



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

RICARDO GONZATTO RODRIGUES

**TESTANDO AS SIMETRIAS DO UNIVERSO EM
ESCALAS SUB-ANGULARES**

Londrina
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

G643t Rodrigues, Ricardo .

Testando as Simetrias do Universo em Escalas Sub-Angulares / Ricardo Rodrigues. - Londrina, 2023.
78 f.

Orientador: Thiago dos Santos Pereira.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2023.
Inclui bibliografia.

1. Radiação Cósmica de Fundo - Tese. 2. Cosmologia - Tese. 3. Vetores de Multipolo - Tese. 4. Vetores de Fréchet - Tese. I. dos Santos Pereira, Thiago. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 53

RICARDO GONZATTO RODRIGUES

**TESTANDO AS SIMETRIAS DO UNIVERSO EM
ESCALAS SUB-ANGULARES**

Dissertação apresentada ao Departamento de
Física da Universidade Estadual de Londrina,
como requisito para o grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira

Londrina
2023

RICARDO GONZATTO RODRIGUES

**TESTANDO AS SIMETRIAS DO UNIVERSO EM
ESCALAS SUB-ANGULARES**

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito para o grau de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Sandro Dias Pinto Vitenti
Universidade de Brasília

Prof. Dr. Paulo Laerte Nattl
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 29 de agosto de 2023.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus amigos que me ajudaram durante toda minha caminhada pela Física, desde a graduação até o conclusão do mestrado. Além disso, agradeço também às diversas pessoas que o meio universitário me fez conhecer.

Sou grato também à minha família, que desde o momento que escolhi seguir com a ideia de estudar Física, acreditou em mim.

Por fim, agradeço ao meu orientador e os demais professores que, de alguma maneira, contribuíram para minha trajetória, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro durante toda a pesquisa.

“Creio que fui um grão de areia, mas a praia é feita de grãos de areia.”
— (Octávio Brandão. *As lutas de seu tempo*).

RODRIGUES, Ricardo Gonzatto. **Testando as Simetrias do Universo em escalas Sub-angulares** 2023. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

RESUMO

Neste trabalho, implementamos um código numérico escrito em C para obter os Vetores de Multipolo (MVs) e Vetores de Fréchet (FVs) de um mapa de temperatura da CMB (acrônimo inglês para *Cosmic Microwave Background*). Isso nos permitiu testar as hipóteses do modelo padrão de isotropia estatística e gaussianidade de uma forma independente de modelo, uma vez que esses vetores são insensíveis ao espectro de potências angular C_ℓ . Para realizar esses testes, recorremos ao teste de hipótese da função estatística de χ^2 . Nele, vimos que a *pipeline commander* (2018) do satélite Planck está em discordância com essas hipóteses de simetria nas escalas tanto do satélite Planck quanto do satélite Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP). Além disso, realizamos uma série de testes fazendo modulações artificiais de temperatura, para melhor entender a relação entre a direção dos FVs e MVs com as anisotropias presentes na CMB.

Palavras-chave: Radiação Cósmica de Fundo. Vetores de Multipolo. Vetores de Fréchet

RODRIGUES, Ricardo Gonzatto **Testing the symmetries of the universe at sub-angular scales** 2022. Masters Degree Dissertation – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

ABSTRACT

In this work, we implement a numerical code written in C to obtain the Multipole Vectors (MVs) and Fréchet Vectors (FVs) of a Cosmic Microwave Background (CMB) temperature map. This allowed us to test the standard model hypotheses of statistical isotropy and Gaussianity in a model-independent way, since these vectors are insensitive to the angular power spectrum C_ℓ . To carry out these tests, we used the hypothesis test of χ^2 statistical function. In this test, we saw that the *pipeline* commander (2018) of the Planck satellite is in disagreement with these hypotheses of symmetry at the scales of both Planck satellite and Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) satellite. Furthermore, we performed a series of tests making artificial temperature modulations, aiming to better understand the relationship between the direction of the FVs and MVs with the anisotropies present in the CMB.

Keywords: Cosmic Microwave Background. Multipol Vectors. Fréchet Vectors.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA	17
2.1 Modelo Padrão da Cosmologia	17
2.2 Parametrizações do Tempo	21
2.3 Radiação Cósmica de Fundo	23
2.3.1 Análise das anisotropias da radiação cósmica de fundo	23
2.3.2 Estimadores e variância cósmica	30
2.3.3 Análise da CMB para um céu incompleto	32
2.4 Análise Estatística	34
2.4.1 Função de verossimilhança	34
2.4.2 Teste tulo de gaussianidade, homogeneidade e isotropia estatística	35
3 VETORES DE MULTIPOLÓ	38
3.1 Prova dos Vetores de Multipolo	38
3.2 Algoritmos para Determinação dos MVs	39
3.3 Vetores de Fréchet	42
4 METODOLOGIA	45
4.1 Missão Planck	45
4.2 Healpix	45
4.3 Análise da Hipótese GSI no Contexto dos Vetores	46
5 RESULTADOS	51
5.1 Escolha do Parâmetro N_{SIDE} e Teste das Matrizes de Covariância	51
5.2 Análise dos Cold Spots	53
5.3 Testes de Isotropia e Gaussianidade para os Mapas da Missão Planck	59
6 CONCLUSÃO	66
A CONSTRUÇÃO DO CÓDIGO EM C	72

LISTA DE FIGURAS

<p>1.1 Comparação entre as resoluções angulares das observações feitas pelos três satélites: COBE, WMAP e Planck. A cor alaranjada simboliza regiões de flutuações positivas enquanto as regiões com flutuações negativas são representadas pela cor azul. Fonte: NASA/JPL-Caltech/ESA.</p> <p>2.1 Ilustração da relação entre as diferentes densidades de energia com o logaritmo do fator de escala. Na figura, vemos os períodos de dominância de cada um dos fluidos até o domínio atual da constante cosmológica.</p> <p>2.2 Mapa da temperatura da CMB em μK. Fonte: ESA/Planck</p> <p>2.3 Os pontos vermelhos indicam o espectro de potências angular medido pelo satélite Planck, enquanto a linha continua é o melhor ajuste teórico. Fonte: Missão Planck</p> <p>2.4 Máscaras UTF78 e a UTB77 que comumente são utilizadas para analisar mapas de temperatura (esquerda) e polarização (direita) da CMB [41]</p> <p>2.5 Distribuição de χ^2 para 5 graus de liberdade. Nesse caso, o valor do teste foi de 5.50 representando que a hipótese foi aceita. 11.07 representa o valor crítico da hipótese nula escolhido com base no tipo de dados à ser analisado.</p> <p>3.1 Distribuição das variáveis η (esquerda) e φ (direita) dos MVs dos multipolos de $\ell = 2$ até $\ell = 10$ para 3500 realizações de mapas gaussianos, homogêneos e isotrópicos da CMB.</p> <p>3.2 Distribuição das variáveis η (esquerda) e φ (direita) dos MVs dos multipolos de $\ell = 2$ até $\ell = 200$ para 3500 realizações de mapas gaussianos, homogêneos e isotrópicos + máscara UTF78 da CMB.</p> <p>3.3 Mapa mollweide dos MVs nos intervalos de $\ell = 2$ até $\ell = 1500$ de um mapa GSI + máscara UTF78. Nela, fica evidente o acúmulo de vetores nos polos devido a presença da máscara na região equatorial [43].</p> <p>3.4 À esquerda temos a Projeção <i>Mollweide</i> da distribuição dos MVs para $\ell = 1000$ de um mapa GSI. À direita temos a mesma projeção dos valores da função (3.14) para todos os pontos da esfera. A cor azul representa os pontos de menor temperatura enquanto os de maior temperatura estão identificados com a cor amarela, em vermelho está o Vetor de Fréchet desse multipolo.</p> <p>3.5 Histogramas das variáveis η (esquerda) e φ (centro) dos vetores de Fréchet para 5000 realizações de mapas GSI da CMB. O plot a direita é a função empírica da probabilidade destas quantidades.</p>	<p>15</p> <p>20</p> <p>24</p> <p>31</p> <p>33</p> <p>36</p> <p>41</p> <p>41</p> <p>42</p> <p>43</p> <p>43</p>
--	---

3.6 Distribuição dos FVs para $\ell \in [2, 100]$ de 100 simulações de mapas GSI + máscara UTF78 [43].	44
4.1 Figura que simboliza o processo de contagem dos MVs em cada pixel. À esquerda temos uma projeção de um conjunto de vetores para $\ell = 100$ e, à direita, temos um mapa da frequência com que os vetores se distribuem nos pixels para uma discretização de $N_{\text{SIDE}} = 2$	47
4.2 Comparação entre as análises de χ^2 para mapas GSI. À esquerda temos as análises sem a inclusão do fator de correção nas matrizes de covariância, esse problema leva à saltos nestes valores. À direita temos a mesma análise agora com o fator de correção.	48
4.3 Fluxograma das diferentes etapas do teste de hipótese nula de χ^2	50
5.1 Distribuição da variável x_i para diferentes valores de ℓ , obtidas de um conjunto de 6000 simulações. O eixo y identifica a probabilidade de um MV coincidir com um pixel identificado no eixo x. As primeiras duas linhas foram obtidas de mapas sem a máscara UT78 enquanto as duas últimas foram obtidas de mapas mascarados.	52
5.2 Matrizes de covariância para as diferentes análises de χ^2 . A matriz da esquerda se relaciona com as variáveis aleatórias x_i para $N_{\text{SIDE}} = 16$ enquanto à direita temos a matriz que se relaciona com as variáveis aleatórias χ^2_{MV} . Os valores em cada eixo identificam o pixel correspondente.	53
5.3 À esquerda temos um mapa totalmente GSI e a direita um mapa GSI com uma modulação de temperatura de -0.07 K e abertura de 10°	54
5.4 Os pontos vermelhos representam a função χ^2 para diferentes modulações de temperatura em mapas GSI. Da direita para a esquerda a amplitude da modulação diminui enquanto que de cima para baixo seu tamanho diminui. Em todos os gráficos temos também os χ^2 das simulações de controle e seus respectivos erros.	55
5.5 Projeção <i>Mollweide</i> dos MVs obtidos de 1000 mapas com a modulação de temperatura de 5° de raio. De cima para baixo e da esquerda para direita temos respectivamente $\ell = 13, 48, 98, 115, 121$ e 122	56
5.6 Projeção <i>Mollweide</i> dos MVs obtidos de 1000 mapas com a mesma modulação de temperatura porém com ela deslocada. De cima para baixo e da esquerda para direita temos respectivamente $\ell = 13, 48, 98, 115, 121$ e 122	57
5.7 Projeção <i>Mollweide</i> dos FVs obtidos de 1000 mapas com a mesma modulação de temperatura. De cima para baixo e da esquerda para direita temos respectivamente $\ell = 13, 48, 98, 115, 121$ e 122	58

5.8	Os pontos vermelhos indicam a função χ_{ℓ}^2 para 1000 mapas com uma modulação de temperatura de 0.07 K e 5° de raio. A linha continua azul demonstra o fit da função sinc. Além disso, em preto temos as simulações de controle junto aos seus respectivos erros.	59
5.9	Projeção <i>Mollweide</i> dos MVs para $l_{\text{max}} = 1500$, obtidos das 4 <i>pipelines</i> do satélite Planck.	60
5.10	Projeção <i>Mollweide</i> dos FVs para $l_{\text{max}} = 1500$, obtidos das 4 <i>pipelines</i> do satélite Planck.	61
5.11	χ_{ℓ}^2 obtidos das 4 <i>pipelines</i> do satélite Planck. Os pontos vermelhos mais claros são os resultados para cada multipolo, enquanto os pontos vermelhos mais escuros são os binados em intervalos de 20 multipolo. A linha verde são os χ_{ℓ}^2 das simulações de controle junto com o desvio padrão em azul	63
5.12	χ_{ℓ}^2 obtidos das 4 <i>pipelines</i> do satélite Planck. Os pontos vermelhos correspondem aos resultados da binagem em intervalos de 20 multipolo. A linha verde são os χ_{ℓ}^2 das simulações de controle junto com o desvio padrão em azul	64

LISTA DE TABELAS

4.1	Relação entre o N_{SIDE} , N_{PIX} e a resolução angular θ [47].	46
5.1	χ^2 e p_{value} obtidos dos MVs calculados a partir das <i>pipelines</i> do satélite Planck do ano de 2015	65
5.2	χ^2 e p_{value} obtidos dos MVs calculados a partir das <i>pipelines</i> do satélite Planck do ano de 2018	65

1 INTRODUÇÃO

Assumindo a hipótese de que, em escalas suficientemente grandes, o Universo é homogêneo e isotrópico, as observações cosmológicas feitas em nosso planeta são equivalentes a observações realizadas em qualquer outra posição no Universo, em outros termos, a nossa posição não é estatisticamente distingível das outras posições no Cosmo (homogeneidade). Pelas mesmas razões, o Universo deve ser estatisticamente o mesmo em todas as direções (isotropia). Esse conjunto de hipóteses forma o Princípio Cosmológico (PC) e nos permite testar os diversos modelos propostos na Cosmologia Moderna. Como sabemos, em uma certa escala temos galáxias, *clusters* e *superclusters*. Tais estruturas são, individualmente, manifestações explícitas da quebra de homogeneidade e isotropia. Portanto, surge naturalmente a dúvida: o que é considerado uma escala 'suficientemente grande'? A escala na qual a distribuição de galáxias se torna homogênea é difícil de ser determinada, porém análises indicam uma transição da homogeneidade na distribuição de galáxias em escalas entre 70 e $150\ h^{-1}\ \text{Mpc}$ [1, 2, 3, 4]. Existem diversas janelas observacionais para se testar o PC, dentre elas podemos citar o movimento peculiar das galáxias, ou, o que é um dos temas deste trabalho, a CMB [5].

Na chamada história térmica do Universo, existe um conjunto de evidências de que nos estágios iniciais ele estava em um estado denso e quente, no qual a matéria era totalmente ionizada e os fótons estavam acoplados com os elétrons. Conforme o universo se expandiu, sua temperatura decresceu até um valor limite no qual a energia dos fótons não era mais capaz de ionizar os átomos. Nesse momento, conhecido como recombinação, temos o surgimento dos primeiros átomos estáveis e o consequente desacoplamento dos fótons. A CMB é esse fluxo de fótons que permeia o Universo desde então e chega até a Terra de todas as direções. Ela foi prevista teoricamente no final da década de 1940 [6] e confirmada observationalmente por Penzias e Wilson em 1965 [7]. Anos mais tarde, a missão *Cosmic Background Explorer* (COBE) confirmou que esses fótons se distribuem em várias frequências de acordo com um espectro de corpo negro [8]. Isso nos indica que a frequência da radiação de uma certa região no céu identifica unicamente a temperatura correspondente da radiação àquela direção. O valor médio dessa temperatura é de aproximadamente $2.73\ \text{K}$ e flutuações ao redor dele são chamados de *anisotropias*. Nesse contexto, a CMB pode ser interpretada como uma realização de um campo aleatório no qual flutuações observadas identificam uma realização desse campo. Nesse contexto, a hipótese do PC equivale a presumir isotropia estatística das flutuações. Elas são da ordem de 10^{-5} em torno de seu valor médio e sua existência foi confirmada pela missão COBE no início dos anos 1990 [9]. As medidas do COBE se restringiram aos primeiros momentos multipolares, ou, grandes aberturas angulares. Posteriormente, os satélites Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) e Planck elevaram a resolução angular (WMAP: $\rightarrow 13'$ e Planck $\rightarrow 7.1'$, Figura 1.1).

Grande parte dos desafios da cosmologia contemporânea consiste em analisar as pro-

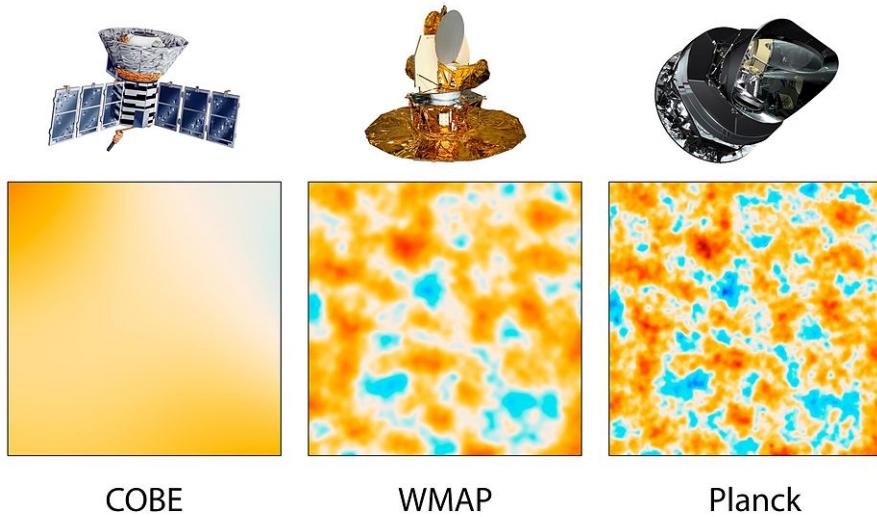


Figura 1.1: Comparação entre as resoluções angulares das observações feitas pelos três satélites: COBE, WMAP e Planck. A cor alaranjada simboliza regiões de flutuações positivas enquanto as regiões com flutuações negativas são representadas pela cor azul. **Fonte:** NASA/JPL-Caltech/ESA.

priedades das flutuações da CMB, que são associadas aos mecanismos que fundamentam a dinâmica do Universo em seus estágios iniciais. Modelos que consideram um período inflacionário [10] preveem uma distribuição gaussiana com uma variância aproximadamente invariante de escala para as flutuações de densidade que, posteriormente, se relacionam às de temperatura. Se esse campo é gaussiano, sua estatística pode ser expressa completamente em termos da função de correlação, ou, equivalentemente, da sua transformada harmônica, o *espectro de potências angular*. Há também teorias como as relacionadas com modelos inflacionários não comuns ou que envolvem defeitos topológicos que produzem outro comportamento para as flutuações [11]. Dessa forma, uma importante motivação para as análises de gaussianidade é testar esses diferentes modelos. Essa tarefa não é simples, comumente as não gaussianidades identificadas têm origens em erros sistemáticos, como contaminações de galáxias ou até ruídos que não são apropriadamente removidos.

A colaboração do Planck utilizou duas classes de ferramentas estatísticas para analisar as não gaussianidades na CMB. A primeira classe foi uma análise dependente de modelo utilizando *bispectrum estimators*. Nos resultados foi encontrado uma consistência de 1σ com a hipótese gaussiana [12]. A segunda classe de testes envolveu análises independentes de modelo como: os funcionais de Minkowski [13, 14, 15, 16], o *spherical Mexican-hat wavelet* [17]. Em geral, esses testes obtiveram poucas evidências de gaussianidade. Uma outra técnica estatística utilizando *surrogate map* [18, 19] detectou evidências mais fortes de não gaussianidade dos mapas do satélite Planck [20].

Além da gaussianidade, testes de isotropia estatística são realizados desde sua descoberta até o tempo presente [21, 22, 23, 24]. Copi, Huterer e Starkman [25] apresentaram um método de testar a independência estatística dos momentos de multipolo ($a_{\ell,m}$) utilizando uma

nova técnica chamada de *Multipole Vectors* (MVs), na qual cada momento de multipolo ℓ dos coeficientes multipolares $a_{\ell,m}$ é representado por 2ℓ vetores unitários. Em 2004, o matemático Jeffrey Weeks [26] evidenciou que os MVs já eram conhecidos a muito tempo. Precisamente, eles foram utilizados pela primeira vez por Maxwell em seu “Tratado sobre a eletricidade e magnetismo” [27]. Mais tarde, foi proposta uma nova forma de se obter tais vetores por meio da relação que eles têm com as raízes de um polinômio de coeficientes complexos construído a partir dos $a_{\ell,m}$ [28, 29]. Esses trabalhos se basearam em [30, 31] que analisavam polinômios aleatórios com algumas aplicações em mecânica quântica, neles é demonstrado que, se os coeficientes do polinômio forem, eles mesmos, variáveis gaussianas e estatisticamente isotrópicas, os MVs se distribuem uniformemente na esfera. Esse resultado é intuitivo. Se o universo é estatisticamente isotrópico, os MVs resultantes de um mapa da CMB devem se distribuir com igual probabilidade na esfera. Evidentemente, esta distribuição mudará se o mapa tiver máscara, contaminantes sistemáticos, ou uma nova física que resulte em quebra da isotropia. Portanto, testar a distribuição dos MVs resultante dos mapas do satélite Planck é uma tarefa essencial para a cosmologia.

Dado esse contexto, este trabalho tem como objetivo testar as hipóteses de gaussianidade e isotropia estatística da CMB, analisando a distribuição estatística dos MVs provenientes de mapas de temperatura da missão Planck. Porém, ao contrário de testar a uniformidade dos vetores na esfera, testar sua correlação interna é mais complicada, uma vez que o número de combinações entre os vetores que deve ser testada cresce com ℓ^2 . Portanto, uma forma de facilitar tal análise é mapear o conjunto desses vetores em outro menor.

Uma das formas de fazer isso é separar o conjunto de MVs de acordo com cada multipolo ℓ e analisá-los separadamente. Dessa forma, uma das possibilidades de comprimir a informação de cada ℓ , é olhando para os MVs como pontos em uma esfera unitária e procurando um ponto que minimiza a soma das distâncias quadradas entre esse ponto e os vetores. Essa variância entre os pontos na esfera, é conhecido como variância de Fréchet e o ponto em que ela é mínima foi batizado de Vetor de Fréchet (FV). Estes vetores, apresentam também uma distribuição uniforme para mapas gaussianos e estatisticamente isotrópicos e são mais sensíveis à presença de máscara ou modulações em mapas de temperatura, além de possuírem outras propriedades interessantes para esse tipo de análise que ficaram mais evidentes ao longo do trabalho.

Ademais, pretendemos também entender melhor o comportamento dos MVs mediante modulações de temperatura artificiais nos mapas. Para atender a todas essas propostas, desenvolvemos neste trabalho um código em C para obtenção e análise dos MVs e FVs, dado um mapa de temperatura qualquer e, em seguida, realizamos testes nulos de isotropia usando uma função estatística de χ^2 para comparar mapas simulados com as medidas do satélite Planck.

2 MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA

A construção da relatividade geral, elaborada por Albert Einstein no século XX, nos permitiu construir uma teoria testável do universo. Posteriormente, a descoberta feita por Edwin Powell Hubble em 1929, de que o universo está em expansão, forneceu um dos primeiros indícios para o que viria a ser mais tarde chamado de paradigma do Big Bang Quente. Com os avanços nas medidas astronômicas, outras observações ajudaram a sedimentar essa teoria, sendo elas: a abundância de elementos leves, que concordava com a Nucleossíntese Primordial, e as anisotropias de temperatura e polarização da CMB.

Em síntese, o modelo padrão do Big Bang (também conhecido como modelo padrão da cosmologia) propõe que o universo teve seu início em torno de 15 bilhões de anos atrás com uma distribuição de matéria densa e temperatura elevada, e está expandindo e resfriando desde então. Nesta seção, iremos apresentar brevemente os elementos básicos desse modelo, que é baseado no PC, na relatividade geral e no modelo padrão da física de partículas. De início, vamos falar um pouco sobre as motivações para a métrica do universo. Posteriormente, iremos motivar a introdução de um tensor de energia momento que, junto com a métrica, produzem as equações dinâmicas básicas da cosmologia, conhecidas como Equações de Friedmann.

2.1 MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA

A expansão do universo foi postulada teoricamente pela primeira vez por Alexander Friedmann em 1922 e, independentemente, por Georges Lemaître em 1927, antes da descoberta feita por Hubble e de inúmeras outras confirmações subsequentes. Com ela, temos a criação de uma classe de observadores privilegiados, ou seja, observadores em queda livre com a expansão do universo. Estes observadores são chamados de *observadores comoveis*, aos quais podemos associar uma noção global de tempo dada pelo seu tempo próprio. A velocidade relativa desses observadores é então descrita pela *lei de Hubble*: a velocidade do observador B com respeito a A é

$$\mathbf{v}_{BA} = H(t) \mathbf{r}_{BA}, \quad (2.1)$$

onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble, que depende apenas do tempo t , e \mathbf{r}_{BA} é o vetor que aponta de A para B . No tempo atual (usaremos H_0 para se referir ao parâmetro H nesse momento), medidas nos dizem que esse parâmetro é da ordem de 70 km/(s Mpc) [32, 33], embora existam conflitos entre as diferentes estimativas (*Hubble Tension* [34]). Além disso, $H(t)$ é comumente parametrizado em termos da quantidade sem dimensão

$$h = \frac{H(t)}{100\text{km}/(\text{s Mpc})}. \quad (2.2)$$

Considerando a expansão do universo e o PC, podemos definir uma métrica para descrever o espaço-tempo e, junto às equações de campo de Einstein, sua evolução. Esse trabalho foi feito pela primeira vez entre os anos 1920 e 1930 pelos já mencionados Friedmann e Lemaître, e também por Howard Robertson e Arthur Walker. Dessa forma, tal métrica é conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, ou FLRW, e, considerando $c = 1$, é escrita como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t)dl^2, \quad (2.3)$$

sendo a distância espacial descrita por

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.4)$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.5)$$

Na equação (2.3), K representa a curvatura das seções espaciais do espaço-tempo. O outro fator que aparece nela é $a(t)$, este é o chamado fator de escala que parametriza a expansão do universo. Para o presente, vamos adotar a convenção de $a(t=0) = a_0 = 1$.

Para determinar a evolução do parâmetro $a(t)$, o que é equivalente a determinar a dinâmica da evolução do universo, temos que conhecer o seu conteúdo de matéria. De todas as opções possíveis do tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$, as simetrias impostas pelo PC limitam a sua forma geral para um tensor de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = (\rho(t) + p(t)) u_\mu u_\nu + p(t)g_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

onde u_μ é o quadrivetor da velocidade do fluido que, no referencial comóvel, vale $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$. Além disso, como condição adicional da homogeneidade, a densidade de energia ρ e a pressão p não devem depender da posição x , e portanto são funções apenas do tempo.

Dadas essas suposições, a relação entre o conteúdo geométrico do universo (métrica) e o conteúdo de matéria (tensor de energia-momento) é dada pelas equações de campo da relatividade geral de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Nesta expressão, do lado esquerdo temos $R_{\mu\nu}$ e R como sendo o tensor e o escalar de Ricci, respectivamente. Ambos, se relacionam com a métrica por meio dos símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$. Além disso, do lado direito, G é a constante gravitacional. Como estamos trabalhando no espaço-tempo, μ e ν vão de 0 a 3 e, portanto, a expressão (2.7) representa 16 igualdades. A simetria dos índices, faz com que esse número diminua para 10 equações e, destas, apenas 2 são independentes

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{K}{a^2(t)}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho(t) + 3p(t)). \quad (2.9)$$

Estas são as equações de Friedmann, que relacionam a composição do universo com a evolução do fator de escala. Para esse cálculo, foram assumidas implicitamente as transformações $\rho \rightarrow \rho + (\Lambda/8\pi G)$ e $p \rightarrow p - \Lambda/(8\pi G)$, incluindo a constante cosmológica também como uma fonte de densidade de energia e pressão do fluido cosmológico. Note que, se Λ é uma constante, essas transformações não afetam as equações dinâmicas.

Além das equações de Friedmann, existe uma terceira equação que é resultado das identidades de Bianchi, que por sua vez garantem a conservação local do tensor de energia-momento. Essa equação tem a seguinte forma

$$\dot{\rho}(t) + 3H(t)(\rho(t) + p(t)) = 0, \quad (2.10)$$

onde foi assumido que $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$. Essa é a chamada equação de conservação local do fluido, ou equação de continuidade. É possível verificar que ela resulta de uma combinação das duas equações (2.8) e (2.9) e, portanto, não é independente delas. Comumente, podemos trabalhar com quaisquer duas desse conjunto de três equações. Isso nos leva à um problema, pois temos 3 incógnitas (a , ρ e p) e duas equações. Para resolver esse sistema, fazemos uso da chamada equação de estado para um fluido barotrópico $p = p(\rho)$. Na maior parte dos casos de interesse da cosmologia, essa relação é linear

$$p = \omega\rho, \quad (2.11)$$

onde ω é uma constante que depende das características do fluido. Para uma matéria não relativística $p_m = 0$, e portanto $\omega_m = 0$. Para o caso relativístico (radiação ou outra partícula sem massa) $p_r = \rho_r/3$ e portanto $\omega_r = 1/3$. Por fim, para o caso de uma constante cosmológica, a equação de estado é escolhida de forma a satisfazer $\dot{\rho} = 0$, com isso a equação (2.10) nos leva a $\omega_\Lambda = -1$. Em resumo

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{matéria fria e/ou matéria escura,} \\ 1/3 & \text{radiação eletromagnética,} \\ -1 & \text{constante cosmológica } \Lambda. \end{cases} \quad (2.12)$$

Com a equação de estado, podemos resolver a equação de continuidade (2.10) e obter

$$d\ln\rho = -3(1+\omega)d\ln a \rightarrow \rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (2.13)$$

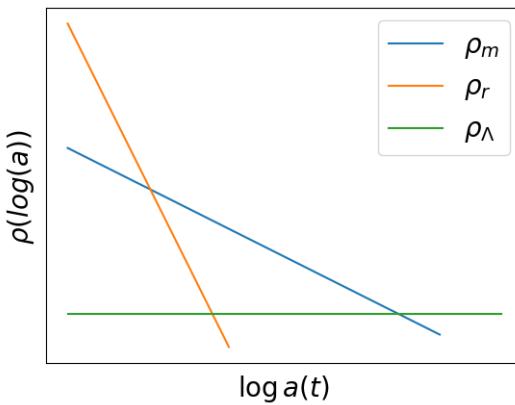


Figura 2.1: Ilustração da relação entre as diferentes densidades de energia com o logaritmo do fator de escala. Na figura, vemos os períodos de dominância de cada um dos fluidos até o domínio atual da constante cosmológica.

onde $\rho_0 = 3H_0^2/8\pi G$ é a densidade crítica de energia do universo, calculada hoje. Essa relação evidencia que, em um universo em expansão, a densidade de energia decai de maneira diferente para cada fluido. Para a matéria fria e/ou escura $\rho_m \propto a^{-3}$, isso está em concordância com a ideia de que a densidade da massa decai com o volume. Para a radiação eletromagnética $\rho_r \propto a^{-4}$, pois além da energia decair com o volume temos, o que será discutido mais tarde, a influência da expansão no chamado *redshift* cosmológico. E, por fim, a densidade de energia da constante cosmológica por definição, não decai com a expansão $\rho_\Lambda \propto cte$. Ou seja,

$$\begin{cases} \rho_m \propto a^{-3} & \text{matéria fria e/ou matéria escura,} \\ \rho_r \propto a^{-4} & \text{radiação eletromagnética,} \\ \rho_\Lambda \propto cte & \text{constante cosmológica .} \end{cases} \quad (2.14)$$

Surge, nesse contexto, a ideia de *eras* do universo e cada um desses estágios depende de qual fluido possui a maior densidade de energia. No passado, temos a dominância da radiação, depois a da matéria fria e/ou matéria escura e, por fim, a era atual de dominância da constante cosmológica (figura 2.1).

Para ficar mais claro o que tal afirmação significa, podemos reescrever a equação (2.8), considerando que nosso universo tem apenas os três tipos de fluidos analisados até então

$$1 = \frac{(\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda)}{\rho_{cr}} - \frac{K}{a^2 H^2}, \quad (2.15)$$

onde a quantidade $\rho_{cr} = 3H^2/8\pi G$ é a densidade crítica para um instante qualquer. Agora, vamos reescrever essa expressão em termos das densidades de energia adimensionais

$$\Omega_i = \rho_i/\rho_{cr}, \quad \Omega_K = \frac{-K}{a^2 H^2}, \quad (2.16)$$

que nos leva à

$$\Omega_K = (1 - \Omega_r - \Omega_m - \Omega_\Lambda). \quad (2.17)$$

O que essa expressão nos indica, é que a geometria das seções espaciais do universo, determinada por K , depende da sua densidade total. Podemos também calcular os momentos de transição entre as diferentes eras do universo, pois nesses momentos esperamos que as densidades de energia dos fluidos sejam equivalentes. Portanto, as transições entre as diferentes fases podem ser calculadas a partir de

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \approx 1 \rightarrow \frac{\Omega_{m,0}}{a^3 \Omega_{\Lambda,0}} \approx 1 \rightarrow a_{m \rightarrow \Lambda} \approx \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\Omega_r}{\Omega_m} \approx 1 \rightarrow \frac{a^3 \Omega_{r,0}}{a^4 \Omega_{m,0}} \approx 1 \rightarrow a_{r \rightarrow m} \approx \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}}, \quad (2.19)$$

onde o subscrito 0, indica que esse parâmetro é calculado no tempo atual. Graças aos trabalhos da equipe do satélite Planck, temos medidas precisas de tais parâmetros que podem ser encontradas em [35]. Para uma estimativa, vamos usar os valores aproximados

$$\Omega_{m,0} \approx 0,31, \quad \Omega_{\Lambda,0} \approx 0,69, \quad \Omega_{r,0} \approx 9,2 \times 10^{-5}. \quad (2.20)$$

Com eles, obtemos que a transição entre a fase de domínio da matéria fria para a constante cosmológica, ocorreu quando $a_{m \rightarrow \Lambda} \approx 0.77$, ou seja, quando o universo tinha aproximadamente 77% do tamanho atual. Já a transição do domínio da radiação para o domínio da matéria fria, ocorreu quando $a_{r \rightarrow m} \approx 2,97 \times 10^{-4}$, ou seja, aproximadamente quando o universo era 10^4 vezes menor do que é hoje. Essa análise é de grande importância para um trabalho que tem foco em analisar a CMB, uma vez que o intervalo de tempo em que ocorreu a recombinação, foi durante a transição da fase de domínio da radiação para o de matéria fria. Além disso, a equipe do Planck determinou $\Omega_K \approx 0$, indicando que $K \approx 0$ e portanto que nosso universo é espacialmente plano.

Outro ponto importante de extraímos de toda essa discussão, é que o parâmetro $a(t)$ possui uma relação direta com o tempo, que vai depender dos diferentes estágios que o universo possui. Devido às várias formas que temos de expressar o tempo na cosmologia, convém fazer uma discussão mais detalhada dessa noção.

2.2 PARAMETRIZAÇÕES DO TEMPO

Assumindo a métrica de FLRW (equação (2.3)), as distâncias próprias (ou físicas) d são definidas em termos das distâncias comóveis l como $d = al$, onde as distâncias l são comóveis à expansão do universo. Para fôtons que se movem radialmente no vácuo: $ds^2 = 0$, e portanto

$dt = a(t)dl$, nesse contexto reescrevemos

$$l = \int \frac{dt}{a(t)} \equiv \eta \quad (2.21)$$

onde η é o chamado *tempo conforme*. Esse nada mais é do que o tempo em que o fóton leva para viajar desde sua emissão até o ponto de observação mais distante.

Vamos supor agora, que a radiação é emitida pela fonte em um instante t e chega no observador em um instante posterior t_0 . Se considerarmos um novo pulso em $t + \delta t$ que é detectado pelo observador em $t_0 + \delta t_0$, como a distância D é constante, temos

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+\delta t}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt'}{a(t')} \quad (2.22)$$

Se avaliarmos essa expressão para intervalos de tempo pequenos, isso é equivalente à

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t}{a(t)} \quad (2.23)$$

Essa equação nos diz que o período de oscilação da luz diminui com a expansão do universo, ou, inversamente, que seu comprimento de onda aumenta com ela

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{em}} \frac{a_0}{a(t)} \quad (2.24)$$

onde $a_0 = a(t_0)$. Dessa expressão podemos ver que em um Universo em expansão acelerada ($a_0 > a$) a luz sofre um desvio para o vermelho (*redshift*) em seu espectro. Esse é o chamado efeito Doppler cosmológico. Convém então introduzir um fator adimensional relacionado com o *redshift*

$$1 + z \equiv \frac{a_0}{a(t)}. \quad (2.25)$$

Dessa forma, interpretamos que existe uma relação direta entre a energia de emissão do fóton detectado e a expansão do universo. Isso indica que a medida de quanto o fóton perdeu de energia ao longo da sua trajetória pode ser utilizada como uma medida de tempo. Quanto maior for o redshift, menor é o tempo próprio da expansão naquele momento, levando à essa proporcionalidade inversa. Portanto, $z = 0$ indica o tempo cósmico atual, enquanto $z > 0$ indica o passado do Universo. Estima-se que o momento onde ocorreu o desacoplamento entre matéria e radiação foi em $z_{\text{dec}} \approx 1100$ [5, 36, 37].

Além disso, em outros vários contextos, a temperatura T também se demonstra ser um parâmetro útil para o tempo cósmico. No caso dos fótons com uma energia E e, portanto, $1 + z \propto E \propto T$ implica uma relação entre esse parâmetro e o redshift que pode ser analisada à luz da temperatura atual do universo $T_0 = 2.73K$.

Em geral, podemos caracterizar de maneira equivalente as diferentes épocas do universo: pelo tempo desde o Big Bang, pelo valor do fator de escala naquele tempo, pelo redshift que os

fôtons sofreram ao longo de sua trajetória ou pela temperatura da radiação cósmica de fundo. Dada essa análise, na próxima seção iremos tratar do objeto de estudo deste trabalho, que é a CMB.

2.3 RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

Até o presente, a CMB nos fornece a janela observacional mais direta com o universo primordial. Observações do seu campo de temperatura e polarização têm uma importância fundamental para a construção do Modelo Padrão, tratado nos capítulos anteriores. Além disso, qualquer modificação nas premissas básicas da cosmologia, resultariam em alterações no sinal detectado da CMB e por isso ela é tão estudada. Para explicar as propriedades estatística das flutuações de temperatura, uma das alternativas é trabalhar com o processo inflacionário.

No chamado paradigma inflacionário é assumido que as estruturas que observamos em larga escala são descendentes de processos quânticos que aconteceram em 10^{-35} segundos após o Big Bang. Isso inclui a morfologia da CMB. Em resumo, a ideia da inflação cósmica consiste em “esticar” as flutuações quânticas microscópicas, que permeavam o universo em seus estágio iniciais, até as escalas cosmológicas do presente. Portanto, essas perturbações primordiais podem ser vistas como condições iniciais para o processo de formação de estrutura via instabilidade gravitacional. O que é importante entender de tal explicação é que, se consideramos apenas teorias de perturbações lineares, a evolução dessas perturbações mantém as características estatísticas das flutuações do universo primordial.

Até primeira ordem, as propriedades estatísticas dessas flutuações quânticas podem ser trabalhadas como osciladores harmônicos em seu estado fundamental e, portanto, tais perturbações são gaussianas com cada modo correspondendo à uma variável aleatória independente. Também, na teoria de perturação linear, temos várias flutuações cosmológicas que evoluem independentemente e, com base no *teorema do limite central*, é dito que nosso Universo obedece uma distribuição gaussiana. Além disso, assumindo o PC, podemos esperar que os momentos estatísticos da distribuição de temperatura da CMB sejam espacialmente homogêneos e invariantes por rotações.

Esse conjunto de suposições: gaussianidade, homogeneidade e isotropia estatística, implica em uma enorme simplificação na análise do campo aleatório de flutuações da CMB. Em específico, faz com que toda a informação essencial sobre o período inflacionário e a evolução do universo estejam contidas na função de correlação de dois pontos, ou variância. Nesse trecho, iremos demonstrar como tais hipóteses impactam na análise usual da CMB.

2.3.1 Análise das anisotropias da radiação cósmica de fundo

As flutuações de temperatura da CMB (figura 2.2) podem ser identificadas com uma direção na esfera \hat{n} e representadas por

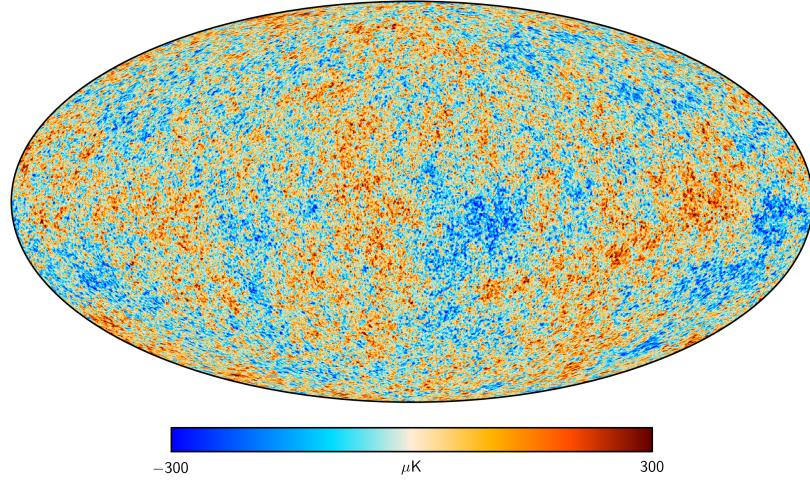


Figura 2.2: Mapa da temperatura da CMB em μK . **Fonte:** ESA/Planck

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) \equiv \frac{T(\hat{\mathbf{n}}) - T_0}{T_0} \quad (2.26)$$

onde o valor esperado dessas quantidades é dado por $\langle \Theta \rangle = 0$ e $\langle T \rangle = T_0$. A operação $\langle \dots \rangle$ corresponde à média em um ensemble (hipotético) de universos. Como só existe um único universo, essa média não funciona na prática, e precisa ser substituída por uma média amostral. Voltaremos a este assunto mais adiante.

Como toda função escalar na esfera, ela pode ser expandida em uma base completa de harmônicos esféricos

$$\begin{aligned} \Theta(\hat{\mathbf{n}}) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \Theta_{\ell}, \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

no qual os números $a_{\ell m}$, em geral complexos, são os momentos de multipolo da expansão. Note que, como m varia de $-\ell$ a ℓ , cada multipolo ℓ representa $4\ell + 2$ números reais independentes. Para explicitá-los, utilizamos a ortogonalidade dos harmônicos esféricos dada por:

$$\int d^2\Omega Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (2.28)$$

Em seguida, multiplicamos ambos os lados da nossa expressão por $Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{n}})$ e integramos sobre a esfera unitária. O resultado é

$$\int d^2\Omega \Theta(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell'm'}^*(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} \int d^2\Omega Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell'm'}^*(\hat{\mathbf{n}}), \quad (2.29)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (2.30)$$

$$(2.31)$$

portanto

$$a_{\ell m} = \int d^2\Omega \Theta(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}). \quad (2.32)$$

Além disso, dado que a função $\Theta(\hat{\mathbf{n}})$ é real, e utilizando a identidade $Y_{\ell,m}^*(\hat{\mathbf{n}}) = (-1)^m Y_{\ell,-m}(\hat{\mathbf{n}})$, segue que

$$a_{\ell,m}^* = (-1)^m a_{\ell,-m}. \quad (2.33)$$

Essa condição elimina metade dos $4\ell + 2$ graus de liberdade que os momentos de multipolo possuem, restando agora $2\ell + 1$ número reais em cada multipolo. Como veremos adiante, ao representarmos funções na esfera utilizando os MVs, essa condição de realidade se manifesta no fato de que cada vetor possui um par antipodal (é um vetor sem cabeça).

Também podemos definir, de maneira informal, uma relação de proporcionalidade inversa entre as escalas angulares α e os momentos multipolares ℓ [10]

$$\alpha_\ell \equiv \frac{\pi}{\ell}. \quad (2.34)$$

Essa relação, embora não possa ser deduzida de maneira exata, é equivalente à reciprocidade inversa entre os modos de Fourier de uma base de funções e sua escala espacial. O mesmo também é observado em séries de Fourier, onde vetores de onda de módulo pequeno representam ondas de comprimentos grandes, e momentos grandes representam ondas pequenas.

Um tratamento preciso das anisotropias da CMB, levando em conta todos os efeitos, incluindo a teoria cinética em um espaço-tempo em expansão, é demasiada longa, e está além do escopo dessa dissertação. Um tratamento rigoroso pode ser encontrado em [5, 36, 38]. Apesar disso, os principais efeitos físicos em grandes escalas angulares podem ser resumidos de uma maneira mais intuitiva e simples.

Comumente, é feito a distinção entre anisotropias primárias e secundárias. As primeiras surgem devido a efeitos no momento da recombinação. Já as últimas, se relacionam com todos os processos capazes de alterar a frequência do fóton, desde o momento da recombinação até a sua detecção. Das anisotropias primárias, existem três efeitos principais que se tornam importantes em diferentes escalas, sendo eles: o efeito Sachs-Wolfe, as perturbações adiabáticas e o efeito Doppler [39].

O efeito Sachs-Wolfe é dominante em largas escalas e ele é a combinação de dois efeitos principais que se relacionam com as perturbações no potencial escalar $\delta\Phi$: i) os fótons sofrem um redshift em seu comprimento de onda devido ao fato de que saem de poços de potencial gravitacional durante a recombinação, ii) a dilatação temporal causada pelas perturbações no potencial escalar também contribui para alterações em seu comprimento de onda. O efeito resultante dessas duas contribuições é dado por

$$\Theta_{SW}(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{\delta\Phi}{3}. \quad (2.35)$$

O efeito das perturbações adiabáticas ocorre porque, em regiões de alta densidade, o acoplamento da matéria com a radiação gera uma compressão, provocando dessa forma um aumento da temperatura naquela região. Esse efeito se torna relevante em escalas intermediárias e sua contribuição é dada em termos das perturbações no campo de densidade $\delta\rho$

$$\Theta_A(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{\delta\rho}{\rho}. \quad (2.36)$$

O terceiro é o efeito Doppler, que ocorre devido ao movimento do plasma primordial e se torna relevante em pequenas escalas. Nesse caso, durante o momento da recombinação, podemos imaginar o fóton como sendo emitido por uma fonte em movimento. A contribuição desse efeito está relacionado com as perturbações no campo de velocidades $\delta\mathbf{v}$ e é dada por

$$\Theta_D(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{\delta\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}. \quad (2.37)$$

Também temos as anisotropias secundárias que se relacionam com a trajetória do fóton. Nestas, um dos efeitos mais relevantes é o relacionado com a variação temporal dos potenciais que interagem com o fóton até o momento da observação. Esse efeito, é conhecido como efeito Sachs-Wolfe integrado e sua contribuição é dada por

$$\Theta_{SWI}(\hat{\mathbf{n}}) = 2 \int \frac{\partial\Phi}{\partial t} d\ell \quad (2.38)$$

Além dos efeitos citados, existem diversos outros como os espalhamentos Compton e Thompson, o *silk damping*, etc. Uma importante propriedade de todos esses efeitos é que eles contribuem linearmente para Θ , isso nos motiva a fatorar essas diversas contribuições como um operador diferencial e escrever a influência de todos eles esquematicamente da seguinte maneira [40]:

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) = \int d^3x \int_0^{\eta_0} d\eta' \sum_i K_i(\mathbf{x}', \eta'; \hat{\mathbf{n}}) S^i(\mathbf{x}', \eta'), \quad (2.39)$$

sendo $S^i(\mathbf{x}', \eta')$ as condições iniciais, de natureza estatística, relacionadas aos campos de matéria e $K_i(\mathbf{x}', \eta'; \hat{\mathbf{n}})$ o propagador da radiação eletromagnética desde o momento da recombinação até a medida. Usando a aproximação de que a recombinação é instantânea em um tempo

η_R o propagador pode ser reescrito

$$K_i(\mathbf{x}', \eta'; \hat{\mathbf{n}}) \rightarrow \beta_i \delta(\eta' - \eta_R) \delta(\mathbf{x}' - \hat{\mathbf{n}}R) \quad (2.40)$$

sendo $R = \eta_0 - \eta_R$ e β_i constantes. Dessa forma a distribuição das anisotropias é aproximada por

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) \approx \sum_i \beta_i S^i(\mathbf{x}' = \hat{\mathbf{n}}R, \eta' = \eta_R) \quad (2.41)$$

ou, no espaço de Fourier

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) \approx \sum_i \beta_i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}R) S^i(\mathbf{k}, \eta_R). \quad (2.42)$$

Se utilizarmos a expansão de Rayleigh

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = 4\pi \sum_{\ell m} i^\ell j_\ell(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.43)$$

onde j_ℓ são as funções de Bessel, e a ortonormalidade dos harmônicos, temos uma conexão entre os diferentes espaços

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) \approx 4\pi \sum_i \beta_i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} S^i(\mathbf{k}, \eta_R) \sum_{\ell m} i^\ell j_\ell(kR) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) \quad (2.44)$$

$$\approx 4\pi \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Theta(\mathbf{k}) \sum_{\ell m} i^\ell j_\ell(kR) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (2.45)$$

sendo $\Theta(\mathbf{k}) \equiv \sum_i \beta_i S^i(\mathbf{k}, \eta_R)$. Colocando esse resultado na equação (2.32), obtemos

$$a_{\ell m} \approx 4\pi \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} i^\ell j_\ell(kR) \Theta(\mathbf{k}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}). \quad (2.46)$$

Esta expressão é de extrema importância para nós, pois esses coeficientes guardam a informação de toda a física da CMB. Ao trabalharmos com os MVs no capítulo 3, usaremos estes coeficientes para calcular os vetores.

Além disso, conforme comentamos no começo dessa seção $\Theta(\mathbf{k})$ é uma variável aleatória Gaussiana, homogênea e isotrópica. A gaussianidade representa que sua distribuição é caracterizada totalmente pela função de dois pontos pois, como ela é simétrica, a correlação de um número ímpar de pontos é zero e as correlações pares de ordem maior são conectadas à função de dois pontos pelo Teorema de Wick. Para evidenciar essa propriedade vamos calcular os primeiros momentos estatísticos de uma variável aleatória X de valor esperado μ e desvio

padrão σ que tem distribuição de probabilidade gaussiana

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad \text{e} \quad f'(X) = -\frac{(X-\mu)}{\sigma^2} f(X) \quad (2.47)$$

Para o primeiro momento

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X f(X) dX \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (X f(X) - \mu f(X) + \mu f(X)) dX \\ &= -\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-(X-\mu)}{\sigma^2} f(X) dX + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) dX \\ &= -\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f'(X) dX + \mu \\ &= -\sigma^2 (f(X)|_{-\infty}^{+\infty}) + \mu \\ E(X) &= \mu \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde foi utilizado o fato de que a distribuição é normalizada $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X) dX = 1$ e que nos limites ela tende a zero. Para os 3 momentos estatísticos subsequentes um cálculo similar nos mostra que

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 \quad (2.49)$$

$$E(X^3) = 3\mu\sigma^2 + \mu^3 \quad (2.50)$$

$$E(X^4) = 3\sigma^4 + 6\mu^2\sigma^2 + \mu^4, \quad (2.51)$$

portanto, se trabalharmos com uma distribuição gaussiana de $\mu = 0$ os momentos impares são zero e os pares são escritos em termos da variância σ^2 . Esse resultado também é valido para os outros momentos e indica que podemos caracterizar completamente uma distribuição dessa natureza, conhecendo apenas sua variância. Portanto, presumindo a hipótese de gaussianidade o que nos interessa é

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell m}^* \rangle = \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6} i^\ell (-i)^{\ell'} j_\ell(kR) j_{\ell'}(k'R) Y_{\ell' m'}^*(\hat{k}') Y_{\ell m}(\hat{k}) \langle \Theta(\mathbf{k}) \Theta^*(\mathbf{k}') \rangle. \quad (2.52)$$

Além disso, presumindo a hipótese de homogeneidade, a função de correlação $\langle \Theta(\mathbf{k}) \Theta(\mathbf{k}') \rangle$ deve ser dada por

$$\langle \Theta(\mathbf{k}) \Theta(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 P(\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.53)$$

Para vermos melhor o porquê dessa condição, podemos demonstrá-la partindo da transformada

de Fourier da função de dois pontos

$$\langle \Theta(\mathbf{k}) \Theta^*(\mathbf{k}') \rangle = \int d^3x \int d^3x' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}') \langle \Theta(\mathbf{x}) \Theta(\mathbf{x}') \rangle, \quad (2.54)$$

e levando em conta que, devido a hipótese de homogeneidade do espaço, devemos ter

$$\langle \Theta(\mathbf{x}) \Theta(\mathbf{x}') \rangle = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.55)$$

Essa propriedade deve ser evidente pois, se fizermos $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y} + \mathbf{a}$, onde \mathbf{a} é um vetor constante, com expressão equivalente para \mathbf{x}' , segue que $C(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = C(\mathbf{y} - \mathbf{y}')$.

De fato, colocando a propriedade (2.55) em (2.54) e introduzindo a nova variável $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \Theta(\mathbf{k}) \Theta^*(\mathbf{k}') \rangle &= \int d^3y \int d^3x' \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{x}')] \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}') C(\mathbf{y}) \\ &= \underbrace{\int d^3x' \exp[i\mathbf{x}' \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{k}')] \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}_{=(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')} \underbrace{\int d^3y \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) C(\mathbf{y})}_{\equiv P(\mathbf{k})} \\ &= (2\pi)^3 P(\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \end{aligned}$$

onde $P(\mathbf{k})$ é a função conhecida como espectro de potências primordial. Assumindo essa hipótese, para um campo aleatório com estatística homogênea, a expressão (2.52) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k d^3k' i^\ell (-i)^{\ell'} j_\ell(kR) j_{\ell'}(k'R) Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{k}}') Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) P(\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k i^\ell (-i)^{\ell'} j_\ell(kR) j_{\ell'}(kR) Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) P(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.56)$$

A expressão acima é conhecida como matriz de covariância. Ela é a expressão mais geral possível em um universo apenas homogêneo. Se, adicionalmente, supusermos que o universo também é isotrópico, a função de correlação (2.55) se torna

$$C(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow C(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|). \quad (2.57)$$

Ou seja, neste caso não temos uma dependência com as direções do vetor $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Isso significa que o espectro de potências, que é a integral de Fourier da equação (2.57), não pode mais depender da direção do vetor \mathbf{k} , mas apenas do seu módulo. Ou seja, $P(\mathbf{k}) \rightarrow P(k)$. Essa propriedade nos permite simplificar ainda mais a equação (2.56), de modo que a matriz de

covariância mais geral possível em um universo homogêneo e isotrópico fica dada por

$$\begin{aligned}\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk k^2 i^\ell i^{\ell'} j_\ell(kR) j_{\ell'}(kR) P(k) \underbrace{\int d^2 \hat{k} Y_{\ell m}^*(\hat{k}) Y_{\ell' m'}(\hat{k})}_{\delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'} \int dk k^2 j_\ell^2(kR) P(k).\end{aligned}\quad (2.58)$$

Portanto

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_\ell \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'} \quad (2.59)$$

onde

$$C_\ell \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk k^2 j_\ell^2(kR) P(k) \quad (2.60)$$

é o chamado Espectro de Potências Angular. Como já dito, essa variável teórica guarda a informação dos processos físicos responsáveis pela CMB. É valido acrescentar que até esse ponto, estamos falando apenas das previsões teóricas do modelo. Para testarmos nossa teoria e todas as hipóteses assumidas, convém construirmos um estimador para tal quantidade.

2.3.2 Estimadores e variância cósmica

Devido ao caráter aleatório das condições iniciais que evoluem para as anisotropias na CMB, podemos interpretar os momentos de multipolo na equação (2.46) como sendo realizações dessa variável aleatória. Portanto, por termos somente um universo para realizarmos medidas, surge o conceito de *variância cósmica*.

Ao considerarmos isotropia, as diferentes escalas cosmológicas tem uma estatística independente. Isso nos permite trocar a média sobre um *ensemble* por uma média espacial, ou seja, usar a *hipótese ergódica*¹. Dado a equação (2.59) e sendo os a_{lm} 's variáveis aleatórias, definimos um estimador teórico para sua variância

$$\hat{C}_\ell = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2 \quad (2.61)$$

esse estimador é *coerente*, ou seja, no limite de grandes multipolos, onde o teorema ergódico garante que nossa estatística amostral converge para a estatística do ensemble [38], teremos:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \hat{C}_\ell = C_\ell. \quad (2.62)$$

Também, é importante checar se o estimador possui algum viés. Podemos verificar que não é o caso. De fato, usando a (2.59), segue que:

¹No espaço dos harmônicos esféricos isso é equivalente a trabalhar com a média para cada ℓ

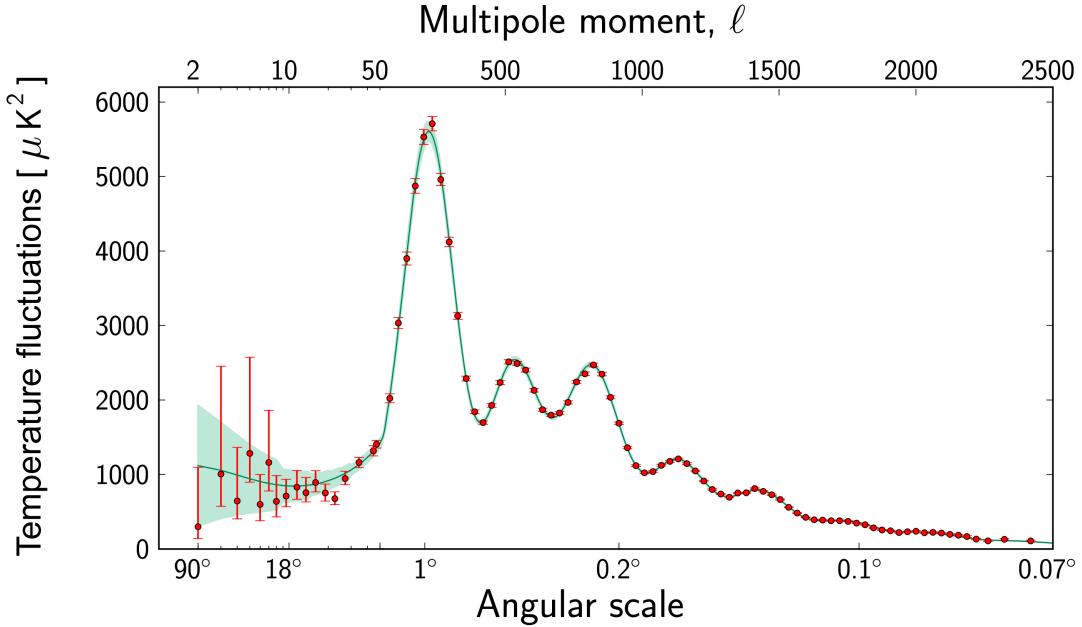


Figura 2.3: Os pontos vermelhos indicam o espectro de potências angular medido pelo satélite Planck, enquanto a linha continua é o melhor ajuste teórico. Fonte: Missão Planck

$$\langle \hat{C}_\ell \rangle = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle \quad (2.63)$$

$$= \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_\ell \quad (2.64)$$

$$= C_\ell. \quad (2.65)$$

Diferentemente do espectro angular teórico (C_ℓ), que é uma variável determinada por uma física linear bem conhecida e que já discutimos, o estimador (2.61) é uma variável aleatória, pois é construído a partir dos dados. Portanto, esse estimador também tem uma variância, que pode ser explicitamente calculada no caso de um universo gaussiano, estatisticamente homogêneo e isotrópico. Explicitamente, temos

$$\langle \hat{C}_\ell^2 \rangle = \frac{1}{(2\ell + 1)^2} \sum_{m,m'} \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle. \quad (2.66)$$

Nesse momento usamos o teorema de Wick, sendo y_n um conjunto de n variáveis aleatórias gaussianas, temos que

$$\langle y_1 y_2 \dots y_{2n} \rangle = \sum_{i,j} \prod_{\alpha=1}^N B_{i,j}^\alpha \langle y_i y_j \rangle, \quad (2.67)$$

onde a soma corre sobre todas as permutações pares e $B_{i,j}$ são os pesos. Temos então

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_\ell^2 \rangle &= \frac{1}{(2\ell+1)^2} \sum_{m,m'} \left[C_\ell C_\ell + C_\ell^2 \delta_{mm'} (-1)^{m+m'} + C_\ell^2 \delta_{mm'} (-1)^{m+m'} \right], \\ &= \frac{C_\ell^2}{(2\ell+1)^2} [(2\ell+1)^2 + (2\ell+1) + (2\ell+1)], \\ &= C_\ell^2 \left[1 + \frac{2}{2\ell+1} \right]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Portanto

$$\langle \hat{C}_\ell^2 \rangle - \langle \hat{C}_\ell \rangle^2 = \frac{2}{2\ell+1} C_\ell^2. \quad (2.69)$$

Sua *eficiência* é limitada somente pelo número de modos independentes $(2\ell+1)$ para um dado multipolo ℓ :

$$\frac{\langle \hat{C}_\ell^2 \rangle - \langle \hat{C}_\ell \rangle^2}{C_\ell^2} = \frac{2}{2\ell+1} \quad (2.70)$$

Portanto, as medidas de correlação (figura 2.3) carregam uma limitação estatística inerente, devido a variância cósmica, que aumenta a medida que trabalhamos com escalas maiores (ℓ 's pequenos) uma vez que dividimos o céu em um número menor de partes.

2.3.3 Análise da CMB para um céu incompleto

Se quisermos analisar um mapa da CMB, devemos retirar as diversas contaminações de fontes astrofísicas que não se relacionam com a análise cosmológica proposta neste trabalho como, por exemplo, os fótons provenientes de outras fontes pontuais como quasares, galáxias ou aglomerados. Devido a isso, aplicamos máscaras que excluem determinadas regiões do céu (figura 2.4).

Além de trabalharmos com um céu incompleto, essas máscaras tornam os mapas não isotrópicos. Nesse caso, as flutuações de temperatura são dadas efetivamente por

$$\tilde{\Theta}(\hat{n}) = \Theta(\hat{n}) M(\hat{n}) \quad (2.71)$$

onde $M(\hat{n})$ é uma função janela que indica quais pontos devem ser excluídos. Ou seja, $M(\hat{n})$ é a máscara propriamente dita. Refazendo a análise harmônica, temos

$$\tilde{a}_{\ell m} = \int d^2\Omega Y_{\ell,m}^*(\hat{n}) \tilde{\Theta}(\hat{n}) \quad (2.72)$$

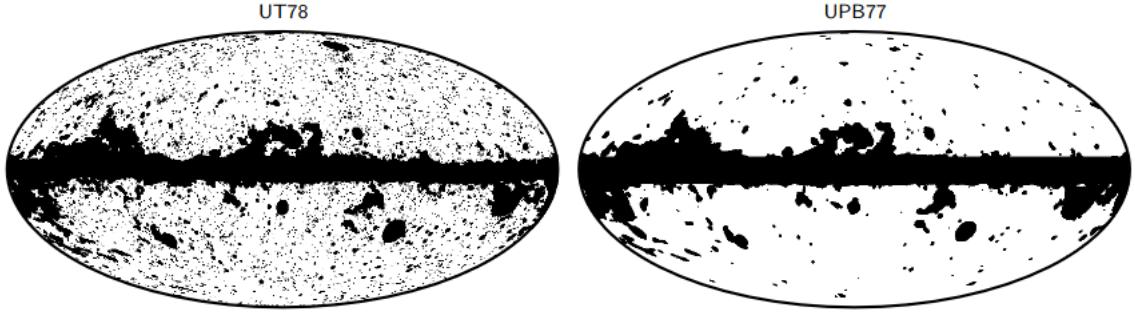


Figura 2.4: Máscaras UTF78 e a UTP77 que comumente são utilizadas para analisar mapas de temperatura (esquerda) e polarização (direita) da CMB [41]

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell_1 m_1} a_{\ell_1, m_1} Y_{\ell_1, m_1}(\hat{\mathbf{n}}) \quad (2.73)$$

$$M(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell_2 m_2} m_{\ell_2, m_2} Y_{\ell_2, m_2}(\hat{\mathbf{n}}) \quad (2.74)$$

e os momentos de multipolo para um céu incompleto são

$$\tilde{a}_{\ell, m} = \sum_{\ell_1 m_1} a_{\ell_1, m_1} \sum_{\ell_2 m_2} m_{\ell_2, m_2} \int d^2\Omega Y_{\ell, m}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_1, m_1}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_2, m_2}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (2.75)$$

Essa integração é dada em termos dos símbolos $3j$ de Wigner

$$\int d^2\Omega Y_{\ell, m}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_1, m_1}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_2, m_2}(\hat{\mathbf{n}}) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

ou seja

$$\tilde{a}_{\ell, m} = \sum_{\ell_1 m_1} a_{\ell_1, m_1} K_{\ell, m}^{\ell_1, m_1} \quad (2.77)$$

onde

$$K_{\ell, m}^{\ell_1, m_1} = (-1)^m \sum_{\ell_2 m_2} m_{\ell_2, m_2} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Note que se quisermos refazer a análise estatística como, por exemplo, calcular a função de dois pontos, a correlação não será mais diagonal. Ela será dada por

$$\langle \tilde{a}_{\ell,m} \tilde{a}_{\ell',m'}^* \rangle = \sum_{\ell_1 m_1} C_{\ell_1} K_{\ell,m}^{\ell_1, m_1} K_{\ell',m'}^{*\ell_1, m_1} \quad (2.79)$$

Essa alteração evidencia não só a dificuldade de trabalharmos com mapas mascarados, mas também de testarmos a hipótese de isotropia. Essa discussão é importante e será conectada quando formos trabalhar com as máscaras no contexto dos MVs.

2.4 ANÁLISE ESTATÍSTICA

Ao longo dos últimos anos, o aprimoramento das técnicas observacionais na cosmologia, como as missões WMAP e Planck, mudaram o nosso conhecimento a respeito do universo, não somente qualitativamente mas também quantitativamente. Esse desenvolvimento trouxe consigo um acúmulo gigantesco de dados, o que influenciou para que a cosmologia caminhasse para se tornar uma área com grande enfoque no desenvolvimento de técnicas estatísticas para o tratamento dessas medidas.

Por conta disso, sofisticadas técnicas estatísticas começaram a ser aplicadas para análises nas mais diversas áreas da cosmologia. Neste trabalho iremos comentar as noções básicas de duas análises que são usuais nessa área, sendo elas a função de verossimilhança e o teste de hipótese da função χ^2 .

2.4.1 Função de verossimilhança

Suponha inicialmente que temos um conjunto de n medidas e queremos estimar um parâmetro θ a partir delas. Por exemplo, podemos ter n medidas da altura de crianças de 10 anos, e queremos estimar o valor médio da altura. Portanto, dado um conjunto de medidas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, estimamos a quantidade θ por meio de um estimador $\hat{\theta}$ e obtemos um dado valor. Ao realizar esse procedimentos, esperamos que a quantidade encontrada esteja próxima do seu 'verdadeiro valor', embora o resultado aferido sempre dependa do conjunto de dados utilizados. Para analisarmos as propriedades do estimador, não consideraremos um conjunto de medidas específico, mas uma distribuição conhecida. Nesse caso, as medidas x_i tem uma distribuição de probabilidade $f(x_i; \theta)$ em função da quantidade estimada [42].

Dados os valores observados $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, a função de verossimilhança de θ como função dos dados é definida como

$$\mathcal{L}(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta). \quad (2.80)$$

Se a distribuição é discreta, ela nos fornece a probabilidade de se observar um conjunto de dados como função do parâmetro θ . Se x_i são independentes e com uma mesma distribuição de

probabilidade, então escrevemos a verossimilhança como o produto das densidades individuais

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta). \quad (2.81)$$

Em especial, se x_i possuem distribuições gaussianas, $x_n \sim N(\mu, C)$ onde C é a matriz de Covariância, então a verossimilhança é uma distribuição gaussiana multivariada [42]

$$\mathcal{L}(\mu, C) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - \mu)^T C^{-1} (x - \mu)\right). \quad (2.82)$$

Para construir um estimador para θ , podemos então procurar uma quantidade θ que maximiza a verossimilhança; esse é o método de *máxima verossimilhança*. Uma vez que maximizar uma função exponencial é o mesmo que maximizar o seu argumento, é conveniente definir uma nova função - comumente denotada por χ^2 - como sendo:

$$\chi^2(\mu, C) = -2 \ln \mathcal{L}(\mu, C). \quad (2.83)$$

Portanto, maximizar a função de verossimilhança é equivalente a encontrar o mínimo da função χ^2 , esse é o *método dos mínimos quadrados*. Porém, além deste contexto, essa função possui outras propriedades valiosas para análises estatísticas como as realizadas neste trabalho.

2.4.2 Teste tulo de gaussianidade, homogeneidade e isotropia estatística

Vamos supor que temos um conjunto de medidas e uma proposta de função para descrever esses dados. A pergunta que surge é: como saber se essa função descreve de maneira adequada os dados, ou se há diferenças significativas? Uma das formas de realizar esse teste é presumir uma hipótese nula, assumindo que essa função descreve fidedignamente os dados, e que as diferenças dessa comparação são flutuações normais inerentes às medidas. Prosseguimos, então, deixando que os dados refutem ou não tal hipótese, analisando a probabilidade de que essas flutuações possam ter surgido aleatoriamente. Quanto mais improvável for a existência dessas flutuações, mais fácil fica refutar a hipótese nula. Portanto, o problema consiste em analisar essa probabilidade, se ela é pequena existem grandes chances de que essas flutuações não tenham surgido aleatoriamente e os dados e a hipótese estão em desacordo. Porém, se a probabilidade é grande, isso indica um ajuste razoável entre os dados e a hipótese feita [42].

Existem várias maneiras de se implementar testes de hipóteses como o descrito acima. Neste trabalho iremos adotar um teste simples de χ^2 . Para fazermos essa análise, podemos recorrer ao Teste de χ^2 . Dessa forma, supomos inicialmente que temos um conjunto de medidas Y_N , representando um vetor de N variáveis aleatórias $Y = [Y_1, \dots, Y_N]$, com um erro σ_N para cada medida e queremos testar a hipótese representada por uma função $f(x)$ que relaciona os

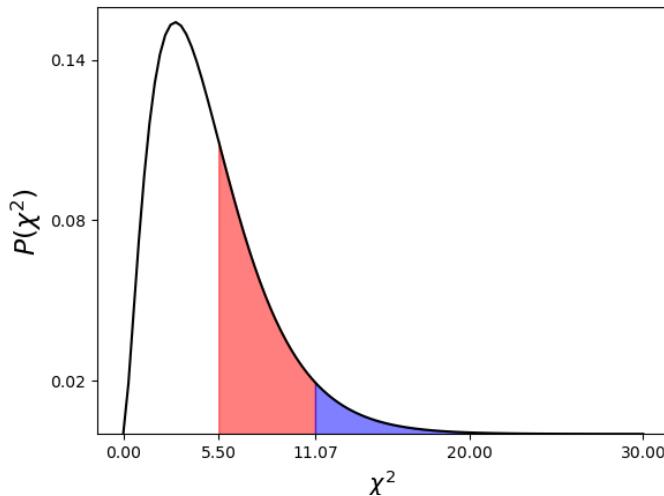


Figura 2.5: Distribuição de χ^2 para 5 graus de liberdade. Nesse caso, o valor do teste foi de 5.50 representando que a hipótese foi aceita. 11.07 representa o valor crítico da hipótese nula escolhido com base no tipo de dados à ser analisado.

valores verdadeiros x com o conjunto de medidas. Nesse caso a função χ^2 é dada por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[Y_i - f(x_i)]^2}{\sigma_i^2}. \quad (2.84)$$

Caso as medidas estejam correlacionadas, substituímos a equação acima por

$$\chi^2 = (Y - f)^T V^{-1} (Y - f), \quad (2.85)$$

sendo V a matriz de covariância das medidas Y .

Se a nossa hipótese $f(x)$ estiver em acordo com o conjunto de medidas, esperamos que a diferença entre f e Y seja da mesma proporção que o erro nas medidas. Portanto, em um caso ideal, esperamos que cada termo da soma seja ≈ 1 , e o valor da função χ^2 próximo do número de variáveis aleatórias N (ou número de medidas). Nesse momento surge o problema de entender quando temos um χ^2 grande o suficiente. A soma dos quadrados de N variáveis aleatórias normais é, ela mesma, uma variável aleatória. Essa soma (como a que aparece na equação (2.84)) segue uma distribuição estatística conhecida como χ^2 , e é dada por:

$$P(\chi^2; N) = \frac{2^{-N/2}}{\Gamma(N/2)} \chi^{N-2} e^{-\chi^2/2}, \quad (2.86)$$

para $\chi^2 > 0$. Portanto, se quisermos entender a qualidade do nosso ajuste, a quantidade relevante - conhecida como p_{value} - é a integral

$$p_{\text{value}}(\chi^2; N) = \int_{\chi^2}^{\infty} P(\chi'^2; N) d\chi'^2. \quad (2.87)$$

Essa quantidade indica a probabilidade de que, assumindo a hipótese nula, uma medida típica resulte em um χ^2 maior do que o valor encontrado . Portanto, um p_{value} pequeno indica que devemos rejeitar a hipótese nula. Note que, rejeitar a hipótese nula não é o mesmo que confirmar que ela é falsa. Na verdade, o p_{value} indica a probabilidade $P(\chi^2; N)$ de que a hipótese nula seja verdadeira. Se pelo contrário, tivermos um $p_{\text{value}} \approx 1$ aceitamos a hipótese nula como verdadeira (figura 2.5).

3 VETORES DE MULTIPOLÓ

Neste capítulo iremos trabalhar com a representação alternativa de funções da esfera conhecida como Vetores de Multipolo (MVs). É possível demonstrar que podemos reescrever os $2\ell + 1$ graus de liberdade contidos em um multipolo da decomposição em harmônicos esféricos em $2\ell + 1$ vetores unitários sem cabeça. Para isso, inicialmente iremos fazer uma prova simples dessa correspondência

Posteriormente, vamos discutir alguns dos algoritmos presentes na literatura para obtenção dos MVs a partir dos momentos de multipolo $a_{\ell m}$ e tratar de alguns problemas que envolvem o formalismo utilizado em [43]. Esses problemas nos motivaram a fazer um novo processo de binagem para o teste de χ^2 com esses vetores. Além disso iremos tratar de uma maneira de compactar a informação contida nos MVs analisando sua média na esfera, conhecida como média de Fréchet.

3.1 PROVA DOS VETORES DE MULTIPOLÓ

Uma função harmônica é qualquer função f que satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 f = 0, \quad (3.1)$$

onde ∇^2 é o operador de Laplace, ou laplaciano. Em coordenadas esféricas, a solução formal dessa equação é dada em termos do produto dos harmônicos esféricos por uma potência da distância r .

$$f = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell}(r, \theta, \phi), \quad f_{\ell} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} r^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (3.2)$$

Em alguns textos essa combinação de funções é conhecida como harmônicos esféricos sólidos ($r^{\ell} Y_{\ell m}$), embora essa nomenclatura seja pouco usual nos textos de cosmologia. Para o caso de uma esfera unitária ($r = 1$), tal função é representada somente em termos dos harmônicos esféricos. Uma vez que o Laplaciano tem uma natureza escalar, é sempre possível fazer uma troca de coordenadas e encontrar um conjunto de soluções em termos das coordenadas cartesianas. Essas soluções podem ser construídas por meio de uma combinação de polinômios homogêneos (isto é, uma soma de monômios de mesma ordem) de ordem ℓ :

$$f = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell}(x, y, z), \quad f_{\ell} = \sum_{abc} \lambda_{abc} x^a y^b z^c, \quad (3.3)$$

onde $(a + b + c = \ell)$ e λ são constantes reais a serem determinadas. Em três dimensões, o polinômio homogêneo de ordem ℓ mais geral contém $(\ell+2)!/(2!\ell!)$ coeficientes independentes.

Isso equivale às possíveis maneiras de arranjar 2 números reais, A e B , de tal modo que a soma

$$A + B = L, \quad (3.4)$$

ou seja, o número de coeficientes independentes é dado pelo coeficiente de uma expansão binomial. Apesar disso, cada polinômio, que representa a função f , deve obedecer a condição harmônica de maneira independente. O fato de que a equação (3.1) deve ser satisfeita para cada L , restringe o número de coeficientes independentes λ de tal modo que sobram $2\ell + 1$ graus de liberdade independentes i.e., $2L + 1$ coeficientes independentes λ para cada multipolo ℓ . Esse número de graus de liberdade é exatamente o mesmo que contém um coeficiente multipolar $a_{\ell m}$. Isso sugere que deve haver uma representação independente de funções na esfera, não mais dada em termos dos harmônicos esféricos, mas sim em termos de polinômios homogêneos.

A partir dessa análise, é possível perceber que aplicando sucessivas derivadas direcionais com vetores unitários ($\mathbf{v} \cdot \nabla \equiv \nabla_{\mathbf{v}}$) sobre o potencial $1/(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = 1/r$ podemos construir soluções da forma, (3.3), ou seja

$$f_{\ell}(x, y, z) = \lambda_{\ell} \nabla_{\mathbf{v}_{\ell}} \dots \nabla_{\mathbf{v}_1} \frac{1}{r} |_{r=1} \quad (3.5)$$

com λ_{ℓ} sendo constantes reais. Para notar que essa construção leva a essa tipo de solução, podemos aplicar as sucessivas derivadas

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{r} \lambda_0 \\ f_1 &= (-\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}) \lambda_1 \\ f_2 &= [3(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)] \lambda_2 \\ f_{\ell} &= \left[(-1)^{\ell} (2\ell - 1)!! \prod_{i=1}^{\ell} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r} + Q_{\ell-2} \right] \lambda_{\ell}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo $Q_{\ell-2}$ é um polinômio homogêneo de ordem $\ell - 2$ que envolve combinações dos vetores \mathbf{v}_i e \mathbf{r} . Note que o numerador da função f_{ℓ} é um polinômio homogêneo de ordem ℓ e também que esse é um polinômio harmônico, pois satisfaz a equação (3.1).

Dessa forma, concluímos que tal representação é equivalente à decomposição em harmônicos esféricos e nos fornece uma relação entre os mapas de temperatura e ℓ vetores unitários \mathbf{v}_i . Portanto podemos analisar mapas de temperatura sem referência à um sistema de coordenadas externo (como no caso dos harmônicos esféricos).

3.2 ALGORITMOS PARA DETERMINAÇÃO DOS MVs

Com o passar do tempo, vários algoritmos foram propostos para a obtenção dos MVs. Copi, Huterer e Starkman [25] obtiveram os MVs a partir de sua relação com tensores simétricos

de traço nulo, posteriormente Helling, Schupp, e Tesileanu [29] propuseram um algoritmo mais eficiente para obtenção de tais objetos. A chave do algoritmo é a representação de Majorana de funções esféricas. Nessa representação, uma função esférica $f_\ell(\theta, \phi)$ é reescrita em termos de um polinômio de variáveis complexas [28]

$$f_\ell(\zeta) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} (-1)^m \binom{2\ell}{\ell+m}^{1/2} a_{\ell m} \zeta^{\ell+m}. \quad (3.7)$$

Para obtermos dos MVs, fazemos uso da projeção estereográfica das raízes desse polinômio

$$\begin{aligned} \zeta &= R(\zeta) + iI(\zeta) \\ &= |\zeta| \exp(i \arg \zeta) \\ &= \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{aligned} \quad (3.8)$$

e obtemos as coordenadas dos vetores. Em (3.8), R e I representam, respectivamente, as partes real e imaginária da variável complexa e θ e ϕ são os ângulos polares definidos nos intervalos: $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$.

No polinômio (3.7) fica evidente a independência que a representação dos MVs têm do espectro de potências angular C_ℓ . Para isso, basta reescrever os momentos de multipolo como $a_{\ell m} = \sqrt{C_\ell} b_{\ell m}$, nesse caso a função de dois pontos desse novo momento de multipolo é

$$\langle b_{\ell m} b_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (3.9)$$

e temos uma nova classe de polinômios $g_\ell(\zeta)$ que possuem as mesmas raízes do antigo polinômio $f_\ell(\zeta)$. Portanto, os MVs são independentes de alterações nos C_ℓ s. Além disso, o fato dos MVs serem um par antipodal é refletido na invariância do polinômio $f_\ell(\zeta)$ sob um mapa $\zeta \mapsto -1/\zeta^*$. Na representação dos harmônicos esféricos a realidade da função é garantida pela condição (2.33), enquanto isso com os MVs podemos dizer que a existência de um par antipodal para cada vetor assegura que estamos representando uma função real. Concluímos dessa forma, que os MVs são vetores sem cabeça e isso é de extrema importância para nossa análise, uma vez que podemos extrair toda a informação que precisamos, trabalhando apenas com um dos hemisférios da esfera, dado que o outro pode ser obtido via uma transformação de paridade.

Essa nova forma de obter os MVs transforma o problema, que antes era de analisar os momentos multipolares $a_{\ell m}$, em analisar a estatística das raízes de polinômios aleatórios. Conforme [30, 31], se os coeficientes de tal polinômio são variáveis aleatórias gaussianas, as raízes desse polinômio se distribuem uniformemente na esfera. Portanto, dito de outra forma, podemos testar as hipóteses do modelo padrão, analisando a uniformidade dos vetores na esfera.

Se os vetores de multipolo se distribuem uniformemente sobre uma esfera unitária, então a função de densidade de probabilidade das raízes complexas pode ser descrita por

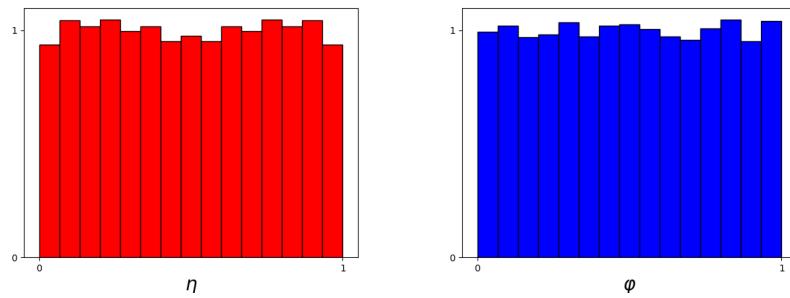


Figura 3.1: Distribuição das variáveis η (esquerda) e φ (direita) dos MVs dos multipolos de $\ell = 2$ até $\ell = 10$ para 3500 realizações de mapas gaussianos, homogêneos e isotrópicos da CMB.

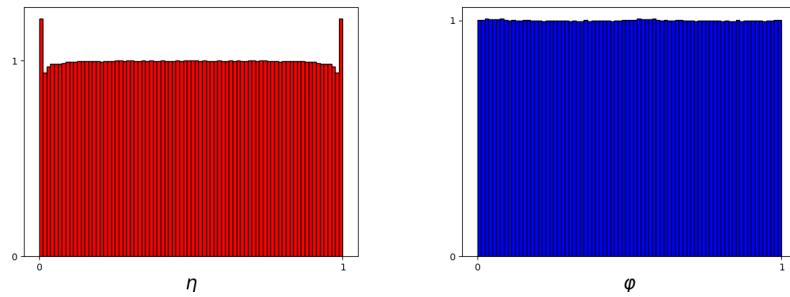


Figura 3.2: Distribuição das variáveis η (esquerda) e φ (direita) dos MVs dos multipolos de $\ell = 2$ até $\ell = 200$ para 3500 realizações de mapas gaussianos, homogêneos e isotrópicos + máscara UTF78 da CMB.

$$P(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (3.10)$$

ou em termos de cada variável

$$P(\theta) = \frac{\sin \theta}{2}, \quad P(\phi) = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.11)$$

Tal distribuição não é uniforme e essas probabilidades não estão normalizadas separadamente. Devido à isso, convém realizarmos uma troca de variáveis

$$\eta \equiv 1 - \cos \theta, \quad \varphi \equiv \frac{\phi}{2\pi}. \quad (3.12)$$

onde agora elas são normalizadas

$$P(\eta, \varphi) = \begin{cases} 1 & \eta, \varphi \in [0, 1], \\ 0 & \eta, \varphi \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (3.13)$$

e podemos verificar isso analisando os histogramas dessas variáveis (figura 3.1)

Se quisermos trabalhar com qualquer alteração na isotropia dos mapas como, por exem-

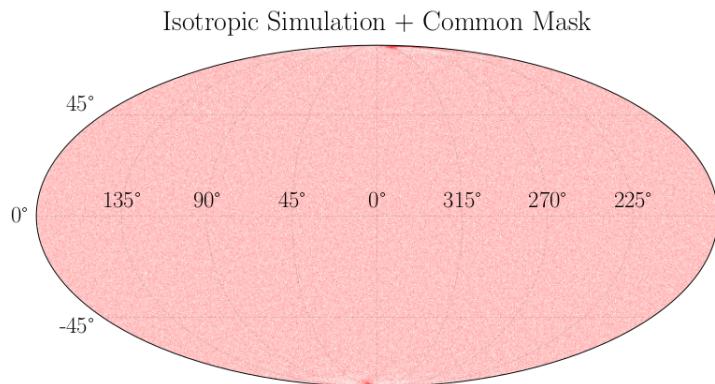


Figura 3.3: Mapa mollweide dos MVs nos intervalos de $\ell = 2$ até $\ell = 1500$ de um mapa GSI + máscara UTF78. Nela, fica evidente o acúmulo de vetores nos polos devido a presença da máscara na região equatorial [43].

plo, a inclusão de máscaras, devemos levar em conta alterações na uniformidade dos MVs. Podemos fazer um teste simples, mascarando mapas gaussianos, homogêneos e isotrópicos (GSI) com a máscara UTF78 e vendo como isso afeta os histogramas dos vetores (figura 3.2). De fato, o que vemos nesta figura é que quando aplicamos uma máscara na região equatorial dos mapas, os MVs tendem a se acumular nos polos em determinados multipolos ℓ . Esse comportamento pode ser visto melhor ao fazermos um plot mollweide dos vetores para um mapa GSI mascarado (figura 3.3)

O que esse teste nos revela, é que uma das variáveis não é sensível a presença de uma modulação que afeta a isotropia dos mapas. Portanto, se trabalharmos com as variáveis η e φ de maneira independente, realizando, posteriormente, uma binagem para os testes de χ^2 , isso significa que nossos testes podem perder a sensibilidade de acordo com o tipo de modulação que aplicamos. Para contornar esse problema e, além disso, com a intenção de compactar a informação contida nos MVs em apenas uma variável, propomos neste trabalho de realizarmos o processo de binagem com a separação da esfera em pixels do HEALPix. Esse processo será melhor explicado no capítulo 4.

Apesar desse outro tipo de análise que os MVs nos permitem realizar em um mapa de temperatura, sua abordagem estatística também possui algumas desvantagens. Na próxima seção iremos introduzir uma nova ferramenta nomeada de Vetor de Fréchet afim de nos ajudar a resolver alguns desses problemas.

3.3 VETORES DE FRÉCHET

Enquanto os MVs de diferentes multipolos são estatisticamente independentes, os vetores de um mesmo multipolo possuem correlação [44] e são altamente não gaussianos. Portanto, uma dúvida que surge é como alterações nas hipóteses do modelo padrão afetam tal correlação. Também, em relação aos MVs, outro problema evidente é que não existe um paralelo adequado entre a posição física de uma anisotropia da CMB e a direção dos vetores v_ℓ . Além disso,

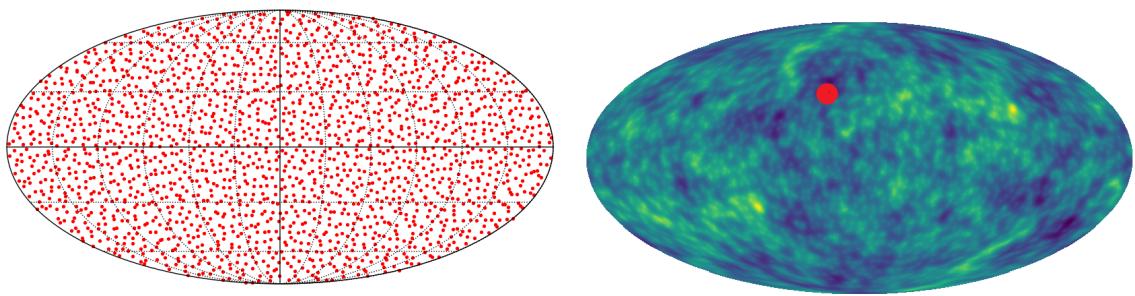


Figura 3.4: À esquerda temos a Projeção *Mollweide* da distribuição dos MVs para $\ell = 1000$ de um mapa GSI. À direita temos a mesma projeção dos valores da função (3.14) para todos os pontos da esfera. A cor azul representa os pontos de menor temperatura enquanto os de maior temperatura estão identificados com a cor amarela, em vermelho está o Vetor de Fréchet desse multipolo.

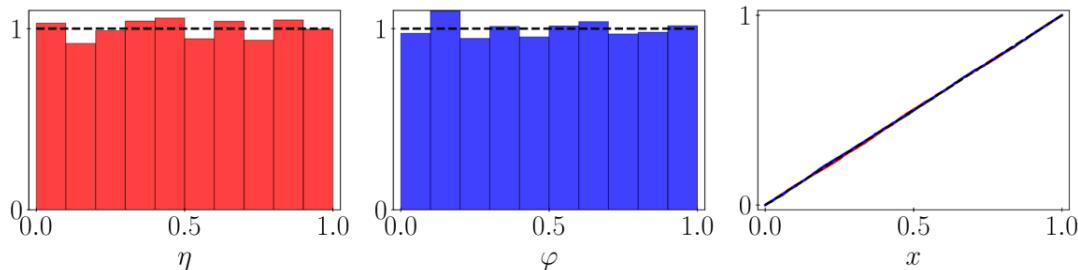


Figura 3.5: Histogramas das variáveis η (esquerda) e φ (centro) dos vetores de Fréchet para 5000 realizações de mapas GSI da CMB. O plot a direita é a função empírica da probabilidade destas quantidades.

o conjunto dos vetores para todos os multipolos ℓ nos fornece toda a informação contida em uma mapa (se não levarmos em conta o espectro de potências C_ℓ), o que nem sempre é o que precisamos.

Por conta de todos esses problemas, podemos procurar por maneiras de compactar a informação contida nos MVs da mesma forma que o espectro C_ℓ compacta as informações contidas nos momentos de multipolo $a_{\ell m}$. Para isso, é importante introduzir uma maneira de comprimir a informação contida nos MVs de um mesmo multipolo. Uma vez que eles são pontos em uma esfera unitária, podemos procurar por um ponto médio na esfera, como uma posição de 'centro de massa' desses vetores. Essa noção de média na esfera é conhecida como média de Fréchet, e ela pode ser obtida por meio da seguinte relação

$$\Psi_\ell(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{2\ell} \arccos^2 (\mathbf{u}, \mathbf{v}_\ell^j). \quad (3.14)$$

Dados os MVs \mathbf{v}_ℓ^j para um multipolo ℓ específico, podemos procurar por um vetor \mathbf{u} , que passaremos a chamar *vetor de Fréchet*, ou simplesmente FV (acrônimo para *Frechet Vectors*), tal

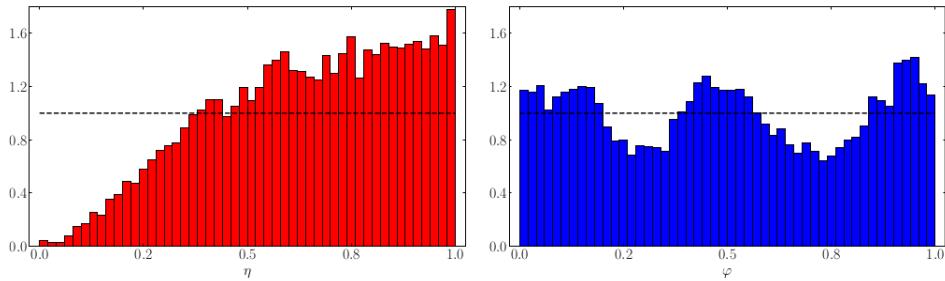


Figura 3.6: Distribuição dos FVs para $\ell \in [2, 100]$ de 100 simulações de mapas GSI + máscara UTF78 [43].

que Ψ_ℓ seja um mínimo, se esse mínimo existir. Na figura 3.4 temos um exemplo da distribuição da função Ψ_ℓ para $\ell = 1000$ juntamente ao ponto que se encontra o vetor de Fréchet para um mapa GSI.

Uma propriedade importante para analisar a consistência desses vetores é que, dentro das hipóteses de gaussianidade e isotropia, eles também seguem uma distribuição de probabilidades uniforme. Essa propriedade é evidenciada ao reescrevermos eles em termos das coordenadas η e φ e analisarmos seus histogramas para simulações de mapas GSI (figura 3.5).

O teste primário dos MVs feito na seção anterior analisando seus histogramas, revelou que eles são pouco sensíveis à presença de modulações que afetam a isotropia dos mapas. A propriedade mais importante dos FVs e o que nos motivou a analisá-los neste trabalho foi que, em seus histogramas, eles se demonstram ser muito mais sensíveis à presença dessas modulações. Se repetirmos a análise anterior, agora com os FVs (figura 3.6), vemos que existem alterações evidentes em sua uniformidade.

4 METODOLOGIA

4.1 MISSÃO PLANCK

O satélite Planck foi lançado em 14 de Maio de 2009 e suas observações foram feitas de 12 de agosto de 2009 até 23 de outubro de 2013. Seu objetivo principal, definido em 1995, foi a medida em alta resolução das anisotropias de temperatura e polarização da CMB. Posteriormente, a importância das análises de polarização foi melhor compreendida e se tornou seu foco adicional. Para cumprir tais objetivos, o satélite realizou medidas do espectro eletromagnético abrangendo um intervalo entre 25 e 1000 GHz do céu completo com uma resolução angular entre $33'$ e $5'$ [45].

Com os mapas que identificam cada posição no céu com uma dada temperatura, para fazer análises cosmológicas de uma física primordial, deve-se retirar as diversas contaminações de fontes astrofísicas como, por exemplo, os fótons provenientes de outras galáxias ou até mesmo da nossa. Devido a isso, são aplicadas máscaras que excluem determinados pixels do mapa. Esse procedimento é completar àquele que discutimos na seção 2.3.3, pois é aplicado diretamente sobre os pixels do mapa, enquanto na seção 2.3.3 mostramos como a mesma análise pode ser feita no espaço harmônico. A UT78 e a UTB77 (figura 2.4) são as máscaras comumente utilizadas no tratamento dos dados do satélite Planck.

Para extrair informações como, por exemplo, o espectro de potências angular C_ℓ , quatro protocolos que utilizam diferentes técnicas de reconstrução dos mapas de temperatura de diferentes frequências, são utilizados. Os nomes dos protocolos empregados são: NILC (acrônimo de *Needlet Internal Linear Combination*), Commander, SEVEM (acrônimo de *Spectral Estimation Via Expectation Maximization*) e SMICA (acrônimo de *Spectral Matching Independent Component Analysis*); os quais sofreram diversas atualizações ao longo dos anos e uma explicação sobre como cada uma delas funciona é apresentada em [46]. Para este trabalho, foram utilizados os mapas resultantes de cada um destes protocolos, disponíveis no *Planck Legacy Archive*¹ referentes aos anos 2015 e 2018.

4.2 HEALPIX

Satélites como o WMAP e Planck produzem um conjunto de dados suficiente para construirmos um mapa do céu em uma resolução angular de alguns minutos de arco (WMAP: $\rightarrow 13'$ e Planck $\rightarrow 7.1'$). Para analisar tais mapas fazemos uso do software conhecido como *Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelation* (HEALPix) [47], que foi desenvolvido com o objetivo de criar uma estrutura matemática que suportasse uma discretização adequada das funções na esfera em uma resolução suficientemente grande.

¹<http://pla.esac.esa.int/pla/>

NSIDE	NPIX	θ
1	12	58.6°
2	48	29.3°
4	192	14.7°
8	768	7.33°
16	3072	3.66°
32	12288	1.83°
64	49152	55,0'
128	196608	27.5'
256	786432	13.7'

Tabela 4.1: Relação entre o N_{SIDE} , N_{PIX} e a resolução angular θ [47].

Para cumprir com os objetivos, a discretização da esfera implementada pelo HEALPix segue três propriedades importantes:

1. A esfera é subdividida em quadriláteros curvilíneos i.e. uma figura delimitada por quatro segmentos de circunferências. Sua menor repartição é feita com base em 12 pixels. Para aumentar a resolução dividimos cada um desses pixels em quatro, resultando em uma discretização de 48 pixels. Esse processo pode ser repetido sucessivamente até obtermos a resolução desejada. Convém então, definir um parâmetro, conhecido como N_{SIDE} , que se relaciona com o número de pixels N_{PIX} da seguinte forma:

$$N_{\text{PIX}} = 12 \cdot N_{\text{SIDE}}^2 \quad (4.1)$$

e, consequentemente, se relaciona com a abertura angular de cada pixel. A equivalência entre esses três parâmetros para os primeiros valores de N_{SIDE} é apresentada na tabela 1

2. Dada uma resolução, todas as áreas dos pixels são iguais.
3. Os pixels são distribuídos em linhas de latitude constante. Essa última propriedade é particularmente importante, pois permite que a transformada de Fourier das funções na esfera seja feita, para cada θ , para os quais o tempo de cálculo é extremamente pequeno.

Uma desvantagem do HEALPix, especialmente para resoluções baixas, é que os pixels dos polos não têm a mesma geometria dos pixels em torno do equador.

4.3 ANÁLISE DA HIPÓTESE GSI NO CONTEXTO DOS VETORES

Para obter mapas GSI, neste trabalho fizemos uso da biblioteca CAMB (acrônimo de *Code for Anisotropies in the Microwave Background*) [48] para obter o espectro de potências C_ℓ , com os parâmetros do modelo cosmológico padrão. Com base neles, podemos gerar mapas GSI utilizando a função `synalm`, presente na biblioteca do HEALPix, que gera uma distribuição gaussiana de $a_{\ell m}$ s com essa variância.

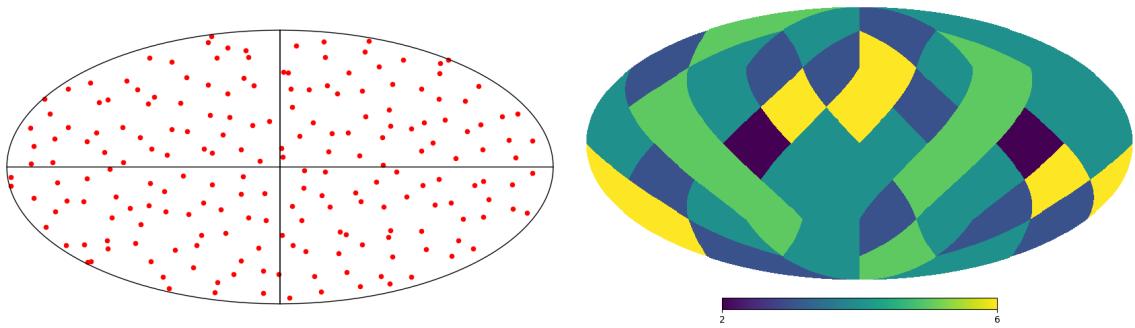


Figura 4.1: Figura que simboliza o processo de contagem dos MVs em cada pixel. À esquerda temos uma projeção de um conjunto de vetores para $\ell = 100$ e, à direita, temos um mapa da frequência com que os vetores se distribuem nos pixels para uma discretização de $N_{\text{SIDE}} = 2$.

Dado um mapa de temperatura, temos 2ℓ vetores para cada multipolo ℓ . Realizamos então uma binagem na esfera, onde cada bin é um pixel, para N_{SIDE} fixo. Para isso, contamos as frequências com que os vetores, para um dado ℓ , caem dentro de um dado pixel. Essa frequência é chamada de x_i onde i corresponde ao rótulo do pixel (figura 4.1). Portanto, para um dado N_{SIDE} , temos N_{PIX} frequências x_i . Simulando mapas GSI, geramos, N_{sim} simulações e encontramos x_i^{GSI} para cada um desses mapas. Desse forma, cada um dos pixels pode ser considerado como variável aleatória com N_{sim} realizações. Como metade dos MVs é um par antipodal, trabalhamos somente com os pixels do hemisfério norte. Além disso, como sabemos o número total de vetores para um dado multipolo ℓ , a informação em um dos pixels é redundante pois $\sum_1^{N_{\text{PIX}}} x_i = \ell$. Portanto, isso reduz o número de variáveis aleatórias independentes que estamos trabalhando

$$N_{\text{BINS}} = \frac{N_{\text{PIX}}}{2} - 1. \quad (4.2)$$

Da distribuição de frequência dessas N_{sim} realizações, podemos calcular a frequência média de um pixel $\langle x_i \rangle$ e a matriz de covariância² por meio dos estimadores que maximizam a verossimilhança

$$C_{ij} = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle. \quad (4.3)$$

É importante notar que as covariâncias entre as variáveis aleatórias x_i estão relacionadas aos diferentes pixels, isso é equivalente a analisar a covariância dos MVs de um dado multipolo distribuídos em um mapa. Além disso, como discutido em [49, 50], tal matriz é singular quando $N_{\text{BINS}} > N_{\text{sim}} - 1$ uma vez que a média também é calculada a partir dos dados. Isso coloca um limite inferior no N_{sim} a depender do N_{SIDE} utilizado.

Em alguns casos, a matriz de covariância pode ser singular e, portanto, podemos ter problemas para calcular a sua inversa. Um dos casos onde ela pode ser singular é para baixos multipolos, pois nesses casos temos um pequeno número de vetores espalhados pelo mapa. Então, se fizermos, por exemplo, 1000 simulações, há uma certa probabilidade de que tenhamos

²Note que, apesar do mesmo nome, essa matriz de covariância não se relaciona com aquela da equação (2.56).

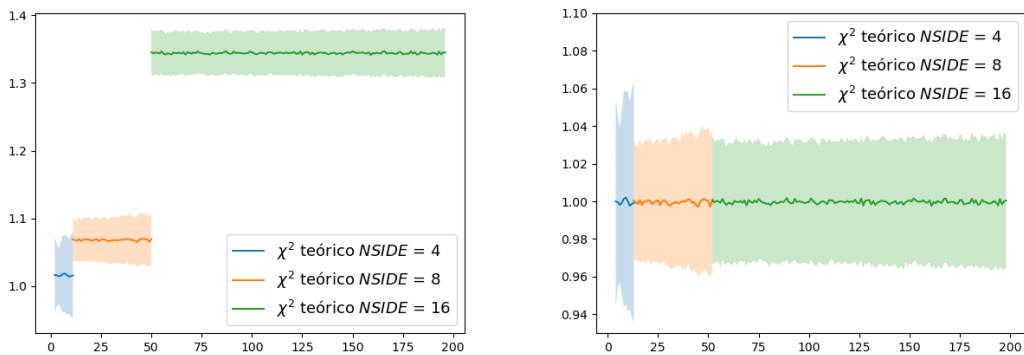


Figura 4.2: Comparação entre as análises de χ^2 para mapas GSI. À esquerda temos as análises sem a inclusão do fator de correção nas matrizes de covariância, esse problema leva à saltos nestes valores. À direita temos a mesma análise agora com o fator de correção.

um ou mais pixels vazios, em todas essas simulações. Nesse caso, x_i é uma constante de valor 0 para todas as suas realizações que não possuam desvio padrão e, portanto, não conseguiremos trabalhar com a matriz de covariância inversa. É importante notar também que o N_{SIDE} escolhido interfere nesse problema, pois, quanto maior for a pixelização da esfera, mais chances teremos desse problema ocorrer. Ao contrário disso, quanto maior for o N_{sim} , maior é a chance de todos os pixels serem populados com vetores. Portanto, esse balanço entre N_{PIX} e N_{sim} deve ser levado em conta. Em suma, precisamos garantir que, em pelo menos uma das simulações, a variável x_i tenha uma flutuação. Isso se torna um problema quando vamos fazer essa mesma análise para o caso dos FVs uma vez que, para cada multipolo, temos apenas 1 vetor.

Além disso, quando a matriz de covariância e a média são calculadas a partir dos dados, ela se torna enviesada. Tal fator de viés aumenta à medida que o número de variáveis aleatórias (N_{BINS}) se torna maior do que o número de realizações (N_{sim}). Para remover esse viés na amplitude, é introduzido um termo de correção no cálculo de sua inversa [50]

$$C_{ij}^{-1} \rightarrow \left[\frac{N_{\text{sim}} - N_{\text{BINS}} - 2}{N_{\text{sim}} - 1} \right] C_{ij}^{-1}. \quad (4.4)$$

É importante ressaltar que essa correção de viés foi ignorada em [43], o que pode ser observado no crescimento da curva teórica na figura 4 dessa referência. Para corrigir esse viés em [43], Oliveira, Pereira e Quartin introduziram o conceito de simulações de controle, que permite calibrar o valor teórico do χ^2 para mapas GSI. No caso do processo de binagem utilizado nesse trabalho, a presença do viés é ainda mais evidente. Se analisarmos somente a hipótese nula (compararmos mapas GSI com mapas GSI), os χ^2 apresentam valores diferentes a depender do N_{SIDE} escolhido (figura 4.2).

Corrigido esse problema, podemos então fazer o teste de uma hipótese que pode ser, por exemplo, o mapa de uma *pipeline* do Planck, do qual também extraímos as N_{BINS} frequências x_i^{PLANCK} . Dessa forma, testamos o ajuste que tal hipótese tem por meio da função χ^2 reduzida

$$(\chi^2_\ell)^{\text{PLANCK}} = \frac{1}{N_{\text{BINS}}} \sum_{i,j}^{N_{\text{BINS}}} (\langle x_i^{\text{GSI}} \rangle - x_i^{\text{PLANCK}}) (C_{ij}^{\text{GSI}})^{-1} (\langle x_j^{\text{GSI}} \rangle - x_j^{\text{PLANCK}}). \quad (4.5)$$

Portanto, para um dado teste de hipótese, temos ℓ_{MAX} valores da quantidade $(\chi^2_\ell)^{\text{PLANCK}}$. Uma forma de comprimir todos esses valores em um só, e dessa forma analisar a significância estatística de um mapa em todas as escalas (todos os ℓ' s até ℓ_{MAX}), é repetindo o teste de hipótese para um número de simulações de controle $N_{\text{sim}}^{\text{CONTROL}}$, nas quais, ao invés de analisarmos os mapas do Planck, analisamos novas simulações de mapas GSI e extraímos as frequências x_i^{CONTROL} , assim:

$$(\chi^2_\ell)^{\text{CONTROL}} = \frac{1}{N_{\text{BINS}}} \sum_{i,j}^{N_{\text{BINS}}} (\langle x_i^{\text{GSI}} \rangle - x_i^{\text{CONTROL}}) (C_{ij}^{\text{GSI}})^{-1} (\langle x_j^{\text{GSI}} \rangle - x_j^{\text{CONTROL}}). \quad (4.6)$$

Fazendo isso, consideramos $(\chi^2_\ell)^{\text{CONTROL}}$ um conjunto de ℓ variáveis aleatórias com $N_{\text{sim}}^{\text{CONTROL}}$ realizações, dos quais podemos extrair sua média $\langle (\chi^2_\ell)^{\text{CONTROL}} \rangle$ e matriz de covariância $(C_{ij}^{\text{CONTROL}})$. Nesse caso, a covariância é entre os diferentes multipolos. Dessa forma, podemos realizar um novo teste de hipótese

$$\chi^2_{\chi^2} = \frac{1}{\ell} \sum_{ij}^{\ell} \left(\langle (\chi^2_i)^{\text{CONTROL}} \rangle - (\chi^2_i)^{\text{PLANCK}} \right) (C_{ij}^{\text{CONTROL}})^{-1} \left(\langle (\chi^2_j)^{\text{CONTROL}} \rangle - (\chi^2_j)^{\text{PLANCK}} \right) \quad (4.7)$$

do qual podemos extrair um $\chi^2_{\chi^2}$ para cada *pipeline* do Planck e calcular seus respectivos *p-value*. Nesse caso, considerando todas as hipóteses feitas, tal valor simboliza a probabilidade de que um universo GSI apresente um mapa de temperatura dado pela *pipeline* analisada. Para ficar mais evidente todos os estágios necessários para realizarmos o teste de hipótese nula, foi construído um fluxograma do processo (figura 4.3).

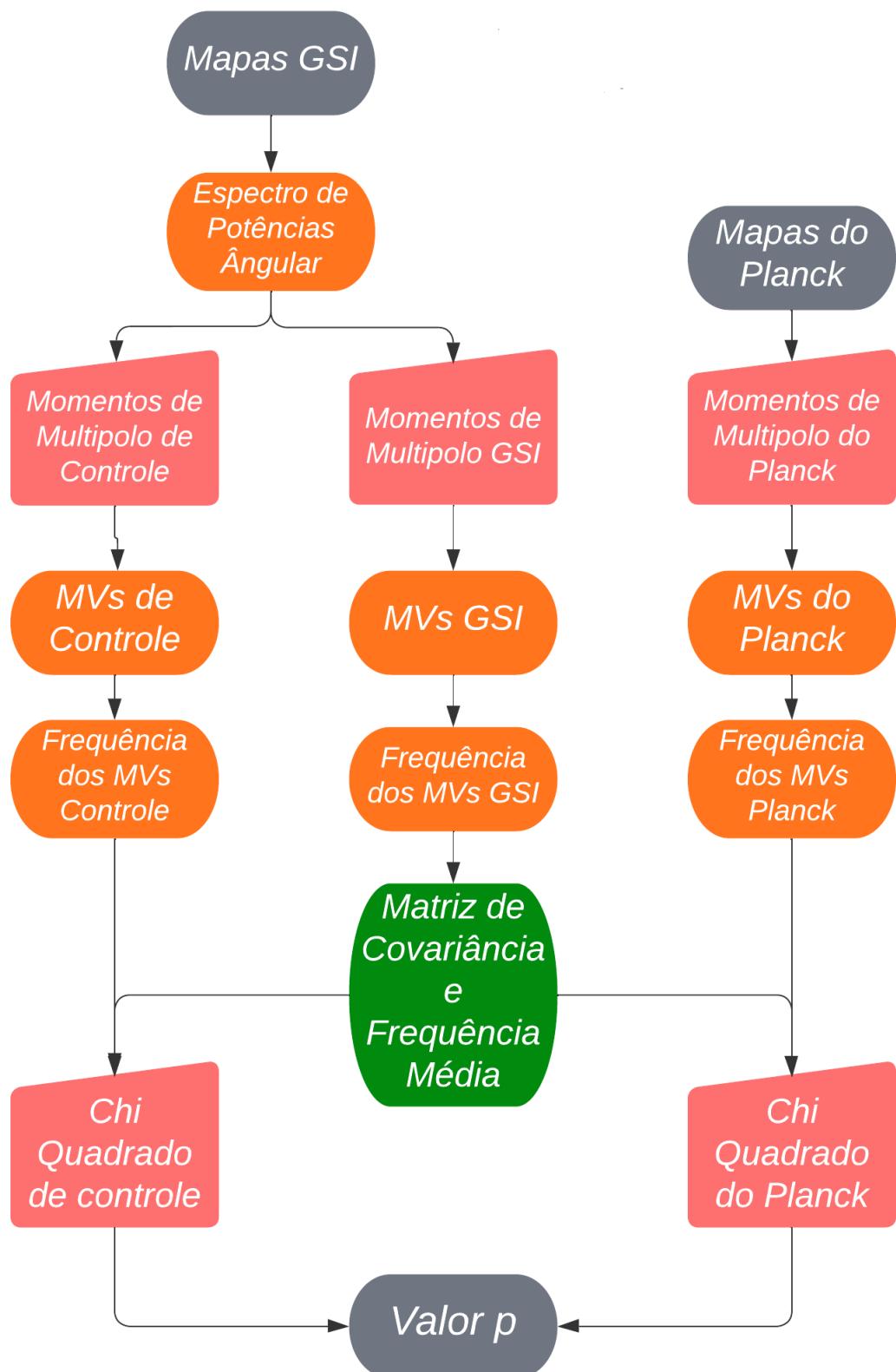


Figura 4.3: Fluxograma das diferentes etapas do teste de hipótese nula de χ^2 .

5 RESULTADOS

Neste trabalho, para obtenção dos MVs e FVs foi construído um algoritmo na linguagem C. Um algoritmo com a mesma finalidade — PolyMV — já havia sido desenvolvido em Python [43], porém o código resultante é pouco eficiente em simulações de alto desempenho. Tendo em vista esta limitação, decidimos reestruturar esse código na linguagem C. Em relação aos MVs, sua reestruturação consistiu em três estágios: i) o processo de construção do polinômio (3.7) a partir dos $a_{\ell m}$ s, ii) a extração das suas raízes e, iii) a obtenção das coordenadas dos MVs a partir das raízes através da transformação (3.8). Para os FVs, utilizamos um algoritmo minimizador da função (3.14). Os detalhes para a construção de tal algoritmo se encontram no apêndice A.

Uma vez construído um software para, dado um mapa de temperatura, obtermos os MVs e FVs, começamos as análises. Conforme discutimos na metodologia, optamos por trabalhar no espaço de pixels, diferentemente da abordagem em coordenadas adotada em [43]. A principal dificuldade com esta implementação, e também a que nos tomou mais tempo, foi encontrar uma resolução angular apropriada para a detecção de desvios de gaussianidade, homogeneidade e isotropia estatísticas, casos eles existam. Ou seja, o desafio é encontrar o N_{SIDE} apropriado para cada intervalo de multipolo, para um dado mapa.

Essa etapa se mostrou altamente não trivial. Para calibrar nosso teste (4.6), começamos fazendo simulações de mapas de temperatura contendo modulações notoriamente anisotrópicas. Em linhas gerais, a ideia é sintetizar mapas cujas anisotropias possam ser detectadas pelo nosso teste de χ^2_{ℓ} . Porém, essa metodologia se revelou ineficaz para a determinação de uma resolução (N_{SIDE}) ótima. No entanto, os resultados que obtivemos aplicando tais modulações continuaram a ser explorados devido à sua semelhança e possível relevância para se investigar a origem do Cold Spot [51, 52]. Para resolver o problema de otimização da resolução, optamos por analisar apenas os limites de gaussianidade da variável x_i . Isso nos permitiu fixar um N_{SIDE} para cada intervalo de multipolos e, assim, testar as hipóteses de simetria do modelo padrão com os mapas do Planck.

Portanto a apresentação dos resultados foi separada em três partes: na primeira fazemos uma escolha do N_{SIDE} utilizado e uma análise das matrizes de covariância das variáveis aleatórias. Na segunda são apresentadas as análises dos MVs e FVs com modulações anisotrópicas de temperaturas aplicadas aos mapas. Por fim apresentamos os testes de isotropia e gaussianidade dos mapas do satélite Planck.

5.1 ESCOLHA DO PARÂMETRO N_{SIDE} E TESTE DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA

Uma vez que optamos por fazer uma binagem na qual o número de bins dependia do N_{SIDE} escolhido, surge a preocupação de não termos resolução suficiente para detectarmos des-

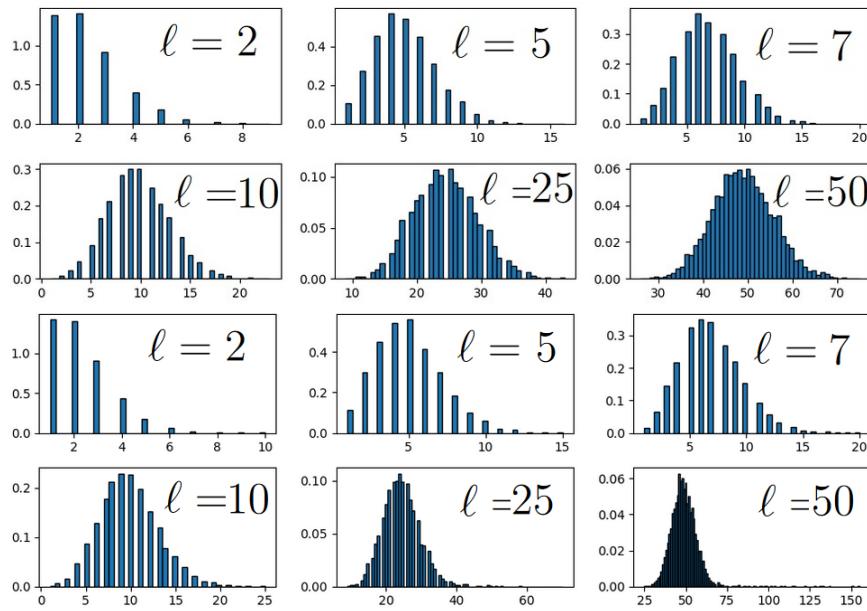


Figura 5.1: Distribuição da variável x_i para diferentes valores de ℓ , obtidas de um conjunto de 6000 simulações. O eixo y identifica a probabilidade de um MV coincidir com um pixel identificado no eixo x. As primeiras duas linhas foram obtidas de mapas sem a máscara UT78 enquanto as duas últimas foram obtidas de mapas mascarados.

vios na uniformidade da distribuição dos vetores na esfera. Especialmente para multipolos altos e portanto, onde a separação angular típica entre eles é da ordem de um décimo de um grau. Por conta disso, nossas análises iniciais focaram na determinação de um N_{SIDE} apropriado para se trabalhar.

O primeiro passo foi realizar testes de gaussianidade da variável x_i . Na figura 5.1 podemos notar que à medida que ℓ cresce, e portanto o número de vetores cresce, a distribuição se aproxima de uma gaussiana. Para se determinar a normalidade dos histogramas de x_i , foram realizados testes de Kolmogorov-Smirnov e Shapiro-wilk e encontramos um limite inferior para se trabalhar com $N_{\text{SIDE}} = 16$ de $\ell > 160$

Além disso, como o número de variáveis aleatórias x_i depende do N_{SIDE} escolhido, quanto maior esse valor, mais simulações seriam necessárias para estimar a matriz de covariância. Devido a isso, foi escolhido o limite máximo de $N_{\text{SIDE}} = 16$ para esse parâmetro. Dessa forma, o intervalo escolhido para se trabalhar na análise de χ^2 foi $N_{\text{SIDE}} = 8$ para o intervalo de multipolos $2 \leq \ell \leq 160$ e $N_{\text{SIDE}} = 16$ para $161 \leq \ell \leq 1500$. Além disso, escolhemos trabalhar com 3500 simulações para a estimativa da covariância e frequência média dos bins e 1000 simulações para obtenção dos $(\chi^2_\ell)^{\text{CONTROL}}$.

Como a inversão das matrizes quadradas ocupava a maior parte do tempo no cálculo das funções χ^2 , outro ponto importante que analisamos foram as matrizes de covariância tanto para o cálculo do χ^2_ℓ quanto para o $\chi^2_{\chi^2}$ (figura 5.2). Um ponto importante de se notar é que a primeira matriz está relacionada com as frequências x_i como variáveis aleatórias, portanto os elementos fora da diagonal principal simbolizam uma covariância entre os diferentes pixeis (entre os MVs

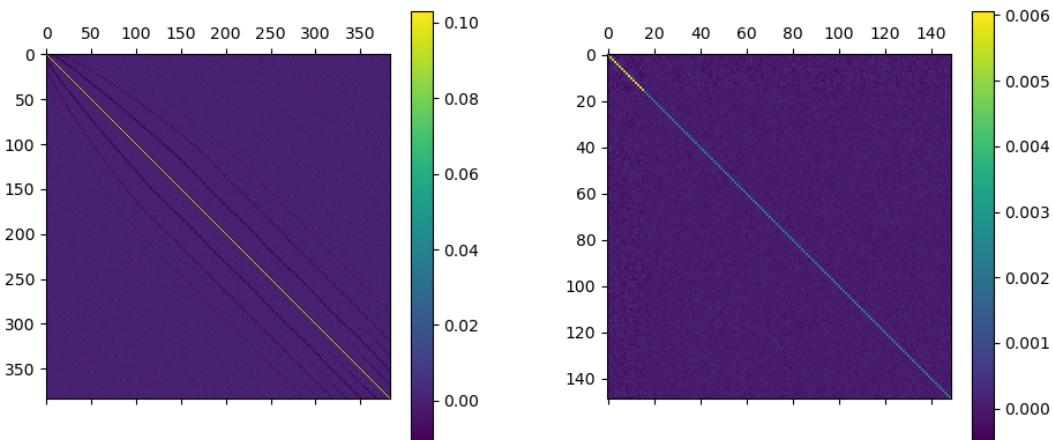


Figura 5.2: Matrizes de covariância para as diferentes análises de χ^2 . A matriz da esquerda se relaciona com as variáveis aleatórias x_i para $NSIDE = 16$ enquanto à direita temos a matriz que se relaciona com as variáveis aleatórias χ^2_{MV} . Os valores em cada eixo identificam o pixel correspondente.

de um dado ℓ). O fato de que MVs de mapas GSI possuem covariância já foi apresentado em [44]. Porém, nenhum trabalho além de [43] e o presente texto usou esta covariância para testar as hipóteses do princípio cosmológico usando dados da CMB. Já a covariância da segunda matriz se relaciona com os $(\chi^2_\ell)^{CONTROL}$ como variáveis aleatórias, portanto os elementos fora da diagonal principal se relacionam com a covariância dos diferentes ℓ analisados. Dessa análise foi concluído que poderíamos trabalhar com os $\chi^2_{\chi^2}$ considerando que as variáveis eram não correlacionadas.

5.2 ANÁLISE DOS COLD SPOTS

Em nossos testes iniciais, fizemos modulações decrescentes em uma máscara circular de abertura arbitrária mas preservando a modulação dos pontos fora da máscara (figura 5.3). Além disso, como já dito, inicialmente utilizávamos de tais modulações para determinar melhor os N_{SIDE} que utilizávamos. Alterando o tamanho da modulação e sua intensidade, inicialmente fizemos um conjunto de medidas de χ^2_ℓ comparando tais mapas com 6000 simulações GSI. Em nossas tentativas iniciais, alteramos as modulações para vários tamanhos diferentes nas escalas do tamanho do pixel de um dado N_{SIDE} . Após os primeiros resultados, vimos que isso não era uma estratégia adequada, pois as modulações provocavam oscilações nas distribuições dos vetores que possuíam um tamanho diferente da modulação no espaço de temperatura. Dito de outra forma, fazer uma modulação de raio 5° não se relaciona com algo envolvendo 5° de diferença no espaço dos vetores. Por conta disso, paramos de usar essa abordagem para determinar o N_{SIDE} a ser trabalhado. Isso já podia ser visto nas análises de mapas mascarados que foram feitas em [43] uma vez que, a presença da máscara na região equatorial fazia com que

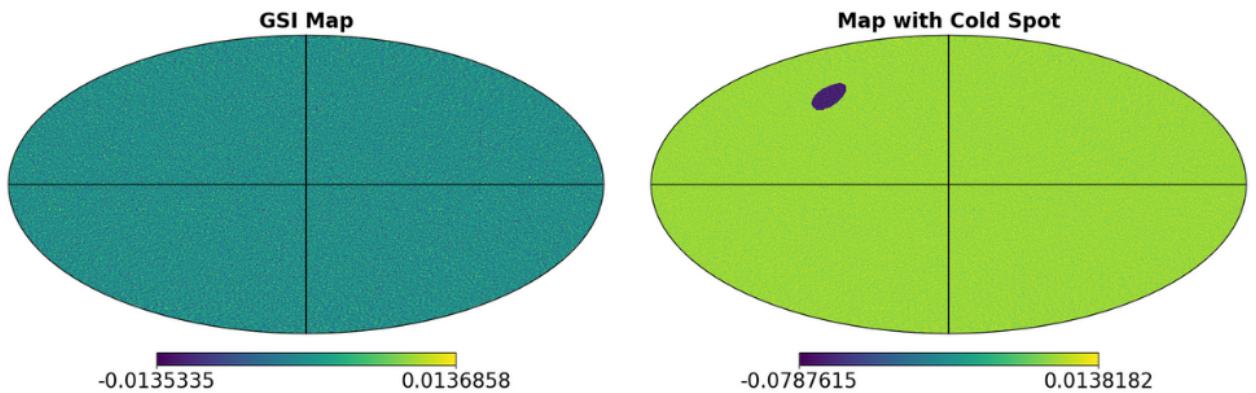


Figura 5.3: À esquerda temos um mapa totalmente GSI e a direita um mapa GSI com uma modulação de temperatura de -0.07 K e abertura de 10° .

os pixeis se acumulassem nos polos, em proporções que nada tinham de relação com o tamanho da máscara. Apesar desse problema, continuamos analisando tais modulações, motivados principalmente pela anomalia do *cold spot* [51, 52] cuja origem ainda é desconhecida, mas que frequentemente é relacionada à existência de uma grande região vazia no universo.

A primeira coisa que nos motivou a continuar fazendo essa análise, foram as alterações na função χ_ℓ^2 . Tais modulações produziam desvios significativos das simulações de controle produzidas com mapas GSI (figura 5.4). Porém, o comportamento desse desvio era até então desconhecido. As primeiras análises nos revelaram um padrão oscilatório nas funções χ_ℓ^2 e, para entender melhor o comportamento dessas oscilações, alteramos três parâmetros nos cold spots: i) a intensidade da modulação de temperatura, ii) o tamanho da modulação e iii) sua posição. A primeira coisa percebida, é que a mudança de temperatura do cold spot fazia com que, quanto maior fosse a modulação de temperatura, maior seriam os picos de intensidade das oscilações da função χ_ℓ^2 . Note que isso representava um desvio maior entre hipótese e teoria. Mais precisamente, na uniformidade da distribuição de vetores com a não uniformidade. Outra coisa importante é o comportamento oscilatório dessa função, como se em determinados multipolos específicos a distribuição dos MVs na esfera fosse uniforme mas que a partir de um ℓ específico ela se tornasse não uniforme. A relação específica para explicar a uniformidade dos MVs nesses multipolos não é compreendida. Porém, alterando o tamanho do raio, tais oscilações se tornam mais frequentes. Também fizemos testes de como a mudança do cold spot de lugar afetava as funções χ_ℓ^2 mas vimos que essa alteração não afetava a significância nos testes.

Para facilitar a visualização do que estava ocorrendo, fizemos plots mollwieldes dos vetores para cada multipolo. Esses plots nos mostraram de outra forma, o padrão oscilatório dos

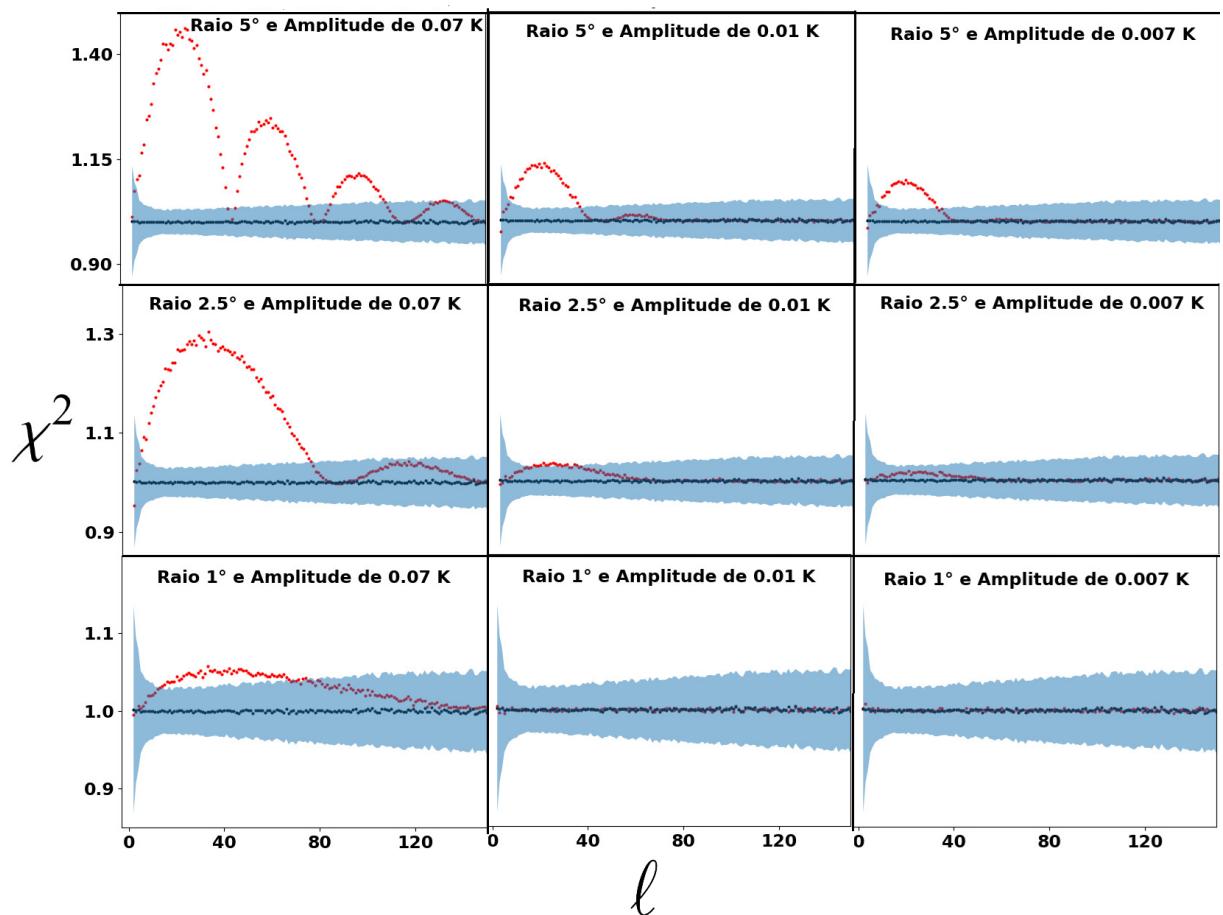


Figura 5.4: Os pontos vermelhos representam a função χ^2 para diferentes modulações de temperatura em mapas GSI. Da direita para a esquerda a amplitude da modulação diminui enquanto que de cima para baixo seu tamanho diminui. Em todos os gráficos temos também os χ^2 das simulações de controle e seus respectivos erros.

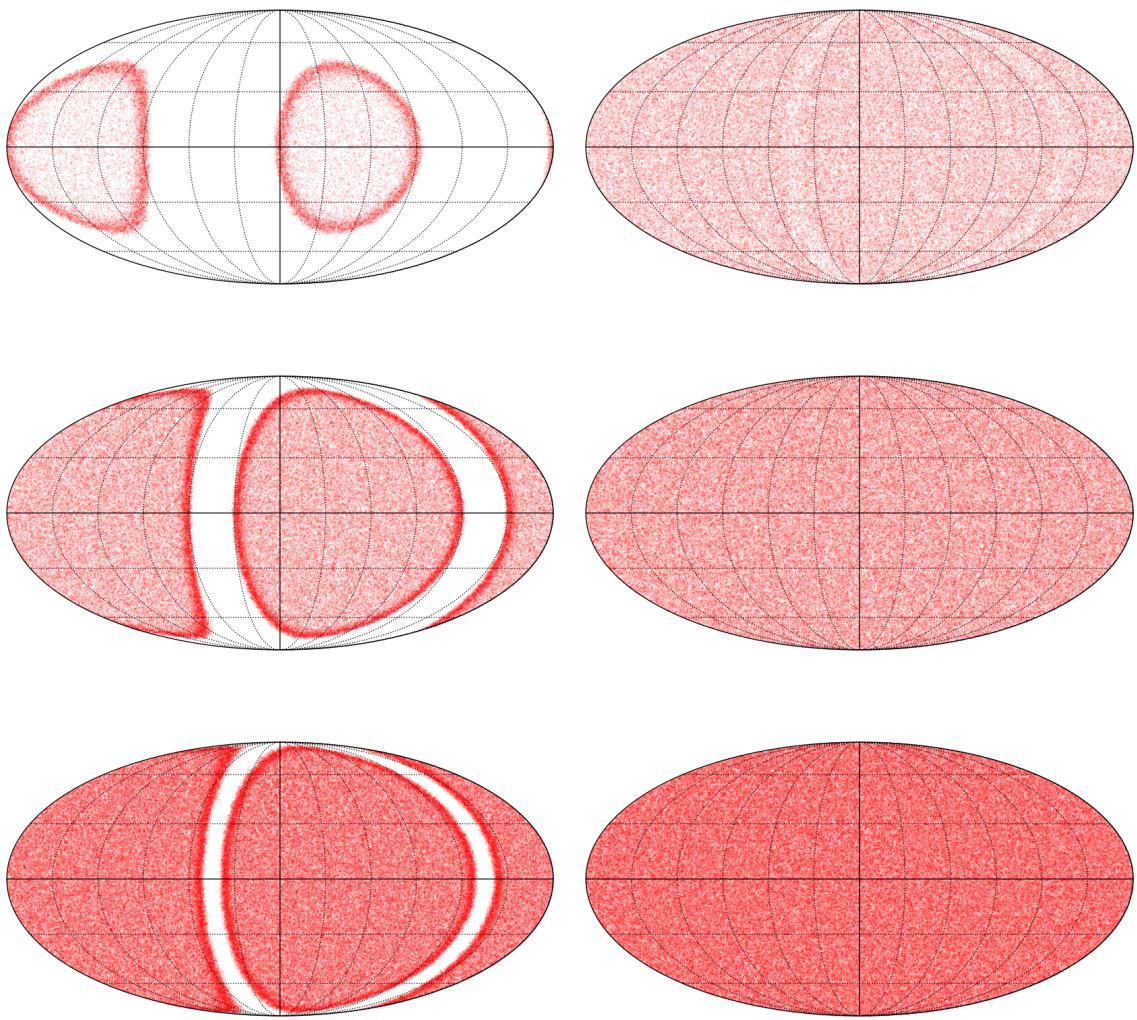


Figura 5.5: Projeção *Mollweide* dos MVs obtidos de 1000 mapas com a modulação de temperatura de 5° de raio. De cima para baixo e da esquerda para direita temos respectivamente $\ell = 13$, 48 , 98 , 115 , 121 e 122 .

vetores (figura 5.5). Podemos ver que os MVs para baixos multipolos começam com um padrão circular e vão evoluindo até a uniformidade em um dado multipolo, em seguida retornam a não uniformidade, explicando dessa forma o padrão oscilatório que antes estava expresso apenas nas funções χ_{ℓ}^2 . Plotando os gráficos para todas as análises que tínhamos feito, vimos que diminuir a intensidade dos cold spot fazia com que a uniformidade dos MVs ficasse menor, enquanto o contrário também era válido: quando maior a intensidade da modulação mais não uniforme eram as distribuições dos MVs. Além disso, sobre o padrão oscilatório ao analisar os diferentes multipolos, já sabíamos, das análises de χ_{ℓ}^2 , que essas oscilações aumentavam a medida que o raio aumentava e foi o que vimos nessas projeções mollwield, basicamente quanto maior o cold spot mais oscilações têm os MVs.

Além disso, diferente das análises de χ_{ℓ}^2 que não mostravam diferença alguma quando mudávamos o cold spot de lugar, com as projeções mollwields vimos que os MVs apresentavam

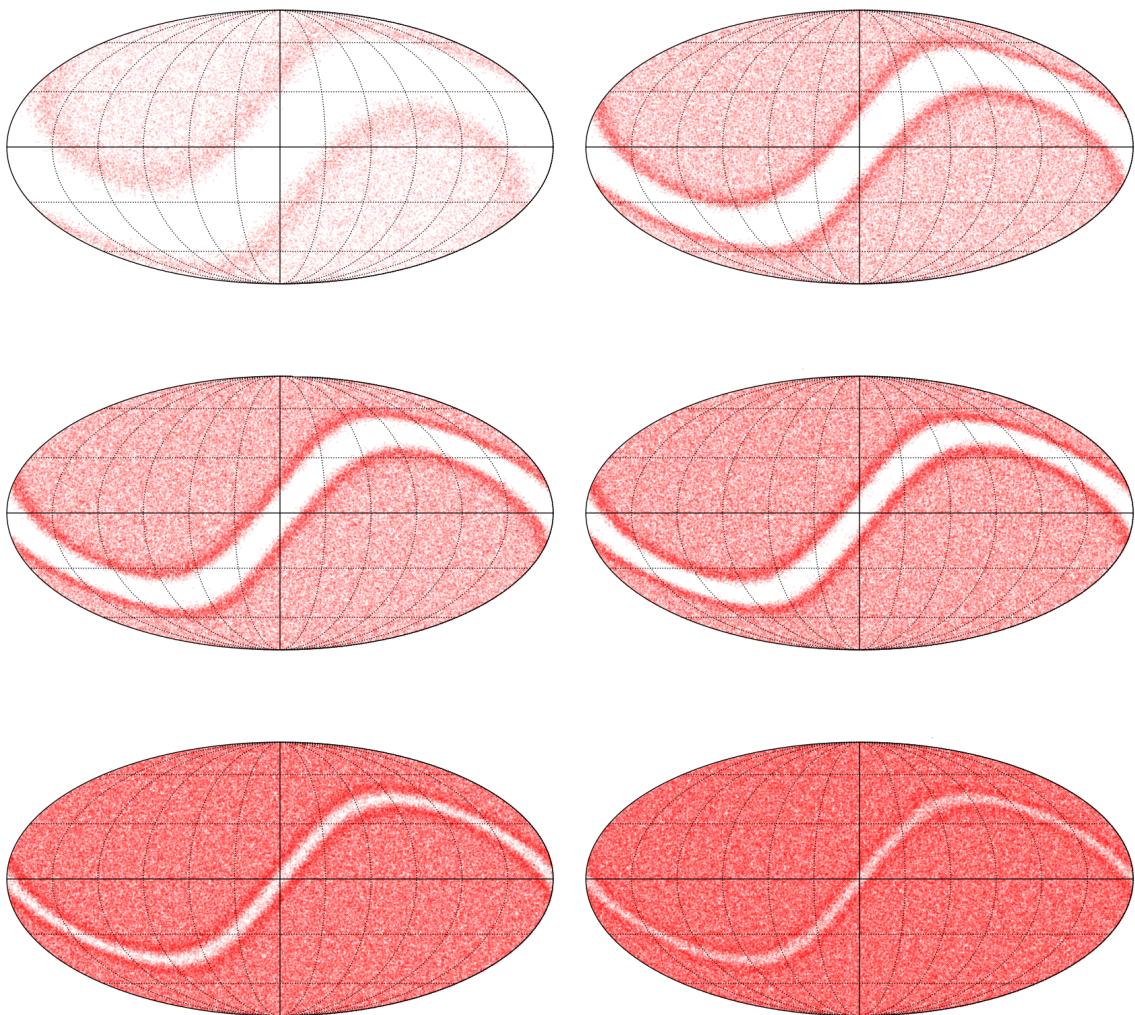


Figura 5.6: Projeção *Mollweide* dos MVs obtidos de 1000 mapas com a mesma modulação de temperatura porém com ela deslocada. De cima para baixo e da esquerda para direita temos respectivamente $\ell = 13, 48, 98, 115, 121$ e 122 .

uma clara sensibilidade à posição da modulação (figura 5.6). Tal alteração, fazia com que as faixas que não continham MVs sempre se deslocassem em uma direção oposta a modulação. Apesar desse deslocamento, a oscilação dos MVs não era afetada o que impedia que essas alterações fossem detectadas nos testes de χ^2_ℓ .

Também repetimos as projeções para os FVs (figura 5.7), com elas ficou muito mais claro a sensibilidade desses vetores mediante modulações de temperatura. Isso ajudou a explicar o comportamento dos histogramas construídos a partir de análises de mapas mascarados que demonstravam mais sensibilidade à presença daquelas máscaras (figura 3.6). Das análises anteriores vimos que os MVs apresentam um padrão oscilatório que começa em uma região "pequena" e vai aumentando até o momento em que eles ficam uniformes. Já a distância média desses pontos, se mantém fixa até o multipolo da uniformidade. Portanto, existe um padrão oscilatório mas ele é diferente do caso dos MVs. Isso demonstra que eles são mais sensíveis à

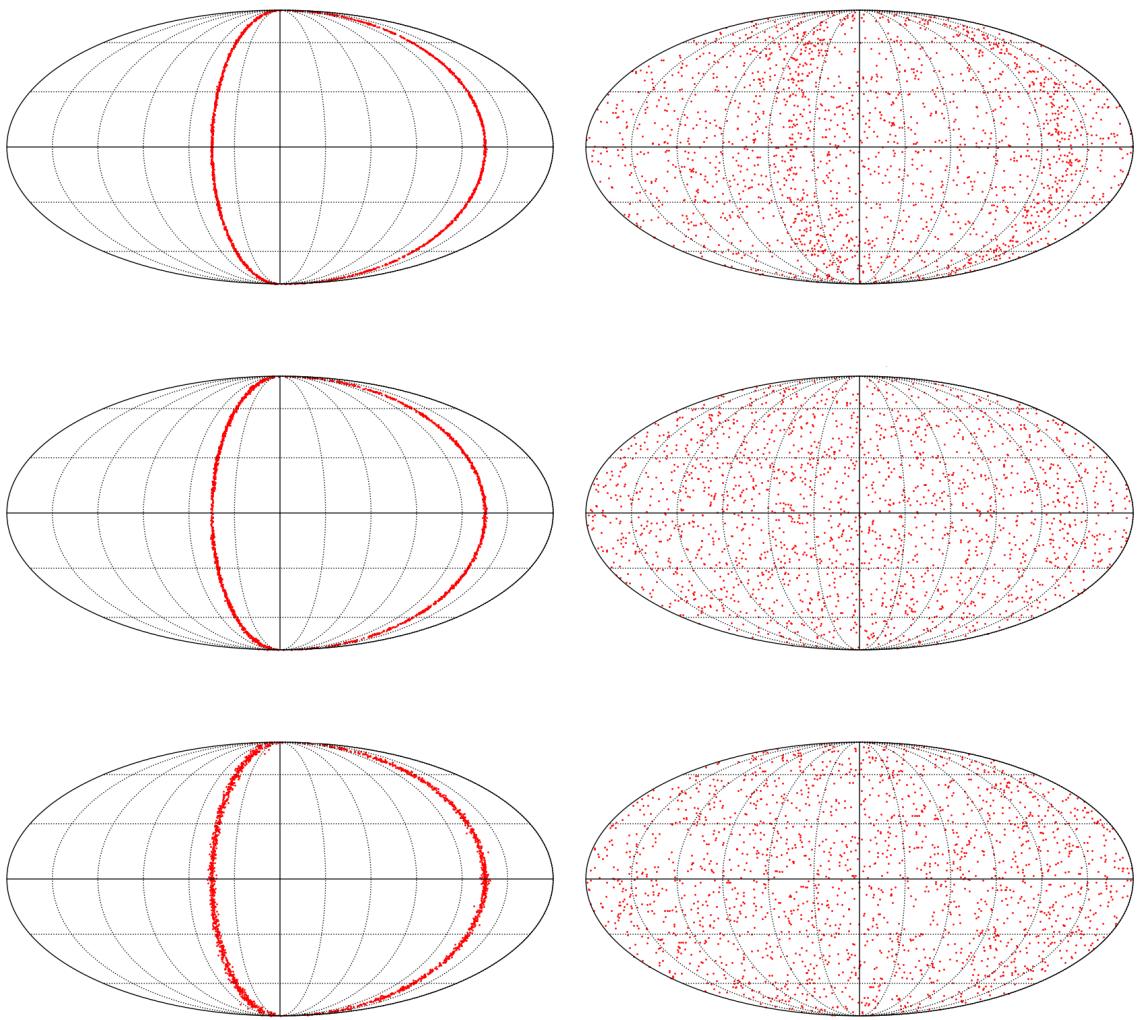


Figura 5.7: Projeção *Mollweide* dos FVs obtidos de 1000 mapas com a mesma modulação de temperatura. De cima para baixo e da esquerda para direita temos respectivamente $\ell = 13, 48, 98, 115, 121$ e 122 .

modulações em um teste de χ^2_ℓ , ou seja, os FVs se distribuem de maneira "menos uniforme", enquanto para os MVs existem casos que a modulação de temperatura se tornam menos perceptíveis nesse tipo de análise.

Por fim, foi possível notar que a função χ^2_ℓ encontrada para os MVs pode ser fitada pela parte positiva de uma função sinc (figura 5.8)

$$\text{sinc}x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

A relação entre o espaço de temperatura e os MVs é não trivial, uma vez que ela envolve uma transformada para o espaço harmônico e em seguida os coeficientes dessa expansão são transformados em um polinômio e, por fim, suas raízes correspondem aos vetores. Por conta

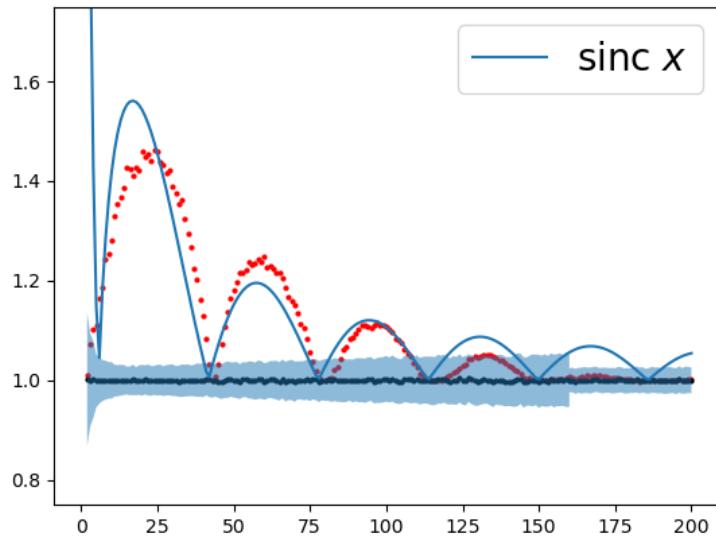


Figura 5.8: Os pontos vermelhos indicam a função χ^2_ℓ para 1000 mapas com uma modulação de temperatura de 0.07 K e 5° de raio. A linha continua azul demonstra o fit da função sinc. Além disso, em preto temos as simulações de controle junto aos seus respectivos erros.

disso, essa relação com a função sinc era até então desconhecida. Esse resultado, nos ajuda a compreender melhor o comportamento dos MVs uma vez que a função sinc é a transformada de Fourier da função degrau¹. Portanto, a intuição que isso nos fornece é que o cold spot pode ser interpretado como um "degrau" no espaço real de temperatura, provocando esse comportamento nos vetores de multipolo.

5.3 TESTES DE ISOTROPIA E GAUSSIANIDADE PARA OS MAPAS DA MISSÃO PLANCK

Para os testes de isotropia e gaussianidade, a primeira coisa feita foi extrair os MVs e FVs das 4 pipelines do Planck até $\ell_{max} = 1500$ para comparar com os obtidos nas antigas análises feitas com o código escrito em Python. Nesses testes obtivemos os mesmos vetores de uma maneira mais eficiente. A projeção Mollweid desses vetores até $\ell_{max} = 1500$ se encontra nas figuras 5.9 e 5.10. Para um teste inicial, apenas observando os mapas podemos ver que 3 deles (SEVEM 2015 e 2018 e Commander 2018) tanto os MVs quanto os FVs apresentam desvios da uniformidade. Esse resultado já havia sido encontrado anteriormente e apoiado também pelas análises de χ^2 representando que esses três mapas apresentam discordância com a hipótese nula.

No antigo trabalho [43], tais discordâncias com as hipóteses de simetrias foram justificadas nessas pipelines da seguinte maneira: entre os anos de 2015 e 2018 a equipe da pipeline Commander fez uma simplificação na sua análise de contaminações [53], essa alteração tornou

¹O espaço harmônico pode ser visto como o espaço de Fourier para funções na esfera

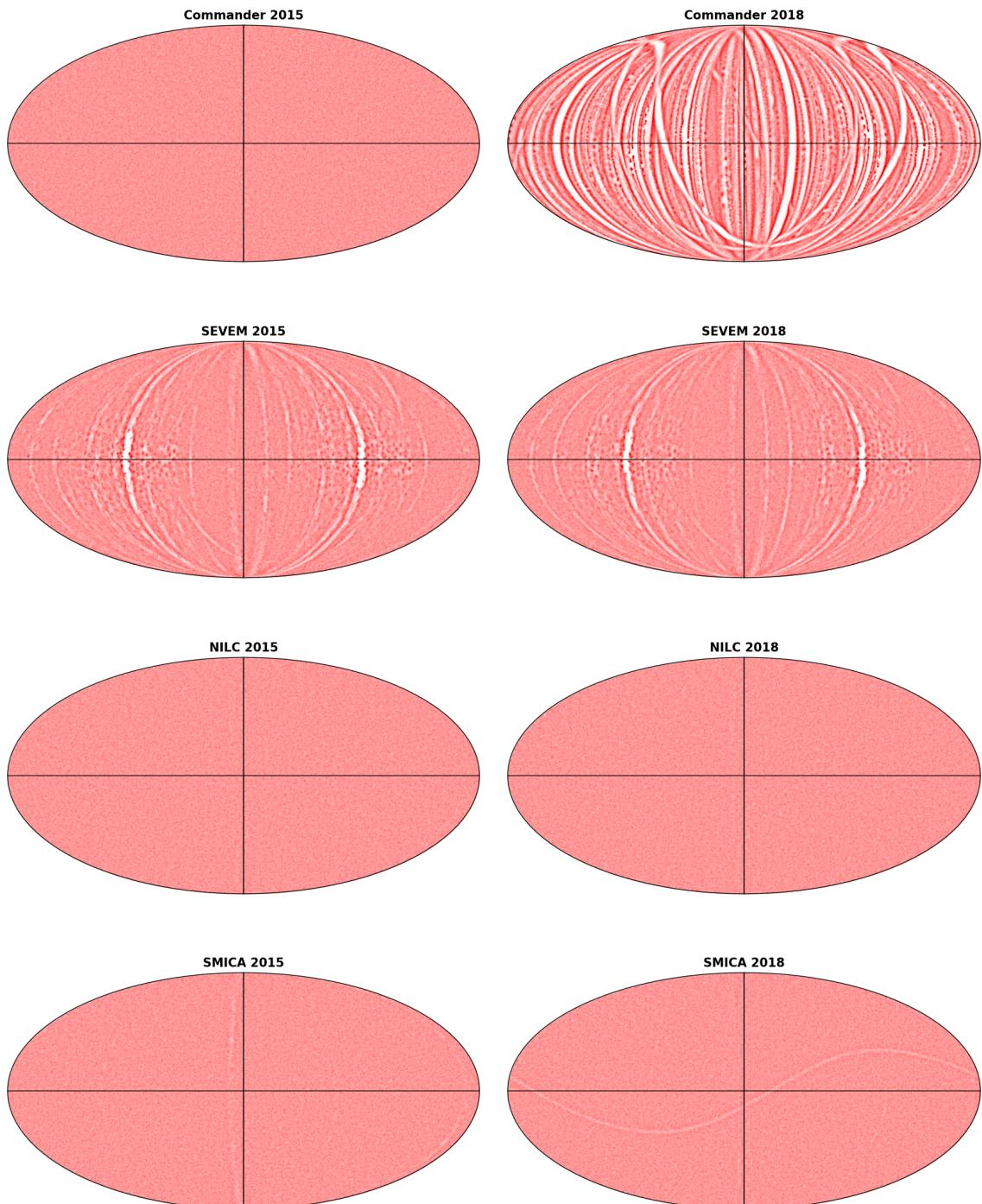


Figura 5.9: Projeção *Mollweide* dos MVs para $l_{\text{max}} = 1500$, obtidos das 4 *pipelines* do satélite Planck.

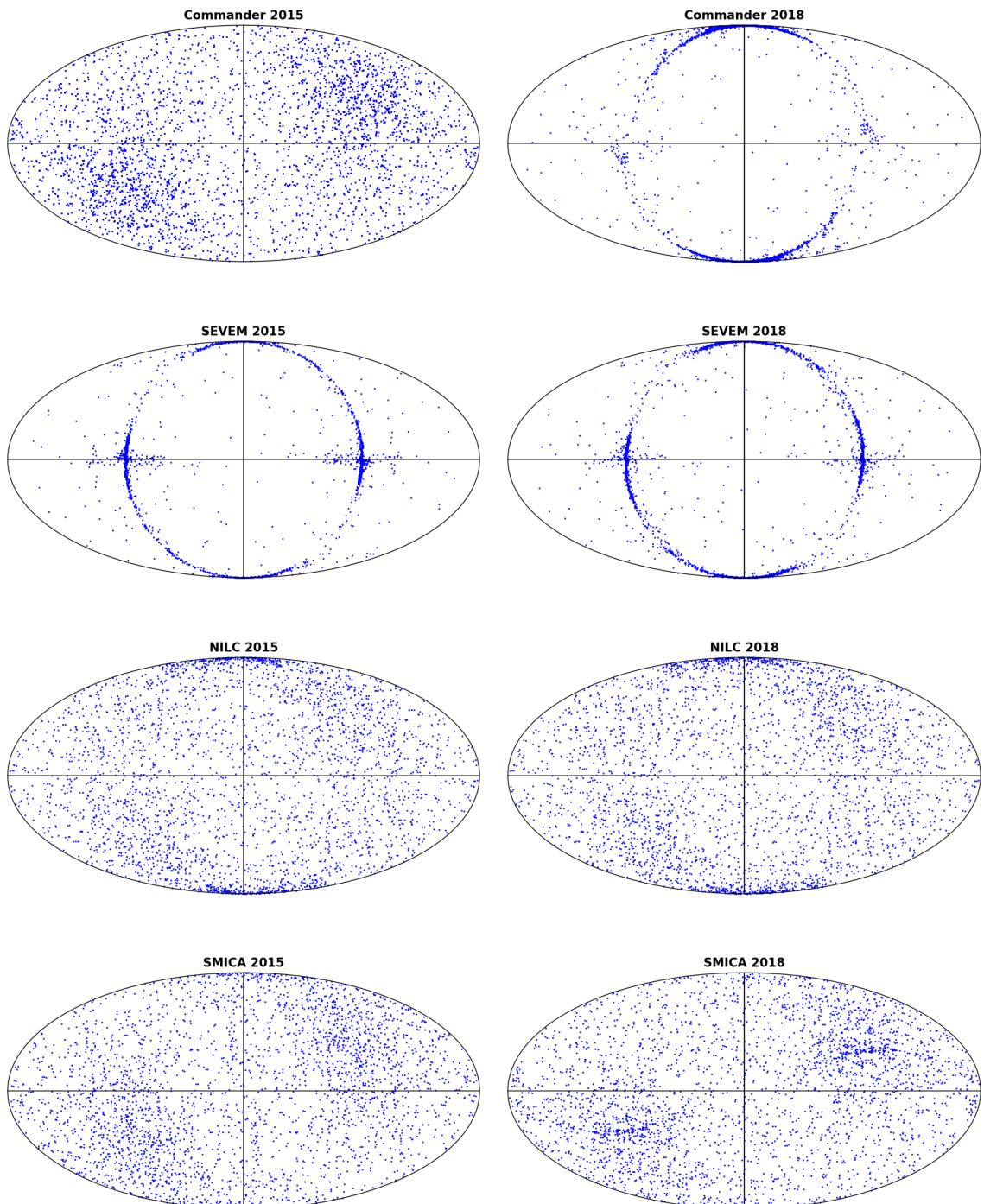


Figura 5.10: Projeção *Mollweide* dos FVs para $l_{\text{max}} = 1500$, obtidos das 4 *pipelines* do satélite Planck.

os mapas não isotrópicos. Já para as pipelines do SEVEM, nos anos 2015 e 2018, tal desvio da uniformidade foi atribuído à fortes evidências de contaminação residual nessas pipelines, que estão em concordância com os trabalhos de [54] e [55]. É importante frisar nesse momento, que a equipe do satélite Planck leva em conta, para qualquer análise cosmológica, os mapas mascarados.

Neste trabalho, estávamos focados apenas em testar a sensibilidade dos testes de χ^2_ℓ realizados e uma boa forma de fazer isso é trabalhando com os mapas sem máscara, justamente para detectar a presença dessas contaminações. Além disso, os resultados aqui apresentados devem ser analisados à luz da discussão feita nesse trabalho anterior, ou seja, também queremos comparar a sensibilidade do nosso teste, agora com a mudança no processo de binagem, com os resultados encontrados no antigo trabalho.

Dessa forma, uma vez fixado o intervalo do N_{SIDE} e resolvidos os problemas com a inversão da matriz de covariância, pudemos partir para o que seriam as análises finais desse trabalho que eram os testes de $\chi^2_{\chi^2}$ e p_{values} dos mapas do satélite Planck. Para melhor entender a significância dos resultados obtidos os $\chi^2_{\chi^2}$ e p_{values} foram calculados em três intervalos diferentes referentes às várias escalas cosmológicas. O primeiro deles é o intervalo que cobre todas as escalas do satélite Planck com $\ell_{\max} = 1500$. A segunda escala representa o intervalo do WMAP ($\ell_{\max} = 600$) que se relaciona com as escalas da maior parte das anomalias da CMB analisadas atualmente. Por fim escolhemos também trabalhar com largas escalas $\ell_{\max} = 30$, sendo a escala que o próprio time do satélite Planck utiliza para separar pequenos de grandes multipolos em suas análises de Likelihood. Em resumo,

$$\text{Escalas do Planck: } 2 \leq \ell \leq 1500,$$

$$\text{Escalas do WMAP: } 2 \leq \ell \leq 600,$$

$$\text{Largas Escalas: } 2 \leq \ell \leq 30.$$

Os χ^2_ℓ dos MVs para as diferentes *pipelines* do Planck se encontram na figura 5.11 e juntamente aos valores dos $\langle (\chi^2_i)^{\text{CONTROL}} \rangle$ com seu desvio padrão. Para facilitar a visualização, os χ^2_ℓ foram binados em intervalos de $\Delta\ell = 20$. Além disso, nas tabelas 5.1 e 5.2 se encontram os resultados dos $\chi^2_{\chi^2}$ e p_{value} . Podemos ver na figura que todas as pipelines apresentam concordância com a hipótese nula com exceção da pipeline do Commander de 2018, que a partir dos multipolo 300 apresenta uma clara discordância em comparação com os mapas GSI. Tal discordância é vista também no p_{value} encontrado no qual tanto as escalas do WMAP quanto do Planck são reprovados no teste nulo. O fato de não detectarmos problemas nas pipelines do sevem podem indicar uma má calibração desse novo processo de binagem utilizado, ou seja, uma má escolha dos intervalos de N_{SIDE} que estamos trabalhando.

Os resultados para os FVs se encontram na figura 5.12 .

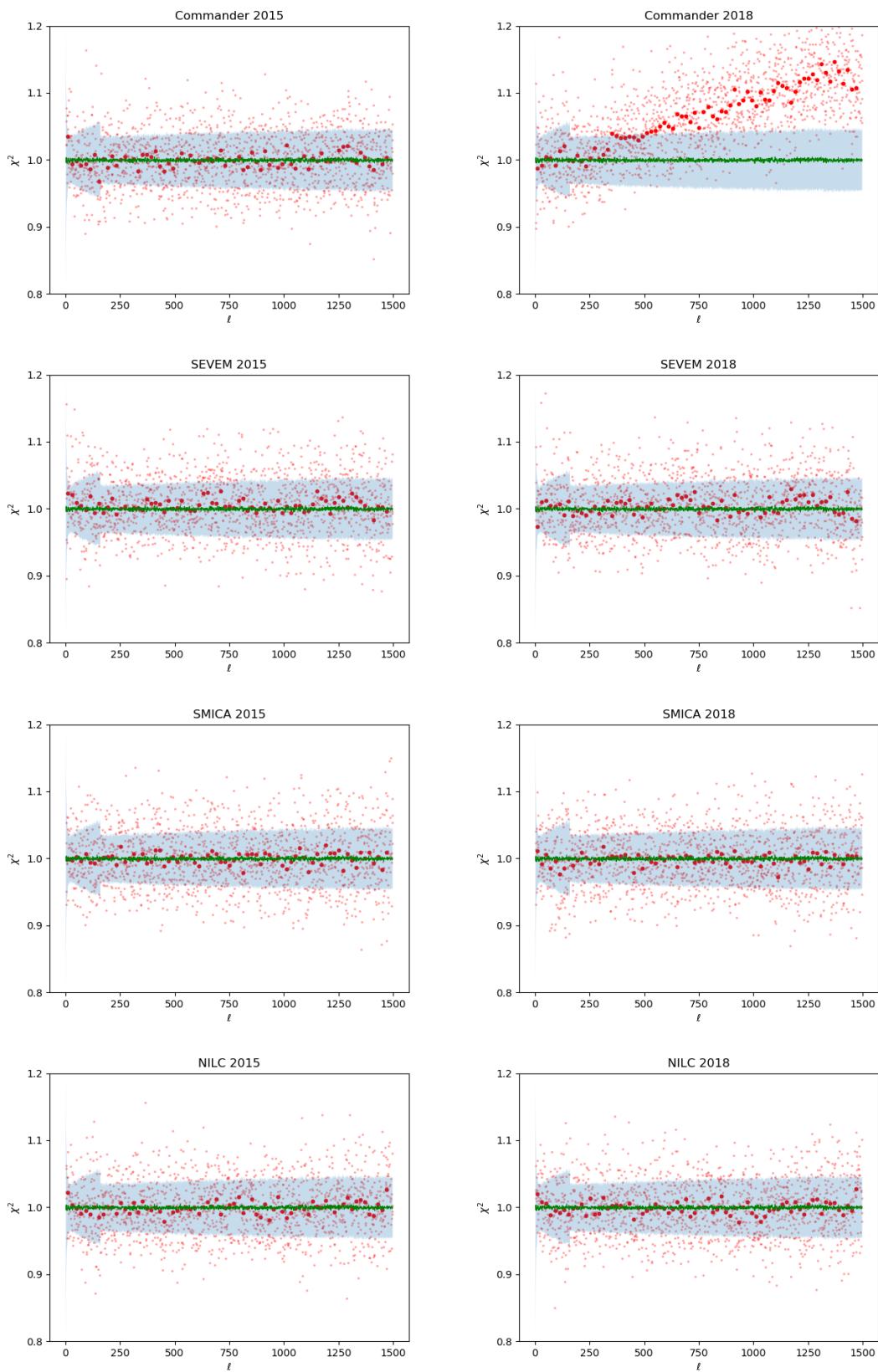


Figura 5.11: χ^2_ℓ obtidos das 4 *pipelines* do satélite Planck. Os pontos vermelhos mais claros são os resultados para cada multipolo, enquanto os pontos vermelhos mais escuros são os binados em intervalos de 20 multipolo. A linha verde são os χ^2_ℓ das simulações de controle junto com o desvio padrão em azul

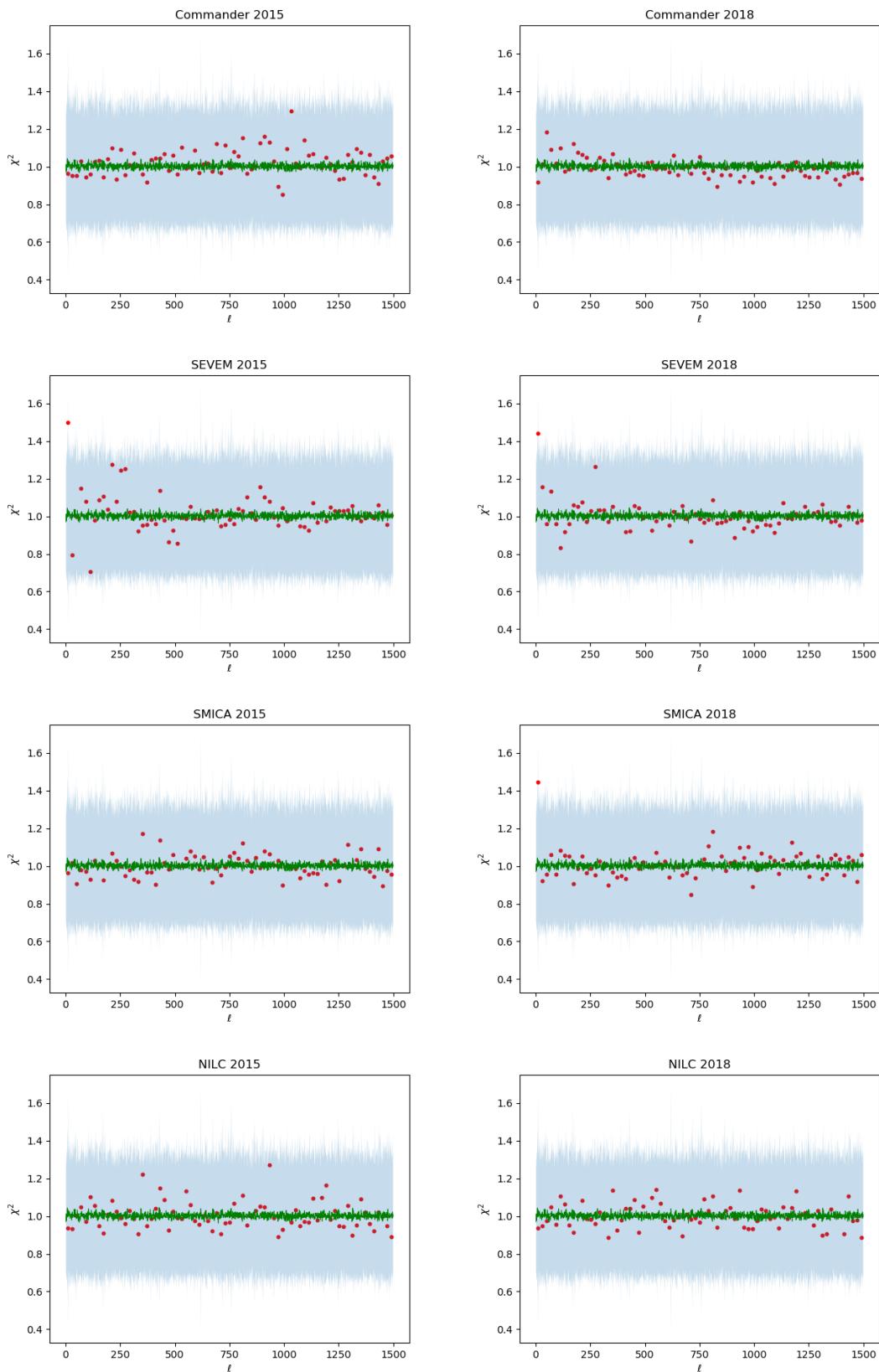


Figura 5.12: χ^2_ℓ obtidos das 4 *pipelines* do satélite Planck. Os pontos vermelhos correspondem aos resultados da binagem em intervalos de 20 multipolo. A linha verde são os χ^2_ℓ das simulações de controle junto com o desvio padrão em azul

2015								
Intervalos	Commander		SEVEM		SMICA		NILC	
	$\chi^2_{\chi^2}$	$pvalue$	$\chi^2_{\chi^2}$	$pvalue$	$\chi^2_{\chi^2}$	$pvalue$	$\chi^2_{\chi^2}$	$pvalue$
Escalas do Planck	1.010	0.386	1.055	0.067	1.082	0.013	0.980	0.707
Escalas do WMAP	1.081	0.083	0.984	0.597	1.095	0.053	1.049	0.195
Largas Escalas	1.479	0.049	1.081	0.350	0.692	0.885	0.917	0.591

Tabela 5.1: χ^2 e $pvalue$ obtidos dos MVs calculados a partir das *pipelines* do satélite Planck do ano de 2015

2018								
Intervalos	Commander		SEVEM		SMICA		NILC	
	$\chi^2_{\chi^2}$	$pvalue$	$\chi^2_{\chi^2}$	$pvalue$	$\chi^2_{\chi^2}$	$pvalue$	$\chi^2_{\chi^2}$	$pvalue$
Escalas do Planck	4.329	0	1.060	0.052	1.021	0.312	0.992	0.585
Escalas do WMAP	1.562	0	1.092	0.059	1.083	0.298	1.055	0.171
Largas Escalas	1.150	0.266	1.292	0.138	0.919	0.338	0.986	0.485

Tabela 5.2: χ^2 e $pvalue$ obtidos dos MVs calculados a partir das *pipelines* do satélite Planck do ano de 2018

6 CONCLUSÃO

Com base no algoritmo desenvolvido em C, neste trabalho pudemos analisar as hipóteses de simetria do modelo padrão. Em comparação com trabalhos anteriores, entendemos melhor a sensibilidade do teste realizado e apontamos possíveis desvios de gaussianidade e isotropia estatística na *pipeline* Commander (2018) do satélite Planck. Futuramente, vamos estender esse trabalho para incluir também análises com os FVs.

Analizando os mapas com modulações de temperatura, pudemos entender melhor o comportamento dos MVs e FVs. O principal foco dessa parte, foi entender melhor a relação entre uma anisotropia de temperatura e a direção do céu que apontam esses vetores. Com essas análises, conseguimos interpretar o cold spot como um degrau no espaço de temperatura gerando um comportamento de uma função sinc dos MVs.

Por fim, em uma possível continuação dos testes, vamos estender todas as análises realizadas aqui também para mapas com máscara e com a inclusão de ruídos anisotrópicos. Além disso, vamos combinar os MVs de diferentes multipolos afim de ver o impacto dessa combinação nos testes nulos de χ^2 e também analisar a correlação dos vetores entre diferentes momentos de multipolo. Nesses casos, a análise dos FVs se torna ainda mais importante.

Esses testes em pequenas escalas cosmológicas só foram possíveis devido aos diversos avanços nas técnicas numéricas utilizadas para determinar os MVs. Permitindo dessa forma, a extração dos MVs em um grande número de simulações. Todas essas análises demonstraram a utilidade dos MVs e FVs para detectar os possíveis desvios das hipóteses assumidas pelo modelo padrão no contexto da CMB.

REFERÊNCIAS

- [1] D.W. Hogg, D.J. Eisenstein, M.R. Blanton, N.A. Bahcall, J. Brinkmann, J.E. Gunn et al., *Cosmic homogeneity demonstrated with luminous red galaxies, The Astrophysical Journal* **624** (2005) 54.
- [2] M.I. Scrimgeour, T. Davis, C. Blake, J.B. James, G.B. Poole, L. Staveley-Smith et al., *The WiggleZ dark energy survey: the transition to large-scale cosmic homogeneity, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **425** (2012) 116.
- [3] P. Sarkar, S. Majumdar, B. Pandey, A. Kedia and S. Sarkar, *The many scales to cosmic homogeneity: Use of multiple tracers from the sdss*, 2016.
- [4] P. Ntelis, J.-C. Hamilton, J.-M.L. Goff, E. Burtin, P. Laurent, J. Rich et al., *Exploring cosmic homogeneity with the boss dr12 galaxy sample, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2017** (2017) .
- [5] R. Durrer, *The Cosmic Microwave Background*, Cambridge University Press (2008), 10.1017/CBO9780511817205.
- [6] R.A. Alpher and R. Herman, *Evolution of the universe, Nature* **162** (1948) 774.
- [7] A.A. Penzias and R.W. Wilson, *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s., apj* **142** (1965) 419.
- [8] D.J. Fixsen, E.S. Cheng, J.M. Gales, J.C. Mather, R.A. Shafer and E.L. Wright, *The cosmic microwave background spectrum from the full COBE FIRAS data set, The Astrophysical Journal* **473** (1996) 576.
- [9] G.F. Smoot, C.L. Bennett, A. Kogut, E.L. Wright, J. Aymon, N.W. Boggess et al., *Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer First-Year Maps, apjl* **396** (1992) L1.
- [10] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2005), 10.1017/CBO9780511790553.
- [11] D. Marinucci, *Testing for non-gaussianity on cosmic microwave background radiation: A review, Statistical Science* **19** (2004) 294.
- [12] P.A.R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela et al., *Planck2013 results. xxiv. constraints on primordial non-gaussianity, Astronomy amp; Astrophysics* **571** (2014) A24.

- [13] E. Komatsu, A. Kogut, M.R. Nolta, C.L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw et al., *First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Tests of gaussianity*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **148** (2003) 119–134.
- [14] E. Komatsu, J. Dunkley, M.R. Nolta, C.L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw et al., *Five-year wilkinson microwave anisotropy probe observations: Cosmological interpretation*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **180** (2009) 330–376.
- [15] Curto, A., Macías-Pérez, J. F., Martínez-González, E., Barreiro, R. B., Santos, D., Hansen, F. K. et al., *Constraints on the non-linear coupling parameter fnl with archeops data*, *AA* **486** (2008) 383.
- [16] C.P. Novaes, A. Bernui, G.A. Marques and I.S. Ferreira, *Local analyses of planckmaps with minkowski functionals*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **461** (2016) 1363–1373.
- [17] E. Martínez-González, J.E. Gallegos, F. Argüeso, L. Cayón and J.L. Sanz, *The performance of spherical wavelets to detect non-gaussianity in the cosmic microwave background sky*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **336** (2002) 22–32.
- [18] C. Räth, G.E. Morfill, G. Rossmanith, A.J. Banday and K.M. Górski, *Model-independent test for scale-dependent non-gaussianities in the cosmic microwave background*, *Physical Review Letters* **102** (2009) .
- [19] C. Räth, A.J. Banday, G. Rossmanith, H. Modest, R. Sütterlin, K.M. Górski et al., *Scale-dependent non-Gaussianities in the WMAP data as identified by using surrogates and scaling indices*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **415** (2011) 2205.
- [20] A. Bernui and M.J. Rebouças, *Mapping possible non-gaussianity in theplanckmaps*, *Astronomy and Astrophysics* **573** (2015) A114.
- [21] A. Aliaga, E. Martínez-González, L. Cayon, F. Argüeso, J. Sanz, R. Barreiro et al., *Tests of gaussianity*, *New Astronomy Reviews* **47** (2003) 907.
- [22] P.A.R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela et al., *Planck results. XXIII. isotropy and statistics of the CMB*, *Astronomy & Astrophysics* **571** (2014) A23.
- [23] P.A.R. Ade, N. Aghanim, Y. Akrami, P.K. Aluri, M. Arnaud, M. Ashdown et al., *Planck 2015 results*, *Astronomy & Astrophysics* **594** (2016) A16.
- [24] Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A.J. Banday et al., *Planck 2018 results*, *Astronomy & Astrophysics* **641** (2020) A7.

- [25] C.J. Copi, D. Huterer and G.D. Starkman, *Multipole vectors: A new representation of the CMB sky and evidence for statistical anisotropy or non-gaussianity at $2 \leq l \leq 8$* , *Physical Review D* **70** (2004) .
- [26] J.R. Weeks, *Maxwell's multipole vectors and the cmb*, 2004.
- [27] J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. 1 of *Cambridge Library Collection - Physical Sciences*, Cambridge University Press (2010), 10.1017/CBO9780511709333.
- [28] M.R. Dennis, *Canonical representation of spherical functions: Sylvester's theorem, maxwell's multipoles and majorana's sphere*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **37** (2004) 9487.
- [29] R.C. Helling, P. Schupp and T. Tesileanu, *CMB statistical anisotropy, multipole vectors, and the influence of the dipole*, *Physical Review D* **74** (2006) .
- [30] E. Bogomolny, O. Bohigas and P. Leboeuf, *Distribution of roots of random polynomials*, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 2726.
- [31] E. Bogomolny, O. Bohigas and P. Leboeuf, *Quantum chaotic dynamics and random polynomials*, *Journal of Statistical Physics* **85** (1996) 639.
- [32] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini et al., *Planck 2018 results*, *Astronomy & Astrophysics* **641** (2020) A6.
- [33] A.G. Riess, W. Yuan, L.M. Macri, D. Scolnic, D. Brout, S. Casertano et al., *A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with $1 \text{ km s}^{-1} \text{ mpc}^{-1}$ uncertainty from the hubble space telescope and the sh0es team*, *The Astrophysical Journal Letters* **934** (2022) L7.
- [34] P.K. Aluri et al., *Is the observable Universe consistent with the cosmological principle?*, *Class. Quant. Grav.* **40** (2023) 094001 [2207.05765].
- [35] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini et al., *Planck 2018 results*, *Astronomy & Astrophysics* **641** (2020) A6.
- [36] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, Amsterdam (2003).
- [37] P. Callin, *How to calculate the cmb spectrum*, 2006.
- [38] P. Peter and J.-P. Uzan, *Primordial cosmology*, Oxford graduate texts, Oxford Univ. Press, Oxford (2009), 019966515X.
- [39] J.A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press (1999).

- [40] L.R. Abramo and T.S. Pereira, *Testing gaussianity, homogeneity, and isotropy with the cosmic microwave background*, *Advances in Astronomy* **2010** (2010) 1.
- [41] R. Adam, P.A.R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont et al., *Planck 2015 results*, *Astronomy & Astrophysics* **594** (2016) A9.
- [42] R.J. Barlow, *Statistics: A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences (Manchester Physics Series)*, WileyBlackwell, reprint ed. (1989).
- [43] R.A. Oliveira, T.S. Pereira and M. Quartin, *CMB statistical isotropy confirmation at all scales using multipole vectors*, *Physics of the Dark Universe* **30** (2020) 100608.
- [44] M.R. Dennis, *Correlations between maxwell's multipoles for gaussian random functions on the sphere*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38** (2005) 1653.
- [45] R. Adam, P.A.R. Ade, N. Aghanim, Y. Akrami, M.I.R. Alves, F. Argüeso et al., *Planck 2015 results*, *Astronomy & Astrophysics* **594** (2016) A1.
- [46] P.A.R. Ade and et. all, *Planck 2013 results. XII. diffuse component separation*, *Astronomy & Astrophysics* **571** (2014) A12.
- [47] K.M. Gorski, E. Hivon, A.J. Banday, B.D. Wandelt, F.K. Hansen, M. Reinecke et al., *HEALPix: A framework for high-resolution discretization and fast analysis of data distributed on the sphere*, *The Astrophysical Journal* **622** (2005) 759.
- [48] A. Lewis, A. Challinor and A. Lasenby, *Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models*, *apj* **538** (2000) 473 [[astro-ph/9911177](#)].
- [49] T. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley (2003).
- [50] J. Hartlap, P. Simon and P. Schneider, *Why your model parameter confidences might be too optimistic. unbiased estimation of the inverse covariance matrix*, *Astronomy & Astrophysics* **464** (2006) 399.
- [51] K. Naidoo, A. Benoit-Lévy and O. Lahav, *Could multiple voids explain the cosmic microwave background Cold Spot anomaly?*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* **459** (2016) L71.
- [52] M. Farhang and S.M.S. Movahed, *Cmb cold spot in the planck light*, *The Astrophysical Journal* **906** (2021) 41.
- [53] and Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A.J. Banday et al., *Planck 2018 results*, *Astronomy & Astrophysics* **641** (2020) A4.

- [54] M. Pinkwart and D.J. Schwarz, *Multipole vectors of completely random microwave skies for $\ell < 50$* , *Physical Review D* **98** (2018) .
- [55] M. Minkov, M. Pinkwart and P. Schupp, *Entropy methods for CMB analysis of anisotropy and non-gaussianity*, *Physical Review D* **99** (2019) .

A CONSTRUÇÃO DO CÓDIGO EM C

Para obtenção dos MVs, a primeira parte do algoritmo é uma função que, dados os momentos de multipolo $a_{\ell,m}$, retorna os coeficientes de um polinômio de ordem ℓ . Utilizando o HEALPix, um mapa é representado por uma lista de $a_{\ell,m}$ ordenada da seguinte forma

$$\{a_{00}, a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{\ell_{\max},0}, a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{\ell_{\max},\ell_{\max}}\},$$

nela a posição de cada momento de multipolo p_{index} é identificada pela relação

$$p_{\text{index}} = \frac{m(2\ell_{\max} + 1 - m)}{2} + \ell. \quad (\text{A.1})$$

Dessa forma, é convencionado a se trabalhar com o intervalo $0 \leq m \leq \ell$, uma vez que ele está relacionado com o outro intervalo $-\ell \leq m \leq -1$ via condição de realidade ($a_{\ell,m}^* = (-1)^m a_{\ell,-m}$). Portanto, reescrevemos o polinômio

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sqrt{\binom{2\ell}{\ell+m}} a_{\ell,m} z^{\ell+m} \\ &= \sqrt{\binom{2\ell}{\ell}} a_{\ell,0} z^\ell + \sum_{m=-\ell}^{-1} \sqrt{\binom{2\ell}{\ell+m}} a_{\ell,m} z^{\ell+m} + \sum_{m=1}^{\ell} \sqrt{\binom{2\ell}{\ell+m}} a_{\ell,m} z^{\ell+m} \\ &= \sqrt{\binom{2\ell}{\ell}} a_{\ell,0} z^\ell + \sum_{m=1}^{\ell} \sqrt{\binom{2\ell}{\ell-m}} a_{\ell,-m} z^{\ell-m} + \sum_{m=1}^{\ell} \sqrt{\binom{2\ell}{\ell+m}} a_{\ell,m} z^{\ell+m} \\ &= \sqrt{\binom{2\ell}{\ell}} a_{\ell,0} z^\ell + \sum_{m=1}^{\ell} \sqrt{\binom{2\ell}{\ell+m}} [(-1)^m a_{\ell,m}^* z^{\ell-m} + a_{\ell,m} z^{\ell+m}] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde foi utilizado a propriedade

$$\sqrt{\binom{2\ell}{\ell+m}} = \frac{2\ell!}{(\ell-m)! (\ell+m)!} = \sqrt{\binom{2\ell}{\ell-m}} \quad (\text{A.3})$$

Uma vez que, para valores de ℓ elevados e m pequenos, o resultado de tal binômio se torna muito grande, foi preciso trabalhar com as variáveis da biblioteca Gnu Multiple Precision (GMP) nesse trecho do código.

```
void
pol_coef (int l, mpf_t real_al[], mpf_t imag_al[], mpf_t
          real_coef[], mpf_t imag_coef[])
```

```

{
    mpz_t int_binom;
    mpf_t float_binom, binom_root, negativ_coef;
    int p_index;

    // Iniciando as variaveis
    mpz_inits (int_binom, NULL);
    mpf_inits (float_binom, binom_root, negativ_coef, NULL);
    mpf_inits (real_coef[l], imag_coef[l], NULL);

    // Calculo do termo m=0
    mpz_bin_uiui (int_binom, (2 * l), 1); // Calculo do binomio
    mpf_set_z (float_binom, int_binom); // Conversao para float
    mpf_sqrt (binom_root, float_binom); // Calculo da raiz
    mpf_mul (real_coef[l], binom_root, real_al[l]);
    mpf_mul (imag_coef[l], binom_root, imag_al[l]);

    // Calculo dos demais termos
    for (int m = 1; m <= l; m++)
    {
        // Iniciando as variaveis
        mpf_inits (real_coef[l - m], imag_coef[l - m], real_coef[l + m],
                   imag_coef[l + m], NULL);

        p_index = ((m * ((2 * LMAX) + 1 - m)) / 2) + 1; // Posicao na
        lista

        mpz_bin_uiui (int_binom, (2 * l), (m + 1));
        mpf_set_z (float_binom, int_binom);
        mpf_sqrt (binom_root, float_binom);

        mpf_mul (real_coef[l - m], binom_root, real_al[index]);
        mpf_set_si (negativ_coef, pow(-1, m));
        mpf_mul (coef_real[l - m], real_coef[l - m], negativ_coef);

        mpf_mul (imag_coef[l - m], binom_root, imag_al[index]);
        mpf_set_si (negativ_coef, pow (-1, m) * (-1));
        mpf_mul (imag_coef[l - m], imag_coef[l - m], coef_negativ);

        mpf_mul (real_coef[l + m], binom_root, real_al[index]);
        mpf_mul (imag_coef[l + m], binom_root, imag_al[index]);
    }
}

```

```

    }

// Liberando as variaveis
mpz_clears (int_binom, NULL);
mpf_clears (float_binom, binom_root, NULL);
}

```

Com as componentes, podemos utilizar o algoritmo secular da biblioteca MPSolve e construir uma função que retorna as raízes do polinômio.

```

void
pol_roots (int l, mpf_t real_coef[], mpf_t imag_coef[], double
           *real_root, double *imag_root)
{
    mpq_t real_rat_coef[(2 * l) + 1], imag_rat_coef[(2 * l) + 1];

//Convertendo float para racional
for (int i = 0; i < (2 * l) + 1; i++)
{
    mpq_inits (real_rat_coef[i], imag_rat_coef[i], NULL);
    mpq_set_f (real_rat_coef[i], real_coef[i]);
    mpq_set_f (imag_rat_coef[i], imag_coef[i]);
}

mps_monomial_poly *p;
mps_context *s;
cplx_t *results = cplx_valloc (2 * l);

//Preparacao do ambiente
s = mps_context_new();
p = mps_monomial_poly_new(s, 2 * l);
mps_context_select_algorithm(s, MPS_ALGORITHM_SECULAR_GA);

for (int i = 0; i < ((2 * l) + 1); i++)
{
    mps_monomial_poly_set_coefficient_q (s, p, i, real_rat_coef[i],
                                         imag_rat_coef[i]);
}

//Encontrando as raizes do polinomio
mps_context_set_input_poly (s, MPS_POLYNOMIAL (p));
mps_mpsolve (s);

```

```

mps_context_get_roots_d (s, &results, NULL);

for (int i = 0; i < (2 * l); i++)
{
    real_root[i] = cplx_Re (results[i]);
    imag_root[i] = cplx_Im (results[i]);
}

// Liberando as variaveis
for (int i = 0; i < ((2 * l) + 1); i++)
{
    mpq_clears (real_rat_coef[i], imag_rat_coef[i], NULL)
}

mps_polynomial_free (s, MPS_POLYNOMIAL (p));
mps_context_free (s);
cplx_vfree (results);
}

```

Encontradas as raízes, obtemos as coordenadas (θ, ϕ) do MVs com base na projeção estereográfica

```

void
pol_coord (int l, double real_root[], double imag_root[], double
           *theta, double *phi)
{
    double R[2 * l];
    double complex z[2 * l];

    for (int i = 0; i < (2 * l); i++)
    {
        z[i] = real_root[i] + (imag_root[i] * I);
        R[i] = cabs (z[i]);
        phi[i] = carg (z[i]);
        theta[i] = 2 * atan (1 / R[i]);
    }
}

```

Por fim, com os MVs, obtemos os FVs por meio de um algoritmo minimizador de funções da biblioteca NLOpt

```

typedef struct _FrechetData
{

```

```

int l;
double * restrict x;
double * restrict y;
double * restrict z;
} FrechetData;

#define ACOS(ab) acos (((ab) > 1.0) ? 1.0 : (((ab) < -1.0) ? -1.0 :
(ab)))

double
frechet_pol_min (unsigned n, const double *x, double *grad, void
*my_func_data)
{
    FrechetData *fd = (FrechetData *) my_func_data;
    const int twol = 2 * fd->l;
    double frechet_mean = 0.0;
    double x_v, y_v, z_v;
    int i;

    {
        const double theta = x[0];
        const double phi = x[1];

        x_v = sin(theta) * cos(phi);
        y_v = sin(theta) * sin(phi);
        z_v = cos(theta);

        for (i = 0; i < twol; i++)
        {
            const double ab = (x_v * fd->x[i]) + (y_v * fd->y[i]) + (z_v *
fd->z[i]);
            const double acos_ab = ACOS (ab);
            frechet_mean += acos_ab * acos_ab;
        }
    }

    if (grad != NULL)
    {
        const double dxdtheta = cos(theta) * cos(phi);
        const double dydtheta = cos(theta) * sin(phi);
        const double dzdtheta = - sin(theta);
    }
}

```

```

const double dxdphi = - sin(theta) * sin(phi);
const double dydphi = + sin(theta) * cos(phi);

grad[0] = 0.0;
grad[1] = 0.0;

for (i = 0; i < twol; i++)
{
    const double ab = (x_v * fd->x[i]) + (y_v * fd->y[i]) + (z_v *
        fd->z[i]);
    const double acos_ab = ACOS (ab);
    const double sqrt_1mab = sqrt (1.0 - ab * ab);

    grad[0] -= 2.0 * acos_ab * (dxdttheta * fd->x[i] + dydtheta *
        fd->y[i] + dzdtheta * fd->z[i]) / sqrt_1mab;
    grad[1] -= 2.0 * acos_ab * (dxdphi * fd->x[i] + dydphi *
        fd->y[i]) / sqrt_1mab;
}

return frechet_mean;
}

void
frechet_pol (int l, double * restrict theta, double * restrict phi,
    double *frechet_vec_theta, double *frechet_vec_phi)
{
    const int twol = 2 * l;
    double x[2 * l], y[2 * l], z[2 * l], f;
    int i;
    FrechetData fd = {l, x, y, z};

    *frechet_vec_theta = 0.0;
    *frechet_vec_phi = 0.0;

    for (i = 0; i < twol; i++)
    {
        x[i] = sin(theta[i]) * cos(phi[i]);
        y[i] = sin(theta[i]) * sin(phi[i]);
        z[i] = cos(theta[i]);
    }
}

```

```

{
    double lb[2] = {0, 0};
    double ub[2] = {M_PI, 2.0 * M_PI};
    double s[2] = {0.0, 0.0};
    double min_f = 1.0e300;
    int ntheta = 8;
    int nphi = 8;

    nlopt_opt opt;
    opt = nlopt_create (NLOPT_LN_NELDERMEAD, 2);

    nlopt_set_lower_bounds (opt, lb);
    nlopt_set_upper_bounds (opt, ub);
    nlopt_set_min_objective (opt, &frechet_pol_min, &fd);
    nlopt_set_xtol_rel(opt, 1.0e-10);

    for (i = 0; i <= ntheta; i++)
    {
        int j;
        s[0] = 0.0;

        for (j = 0; j <= nphi; j++)
        {
            s[0] = 1.0 * M_PI / ((ntheta) + 1.0) * (i + 1.0);
            s[1] = 2.0 * M_PI / ((nphi) + 1.0) * (j + 1.0);

            if (nlopt_optimize(opt, s, &f) < 0)
            {
                printf("nlopt failed!\n");
            }
            else
            {
                if (f < min_f)
                {
                    min_f = f;

                    *frechet_vec_theta = s[0];
                    *frechet_vec_phi = s[1];
                }
            }
        }
    }
}

```

```
    }
}

if (*frechet_vec_theta > (M_PI / 2))
{
    *frechet_vec_theta = M_PI - *frechet_vec_theta;
    *frechet_vec_phi = M_PI + *frechet_vec_phi;

if (*frechet_vec_phi > (2 * M_PI))
{
    *frechet_vec_phi = *frechet_vec_phi - (2 * M_PI);
}
nlopt_destroy (opt);
}
}
```
