (a\delta_{\alpha}^I) (a\delta_{\beta}^I) (\partial_{\alpha} \partial_{\beta}) S \right] \\
&= \int d^d r \left[\frac{2d}{a^z} S^2 + a^{(2-z)} S (\vec{\nabla}^2 S) \right]. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

O análogo ocorre na parte fermiônica, com a ressalva que o campo fermiônico escala diferente em (4.32). Sendo assim, o procedimento é semelhante as variáveis bosônicas e produz

$$\sum_{\mathbf{r}} \sum_{I=1}^d \left(\bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}+a\mathbf{e}^I} + \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}-a\mathbf{e}^I} \right) = \int d^d r \left[\frac{2d}{\sqrt{a^z}} \bar{\psi} \psi + a^{(2-\frac{z}{2})} \bar{\psi} (\nabla^2 \psi) \right]. \quad (4.35)$$

A parte bosônica para interações de segundos vizinhos e diagonais possuem a mesma estrutura e podem ser obtidos de forma análoga. É interessante observar que as interações presentes no modelo são identificadas como derivadas no limite do contínuo. O resultado final desta análise é uma teoria contínua, na qual as derivadas espaciais são dadas apenas em termos de quantidades rotacionalmente invariantes $S \vec{\nabla}^2 S$, $S (\vec{\nabla}^2)^2 S$ e $\bar{\psi} \vec{\nabla}^2 \psi$,

$$\int dt d^d r \left(\dots - \frac{1}{a^2} (\tilde{\gamma} \tilde{U} + 2d \tilde{U}^2) S \vec{\nabla}^2 S - \frac{1}{6} (d+3) \tilde{U}^2 S (\vec{\nabla}^2)^2 S - \tilde{U} \bar{\psi} \vec{\nabla}^2 \psi + \dots \right), \quad (4.36)$$

em que $\tilde{U} \equiv Ua$ e $\tilde{\gamma} \equiv a\gamma$. No reescalonamento acima, introduzimos o expoente crítico dinâmico z , que como já foi dito, caracteriza o relativo escalonamento entre correlações entre tempo e espaço. Portanto, no ponto de Lifshitz, onde o coeficiente $S \vec{\nabla}^2 S$ desaparece, obtemos $z = 2$.

4.2.2 Campo Médio

A situação em que analisamos com maior atenção é o caso de interações de campo médio, em que as interações de curto alcance são substituídas por uma (fraca) interação envolvendo as variáveis físicas de todos os sítios da rede. Apesar da simplicidade, essa abordagem revela propriedades críticas interessantes e auxilia em um melhor entendimento do efeito da supersimetria no modelo esférico quântico. Como vimos, a versão de campo médio é obtida através da substituição

$$U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \rightarrow \frac{U}{N}, \quad (4.37)$$

em que U é uma constante independente da posição do sítio. Isso corresponde a uma fraca interação devido ao fator de $1/N$, que também garante as propriedades de extensividade corretas da energia livre. Então, a primeira linha da Lagrangiana de interação (4.31) reduz a

$$L_{int} = -\frac{1}{N} \left(\gamma U + \frac{U^2}{2} \right) \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} \right)^2 - \frac{U}{N} \left(\sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \right) \left(\sum_{\mathbf{r}'} \psi_{\mathbf{r}'} \right). \quad (4.38)$$

Note que o favorecimento do ordenamento bosônico é ferro ou anti-ferromagnético se

$$\left(\gamma U + \frac{U^2}{2} \right) > 0 \quad \text{ou} \quad \left(\gamma U + \frac{U^2}{2} \right) < 0, \quad (4.39)$$

respectivamente. A seção 4.4 é dedicada inteiramente para a situação de campo médio.

4.3 Função de Partição

Nesta seção, apresentamos a função de partição pelo método de ponto de sela. O cálculo é realizado na presença de campos externos H_B e H_F através do termo que quebra a supersimetria,

$$H_B \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} + H_F \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}}. \quad (4.40)$$

A inclusão deste termo permite obter o parâmetro de ordem bosônico usual $\langle S_{\mathbf{r}} \rangle$ e o condensado fermiônico $\langle \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \rangle$, tomando a derivada da energia livre com respeito H_B e H_F , respectivamente. A função de partição à temperatura finita é obtida mais uma vez a partir do formalismo do tempo imaginário [45, 46]

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Omega \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left[L_E + H_B \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} + H_F \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right] \right\}, \quad (4.41)$$

em que a medida $\mathcal{D}\Omega$ corresponde à integral sobre todos os campos e sobre os multiplicadores de Lagrange que implementam o vínculo,

$$\mathcal{D}\Omega \equiv \mathcal{D}S \mathcal{D}F \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\mu \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\xi} \quad (4.42)$$

e L_E é a versão Euclidiana de (4.18)

$$\begin{aligned} L_E = & \frac{1}{2g} \sum_{\mathbf{r}} \dot{S}_{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \dot{\psi}_{\mathbf{r}} - \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} (S_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}'} - \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}'}) \\ & - \gamma \left(\sum_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} - \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right) + \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \xi S_{\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{r}} \bar{\xi} \psi_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} + \mu \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

À temperatura finita, tanto as variáveis bosônicas quanto as fermiônicas possuem condições de contorno opostas no formalismo do tempo imaginário. De fato, os campos bosônicos são periódicos e os campos fermiônicos são anti-periódicos,

$$S_{\mathbf{r}}(0) = S_{\mathbf{r}}(\beta), \quad F_{\mathbf{r}}(0) = F_{\mathbf{r}}(\beta), \quad \psi_{\mathbf{r}}(0) = -\psi_{\mathbf{r}}(\beta), \quad \text{e} \quad \bar{\psi}_{\mathbf{r}}(0) = -\bar{\psi}_{\mathbf{r}}(\beta). \quad (4.44)$$

O mesmo é válido para os multiplicadores de Lagrange bosônicos e fermiônicos.

Assim como nos modelos esféricos clássico e quântico, podemos separar em dois casos, de acordo com a forma em que o vínculo é implementado. Na extensão supersimétrica estamos integrando sobre os super multiplicadores de Lagrange, isso significa que estamos implementando o vínculo super esférico estrito, como em (4.2). Contudo, poderíamos ter implementado o vínculo sobre uma média

$$\langle \sum_{\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{r}}^2 \rangle = N. \quad (4.45)$$

Esses dois casos correspondem a formulações de *ensembles* distintos e, para interações de curto alcance, espera-se que conduza ao mesmo resultado no limite termodinâmico. Neste trabalho, vamos nos ater ao vínculo (4.2).

A função de partição escrita explicitamente no formalismo do tempo imaginário possui a seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \int \mathcal{D}\Omega \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2g} \sum_{\mathbf{r}} \dot{S}_{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \dot{\psi}_{\mathbf{r}} - \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} (S_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}'} - \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}'}) \right. \right. \\ & - \gamma \sum_{\mathbf{r}} (S_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}} - \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}}) + \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \xi S_{\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{r}} \bar{\xi} \psi_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} + \mu \left(\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) \\ & \left. \left. + H_B \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} + H_F \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

O cálculo da expressão acima na extensão supersimétrica é similar ao que foi realizado no modelo esférico usual. A ideia principal é escrever a função de partição no espaço de Fourier e em seguida decompor os campos em parte real e parte imaginária. Como as integrais sobre os campos S , ψ , $\bar{\psi}$ e F são Gaussianas, elas podem ser realizadas diretamente. Essas integrações produzem

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\mu \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\xi e^{-N S_{eff}}, \quad (4.47)$$

com a ação efetiva dada por

$$\begin{aligned} S_{eff} \equiv & \frac{1}{2N} \text{Tr} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \mu + \frac{(\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma)^2}{2} \right] \\ & - \frac{1}{N} \text{Tr} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tau} + \hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma + H_F - \frac{1}{2} \xi \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{-1} \bar{\xi} \right] \\ & - \frac{1}{4} \int_0^\beta d\tau \frac{H_B^2}{\mu + \frac{[\hat{U}(0) + \gamma]^2}{2}} - \int_0^\beta d\tau \mu, \end{aligned} \quad (4.48)$$

sendo $\hat{U}(\mathbf{q})$ a transformada de Fourier da interação $U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \equiv U(|\mathbf{h}|)$,

$$\hat{U}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{h}} U(|\mathbf{h}|) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{h}}, \quad \text{com} \quad \mathbf{h} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad (4.49)$$

e o operador $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}$ definido como

$$\mathcal{O}_{\mathbf{q}} \equiv -\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \mu + \frac{1}{2} [\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma]^2. \quad (4.50)$$

Na ação efetiva, o traço pode ser tomado, por exemplo, com respeito a uma base “coordenada” rotulada pelo tempo imaginário $|\tau\rangle$, isto é

$$\text{Tr} \mathcal{O} = \int_0^\beta d\tau \langle \tau | \mathcal{O} | \tau \rangle, \quad (4.51)$$

com contribuições não diagonais devido ao operador diferencial $\partial/\partial\tau$. Logo, ele pode ser calculado introduzindo uma base de “momento” $|n\rangle$, em que diagonaliza o operador $\partial/\partial\tau$ ¹,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} |n\rangle = i\omega_n |n\rangle, \quad \text{com} \quad \langle \tau | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{i\omega_n \tau}. \quad (4.52)$$

¹ No caso de soluções independentes do tempo para μ e γ , o que é do nosso interesse, é mais conveniente tomar o traço diretamente na base de momentos, $\text{Tr} \mathcal{O}(\partial/\partial\tau) = \sum_n \langle n | \mathcal{O}(\partial/\partial\tau) | n \rangle = \sum_n \mathcal{O}(i\omega_n)$.

As condições de contorno opostas, equação (4.44), implicam em um espectro diferente para as frequências de Matsubara. Explicitamente, elas são expressas como

$$w_n^B = \frac{2n\pi}{\beta} \quad \text{e} \quad w_n^F = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} \quad (4.53)$$

para bósons e férmions, respectivamente, com $n \in \mathbb{Z}$. Isso deve ser levado em conta no cálculo nas contribuições do traço na ação efetiva.

As integrais remanescentes em (4.47) são calculadas através do método de ponto de sela, e torna-se exata no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$. As equações de ponto de sela são determinadas pelas condições

$$\frac{\delta S_{eff}}{\delta \mu} = \frac{\delta S_{eff}}{\delta \gamma} = \frac{\delta S_{eff}}{\delta \xi} = \frac{\delta S_{eff}}{\delta \bar{\xi}} = 0. \quad (4.54)$$

Procuramos por soluções de ponto de sela independentes do tempo para μ , γ , $\bar{\xi}$ e ξ , na qual podem ser explicitamente obtidas novamente com ajuda da identidade $\delta \text{Tr} \ln \mathcal{A} = \text{Tr} \mathcal{A}^{-1} \delta \mathcal{A}$. As condições para os multiplicadores de Lagrange fermiônicos são trivialmente satisfeitos com $\bar{\xi} = \xi = 0$. Para a primeira condição, temos

$$0 = \frac{\delta S_{eff}}{\delta \mu} = -1 + \frac{H_B^2}{4 \left[\mu + \frac{(\hat{U}(0) + \gamma)^2}{2} \right]^2} + \frac{1}{2N\beta} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2g \frac{1}{(w_n^B)^2 + 2g \left[\mu + \frac{(\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma)^2}{2} \right]}.$$

A soma sobre as frequências de Matsubara bosônicas podem ser calculadas usando

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} \coth(\pi y), \quad \text{para } y > 0, \quad (4.55)$$

o que nos leva a equação de vínculo

$$1 = \frac{H_B^2}{4 \left[\mu + \frac{1}{2}(\hat{U}(0) + \gamma)^2 \right]^2} + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{g}{w_{\mathbf{q}}^B} \coth \left(\frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}}^B \right), \quad (4.56)$$

com a frequência bosônica definida como

$$(w_{\mathbf{q}}^B)^2 \equiv 2g \left\{ \mu + \frac{1}{2} [\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma]^2 \right\}. \quad (4.57)$$

A segunda condição de ponto de sela produz

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\delta S_{eff}}{\delta \gamma} &= \frac{H_B^2}{4 \left[\mu + \frac{(\hat{U}(0) + \gamma)^2}{2} \right]^2} [\hat{U}(0) + \gamma] + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{g}{w_{\mathbf{q}}^B} [\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma] \coth \left(\frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}}^B \right) \\ &- \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{g}} i w_n^F + \hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma + H_F}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Para calcular a última soma na ultima linha podemos reescreve-la como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{g}} i w_n^F + \hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma + H_F} = (\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma + H_F) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{g} (w_n^F)^2 + (\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma + H_F)^2}.$$

Com a ajuda de

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + y^2} = \frac{\pi}{2y} \tanh\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad (4.59)$$

temos a segunda equação de vínculo,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{H_B^2}{4 \left[\mu + \frac{(\hat{U}(0)+\gamma)^2}{2} \right]^2} [\hat{U}(0) + \gamma] + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{g}{w_{\mathbf{q}}^B} [\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma] \coth\left(\frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}}^B\right) \\ &- \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{g}{2w_{\mathbf{q}}^F} [\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma + H_F] \tanh\left(\frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}}^F\right), \end{aligned} \quad (4.60)$$

em que a frequência fermiônica, incorporando o campo externo, é definida como

$$(w_{\mathbf{q}}^F)^2 = g [\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma + H_F]^2. \quad (4.61)$$

As equações (4.56) e (4.60), junto com a ação efetiva (4.48) (que é essencialmente a energia livre), são as relações básicas para o estudo do comportamento crítico. Elas determinam os valores de μ e γ compatíveis com a existência de um ponto crítico. Embora a função de partição possa ser calculada exatamente no limite termodinâmico para uma interação arbitrária $\hat{U}(\mathbf{q})$, as relações entre os parâmetros em (4.56) e (4.60) são dadas em termos de integrais multidimensionais $\int d^d \mathbf{q}$, em que torna a análise um pouco trabalhosa, muitas vezes necessitando de cálculos numéricos. A análise do comportamento crítico para o caso de interações de curto alcance é descrito em detalhes em [44]. Seguimos fazendo um estudo detalhado do comportamento crítico de campo médio, onde todas as relações são dadas explicitamente. Essa versão fornece resultados interessantes sobre a transição de fase do modelo, revelando propriedades críticas em ambos os casos de temperatura zero e finita.

4.3.1 Soluções de Ponto de Sela e Quebra de Supersimetria

Vimos que alguns elementos presentes no modelo quebram a supersimetria, isto é, os campos externos, H_B e H_F , e a temperatura T . Sabemos que a supersimetria é quebrada para qualquer temperatura finita, uma vez que as distribuições térmicas para bósons e férmions são diferentes. Porém, a temperatura nula e na ausência de campo externo, qualquer quebra de supersimetria devem ser espontânea. Em termos dos parâmetros de ponto de sela, isso ocorre sempre que é possível encontrar uma solução de (4.56) e (4.60) com $\mu \neq 0$. Esta condição surge quando vemos que as frequências bosônicas ($w_{\mathbf{q}}^B$) e fermiônicas ($w_{\mathbf{q}}^F$) são iguais, o que acontece somente quando $\mu = 0$, independente do valor de γ . Devemos então olhar para a energia do estado fundamental, pois a supersimetria impõe que ela seja nula.

O estado fundamental de energia é obtido a partir da ação efetiva (4.48), em que é essencialmente a energia livre do modelo. De forma análoga ao cálculo anterior,

encontramos o seguinte resultado para a energia livre

$$f = \frac{1}{\beta} S_{eff} = -\mu + \frac{1}{\beta N} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[2 \sinh \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{q}}^B}{2} \right) \right] - \frac{1}{\beta N} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{q}}^F}{2} \right) \right], \quad (4.62)$$

com $H_B = H_F = 0$. Tomando o limite de temperatura nula, a energia livre reduz ao estado fundamental de energia E_0 ,

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{N} &= -\mu + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} (\omega_{\mathbf{q}}^B - \omega_{\mathbf{q}}^F) \\ &= -\mu + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ \left[2g \left(\mu + \frac{1}{2} (\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} - \left[2g \left(\frac{1}{2} (\hat{U}(\mathbf{q}) + \gamma)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

que se anula somente quando $\mu = 0$, independente do valor de γ . Na próxima seção, exploramos esses pontos na versão de campo médio do modelo supersimétrico.

4.4 Comportamento Crítico de Campo Médio

Como discutido previamente, a versão de campo médio do modelo é obtido a partir de (4.37), que em termos da transformada de Fourier corresponde a

$$\hat{U}(\mathbf{q}) \rightarrow U \delta_{\mathbf{q},0}. \quad (4.63)$$

Desta forma, as frequências $w_{\mathbf{q}}^B$ e $w_{\mathbf{q}}^F$ se dividem em duas partes, uma parte contendo o modo zero, \mathbf{q} , e a outra contendo os termos remanescentes,

$$(w_{\mathbf{q}=0}^B)^2 = 2g \left[\mu + \frac{(U + \gamma)^2}{2} \right] \quad \text{e} \quad (w_{\mathbf{q} \neq 0}^B)^2 = 2g \left[\mu + \frac{\gamma^2}{2} \right] \quad (4.64)$$

e

$$(w_{\mathbf{q}=0}^F)^2 = g (U + \gamma + H_F)^2 \quad \text{e} \quad (w_{\mathbf{q} \neq 0}^F)^2 = g (\gamma + H_F)^2. \quad (4.65)$$

As equações de vínculo (4.56) e (4.60) se reduzem a

$$1 = \frac{H_B^2}{4 \left[\mu + \frac{1}{2} (U + \gamma)^2 \right]^2} + \frac{1}{2N} \frac{g}{w_{\mathbf{q}=0}^B} \coth \left(\frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}=0}^B \right) + \frac{(N-1)}{2N} \frac{g}{w_{\mathbf{q} \neq 0}^B} \coth \left(\frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q} \neq 0}^B \right) \quad (4.66)$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{H_B^2}{4 \left[\mu + \frac{(U+\gamma)^2}{2} \right]^2} [U + \gamma] + \frac{1}{2N} \frac{g}{w_{\mathbf{q}=0}^B} [U + \gamma] \coth \left(\frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}=0}^B \right) \\ &+ \frac{(N-1)}{2N} \frac{g}{w_{\mathbf{q} \neq 0}^B} \gamma \coth \left(\frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q} \neq 0}^B \right) - \frac{1}{2N} \frac{g}{w_{\mathbf{q}=0}^F} (U + \gamma + H_F) \tanh \left(\frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}=0}^F \right) \\ &- \frac{(N-1)}{2N} \frac{g}{w_{\mathbf{q} \neq 0}^F} (\gamma + H_F) \tanh \left(\frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q} \neq 0}^F \right). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Uma transição de fase pode ser detectada nas equações de vínculo identificando certos valores dos parâmetros envolvidos que correspondem a uma ponto de não analiticidade emergindo no limite termodinâmico². Portanto, um parâmetro de ordem é esperado exibir diferentes comportamentos conforme cruzamos um determinado ponto crítico. Como a transição de fase pode ser governada tanto por flutuações térmicas quanto por flutuações quânticas, analisamos os correspondentes comportamentos críticos separadamente, começando pelo caso de temperatura nula onde a transição de fase é governada pelas flutuações quânticas.

4.4.1 Comportamento Crítico Quântico

Precisamos analisar o comportamento dos vínculos (4.66) e (4.67) no limite de temperatura nula, o que nos permite obter os parâmetros μ e γ como funções de g , H_B e H_F . A expressão (4.66) para $\beta \rightarrow \infty$ reduz a

$$1 = \frac{H_B^2}{4 \left[\mu + \frac{1}{2}(U + \gamma)^2 \right]^2} + \frac{1}{2N} \frac{g}{\sqrt{2g \left[\mu + \frac{(U+\gamma)^2}{2} \right]}} + \frac{(N-1)}{2N} \frac{g}{\sqrt{2g \left[\mu + \frac{\gamma^2}{2} \right]}}. \quad (4.68)$$

Para a outra equação de vínculo, equação (4.67), desligando o campo externo e já tomando o limite termodinâmico, temos

$$\frac{1}{\sqrt{\mu + \frac{\gamma^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{2}}}, \quad (4.69)$$

o que implica que $\mu = 0$, independente do valor de γ . Este resultado mostra que a supersimetria não é espontaneamente quebrada, uma vez que $\mu \neq 0$ não corresponde a uma solução de ponto de sela.

Assumindo $\mu = 0$, podemos resolver (4.68) para g ,

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2|\gamma|} + \frac{|\gamma| - |U + \gamma|}{2N|\gamma||U + \gamma|}, \quad (4.70)$$

com $H_B = H_F = 0$ e válida para $|\gamma| > |U + \gamma|$. Esta condição só é alcançada quando U e γ possuem sinais opostos. Além disso, a equação (4.70) permite escrever uma expressão para γ como uma função de g e N , em que exibe um ponto de não analiticidade no limite termodinâmico,

$$\gamma = \begin{cases} \pm|U| & \text{para } \sqrt{g} < 2|U| \\ \pm\frac{\sqrt{g}}{2} & \text{para } \sqrt{g} > 2|U| \end{cases}, \quad (4.71)$$

com o sinal (+) correspondendo ao caso de $U < 0$ e o sinal (−) correspondendo a $U > 0$. O comportamento conforme N cresce é apresentado na figura 3. Esta análise mostra

² Esse mecanismo é similar ao que acontece no condensado de Bose-Einstein [47].

que temos um ponto crítico a temperatura nula em $\sqrt{g} = \sqrt{g_c} \equiv 2|U|$, de tal forma que o modelo exibe uma transição de fase quântica sem quebra de supersimetria. O correspondente espaço de parâmetros definido pela solução de ponto de sela é ilustrado na figura 4.

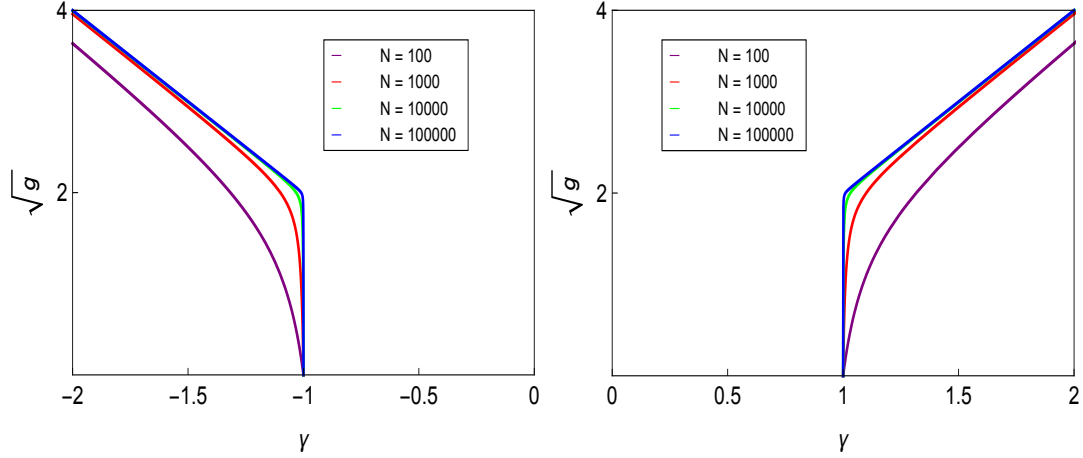


Figura 3 – Formação do ponto de não analiticidade de acordo com (4.70) conforme N cresce. Os gráficos são com $U \equiv 1$ na figura esquerda e $U \equiv -1$ na figura da direita.

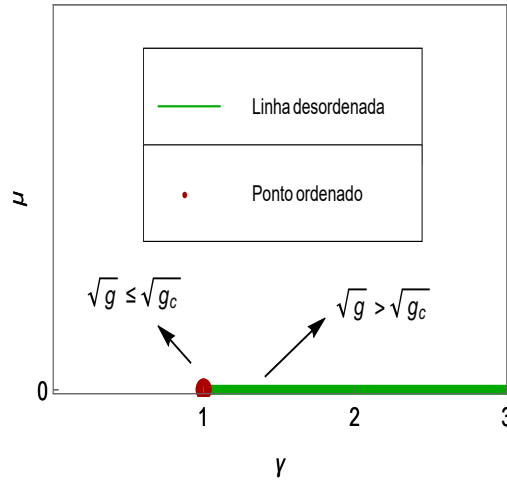


Figura 4 – Espaço dos parâmetros a temperatura nula para o caso $U < 0$ ($U \equiv -1$), exibindo uma transição de fase quântica sem quebra de supersimetria.

4.4.1.1 Magnetização, Condensado Fermiônico e Susceptibilidade

As quantidades termodinâmicas podem ser obtidas a partir da energia livre (4.62) na presença dos campos externos, H_B e H_F , ou seja

$$\begin{aligned} f = & -\frac{H_B^2}{4\left[\mu + \frac{1}{2}(U(0) + \gamma)^2\right]} - \mu + \frac{1}{\beta N} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[2 \sinh \left(\frac{\beta w_{\mathbf{q}}^B}{2} \right) \right] \\ & - \frac{1}{\beta N} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta w_{\mathbf{q}}^F}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Na versão de campo médio ela assume a forma

$$\begin{aligned} f = & -\frac{H_B^2}{4\left[\frac{1}{2}(U + \gamma)^2\right]} + \frac{1}{\beta N} \left\{ \ln \left[2 \sinh \left(\frac{\beta w_0^B}{2} \right) \right] + (N-1) \ln \left[2 \sinh \left(\frac{\beta w_{\mathbf{q} \neq 0}^B}{2} \right) \right] \right\} \\ & - \frac{1}{\beta N} \left\{ \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta w_0^F}{2} \right) \right] + (N-1) \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta w_{\mathbf{q} \neq 0}^F}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Como mencionado anteriormente, investigamos a magnetização bosônica usual,

$$m_B \equiv \left\langle \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} \right\rangle = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial H_B} = -\frac{\partial f}{\partial H_B} \quad (4.74)$$

e o condensado fermiônico,

$$\mathcal{C}_F \equiv \left\langle \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right\rangle = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial H_F} = -\frac{\partial f}{\partial H_F}. \quad (4.75)$$

No limite de temperatura nula, a magnetização bosônica é dada por

$$m_B = \frac{H_B}{(\gamma + U)^2}. \quad (4.76)$$

De acordo com (4.71), para $\sqrt{g} > \sqrt{g_c}$, a quantidade $(\gamma + U)$ é sempre diferente de zero e, portanto, quando $H_B = 0$, a magnetização é nula. Por outro lado, quando $\sqrt{g} < \sqrt{g_c}$, temos $(\gamma + U) = 0$ e a magnetização fornece uma indeterminação quando $H_B = 0$. Contornamos essa situação, usando a equação de vínculo,

$$1 = \frac{H_B^2}{4\left[\frac{1}{2}(U + \gamma)^2\right]^2} + \frac{1}{2N} \frac{g}{w_0^B} + \frac{(N-1)}{2N} \frac{g}{w_{\mathbf{q} \neq 0}^B}, \quad (4.77)$$

que combinada com (4.76), permite escrever a magnetização sem a dependência explícita do campo externo H_B . Assim, considerando o limite termodinâmico, a equação se reduz a

$$1 = m_B^2 + \frac{\sqrt{g}}{2|\gamma|}. \quad (4.78)$$

Como estamos abaixo do ponto crítico, em que $|\gamma| = |U| = \sqrt{g_c}/2$, esta relação produz

$$m_B = \pm \left(\frac{\sqrt{g_c} - \sqrt{g}}{\sqrt{g_c}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.79)$$

o que revela que o expoente crítico quântico β_c do parâmetro de ordem bosônico é $\beta_c = 1/2$.

O comportamento do condensado fermiônico é obtido calculando a derivada da energia livre com respeito a H_F , equação (4.75),

$$\mathcal{C}_F = \frac{\sqrt{g}}{2} \text{sign}(\gamma + H_F). \quad (4.80)$$

Desligando H_F , temos que o condensado fermiônico não se anula, independente da fase em que o modelo se encontra, comportando-se uniformemente acima e abaixo do ponto crítico.

A partir da magnetização (4.76), obtemos a susceptibilidade bosônica,

$$\chi_B = \frac{\partial m_B}{\partial H_B} = \frac{1}{(\gamma + U)^2}, \quad (4.81)$$

que diverge³ para $\sqrt{g} < \sqrt{g_c}$, pois $(\gamma + U) = 0$. Porém, para $\sqrt{g} > \sqrt{g_c}$, temos $\gamma = \pm\sqrt{g}/2$ e $U = \pm\sqrt{g_c}/2$ e neste caso levando em conta que γ e U devem ter sinais opostos, obtemos

$$\chi_B \propto (\sqrt{g} - \sqrt{g_c})^{-2}, \quad (4.82)$$

fornecendo um novo expoente crítico quântico bosônico $\gamma_g = 2$.

Sabemos que o modelo esférico clássico possui uma divergência na entropia para baixas temperaturas, (2.23). Portanto, é interessante investigar o comportamento da entropia no nosso modelo nesse regime de temperatura. No limite termodinâmico, ela é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_B} s &= \beta^2 \frac{\partial f}{\partial \beta} \\ &= -\ln \left[2 \sinh \left(\frac{\beta w_{\mathbf{q} \neq 0}^B}{2} \right) \right] + \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta w_{\mathbf{q} \neq 0}^F}{2} \right) \right] \\ &+ \beta \left[\frac{w_{\mathbf{q} \neq 0}^B}{2} \coth \left(\frac{\beta w_{\mathbf{q} \neq 0}^B}{2} \right) - \frac{w_{\mathbf{q} \neq 0}^F}{2} \tanh \left(\frac{\beta w_{\mathbf{q} \neq 0}^F}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Para $H_B = H_F = 0$, as frequências bosônicas e fermiônicas são iguais, $w_{\mathbf{q} \neq 0}^B = w_{\mathbf{q} \neq 0}^F$, e no limite $T \rightarrow 0$ a entropia se anula.

4.4.2 Comportamento Crítico a Temperatura Finita

Toda a análise a seguir é similar ao do comportamento crítica quântico, contudo, nesta situação a supersimetria é quebrada pela temperatura e esperamos encontrar soluções de ponto de sela com $\mu \neq 0$. O comportamento crítico governado pelas flutuações

³ O mesmo comportamento também é observado na caso do modelo esférico clássico abaixo da temperatura crítica.

térmicas é obtido considerando que a energia térmica é maior que todas as escalas de energias quânticas (frequências). Nesta situação, podemos expandir as cotangentes hiperbólicas na equação (4.66) para pequenos argumentos e manter somente o termo dominante, $\coth(x) = \frac{1}{x} + O(x)$, que efetivamente contribui no ponto crítico

$$1 = \frac{H_B^2}{4 \left[\mu + \frac{1}{2}(U + \gamma)^2 \right]^2} + \frac{1}{2N\beta} \frac{1}{\left[\mu + \frac{(U+\gamma)^2}{2} \right]} + \frac{(N-1)}{2N\beta} \frac{1}{\left[\mu + \frac{\gamma^2}{2} \right]}. \quad (4.84)$$

Esta expressão exibe um comportamento crítico somente para $\mu \leq 0$, com o ponto crítico $\mu = -(U + \gamma)^2 / 2$. Admitindo campo nulo, $H_B = H_F = 0$, e tomando o limite termodinâmico, a segunda equação do vínculo (4.67) nos dá

$$g = \frac{2}{\beta^2 \left(\mu + \frac{\gamma^2}{2} \right)}, \quad (4.85)$$

em que expandimos as funções hiperbólicas. Note que $\mu + \frac{\gamma^2}{2} > 0$ é o requisito para que as frequências bosônicas sejam reais, o que está de acordo com a condição acima. Então, para qualquer conjunto de γ , μ e β que satisfaça (4.84), existe um valor de g dado acima que satisfaz a condição de ponto de sela (4.67).

A partir da equação (4.84) podemos obter γ como uma função de β , mantendo N e μ fixos e investigar seu comportamento a medida em que N aumenta. Esse comportamento está representado na figura 5. Além disso, analisamos o comportamento de γ para diferentes valores de μ , figura 6.

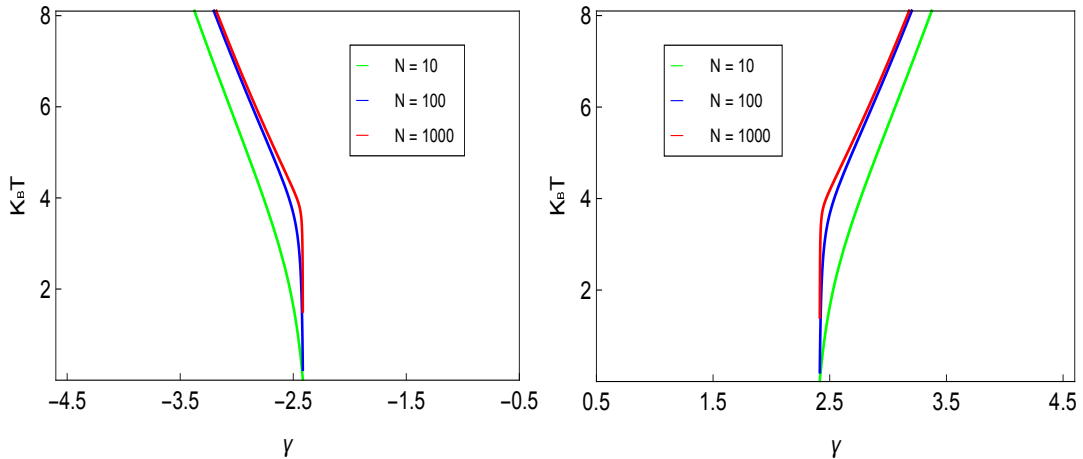


Figura 5 – Formação do ponto de não analiticidade no caso de temperatura finita a medida que N cresce. Os plots são com $\mu = -1$ e $H_B = 0$ e com $U \equiv 1$ na figura do lado esquerdo e $U \equiv -1$ na figura da direita. Neste caso $k_B T_c = 3,82843$, de acordo com a equação (4.86).

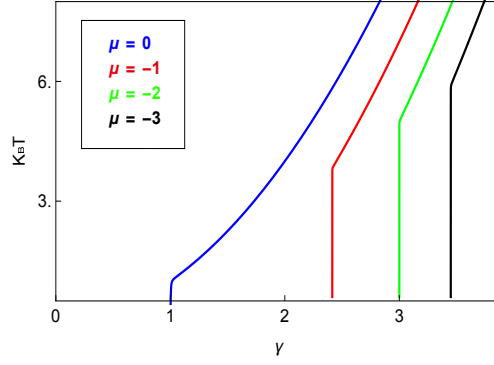


Figura 6 – O ponto de não analiticidade surgindo da equação (4.84) no limite termodinâmico para diferentes valores de μ .

Em geral, a equação (4.84) no limite termodinâmico, com $H_B = H_F = 0$, produz

$$\gamma = \begin{cases} \pm(|U| + \sqrt{2|\mu|}) & \text{para } k_B T < k_B T_c \\ \pm(k_B T + 2|\mu|)^{\frac{1}{2}} & \text{para } k_B T > k_B T_c \end{cases}, \quad (4.86)$$

em que o sinal (+) corresponde a $U < 0$ e o sinal (−) corresponde a $U > 0$. As duas soluções acima definem um ponto crítico para o sistema, $k_B T = k_B T_c \equiv U^2 + 2|U|\sqrt{2|\mu|}$. O correspondente espaço dos parâmetros é mostrado na figura 7.

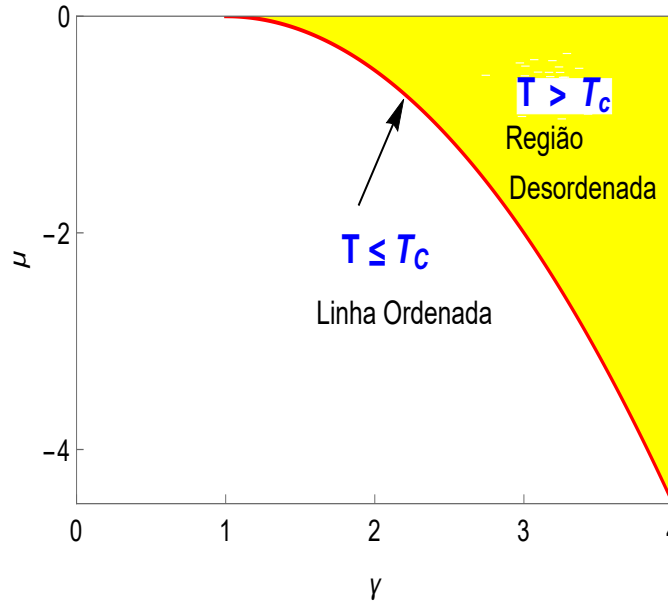


Figura 7 – Espaço dos parâmetros para temperatura finita com $U \equiv -1$.

Podemos ainda reunir os resultados para o comportamento crítico nos casos de temperatura nula e temperatura finita construindo um diagrama de fase $k_B T \times g$, com $\mu = 0$. Isso está retratado na figura 8, em que a linha crítica é dada por

$$1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{g}}{|U|} \coth \left[\frac{\beta}{2} \sqrt{g} |U| \right]. \quad (4.87)$$

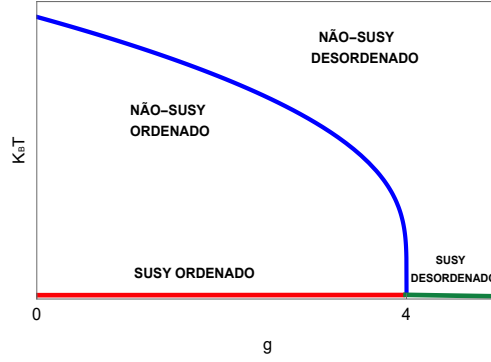


Figura 8 – Diagrama de fase da versão de campo médio do modelo esférico quântico supersimétrico, com $\mu = 0$ e $\gamma_c = +|U| \equiv 1$. O ponto crítico quântico ocorre em $g_c = 4|U|^2 = 4$.

4.4.2.1 Magnetização, Condensado Fermiônico e Susceptibilidade

A equação da magnetização (4.74) para o caso de temperatura finita é

$$m_B = \frac{H_B}{2 \left[\mu + \frac{1}{2}(U + \gamma)^2 \right]}. \quad (4.88)$$

Na região em que $k_B T > k_B T_c$, o termo $\mu + \frac{(U+\gamma)^2}{2} \neq 0$, então $m_B = 0$ quando $H_B = 0$. Por outro lado, para $k_B T < k_B T_c$, temos uma indeterminação para $H_B = 0$, que pode ser contornada por meio da equação do vínculo (4.84). Eliminando a dependência explícita do campo externo H_B , no limite termodinâmico, a magnetização bosônica satisfaz

$$1 = m_B^2 + \frac{1}{2\beta} \frac{1}{\left(\mu + \frac{\gamma^2}{2} \right)}, \quad (4.89)$$

o que nos leva a

$$m_B = \pm \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.90)$$

em que usamos a equação (4.86) para escrever γ em termos da temperatura crítica. Assim como no caso de temperatura nula, obtemos o expoente crítico de campo médio, $\beta_T = 1/2$.

O comportamento do condensado fermiônico é obtido através da equação (4.75),

$$\mathcal{C}_F = \frac{1}{4} g \beta (\gamma + H_F) + O(\beta^3), \quad (4.91)$$

sendo que γ possui diferentes comportamentos acima e abaixo do ponto crítico, equação (4.86), e g é dado pela equação (4.85). Para $k_B T < k_B T_c$, o parâmetro γ não possui nenhuma dependência com a temperatura, tal que para $H_F = 0$, temos

$$\mathcal{C}_F = \text{sign}(\gamma) \frac{T}{T_c} \left(|U| + \sqrt{2|\mu|} \right). \quad (4.92)$$

Por outro lado, no caso em que $k_B T > k_B T_c$, o condensado fermiônico assume a forma

$$\mathcal{C}_F = \text{sign}(\gamma) \sqrt{k_B T + 2|\mu|}. \quad (4.93)$$

Portanto, contrariamente ao caso de temperatura nula, para temperatura finita o condensado fermiônico é sensível a transição de fase, ou seja, sua dependência com a temperatura muda conforme cruzamos o ponto crítico.

A derivada de (4.88) com relação ao campo externo H_B , fornece a susceptibilidade bosônica

$$\chi_B = \frac{\partial m_B}{\partial H_B} = \frac{1}{2 \left[\mu + \frac{1}{2}(U + \gamma)^2 \right]}. \quad (4.94)$$

Para $k_B T < k_B T_c$, a susceptibilidade sempre diverge pois $\mu = -\frac{(U+\gamma)^2}{2}$. Em contrapartida, para $k_B T > k_B T_c$, o parâmetro γ é uma função de μ e T , equação (4.86), e escrevendo $|U|$ em termos de μ e T_c ,

$$|U| = -\sqrt{2|\mu|} + \sqrt{2|\mu| + \frac{1}{\beta_c}}, \quad (4.95)$$

podemos obter χ_B em termos de μ

$$\chi_B = \left\{ \left[\left(2|\mu| + \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(2|\mu| + \frac{1}{\beta_c} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 - 2\sqrt{2|\mu|} \left[\left(2|\mu| + \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(2|\mu| + \frac{1}{\beta_c} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{-1}. \quad (4.96)$$

Expandindo em torno do ponto crítico, obtemos a forma final

$$\chi_B = \left[\sqrt{2|\mu|} \left(\frac{a}{k_B T} \right) \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) + \left(\frac{a}{k_B T} \right)^2 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^2 + O \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^3 \right]^{-1}, \quad (4.97)$$

com o parâmetro a definido como

$$a \equiv \frac{\left(\frac{1+2\beta_c|\mu|}{\beta_c} \right)^{\frac{1}{2}}}{2\beta_c (1 + 2\beta_c|\mu|)}. \quad (4.98)$$

A expressão (4.97) apresenta um comportamento interessante, note que para $\mu \neq 0$ ($\mu < 0$),

$$\chi_B \propto \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^{-1}, \quad (4.99)$$

recuperamos o expoente crítico de campo médio, $\gamma_T = 1$. Por outro lado, para $\mu = 0$, o termo dominante fornece

$$\chi_B \propto \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^{-2}, \quad (4.100)$$

definindo um novo expoente crítico, $\gamma_T (\mu = 0) = 2$, como no caso de temperatura nula.

5 Comentários Finais

No decorrer deste trabalho discutimos o modelo esférico com o propósito final de obter uma versão supersimétrica do mesmo. Na extensão supersimétrica, a construção do modelo no superespaço é apropriada para conciliar a estrutura de vínculo com os requisitos de supersimetria. Por outro lado, a formulação *on-shell*, que é obtida após integrar o grau de liberdade auxiliar, permite uma clara visualização dos tipos de interações presentes no modelo. Neste contexto, discutimos rapidamente a estrutura que surge quando assumimos que a energia de interação, $U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$, está restrita a primeiros vizinhos. A possibilidade de interações competitivas no setor bosônico, torna o modelo passível de exibir um rico comportamento crítico com fases modulados, além das fases ordenadas e desordenadas. Neste caso, é esperado obter um ponto de Lifshitz no encontro dessas fases.

Após obtermos as equações dos vínculos, o estudo do comportamento crítico do modelo é realizado no caso de interações de campo médio, em que $U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \rightarrow U/N$. Além de facilitar a equação de ponto de sela, as interações de campo médio fornecem um comportamento crítico interessante. À temperatura zero, as equações de ponto de sela exigem que $\mu = 0$, garantindo que a supersimetria não seja espontaneamente quebrada. Com esta condição, encontramos um comportamento crítico sempre que γ e U tiverem sinais opostos, fornecendo uma transição de fase sem quebra de supersimetria. A magnetização usual exibe um expoente crítico típico de campo médio, mas a susceptibilidade é caracterizada por um novo expoente crítico $\gamma_g = 2$. O condensado fermiônico comporta-se uniformemente conforme cruzamos o ponto crítico, sendo indiferente à transição de fase quântica.

À temperatura finita, as flutuações térmicas são responsáveis pela quebra de supersimetria. Nesta situação, o modelo exibe um comportamento crítico para $\mu \leq 0$ e quando μ e U possuem sinais opostos, como no caso de temperatura nula. Nestas condições, temos uma transição de fase a temperatura finita T_c . O modelo apresenta diferentes comportamentos críticos de acordo com os valores de μ , no sentido que a susceptibilidade é governada por expoentes críticos distintos. Para $\mu = 0$, obtemos o mesmo expoente crítico no caso de temperatura zero, $\gamma_T = 2$. Porém, para $\mu < 0$ recuperamos o expoente usual de campo médio $\gamma_T = 1$. Independente do valor de μ , a magnetização é caracterizada pelo expoente crítico de campo médio, $\beta = 1/2$, semelhante ao de temperatura zero. Contudo, contrariamente ao caso de temperatura zero, o condensado fermiônico é sensível a transição de fase térmica, exibindo diferentes dependências com a temperatura, acima e abaixo da temperatura crítica. Esses resultados sugerem que as interações de campo médio são muito fracas para quebrar o condensado em ambos os casos de temperatura finita e temperatura zero.

A extensão supersimétrica do modelo esférico quântico para o caso de interações

de curto alcance junto com uma conexão com o modelo sigma não-linear é apresentado em [44]. Para interações de curto alcance, o modelo esférico quântico supersimétrico também apresenta uma transição de fase, tanto para temperatura zero quanto para temperatura finita.

Nosso trabalho em andamento, busca relacionar o modelo esférico supersimétrico com sistemas físicos reais, na tentativa de uma aplicação concreta deste modelo. Além disso, seria interessante estabelecer uma relação entre o modelo esférico quântico proposto em [21] e o modelo sigma não-linear, cuja dinâmica é governada por um termo cinético do tipo Schrödinger.

Referências

- [1] FRIEDAN, D.; QIU, Z.; SHENKER, S. Conformal invariance, unitarity, and critical exponents in two dimensions. *Physical Review Letters*, APS, v. 52, n. 18, 1984.
- [2] FRIEDAN, D.; QIU, Z.; SHENKER, S. Superconformal invariance in two dimensions and the tricritical ising model. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 151, n. 1, 1985.
- [3] QIU, Z. Supersymmetry, two-dimensional critical phenomena and the tricritical ising model. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 270, 1986.
- [4] BLUME, M.; EMERY, V. J.; GRIFFITHS, R. B. Ising model for the λ transition and phase separation in 3He - 4He mixtures. *Physical review A*, APS, v. 4, n. 3, 1971.
- [5] NICOLAI, H. Supersymmetry and spin systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 9, n. 9, 1976.
- [6] NICOLAI, H. Extensions of supersymmetric spin systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 10, n. 12, 1977.
- [7] CROMBRUGGHE, M. de; RITTENBERG, V. Supersymmetric quantum mechanics. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 151, n. 1, 1983.
- [8] HUIJSE, L. et al. Charge frustration and quantum criticality for strongly correlated fermions. *Physical Review Letters*, APS, v. 101, n. 14, 2008.
- [9] LEE, S.-S. Emergence of supersymmetry at a critical point of a lattice model. *Physical Review B*, APS, v. 76, n. 7, 2007.
- [10] RAHMANI, A. et al. Emergent supersymmetry from strongly interacting majorana zero modes. *Physical Review Letters*, APS, v. 115, n. 16, 2015.
- [11] PONTE, P.; LEE, S.-S. Emergence of supersymmetry on the surface of three-dimensional topological insulators. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 1, 2014.
- [12] GROVER, T.; SHENG, D.; VISHWANATH, A. Emergent space-time supersymmetry at the boundary of a topological phase. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 344, n. 6181, 2014.
- [13] JIAN, S.-K.; JIANG, Y.-F.; YAO, H. Emergent spacetime supersymmetry in 3D weyl semimetals and 2D dirac semimetals. *Physical review letters*, APS, v. 114, n. 23, 2015.

-
- [14] JIAN, S.-K. et al. Emergence of supersymmetric quantum electrodynamics. *Physical Review Letters*, APS, v. 118, n. 16, 2017.
- [15] BERLIN, T. H.; KAC, M. The spherical model of a ferromagnet. *Physical Review*, APS, v. 86, n. 6, 1952.
- [16] JOYCE, G. Phase transitions and critical phenomena vol 2. New York: Academic Press, 1972.
- [17] OBERMAIR, G. *Dynamical aspects of critical phenomena*. [S.l.]: Gordon and Breach New York, 1972.
- [18] HENKEL, M.; HOEGER, C. Hamiltonian formulation of the spherical model in $d = r + 1$ dimensions. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, v. 55, n. 1, 1984.
- [19] NIEUWENHUIZEN, T. M. Quantum description of spherical spins. *Physical Review Letters*, APS, v. 74, n. 21, 1995.
- [20] VOJTA, T. Quantum version of a spherical model: crossover from quantum to classical critical behavior. *Physical Review B*, APS, v. 53, n. 2, 1996.
- [21] GRACIA, R. S.; NIEUWENHUIZEN, T. M. Quantum spherical spin models. *Physical Review E*, APS, v. 69, n. 5, 2004.
- [22] VOJTA, T. Quantum phase transitions in electronic systems. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 9, n. 6, 2000.
- [23] VOJTA, M. Quantum phase transitions. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 66, n. 12, 2003.
- [24] SACHDEV, S. *Quantum phase transitions*. [S.l.]: Wiley Online Library, 2007.
- [25] STANLEY, H. E. Spherical model as the limit of infinite spin dimensionality. *Physical Review*, APS, v. 176, n. 2, 1968.
- [26] GOMES, P. R.; BIENZOBAB, P.; GOMES, M. Competing interactions and the Lifshitz-type nonlinear sigma model. *Physical Review D*, APS, v. 88, n. 2, 2013.
- [27] GIRARDELLO, L.; GRISARU, M. T.; SALOMONSON, P. Temperature and supersymmetry. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 178, n. 2, 1981.
- [28] BOYANOVSKY, D. Supersymmetry breaking at finite temperature: the goldstone fermion. *Physical Review D*, APS, v. 29, n. 4, 1984.
- [29] GOMES, P. R.; BIENZOBAB, P. F.; GOMES, M. Supersymmetric extension of the quantum spherical model. *Physical Review E*, APS, v. 85, n. 6, 2012.

- [30] BIENZOBAS, P.; GOMES, P. R.; GOMES, M. Stochastic quantization of the spherical model and supersymmetry. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2013, n. 09, 2013.
- [31] PARISI, G.; SOURLAS, N. Supersymmetric field theories and stochastic differential equations. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 206, n. 2, 1982.
- [32] NICOLAI, H. Supersymmetry and functional integration measures. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 176, n. 2, 1980.
- [33] HORNREICH, R. The Lifshitz point: Phase diagrams and critical behavior. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 15, 1980.
- [34] FRACHEBOURG, L.; HENKEL, M. Exact correlation function at the Lifshitz points of the spherical model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 195, n. 3-4, 1993.
- [35] ISING, E. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 31, n. 1, 1925.
- [36] ONSAGER, L. Crystal statistics i a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, APS, v. 65, n. 3-4, 1944.
- [37] KAC, M. The work of T. H. berlin in statistical mechanics. *Physics Today*, v. 17, n. 10, 1964.
- [38] LEWIS, H.; WANNIER, G. Spherical model of a ferromagnet. *Physical Review*, APS, v. 88, n. 3, 1952.
- [39] BAGCHI, B. K. *Supersymmetry in quantum and classical mechanics*. [S.l.]: CRC Press, 2000.
- [40] SHIFMAN, M. A. *ITEP Lectures in particle physics and field theory*. [S.l.]: World Scientific, 1999.
- [41] CHAYES, L. et al. Avoided critical behavior in a uniformly frustrated system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 225, n. 1, 1996.
- [42] BIENZOBAS, P.; SALINAS, S. Quantum spherical model with competing interactions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 391, n. 24, 2012.
- [43] WALD, S.; HENKEL, M. Quantum phase transition in the spin-anisotropic quantum spherical model. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2015, n. 7, 2015.

-
- [44] TAVARES, L. et al. Supersymmetric quantum spherical spins with short-range interactions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2020, n. 2, 2020.
- [45] KAPUSTA, J. I.; LANDSHOFF, P. *Finite-temperature field theory*. [S.l.]: IOP Publishing, 1989.
- [46] DAS, A. *Finite temperature field theory*. [S.l.]: World scientific, 1997.
- [47] GUNTON, J.; BUCKINGHAM, M. Condensation of the ideal bose gas as a cooperative transition. *Physical Review*, APS, v. 166, n. 1, 1968.