



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

SAID JOSÉ LANTIGUA LÓPEZ

**ASPECTOS GENERALES ACERCA DE LA ENERGÍA
OSCURA**

LONDRINA, PR 2020

SAID JOSÉ LANTIGUA LÓPEZ

**ASPECTOS GENERALES ACERCA DE LA ENERGÍA
OSCURA**

Trabajo final presentado en el Departamento de Física de la Universidad Estadual de Londrina, como requisito para la obtención del título de Magíster en Física. Linha de Pesquisa: Física Teórica.
Orientador: Prof. Dr. Manuel Simões Filho

LONDRINA, PR 2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Lantigua López, Said José.

Aspectos generales acerca de la Energía Oscura / Said José Lantigua López. -

Londrina, 2020.

200 f. : il.

Orientador: Manuel Simões Filho.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2020. Inclui bibliografia.

1. Física teórica - Teses. 2. Energía oscura - Teses. 3. Modelo Λ CDM - Teses. 4. Cosmologia - Teses. I. Simões Filho, Manuel. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.



Centro de Ciências Exatas
Mestrado em Física,
Ata de Defesa de Dissertação

Aos quinze dias do mês de junho do ano de 2020, na sala sala 10 do Centro de Ciências Exatas, desta Universidade, às 14:30 horas, reuniu-se a Banca Examinadora homologada pelo Programa de Pós-Graduação, composta pelos docentes Prof. Dr. Manuel Simões Filho (orientador), Prof. Dra. Christiane Frigério Martins e Prof. Dr. Kleber Eiti Yamaguti, na condição de membro remoto. A reunião teve por objetivo julgar o trabalho do estudante **Said José Lantigua Lopez**, sob o título "ASPECTOS GENERALES ACERCA DE LA ENERGIA OSCURA ". Os trabalhos foram abertos pelo Prof. Dr. Manuel Simões Filho. A seguir foi dada a palavra ao estudante para apresentação do trabalho. Cada examinador arguiu o mestrando com tempos iguais de arguição e resposta. Terminadas as arguições, procedeu-se o julgamento do trabalho, sendo que a Profa. Dra. Christiane Frigério Martins e Prof. Dr. Kleber Eiti Yamaguti, (membros remotos), enviaram simultaneamente o formulário de avaliação o qual foi impresso e anexado à presente ata. A Banca Examinadora concluiu pela *aprovação*.....(aprovação ou reprovação) do trabalho. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos demais membros da Banca Examinadora.

O estudante deverá reformular seu trabalho no prazo de dias: () SIM NÃO

Se houver alteração no título do trabalho, informar o novo título abaixo:

OBS.: Este documento não deve conter rasuras ou corretivo e deve ser preenchido de forma legível

Londrina, 15 de junho de 2020.

PRESIDENTE

Prof. Dr. Manuel Simões Filho UEL

TITULARES

Profa. Dra. Christiane Frigério Martins UEL

Prof. Dr. Kleber Eiti Yamaguti UTFPR

*Dedicatória: A Dios todo poderoso, a mi querida familia
y amigos.*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios todo poderoso por darle estas opciones a mi vida, a mi madre que me dio la vida y con amor me llevo a ser quien soy, a mis hermanos que me dan apoyo, a mi tía que lucho siempre con nosotros, a mis mascotas que dan felicidad y a los amigos y compañeros de lucha.

*"The first principle is that you must not fool yourself and
you are the easiest person to fool."
Richard Phillips Feynman.*

LANTIGUA LÓPEZ, Said José. **ASPECTOS GENERALES ACERCA DE LA ENERGÍA OSCURA**. Tesis (Maestría en Física). Universidade Estadual de Londrina, 2020.

RESUMEN

En la presente tesis se realizó una revisión de los principales modelos que ofrecen una explicación convincente acerca del fenómeno de la Energía Oscura responsable de generar una expansión celerada en un universo del tipo Friedmann-Robertson-Walker. En primer lugar, se revisó el modelo de la constante cosmológica. En segundo lugar, se exploraron los modelos que describen la Energía Oscura por medio de campos escalares dinámicos como el campo de la Quinta Esencia y el campo Fantasma. En tercer lugar, se revisaron los modelos que surgen a partir de la teoría de Cuerdas como lo son el campo Taquiónel, el gas de Chaplygin, el campo de la K-esencia y el campo Dilatón. Además, se determinó que en los modelos de campos, a pesar de los grandes aportes que ofrecen a la comprensión de nuestro universo, actualmente no existe ninguna medición experimental que demuestre que tales campos sean el verdadero origen de la Energía Oscura. Por lo tanto, ellos solamente representan un buen intento realizado en el campo de la cosmología moderna. En contraposición a esto, la plena coincidencia que existe entre el modelo Λ CDM con la hipótesis del Big Bang, permite explicar las observaciones de la radiación cósmica de fondo, así como la estructura a gran escala del universo y las observaciones de supernovas, demostrando que el modelo Λ CDM es el único modelo vigente que arroja un poco de claridad sobre la expansión acelerada de un universo FRW plano.

Palavras-clave: Cosmología. Cosmología de Cuerdas. Energía Oscura. Modelo Λ CDM.

LANTIGUA LÓPEZ, Said José. **GENERAL ASPECTS ABOUT DARK ENERGY**. Master's thesis in Physics. Universidade Estadual de Londrina, Brazil, 2020.

ABSTRACT

In the present thesis, a review of the main models that offer a convincing explanation about the Dark Energy phenomenon responsible for generating an accelerated expansion in a Friedmann-Robertson-Walker-type universe was carried out. Firstly, the model of the cosmological constant was reviewed. Secondly, the models that describe Dark Energy were explored by means of dynamic scalar fields such as the field of the Fifth Essence and the Phantom field. Thirdly, the models that emerge from the String Theory were reviewed such as the Tachyons field, the Chaplygin gas, the K-essence field and the Dilaton field. In addition, it was determined that the field models, despite the great contributions that they offer to the compression of our universe, currently do not exist any experimental measurement that demonstrates that such fields are the true origin of Dark Energy. Therefore, they only represent a good relational attempt in the field of modern cosmology. In contrast to this, the full coincidence that exists between the Λ CDM model and the Big Bang hypothesis, allows to explain the observations of the cosmic background radiation, as well as the large-scale structure of the universe and the observations of supernovae, making the Λ CDM model the only current model that throws some clarity on the accelerated expansion of a flat FRW universe.

Keywords: Cosmology. String Cosmology. Dark energy. Model Λ CDM.

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1.	Variedad M con los mapas solapados U_a y U_b que lo relacionan localmente con R^N y la representación de los cambios entre coordenadas inducidas (JANSENN, 2013).	15
2.2.	Ilustración de una variedad, el espacio tangente formado por el conjunto de todos los vectores en el punto $P \in T_p M$ y el fibrado tangente TM (JANSENN, 2013).	16
2.3.	Representación gráfica de los tensores de Riemann ($R^\lambda_{\rho\mu\nu}$) que mide la curvatura encerrada en el paralelograma y de Torsión ($T^\beta_{\mu\nu}$) mide hasta qué punto el paralelograma está cerrada (JANSENN, 2013).	56
4.1.	Geometría espacial del universo en función de la constante $\Omega = 1$ que corresponde a un universo cerrado, $\Omega < 1$ a uno abierto y $\Omega = 0$ a uno plano (SÁNCHEZ, 2015).	72
4.2.	Representación esquemática de la transición entre el universo dominado por radiación a uno dominado por materia, donde t_{eq} es el punto donde las curvas sólida y punteadas se intersectan (LIDDLE, 2015).	84
5.1.	Curvas teóricas y experimentales de la distancia de luminosidad $\log_{10}(H_0 d_L)$ con respecto al corrimiento al rojo z para una cosmología plana, por medio del conjunto de datos ofrecidos por RIESS et al. (1998), COPELAND, SAMI e TSUJIKAWA (2006).	91
5.2.	Evolución de las densidades de energías de Materia Oscura fría, radiación y Energía Oscura respectivamente (NODELSON, 2003).	92
5.3.	Decaimiento del vacío en dos fantasmas (ϕ) y dos fotones (γ) por medio de la interacción con el gravitones (g) (JAMES; SANGYONG; GUY, 2004).	105

ÍNDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN	12
2	REVISIÓN DE LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA DIFE- RENCIAL	14
2.1.	Variedades y Tensores	14
2.1.1.	Variedades diferenciables	14
2.1.2.	Vectores y Álgebra vectorial en variedades	14
2.1.2.1.	Derivada Covariante.	19
2.1.3.	Tensores Álgebra tensorial en variedades	23
2.1.4.	Formas	26
2.1.4.0.1.	Producto Exterior	26
2.1.4.1.	Formas Antisimétricas	27
2.1.4.2.	p-Vectores	28
2.1.4.3.	Contracción	28
2.1.4.4.	Símbolo de Levi-Civita, la deltas de Kronecker generalizada y Formas de volumen	29
2.1.4.5.	Dual de Hodge	31
2.1.4.6.	Formas Diferenciales	31
2.1.4.7.	Diferencial Exterior	32
2.1.5.	Generalización de la conexión (Conexión de Koszul)	34
2.1.6.	Derivada covariante de Tensores y Formas	35
2.1.6.1.	Operador de Torsión	36
2.1.7.	Derivada exterior de Vectores	37
2.1.8.	Deducción de la ecuación estructura de Cartan	41
2.1.9.	Derivada covariante exterior	43
2.1.10.	Derivada de Lie y vectores de Killing	47
2.1.11.	Integración de formas y teoremas	52
2.1.12.	Curvatura y el tensor de Riemann	55
2.1.13.	Geodésicas afín y métrica con conexión generalizada	60
3	FUNDAMENTOS DE LA RELATIVIDAD GENERAL	64
3.1.	Postulados	64
3.1.1.	Primer postulado	64
3.1.2.	Segundo postulado	65
3.1.3.	Tercer postulado	65
4	COSMOLOGÍA	67

4.1.	Modelo estándar de la cosmología	67
4.1.1.	Principio cosmológico	67
4.1.2.	La métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)	67
4.1.3.	Tensor de energía-momento FRW y su relación con el tensor de Einstein	73
4.1.4.	Distancia y horizonte cosmológico	78
4.1.5.	Universo dominado por materia	81
4.1.6.	Universo dominado por radiación	82
5	ENERGÍA OSCURA	85
5.1.	Evidencias físicas de la Energía Oscura	85
5.1.1.	La Constante Cosmológica	93
5.1.2.	Modelos de energía oscura con campos escalares	95
5.1.3.	Modelo del Campo de la Quinta Esencia	99
5.1.4.	Modelo del Campo Fantasma	102
5.1.5.	Modelo del Campo Taquión	104
5.1.6.	Modelo del gas de Chaplygin	107
5.1.7.	Campo de la K-esencia y del Dilatón	111
5.1.7.1.	Modelo del Campo de la K-esencia	112
5.1.7.2.	Modelo del Campo de la Dilatón	114
6	CONCLUSIÓN	118
	BIBLIOGRAFÍA	120

1 INTRODUCCIÓN

Actualmente, la base teórica más sólida que tenemos para entender la dinámica y los procesos que ocurren en nuestro universo a grandes escalas es la Teoría de la Relatividad General propuesta por Einstein en 1915 (JANSENN, 2013). Es una teoría clásica de campos donde la métrica es el ente dinámico que está relacionada intrínsecamente con las distribuciones de materia y energía a través de las famosas ecuaciones de campo de Einstein.

A partir de ellas se deducen las llamadas ecuaciones de Friedmann, con las que se plantea el modelo estándar de la cosmología moderna fundamentado en el principio cosmológico, que establece que el universo a grandes escalas ($100Mpc$) es homogéneo e isótropo (GRON; SIGBJORN, 2007). Dicho modelo se apoya en el descubrimiento de Edwin Hubble (1929) de que el universo no es estático, lo que constituye la evidencia observacional más sólida.

No obstante, con el advenimiento de nuevos descubrimientos en el ámbito de la cosmología se pudo demostrar que el universo actual se encuentra en una fase de expansión acelerada tardía (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006). Las evidencias fueron obtenidas en el año 1998 a partir de las observaciones de las Supernovas Tipo IA realizadas por dos grupos de investigación High-Z Supernova Search Team y Supernova Cosmology 18 Project (TONRY et al., 2003).

Dentro del marco del modelo estándar de la cosmología, no existe ninguna distribución de materia y radiación capaz de producir tal aceleración en el universo. Este comportamiento, carente de explicación en dicho modelo, brinda indicios de la existencia de un componente con características muy peculiares al cual se le llama Energía Oscura (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006). Debido a esta inconsistencia en el modelo estándar, se ha optado por buscar una teoría más general y/o modificada que pueda describir satisfactoriamente este fenómeno observado, que la interpretación de la Relatividad General de Einstein no puede explicar.

Uno de los intentos por solucionar el problema de la energía oscura fue introducir una constante cosmológica en las ecuaciones de campo. De hecho, antes de que Hubble realizara su descubrimiento, Einstein había introducido esta constante en su modelo de universo estático (GRON; SIGBJORN, 2007; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006; JANSENN, 2013; SÁNCHEZ, 2015). La introducción de una constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein equivale a sumar una energía de vacío con un tensor de energía impulso.

En el presente trabajo me propongo explorar los principales modelos cosmológicos que plantean una posible descripción física de la Energía Oscura. Para conseguirlo se elabora la presente tesis con la siguiente estructura: en el capítulo 2 se presenta una revisión de algunos fundamentos esenciales de Geometría Diferencial. En el capítulo 3 se presentan los fundamentos de la teoría de la Relatividad General. En el capítulo 4 se presentan los fundamentos esenciales

de la Cosmología, como las posibles geometrías que presenta nuestro universo teniendo en cuenta conceptos geométricos y cómo sería la distribución de materia, radiación, entre otros. En el capítulo 5 se presenta una revisión bibliográfica acerca de la evidencia física que sustentan la posible existencia de la Energía Oscura, es decir, aquello que es observado. Finalmente, se presentan los modelos más aceptados que predicen la existencia de la Energía Oscura, lo que concluye el presente trabajo.

2 REVISIÓN DE LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL

En este capítulo se introducen las herramientas necesarias para describir un espacio-tiempo curvo, en particular las propiedades algebraicas y geométricas presentadas en textos como SCHUTZ (1980), GRON e SIGBJORN (2007) y JANSENN (2013), que resultan imprescindibles para la comprensión de la Relatividad General, así como la Cosmología y consecuentemente de la Cosmología de Cuerdas. Teorías de las cuales surgen los modelos utilizados para intentar dar una explicación al fenómeno de la Energía Oscura que será abordado en capítulos posteriores.

2.1. Variedades y Tensores

2.1.1. Variedades diferenciables

De manera simple, una variedad diferenciable de dimensión $N \geq 0$ es un espacio topológico M (que suele suponerse Hausdorff y ANII) que, para cada uno de sus puntos existe una transformación ϕ que mapea una parte $U \subset M^N$ a R^N . Las coordenadas (no necesariamente cartesianas) en R^N inducen coordenadas locales x^μ en M^N a través de la transformación inversa ϕ^{-1} .

En este contexto, se define como *mapa* a una parte del espacio $U \in M^N$ equipado con un sistema de coordenadas.

Si dos mapas U_a y U_b se solapan en una región, las transformaciones inversas ϕ_a^{-1} y ϕ_b^{-1} inducen dos sistemas de coordenadas x^μ y y^α en los respectivos parches. En la región donde los parches se solapan, las transformaciones ϕ_a y ϕ_b generan sistemas de coordenadas inducidas en el que existe un cambio de coordenadas de un sistema al otro. De este modo las distintas versiones locales de R^N de la variedad están pegadas de manera continua. Un conjunto de mapas que tiene esta propiedad y además cubre todo la variedad es conocida como *atlas*, ver figura 1.

En general, no será posible cubrir una variedad entera con solo un mapa. R^N es un ejemplo trivial de una variedad que se puede cubrir con un solo mapa (en este caso la transformación ϕ es la unidad). Pero es imposible cubrir, por ejemplo, la esfera bidimensional S^2 con un solo mapa. Este es el famoso Problema de los Cartógrafos: no existe una proyección tal que la Tierra entera aparezca en un solo mapa plano.

2.1.2. Vectores y Álgebra vectorial en variedades

Supongamos que tenemos N coordenadas x^i de un punto P en el que existe un conjunto de N funciones campos escalares $y^\mu(x^i)$. Se dice que ella es una transformación general de

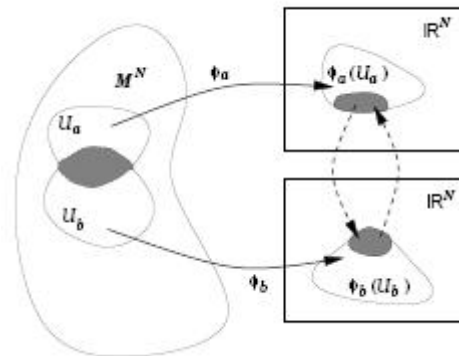


Figura 2.1 – Variedad M con los mapas solapados U_a y U_b que lo relacionan localmente con R^N y la representación de los cambios entre coordenadas inducidas (JANSENN, 2013).

coordenadas si es invertible, esto se expresa matemáticamente como

$$\det \left[\frac{\partial (y^1, y^2, \dots, y^N)}{\partial (x^1, x^2, \dots, x^N)} \right] \neq 0. \quad (2.1)$$

Que sean invertibles implica que a cada punto de R^N se le puede asignar un único valor de y^μ , cuyo valor se corresponde a un único punto de R^N .

Supongamos una variedad M que sea una superficie curva definida en R^3 , tomando una curva $\mathbf{r}(y^\mu)$ en esta variedad se puede definir un *vector tangente* a esa curva en un punto cualquiera $P \in M$, como

$$\mathbf{t}(P) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right)_P. \quad (2.2)$$

En cada punto P de la Variedad se puede definir un espacio tangente $T_P M^N$, que es isomorfo a R^N y que son distintos en cada punto de la variedad. La unión de todos los espacios tangentes de todos los puntos P_1, \dots, P_N, \dots de la variedad es conocido como *fibrado tangente* y denotado por TM , ver figura 2.2.

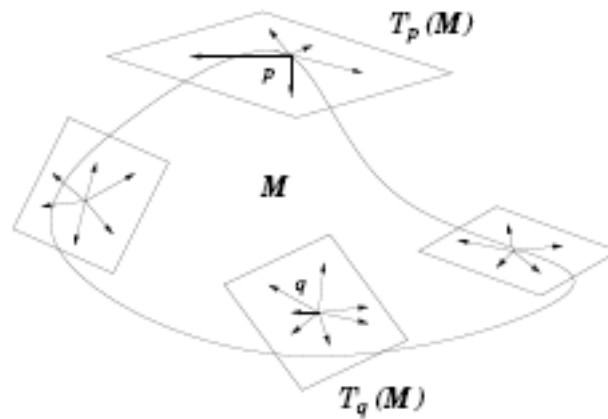


Figura 2.2 – Ilustración de una variedad, el espacio tangente formado por el conjunto de todos los vectores en el punto $P \in T_P M$ y el fibrado tangente TM (JANSENN, 2013).

Los vectores de la base de un sistema de coordenadas y^μ en M se definen como

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^\mu}, \quad (2.3)$$

estos vectores base son linealmente independientes, y el número de vectores base es igual al número de coordenadas si es igual a la dimensión de M . Las relaciones de transformación entre vectores base de un sistema de coordenadas y^μ para un sistema de coordenadas $y^{\mu'}$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\mu'} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^{\mu'}} \\ &= \frac{\partial y^\mu}{\partial y^{\mu'}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^\mu} \\ &= \frac{\partial y^\mu}{\partial y^{\mu'}} \mathbf{e}_\mu \\ &= \frac{\partial y^\mu}{\partial y^{\mu'}} \mathbf{e}_\mu. \end{aligned}$$

Por tanto, para cualquier vector arbitrario \mathbf{v} se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^{\mu'} \mathbf{e}_{\mu'} \\ &= v^\mu \mathbf{e}_\mu \\ &= v^\mu \frac{\partial y^{\mu'}}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_{\mu'} \end{aligned}$$

donde $M_{\mu}^{\mu'} = \partial y^{\mu'} / \partial x^{\mu}$ es la matriz de transformación entre los vectores de las bases curvilíneas \mathbf{e}_{μ} y $\mathbf{e}_{\mu'}$ respectivamente. Es fácil verificar que las componentes de los vectores se transforman mediante la relación

$$\begin{aligned} v^{\mu'} &= \frac{\partial y^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} v^{\mu} \\ &= M_{\mu}^{\mu'} v^{\mu} \end{aligned}$$

y por tal motivo se los denomina *vectores contravariantes*. De manera análoga, se pueden definir vectores de la base *dual* \mathbf{e}^{ν} que actúen en los vectores de la base \mathbf{e}_{μ} como

$$\mathbf{e}^{\nu} \cdot \mathbf{e}_{\mu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (2.4)$$

Donde δ_{μ}^{ν} es la *delta de Kronecker*, que se define por

$$\delta_{\mu}^{\nu} = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \neq \mu \\ 1 & \text{si } \nu = \mu \end{cases}$$

por ende, los vectores en esta base se expresan como $\mathbf{w} = w_{\nu} \mathbf{e}^{\nu}$ y por lo tanto su base y sus componentes se transforman según

$$\mathbf{e}^{\nu} = M_{\mu}^{\nu} \mathbf{e}^{\mu} \quad w_{\nu} = M_{\nu}^{\mu} w_{\mu}. \quad (2.5)$$

A partir de las funciones de coordenadas $\mathbf{r}(y^{\mu})$ diferenciables y continuas se pueden definir vectores continuos en una base genérica \mathbf{e}_{μ} que pertenezcan a $Tp(M)$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \\ &= \frac{\partial y^{\mu}}{\partial \beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^{\mu}} \\ &= \frac{\partial y^{\mu}}{\partial \beta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^{\mu}} \\ &= \frac{\partial y^{\mu}}{\partial \beta} \mathbf{e}_{\mu}. \end{aligned}$$

Tales vectores son denominados *vectores de campo*. De todo esto, se puede definir el vector diferencial de desplazamiento sobre una curva cualquiera como $d\mathbf{x}' = dx^{\mu'} \mathbf{e}_{\mu'}$ que representa el desplazamiento infinitesimal en la dirección μ y donde $\partial_{\mu} = \partial / \partial y^{\mu}$ es la derivada direccional a lo largo de una función de coordenadas respecto de la μ -ésima coordenada. Si M es una variedad

n -dimensional, en esta se produce n derivadas direccionales linealmente independientes que se transforman mediante

$$\partial_\mu = \frac{\partial y^{\mu'}}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^{\mu'}}, \quad (2.6)$$

lo que hace completamente válido definir la cantidad

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad (2.7)$$

como la base coodenada de M . Existe también una estructura importante que va a ser expuesta a continuación. Sean dos vectores de campo \mathbf{v} y \mathbf{w} , haciendo el producto de estos vectores se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{vw} &= v^\mu \mathbf{e}_\mu w^\nu \mathbf{e}_\nu \\ &= v^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} w^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \\ &= v^\mu \frac{\partial w^\nu}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} + v^\mu w^\nu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}. \end{aligned}$$

Haciendo ahora el producto entre \mathbf{w} y \mathbf{v}

$$\begin{aligned} \mathbf{wv} &= w^\nu \mathbf{e}_\nu v^\mu \mathbf{e}_\mu \\ &= w^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} v^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \\ &= w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} + w^\nu v^\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu}. \end{aligned}$$

Restando estas dos expresiones se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{vw} - \mathbf{wv} &= v^\mu \frac{\partial w^\nu}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} + v^\mu w^\nu \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} - \frac{\partial}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \\ &= \left(v^\mu \frac{\partial w^\nu}{\partial y^\mu} - w^\mu \frac{\partial v^\nu}{\partial y^\mu} \right) \mathbf{e}_\nu + v^\mu w^\nu [\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu], \end{aligned}$$

donde la expresión $[\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu] = c_{\mu\nu}^\rho \mathbf{e}_\rho$ es denominada *estructura de coeficientes*. Reescribiendo la expresión anterior se tiene que

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \{v^\mu \mathbf{e}_\mu(w^\nu) - w^\mu \mathbf{e}_\mu(v^\nu)\} \mathbf{e}_\nu + v^\mu w^\nu c_{\mu\nu}^\rho \mathbf{e}_\rho. \quad (2.8)$$

Por lo tanto de la estructura de coeficientes se puede definir lo siguiente:

$$[\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu] = \begin{cases} c_{\mu\nu}^\rho \mathbf{e}_\rho \neq 0 & \text{no es una base no-coordenada.} \\ c_{\mu\nu}^\rho \mathbf{e}_\rho = 0 & \text{es una base no-coordenada.} \end{cases}$$

Para el caso en el que la expresión anterior es nula, el conmutador $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ da como resultado

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \{v^\mu w_{,\mu}^\nu - w^\mu v_{,\mu}^\nu\} \mathbf{e}_\nu. \quad (2.9)$$

Donde se utilizó $w_{,\mu}^\nu = \partial w^\nu / \partial y^\mu$ que es una notación más compacta.

2.1.2.1. Derivada Covariante.

La diferencial de longitud se puede definir mediante el producto escalar de dos vectores diferenciales contravariante $d\mathbf{x}$ respectivamente,

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \\ &= dx^\mu \mathbf{e}_\mu \cdot dx^\nu \mathbf{e}_\nu \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} dy^\alpha \mathbf{e}_\mu \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} dy^\beta \mathbf{e}_\nu \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu dy^\alpha dy^\beta \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \delta_{\mu\nu} dy^\alpha dy^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta, \end{aligned}$$

donde la cantidad

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \delta_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

se define como métrica. Del producto escalar se puede ver que

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\beta &= \mathbf{e}_\alpha \\ g_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\beta \cdot \mathbf{e}_\beta &= \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \\ g_{\alpha\beta} \delta_\beta^\beta &= \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \\ g_{\alpha\beta} &= \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \end{aligned}$$

se puede ver que la métrica tiene dos índices libres que se transforma como

$$g_{\alpha\beta} = M_{\alpha}^{\delta} M_{\beta}^{\gamma} g_{\delta\gamma}, \quad (2.11)$$

y actúa como una cantidad que transforma vectores y componentes contravariantes en covariantes y viceversa.

$$v_{\alpha} = g_{\alpha\beta} v^{\beta}; \quad w^{\alpha} = g^{\alpha\beta} w_{\beta} \quad (2.12)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= v^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} \cdot w_{\rho} \mathbf{e}^{\rho} \\ &= v^{\mu} g_{\rho\nu} w^{\nu} \delta_{\mu}^{\rho} \\ &= g_{\mu\nu} v^{\mu} w^{\nu}. \end{aligned}$$

Llegados a este punto es importante profundizar acerca de las propiedades de los vectores de la base. Primero, si definimos una base de vectores como en la ecuación (A.20) que trasforma como un vector contravariante, entonces se tiene que tener especial cuidado al definir los vectores de la base dual ∂^{μ} . Para entender bien de lo que se está hablando, vamos a aplicar el operador ∂_{μ} a un campo escalar cualquier ϕ , que pertenece a un espacio n -dimensional en coordenadas curvilíneas x^{ν} para obtener

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial y^{\mu}} \\ &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \\ &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \\ &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\mu}} \partial_{\nu} \phi, \end{aligned}$$

donde se puede ver que transforma como un vector covariante bajo un cambio general de coordenadas, pero claramente las coordenadas no transforman como un vector bajo cambios generales de coordenadas, es decir, x_{ν} no es el dual de x^{ν} y por lo tanto $\partial / \partial y_{\mu}$ debe ser definido como

$$\partial^{\mu} \equiv g^{\mu\nu} \partial_{\nu}, \quad (2.13)$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\partial^\mu \phi &= g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial y^\nu} \\
&= g^{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y^\nu} \\
&= g^{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \partial^\nu \phi,
\end{aligned}$$

que transforma como un vector contravariante. En general los vectores no transforman bien bajo una transformación general de coordenadas debido a la localidad de tales transformaciones. Apliquemos este operador ∂_μ en las componentes de un vector contravariante v^ν para obtener

$$\begin{aligned}
\partial_\mu v^\nu &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \partial_\alpha \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} v^\beta \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \partial_\alpha v^\beta + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} v^\beta \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \\
&= M_\mu^\alpha M_\beta^\nu \partial_\alpha v^\beta + M_\mu^\alpha v^\beta \partial_\alpha M_\beta^\nu.
\end{aligned}$$

En la última expresión, el primer término cumple con las relaciones de transformación definidas para objetos covariantes y contravariantes, pero en el segundo término aparece la derivada de la matriz de transformación, lo que evidencia la localidad de la transformación de coordenadas en contraste con las transformaciones globales donde las entradas de la matriz son constantes.

¿Qué quiere decir todo esto? Nos dice que si tomamos la derivada de un campo vectorial, estamos comparando el valor del campo en un punto p con coordenadas x^μ , con el valor del campo en un punto q , infinitesimalmente cerca de p y con coordenadas $x^\mu + \delta x^\mu$. Pero debido al carácter local del cambio de coordenadas, la matriz M tiene un valor distinto en cada punto.

Matemáticamente hablando, se sabe que los vectores viven en el espacio tangente y no en la variedad. Si queremos comparar dos vectores en puntos diferentes p y q , estamos en realidad comparando dos objetos que viven en espacios vectoriales distintos, $T_p M$ y $T_q M$ respectivamente. Para solucionar este problema se tiene que comparar el campo vectorial $v^\mu(q)$ con un vector $v^\mu(q)_p$ que vive en el mismo espacio $T_q M$ pero que trae toda la información del vector $v^\mu(p)$ en $T_p M$. Al vector $v^\mu(q)_p$ se le denomina *transporte paralelo* de $v^\mu(p)$, que matemáticamente se define por

$$v^\mu(q)_p \equiv v^\mu(p) - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \delta x^\nu v^\rho, \quad (2.14)$$

donde $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ se le denomina como la *conexión afín* o simplemente *la conexión* y son el conjunto de N^3 funciones que viven en una variedad N -dimensional de coordenadas x^{μ} que define cómo cambia la componente μ del vector en la dirección ρ bajo el desplazamiento en la dirección ν .

Pero, ¿cómo se determina la conexión? Profundicemos en estos conceptos observando cómo cambian los vectores en coordenadas curvilíneas. Vectores de la base también cambian. Los vectores tangentes a la curva cambian punto a punto según la expresión

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y^{\mu}} &= \frac{\partial v^{\nu} \mathbf{e}_{\nu}}{\partial y^{\mu}} \\ &= \frac{\partial v^{\nu}}{\partial y^{\mu}} \mathbf{e}_{\nu} + v^{\nu} \frac{\partial \mathbf{e}_{\nu}}{\partial y^{\mu}} \\ &= \frac{\partial v^{\nu}}{\partial y^{\mu}} \mathbf{e}_{\nu} + v^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \mathbf{e}_{\rho} \\ &= \left(\frac{\partial v^{\rho}}{\partial y^{\mu}} + v^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \right) \mathbf{e}_{\rho},\end{aligned}$$

en la última igualdad, se puede ver la aparición de la conexión de Levi-Civita, que se define como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{k\rho} \left\{ \frac{\partial g^{\mu k}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g^{\nu k}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^k} \right\}, \quad (2.15)$$

que es la componente ρ de los vectores $\partial_{\mu} \mathbf{v}_{\nu}$ en la base \mathbf{e}_{ρ} , y la expresión

$$\nabla_{\mu} v^{\rho} = \frac{\partial v^{\rho}}{\partial y^{\mu}} + v^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \quad (2.16)$$

se define como *derivada covariante*. Para encontrar la relación de transformación de la conexión de *Levi – Civita* se tiene que partir de la derivada covariante dada por

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha} V^{\gamma} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\rho}} \nabla_{\mu} V^{\rho} \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\rho}} (\partial_{\mu} V^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} V^{\nu}) \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\rho}} \partial_{\mu} V^{\rho} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\rho}} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} V^{\nu}.\end{aligned}$$

Mediante la expresión

$$\begin{aligned}\partial_{\alpha} V^{\gamma} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\alpha}} \partial_{\mu} \left(\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\rho}} V^{\rho} \right) \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\rho}} \partial_{\mu} V^{\rho} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\alpha}} V^{\rho} \frac{\partial^2 y^{\gamma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}},\end{aligned}$$

se reescribe la expresión anterior como

$$\begin{aligned}\partial_\alpha V^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V^\beta &= \partial_\alpha V^\gamma - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} V^\rho \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\rho} + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V^\beta &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} V^\rho \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\rho},\end{aligned}$$

de la que se deduce finalmente la relación

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} V^\beta &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} V^\nu \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu - \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta},\end{aligned}$$

que son las relaciones de transformación de la conexión de *Levi – Civita*. La derivada covariante actúa por lo tanto como una parcial, pero suma un término de corrección, lineal en v^μ , debido al transporte paralelo del vector. Podemos generalizar el concepto de derivada covariante a lo largo de una dirección x^μ , a una derivada covariante a lo largo de una curva $x^\mu(\tau)$ definiendo como $\nabla_\gamma v^\mu = u^\rho \nabla_\rho v^\mu$, donde $u^\mu = dx^\mu(\tau)/d\tau$ es el vector tangente a la curva. Con esta expresión podemos decir que un vector v^μ es transportado paralelamente a lo largo de una curva $x^\mu(\tau)$ si $u^\rho \nabla_\rho v^\mu = 0$ a lo largo de toda la curva.

2.1.3. Tensores Álgebra tensorial en variedades

Siguiendo este esquema de sistemas de coordenadas locales y las relaciones de transformación, se puede definir que

- Los escalares y campos escalares (objetos que no poseen índices libres) y no se transforman bajo cambios en las coordenadas.
- Las diferenciales de los campos escalares y los vectores (objetos con un índice libre) se transforman bajo la aplicación de M_V^μ .
- La métrica (objetos con dos índices libres) transforma bajo la aplicación de dos relaciones de transformación.

Dicho de otro modo,

- Un objeto de orden cero es un escalar.
- Un objeto de orden uno es un vector.

- Un objeto de orden dos es un tensor de rango dos.

Donde estos objetos pueden ser construidos mediante el producto directo de vectores de un mismo plano tangente, es decir, como producto directo de vectores contravariantes o como producto directo de vectores covariantes o como producto directo de vectores contravariantes con covariantes cuyas expresiones matemáticas vienen dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{v}^1 \otimes \mathbf{v}^2 \cdots \otimes \mathbf{v}^N \\ &= v^{\mu_1} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v^{\mu_N} \mathbf{e}_{\mu_N} \\ &= T^{\mu_1 \cdots \mu_N} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\mu_N},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{w}_2 \cdots \otimes \mathbf{w}_M \\ &= w_{\mu_1} \mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes w_{\mu_M} \mathbf{e}^{\mu_M} \\ &= T_{\mu_1 \cdots \mu_M} \mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{\mu_M}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{v}^1 \otimes \mathbf{v}^2 \cdots \otimes \mathbf{v}^N \otimes \mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{w}_2 \cdots \otimes \mathbf{w}_M \\ &= v^{\mu_1} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v^{\mu_N} \mathbf{e}_{\mu_N} \otimes w_{\nu_1} \mathbf{e}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes w_{\nu_M} \mathbf{e}^{\nu_M} \\ &= v^{\mu_1} \cdots v^{\mu_N} w_{\nu_1} \cdots w_{\nu_M} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\mu_N} \otimes \mathbf{e}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{\nu_M} \\ &= T_{\nu_1 \cdots \nu_M}^{\mu_1 \cdots \mu_N} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\mu_N} \otimes \mathbf{e}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{\nu_M},\end{aligned}$$

donde las componentes se transforman como

$$T^{\rho_1 \cdots \rho_N} = M_{\mu_1}^{\rho_1} \cdots M_{\mu_N}^{\rho_N} T^{\mu_1 \cdots \mu_N}, \quad (2.17)$$

$$T_{\sigma_1 \cdots \sigma_M} = M_{\sigma_1}^{\nu_1} \cdots M_{\sigma_M}^{\nu_M} T_{\nu_1 \cdots \nu_M} \quad (2.18)$$

y

$$T_{\sigma_1 \cdots \sigma_M}^{\rho_1 \cdots \rho_N} = M_{\mu_1}^{\rho_1} \cdots M_{\mu_N}^{\rho_N} M_{\sigma_1}^{\nu_1} \cdots M_{\sigma_M}^{\nu_M} T_{\nu_1 \cdots \nu_M}^{\mu_1 \cdots \mu_N}, \quad (2.19)$$

los cuales se les define formalmente como tensores y pueden ser de orden $(0,0)$, $(N,0)$, $(0,M)$ o (N,M) , donde el orden de tales tensores se determina por el número de índices no repetidos (libres) en la expresión. Estos tensores pueden sumarse como sigue

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \pm \dots \pm \mathbf{B} &= A^{\mu_1 \dots \mu_N} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\mu_N} \pm \dots \pm B^{\mu_1 \dots \mu_N} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\mu_N} \\ &= (A^{\mu_1 \dots \mu_N} \pm \dots \pm B^{\mu_1 \dots \mu_N}) \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\mu_N},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \pm \dots \pm \mathbf{B} &= A_{\mu_1 \dots \mu_N} \mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{\mu_N} \pm \dots \pm B_{\mu_1 \dots \mu_N} \mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{\mu_N} \\ &= (A_{\mu_1 \dots \mu_N} \pm \dots \pm B_{\mu_1 \dots \mu_N}) \mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{\mu_N}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= A_{v_1 \dots v_M}^{\mu_1 \dots \mu_N} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\mu_N} \otimes \mathbf{e}^{v_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{v_M} \\ &\quad \pm B_{v_1 \dots v_M}^{\mu_1 \dots \mu_N} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\mu_N} \otimes \mathbf{e}^{v_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{v_M} \\ &= (A_{v_1 \dots v_M}^{\mu_1 \dots \mu_N} \pm B_{v_1 \dots v_M}^{\mu_1 \dots \mu_N}) \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\mu_N} \otimes \\ &\quad \otimes \mathbf{e}^{v_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{v_M},\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que un tensor no es más que un objeto matemático cuyo dominio son vectores. De la suma de tensores se puede ver que es un objeto multilineal, que en una notación más compacta y elegante se expresa como

$$\begin{aligned}A(\mathbf{v}_1, \dots, a\mathbf{v}_i + b\mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_N) &= aA(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_N) \\ &\quad + bA(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_N).\end{aligned}$$

También existen algunos que cumplen

$$A(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_N) = -A(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_N), \quad (2.20)$$

a estos tensores se los denomina *tensores alternos*. Esta propiedad se cumple solo para tensores puramente contravariantes y covariantes.

En este punto es necesario definir la derivada covariante para tensores $(N, 0)$, $(0, N)$ y (N, M) , cuyas expresiones son respectivamente

$$\nabla_{\mu} T^{v_1 \dots v_N} = \partial_{\mu} T^{v_1 \dots v_N} + \Gamma_{\mu\rho}^{v_1} T^{\rho \dots v_N} + \dots + \Gamma_{\mu\rho}^{v_N} T^{v_1 \dots \rho}, \quad (2.21)$$

$$\nabla_{\mu} T_{v_1 \dots v_N} = \partial_{\mu} T_{v_1 \dots v_N} + \Gamma_{\mu v_1}^{\rho} T_{\rho \dots v_N} + \dots + \Gamma_{\mu v_N}^{\rho} T_{v_1 \dots \rho} \quad (2.22)$$

y

$$\nabla_{\mu} T_{\sigma_1 \dots \sigma_M}^{\nu_1 \dots \nu_N} = \partial_{\mu} T_{\sigma_1 \dots \sigma_M}^{\nu_1 \dots \nu_N} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu_1} T_{\sigma_1 \dots \sigma_M}^{\rho \dots \nu_N} + \dots + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu_N} T_{\sigma_1 \dots \sigma_M}^{\nu_1 \dots \rho}. \quad (2.23)$$

Por último, dada una curva $x^{\rho}(\tau)$ en la variedad, entonces un tensor $T_{\sigma_1 \dots \sigma_M}^{\nu_1 \dots \nu_N}$ es transportado paralelo a lo largo de la curva, si

$$u^{\rho} \nabla_{\rho} T_{\sigma_1 \dots \sigma_M}^{\nu_1 \dots \nu_N} = 0, \quad (2.24)$$

donde $u^{\rho} = dx^{\rho}/d\tau$ es el vector tangente a la curva x^{ρ} .

Mediante la derivada covariante se puede definir la divergencia de un tensor como

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu_1 \dots \nu_n} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} [\sqrt{|g|} T^{\mu\nu_1 \dots \nu_n}]. \quad (2.25)$$

2.1.4. Formas

Matemáticamente, una p -forma se puede definir como

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p} \boldsymbol{\omega}^{[\mu_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mu_p]}, \quad (2.26)$$

es decir, un tensor covariante multilineal y alterno, donde

$$\boldsymbol{\omega}^{[\mu_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mu_p]} = \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^p (-1)^{\pi(i)} \boldsymbol{\omega}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mu_p}, \quad (2.27)$$

es una combinación lineal de bases tensoriales antisimétricas que cumple

$$\pi(i) = \begin{cases} 0 & \text{si la permutación es par} \\ 1 & \text{si la permutación es impar.} \end{cases}$$

Se define como cero 0-forma es dada por un número puro $\boldsymbol{\alpha} = \alpha$ o un campo escalar.

2.1.4.0.1. Producto Exterior

El producto de tensores antisimétricos denotado por \wedge es conocido comúnmente como producto exterior y se define por

$$\boldsymbol{\omega}^{\mu} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\nu} = -\boldsymbol{\omega}^{\nu} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\mu}. \quad (2.28)$$

Por lo tanto, el producto entre una p -forma y una q -forma es dado por

$$\omega^{[\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_p]} \wedge \omega^{[\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_q]} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \omega^{[\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_p \otimes \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_q]}.$$

Entonces la base p -forma se expresa a través del producto exterior como

$$\omega^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\mu_p} = p! \omega^{[\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_p]}. \quad (2.29)$$

Se puede escribir una p -forma como producto exterior de un conjunto de p 1-formas mediante la expresión

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p} \omega^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\mu_p}, \quad (2.30)$$

que cumple que

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha, \quad (2.31)$$

y a su vez cumple con las propiedades de linealidad y asociatividad definidas por

$$(a\alpha + b\beta) \wedge \gamma = a(\alpha \wedge \gamma) + b(\beta \wedge \gamma) \quad (2.32)$$

y

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad (2.33)$$

respectivamente.

2.1.4.1. Formas Antisimétricas

Cuando nos referimos a la antisimetría de las formas, nos referimos además a la antisimetría respecto de sus índices, por lo tanto las componentes de una p -forma cumple que

$$\alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} = p! \alpha_{[\mu_1 \dots \mu_p]}, \quad (2.34)$$

mientras que las componentes del producto cumple que

$$(\alpha \wedge \beta)_{\mu_1 \dots \mu_p \mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \alpha_{[\mu_1 \dots \mu_p} \beta_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q]}. \quad (2.35)$$

Gracias a esta última expresión se pueden escribir las componentes de un (0,2) tensor o 2-forma como

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2}T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}T_{\nu\mu} + \frac{1}{2}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_{\nu\mu} \\
 &= \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \\
 &= T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]},
 \end{aligned}$$

donde el primer término de la derecha es la parte simétrica del tensor y la segunda es la parte antisimétrica.

2.1.4.2. p-Vectores

Con este producto exterior se puede definir también p -vectores a partir de vectores contravariantes, dados por

$$\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (2.36)$$

que son definidos como 1-vector y a la cantidad

$$\mathbf{A} = \frac{1}{p!} A^{\mu_1 \dots \mu_p} \mathbf{e}_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{\mu_p}, \quad (2.37)$$

se le define como p -vector, cuyas componentes son

$$(\mathbf{A}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{A}_p)^{\mu_1 \dots \mu_p} = p! A_1^{\mu_1} A_2^{\mu_2} \dots A_p^{\mu_p}, \quad (2.38)$$

con su expresión correspondiente en el lenguaje de formas, dada por

$$(\mathbf{A}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{A}^p)_{\mu_1 \dots \mu_p} = p! A_{[\mu_1}^1 A_{\mu_2}^2 \dots A_{\mu_p]}^p. \quad (2.39)$$

2.1.4.3. Contracción

Dada una p -forma y un q -vector en un espacio n -dimensional con $p \geq q$, se define la contracción de $\boldsymbol{\alpha}$ con \mathbf{A} como una $(p - q)$ -forma

$$l_{\mathbf{A}} \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{q!(p-q)!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q} A^{\nu_1 \dots \nu_q} \boldsymbol{\omega}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{\mu_{p-q}}, \quad (2.40)$$

y si $p = q$ la expresion anterior se convierte en una 0-forma dada por

$$\iota_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{p!}\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p}A^{\mu_1\cdots\mu_p}. \quad (2.41)$$

2.1.4.4. Símbolo de Levi-Civita, la deltas de Kronecker generalizada y Formas de volumen

El símbolo de Levi-Civita generalizado se define como

$$\varepsilon_{v_1\cdots v_p} = \text{sign}(g)\varepsilon^{v_1\cdots v_p} = \begin{cases} 1 & \text{si la permutación es par} \\ -1 & \text{si la permutación es impar} \\ 0 & \text{si tiene índices repetidos.} \end{cases}$$

Asociemos este símbolo con una función escalar de componentes de una p -forma $\alpha_{v_1\cdots v_p} = \varepsilon_{v_1\cdots v_p}$. Si se toma el caso de un par de 2-formas no nulas, se verifica que

$$\alpha_{ij}\alpha^{kl} = \delta_i^k\delta_j^l - \delta_j^k\delta_i^l, \quad (2.42)$$

en el caso de las p -formas se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_{v_1\cdots v_p}\alpha^{\mu_1\cdots\mu_p} &= \varepsilon_{v_1\cdots v_p}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_p} \\ &= \delta_{v_1}^{\mu_1}\delta_{v_2}^{\mu_2}\cdots\delta_{v_p}^{\mu_p} - \delta_{v_2}^{\mu_1}\delta_{v_1}^{\mu_2}\cdots\delta_{v_p}^{\mu_p} + \delta_{v_2}^{\mu_1}\delta_{v_3}^{\mu_2}\delta_{v_1}^{\mu_3}\cdots\delta_{v_p}^{\mu_p} - \cdots \\ &= p!\delta_{[v_1}^{\mu_1}\delta_{v_2}^{\mu_2}\cdots\delta_{v_p]}^{\mu_p}, \end{aligned}$$

lo que permite definir el símbolo de p -delta como

$$\delta_{v_1\cdots v_p}^{\mu_1\cdots\mu_p} = p!\delta_{[v_1}^{\mu_1}\delta_{v_2}^{\mu_2}\cdots\delta_{v_p]}^{\mu_p}, \quad (2.43)$$

entonces el producto generalizado de componentes es

$$\varepsilon_{v_1\cdots v_p}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_p} = \delta_{v_1\cdots v_p}^{\mu_1\cdots\mu_p}. \quad (2.44)$$

De la contracción de una p -forma de coordenadas $\boldsymbol{\alpha}$, con un p -vector de componentes $(\mathbf{A})^{v_1\cdots v_p}$, se puede definir la determinante de una matriz $p \times p$ como

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\varepsilon} &= \varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_p}A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} \\ &= \varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_p}A^{\mu_1}A^{\mu_2}\cdots A^{\mu_p} \\ &= |\mathbf{A}|. \end{aligned}$$

En general, para tensores covariantes y mixtos se tiene

$$|\mathbf{A}| = \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_p} A^{\mu_1 \nu_1} A^{\mu_2 \nu_2} \dots A^{\mu_p \nu_p} \quad (2.45)$$

y

$$|\mathbf{A}| = \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_p} A_{\nu_1}^{\mu_1} A_{\nu_2}^{\mu_2} \dots A_{\nu_p}^{\mu_p}. \quad (2.46)$$

Con el uso de las definiciones anteriores se puede definir una p -forma de volumen como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p} \boldsymbol{\omega}^{[\mu_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{\mu_p]}. \quad (2.47)$$

Usando la matriz de transformación $M_V^\mu = \partial x^\mu / \partial y^\nu$, se puede reescribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{p!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p} \boldsymbol{\omega}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p} M_{\nu_1'}^{\mu_1} \dots M_{\nu_p'}^{\mu_p} \boldsymbol{\omega}^{\nu_1'} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{\nu_p'} \\ &= \frac{1}{p!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p} M_{\nu_1'}^{\mu_1} \dots M_{\nu_p'}^{\mu_p} \delta_{\nu_1' \dots \nu_p'}^{\nu_1 \dots \nu_p} \boldsymbol{\omega}^{\nu_1'} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{\nu_p'} \\ &= \frac{1}{p!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p} M_{\nu_1'}^{\mu_1} \dots M_{\nu_p'}^{\mu_p} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_p} \varepsilon_{\nu_1' \dots \nu_p'} \boldsymbol{\omega}^{\nu_1'} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{\nu_p'} \\ &= \frac{1}{p!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_p} M_{\nu_1'}^{\mu_1} \dots M_{\nu_p'}^{\mu_p} \varepsilon_{\nu_1' \dots \nu_p'} \boldsymbol{\omega}^{\nu_1'} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{\nu_p'} \\ &= \frac{1}{p!} |\mathbf{M}| \varepsilon_{\nu_1' \dots \nu_p'} \boldsymbol{\omega}^{\nu_1'} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{\nu_p'}. \end{aligned}$$

Aplicando las relaciones de transformación a la métrica se tiene que

$$g_{\mu' \nu'} = M_{\mu'}^{\mu} M_{\nu'}^{\nu} g_{\mu \nu}, \quad (2.48)$$

que en lenguaje de matrices se escribe como

$$\mathbf{g}' = \mathbf{M}^T \mathbf{g} \mathbf{M} \quad (2.49)$$

y

$$\begin{aligned} |\mathbf{g}'| &= |\mathbf{M}^T \mathbf{g} \mathbf{M}| \\ &= |\mathbf{M}^T| |\mathbf{g}| |\mathbf{M}| \\ &= |\mathbf{M}|^2 |\mathbf{g}|, \end{aligned}$$

donde $|\mathbf{g}| = 1$ en coordenadas cartesianas. Entonces podemos escribir la forma de volumen como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{p!} \sqrt{|\mathbf{g}'|} \boldsymbol{\varepsilon}_{v'_1 \dots v'_p} \boldsymbol{\omega}^{v'_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{v'_p}, \quad (2.50)$$

donde los componentes de la p -forma de volumen son

$$(\boldsymbol{\varepsilon})_{v'_1 \dots v'_p} = \sqrt{|\mathbf{g}'|} \boldsymbol{\varepsilon}_{v'_1 \dots v'_p}. \quad (2.51)$$

2.1.4.5. Dual de Hodge

El dual de una forma $\boldsymbol{\alpha}$ en un espacio p -dimensional se denota por $*\boldsymbol{\alpha}$ y no es más que la contracción del $\boldsymbol{\varepsilon}$ con \mathbf{A} , es decir una $(p - q)$ -forma dada por

$$*\boldsymbol{\alpha} = \iota_{\mathbf{A}} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{q!(p-q)!} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_p v_1 \dots v_{p-q}} A^{v_1 \dots v_q} \boldsymbol{\omega}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{\mu_{p-q}}. \quad (2.52)$$

Esta expresión es conocida como *dual de Hodge*, y cuando $p = q$, entonces

$$*\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{p!} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_p} A^{\mu_1 \dots \mu_p}. \quad (2.53)$$

2.1.4.6. Formas Diferenciales

Una p -forma diferencial definida en un abierto U de un espacio p -dimensional es una aplicación que hace corresponder a cada punto Q de este espacio una forma p -lineal alternada dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p} \boldsymbol{\omega}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\omega}^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p} \mathbf{d}\mathbf{x}(Q)^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}(Q)^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p} \mathbf{d}\mathbf{x}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^{\mu_p}. \end{aligned}$$

Donde se puede ver claramente que $\boldsymbol{\omega}^{\mu_i} = \mathbf{d}\mathbf{x}^{\mu_i}$ y donde el producto exterior cumple las siguientes propiedades

$$\mathbf{d}\mathbf{x}^{\mu_i} \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^{\mu_j} = -\mathbf{d}\mathbf{x}^{\mu_j} \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^{\mu_i} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}\mathbf{x}^{\mu_i} \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^{\mu_i} = 0. \quad (2.54)$$

Sea un mapa ϕ , dado por una función de coordenadas $x^i(y^j)$ y una p -forma $\boldsymbol{\alpha}$, se puede deducir una p -forma diferencial a través del cambio de variables como

$$\begin{aligned}
(\phi^* \omega) &= f((\phi(Q))) \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^p)}{\partial(y^1, \dots, y^p)} \right| (\mathbf{dx}^1(\phi(Q)) \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^p(\phi(Q))) \\
&= f((\phi(Q))) \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^p)}{\partial(y^1, \dots, y^p)} \right| (\mathbf{dy}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{dy}^p) \\
&= (f \circ \phi) \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^p)}{\partial(y^1, \dots, y^p)} \right| (\mathbf{dy}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{dy}^p),
\end{aligned}$$

la última expresión es conocida como *Pull – Back* de una forma diferencial.

2.1.4.7. Diferencial Exterior

Se define diferencial exterior de la p -forma diferencial a la $(p + 1)$ -forma diferencial dada por

$$\begin{aligned}
d\alpha &= d\left(\frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p} \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_p}\right) \\
&= \frac{1}{(p+1)!} d(\alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p}) \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_p} \\
&= \frac{1}{(p+1)!} \frac{\partial(\alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p})}{\partial x^v} \mathbf{dx}^v \wedge \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_p}.
\end{aligned}$$

En el caso de una 0-forma se produce la expresión correspondiente a la diferencial de una función $d\alpha = \partial\alpha/\partial x^v dx^v$. En otras palabras, el operador derivada exterior toma una p -forma y la convierte en una $(p + 1)$ -forma. Existen algunas propiedades adicionales que cumple la derivada exterior, que son

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta \quad \text{y} \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \quad (2.55)$$

Se puede construir una q -forma con la aplicación sucesiva de este operador sobre una p -forma con $p < q$, si las componentes de la p -forma son funciones escalares de clase C^q . Por ejemplo, aplicando dos veces el operador sobre la p -forma α se tiene

$$\begin{aligned}
d(d\alpha) &= d\left(d\left(\frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p} \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_p}\right)\right) \\
&= d\left(\frac{1}{(p+1)!} \frac{\partial(\alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p})}{\partial x^v} \mathbf{dx}^v \wedge \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_p}\right) \\
&= \frac{1}{(p+2)!} \frac{\partial^2(\alpha_{\mu_1, \dots, \mu_p})}{\partial x^{v_1} \partial x^{v_2}} \mathbf{dx}^{v_1} \wedge \mathbf{dx}^{v_2} \wedge \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_p}.
\end{aligned}$$

Existen casos en los que para una p -forma α con $p \geq 1$, existe una $(p-1)$ -forma β de clase C^p definida en un conjunto U con $p \geq 2$, a partir de la cual se cumple

$$\alpha = d\beta, \quad (2.56)$$

entonces se dice que esta forma es exacta. Si se le aplica el operador derivada exterior a la expresión anterior, se tiene que

$$d\alpha = d(d\beta) = 0, \quad (2.57)$$

entonces se dice que es cerrada. Toda forma diferencial cerrada es exacta, el enunciado recíproco no siempre es verdadero. Lo anterior es conocido como *teorema de Poncairé*.

Como en el fondo el operador diferencial exterior está escrito en función del operador ∂_μ , se puede definir un operador que actúe sobre el espacio dual de las p -formas diferenciales en función de ∂^ν , que se escribe como

$$d^\dagger \alpha = \text{sgn}(g)(-1)^{n(p+1)+1} * d * \alpha, \quad (2.58)$$

donde $*$ es el operador *dual de Hodge* definido anteriormente. Este operador es denominado *Codiferencial* y si se aplica en una p -forma se obtiene una $(p-1)$ -forma. Si se aplica este operador dos veces se puede ver que

$$\begin{aligned} d^\dagger(d^\dagger \alpha) &= *d**d*\alpha \\ &= *dd*\alpha \\ &= *d^2*\alpha \\ &= (d^\dagger)^2 \alpha \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir que también cumple el *teorema de Poncairé*. A través de este operador se pueden definir para cualquier sistema de coordenadas otros operadores diferenciales conocidos.

Calculando el dual del 1-vector $\mathbf{A} = A^\nu \mathbf{e}_\nu$ se construye la $(n-1)$ -forma

$$*\alpha = \frac{\sqrt{|g|}}{(n-1)!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} A^{\mu_1} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}, \quad (2.59)$$

que al aplicarle la derivada exterior a la expresión anterior se tiene

$$\begin{aligned}
d*\alpha &= d\left(\frac{\sqrt{|g|}}{(n-1)!}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_n}A^{\mu_1}dx^{\mu_2}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_n}\right) \\
&= \frac{1}{(n-1+1)!}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_n}\partial_{\mu_1}(\sqrt{|g|}A^{\mu_1})dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_n} \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{n!}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_n}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu_1}(\sqrt{|g|}A^{\mu_1})dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu_1}(\sqrt{|g|}A^{\mu_1})\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomando el dual de esta expresión se tiene que

$$\begin{aligned}
d\alpha &= *\left[\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu_1}(\sqrt{|g|}A^{\mu_1})(\varepsilon)\right] \\
d^\dagger\alpha &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu_1}(\sqrt{|g|}A^{\mu_1})*(\varepsilon) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu_1}(\sqrt{|g|}A^{\mu_1}) \\
&= -\nabla\cdot\mathbf{A}.
\end{aligned}$$

La expresión anterior es conocida como *divergencia covariante*. Operador que también permite generalizar los operadores D'Alambertiano y Laplaciano como

$$\Delta = dd^\dagger + d^\dagger d, \quad (2.60)$$

que se le denomina *operador de Rahm* que actua sobre 0-formas (campos escalares) como

$$\begin{aligned}
\Box &= -\Delta f \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu f) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}f_{;\nu})_{;\mu}.
\end{aligned}$$

2.1.5. Generalización de la conexión (Conexión de Koszul)

Para cualquiera dos vectores de campo \mathbf{x} , \mathbf{y} y un 0-forma f , el operador Nabla (∇) cumple las siguientes Propiedades

$$\mathbf{i.1)} \quad \nabla_{\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2}\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{x}_1}\mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{x}_2}\mathbf{Y}.$$

$$\mathbf{i.2)} \quad \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{Y}_1 + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{Y}_2.$$

$$\mathbf{i.3) \nabla_{f\mathbf{x}}\mathbf{Y} = f \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{Y}}$$

$$\mathbf{i.4) \nabla_{\mathbf{x}}(f\mathbf{Y}) = f \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{Y} + \mathbf{x}(f) \cdot \mathbf{Y}.$$

Tomando un conjunto de vectores de base se define el operador Nabla como $\nabla_{e_{\mu}}$ o simplemente como ∇_{μ} , lo que permite calcular la conexión como

$$\nabla_{\mu}e_{\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}e_{\alpha}. \quad (2.61)$$

Para un par de vectores genéricos $\mathbf{A} = A^{\mu}e_{\mu}$ y $\mathbf{U} = U^{\nu}e_{\nu}$ se puede deducir que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A} &= U^{\nu}e_{\nu}(A^{\mu}e_{\mu}) \\ &= U^{\nu}e_{\nu}(A^{\mu})e_{\mu} + U^{\nu}A^{\mu}e_{\nu}(e_{\mu}) \\ &= U^{\nu}(A^{\mu})_{;\nu}e_{\mu} + U^{\nu}A^{\mu}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}e_{\alpha} \\ &= (U^{\nu}(A^{\mu})_{;\nu} + U^{\nu}A^{\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu})e_{\mu}, \end{aligned}$$

donde

$$(\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A})_{\mu} = U^{\nu}(A^{\mu})_{;\nu} + U^{\nu}A^{\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}, \quad (2.62)$$

son las componentes de un vector dado por esa operación en una base arbitraria. De la expresión anterior se puede definir si un vector A es transportado paralelamente a lo largo de U si

$$\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A} = 0. \quad (2.63)$$

2.1.6. Derivada covariante de Tensores y Formas

Para una 0-forma α su derivada covariante es

$$\nabla_{\mathbf{X}}\alpha = \mathbf{x}(\alpha), \quad (2.64)$$

y para una uno 1-forma $\alpha = \alpha_{\mu\nu}\omega^{\mu}$ es

$$\nabla_{\lambda}\alpha = (\nabla_{\lambda}\alpha_{\mu})\omega^{\mu} + \alpha_{\mu}(\nabla_{\lambda}\omega^{\mu}). \quad (2.65)$$

Por otro lado la derivada de la contracción de la 1-forma α el 1-vector \mathbf{A} viene dada por

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}}[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{A})] &= (\nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\alpha})\mathbf{A} + (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{A})\boldsymbol{\alpha} \\ (\nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\alpha})\mathbf{A} &= \nabla_{\mathbf{X}}[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{A})] - (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{A})\boldsymbol{\alpha},\end{aligned}$$

si en la expresión anterior se sustituyen los vectores y formas de base ω^μ y e_β , se tiene que

$$\begin{aligned}(\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\omega^\mu)e_\beta &= \nabla_{\boldsymbol{\lambda}}[\omega^\mu e_\beta] - (\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}e_\beta)\omega^\mu \\ &= \omega^\mu \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha e_\alpha \\ &= -\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \omega^\mu e_\alpha \\ &= -\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \delta_\alpha^\mu \\ &= -\Gamma_{\beta\lambda}^\mu,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\omega^\mu = -\Gamma_{\beta\lambda}^\mu \omega^\beta, \quad (2.66)$$

por tanto la derivada covariante de la 1-forma viene dada finalmente por

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\alpha} &= (\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\alpha_\mu)\omega^\mu + \alpha_\mu(\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\omega^\mu) \\ &= e_\lambda(\alpha_\mu)\omega^\mu - \alpha_\mu \Gamma_{\beta\lambda}^\mu \omega^\beta \\ &= ((\alpha_\mu)_{;\lambda} - \alpha_\beta \Gamma_{\mu\lambda}^\beta)\omega^\mu.\end{aligned}$$

2.1.6.1. Operador de Torsión

De la ecuación de estructura

$$[\mathbf{U}, \mathbf{V}] = \{U^\mu (V^\nu)_{;\mu} - V^\mu (U^\nu)_{;\mu}\} e_\nu + U^\mu V^\nu C_{\mu\nu}^\rho e_\rho, \quad (2.67)$$

y de las expresiones de la derivada covariante de los vectores \mathbf{U} y \mathbf{V} en una base genérica dadas por

$$\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V} = (U^\mu (V^\nu)_{;\mu} + U^\mu V^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\nu) e_\nu,$$

y

$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{U} = (V^\mu (U^\nu)_{;\mu} + V^\mu U^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\nu) e_\nu,$$

que permiten reescribir la ecuación de estructura como

$$\begin{aligned}
[\mathbf{U}, \mathbf{V}] &= \nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V} - \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{U} + (\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + C_{\mu\nu}^{\rho})U^{\mu}V^{\nu}e_{\rho} \\
[\mathbf{U}, \mathbf{V}] - (\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V} - \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{U}) &= (\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + C_{\mu\nu}^{\rho})U^{\mu}V^{\nu}e_{\rho} \\
\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V} - \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{U} - [\mathbf{U}, \mathbf{V}] &= -(\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + C_{\mu\nu}^{\rho})U^{\mu}V^{\nu}e_{\rho} \\
\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V} - \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{U} - [\mathbf{U}, \mathbf{V}] &= T_{\mu\nu}^{\rho}U^{\mu}V^{\nu}e_{\rho} \\
\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V} - \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{U} - [\mathbf{U}, \mathbf{V}] &= T(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}),
\end{aligned}$$

donde el operador

$$T(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) = T_{\mu\nu}^{\rho}U^{\mu}V^{\nu}e_{\rho}, \quad (2.68)$$

es denominado operador de torsión y sus componentes (Escalar de Torsión) vienen dadas por

$$T_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - C_{\mu\nu}^{\rho}, \quad (2.69)$$

que en la base coordenada se reduce a

$$T_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}. \quad (2.70)$$

2.1.7. Derivada exterior de Vectores

En la forma que se definió la derivada exterior páginas atrás, esta solo actuaba sobre p -formas. Es necesario definir un concepto más general que exponga de forma clara cómo se deriva vectores. Para lograr esto partimos de un tensor mixto

$$\mathbf{T} = T_{\rho}^{\mu}e_{\mu} \otimes \omega^{\rho}, \quad (2.71)$$

que al ser multiplicado por un vector \mathbf{U} se encuentra

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(-, \mathbf{U}) &= T_{\rho}^{\mu}e_{\mu} \otimes \omega^{\rho}U^{\alpha}e_{\alpha} \\
&= T_{\rho}^{\mu}e_{\mu}U^{\alpha}\delta_{\alpha}^{\rho} \\
&= T_{\rho}^{\mu}U^{\rho}e_{\mu}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto una p -forma vectorial se define como

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \otimes \boldsymbol{\alpha} &= A^\mu e_\mu \otimes \alpha_{v_1 \wedge \dots \wedge v_p} \omega^{v_1} \otimes \dots \otimes \omega^{v_p} \\
&= A^\mu \alpha_{v_1 \dots v_p} e_\mu \otimes \omega^{v_1} \wedge \dots \wedge \omega^{v_p} \\
&= F_{v_1 \dots v_p}^\mu e_\mu \otimes \omega^{v_1} \wedge \dots \wedge \omega^{v_p}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\nabla_\lambda \boldsymbol{\alpha} = ((\alpha_\mu)_{;\lambda} - \alpha_\beta \Gamma_{\mu\lambda}^\beta) \omega^\mu, \quad (2.72)$$

se puede generalizar esta expresión a partir del producto directo entre dos tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} de rango arbitrario que al aplicarle el operador $\nabla_{\mathbf{X}}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) &= (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{B}) \\
&= \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T}.
\end{aligned}$$

Un resultado muy importante se obtiene al aplicar la expresión anterior al tensor métrico como

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha (g_{\mu\nu} \omega^\mu \otimes \omega^\nu) &= (\nabla_\alpha g_{\mu\nu}) \omega^\mu \otimes \omega^\nu + g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha \omega^\mu) \otimes \omega^\nu + g_{\mu\nu} \omega^\mu \otimes (\nabla_\alpha \omega^\nu) \\
&= (g_{\mu\nu})_{;\alpha} \omega^\mu \otimes \omega^\nu - g_{\beta\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \omega^\mu \otimes \omega^\nu - g_{\mu\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \omega^\mu \otimes \omega^\nu \\
&= ((g_{\mu\nu})_{;\alpha} - g_{\beta\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - g_{\mu\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta) \omega^\mu \otimes \omega^\nu,
\end{aligned}$$

donde las componentes vienen dadas por

$$(g_{\mu\nu})_\alpha = ((g_{\mu\nu})_{;\alpha} - g_{\beta\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - g_{\mu\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta) \omega^\mu \otimes \omega^\nu. \quad (2.73)$$

Si se sustituyen las expresiones para las conexiones

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} (g_{\lambda\mu;\alpha} + g_{\lambda\alpha;\mu} - g_{\mu\alpha;\lambda}) \quad (2.74)$$

y

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} (g_{\lambda\nu;\alpha} + g_{\lambda\alpha;\nu} - g_{\nu\alpha;\lambda}), \quad (2.75)$$

en la expresión para las componentes se encuentra que

$$\begin{aligned}
(g_{\mu\nu})_{;\alpha} &= ((g_{\mu\nu})_{;\alpha} - g_{\beta\nu} \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} (g_{\lambda\mu;\alpha} + g_{\lambda\alpha;\mu} - g_{\mu\alpha;\lambda}) \\
&\quad - g_{\mu\beta} \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} (g_{\lambda\nu;\alpha} + g_{\lambda\alpha;\nu} - g_{\nu\alpha;\lambda})) \\
&= (g_{\mu\nu})_{;\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\lambda} (g_{\lambda\mu;\alpha} + g_{\lambda\alpha;\mu} - g_{\mu\alpha;\lambda}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\lambda} (g_{\lambda\nu;\alpha} + g_{\lambda\alpha;\nu} - g_{\nu\alpha;\lambda}) \\
&= (g_{\mu\nu})_{;\alpha} - (g_{\mu\nu})_{;\alpha} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto, para cualquier vector \mathbf{U} se cumple que

$$\nabla_{\mathbf{U}}(g_{\mu\nu}\omega^{\mu} \otimes \omega^{\nu}) = 0, \quad (2.76)$$

esta expresión es denominada como *Conexión Métrica*. Una aplicación simple de este resultado se puede obtener del producto escalar entre dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{A} que los transportaremos paralelamente a lo largo de \mathbf{U} mediante

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{U}}(\mathbf{A} \dots \mathbf{B}) &= \nabla_{\mathbf{U}}(A^{\mu}B_{\mu}) \\
&= (g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu})_{;\alpha}U^{\alpha} \\
&= ((g_{\mu\nu})_{;\alpha}A^{\mu}B^{\nu} + g_{\mu\nu}(A^{\mu}B^{\nu})_{;\alpha})U^{\alpha} \\
&= g_{\mu\nu}(A^{\mu}B^{\nu})_{;\alpha}U^{\alpha} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

que da cero porque el producto escalar es una constante y debe anularse bajo la derivación.

Una vez definida la derivada covariante vamos a extender este concepto de derivar tensores mixtos, pero para el operador derivada exterior. Un vector puro no es más que una 0-forma vectorial y la derivada exterior de su base se define como

$$\begin{aligned}
d(e_{\mu}) &= \partial_{\nu}(e_{\mu}) \otimes \omega^{\nu} \\
&= \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} e_{\alpha} \otimes \omega^{\nu}.
\end{aligned}$$

Aplicando la derivada exterior sobre un vector puro \mathbf{A} se tiene que

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{A}) &= d(A^\mu e_\mu) \\
&= e_\mu \otimes \partial_\nu (A^\mu) \omega^\nu + A^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha \otimes \omega^\nu \\
&= [(A^\mu)_{;\nu} + A^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\mu] e_\mu \otimes \omega^\nu,
\end{aligned}$$

resultado que puede generalizarse mediante la aplicación del operador derivada exterior al producto exterior de dos cualesquiera p -formas y q -formas vectoriales, siendo como resultado que

$$d(\mathbf{S} \wedge \mathbf{T}) = d(\mathbf{S}) \wedge \mathbf{T} + (-1)^p \mathbf{S} \wedge d(\mathbf{T}), \quad (2.77)$$

si \mathbf{T} es una 0-forma vectorial o vector puro el producto exterior $\mathbf{S} \wedge$ se reduce a $\mathbf{S} \otimes$.

Para el caso de las 1-formas vectoriales ($\mathbf{A} = A_\lambda^\nu e_\nu \otimes \omega^\lambda$) la derivada exterior nos da que

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{A}) &= d(A_\lambda^\nu e_\nu \otimes \omega^\lambda) \\
&= d(A_\lambda^\nu e_\nu) \otimes \omega^\lambda \\
&= d(A_\lambda^\nu) e_\nu \otimes \omega^\lambda + A_\lambda^\nu d(e_\nu) \otimes \omega^\lambda \\
&= \partial_\mu (A_\lambda^\nu) e_\nu \otimes \omega^{\mu\lambda} + A_\lambda^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\nu \otimes \omega^\mu \wedge \omega^\lambda \\
&= \left\{ \partial_{[\mu} (A_{\lambda]}^\nu) + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha A_\lambda^\alpha \right\} e_\nu \otimes \omega^\mu \wedge \omega^\lambda \\
&= \partial_{[\mu} (A_{\lambda]}^\nu) e_\nu \otimes \omega^\mu \wedge \omega^\lambda,
\end{aligned}$$

donde el segundo término se anula por ser el producto de un tensor antisimétrico $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ en α con respecto a μ o ν con un tensor simétrico A_λ^α . Por otro lado si la 1-forma vectorial \mathbf{A} es el resultado de aplicar la derivada exterior a una 0-forma vectorial \mathbf{B} , entonces la expresión anterior queda como

$$\begin{aligned}
d(d(\mathbf{B})) &= d^2 \mathbf{B} \\
&= \partial_{[\mu} (A_{\lambda]}^\nu) e_\nu \otimes \omega^\mu \wedge \omega^\lambda,
\end{aligned}$$

que no es más que una 2-forma vectorial que en general no cumple con el teorema de Poncairé. De lo anterior se puede definir una conexión de forma como

$$\begin{aligned}
d(e_\nu) &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha \otimes \omega^\mu \\
&= e_\alpha \otimes \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \omega^\mu \\
&= e_\alpha \otimes \Omega_\nu^\alpha.
\end{aligned}$$

La derivada exterior del tensor métrico es

$$\begin{aligned}
 d(g_{\mu\nu}) &= d(e_\mu \cdot e_\nu) \\
 &= d(e_\mu) \cdot e_\nu + e_\mu \cdot d(e_\nu) \\
 &= e_\alpha \otimes \Omega_\mu^\alpha \cdot e_\nu + e_\mu \cdot e_\alpha \otimes \Omega_\nu^\alpha \\
 &= e_\alpha \cdot e_\nu \otimes \Omega_\mu^\alpha + e_\mu \cdot e_\alpha \otimes \Omega_\nu^\alpha \\
 &= g_{\alpha\nu} \otimes \Omega_\mu^\alpha + g_{\mu\alpha} \otimes \Omega_\nu^\alpha \\
 &= \Omega_{\nu\mu} + \Omega_{\mu\nu}.
 \end{aligned}$$

Si se considera un campo vectorial de vectores de base estos solo cambian de dirección manteniendo constante sus módulos y ángulos formado entre ellos, en este caso Ω_μ^α se le llama forma de rotación y cumple que

$$d(g_{\mu\nu}) = 0, \quad (2.78)$$

y por lo tanto

$$\Omega_{\mu\nu} = -\Omega_\mu^\nu, \quad \text{y por ende} \quad \Gamma_{\alpha\mu\nu} = -\Gamma_{\alpha\nu\mu}. \quad (2.79)$$

2.1.8. Deducción de la ecuación estructura de Cartan

Vamos a construir unas relaciones de conmutación a partir de dos vectores cualquiera \mathbf{U}, \mathbf{V} y la 1-forma $\boldsymbol{\alpha}$ de la siguiente manera. Primero el conmutador $[\mathbf{U}, \mathbf{V}]$ viene dado por

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{U}, \mathbf{V}] &= \mathbf{UV} - \mathbf{VU} \\
 &= (U^\mu V_{;\mu}^\nu - V^\mu U_{;\mu}^\nu) e_\nu + U^\mu V^\nu (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) e_\alpha,
 \end{aligned}$$

si contraemos este conmutador con $\boldsymbol{\alpha}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\alpha}([\mathbf{U}, \mathbf{V}]) &= \alpha_\lambda \omega^\lambda [(U^\mu V_{;\mu}^\nu - V^\mu U_{;\mu}^\nu) e_\nu + U^\mu V^\nu (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) e_\alpha] \\
 &= \alpha_\lambda \omega^\lambda (U^\mu V_{;\mu}^\nu - V^\mu U_{;\mu}^\nu) e_\nu + \alpha_\lambda \omega^\lambda U^\mu V^\nu (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) e_\alpha \\
 &= \alpha_\lambda \delta_\nu^\lambda (U^\mu V_{;\mu}^\nu - V^\mu U_{;\mu}^\nu) + \alpha_\lambda \delta_\alpha^\lambda U^\mu V^\nu C_{\nu\mu}^\alpha \\
 &= U^\mu \alpha_\nu V_{;\mu}^\nu - V^\mu \alpha_\nu U_{;\mu}^\nu.
 \end{aligned}$$

Construyendo ahora las contracciones $\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{V}))$, $\mathbf{V}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{U}))$ y $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V})$ se tiene las respectivas expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{V})) &= U^\mu e_\mu (\alpha_\lambda \omega^\lambda (V^\nu e_\nu)) \\ &= U^\mu V^\nu \alpha_{\nu;\mu} + U^\mu \alpha_\nu V^\nu_{;\mu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{U})) &= V^\mu e_\mu (\alpha_\lambda \omega^\lambda (U^\nu e_\nu)) \\ &= V^\mu U^\nu \alpha_{\nu;\mu} + V^\mu \alpha_\nu U^\nu_{;\mu} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) &= \alpha_\lambda \omega^\lambda (U^\mu e_\mu \wedge V^\nu e_\nu) \\ &= \alpha_\mu U^\mu V^\nu e_\nu - \alpha_\nu U^\mu V^\nu e_\mu. \end{aligned}$$

Tomando la derivada exterior de la última expresión se tiene que

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V})) &= d(\alpha_\mu U^\mu V^\nu e_\nu - \alpha_\nu U^\mu V^\nu e_\mu) \\ &= \alpha_{\mu;\lambda} U^\mu V^\nu \omega^\lambda e_\nu - \alpha_{\nu;\lambda} U^\mu V^\nu \omega^\lambda e_\mu \\ &= \alpha_{\mu;\lambda} U^\mu V^\nu \delta_\nu^\lambda - \alpha_{\nu;\lambda} U^\mu V^\nu \delta_\mu^\lambda \\ &= (\alpha_{\mu;\nu} - \alpha_{\nu;\mu}) U^\mu V^\nu. \end{aligned}$$

El último resultado se puede reproducir de

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{V})) - \mathbf{V}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{U})) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) &= (\alpha_{\mu;\nu} - \alpha_{\nu;\mu}) U^\mu V^\nu \\ &= d(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V})). \end{aligned}$$

Si se toma $\boldsymbol{\alpha} = \omega^\rho$, $\mathbf{U} = e_\mu$ y $\mathbf{V} = e_\nu$ la última expresión se reduce a

$$\begin{aligned} d\omega^\rho(e_\mu \wedge e_\nu) &= e_\mu(\omega^\rho e_\nu) - e_\nu(\omega^\rho e_\mu) - \omega^\rho([e_\mu, e_\nu]) \\ &= e_\mu \delta_\nu^\rho - e_\nu \delta_\mu^\rho - \omega^\rho C_{\mu\nu}^\beta e_\beta \\ &= -\delta_\beta^\rho C_{\mu\nu}^\beta \\ &= -C_{\mu\nu}^\rho, \end{aligned}$$

multiplicando este resultado por la forma base $\omega^\mu \wedge \omega^\nu$ se tiene que

$$\begin{aligned}
d\omega^\rho(e_\mu \wedge e_\nu)\omega^\mu \wedge \omega^\nu &= -C_{\mu\nu}^\rho \omega^\mu \wedge \omega^\nu \\
d\omega^\rho(e_\mu \wedge e_\nu \omega^\mu \wedge \omega^\nu + e_\nu \wedge e_\mu \omega^\nu \wedge \omega^\mu) &= -C_{\mu\nu}^\rho \omega^\mu \wedge \omega^\nu \\
d\omega^\rho(\delta_\mu^\nu \delta_\nu^\mu + \delta_\nu^\mu \delta_\mu^\nu) &= -C_{\mu\nu}^\rho \omega^\mu \wedge \omega^\nu \\
d\omega^\rho &= -\frac{1}{2}C_{\mu\nu}^\rho \omega^\mu \wedge \omega^\nu \\
d\omega^\rho &= -C_{\mu\nu}^\rho \omega^{[\mu} \wedge \omega^{\nu]}.
\end{aligned}$$

Con la ayuda del tensor de torsión

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= e_\rho \otimes T^\rho \\
&= \Gamma_{[\nu\mu]}^\rho e_\rho \otimes \omega^\mu \wedge \omega^\nu - e_\rho \otimes \left(\frac{1}{2}C_{\mu\nu}^\rho \omega^{[\mu} \wedge \omega^{\nu]}\right) \\
&= e_\rho \otimes (d\omega^\rho + \Omega_\nu^\rho \wedge \omega^\nu),
\end{aligned}$$

donde las componentes vienen dadas por la ecuación

$$T^\rho = d\omega^\rho + \Omega_\nu^\rho \wedge \omega^\nu, \quad (2.80)$$

que se denomina *primera ecuación de estructura de Cartan*, que con la conexión métrica se reduce a

$$\begin{aligned}
d\omega^\rho &= -\Omega_\nu^\rho \wedge \omega^\nu \\
&= -\Gamma_{[\nu\mu]}^\rho \omega^\mu \wedge \omega^\nu.
\end{aligned}$$

2.1.9. Derivada covariante exterior

Si se aplica la derivada exterior sobre una 0-forma ϕ se tiene que

$$\begin{aligned}
d\phi &= \partial_\mu(\phi)\omega^\mu \\
&= e_\mu(\phi)\omega^\mu,
\end{aligned}$$

donde $e_\mu = \partial_\mu$ es un vector de una base genérica cualquiera. Si se aplica este mismo operador a la 1-forma α se obtiene que

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\alpha} &= d(\alpha_\mu \boldsymbol{\omega}^\mu) \\
&= d(\alpha_\mu) \wedge \boldsymbol{\omega}^\mu + \alpha_\mu d(\boldsymbol{\omega}^\mu) \\
&= \alpha_{\mu;\nu} \boldsymbol{\omega}^\nu \wedge \boldsymbol{\omega}^\mu - \frac{1}{2} \alpha_\mu C_{\nu\alpha}^\mu \boldsymbol{\omega}^{nu} \wedge \boldsymbol{\omega}^\alpha \\
&= (2\alpha_{[\mu;\nu]} - \alpha_\alpha C_{\nu\mu}^\alpha) \boldsymbol{\omega}^{[nu} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\mu]} \\
&= (d\boldsymbol{\alpha})_{\nu\mu} \boldsymbol{\omega}^{[nu} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\mu]}.
\end{aligned}$$

La expresión anterior permite deducir la forma generica para el rotacional si se asume que las componentes de la 1-forma $(\boldsymbol{\alpha})_\nu$ son las componentes de un 1-vector covariante $(\mathbf{A})_\nu$, restricción que conduce a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
Rot(\boldsymbol{\alpha}) &= *d\boldsymbol{\alpha} \\
&= \varepsilon^{\mu\rho\nu} (A_{\mu;\rho} - \frac{1}{2} A_\beta C_{\mu\rho}^\beta) \mathbf{e}_\nu,
\end{aligned}$$

es decir, un operador que actua sobre una 1-forma y su resultado es un vector que vive en el espacio dual. Por otro lado las componentes de la derivada covariante de la 1-forma $\boldsymbol{\alpha}$ vienen dadas por

$$\alpha_{\mu;\nu} = (\alpha_\mu)_{;\nu} + \alpha_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (2.81)$$

mientras que las componentes del tensor de torsión vienen dadas por

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - C_{\nu\mu}^\lambda, \quad (2.82)$$

al invertir ν por μ en la primera ecuación, restarlas y combinarlas con las componentes de la torsión se tiene que

$$\begin{aligned}
\alpha_{[\mu;\nu]} &= \alpha_{[\mu;\nu]} + \frac{1}{2} \alpha_\lambda (T_{\mu\nu}^\lambda + C_{\nu\mu}^\lambda) \\
2\alpha_{[\mu;\nu]} + \alpha_\lambda C_{\mu\nu}^\lambda &= 2\alpha_{[\mu;\nu]} - \alpha_\lambda T_{\mu\nu}^\lambda \\
&= (d\boldsymbol{\alpha})_{\nu\mu}.
\end{aligned}$$

En la geometría rimaniiana donde $T_{\mu\nu}^\lambda = 0$ en una base arbitraria la expresión de las componentes se reduce a

$$(d\boldsymbol{\alpha})_{\nu\mu} = \alpha_{[\mu;\nu]}. \quad (2.83)$$

Mediante un procedimiento análogo se demuestra que las componentes de la derivada covariante exterior para una 2-forma vienen dadas por

$$\begin{aligned} (d\boldsymbol{\alpha})_{\nu\mu\lambda} &= 3\alpha_{[\mu\nu;\lambda]} - 3\alpha_{\beta[v}C_{\lambda\mu]}^{\beta} \\ &= 3\alpha_{[\mu\nu;\lambda]} + 3\alpha_{\beta[v}T_{\lambda\mu]}^{\beta}, \end{aligned}$$

que para la geometría rímaniana $T_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$ también cumple que

$$(d\boldsymbol{\alpha})_{\nu\mu\lambda} = \alpha_{\mu\nu;\lambda} + \alpha_{\nu\lambda;\mu} + \alpha_{\lambda\mu;\nu}. \quad (2.84)$$

Por lo tanto la derivada covariante exterior de una p -forma está definida por

$$D\boldsymbol{\alpha} \equiv d\boldsymbol{\alpha}, \quad (2.85)$$

que cuando actúa sobre las componentes de una o -forma vectorial $\mathbf{V} = V^{\mu}e_{\mu}$ se tiene que

$$\begin{aligned} DV^{\mu}e_{\mu} &= d(V^{\mu}e_{\mu}) \\ &= e_{\mu} \otimes V^{\mu}_{;\nu}\omega^{\nu} + V^{\mu}de_{\mu} \\ &= dV^{\mu} + e_{\mu} \otimes V^{\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}\omega^{\nu} \\ &= e_{\mu} \otimes (dV^{\mu} + \Omega_{\lambda}^{\mu}V^{\lambda}), \end{aligned}$$

donde las componentes son dadas por

$$DV^{\mu} = dV^{\mu} + \Omega_{\lambda}^{\mu}V^{\lambda}. \quad (2.86)$$

Cuando D actúa sobre una 1-forma vectorial $\mathbf{A} = e_{\mu} \otimes \mathbf{A}^{\mu}$ se tiene que

$$\begin{aligned} D\mathbf{A} &= e_{\mu} \otimes D\mathbf{A}^{\mu} \\ &= e_{\mu} \otimes d(A_{\nu}^{\mu}\omega^{\nu}) \\ &= e_{\mu} \otimes (2A_{[\nu;\lambda]}^{\mu} + A_{\beta}^{\mu}T_{\lambda\nu}^{\beta})\omega^{[\lambda} \wedge \omega^{\nu]}, \end{aligned}$$

donde las componentes son dadas por

$$D\mathbf{A}^\mu = (2A_{[\nu;\lambda]}^\mu + A_{\beta}^\mu T_{\lambda\nu}^\beta) \omega^{[\lambda} \wedge \omega^{\nu]}. \quad (2.87)$$

Cuando D actúa sobre las componentes de una 2-forma $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{\mu\nu}/2) \omega^\mu \wedge \omega^\nu$ se tiene que

$$\begin{aligned} (D\boldsymbol{\alpha}) &= D\left(\frac{1}{2}\alpha_{\mu\nu}\omega^\mu \wedge \omega^\nu\right) \\ &= (3\alpha_{[\mu\nu;\lambda]} + 3\alpha_{\beta} T_{\lambda\mu}^\beta) \omega^{[\lambda} \wedge \omega^\mu \wedge \omega^{\nu]}. \end{aligned}$$

En el caso que D actúa en una p -forma matricial

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e_\mu \otimes \mathbf{A}_\nu^\mu \wedge \omega^\nu \\ &= A_{\nu_1 \dots \nu_p \nu}^\mu e_\mu \otimes \omega^{[\nu_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\nu_p} \wedge \omega^\nu], \end{aligned}$$

la derivada covariante exterior vienen dada por

$$\begin{aligned} D\mathbf{A} &= D(e_\mu \otimes \mathbf{A}_\nu^\mu \wedge \omega^\nu) \\ &= e_\mu \otimes D(A_{\nu_1 \dots \nu_p \nu}^\mu \omega^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\nu_p}) \wedge \omega^\nu \\ &= e_\mu \otimes (\Omega_\alpha^\mu \wedge \mathbf{A}_\nu^\alpha + d\mathbf{A}_\nu^\mu) \wedge \omega^\nu \\ &= e_\mu \otimes (d\mathbf{A}_\nu^\mu + \Omega_\alpha^\mu \wedge \mathbf{A}_\nu^\alpha - (-1)^p \mathbf{A}_\nu^\alpha \wedge \Omega_\alpha^\mu) \wedge \omega^\nu, \end{aligned}$$

donde las componentes son dadas por

$$D\mathbf{A}_\nu^\mu = d\mathbf{A}_\nu^\mu + \Omega_\alpha^\mu \wedge \mathbf{A}_\nu^\alpha - (-1)^p \mathbf{A}_\nu^\alpha \wedge \Omega_\alpha^\mu. \quad (2.88)$$

Dada una p -forma vectorial $\mathbf{S} = e_\mu \otimes \mathbf{S}^\mu$ se tiene que las componentes resultantes de $D\mathbf{S}$ vienen dadas por

$$D\mathbf{S}^\mu = d\mathbf{S}^\mu + \Omega_\alpha^\mu \wedge \mathbf{S}^\alpha. \quad (2.89)$$

Con esto se puede definir el operador de torsión como una 2-forma cuya derivada covariante es

$$DT^p = dT^p + \Omega_\nu^p \wedge T^\nu, \quad (2.90)$$

y la primera ecuación de estructura de Cartan se puede escribir como

$$D\omega^\rho = d\omega^\rho + \Omega_\nu^\rho \wedge \omega^\nu, \quad (2.91)$$

en donde $DT^\rho = D\omega^\rho$ y es nula si la conexión es métrica. Para el caso de una 1-forma vectorial dada por $e_\mu \otimes \Omega_\nu^\mu$ la actuación del operador D sobre esta estructura da como resultado

$$D\Omega_\nu^\mu = d\Omega_\nu^\mu + \Omega_\alpha^\mu \wedge \Omega_\nu^\alpha. \quad (2.92)$$

2.1.10. Derivada de Lie y vectores de Killing

Supongase una variedad M donde viven las curvas f^α Y g^α cuya parametrizaciones vienen dadas por

$$f^\alpha \equiv x^\alpha(\lambda) \quad \text{Y} \quad g^\alpha \equiv x^\alpha(\rho), \quad (2.93)$$

con vectores tangentes

$$\mathbf{A} = A^\mu e_\mu \quad \text{Y} \quad \mathbf{B} = B^\nu e_\nu, \quad (2.94)$$

respectivamente. La relación de conmutación entre estos vectores da como resultado

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] &= \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \\ &= A^\mu e_\mu (B^\nu e_\nu) - B^\nu e_\nu (A^\mu e_\mu) \\ &= (A^\nu \partial_\nu B^\mu - B^\nu \partial_\nu A^\mu) e_\mu + A^\mu B^\nu [e_\mu, e_\nu] \\ &= (A^\nu \partial_\nu B^\mu - B^\nu \partial_\nu A^\mu + A^\beta B^\nu \Gamma_{\beta\nu}^\mu - A^\nu B^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\mu) e_\mu \\ &= (A^\nu \nabla_\nu B^\mu - B^\nu \nabla_\nu A^\mu) e_\mu \\ &= \ell_{\mathbf{A}} \mathbf{B}, \end{aligned}$$

a esta última expresión se le denomina *derivada de Lie* y cumple las siguientes propiedades

i.1) $\ell_{\mathbf{A}} f = A^\beta \partial_\beta f$ donde f es una 0-forma definida por $f \equiv f(x^\alpha)$.

i.2) $\ell_{\mathbf{U}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \ell_{\mathbf{U}}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \ell_{\mathbf{U}}(\mathbf{B})$.

i.3) $\ell_{\mathbf{U}}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \ell_{\mathbf{U}}(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \ell_{\mathbf{U}}(\mathbf{B})$.

La derivada de Lie también se puede calcular para vectores covariantes, resultado que se deduce mediante el uso del escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^\mu B_\mu$ y las primeras dos propiedades anteriormente escritas, de lo que se encuentra primero las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbf{U}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \ell_{\mathbf{U}}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \ell_{\mathbf{U}}(\mathbf{B}) \\ &= (U^\nu \nabla_\nu A^\mu - A^\nu \nabla_\nu U^\mu) B_\mu + \mathbf{A} \cdot \ell_{\mathbf{U}}(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbf{U}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= U^\nu \partial_\nu (A^\mu B_\mu) \\ &= U^\nu \partial_\nu (A^\mu) B_\mu + U^\nu A^\mu \partial_\nu (B_\mu), \end{aligned}$$

combinando estas dos expresiones se tiene que

$$\ell_{\mathbf{U}} \mathbf{B} = U^\nu \partial_\nu (B_\mu) + B_\nu \partial_\mu (U^\nu). \quad (2.95)$$

Usando la tercera propiedad y tomando $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = e_\mu \otimes e_\nu$ se encuentra que

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbf{U}}(e_\mu \otimes e_\nu) &= \ell_{\mathbf{U}}(e_\mu) \otimes e_\nu + e_\mu \otimes \ell_{\mathbf{U}}(e_\nu) \\ &= -\nabla_\mu U^\beta e_\beta \otimes e_\nu - \nabla_\nu U^\beta e_\mu \otimes e_\beta, \end{aligned}$$

y para bases Contra variantes la relación anterior es dada por

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbf{U}}(e^\mu \otimes e^\nu) &= \ell_{\mathbf{U}}(e^\mu) \otimes e^\nu + e^\mu \otimes \ell_{\mathbf{U}}(e^\nu) \\ &= \nabla_\mu U^\beta e^\beta \otimes e^\nu + \nabla_\nu U^\beta e^\mu \otimes e^\beta, \end{aligned}$$

por lo tanto las expresiones correspondientes para la derivada de Lie de tensores co, contra variantes y mixtos vendrán dadas por

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbf{U}}(T_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu) &= \ell_{\mathbf{U}}(T_{\mu\nu}) e^\mu \otimes e^\nu + T_{\mu\nu} \ell_{\mathbf{U}}(e^\mu \otimes e^\nu) \\ &= (U^\beta \nabla_\beta (T_{\mu\nu}) + T_{\beta\nu} \nabla_\mu U^\beta + T_{\mu\beta} \nabla_\nu U^\beta) e^\mu \otimes e^\nu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbf{U}}(T^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu) &= \ell_{\mathbf{U}}(T^{\mu\nu}) e_\mu \otimes e_\nu + T^{\mu\nu} \ell_{\mathbf{U}}(e_\mu \otimes e_\nu) \\ &= (U^\beta \nabla_\beta (T^{\mu\nu}) - T^{\beta\nu} \nabla_\mu U^\beta - T^{\mu\beta} \nabla_\nu U^\beta) e_\mu \otimes e_\nu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathbf{U}}(T_{v_1 \dots v_p} e^{v_1} \otimes \dots \otimes e^{v_p}) &= \ell_{\mathbf{U}}(T_{v_1 \dots v_p}) e^{v_1} \otimes \dots \otimes e^{v_p} \\
&\quad + T_{v_1 \dots v_p} \ell_{\mathbf{U}}(e^{v_1} \otimes \dots \otimes e^{v_p}) \\
&= (U^\beta \nabla_\beta (T_{v_1 \dots v_p}) + T_{\beta \dots v_p} \nabla_{v_1} U^\beta + \\
&\quad \dots + T_{v_1 \dots \beta} \nabla_{v_p} U^\beta) e^{v_1} \otimes \dots \otimes e^{v_p}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathbf{U}}(T_{v_1 \dots v_p} e^{v_1} \otimes \dots \otimes e^{v_p}) &= \ell_{\mathbf{U}}(T_{v_1 \dots v_p}) e^{v_1} \otimes \dots \otimes e^{v_p} \\
&\quad + T_{v_1 \dots v_p} \ell_{\mathbf{U}}(e^{v_1} \otimes \dots \otimes e^{v_p}) \\
&= (U^\beta \nabla_\beta (T^{v_1 \dots v_p})_T^{\beta \dots v_p} \nabla_{v_1} U^\beta - \\
&\quad \dots - T^{v_1 \dots \beta} \nabla_{v_p} U^\beta) e_{v_1} \otimes \dots \otimes e_{v_p}.
\end{aligned}$$

Si se le calcula la derivada de Lie al tensor métrico se tiene que

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathbf{U}}(g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu) &= \ell_{\mathbf{U}}(g_{\mu\nu}) e^\mu \otimes e^\nu + g_{\mu\nu} \ell_{\mathbf{U}}(e^\mu \otimes e^\nu) \\
&= (U^\beta \nabla_\beta (g_{\mu\nu}) + g_{\beta\nu} \nabla_\mu U^\beta + g_{\mu\beta} \nabla_\nu U^\beta) e^\mu \otimes e^\nu,
\end{aligned}$$

usando la propiedad $\nabla_\beta (g_{\mu\nu}) = 0$ se reduce a

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathbf{U}}(g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu) &= (\nabla_\mu (g_{\beta\nu} U^\beta) + \nabla_\nu (g_{\mu\beta} U^\beta)) e^\mu \otimes e^\nu \\
&= (\nabla_\mu U^\nu + \nabla_\nu U_\mu) e^\mu \otimes e^\nu.
\end{aligned}$$

Si existe un vector \mathbf{U} tal que la derivada de Lie del tensor métrico sea nulo ($\ell_{\mathbf{U}}(g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu) = 0$), existen simetrías respecto a esos vectores y son denominados como *Vectores de Killing*, con lo cual la ecuación anterior se reescribe como

$$\nabla_\mu U^\nu + \nabla_\nu U_\mu = 0, \quad (2.96)$$

y se le denomina *Ecuación de Killing*.

Se puede expresar la derivada Lie en términos de la derivada exterior

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} &= (X^\nu Y_{;\nu}^\mu - Y^\nu X_{;\nu}^\mu) e_\mu \\
&= [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \\
&= -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] \\
&= -\ell_{\mathbf{X}} \mathbf{Y},
\end{aligned}$$

si $\mathbf{Y} = e_\mu$ entonces

$$\begin{aligned}\ell_{\mathbf{X}}e_\mu &= [X^\nu e_\nu, e_\mu] \\ &= (X^\nu C_{\nu\mu}^\alpha - X_{;\nu}^\alpha)e_\alpha,\end{aligned}$$

en una base coordenada se reduce a

$$\ell_{e_\mu}\mathbf{X} = X_{;\nu}^\alpha e_\alpha, \quad (2.97)$$

Las reglas de operación de ℓ son:

i.1) $\ell_{\mathbf{X}}(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \ell_{\mathbf{X}}(\mathbf{S}) + \ell_{\mathbf{X}}(\mathbf{T})$.

i.2) $\ell_{\mathbf{X}}(f\mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}(f) + f\ell_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$.

i.3) $\ell_{\mathbf{X}}(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = \ell_{\mathbf{X}}(\mathbf{S}) \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes \ell_{\mathbf{X}}(\mathbf{T})$.

i.4) $\ell_{a\mathbf{X}+b\mathbf{X}}\mathbf{T} = a\ell_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}) + b\ell_{\mathbf{X}}(\mathbf{T})$.

La derivada de Lie de una 1-forma se puede deducir de la derivada Lie de la contracción $\alpha(e_\nu) = \alpha_\nu$ que viene dada por

$$\begin{aligned}\ell_{\mathbf{X}}(\alpha)_\mu &= \ell_{\mathbf{X}}(\alpha)e_\mu \\ &= \ell_{\mathbf{X}}(\alpha(e_\mu)) - \alpha(\ell_{\mathbf{X}}e_\nu) \\ &= \ell_{\mathbf{X}}(\alpha_\mu) - \alpha_\beta [X^\mu C_{\mu\nu}^\beta] + \alpha_\beta X_{;\nu}^\beta,\end{aligned}$$

en la base coordenada esta expresión se reduce a

$$\begin{aligned}\ell_{\mathbf{X}}(\alpha)_\mu &= \mathbf{X}(\alpha) \\ &= X^\mu \alpha_{\nu;\mu} - \alpha_\mu X_{;\nu}^\mu \\ &= \ell_{\mathbf{X}}(\alpha_\mu) - \alpha_\beta [X^\mu C_{\mu\nu}^\beta] + \alpha_\beta X_{;\nu}^\beta.\end{aligned}$$

Usando la relación anterior se puede determinar la derivada de Lie de una forma base ω^ν de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathbf{X}}(\alpha_{\mu}^{\nu}) &= \ell_{\mathbf{X}}(\omega^{\nu})e_{\mu\nu} + \omega^{\nu}(\ell_{\mathbf{X}}e_{\mu}) \\
0 &= \ell_{\mathbf{X}}(\omega^{\nu})e_{\mu\nu} + \omega^{\nu}(\ell_{\mathbf{X}}e_{\mu}) \\
\ell_{\mathbf{X}}(\omega^{\nu})e_{\mu\nu} &= -\omega^{\nu}[\mathbf{X}, e_{\mu}] \\
\ell_{\mathbf{X}}(\omega^{\nu})e_{\mu\nu} &= \omega^{\nu}[e_{\mu}, \mathbf{X}],
\end{aligned}$$

que finalmente se reduce a

$$\ell_{\mathbf{X}}(\omega^{\nu}) = \omega^{\beta}[X_{;\beta}^{\nu} + X^{\mu}C_{\beta\mu}^{\nu}], \quad (2.98)$$

que en una base coordenada se reduce a

$$\ell_{\mathbf{X}}(\omega^{\nu}) = X_{;\beta}^{\nu}\omega^{\beta}. \quad (2.99)$$

Por otro lado se tiene que la derivada exterior de una forma contraído con un vector es dada por

$$\begin{aligned}
(d\alpha)\mathbf{X} &= (\alpha_{\nu;\mu}\omega^{\nu} \wedge \omega^{\mu})X^{\beta}e_{\beta} \\
&= X^{\beta}(\alpha_{\nu;\beta} - \alpha_{\beta;\nu})\omega^{\nu},
\end{aligned}$$

que al sumarlo con el resultado de la derivada exterior de la contracción del $\alpha(\mathbf{X})$ se tiene que

$$\begin{aligned}
d\alpha(\mathbf{X}) + (d\alpha)\mathbf{X} &= (\alpha_{\beta}X_{;\nu}^{\beta}\omega^{\nu} + X^{\beta}\alpha_{\nu;\beta})\omega^{\nu} \\
&= (\ell_{\mathbf{X}}\alpha)_{\nu}\omega^{\nu},
\end{aligned}$$

por lo tanto se puede reescribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathbf{X}}\alpha &= d\alpha(\mathbf{X}) + (d\alpha)\mathbf{X} \\
&= (d \cdot \iota_{\mathbf{X}} + \iota_{\mathbf{X}} \cdot d)\alpha(\mathbf{X}),
\end{aligned}$$

que finalmente se escribe como

$$\ell_{\mathbf{X}} = d \cdot \iota_{\mathbf{X}} + \iota_{\mathbf{X}} \cdot d, \quad (2.100)$$

que es denominada como *formula de H. Cartan* (GRON; SIGBJORN, 2007). Teniendo en cuenta que $d^2 = 0$, este operador cumple que

$$\ell_{\mathbf{X}} \cdot d = d \cdot \ell_{\mathbf{X}} \quad \text{y} \quad [\ell_{\mathbf{X}}, d] = 0. \quad (2.101)$$

2.1.11. Integración de formas y teoremas

Conocidas las propiedades de las formas diferenciales, es pertinente saber cómo se integran estos objetos matemáticos. Para lograr expresar esto de forma clara partamos de una 1-forma diferencial dada por $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_\mu dx^\mu$, donde $x^\mu \equiv x^\mu(\lambda)$ y $0 \leq \lambda \leq t$ es una curva que parametriza un camino c , con lo que se puede escribir dicha forma como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= \alpha_\mu dx^\mu \\ &= \alpha_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} d\lambda,\end{aligned}$$

que se reescribe como,

$$\int_c \boldsymbol{\alpha} = \int_0^t \alpha_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} d\lambda. \quad (2.102)$$

De la propia teoría de las formas diferenciales se sabe que una 1-forma puede ser escrita también como $\boldsymbol{\alpha} = df$, donde f es una 0-forma, de tal forma que si se integra esta 1-forma se obtiene

$$\begin{aligned}\int_c \boldsymbol{\alpha} &= \int_0^t df \\ &= f(c(t)) - f(c(0)),\end{aligned}$$

donde claramente esta integral depende del camino entre dos puntos: el de partida y el de llegada. Así, si el camino es cerrado, es decir, si los puntos de partida y llegada son los mismos, el resultado anterior se reduce a

$$\begin{aligned}\oint_c \boldsymbol{\alpha} &= \oint_c df \\ &= 0.\end{aligned}$$

Del resultado anterior se puede generalizar otro resultado importante. Supongamos que se tienen dos 1-formas \mathbf{A} y \mathbf{A}' que difieren apenas en una forma exacta df , es decir

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + df, \quad (2.103)$$

si esta es integrada sobre una trayectoria cerrada c se tiene que

$$\begin{aligned}
\oint_c \mathbf{A}' &= \oint_c (\mathbf{A} + df) \\
&= \oint_c \mathbf{A} + \oint_c df \\
&= \oint_c \mathbf{A},
\end{aligned}$$

de lo cual se puede hacer una analogía con las transformaciones de calibre en el electromagnetismo, el resultado anterior es equivalente a calibres integrales de lazos invariantes, resultado que se denomina en física como *Lazos de Wilson*.

Se puede también escribir un resultado general para la integración p -formas diferenciales $\mathbf{V} = V_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$ donde V representa una función en una región de frontera M , que integrando se tiene el volumen V en M

$$\begin{aligned}
\int_M \mathbf{V} &= \int \dots \int_M V_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \\
&= \int \dots \int_M V_{\mu_1 \dots \mu_p} \boldsymbol{\epsilon},
\end{aligned}$$

conocido como forma de volumen y es la única cantidad que da una medida de un espacio métrico, donde $\boldsymbol{\epsilon}$ cumple que

$$*\boldsymbol{\epsilon} = 1, \quad (2.104)$$

es decir, que la forma de volumen puede ser expresada mediante el operador dual de Hedge como

$$\boldsymbol{\epsilon} = *1. \quad (2.105)$$

A partir de las relaciones (A,490) y (A,498) se pueden generalizar los teoremas de Stokes y de Gauss. Para las componentes de una 1-forma vectorial $(\mathbf{A})^\beta = a_\nu^\beta dx^\nu$. La aplicación del operador derivada exterior se encuentra la 2-forma dada por

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{A})^\beta &= \partial_\mu a_\nu^\beta dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= (\partial_\mu a_\nu^\beta - \partial_\nu a_\mu^\beta) dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= (\nabla \times \mathbf{A})^\beta dx^\mu \wedge dx^\nu.
\end{aligned}$$

Integrando esta relación se tiene que

$$\int_S d(\mathbf{A})^\beta = \int_S (\nabla \times \mathbf{A})^\beta dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (2.106)$$

donde el lado derecho de esta expresión se transforma en una integral sobre el camino cerrado ∂S que en consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} (\mathbf{A})^\beta &= \int_S (\nabla \times \mathbf{A})^\beta dx^\mu \wedge dx^\nu \\ \oint_{\partial S} a_\nu^\beta dx^\mu &= \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Partiendo de la expresión (A,180) correspondiente al dual de la 1-forma asociada al vector $\mathbf{A} = \alpha^\mu e_\mu$, es decir,

$$\begin{aligned} *\alpha &= *(\alpha_\nu dx^\nu) \\ *(\mathbf{A} \cdot \hat{n}) dx^\nu &= \alpha_\nu * dx^\nu \\ (\mathbf{A} \cdot \hat{n}) * dx^\nu &= \alpha_\nu * dx^\nu \\ (\mathbf{A} \cdot \hat{n}) dx^\mu \wedge dx^\beta &= \alpha_\nu dx^\mu \wedge dx^\beta. \end{aligned}$$

Calculando de nuevo la derivada exterior de esta expresión se tiene que

$$\begin{aligned} d((\mathbf{A} \cdot \hat{n}) dx^\mu \wedge dx^\beta) &= d(\alpha_\nu dx^\mu \wedge dx^\beta) \\ &= \partial_\nu \alpha_\nu dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^\beta \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{A}) dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^\beta \end{aligned}$$

la integral de este resultado en una región con volúmen M se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial M} (\mathbf{A} \cdot \hat{n}) dx^\mu \wedge dx^\beta &= \int_M (\nabla \cdot \mathbf{A}) dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^\beta \\ \oint_{\partial M} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} &= \int_M (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \\ \oint_{\partial M} *\alpha &= \int_M d*\alpha. \end{aligned}$$

Estos resultados se pueden generalizar en una sola expresión. Dada una variedad diferenciable M de dimensión n con borde en ∂M , si α es una $(n-1)$ -forma, entonces se cumple que

$$\int_{\partial M} \boldsymbol{\omega} = \int_M d\boldsymbol{\omega}, \quad (2.107)$$

donde d es la derivada exterior, que se define usando solamente la estructura de variedad. El teorema es la generalización del teorema fundamental del cálculo.

2.1.12. Curvatura y el tensor de Riemann

En secciones anteriores se estudiaron conceptos como la derivada covariante, la conexión de Kozul y la derivada de Lie y cómo se relacionan entre sí. Mientras que la derivada covariante dio una noción de cómo un vector cambia localmente al ser transportado paralelamente en una variedad, mientras que la derivada de Lie mostró que si yo tomo dos caminos y hago el transporte paralelo de un vector por cada uno de ellos no necesariamente terminan en el mismo punto. La razón por la cual sucede esto es simple, la variedad tiene curvatura.

Se puede afirmar entonces que: una variedad es curva si el transporte paralelo de un vector a través de una curva cerrada resulta en un vector diferente al volver en el punto de salida. De esta definición queda claro que la curvatura de una variedad está relacionada con la manera en que hacemos el transporte paralelo en la variedad y por lo tanto con la conexión ∇ que hemos elegido.

Para dar una definición matemática usemos el concepto de la derivada de Lie entre dos operadores vectoriales ∇_μ y ∇_ν aplicada sobre las componentes de un vector contravariante V^λ . En otras palabras es calcular el cambio en las componentes de un vector contravariante V^λ transportado paralelamente a lo largo de dos caminos infinitesimales dx^μ , dx^ν definidos a partir de dos curvas paramétricas x^μ y x^ν mediante la aplicación de

$$\begin{aligned} \ell_{e_\mu}(e_\nu)V^\lambda &= [e_\mu, e_\nu]V^\lambda \\ &= e_\mu(e_\nu V^\lambda) - e_\nu(e_\mu V^\lambda) \\ &= V^\rho (\Gamma_{\rho\nu;\mu}^\lambda - \Gamma_{\rho\mu;\nu}^\lambda + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho) \\ &\quad + V^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\lambda (\Gamma_{\nu\mu}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\beta) + V_{;\beta}^\lambda (\Gamma_{\nu\mu}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\beta), \end{aligned}$$

que se reescribe como

$$\begin{aligned} [e_\mu, e_\nu]V^\lambda - V_{;\beta}^\lambda (\Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\nu\mu}^\beta) &= V^\rho (\Gamma_{\rho\nu;\mu}^\lambda - \Gamma_{\rho\mu;\nu}^\lambda + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho) \\ &\quad + V^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\lambda (\Gamma_{\nu\mu}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\beta) \\ ([e_\mu, e_\nu] - \nabla_{[e_\mu, e_\nu]})V^\rho &= (\Gamma_{\rho\nu;\mu}^\lambda - \Gamma_{\rho\mu;\nu}^\lambda + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - C_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\rho\beta}^\lambda - T_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\rho\beta}^\lambda)V^\rho, \end{aligned}$$

con lo cual

$$R(e_\mu, e_\nu) = R_{\rho\mu\nu}^\lambda - T_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\rho\beta}^\lambda, \quad (2.108)$$

expresión compuesta de dos partes. Una parte es proporcional a vector V^ρ , donde el factor de proporcionalidad $R_{\rho\mu\nu}^\lambda$ es el tensor de Riemann. Esta parte mide la diferencia entre el transporte paralelo de V^ρ por una trayectoria y por otra; es por lo tanto una medida de la curvatura del espacio encerrado en el paralelogramo (véase la figura 2.3) y que es un tensor de rango (1,3).

La segunda parte es proporcional a la derivada covariante de V^ρ y el factor de proporcionalidad $T_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\rho\beta}^\lambda$ es la parte antisimétrica de la conexión y $T_{\mu\nu}^\beta$ se denomina tensor de Torsión, que es de rango (1,2) y mide el grado en que cierra el paralelogramo de rango (1,2).

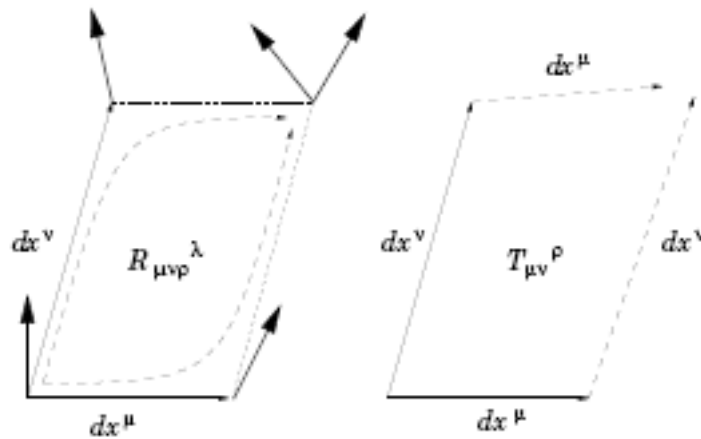


Figura 2.3 – Representación gráfica de los tensores de Riemann ($R_{\rho\mu\nu}^\lambda$) que mide la curvatura encerrada en el paralelogramo y de Torsión ($T_{\mu\nu}^\beta$) que mide hasta qué punto el paralelogramo está cerrado (JANSENN, 2013).

En otras palabras, en general el paralelogramo infinitesimal formado por dx^μ , dx^ν , $dx^{\mu'}$ y $dx^{\nu'}$ no necesariamente cierra, esto solo ocurre si se restringen las conexiones a conexiones simétricas (una de las condiciones para la conexión de Levi-Civita), donde el tensor de torsión es cero. En particular, si el tensor de Riemann es cero, el transporte paralelo de un vector no depende de la trayectoria, lo que implica que la variedad es plana.

Dado el carácter tensorial de $R_{\rho\mu\nu}^\lambda$, si el tensor de Riemann es cero en coordenadas cartesianas también lo será en cualquier otro tipo de coordenadas curvilíneas, aunque las conexiones no necesariamente lo sean. Definimos por lo tanto que una variedad es plana si todas las componentes del tensor de Riemann son idénticamente cero. Por ende, una variedad tiene curvatura si por lo menos una componente es distinta de cero.

Se puede ver que cambiando la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\rho \rightarrow \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho + K_{\mu\nu}^\rho$ donde $K_{\mu\nu}^\rho$ es un tensor arbitrario, el tensor de Riemann (y por lo tanto la curvatura) cambian

$$\hat{R}(e_\mu, e_\nu) = R(e_\mu, e_\nu) + \nabla_\mu K_{\mu\nu}^\rho - \nabla_\nu K_{\mu\rho}^\lambda + K_{\mu\beta}^\lambda K_{\nu\rho}^\beta - K_{\nu\beta}^\lambda K_{\mu\rho}^\beta - C_{\mu\nu}^\beta K_{\beta\rho}^\lambda - T_{\mu\nu}^\beta K_{\beta\rho}^\lambda. \quad (2.109)$$

Vemos por lo tanto que una variedad que tiene curvatura con cierta conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, puede ser plana con una elección apropiada de una nueva conexión $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$, y viceversa. Mediante la misma derivada de Lie podemos calcular el conmutador sobre escalares ϕ y tensores $S_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{\rho_1 \dots \rho_n}$ en general se tiene que

$$\begin{aligned} [e_\mu, e_\nu]\phi &= e_\mu(e_\nu\phi) - e_\nu(e_\mu\phi) \\ &= \phi_{;\nu\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho \phi_{;\rho} - \phi_{;\mu\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \phi_{;\rho} \\ &= (\phi_{;\nu\mu} - \phi_{;\mu\nu}) - (\Gamma_{\nu\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho) \phi_{;\rho} \\ &= -C_{\mu\nu}^\rho \phi_{;\rho} - T_{\mu\nu}^\rho \phi_{;\rho} \end{aligned}$$

y para un tensor se tiene que

$$\begin{aligned} \left\{ [e_\mu, e_\nu] - \nabla_{[e_\mu, e_\nu]} \right\} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \rho_m} &= R_{\mu\nu\sigma}^{\rho_1} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\sigma \dots \rho_m} + \dots + R_{\mu\nu\sigma}^{\rho_m} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \sigma} \\ &\quad - R_{\mu\nu\lambda_1}^\sigma S_{\sigma \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \rho_m} - \dots - R_{\mu\nu\lambda_m}^\sigma S_{\lambda_1 \dots \sigma}^{\rho_1 \dots \rho_m} \\ &\quad - C_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\sigma\beta}^{\rho_1} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\sigma \dots \rho_m} - \dots - C_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\sigma\beta}^{\rho_m} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \sigma} \\ &\quad + C_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\lambda_1\beta}^\sigma S_{\sigma \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \rho_m} + \dots + C_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\lambda_m\beta}^\sigma S_{\lambda_1 \dots \sigma}^{\rho_1 \dots \rho_m} \\ &\quad - T_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\sigma\beta}^{\rho_1} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\sigma \dots \rho_m} - \dots - T_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\sigma\beta}^{\rho_m} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \sigma} \\ &\quad + T_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\lambda_1\beta}^\sigma S_{\sigma \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \rho_m} + \dots + T_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\lambda_m\beta}^\sigma S_{\lambda_1 \dots \sigma}^{\rho_1 \dots \rho_m}, \end{aligned}$$

que se reduce a

$$\begin{aligned} [e_\mu, e_\nu] S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \rho_m} &= R_{\mu\nu\sigma}^{\rho_1} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\sigma \dots \rho_m} + \dots + R_{\mu\nu\sigma}^{\rho_m} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \sigma} \\ &\quad - R_{\mu\nu\lambda_1}^\sigma S_{\sigma \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \rho_m} - \dots - R_{\mu\nu\lambda_m}^\sigma S_{\lambda_1 \dots \sigma}^{\rho_1 \dots \rho_m} \\ &\quad - C_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\sigma\beta}^{\rho_1} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\sigma \dots \rho_m} - \dots - C_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\sigma\beta}^{\rho_m} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \sigma} \\ &\quad + C_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\lambda_1\beta}^\sigma S_{\sigma \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \rho_m} + \dots + C_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\lambda_m\beta}^\sigma S_{\lambda_1 \dots \sigma}^{\rho_1 \dots \rho_m} \\ &\quad - T_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\sigma\beta}^{\rho_1} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\sigma \dots \rho_m} - \dots - T_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\sigma\beta}^{\rho_m} S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \sigma} \\ &\quad + T_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\lambda_1\beta}^\sigma S_{\sigma \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \rho_m} + \dots + T_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\lambda_m\beta}^\sigma S_{\lambda_1 \dots \sigma}^{\rho_1 \dots \rho_m} \\ &\quad - C_{\mu\nu}^\beta \nabla_\beta S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \rho_m} - T_{\mu\nu}^\beta \nabla_\beta S_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{\rho_1 \dots \rho_m}. \end{aligned}$$

Del tensor de Curvatura de Riemann se puede ver que una forma de curvatura viene dada por

$$\mathbf{R}_v^\mu = (\Gamma_{v\rho;\lambda}^\mu - C_{\lambda\rho}^\beta \Gamma_{v\beta}^\mu + \Gamma_{\rho v}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho) \omega^\lambda \wedge \omega^\rho, \quad (2.110)$$

y que usando la ecuación de estructura de Cartan se puede reescribir como

$$\mathbf{R}_v^\mu = d\Omega_v^\mu + \Omega_\lambda^\mu \wedge \Omega_v^\lambda \quad (2.111)$$

que es denominada *Segunda Ecuación de estructura de Cartan*.

El tensor de curvatura posee algunas propiedades bastante interesantes que exploraremos a continuación. A partir de las componentes de la derivada covariante de un vector contravariante ($A_{;\lambda}^\mu$) se puede calcular la expresión

$$A_{;\lambda\rho}^\mu = A^\beta \Gamma_{\beta\lambda;\rho}^\mu - A^\beta \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\mu - A_{;\beta}^\beta \Gamma_{\lambda\rho}^\beta + A_{;\lambda\rho}^\mu + (A_{;\rho}^\beta \Gamma_{\beta\lambda}^\mu - A_{;\lambda}^\beta \Gamma_{\beta\rho}^\mu). \quad (2.112)$$

Haciendo el cálculo de $A_{;\rho\lambda}^\mu$ y restándolo a la expresión anterior se tiene que

$$A_{;\lambda\rho}^\mu - A_{;\rho\lambda}^\mu = A^\beta R_{\beta\rho\lambda}^\mu - A_\beta^\mu C_{\rho\lambda}^\beta - A_\beta^\mu T_{\rho\lambda}^\beta, \quad (2.113)$$

que se le denomina Identidad de Ricci y en una base coordenada se reduce a

$$A_{;\lambda\rho}^\mu - A_{;\rho\lambda}^\mu = A^\beta R_{\beta\rho\lambda}^\mu. \quad (2.114)$$

Combinando esta expresión con

$$\begin{aligned} d^2A &= \frac{1}{2} A_{;\lambda\rho}^\mu e_\mu \otimes \omega^\lambda \wedge \omega^\rho \\ &= \frac{1}{2} (A_{;\lambda\rho}^\mu - A_{;\rho\lambda}^\mu) e_\mu \otimes \omega^\lambda \wedge \omega^\rho, \end{aligned}$$

se puede construir una 2-forma vectorial dada por

$$d^2A = \frac{1}{2} R_{\beta\rho\lambda}^\mu A^\beta e_\mu \otimes \omega^\lambda \wedge \omega^\rho. \quad (2.115)$$

Calculando la derivada exterior de la primera ecuación de estructura de Cartan, combinándola con la segunda ecuación de estructura de Cartan y el teorema de Poncaré se tiene

$$\mathbf{R}_\nu^\mu \wedge \omega^\nu = d\mathbf{T}^\mu + \Omega_\nu^\mu \wedge \mathbf{T}^\nu, \quad (2.116)$$

que por medio de la derivada covariante exterior se reduce a

$$\mathbf{R}_\nu^\mu \wedge \omega^\nu = D\mathbf{T}^\mu, \quad (2.117)$$

denominada *Primera Identidad de Bianchi*, que en geometría de Riemann se reduce a

$$\mathbf{R}_\nu^\mu \wedge \omega^\nu = 0, \quad (2.118)$$

cuyas componentes vienen dadas por

$$R_{[\nu\lambda\rho]}^\mu = 0. \quad (2.119)$$

Tomando la derivada exterior de la segunda ecuación de estructura de Cartan y combinándola con el teorema de Poncairé se tiene

$$\begin{aligned} d\mathbf{R}_\nu^\mu &= d\Omega_\lambda^\mu \wedge \Omega_\nu^\lambda - \Omega_\lambda^\mu \wedge d\Omega_\nu^\lambda \\ &= \mathbf{R}_\lambda^\mu \wedge \Omega_\nu^\lambda - \Omega_\lambda^\mu \wedge \mathbf{R}_\nu^\lambda, \end{aligned}$$

que se escribe usualmente como

$$d\mathbf{R}_\nu^\mu + \Omega_\lambda^\mu \wedge \mathbf{R}_\nu^\lambda - \mathbf{R}_\lambda^\mu \wedge \Omega_\nu^\lambda = 0. \quad (2.120)$$

Usando la derivada exterior covariante de una matriz de dos forma se tiene que

$$D\mathbf{R}_\nu^\mu = 0, \quad (2.121)$$

denominada *Segunda Identidad de Bianchi*, cuyas componentes son

$$R_{\nu[\lambda\rho;\gamma]}^\mu = 0. \quad (2.122)$$

Otras simetrías del tensor de curvatura son

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\nu\mu\lambda\rho} \quad (2.123)$$

y

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = R_{\lambda\rho\mu\nu}. \quad (2.124)$$

Tomando $\mu = \nu$ en las componentes de la primera identidad de Bianchi se tiene

$$R^{\mu}_{\mu\lambda\rho} = 0, \quad (2.125)$$

que por la antisimetría se tiene

$$\begin{aligned} R^{\mu}_{\mu\lambda\rho} &= -R^{\mu}_{\lambda\mu\rho} \\ &= R^{\lambda}_{\rho}, \end{aligned}$$

tensor que tiene solo dos componentes independientes y se denomina *Tensor de Ricci*. Si se contraen los dos índices de este tensor se tiene que

$$R^{\rho}_{\rho} = R, \quad (2.126)$$

que se le denomina *Escalar de Ricci*.

2.1.13. Geodésicas afín y métrica con conexión generalizada

En \mathbb{R}^N las rectas son curvas muy especiales por diversas razones, la más importante para nuestro estudio es que ellas representan la distancia más corta entre dos puntos P y Q , además, el vector tangente es transportado paralelamente a sí mismo a lo largo de la curva. Generalicemos estos conceptos para cualquier tipo de variedades. Partiendo de la expresión del transporte paralelo

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{U} &= 0 \\ U^{\nu}e_{\nu}(U^{\mu}e_{\mu}) &= 0 \\ U^{\nu}(\partial_{\nu}U^{\mu} + U^{\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu})e_{\mu} &= 0, \end{aligned}$$

usando la regla de la cadena, la expresión anterior se reduce a

$$\ddot{x}^\mu(\tau) + \Gamma_{\nu\beta}^\mu \dot{x}^\nu(\tau) \dot{x}^\beta(\tau) = 0, \quad (2.127)$$

a la función que satisface esta ecuación se le denomina *Geodésica Afín*, que son las curvas más rectas que se pueden definir en una variedad.

Partiendo ahora de la distancia más corta entre dos puntos dada por

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} \\ &= dx^\mu e_\mu \cdot dx^\nu e_\nu \\ &= e_\mu \cdot e_\nu dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau) d\tau^2, \end{aligned}$$

en forma integral esta expresión se escribe como

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau)} d\tau, \quad (2.128)$$

expresión que no se altera si se toman cambios infinitesimales en

$$x^\nu(\tau) \sim x^\nu(\tau) + \delta x^\nu(\tau) \quad (2.129)$$

y

$$g_{\mu\nu}(x) \sim g_{\mu\nu}(x) + \partial_\rho g_{\mu\nu}(x) \delta x^\rho(\tau). \quad (2.130)$$

La geodésica es la curva que cumple que $\delta s = 0$. como

$$s = \int_a^b L(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau, \quad (2.131)$$

y tiene que cumplir la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\delta L}{\delta x^\mu} = 0. \quad (2.132)$$

Para simplificar los cálculos, se multiplica por $2L$ esta ecuación

$$2L \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^\mu} \right) - 2L \frac{\delta L}{\delta x^\mu} = 0. \quad (2.133)$$

Por otro lado se tienen

$$\frac{\delta}{\delta x^\mu}(L^2) = 2L \frac{\delta L}{\delta x^\mu} \quad (2.134)$$

y

$$\frac{\delta}{\delta \ddot{x}^\mu}(L^2) = 2L \frac{\delta L}{\delta \ddot{x}^\mu}. \quad (2.135)$$

Si se toma la derivada con respecto a τ de la última expresión se tiene que

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\delta}{\delta \ddot{x}^\mu}(L^2) = 2 \frac{dL}{d\tau} \frac{\delta L}{\delta \ddot{x}^\mu} + 2L \frac{d}{d\tau} \frac{\delta L}{\delta \ddot{x}^\mu}, \quad (2.136)$$

restando a esta expresión la expresión (A.419) se tiene que

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\delta}{\delta \ddot{x}^\mu}(L^2) - \frac{\delta}{\delta x^\mu}(L^2) = 2 \frac{dL}{d\tau} \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^\mu}. \quad (2.137)$$

Sustituyendo $L^2 = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau)$ en la ecuación anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\delta}{\delta \ddot{x}^\mu}(L^2) - \frac{\delta}{\delta x^\mu}(L^2) &= \frac{d}{d\tau} \frac{\delta}{\delta \ddot{x}^\mu}(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) - \frac{\delta}{\delta x^\mu}(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) \\ &= 2g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + 2\partial_\rho g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \partial_\mu g_{\rho\nu} \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu \\ &= 2g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + 2g_{\mu\lambda} \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 2 \frac{dL}{d\tau} \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^\mu} &= 2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{ds}{d\tau} \right) \frac{\delta}{\delta \dot{x}^\mu} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \\ &= 2s^{-1} g_{\mu\lambda} \dot{x}^\lambda \ddot{s} \\ &= 2g_{\mu\lambda} \dot{x}^\lambda \left(\frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \right), \end{aligned}$$

con lo que en definitiva se escribe la ecuación

$$2g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + 2g_{\mu\lambda} \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 2g_{\mu\lambda} \dot{x}^\lambda \left(\frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \right), \quad (2.138)$$

donde se puede ver que la función s no tiene un significado físico en esta expresión y por lo tanto se puede escoger una parametrización para esta función que haga que el lado derecho de esta ecuación sea nulo, por ejemplo se escoge

$$s \equiv s(\tau) = \tau + a, \quad (2.139)$$

con este resultado la ecuación (A.427) se reduce a

$$2g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + 2g_{\mu\lambda}\Gamma_{\nu\rho}^\lambda\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0, \quad (2.140)$$

que se le denomina *Geodésica Métrica* y en general no coincide con la *Geodésica Afín*.

3 FUNDAMENTOS DE LA RELATIVIDAD GENERAL

La Teoría de la Relatividad General introducida por Einstein a principios del siglo XX es fundamentalmente una nueva formulación de la teoría de la gravedad newtoniana en la que la interacción gravitatoria ya no es instantánea y a distancia, sino producida por un campo intermediario por medio del cual se propaga la fuerza gravitatoria a velocidad finita. Campo que aparece como consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo generado por el contenido de materia presente. Un principio fundamental en esta teoría es el principio de equivalencia, que establece que:

“En cada punto del espacio-tiempo en el que exista un campo gravitatorio arbitrario, es siempre posible escoger un sistema de coordenadas localmente inercial tal que, en un entorno suficientemente pequeño alrededor de dicho punto, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en los sistemas inerciales de la relatividad especial en ausencia de fuerzas gravitatorias” (SÁNCHEZ, 2015).

Lo revolucionario de esta teoría se encuentra en la identificación de la profunda relación que existe entre el campo gravitatorio y la curvatura del espacio-tiempo. Dicha curvatura es definida matemáticamente a través de la métrica, que como ya sabemos de su definición en el capítulo anterior, no es más que un objeto matemático que describe las propiedades geométricas del espacio.

Las bases de esta teoría son un conjunto de postulados contruidos de tal forma que las ecuaciones que describen la dinámica de los sistemas físicos en los límites de energías y velocidades bajas se reduzcan a sus versiones homólogas en la teoría newtoniana y la Relatividad Especial, postulados que serán enunciados a continuación.

3.1. Postulados

3.1.1. Primer postulado

El espacio-tiempo está descrito por una variedad 4-dimensional M y una métrica lorentziana $g_{\mu\nu}$ que vive sobre M . Espacio en el cual la curvatura está definida por el tensor de curvatura de Riemann

$$R^{\lambda}_{\rho\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu;\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu;\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\rho\mu}, \quad (3.1)$$

donde

$$\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\beta} \{g_{\beta\rho;\nu} + g_{\beta\nu;\rho} - g_{\rho\nu;\beta}\} \quad (3.2)$$

es la conexión afín escrita en función de las derivadas de las componentes del tensor métrico $g_{\rho\nu}$. A partir de la contracción de $\mu = \lambda$ en la expresión de las componentes en la segunda identidad de Bianchi se obtiene la divergencia del tensor de Ricci dada por

$$\begin{aligned} R_{\nu\mu\rho;\gamma}^{\mu} + R_{\nu\gamma\mu;\rho}^{\mu} + R_{\nu\rho\gamma;\mu}^{\mu} &= R_{\nu\rho;\gamma} - R_{\nu\gamma;\rho} + R_{\nu\rho\gamma;\mu}^{\mu} \\ &= 0, \end{aligned}$$

que al realizar la contracción de ν y γ ($\nu = \gamma$) se demuestra

$$R_{\rho;\nu}^{\nu} - R_{;\rho} + R_{\rho;\mu}^{\mu} = 0. \quad (3.3)$$

Expresión en la que si se considera un tensor de orden dos cuya divergencia es cero (tensor de divergencia libre $E_{\mu;\nu}^{\nu} = 0$) se demuestra

$$\begin{aligned} E_{\mu;\nu}^{\nu} &= (R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R)_{;\nu} \\ &= 0, \end{aligned}$$

de la que finalmente se escribe la expresión

$$E_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R, \quad (3.4)$$

denominada *tensor de curvatura de Einstein* (GRON; SIGBJORN, 2007).

3.1.2. Segundo postulado

Conservación local de la energía: Existe un tensor simétrico que es función de los campos de materia ϕ_j y sus derivadas $T_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}(\phi_j, \partial_i\phi_j) \rightarrow T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, tal que

1. $T_{\mu\nu} = 0$ sobre $U \subset M$ si y solo si $\phi_j = 0$ para todo ϕ_j sobre U donde $i, j = 1, 2, 3 \dots$.
2. $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$.

3.1.3. Tercer postulado

La métrica sobre la variedad espacio-tiempo (M, g) está dada por la ecuación de campo de Einstein

$$8\pi GT_{\nu\mu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R, \quad (3.5)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento que satisface la relación

$$E_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

Lo anterior pone en evidencia que las partículas no experimentan una aceleración por fuerzas sino que siguen trayectorias geodésicas en un espacio-tiempo curvos definidas por

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} = 0. \quad (3.7)$$

Expresión aplicada a partículas con masa cuyos vectores tangentes (es decir velocidades U^{μ}) están normalizados ($g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = -1$), mientras que para partículas de masa nula, cuyos vectores tangentes (K^{μ}) tienen norma nula ($g_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} = 0$) y donde el ente que genera esta curvatura del espacio tiempo es cualquier forma de energía-materia (SÁNCHEZ, 2015).

4 COSMOLOGÍA

4.1. Modelo estándar de la cosmología

4.1.1. Principio cosmológico

El principio cosmológico establece que el espacio es isotrópico y homogéneo, lo que puede ser justificado desde el punto de vista teórico por medio de los siguientes principios:

- Principio de razón suficiente: No hay razón para que unas direcciones espaciales sean distintas o preferidas respecto de otras.
- Principio de Mach: la estructura del espacio está determinada por la distribución de materia; si esta es homogénea e isotrópica, así lo será el espacio.

Experimentalmente la observación indica que la distribución de materia a gran escala es isótropa y homogénea, pero a simple vista es difícil percibir este hecho. Una explicación para este problema de percepción espacial puede provenir de la relatividad general, al permitirnos afirmar que es posible elegir un tiempo universal tal que en cada instante la materia espacial sea la misma en todo punto y dirección.

En otras palabras se puede decir que existe entonces un S de referencia desde donde el universo aparece isotrópico y homogéneo, pero existen otras S que ocultan esta simetría. Este S preferido que se le denomina "Sistema de acompañamiento", es un sistema que se encuentra en reposo en cada instante respecto a la materia en ese punto, es decir, que está sumado al fluido galáctico y viaja con él (JANSENN, 2013; GRON; SIGBJORN, 2007).

4.1.2. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

Los conceptos que se presentan a continuación fueron deducidos siguiendo un esquema que combina conceptos presentados en los textos de referencia consultados en este trabajo (ISLAM, 2001; GRON; SIGBJORN, 2007; JANSENN, 2013). Por tal motivo, se hace uso del lenguaje matemático presentado en el capítulo II, que forma parte de enfoques más modernos de la Física Teórica. En este orden de ideas, se asume la signatura del elemento diferencial de longitud $(-, +, +, +)$ y el valor de la velocidad de la luz como $c = 1$.

En el espacio-tiempo de Mikowski un elemento de línea en coordenadas esféricas se expresa matamáticamente por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{seno}^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

como se requiere las condiciones de homogeneidad e isotropía se puede considerar un elemento de línea dado por una forma más general que equipare las componentes espaciales y temporales tal que todas las direcciones sean iguales. Esta métrica puede ser

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(g(r')dr'^2 + h(r')r'^2(d\theta^2 + \text{seno}^2\theta d\phi^2)). \quad (4.2)$$

Introduciendo una coordenada radial $r = \sqrt{h(r')}r'$ se tiene que

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{seno}^2\theta d\phi^2)). \quad (4.3)$$

Esa función $A(r)$ puede ser cualquier función. Podemos facilitar el trabajo si escogemos que $A(r) = e^{2\alpha(r)}$, con lo que se reescribe la expresión anterior como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(e^{2\alpha(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{seno}^2\theta d\phi^2)). \quad (4.4)$$

Gracias al formalismo de Cartan introducimos una base ortonormal dada por

$$\begin{cases} \omega^{\hat{t}} = dt, \\ \omega^{\hat{r}} = a(t)e^{\alpha(r)}dr, \\ \omega^{\hat{\theta}} = a(t)r d\theta \\ y \\ \omega^{\hat{\phi}} = a(t)r \text{seno}\theta d\phi, \end{cases}$$

que al calcular la derivada exterior de esa base se encuentran las siguientes relaciones

$$\begin{cases} d\omega^{\hat{t}} = 0, \\ d\omega^{\hat{r}} = \frac{a'(t)}{a(t)}\omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{r}}, \\ d\omega^{\hat{\theta}} = \frac{a'(t)}{a(t)}\omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} + \frac{e^{-\alpha(r)}}{a(t)}\omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\theta}}, \\ y \\ d\omega^{\hat{\phi}} = \frac{a'(t)}{a(t)}\omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} + \frac{e^{-\alpha(r)}}{a(t)r}\omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} + \frac{\text{cotg}\theta}{a(t)r}\omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}, \end{cases}$$

mediante lo cual se definen los

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{\hat{r}}^{\hat{r}} = \Omega_{\hat{t}}^{\hat{r}} = \frac{a'(t)}{a(t)} \omega^{\hat{r}}, \\ \Omega_{\hat{\theta}}^{\hat{r}} = \Omega_{\hat{t}}^{\hat{\theta}} = \frac{a'(t)}{a(t)} \omega^{\hat{\theta}}, \\ \Omega_{\hat{\phi}}^{\hat{r}} = \Omega_{\hat{t}}^{\hat{\phi}} = \frac{a'(t)}{a(t)} \omega^{\hat{\phi}}, \\ \Omega_{\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = -\Omega_{\hat{r}}^{\hat{\theta}} = -\frac{e^{-\alpha(r)}}{a(t)r} \omega^{\hat{\theta}}, \\ \Omega_{\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} = -\Omega_{\hat{r}}^{\hat{\phi}} = -\frac{e^{-\alpha(r)}}{a(t)r} \omega^{\hat{\phi}}, \\ \text{y} \\ \Omega_{\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -\Omega_{\hat{\theta}}^{\hat{\phi}} = -\frac{\cot \theta}{a(t)r} \omega^{\hat{\phi}}. \end{array} \right.$$

De la segunda ecuación de estructura de Cartan

$$R_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} = d\Omega_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} + \Omega_{\hat{\rho}}^{\hat{\mu}} \wedge \Omega_{\hat{\nu}}^{\hat{\rho}} \quad (4.5)$$

se encuentran las siguientes formas de curvatura

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\hat{t}}^{\hat{t}} = \frac{a''(t)}{a(t)} \omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{t}}, \\ R_{\hat{\theta}}^{\hat{r}} = \left[\left(\frac{a'(t)}{a(t)} \right)^2 + \frac{\alpha'(r)e^{-2\alpha(r)}}{a^2(t)r} \right] \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\theta}}, \\ R_{\hat{\phi}}^{\hat{r}} = \left[\left(\frac{a'(t)}{a(t)} \right)^2 + \frac{\alpha'(r)e^{-2\alpha(r)}}{a^2(t)r} \right] \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}, \\ \text{y} \\ R_{\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} = \left[\left(\frac{a'(t)}{a(t)} \right)^2 + \left(\frac{1}{a(t)r} \right)^2 - \left(\frac{e^{-\alpha(r)}}{a(t)r} \right)^2 \right] \omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}, \end{array} \right.$$

donde $i = r, \theta, \phi$. Como estas deben ser iguales en todas las direcciones espaciales, igualamos los coeficientes de las dos últimas expresiones y obtenemos la ecuación diferencial

$$-\frac{r}{2a^2(t)} \left[\frac{1 - e^{-2\alpha(r)}}{r^2} \right]' = 0, \quad (4.6)$$

que tiene como solución

$$e^{\alpha(r)} = \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (4.7)$$

con lo cual, el elemento diferencial de línea se puede reescribir como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (4.8)$$

donde el tensor métrico viene dado por

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}.$$

Para poder entender cuál es el significado de k reescalamos la ecuación (4,8) mediante el cambio de variables $r = r' / \sqrt{|K|}$, encontrando entonces

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)|k|^{-1} \left[\frac{dr'^2}{1-k'r'^2} + r'^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad \text{con } k' = k|k|^{-1}. \quad (4.9)$$

Es evidente que el valor de k modifica la geometría de nuestro universo para los siguientes casos

$$ds^2 = \begin{cases} -dt^2 + a^2(t)|k|^{-1} \left[\frac{dr'^2}{1-k'r'^2} + r'^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] & \text{si } k \neq 0 \\ -dt^2 + a^2(t) \left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Analizando los casos posibles para k . Si tomamos $k \neq 0$, escojamos el primer caso $k > 0$ que por simplicidad se tomó $k' = 1$, con lo cual la parte espacial queda como

$$ds'^2 = |k|^{-1} \left[\frac{dr'^2}{1-r'^2} + r'^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad \text{con } -1 \leq r' \leq 1. \quad (4.10)$$

Si se hace el cambio de variables $r' = \text{senh}\xi$ la expresión (4,10) se transforma en

$$ds'^2 = |k|^{-1} \left[d\xi^2 + \text{sen}^2\xi (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (4.11)$$

que es el elemento de línea de una esfera en \mathbb{R}^3 con radio $k^{-\frac{1}{2}}$. Para ver esto, tal esfera debe ser embebida en un espacio S^4 y tomar $k^{-\frac{1}{2}}\text{sen}\xi$ como la proyección del radio de la esfera en S^4 sobre una esfera tridimensional. Encontramos que las ecuaciones para las coordenadas de la esfera tetradimensional son

$$\begin{cases} x^1 = k^{-\frac{1}{2}}\text{sen}\xi \cos\phi \text{sen}\theta, \\ x^2 = k^{-\frac{1}{2}}\text{sen}\xi \text{sen}\phi \text{sen}\theta, \\ x^3 = k^{-\frac{1}{2}}\text{sen}\xi \cos\theta, \\ y = k^{-\frac{1}{2}}\text{sen}\xi, \\ x^4 = k^{-\frac{1}{2}}\cos\xi, \end{cases}$$

que satisface la ligadura

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = k^{-1}. \quad (4.12)$$

Para el caso en que $K < 1$ y se toma ahora $k' = -1$, se encuentra que el elemento diferencial de longitud queda como

$$ds'^2 = |k|^{-1} \left[\frac{dr'^2}{1+r'^2} + r'^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (4.13)$$

que al hacer el cambio $r = \text{senh}\xi$ escribe

$$ds'^2 = |k|^{-1} \left[d\xi^2 + \text{senh}^2\xi(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (4.14)$$

Como la estructura del diferencial de longitud en el espacio-tiempo viene dada por

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (4.15)$$

donde se hace evidente que la ligadura para esta expresión es

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = k^{-1}, \quad (4.16)$$

que debe tener las siguientes coordenadas

$$\begin{cases} x^0 & = & k^{-\frac{1}{2}} \cosh\phi, \\ x^1 & = & k^{-\frac{1}{2}} \text{senh}\xi \cos\phi \text{sen}\theta, \\ x^2 & = & k^{-\frac{1}{2}} \text{senh}\xi \text{sen}\phi \text{sen}\theta \\ y & & \\ x^3 & = & k^{-\frac{1}{2}} \text{senh}\xi \cos\theta. \end{cases}$$

Se pueden englobar todos estos resultados en la siguiente expresión mucho más general

$$ds^2 = -dt^2 + S(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (4.17)$$

donde

$$S(t) = \begin{cases} a(t)k^{-\frac{1}{2}} & \text{si } k \neq 0 \\ a(t) & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Que muestra cómo es la expresión del elemento diferencial de longitud cambia en cada uno de los universos posibles dependiendo del valor escogido de k , ver figura 4.1.

Acompañado con las formas de curvatura

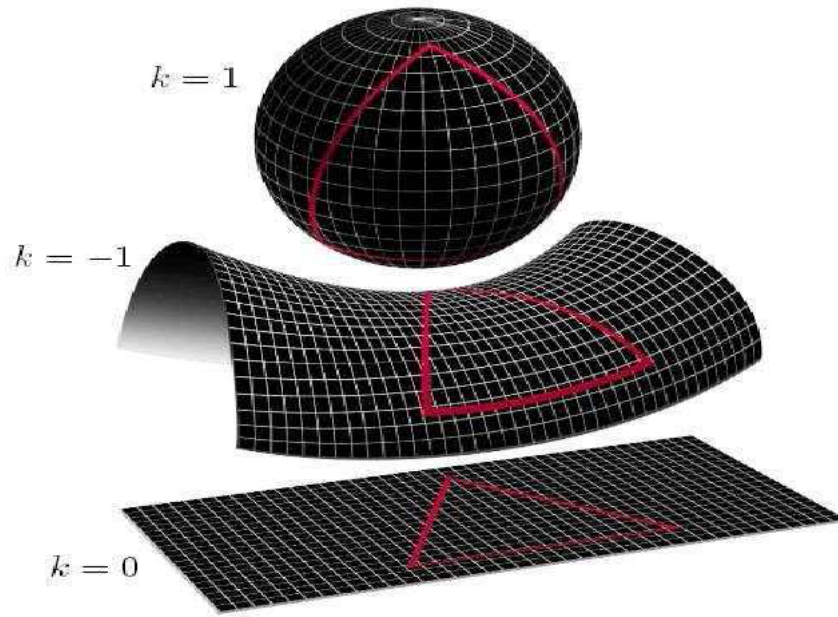


Figura 4.1 – Geometría espacial del universo en función de la constante k que corresponde a un universo cerrado, $k = 1$ a uno abierto y $k = 0$ a uno plano (SÁNCHEZ, 2015).

$$\begin{cases} R_{\hat{i}}^{\hat{i}} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \omega^{\hat{i}} \wedge \omega^{\hat{i}} & \text{con } i = r, \theta, \phi \\ R_{\hat{i}}^{\hat{j}} = \left(\frac{a(t)^2 + k}{a^2(t)} \right) \omega^{\hat{j}} \wedge \omega^{\hat{i}} & \text{con } i, j = r, \theta, \phi, \end{cases}$$

reescritas así por medio de la expresión (4.7). Por otro lado, las componentes del tensor de Riemann se calculan haciendo la contracción

$$\begin{aligned} \iota_{R_{\hat{\nu}}}^{\hat{\mu}}(\hat{e}_{\hat{\rho}} \otimes \hat{e}_{\hat{\gamma}}) &= R_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\mu}}(\omega^{\hat{\alpha}} \wedge \omega^{\hat{\beta}} - \omega^{\hat{\beta}} \wedge \omega^{\hat{\alpha}})\hat{e}_{\hat{\rho}} \otimes \hat{e}_{\hat{\gamma}} \\ &= R_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\mu}}(\delta_{\hat{\rho}}^{\hat{\alpha}}\delta_{\hat{\gamma}}^{\hat{\beta}} - \delta_{\hat{\gamma}}^{\hat{\alpha}}\delta_{\hat{\rho}}^{\hat{\beta}}), \end{aligned}$$

es decir, que las componentes del tensor de Ricci se encuentran de

$$\begin{aligned} R_{\hat{\nu}\hat{\gamma}} &= R_{\hat{\nu}\hat{\mu}\hat{\gamma}}^{\hat{\mu}} \\ &= R_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\mu}}(\delta_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}}\delta_{\hat{\gamma}}^{\hat{\beta}} - \delta_{\hat{\gamma}}^{\hat{\alpha}}\delta_{\hat{\mu}}^{\hat{\beta}}), \end{aligned}$$

que finalmente conduce a las expresiones

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\hat{0}\hat{0}} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \\ R_{\hat{0}\hat{j}} = 0 \\ y \\ R_{\hat{i}\hat{j}} = g_{\hat{i}\hat{j}}\left(\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 2\frac{\dot{a}^2(t)+k}{a^2(t)}\right) \quad \text{con } i, j = r, \theta, \phi. \end{array} \right.$$

Al realizar la contracción

$$\begin{aligned} \iota_{g^{\hat{\mu}\hat{\nu}}}R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= g^{\hat{\mu}\hat{\nu}}R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \\ &= g^{\hat{0}\hat{0}}R_{\hat{0}\hat{0}} + g^{\hat{i}\hat{i}}R_{\hat{i}\hat{i}} \\ &= R, \end{aligned}$$

que conduce finalmente al escalar de Ricci

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)+k}{a^2(t)}\right]. \quad (4.18)$$

Con lo cual se encuentra la ecuación de Einstein que nos da las siguientes expresiones

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\hat{0}\hat{0}} = 3\frac{\dot{a}^2(t)+k}{a^2(t)} \\ E_{\hat{i}\hat{i}} = g_{\hat{i}\hat{i}}\left[-2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)+k}{a^2(t)}\right]. \end{array} \right.$$

4.1.3. Tensor de energía-momento FRW y su relación con el tensor de Einstein

De acuerdo con la ecuación de Einstein la geometría del espacio-tiempo depende del contenido de energía. Y por la relación de energía materia su ecuación puede ser interpretada simplemente como

$$\text{Materia} \rightarrow \text{Geometría}, \quad (4.19)$$

que por consistencias de las leyes de la Física este tensor debe cumplir lo siguiente

- En ausencia de materia el tensor $E_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$ que además es evidentemente es simétrico.
- En presencia de materia $E_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ debe ser un tensor de materia simétrico que cumpla que $E_{\hat{\rho}\hat{\nu};\hat{0}} = 0$.

- La ecuación de Einstein debe contener como caso límite a la ecuación de Poisson ($\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$).

Por tanto, sin pérdida de generalidad se propone un tensor $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, que debe contener cualquier forma de energía excepto la gravitatoria, que puede ser expresado como

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\text{Fluidos}) + T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\text{Electromagnetismo}) + \dots, \quad (4.20)$$

y cumple

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = T_{\hat{\nu}\hat{\mu}} \rightarrow T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = E_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \quad (4.21)$$

Se puede decir que esta simetría es la responsable de la no euclidianidad el espacio-tiempo. Por tanto, la ecuación de campo de Einstein se escribe como

$$8\pi GT_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}R. \quad (4.22)$$

Consideramos un fluido galáctico isobárico y homogéneo con respecto al espacio de densidad promedio ρ , presión P y que puede variar en el tiempo. A dicho fluido se le puede atribuir un sistema de acompañamiento S respecto del que la materia esté en reposo que se le asocian las coordenadas

$$\begin{cases} x^0 = t, \\ x^i = 0 \quad (\text{para } i = 1, 2, 3), \\ u^0 = 1 \\ y \\ u^i = 0, \end{cases}$$

tal que, permite definir el tensor de energía-momento FRW por

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (\rho + P)u_{\hat{\mu}}u_{\hat{\nu}} + Pg_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad (4.23)$$

donde se tomó por convención que $c = 1$ (GRON; SIGBJORN, 2007). Por lo tanto, de las componentes no nulas de la ecuación de Einstein se deducen las siguientes ecuaciones

$$\frac{8\pi G\rho}{3} = \frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} \quad \text{y} \quad 8\pi GP = -2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)}, \quad (4.24)$$

que son denominadas *ecuaciones de Friedmann*, de las cuales se deduce la expresión

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \quad (4.25)$$

Derivando la primera expresión de (4,24) y combinándola con (4,25) se encuentra la siguiente expresión

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\rho + P) = 0 \quad (4.26)$$

o ecuación de continuidad. Al multiplicarla por a^3 se encuentra la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + P\frac{d}{dt}(a^3) = 0, \quad (4.27)$$

que asumiendo $U = \rho a^3$ y $V = a^3$ se reduce a

$$dU + PdV = 0. \quad (4.28)$$

De la primera ley de la termodinámica se sabe que la ecuación que describe un fluido estático en equilibrio es

$$TdS = dU + PdV, \quad (4.29)$$

donde T es la temperatura y S la entropía del sistema. Debido a que los procesos que tiene $dS = 0$ se denominan procesos adiabáticos, la ecuación (4,27) muestra que la homogeneidad e isotropía modelan el espacio como un fluido en expansión adiabática.

No se puede especificar el tipo de energía con la que estamos tratando ya que el tipo de energía vendrá dada por la dependencia de la presión y la densidad. Por lo tanto basta con escoger la simple ecuación de estado

$$P_\alpha = \omega_\alpha \rho_\alpha, \quad (4.30)$$

que permite escribir la ecuación (4,27) como

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(\omega_\alpha + 1)\frac{da}{a}, \quad (4.31)$$

cuya solución viene dada por

$$\rho = \rho_0 a^{-3(\omega_\alpha + 1)}, \quad (4.32)$$

donde ω_α es el parámetro de estado. Sustituyendo esta solución en la primera de las ecuaciones de Friedmann y considerando un universo plano ($k = 0$) se encuentra la ecuación diferencial

$$d\left(a^{\frac{3(\omega_\alpha + 1)}{2}}\right) = \beta_0 dt, \quad (4.33)$$

cuya solución viene dada por

$$a(t) = \left[\beta_0(t-t') \right]^{\frac{2}{3(\omega_\alpha+1)}} \rightarrow H(t) = -\frac{2}{3(\omega_\alpha+1)(t'-t)}, \quad (4.34)$$

donde

$$\beta_0 = [3(\omega_\alpha+1)/2] \sqrt{8\pi G \rho_0/3} \quad (4.35)$$

y t_0 son parámetros constantes. Dicha solución es válida si $\omega_\alpha \neq -1$, ya que esta corresponde a una presión $\rho_v = \rho_{v_0}$ que no es más que una constante cosmológica. Un detalle muy importante para discutir es cómo se comporta la curvatura del universo cuando se tiene la solución (4,34), que permite escribir

$$R = \frac{6n(2n+1)}{(t'-t)^2}, \quad (4.36)$$

donde $n = -2/3(\omega_\alpha+1) > 0$. La curvatura crece hacia el infinito a medida que $t \rightarrow t'$. Esta situación es denominada como *singularidad de "Big rip"*. Es decir, la expansión del universo alcanzará el infinito a un tiempo finito, provocando una expansión acelerada ilimitada que superará la velocidad de la luz (ya que implica la expansión del universo mismo, no de partículas que se mueven dentro de él) provocando que el universo observable se encoja como consecuencia de la imposibilidad que tienen la luz y la información emitida por las estrellas distantes de "alcanzar" la expansión. A medida que el universo observable se contraiga, los objetos dejarán de interactuar entre sí a través de las fuerzas fundamentales, y finalmente, la expansión evitará cualquier acción de fuerzas entre las partículas, incluso dentro de los átomos, destrozando el universo. Esto caracteriza al Big Rip como un posible fin del universo. Esta conclusión catastrófica no es inevitable en este tipo de modelos, y se puede evitar en modelos específicos el del Campo Fantasma con la inclusión de un potencial de corte [37]. También habría que considerar la importancia de los efectos cuánticos, en la medida en que la curvatura del universo se hace cada vez más grande, ya que podrían modificar fundamentalmente la estructura de la singularidad (GRON; SIGBJORN, 2007; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006).

Las expresiones (4,34) corroboran lo dicho anteriormente de que cada valor de ω_α define el tipo de fluido perfecto, por ejemplo

- Para $\omega_\alpha = 0$ corresponde a un fluido perfecto con solamente densidad de materia, sin presión y describe materia fría sin interacción (polvo).
- $\omega_\alpha = 1/3$ corresponde a una materia muy caliente, materia relativista o radiación.

Matemáticamente esto se expresa como

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_\alpha = 0 \text{ con } a(t) \propto (t-t_0)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \rho_m \propto a^{-3} \text{ Polvo.} \\ \omega_\alpha = \frac{1}{3} \text{ con } a(t) \propto (t-t_0)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \rho_\gamma \propto a^{-4} \text{ Radiación.} \end{array} \right.$$

Si sustituimos la ecuación de estado (4,30) en la ecuación (4,25) se obtiene

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(1 + 3\omega_\alpha)\rho. \quad (4.37)$$

De lo que se deduce que una expansión acelerada del universo está dominada por un fluido perfecto con parámetro de estado $\omega_\alpha = -1/3$.

Otra observación importante se tiene de la primera expresión (4,24) que revela que para secciones espaciales planas ($k = 0$) existe una densidad denominada *densidad crítica* dada por

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (4.38)$$

Ecuación que evidencia que para valores $k = -1$ o $k = 0$ se tendrá un universo abierto denominado negativo o plano respectivamente. Mientras que para valores de $k = 1$ se tiene un universo cerrado denominado positivo o curvo, por lo tanto el destino final del universo está en su curvatura, es decir que $\omega_\alpha > -1/3$. En otras palabras un universo abierto puede expandirse indefinidamente, mientras que uno cerrado se dejará de expandir y volverá a colapsar en un Big crunch. Mientras que para el caso límite ($\omega_\alpha = -1/3$) representa un universo dominado por un fluido con densidad de masa gravitacional que se desvanece y cuya velocidad de expansión es constante como el universo vacío.

Con el fin de poder realizar un estudio del universo por medio de los tipos de densidades que lo componen se puede reescribir la primera ecuación de Friedman como

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G\rho}{3} &= H^2(t) + \frac{k}{a^2(t)} \\ \frac{8\pi G\rho}{3H^2(t)} &= 1 + \frac{k}{a^2(t)H^2(t)} \\ \frac{\rho}{\rho_c(t)} &= 1 + \frac{k}{a^2(t)H^2(t)} \\ \Omega_{Total}(t) &= 1 + \Omega_k(t), \end{aligned}$$

donde $\Omega_{Total}(t)$ es el parámetro de densidad adimensional definido en términos de la densidad crítica $\rho_c(t)$ que permite estudiar la posible geometría del universo en términos de la variación de este parámetro, lo que conlleva a las siguientes posibilidades

$$\Omega_{Total} = \begin{cases} \Omega_{Total} < 1 & \text{Universo bierto.} & \rightarrow k = +1 \\ \Omega_{Total} = 1 & \text{Universo plano.} & \rightarrow k = 0 \\ \Omega_{Total} > 1 & \text{Universo cerrado.} & \rightarrow k = -1. \end{cases}$$

Si definimos el parámetro de densidad total como

$$\Sigma_{\alpha} \Omega_{\alpha} = \Omega_{Total}, \quad (4.39)$$

donde

$$\Omega_{\alpha} = \frac{\rho_{\alpha}}{\rho_c} \quad (4.40)$$

representa un parámetro de densidad adimensional parcial que permite calcular la influencia de cada componente del fluido perfecto en la geometría del universo con respecto a la densidad crítica (GRON; SIGBJORN, 2007; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006).

4.1.4. Distancia y horizonte cosmológico

Existen varias formas de definir distancia entre dos puntos en una métrica de FRW. En nuestro caso definiremos esta distancia sacando provecho de que la métrica tiene tiempo cosmológico preferido, es decir, el tiempo propio del observador comóvil. Así, se puede calcular la distancia instantánea o geométrica entre dos puntos cualesquiera en un tiempo t constante (ISLAM, 2001; GRON; SIGBJORN, 2007). Sin pérdida de generalidad, se puede tomar uno de los puntos en el origen del sistema de coordenadas de modo que el desplazamiento sea puramente radial ($dt = d\Theta(\theta, \phi) = 0$). Esto se expresa matemáticamente como

$$\begin{aligned} D(t) &= \int ds \\ &= \int_0^r \frac{a(t) dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \\ &= a(t) \int_0^{\xi} d\xi' \\ &= a(t) \xi, \end{aligned}$$

donde usamos los cambios de variable

$$r' = \begin{cases} \sinh \xi & \text{si } k = -1 \\ \xi & \text{si } k = 0 \\ \sin \xi & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

y donde $D(t)$ corresponde a la distancia euclidiana entre dos puntos medida dentro de las secciones espaciales moduladas por el factor de escala, que le permiten variar al expandirse o contraerse. Si se toma la derivada de esta distancia ($D(t)$) con respecto al tiempo se encuentra la velocidad de recesión de las galaxias que vendrá dada por

$$\begin{aligned} v_{rec} &= \frac{D(t)}{dt} \\ &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}D(t), \end{aligned}$$

que se puede reescribir como

$$v_{rec} = H(t)D(t), \quad (4.41)$$

que es la denominada *ley de Hubble*, donde H es el parámetro de Hubble que relaciona la velocidad de receso con la distancia entre las galaxias. En tiempo presente ($H_0 = H(t = t_0)$) se tiene

$$H_0 = hH_1, \quad (4.42)$$

donde $H_1 = 100Kms^{-1}Mpc^{-1} \approx 30Kms^{-1}perl.y.$ y $h \approx 0,7$ (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006). El parámetro de Hubble tiene dimensiones de t^{-1} , por lo tanto, el inverso de este parámetro es la edad del universo

$$t_H = \frac{1}{H}, \quad (4.43)$$

que es la edad del universo que se expande a velocidad constante. La esfera de Hubble es definida como una región esférica dentro de otra región esférica. Para una distancia más allá de la esfera de Hubble la velocidad de recesión excede la velocidad de la luz

$$d_{PHS} \equiv ct_H = \frac{c}{H}. \quad (4.44)$$

Si se toma $H = H_0$ en el presente la edad del universo de Hubble es de $14 \times 10^9 yea$. Cuando la luz viaja en este universo en expansión se corre al rojo en el espectro electromagnético. Esta luz se mueve a lo largo de geodésicas nulas, por tal motivo se cumple que $ds^2 = 0$, $d\Theta_2 = 0$ y $dt = -a(t)d\xi$. Sean t y t_0 los tiempos del emisor y del observador respectivamente, para dos señales de luz emitidas entre los tiempos t_e y Δt_e se tiene que

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\xi_e} d\xi' &= \xi_e \\
&= \int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)},
\end{aligned}$$

de lo que se tiene

$$\int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = 0, \quad (4.45)$$

y que se puede reescribir como

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = 0. \quad (4.46)$$

En la expresión (4,46) se asume que el factor de expansión es una constante con respecto a las integrales cuando se toman los valores $a(t_0)$ y $a(t_e)$. Esto conduce a la expresión

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_e}{a(t_e)}, \quad (4.47)$$

que se puede usar la relación $c\Delta t = \lambda$ para reescribir la expresión (4,47) como

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (4.48)$$

Haciendo una expansión del $a(t_e)$ respecto a t_0 se encuentra que

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t_0 - t_e) + \left(1 - \frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}\right) \left(\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\right)^2 (t_0 - t_e)^2 + \dots \quad (4.49)$$

Restando 1 a ambos lados de la igualdad, renombrando $\dot{a}(t_0)/a(t_0) = H_0$ e introduciendo el denominado parámetro de aceleración del universo $q_0 = -a(t_0)\ddot{a}(t_0)/\dot{a}^2(t_0)$ se obtiene la expresión

$$z = (t_0 - t_e)H_0 + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)(t_0 - t_e)^2 H_0^2 + \dots, \quad (4.50)$$

donde $z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1$. Al invertir esta relación se tiene

$$(t_0 - t_e)H_0 = z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right)z^2 + \dots \quad (4.51)$$

Al combinar la expansión hecha para $a^{-1}(t)$ con $dt = -a(t)d\xi$ se encuentra

$$\begin{aligned}
\xi_e &= \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \\
&\approx \int_{t_e}^{t_0} dt \left[\frac{1}{a(t_0)} - \frac{a^2(t_0)}{\dot{a}(t_0)} (t_e - t_0) \right] \\
&\approx \frac{(t_0 - t_e)}{a_0} [1 + (t_0 - t_e)H_0],
\end{aligned}$$

que al combinarla con (4,51) y tomando el caso en que $z \gg 1$, se tiene

$$d_p = \frac{z}{H_0} \left[1 - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z \right]. \quad (4.52)$$

La expresión (4,52) es una relación puramente cinemática, que es válida en general independientemente del contenido de materia y energía del universo. Para valores $((1 + q_0/2)z \ll 1)$ la expresión (4,52) se reduce a $z = H_0 d_p$, que permite recuperar la ley de Hubble cuando el corrimiento al rojo es interpretado como $z = v$. Donde la cantidad $1 + z$ es la distancia radial entre el tiempo de llegada y de emisión de una señal de luz denominada como *Corrimiento al Rojo* (ISLAM, 2001; GRON; SIGBJORN, 2007).

4.1.5. Universo dominado por materia

Este tipo de universo es descrito cuando se considera una ecuación de estado libre de presión ($P = 0$), lo que conduce a la densidad $\rho = \rho_m$ producida solo por materia, por lo que la primera expresión de (4,24) vendrá dada por

$$\frac{8\pi G\rho_m}{3} = \frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)}, \quad (4.53)$$

que se puede reescribir en función del parámetro de densidad parcial multiplicando ambos lados de la ecuación por a^3 lo que permite escribirla como

$$(\dot{a}^2(t) + k)a(t) = \frac{\Omega_{m0}}{H_0^2}. \quad (4.54)$$

Esta ecuación puede resolverse al introducir una coordenada conformal (η) adimensional que cumpla

$$\begin{cases} \frac{1}{t_0} \frac{dt}{d\eta} = a(\eta) \\ y \\ \frac{1}{t_0 a(\eta)} \frac{da}{d\eta} = \dot{a}, \end{cases}$$

que al sustituir en la ecuación (4,56) y mediante procedimientos algebraicos permite encontrar la ecuación diferencial

$$\frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = t_0 \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{1 - \frac{ka}{c}}, \quad (4.55)$$

cuya solución viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } k < 0 \rightarrow \begin{cases} a(\eta) = \frac{\Omega_{m0}}{2(1-\Omega_{m0})} (\cosh\eta - 1) \\ t(\eta) = \frac{\Omega_{m0}}{2H_0(\Omega_{m0}-1)^{\frac{2}{3}}} (\sinh\eta - \eta) \end{cases} \\ \text{si } k = 0 \rightarrow a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \text{si } k > 0 \rightarrow \begin{cases} a(\eta) = \frac{\Omega_{m0}}{2(1-\Omega_{m0})} (1 - \cos\eta) \\ t(\eta) = \frac{\Omega_{m0}}{2H_0(\Omega_{m0}-1)^{\frac{2}{3}}} (\eta - \sin\eta), \end{cases} \end{array} \right.$$

dode se hizo la sustitución $a = c\chi^2$.

Este conjunto de soluciones nos ofrece información interesante acerca del universo para cada valor de k , por ejemplo, para un valor $k > 0$ la solución es una cicloide que describe un universo que se expande a un máximo y recolapsa. El punto en el que el universo recolapsa (Big Crunch) ocurre en el tiempo $t_c = \pi\Omega_{m0}[H_0(\Omega_{m0} - 1)]^{-\frac{3}{2}}$. Para $k = 0$ el universo plano se expande siempre, pero su velocidad de expansión va a cero en el infinito. A este universo se le denomina modelo de Einstein-Sitter. Para $k < 0$ es el modelo del universo abierto y negativo. Su expansión es infinita y para $t \rightarrow \infty$ el parámetro de expansión se vuelve $a(t) = t$ (GRON; SIGBJORN, 2007).

4.1.6. Universo dominado por radiación

En este tipo de universo la densidad viene dada por ρ_γ , por lo tanto la primera expresión (4,24) se reescribe como

$$\frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3} \rho_\gamma, \quad (4.56)$$

que se puede reescribir en función del parámetro de densidad parcial Ω_γ y multiplicando por $a^4(t)$ la ecuación (4,58) se reescribe como

$$(\dot{a}^2 + k)a^2(t) = \frac{\Omega_{\gamma 0}}{H_0^2} \quad (4.57)$$

En este universo la presión viene dada por $P = \rho_{\gamma}/3$ y al sustituirla en la ecuación (4,25) y multiplicando por $a^4(t)$ se encuentra

$$\begin{aligned} a^3(t)\ddot{a}(t) &= -\frac{\Omega_{\gamma 0}}{H_0^2} \\ &= -c, \end{aligned}$$

que al combinar las expresiones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}(t) + k &= 0 \\ \frac{d}{dt}(a\dot{a} + kt) &= 0, \end{aligned}$$

es decir, que el término entre paréntesis es igual a una constante

$$a \frac{da}{dt} + kt = B. \quad (4.58)$$

La ecuación diferencial (4,60) tiene como solución

$$a(t) = \sqrt{2Bt - kt^2} \text{ con } c = (2Bt - kt)(2Bt^2 - kt^2 + k), \quad (4.59)$$

donde

$$B = a_0 \left(\frac{k\Omega_{\gamma 0}}{\Omega_{\gamma 0} - 1} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ y } c = (2Bt - kt)(2Bt^2 - kt^2 + k), \quad (4.60)$$

y donde la velocidad viene dada por

$$\dot{a}(t) = \frac{B - kt}{\sqrt{t(2B - kt)}}. \quad (4.61)$$

En este modelo para el universo positivo ($k > 0$) o cerrado la expansión se detiene cuando $t = B$, mientras que el colapso (Big Crunch) ocurre cuando $t = 2B$. Si se considera un universo con energía de vacío nula, se pueden sumar las ecuaciones (4,56) y (4,59) para obtener

$$a\dot{a} = H_0(\Omega_{m0}a + \Omega_{\gamma 0})^{\frac{1}{2}}, \quad (4.62)$$

que conduce a la ecuación diferencial

$$\frac{ada}{(\Omega_{m0}a + \Omega_{\gamma0})^{\frac{1}{2}}} = H_0 dt, \quad (4.63)$$

cuya solución viene dada por

$$H_0 = \frac{4\Omega_{\gamma0}^{\frac{3}{2}}}{3\Omega_{m0}^2} + \frac{2(\Omega_{m0}a - 2\Omega_{\gamma0})}{3\Omega_{m0}^2} \sqrt{\Omega_{m0}a + \Omega_{\gamma0}}, \quad (4.64)$$

donde $a(0) = 0$. Si se toma $a_{eq} = \frac{\Omega_{\gamma0}}{\Omega_{m0}}$ se puede encontrar un punto de tiempo

$$t_{eq} = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{2}) \frac{\Omega_{\gamma0}^{\frac{3}{2}}}{\Omega_{m0}} t_H, \quad (4.65)$$

en el que ocurre una transición entre el universo dominado por radiación a uno dominado por materia, ver figura 4.2 (GRON; SIGBJORN, 2007).

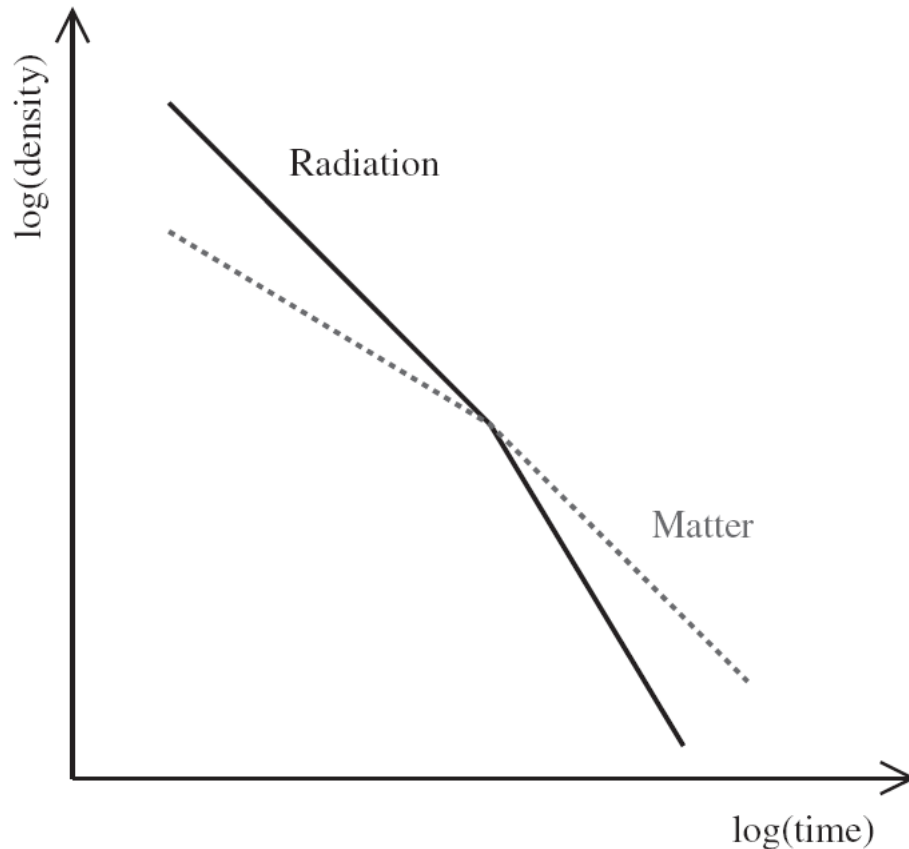


Figura 4.2 – Representación esquemática de la transición entre el universo dominado por radiación a uno dominado por materia, donde t_{eq} es el punto donde las curvas sólida y punteadas se intersectan (LIDDLE, 2015).

5 ENERGÍA OSCURA

5.1. Evidencias físicas de la Energía Oscura

En la cosmología actual existen varias evidencias experimentales que entran en serios conflictos con las estimaciones obtenidas en el modelo cosmológico presentado anteriormente. Un ejemplo de ello es la edad del universo que por medio de las observaciones realizadas con el uso del telescopio espacial Hubble (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006) se pudo estimar un valor aproximado de $t_H = 9,776h^{-1}\text{Gyr}$ con $0,64 < h < 0,80$ es decir alrededor de $t_0 = 13,965\text{Gyr}$ que no es más que una estimación realizada a partir de la ley de Hubble sin tener en cuenta que la velocidad no es una constante.

Pero, ¿cómo se resuelve esta inconsistencia? En teoría, la respuesta a esta pregunta puede ser obtenida del mismo modelo cosmológico, ya que dicho modelo otorga las herramientas para hacer un cálculo más preciso que el estimado por la ley de Hubble. Para ello, se debe calcular la edad del universo al reescribir las ecuaciones

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad \text{y} \quad \rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} a^{-3(1+\omega_{\alpha})} \quad (5.1)$$

en función del corrimiento al rojo y del parámetro de densidad parcial. Para lograr esto se debe tener en cuenta que

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}^{(0)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega_{\alpha})}, \\ \rho_{\alpha}^{(0)} = \rho_{\alpha} a_0^{-3(1+\omega_{\alpha})}, \\ \rho_{\alpha}^0 = \Omega_{\alpha} \rho_c, \\ \rho_c = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \\ \text{y} \\ 1+z = \left(\frac{a_0}{a}\right), \end{array} \right.$$

las ecuaciones (5,1) se reducen a

$$\rho = \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} \frac{3}{8\pi G} H_0^2 (1+z)^{3(1+\omega_{\alpha})} \quad \rightarrow \quad H(z) = H_0 \sqrt{\sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} (1+z)^{3(1+\omega_{\alpha})}}. \quad (5.2)$$

Por otro lado, si se toma la siguiente derivada

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(1+z) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{a_0}{a}\right) \\ \dot{z} &= -\frac{a_0\dot{a}}{a^2} \\ &= -(1+z)H(z),\end{aligned}$$

que para tiempos positivos nos da la ecuación diferencial

$$dt = \frac{dz}{(1+z)H(z)}. \quad (5.3)$$

Por medio de la integración se obtiene

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)}, \quad (5.4)$$

que al hacer el cambio de variable $x = 1 + z$ y desarrollar la sumatoria para cada tipo de parámetro de densidad esta se reescribe como

$$H_0 t_0 = \int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\Omega_{\gamma 0}x^4 + \Omega_{m 0}x^3 + \Omega_{\Lambda} - \Omega_k x^2}}, \quad (5.5)$$

lo que permite discutir tres casos de vital importancia. El primero es el de un universo plano dominado solamente por materia con $\Omega_{\gamma 0} = \Omega_{\Lambda} = 0$ y $\Omega_{m 0} = 1 \rightarrow \Omega_k = 0$ que permite reescribir la integral (5.9)

$$H_0 t_0 = \int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^3}} \quad (5.6)$$

obteniendo la expresión

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}, \quad (5.7)$$

se obtiene una edad estimada de $t_0 = 9,3\text{Gyr}$, valor que entra en conflicto con las observaciones que estiman la edad de algunos cuerpos celestes que pertenecen al universo como los Cúmulos globulares con edades estimadas en $t_1 = 13,5 \pm 2\text{Gyr}$ o en $t_1 = 12,7 \pm 0,7\text{Gyr}$ según COPELAND, SAMI e TSUJIKAWA (2006), LIDDLE (2015), ya que no pueden existir objetos más antiguos que el universo mismo.

Ante la evidente incapacidad del caso anterior para ofrecer un valor más preciso de la edad del universo, es necesario discutir un segundo caso, en el cual se supone un universo plano

dominado solamente por materia con $\Omega_{\gamma 0} = \Omega_{\Lambda} = 0$ y $\Omega_{m0} < 1 \rightarrow \Omega_k = \Omega_{m0} - 1$ que permite reescribir la integral (5.9)

$$H_0 t_0 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_{m0} x^3 - (\Omega_{m0} - 1)x^2}}, \quad (5.8)$$

cuya solución viene dada por

$$H_0 t_0 = \frac{1}{1 - \Omega_{m0}} - \frac{\Omega_{m0}}{2(1 - \Omega_{m0})^{\frac{3}{2}}} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \Omega_{m0}}}{1 + \sqrt{1 - \Omega_{m0}}}. \quad (5.9)$$

Solución donde se evidencia que $H_0 t_0 \rightarrow 1$ si $\Omega_{m0} \rightarrow 0$ y donde $H_0 t_0 \rightarrow 2/3$ para $\Omega_{m0} \rightarrow 1$ lo que no permite determinar la edad del universo con un mayor grado de confianza ya que el valor estimado en este caso se encuentra contenido en la región $9,300\text{Gyr} \leq t_0 \leq 13,965\text{Gyr}$. La ambigüedad anterior torna obligatorio discutir el tercer caso que es suponer un universo plano donde $\Omega_{\gamma 0} = \Omega_k = 0$ y $\Omega \neq 0$ lo que permite reescribir la integral (5,5) como

$$H_0 t_0 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_{m0} x^3 + \Omega_{\Lambda}}}, \quad (5.10)$$

cuya solución es

$$H_0 t_0 = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda}}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_{\Lambda}}}{\sqrt{\Omega_{m0}}} \right). \quad (5.11)$$

Donde se evidencia que $H_0 t_0 \rightarrow \infty$ si $\Omega_{m0} \rightarrow 0$ y donde $H_0 t_0 \rightarrow 2/3$ para $\Omega_{m0} \rightarrow 1$. De esta solución y teniendo en cuenta que $\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda} = 1$ con $\Omega_{m0} = 0,3$, se estima la edad del universo $t_0 = 13,1\text{Gyr}$ valor que tiene una mayor concordancia con la edad de los cúmulos lobulares $11\text{Gyr} < t_0 < 12\text{Gyr}$.

Los resultados ofrecidos por el modelo teórico presentado en el caso anterior, en el que existe un parámetro de densidad $\Omega = 0,7$ correspondiente a una constante cosmológica, abren la discusión acerca de una energía fría de propiedades muy especiales que provoca que el universo entre en una fase de expansión acelerada. A partir de esto, se hace más que necesario realizar la siguiente pregunta ¿existe alguna evidencia experimental que sustente la existencia de una fase de expansión acelerada? La respuesta a esta pregunta se encuentra en la observación de la supernovas tipo Ia (SNIa) realizadas por la High-Z Supernova Search Team y Supernova Cosmology Project (RIESS et al., 1998; RIESS et al., 2004).

Explicuemos primero qué es una Supernova Tipo Ia (SNIa). Es un cuerpo celeste que surge de una explosión estelar que ocurre cuando la masa de una enana blanca aumenta debido a que esta absorbe materia de otra estrella compañera (sistema binario) y cruza el límite de Chandrasekhar (alrededor de 1.4 veces la masa del sol) (SÁNCHEZ, 2015). Este tipo de explosiones son tan brillantes que durante la explosión su luminosidad puede ser comparada

con la luminosidad de toda la galaxia que la alberga. La característica más importante de este proceso es que como el mecanismo es el mismo, la explosión se produce siempre con la misma masa. Con esto, la luminosidad de la explosión que es denominada en astronomía como *Vela estándar* puede ser predecida con mucha exactitud.

Con el objetivo de obtener resultados experimentales se procede a determinar una expresión de la distancia de luminosidad a partir de las ecuaciones de Friedmann y del corrimiento al rojo. Para ello, se define el flujo de energía F_α producido por la luminosidad absoluta L_α sobre una superficie esférica por la expresión

$$F_\alpha = \frac{L_\alpha}{4\pi d_L^2} \quad \text{y donde} \quad L_\alpha = \frac{\Delta E_\alpha}{\Delta t_\alpha}. \quad (5.12)$$

De la expresión (4,48) se sabe que el corrimiento al rojo se define por medio de la expresión

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_\alpha} = \frac{a_0}{a_\alpha} = 1 + z, \quad (5.13)$$

que al ser combinada con las relaciones $\Delta E_\alpha = h\nu_\alpha$ y $\Delta E_\alpha = hc/\lambda_\alpha$ se obtiene entonces que

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_\alpha}, \\ 1 + z = \frac{\Delta E_\alpha}{\Delta E_0} \\ \text{y} \\ \frac{\lambda_0}{\lambda_\alpha} = \frac{\nu_\alpha}{\nu_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_\alpha}. \end{array} \right.$$

Con lo cual, a través de procedimientos algebraicos y de la expresión de L_α en (5,16) se encuentra que la luminosidad absoluta es dada por

$$L_\alpha(z) = L_0(1 + z)^2. \quad (5.14)$$

Por otro lado, gracias al elemento diferencial de longitud se sabe que el radio de una superficie esférica es $a_0 f(\xi_\alpha) \rightarrow S = 4\pi(a_0 f(\xi_\alpha))^2$. Esto permite escribir el flujo de energía luminosa absoluta y observada como

$$F_\alpha = \frac{L_\alpha}{4\pi(a_0 f(\xi_\alpha))^2}, \quad (5.15)$$

que al compararlo con la expresión de F_α en (5,15) se deduce que la distancia de luminosidad es

$$d_L = a_0 f(\xi_\alpha)(1 + z). \quad (5.16)$$

Como en el universo plano FRW se asume que $f(\xi_\alpha) = \xi_\alpha$ y sabiendo que la luz se mueve en una curva geodésica, se tiene que

$$\xi_\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a}, \quad (5.17)$$

que usando la relaciones (5,2) y (5,3) se reescribe (5,17) como

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &= \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \\ &= \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_\alpha \Omega_\alpha (1+z')^{3(1+\omega_\alpha)}}} \end{aligned}$$

y al combinarla con (5,16) se encuentra que

$$d_L = \frac{(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_\alpha \Omega_\alpha (1+z')^{3(1+\omega_\alpha)}}}, \quad (5.18)$$

lo que conduce a la expresión

$$H(z) = \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{d_L(z)}{1+z} \right) \right\}^{-1}. \quad (5.19)$$

De la relación (5,18) y considerando los diferentes tipos de universo dominado por materia con componentes no relativistas y con $\Omega_{m0} + \Omega_\Lambda = 1$ se obtiene que los valores teóricos

$$\begin{cases} H_0 d_L = 0,95 & \Omega_{m0} = 1 \\ H_0 d_L = 1,23 & \Omega_{m0} = 0,3 \quad \Omega_\Lambda = 0,7. \end{cases}$$

Que despejando d_L^2 en (5,12) y tomando el logaritmo, se encuentra la relación entre las magnitudes aparente (m), absoluta (M) y la distancia de luminosidad (d_L) mediante la relación

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{Mpc} \right) + 25. \quad (5.20)$$

Los datos experimentales son obtenidos al considerar dos supernovas 1992P y 1997ap con valores de $z = 0,016$, $m = 16,08$, $z = 0,83$ y $m = 24,32$ respectivamente (RIESS et al., 1998; RIESS et al., 2004). Sabiendo que para valores pequeños de corrimiento al rojo ($z \ll 1$), la ecuación (4,52) se reduce a $d_L \approx z/H_0$, lo que permite determinar el valor de la magnitud aparente $M = -19,09$ para la supernova 1992P donde se adoptó el valor de $H_0^{-1} = 2998h^{-1}Mpc$ y $h = 0,72$. Por lo

tanto, usando este valor de magnitud aparente se compara con el valor de la supernova 1997ap encontrando

$$\left\{ H_0 d_L \approx 1,16 \text{ para } z = 0,83, \right.$$

lo que concuerda completamente con las estimaciones de que el universo está en una fase de expansión acelerada dominado por una energía oscura. El parámetro de aceleración puede encontrarse al tomar la siguiente derivada temporal

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) &= H_0 \sqrt{\sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} (1+z)^{3(1+\omega_{\alpha})}} \\ - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \left(-\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} + 1 \right) &= -\frac{3}{2} H_0^2 \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} (1+\omega_{\alpha}) (1+z)^{3(1+\omega_{\alpha})} \\ (q(z) + 1) &= \frac{3 \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} (1+\omega_{\alpha}) (1+z)^{3(1+\omega_{\alpha})}}{2 \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} (1+z)^{3(1+\omega_{\alpha})}}, \end{aligned}$$

de la que se deduce finalmente el parámetro de aceleración

$$q(z) = \frac{3 \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} (1+\omega_{\alpha}) (1+z)^{3(1+\omega_{\alpha})}}{2 \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} (1+z)^{3(1+\omega_{\alpha})}} - 1. \quad (5.21)$$

Para este universo se encuentra que el punto crítico

$$z_c = \left(\frac{2\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{1}{3}} - 1. \quad (5.22)$$

Con lo cual, se hace evidente que el universo entra en una fase de expansión acelerada ($q < 0$) para $z < z_c$ y donde $z_c = 0,67$.

Los cálculos realizados anteriormente para determinar los datos experimentales $H_0 d_L$ y z_c que se sustentan en la aproximación $d_L \approx z/H_0$ que surge de la expresión (5,18) cuando suponemos $z' \ll 1$, $z \ll 1$ y por consiguiente que $\sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} = 1$. Esta ultima suposición abre una nueva discusión en torno a la planitud del universo, ya que $\Omega(t) = \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} = 1$ si y solo si se considera un universo plano ($k = 0$) lo que requeriría también que se presente la evidencia experimental que permita corroborar este hecho.

Los conjuntos de datos que sirven de sustento a la exigencia de un universo plano son ofrecidos por los experimentos realizados por CMB (WMPA1), LSS, HST y WMAP3 presentan los valores $\Omega_k = 0,030_{-0,025}^{+0,026}$, $\Omega_k = -0,015_{-0,016}^{+0,020}$ (que con la restricción H_0 ofrece también $\Omega_{\Lambda} = 0,72_{-0,04}^{+0,04}$ con respecto a $\Omega_{\Lambda} = 0,69_{-0,06}^{+0,03}$ donde $h = 0,71_{-0,076}^{+0,076}$ ofrecidos por el WMAP3) y $\Omega_k = -0,010_{-0,009}^{+0,016}$ respectivamente (PERLMUTTER et al., 1999; RIESS et al., 1998; SAHNI, 2004; PADMANBHAN, 2003; RIESS et al., 2004; CHOUDHURY; PADMANABHAN, 2005; TONRY et al., 2003; KNOP et al., 2003; JASSAL; BAGLA; PADMANABHAN, 2005).

En tales mediciones se asumió la ecuación de estado $\omega_\alpha = -1$ con lo cual se sustenta de manera sólida la hipótesis de un universo plano dominado por energía oscura con parámetros de densidad dados por $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ y $\Omega_m \approx 0,3$. Lo que conlleva a un universo compuesto en un 4% de materia bariónica y un restante de 27% de materia no bariónica fría similar al polvo que es denominada como *Materia Oscura Fría* (CDM), que respeta la ecuación de estado $\omega_\alpha = 0$, ver figura 5.1.

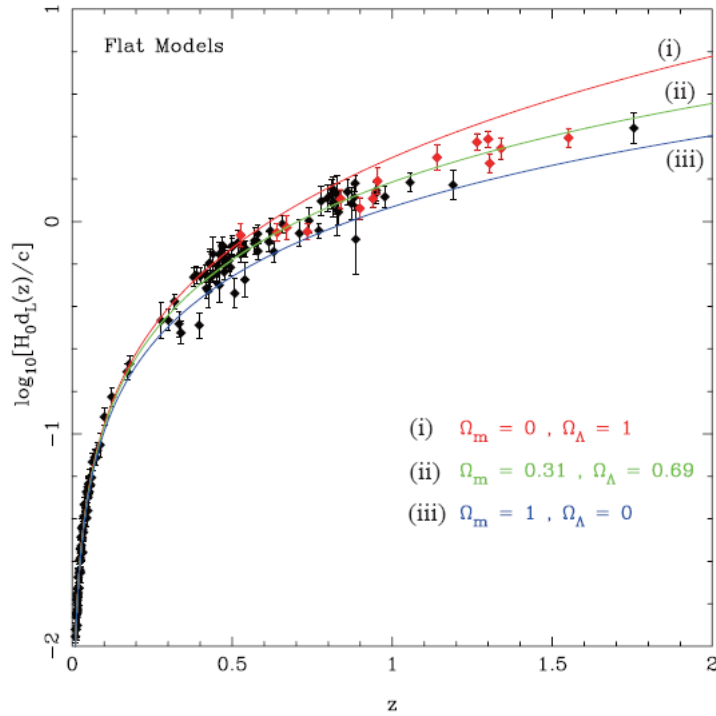


Figura 5.1 – Curvas teóricas y experimentales de la distancia de luminosidad $\log_{10}(H_0 d_L)$ con respecto al corrimiento al rojo z para una cosmología plana, por medio del conjunto de datos ofrecidos por RIESS et al. (1998), COPELAND, SAMI e TSUJIKAWA (2006).

Los resultados anteriores son la base del modelo denominado como Λ CDM que considera una constante cosmológica Λ con Materia Oscura Fría (CDM). Desafortunadamente este modelo tiene dos problemas fundamentales a los que no puede dar una respuesta satisfactoria. El primer problema surge del valor experimental de $\Lambda \approx H_0^2 = (2,13h10^{42}\text{GeV})^2$, lo que conlleva a un valor de la densidad crítica $\rho_\Lambda = \Lambda m_{pl}^2/8\pi \approx 10^{47}\text{GeV}^4$. Densidad que se debe comparar con la densidad de vacío ρ_{vac} predicha por la teoría cuántica de campos mediante la ecuación

$$\rho_{vac} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (5.23)$$

cantidad que representa la suma de todas las energías del punto cero de los campos cuánticos de masa m , que muestra una divergencia ultravioleta $\rho \propto k^4$. Sin embargo se espera que para una

escala del orden de k_{max} donde se espera que la integral (5,35) sea finita y con valor

$$\rho_{vac} \approx \frac{k_{max}^4}{16\pi^2}, \quad (5.24)$$

que en el caso de la relatividad general se espera que $k_{max} = m_{Pl}$ donde $m_{Pl} = 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}$ lo que conlleva a una densidad de vacía $\rho_{vac} \approx 10^{74} \text{ GeV}^4$, valor que es aproximadamente 10^{121} órdenes de magnitud mayor que ρ_Λ , discrepancia que es denominada como *problema del ajuste fino* (SÁNCHEZ, 2015; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006).

El segundo problema resulta de la dificultad que tiene el modelo ΛCDM para explicar que hoy la densidad de materia no relativista es comparable con la densidad de energía oscura ($\Omega_\Lambda = \text{cort}$) durante un período muy corto de tiempo estudiadas con respecto al parámetro de aceleración $a(t)$ como se muestra en la figura 5.2, siendo que las expresiones matemáticas para la densidad de radiación ($\Omega_r \propto a(t)^{-4} \propto (1+z)^4$) y de materia bariónica ($\Omega_m \propto a(t)^{-3} \propto (1+z)^3$) son funcionalmente diferentes con respecto a dicho parámetro.

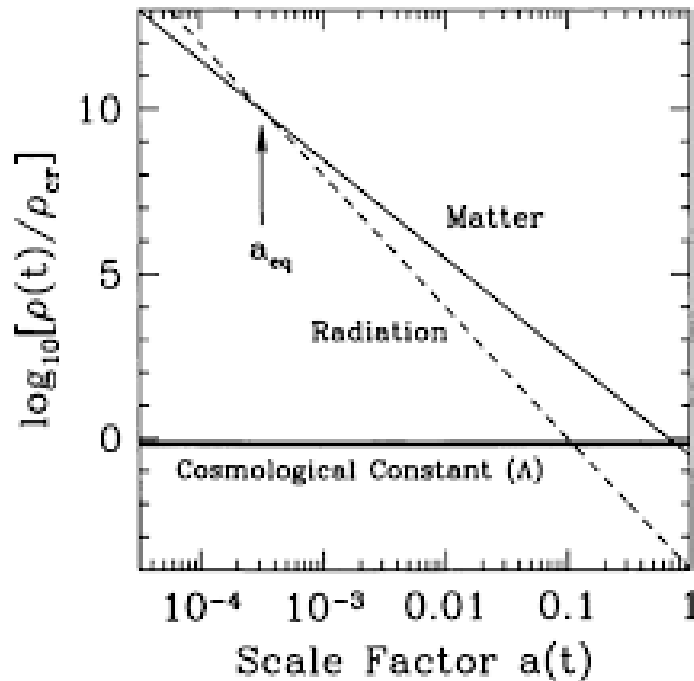


Figura 5.2 – Evolución de las densidades de energías de Materia Oscura fría, radiación y Energía Oscura respectivamente (NODELSON, 2003).

En otras palabras, en este modelo es imposible aclarar ¿por qué nos ha tocado vivir en esta estrecha ventana de tiempo? A este hecho se lo denomina como el problema de la “coincidencia” (SÁNCHEZ, 2015).

En la actualidad, las observaciones de WMAP son perfectamente consistentes con una energía oscura no variable contemplada en el modelo ΛCDM que presenta las ecuaciones de estado $\omega_\alpha = -1$ y $\omega_\alpha = 0$. Diferente a la energía oscura predicha por el modelo cosmológico que se presentó en el capítulo 4 con ecuación de estado $\omega_\alpha < -1/3$ que contiene la suficiente presión

negativa que justifica la expansión acelerada del universo. Pero puede que este no sea el verdadero origen de la energía oscura ya que esta podría provenir de campos escalares que implicaría que la ecuación de estado sea dinámica, lo que será discutido en las secciones siguientes. Este hecho adquiere una importancia vital en la teoría ya que la evolución del potencial gravitacional depende en gran medida de la dinámica que posea la ecuación de estado (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006).

5.1.1. La Constante Cosmológica

Este modelo, discutido en diversos trabajos, proviene esencialmente de una modificación de la ecuación de campo de Einstein introducida por él mismo en el año 1917 para intentar describir un universo estático (ISLAM, 2001; GRON; SIGBJORN, 2007; JANSENN, 2013; LIDDLE, 2015; SÁNCHEZ, 2015; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006; ALVES, 2017). Tal modelo fue abandonado por el propio Einstein después del descubrimiento de la expansión del universo hecha por Hubble en el año 1929, ya que no se necesita una constante cosmológica en el modelo visto desde el punto de vista de la física de partículas. Sin embargo, gracias a las observaciones realizadas más recientemente, que ponen en evidencia que la constante cosmológica surge naturalmente como una energía de vacío o energía inicial del universo, los investigadores vuelven a colocar la atención en este modelo para intentar dar una explicación al fenómeno de la Energía Oscura.

Este modelo se deduce teóricamente al aprovechar que los tensores $E^{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu}$ y el tensor métrico $g^{\mu\nu}$ satisfacen las identidades de Bianchi $\nabla_\nu E^{\mu\nu} = 0$, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ y $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$. Lo que permite sumar algebraicamente el término $g_{\mu\nu}\Lambda$ en la ecuación de Einstein para reescribirla como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (5.25)$$

que usando las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\hat{t}\hat{t}} = 3\frac{\dot{a}^2(t)+k}{a^2(t)} \quad , \quad E_{\hat{i}\hat{j}} = g_{\hat{i}\hat{j}}\left[-2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)+k}{a^2(t)}\right] \\ \\ \\ E_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \quad \quad \quad (8\pi GT_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \Lambda g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}) \\ = \quad 8\pi G\{(\rho + P)u_{\hat{\mu}}u_{\hat{\nu}} + Pg_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\} - \Lambda g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \end{array} \right. \quad \text{y}$$

lo que permite reescribir las ecuaciones de Friedman

$$\left\{ \begin{array}{l} 8\pi G\rho + \Lambda = 8\pi G(\rho + \rho_\Lambda) \\ \quad \quad \quad = 3\frac{\dot{a}^2(t)+k}{a^2(t)} \\ \quad \quad \quad y \\ 8\pi GP - \Lambda = 8\pi G(P - P_\Lambda) \\ \quad \quad \quad = -2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)+k}{a^2(t)} \end{array} \right.$$

que conducen a la expresión para la aceleración

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (5.26)$$

Donde la densidad $\hat{\rho} = \rho + \rho_\Lambda$ y la presión $\hat{P} = P - P_\Lambda$ conllevan a que la ecuación de estado para la Energía Oscura cumpla

$$\omega_\Lambda = \frac{P_\Lambda}{\rho_\Lambda} = -1. \quad (5.27)$$

Esta es una característica importante de la constante cosmológica que determina su impacto en la dinámica del universo. De hecho, la condición (5,27) viola la condición de energía fuerte ($\rho + 3P \geq 0$) y es capaz de contrarrestar la fuerza gravitatoria de los otros fluidos cósmicos. Otra consecuencia importante de la Constante Cosmológica es que la densidad de energía ρ_Λ siempre es la misma, a través de la historia de expansión del universo.

Si la presión es $P = 0$, la aceleración también es nula ($\ddot{a}(t) = 0$). Esto implica que la velocidad de expansión también es nula ($\dot{a}(t) = 0$), de la que se encuentra que

$$4\pi G\rho = \Lambda \quad (5.28)$$

esto nos conduce a que

$$2\Lambda + \Lambda = \frac{3k}{a^2(t)} \rightarrow \Lambda = \frac{k}{a^2(t)}, \quad (5.29)$$

que es posible solo si $k > 0$. Si el universo es cerrado $k = 1$

$$\Lambda = \frac{1}{a^2(t)} \quad (5.30)$$

hecho que permite reescribir el elemento diferencial de longitud como

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{\Lambda} \left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (5.31)$$

Si se asumen los valores $\Lambda = 0$ y $a(t) = \text{constante}$ se encuentra que

$$\rho = -3P \rightarrow P = -\frac{k}{12\pi G a^2(t)}. \quad (5.32)$$

La expresión anterior muestra que en un universo físicamente aceptable la presión debe ser negativa para que cause una repulsión gravitacional. En otras palabras, se puede decir que el efecto repulsivo de la presión negativa provocada por una energía de vacío exótica que se denomina Energía Oscura es mayor que la atracción gravitacional y es la que produce la expansión acelerada observada.

Por otro lado, si $\Lambda \neq 0$ entonces $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ sería asociado a materia con presión positiva. Para resolver la contradicción de que el empuje causa atracción o la contracción causa repulsión, se considera que:

- El empuje de $P > 0$ y el de la P_Λ son debido a fuerzas no gravitacionales que solo mueven sustancias en torno a su espacio interior sin deformar el espacio en sí.
- La atracción gravitacional (o repulsión) que causan opera sobre el propio espacio, disminuyéndolo o aumentando la cantidad de espacio en su interior sin deformar el espacio en sí.
- No hay necesidad de que estos dos efectos actúen en la misma dirección, de hecho actúan en direcciones opuestas.

La constante cosmológica permite explicar la Energía Oscura simplemente como el precio de tener espacio, es decir, la energía fundamental intrínseca de un volumen mínimo de espacio volumétrico. Este modelo es denominado como Λ CDM al considerar la constante cosmológica Λ con materia oscura fría (o CDM por sus siglas en inglés) en un universo plano. Este modelo representa el modelo de concordancia del Big Bang que explica las observaciones de la radiación cósmica de fondo, así como la estructura a gran escala del universo y las observaciones de supernovas, arrojando un poco de claridad sobre la aceleración de la expansión del universo.

5.1.2. Modelos de energía oscura con campos escalares

Antes de presentar estos modelos hagamos un breve paréntesis para recordar algunos conceptos fundamentales de la teoría clásica de campos. Empecemos por recordar la definición matemática de la lagrangeana de un sistema de n partículas que se expresa por

$$L = \sum_n L_n(x^\alpha, \partial_\beta x^\alpha), \quad (5.33)$$

con $\alpha; \beta = 0, 1, 2, 3$. Si se supone un número incontable de partículas en el sistema ($n \rightarrow \infty$) donde cada una de ellas depende de un punto en el espacio $x^\alpha \rightarrow \varphi_\gamma(x^\alpha)$ y φ_γ es un campo escalar continuo (0-forma) que permite reescribir la expresión (5,33) como

$$\begin{aligned} L &= \int d^3x \mathcal{L}(\varphi_\gamma(x^\alpha), \partial_\beta \varphi_\gamma(x^\alpha)) \\ &= \int d^3x \mathcal{L}(\varphi_\gamma, \partial_\beta \varphi_\gamma), \end{aligned}$$

donde \mathcal{L} es la densidad lagrangeana que depende de campos escalares φ_γ y sus derivadas $\partial_\beta \varphi_\gamma$ con lo cual la acción se escribe

$$\begin{aligned} S &= \int dt L \\ &= \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\varphi_\gamma, \partial_\beta \varphi_\gamma) \\ &= \int d^4x \mathcal{L}(\varphi_\gamma, \partial_\beta \varphi_\gamma). \end{aligned}$$

La integral anterior es en realidad una integral múltiple sobre el elemento diferencial de volumen en el espacio-tiempo. Suponiendo válidos los principios de la mecánica clásica mediante el principio de Hamilton se puede calcular la variación de dicha acción para obtener las ecuaciones de movimiento para el campo φ_γ

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L}(\varphi_\gamma, \partial_\beta \varphi_\gamma) \\ &= \int d^4x \{ \partial_{\varphi_\gamma} \mathcal{L} \delta \varphi_\gamma + \partial_{\partial_\mu \varphi_\gamma} \mathcal{L} \delta(\partial_\mu \varphi_\gamma) \} \\ &= \int d^4x \left\{ \partial_{\varphi_\gamma} \mathcal{L} - \partial_\mu (\partial_{\partial_\mu \varphi_\gamma} \mathcal{L}) \right\} \delta \varphi_\gamma + \int d^4x \partial_\mu \left(\partial_{\partial_\mu \varphi_\gamma} \mathcal{L} \delta \varphi_\gamma \right). \end{aligned}$$

La segunda integral del lado derecho de la igualdad anterior es cero ya que cumple el teorema de la divergencia de Gauss y como $\delta S = 0$, entonces la primera integral es cero si cumple que

$$\partial_{\varphi_\gamma} \mathcal{L} - \partial_\mu (\partial_{\partial_\mu \varphi_\gamma} \mathcal{L}) = 0, \quad (5.34)$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange. El teorema de Noether para campos establece que si una lagrangeana tiene una simetría continua entonces existe una corriente asociada con esa simetría que es conservada cuando la ecuación de movimiento cumple

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha} &= \left[\partial_{\varphi_\gamma} \mathcal{L} - \partial_\mu (\partial_{\partial_\mu \varphi_\gamma} \mathcal{L}) \right] \frac{\delta \varphi_\gamma}{\delta \alpha} + \partial_\mu \left(\partial_{\partial_\mu \varphi_\gamma} \mathcal{L} \frac{\delta \varphi_\gamma}{\delta \alpha} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

como el primer término satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange la corriente conservada vendrá dada entonces por

$$J^\mu = \partial_{\partial_\mu \varphi_\gamma} \mathcal{L} \frac{\delta \varphi_\gamma}{\delta \alpha} \rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0. \quad (5.35)$$

Al tomar la derivada exterior de la 0-forma \mathcal{L} se obtiene

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \partial_\mu \mathcal{L}(\varphi_\gamma, \partial_\beta \varphi_\gamma) \\ &= (\partial_{\varphi_\gamma} \mathcal{L}) \partial_\mu \varphi_\gamma + (\partial_{\partial_\beta \varphi_\gamma} \mathcal{L}) \partial_\mu \partial_\beta \varphi_\gamma, \end{aligned}$$

en la que al sustituir el valor de $\partial_{\varphi_\gamma} \mathcal{L}$ despejando de (5,34) y teniendo en cuenta que $\partial_\mu \partial_\beta \varphi_\gamma = \partial_\beta \partial_\mu \varphi_\gamma$, se encuentra

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{L} &= \partial_\beta (\partial_{\partial_\beta \varphi_\gamma} \mathcal{L}) \partial_\mu \varphi_\gamma + (\partial_{\partial_\beta \varphi_\gamma} \mathcal{L}) \partial_\beta \partial_\mu \varphi_\gamma \\ &= \partial_\beta \left[(\partial_{\partial_\beta \varphi_\gamma} \mathcal{L}) \partial_\mu \varphi_\gamma \right], \end{aligned}$$

ecuación que al restarle el término $\partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\beta \delta_\mu^\beta \mathcal{L}$ a ambos lados se reescribe

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{L} - \partial_\mu \mathcal{L} &= \partial_\beta \left[(\partial_{\partial_\beta \varphi_\gamma} \mathcal{L}) \partial_\mu \varphi_\gamma \right] - \partial_\beta \delta_\mu^\beta \mathcal{L} \\ 0 &= \partial_\beta \left[(\partial_{\partial_\beta \varphi_\gamma} \mathcal{L}) \partial_\mu \varphi_\gamma - \delta_\mu^\beta \mathcal{L} \right] \\ &= \partial_\beta T_\mu^\beta, \end{aligned}$$

donde T_μ^β es el tensor de energía-momento que tiene divergencia nula y que en forma covariante se escribe

$$T_{\beta\mu} = (\partial_{\partial_\beta \varphi_\gamma} \mathcal{L}) \partial_\mu \varphi_\gamma - g_{\beta\mu} \mathcal{L}. \quad (5.36)$$

La integral de una corriente conservada sobre una superficie cerrada viene dada por

$$\begin{aligned} \int dA_\mu^1 J^\mu - \int dA_\mu^2 J^\mu &= \oint_{d\Sigma} \mathbf{J}^\mu \cdot dA_\mu \\ &= \int_\Sigma \partial_\mu (J^\mu) d\Omega \\ &= 0, \end{aligned}$$

que es la versión del teorema de Gauss en esta teoría que implica que la integral de J^μ es idéntica, sin importar cuál es la Hiper-superficie de integración. También se puede definir el cuadrimento mediante la integración del tensor contravariante de energía-momento ($T^{\beta\mu}$) como

$$P^\mu = \int dA_\beta T^{\beta\mu}. \quad (5.37)$$

Aunque $T^{\beta\mu}$ es el tensor de energía-momento, no es el único ya que siempre se puede adicionar un término de calibre $\partial_\alpha \phi^{\alpha\mu\nu}$ que cumpla que:

$$\phi^{\alpha\mu\nu} = \phi^{\alpha\nu\mu} \quad (5.38)$$

y que por lo tanto el tensor $T^{\beta\mu}$ cumple también

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad T^{\mu\nu} + \partial_\alpha \phi^{\alpha\mu\nu} \\ \partial_\beta T^{\mu\nu} + \partial_\beta (\partial_\alpha \phi^{\alpha\mu\nu}) = 0 \\ \text{como } \partial_\beta T^{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\beta (\partial_\alpha \phi^{\alpha\mu\nu}) = 0. \end{array} \right.$$

Por medio de la integración de la cantidad $x^\mu T^{\nu\beta} - x^\nu T^{\mu\beta}$ se puede construir un nuevo tensor $M^{\mu\nu}$ definido como

$$M^{\mu\nu} = \int (x^\mu T^{\nu\beta} - x^\nu T^{\mu\beta}) dS_\alpha, \quad (5.39)$$

que cumple

$$\begin{aligned} \partial_\beta M^{\mu\nu} &= \partial_\beta \int (x^\mu T^{\nu\beta} - x^\nu T^{\mu\beta}) dS_\beta \\ &= \int [(\partial_\beta x^\mu) T^{\nu\beta} + x^\mu (\partial_\beta T^{\nu\beta}) - (\partial_\beta x^\nu) T^{\mu\beta} - x^\nu (\partial_\beta T^{\mu\beta})] dS_\beta \\ &= \int [(\delta_\beta^\mu) T^{\nu\beta} - (\delta_\beta^\nu) T^{\mu\beta}] dS_\beta \\ &= \int [T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}] dS_\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

e implica que

$$T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow T^{\nu\mu} = T^{\mu\nu}, \quad (5.40)$$

es decir, que el tensor de energía momento es simétrico (RESTREPO, 2012; RANGEL, 2012).

5.1.3. Modelo del Campo de la Quinta Esencia

Los conceptos recordados en la sección anterior son las herramientas que permiten encontrar las ecuaciones de movimiento en los modelos de Energía Oscura con campos escalares. Empezaremos Presentando el modelo de la Quinta Esencia, en el que se considera que la acción es

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\}, \quad (5.41)$$

donde la densidad lagrangeana en (5,41) se contruye al sumar a la densidad lagrangeana del campo gravitatorio

$$\mathcal{L}_{CG} = \sqrt{-g} \frac{R}{2} \quad (5.42)$$

con la densidad lagrangeana con acoplamiento mínimo

$$\mathcal{L}_{AM} = \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\}, \quad (5.43)$$

que surge del acoplamiento entre la lagrangeana de Higgs

$$L_H = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (5.44)$$

y el invariante de Lorentz $\sqrt{-g} d^4x$ (MAIA, 2000; SÁNCHEZ, 2015; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006; ALVES, 2017). Con el objetivo de obtener las ecuaciones de movimiento se procede a calcular la variación de la acción (5,41) con respecto a $\delta g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\} \\ &= \int d^4x \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + \sqrt{-g} \left[\frac{R_{\mu\nu}}{2} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \right\} \left\{ -\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right] \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \right\} \left\{ -\kappa T_{\mu\nu} + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right] \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde la variación de la acción ($\delta S/\delta g^{\mu\nu}$) es nula si la cantidad sub-integral es nula. Esto permite despejar el tensor de energía momento

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right], \quad (5.45)$$

donde se tomó $\kappa = 1$. Comparando componente a componente este tensor $T_{\mu\nu}$ con el tensor de energía-momento FRW y tomando $\varphi \equiv \varphi(t)$ se obtienen las ecuaciones

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \text{ y } P_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (5.46)$$

Reescribiendo la densidad lagrangeana de (5,41) como

$$\mathcal{L} = \frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left\{ 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} \right] + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right\} \quad (5.47)$$

calculando las ecuaciones de Euler-Lagrange (5,34) con respecto al campo φ , al parámetro $a(t)$ y sus respectivas derivadas, se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0 \text{ y } 3 \left[H^2 - \frac{k}{a^2} \right] = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi). \quad (5.48)$$

Si se toma la derivada temporal de la primera de las ecuaciones de movimiento (5,48), donde $\ddot{\varphi} = 0$ y se despeja $\ddot{\varphi}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= - \left(\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{1}{3H^2} \frac{d^2V}{d\varphi^2} \right) H\dot{\varphi} \\ &= (\xi - \eta) H\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

La razón para escribir la ecuación anterior surge del sistema de ecuaciones (5,48), ya que este describe un sistema dinámico que no siempre produce una expansión acelerada. Para poder describir el universo inflacionario se toma el régimen denominado balanceo lento (o Slow-Roll por su traducción al inglés) que ocurre cuando la energía potencial del campo domina sobre la energía cinética ($V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2/2$), es decir, cuando $\xi, \eta \ll 1$, condición que se cumple cuando dicho potencial es grande y casi plano.

Para pequeñas variaciones $\dot{\varphi} \approx 0$ y desconsiderando el término de curvatura (K/a^2), en el contexto de Balanceo lento se reescriben las ecuaciones (5,48) como

$$3H\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0 \text{ y } 3H^2 = V(\varphi). \quad (5.49)$$

Éstas ecuaciones (5,49) conbinado con procedimientos algebraicos permiten reescribir los coeficientes ξ y η en función del Potencial ($V(\varphi)$) como

$$\xi = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{V(\varphi)} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \text{ y } \eta = \frac{1}{V(\varphi)} \frac{d^2V(\varphi)}{d\varphi^2}. \quad (5.50)$$

No se puede asegurar que las condiciones de Balanceo Lento sean suficientes para explicar la expansión acelerada de un universo en el que existen tanto Energía Oscura como Materia Oscura. Sin embargo, es una buena medida para verificar la existencia de tal expansión. En éste modelo, la ecuación de estado en función de φ viene dada por

$$\omega_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2 - 2V(\varphi)}{\dot{\varphi}^2 + 2V(\varphi)}, \quad (5.51)$$

lo que permite reescribir la expresiones (4,31) y (4,32) como

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1 + \omega_\varphi) \frac{da}{a} \text{ y } \rho = \rho_0 e^{-3 \int (1 + \omega_\varphi) \frac{da}{a}}. \quad (5.52)$$

La solución presentada en (5,52) coincide con los tipos de universos discutidos en el modelo cosmológico al tomar las consideraciones expuestas a continuación. Para valores grandes del potencial ($\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$) se tienen el valor $\omega_\varphi = -1$ y por tanto la densidad es una constante. Mientras que, para valores pequeños del potencial ($\dot{\varphi}^2 \gg V(\varphi)$), se tienen el valor $\omega_\varphi = 1$ que proporciona una densidad $\rho \propto a^{-6}$, lo que conduce a la expresión $\rho \propto a^{-m}$, donde $0 < m < 6$. Pero, ¿en cuál región de valores de m se presenta el régimen de expansión acelerada? La respuesta a esta pregunta se encuentra al considerar el valor $\omega_\varphi = -1/3$ que corresponde al punto crítico en el que el universo pasa de una fase de expansión acelerada a una desacelerada, con lo cual, se determina que existe una fase expansión acelerada en la región $0 < m < 2$.

Sumado a lo anterior, este modelo de la Quinta Esencia debe cumplir también con la ley de expansión $a(t) \propto t^\beta$, que entra en una fase de expansión acelerada para valores $\beta > 1$. Lo que permite la combinación de dicha ley de expansión con la relación $\dot{H} = -\dot{\varphi}^2/2$ para encontrar la ecuación diferencial

$$d\varphi = (-2\dot{H})^{\frac{1}{2}} dt, \quad (5.53)$$

cuya solución viene dada por

$$\varphi(t) = \sqrt{2\beta} \ln \frac{t}{c}, \quad (5.54)$$

que es la expresión matemática del campo de Quinta Esencia, que al combinarla con la segunda expresión de (5,48) con $k = 0$ se encuentra la expresión para el potencial

$$V(\varphi) = V_0 e^{\frac{-2\varphi}{\sqrt{2\beta}}} \text{ con } V_0 = \frac{3\beta}{c^2} \left(\beta - \frac{1}{3} \right). \quad (5.55)$$

Con estos elementos se puede obtener más información acerca de la densidad de quinta esencia dada en (5,46). Por ejemplo, que bajo las condiciones de Balanceo Lento ($V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2$) y por medio de la segunda expresión de (5,49) se encuentra que la densidad es proporcional al radio de expansión de Hubble ($\rho_\varphi \propto H^2$), que en la escala de Planck tiene un valor aproximado $\rho_{\varphi_0} \propto 10^{-47} GeV$ donde $\varphi_0 = \varphi(t_0)$.

De las relaciones anteriores se hace más que evidente que si el orden de H^2 cae, la densidad también caerá haciendo que el universo entre en un régimen de seguimiento llamado densidad de fondo que permite mostrar que el valor del campo φ en el presente es del orden de la masa de Planck ($\varphi_0 \approx m_{pl}$).

En su propuesta inicial el modelo de Quinta Esencia propone un potencial de tipo

$$V(\varphi) = \frac{M^{4+\alpha}}{\varphi^\alpha}, \quad (5.56)$$

donde α puede ser un número real y M es una constante (LIDDLE; SCHERRER, 1999). Teniendo en cuenta la discusión anterior se obtiene que

$$M = (\rho_{\varphi_0} m_{pl}^\alpha)^{\frac{1}{4+\alpha}}, \quad (5.57)$$

resultado que restringe los valores de M y α a escalas de energía compatibles con las de una partícula física, es decir, para $\alpha = 2$ se tendría que $M = 1 GeV$.

5.1.4. Modelo del Campo Fantasma

Este modelo es un caso especial del modelo del Campo de la Quinta Esencia, pero con la particularidad de que en el presente modelo se asume que la energía cinética es negativa y por lo tanto la lagrangeana viene dada por la expresión

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right\}. \quad (5.58)$$

Lo que permite rehacer los cálculos del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, la densidad (ρ_φ) y la presión (P_φ) obteniendo las expresiones

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right\}, \quad (5.59)$$

$$\rho_\varphi = -\frac{1}{2}\dot{\varphi} + V(\varphi) \text{ y } P_\varphi = -\frac{1}{2}\dot{\varphi} - V(\varphi), \quad (5.60)$$

Asimismo, se reescribe la densidad lagrangeana en (5,58) como

$$\mathcal{L} = \frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left\{ 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} \right] - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right\} \quad (5.61)$$

con lo que se calculan las ecuaciones de Euler-Lagrange (5,34) con respecto al campo φ , al parámetro $a(t)$ y sus respectivas derivadas, se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0 \text{ y } 3 \left[H^2 - \frac{k}{a^2} \right] = -\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (5.62)$$

Al igual que en el modelo del campo de la Quinta Esencia, se toma la derivada temporal de la primera de las ecuaciones de movimiento (5,62) y $\ddot{\ddot{\varphi}} = 0$ para despejar $\ddot{\varphi}$ obteniendo

$$\ddot{\varphi} = (\xi + \eta)H\dot{\varphi}, \quad (5.63)$$

donde ξ y η vienen dados por las expresiones (5,50) que respetan las condiciones de Balanceo Lento ($\xi, \eta \ll 1$). Con lo cual, las expresiones (5,62) se reducen a

$$3H\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0 \text{ y } 3H^2 = -V(\varphi). \quad (5.64)$$

Modelo que cuenta con la ecuación de estado en función de φ dada por

$$\omega_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2 + 2V(\varphi)}{\dot{\varphi}^2 - 2V(\varphi)}. \quad (5.65)$$

Hasta este punto solo se han presentado un conjunto de ecuaciones que poco difieren del modelo de la Quinta Esencia, pero ¿cómo se estudia el fenómeno de la Energía Oscura en el Modelo del Campo Fantasma? Para responder a esta pregunta se debe estudiar en primer lugar, cómo se comporta la densidad en (5,60) con respecto al potencial ($V(\varphi)$). En segundo lugar, revisar su impacto en la ecuación de estado (5,65).

Como la densidad debe ser una cantidad positiva ($\rho_\varphi > 0$), se tiene entonces $\dot{\varphi}^2/2 \ll V(\varphi) \rightarrow \dot{\varphi}^2/2V(\varphi) \ll 1$. Por lo tanto, tomar esta consideración permite escribir la ecuación de estado

$$\omega_\varphi < -\frac{1}{\frac{U_C}{U_P} + 1}. \quad (5.66)$$

donde $U_C/U_P = -\dot{\varphi}^2/2V(\varphi)$ y donde $\omega_\varphi < -1$ cuando $\dot{\varphi}^2/2 < V(\varphi)$. De la expresión (5,66) se puede definir la cantidad

$$\zeta(a) = \frac{1}{\frac{U_C}{U_P} + 1}, \quad (5.67)$$

crucial, ya que el valor de la razón entre las energías cinética y potencial influyen en el crecimiento o contracción del universo gobernado por el Campo Fantasma. Al sustituir (5,67) en (5,52) se obtiene la expresión

$$\rho_\varphi = \rho_0 e^{-3 \int (1-\zeta(a)) \frac{da}{a}}. \quad (5.68)$$

En el presente modelo se presenta una singularidad de tipo "Big Rip" que es evitable con la introducción de un potencial de corte dado por

$$V(\varphi) = V_0 \left[\text{Cosh} \left(\frac{\alpha \varphi}{m_{pl}} \right) \right]^{-1} \quad (5.69)$$

donde V_0 y α son constantes. El potencial fue escogido de forma tal que sea consistente con los valores considerados en la ecuación de estado. El potencial (5,69) permite oscilaciones amortiguadas de los campos fantasmas sobre su punto máximo ($\varphi = 0$), que luego de un cierto período de tiempo el movimiento cesa y el campo se asienta en la parte superior del potencial para imitar el comportamiento consistente con la ecuación de estado $\omega = -1$. Dicho comportamiento es genérico si el potencial tiene un máximo, lo que nos da la libertad de escoger otro tipo de potenciales con características similares y que sean consistentes con los valores que ofrece la ecuación de estado (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006; CARROLL; HOFFMAN; TRODDEN, 2003). Por lo tanto, al escoger potenciales exponenciales el sistema se aproxima a una ecuación de estado constante con $\omega < 1$ (PARANPREET; SAMI; DADHICH, 2003; SAMI, 2016).

Sin embargo, los modelos de Campos Fantasmas presentan inestabilidades cuánticas Ultravioletas (UV) muy severas. Estas provocan que el vacío se vuelva inestable dando origen a una catastrófica producción de pares de forma espontánea, es decir, el vacío se descompone en dos Campos Fantasmas (de energía cinética negativa no limitada por debajo) y dos Campos Normales (de energía cinética positivas) como consecuencia de las interacciones cosmológicas entre los Campos Fantasmas y los Gravitones luego de que se desacoplen de los Campos de Materia, ver figura 5.3 (JAMES; SANGYONG; GUY, 2004).

5.1.5. Modelo del Campo Taquión

La aparición de la Teoría de Cuerdas en el escenario de la Física Teórica dio la oportunidad de aplicar ciertos modelos considerados en ella para dar explicación a fenómenos en otros

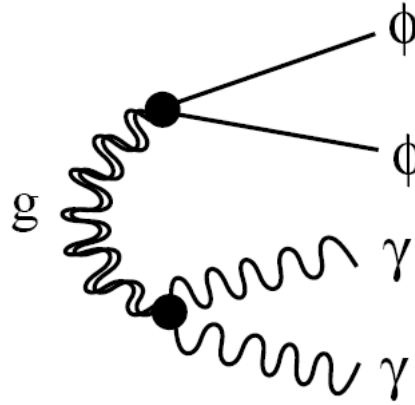


Figura 5.3 – Decaimiento del vacío en dos fantasmas (ϕ) y dos fotones (γ) por medio de la interacción con el gravitones (g) (JAMES; SANGYONG; GUY, 2004).

campos de investigación. Entre ellos, la cosmología, donde los campos de Taquiones pueden actuar como una fuente de Energía Oscura si se escoge un potencial con la forma adecuada.

La posibilidad de construir un modelo de Energía Oscura viable por medio de esta teoría se debe a que todas las dimensiones adicionales requeridas por la Teoría M (o de Super Cuerdas) no tienen que ser del tamaño de la longitud de Planck. Pueden tener una o varias de ellas tamaños comparables a $0,1mm$, siempre y cuando todos los campos del modelo estándar, excepto el campo gravitatorio, sea confinado a una hipersuperficie tridimensional o "brana" de dimensión superior. Lo anterior conduce a una teoría de campos efectiva para la 3-brane (RUBACOV, 2001), que se convierte en la base que permite para contruir la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} - V(\varphi) \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi} \right\}, \quad (5.70)$$

donde la densidad lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} - V(\varphi) \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi} \right\}, \quad (5.71)$$

surge de la suma algebraica de (5,42) con la densidad lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-g} V(\varphi) \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}, \quad (5.72)$$

obtenida por medio de la densidad lagrangeana de una 3-brana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi} \left[-f^4 - \dots \right], \quad (5.73)$$

donde se considera solo el primer término dominante de la serie como un potencial de auto interacción entre Taquiones ($f^4 = V(\varphi)$) (BILIC; TUPPER; VIOLLIER, 2002; SÁNCHEZ, 2015; PANDA et al., 2006). Escribiendo la densidad lagrangeana (5,71) como

$$\mathcal{L} = \frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left\{ 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} \right] - V(\varphi) \sqrt{1-\dot{\varphi}^2} \right\}, \quad (5.74)$$

que, consecuentemente, como en los modelos de campos ya estudiados, permiten calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange (5,34) con respecto al campo φ y su respectiva derivada, obteniendo la ecuación de movimiento

$$\frac{\ddot{\varphi}}{1-\dot{\varphi}^2} + 3H\dot{\varphi} + \frac{1}{V(\varphi)} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0. \quad (5.75)$$

Por otro lado, al calcular la variación de la acción (5,70) con respecto a $\delta g^{\mu\nu}$ se obtiene el tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = \frac{V(\varphi)}{\sqrt{1-g^{\beta\alpha}\partial_\beta\varphi\partial_\alpha\varphi}} - g_{\mu\nu}V(\varphi)\sqrt{1-g^{\beta\alpha}\partial_\beta\varphi\partial_\alpha\varphi}. \quad (5.76)$$

Asumiendo que $\varphi \equiv \varphi(t)$, comparando componente a componente el tensor $T_{\mu\nu}$ con el tensor de energía-momento FRW se obtienen las expresiones correspondientes para la densidad (ρ_φ) y la presión (P_φ) dadas respectivamente por

$$\rho_\varphi = \frac{V(\varphi)}{\sqrt{1-\dot{\varphi}^2}} \text{ y } P_\varphi = -V(\varphi)\sqrt{1-\dot{\varphi}^2}. \quad (5.77)$$

El par de ecuaciones (5,77) permiten reescribir las ecuaciones de Friedmann como

$$3H^2 = \frac{V(\varphi)}{\sqrt{1-\dot{\varphi}^2}} \text{ y } V(\varphi)\sqrt{1-\dot{\varphi}^2} = 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2, \quad (5.78)$$

donde se desprecia el término de curvatura (k/a^2) y se asume que $8\pi G = 1$. Combinado las ecuaciones (5,78) se obtiene la ecuación

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3} \frac{V(\varphi)}{\sqrt{1-\dot{\varphi}^2}} \left[1 - \frac{3}{2}\dot{\varphi}^2 \right] \quad (5.79)$$

donde se observa que la expansión acelerada ocurre cuando se cumple la condición $\dot{\varphi}^2 < 2/3$ y la ecuación de estado

$$\omega_\varphi = \dot{\varphi}^2 - 1, \quad (5.80)$$

que puede ser mapeada en la región entre -1 y 0 . Siguiendo los esquemas de los modelos presentados anteriormente se debe tener en cuenta la expresión para la densidad en (5,52), de donde se desprenden los tipos de universos posibles para este modelo. El primero de ellos se obtiene al considerar que $\dot{\varphi}^2 = 0 \rightarrow \omega_\varphi = -1$ y por lo tanto la densidad es constante ($\rho = \rho_0$). El segundo se obtiene si se considera $\dot{\varphi}^2 = 1 \rightarrow \omega_\varphi = 0$ lo que conlleva a que la densidad obedece la ley de expansión $\rho \propto a^{-m}$ donde $0 < m < 3$.

Con el objetivo de encontrar una expresión matemática que describa la evolución temporal del campo φ se toma la derivada temporal de dH/dt , que al combinarla con las expresiones (5,78) y (5,79), se obtiene la ecuación diferencial

$$d\varphi = \left[-\frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} \right]^{\frac{1}{2}} dt, \quad (5.81)$$

donde al igual que como se consideró en el modelo de Campo de la Quinta Escencia, la ley de expansión del universo $a(t) \propto t^\beta$ para $\beta > 1$, podemos encontrar la solución de (5,81) como

$$\varphi = \left(\frac{2}{3\beta} \right)^{\frac{1}{2}} t, \quad (5.82)$$

donde se escogió la constante de integración igual a cero. Al combinar (5,81) con la primera de las expresiones en (5,78) se encuentra una expresión para el potencial

$$V(\varphi) = 2\beta \left(1 - \frac{2}{3\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \varphi^{-2}, \quad (5.83)$$

que rige la auto interacción entre los Taquiones. Este potencial que va como el inverso al cuadrado del campo corresponde al caso de soluciones de escaleo (AGUIRREGABIRIA; LAZKOZ, 2004; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006). Sin embargo, el potencial (5,83) no es el único que produce el régimen de expansión acelerada, ya que potenciales que no son tan empinados como $V(\varphi) \propto \varphi^{-2}$ también conducen a dicho régimen. Por lo tanto, es posible plantear la evolución cosmológica para un potencial como una ley de potencia inversa más general dado por $V(\varphi) \propto \varphi^{-n}$ (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006).

5.1.6. Modelo del gas de Chaplygin

Siguiendo en la misma idea de buscar modelos surgidos a partir de la Teoría de Cuerdas mediante la compactificación de dimensiones adicionales a una 3-brana que se mueve en una superficie de orden superior ($3+1$ -Bulk), se obtiene una teoría de campos efectiva para bajas energías que presenten consecuencias cosmológicas. Por lo tanto, partiendo de la acción de la 3-brana

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -f^4 + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) - \dots \right\}, \quad (5.84)$$

donde se consideran solo los tres primeros términos dominantes de la serie (SUNDRUM, 1999), y asumiendo $-f^4 = R/2$ podemos reescribir la acción (5,84) como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right\}. \quad (5.85)$$

Por lo tanto, al reescribir la densidad lagrangeana en (5,85) como

$$\mathcal{L} = \frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left\{ 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} \right] - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right\}, \quad (5.86)$$

que nuevamente permiten calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange (5,34) con respecto al campo φ y su respectiva derivada, obteniendo la ecuación de movimiento

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0, \quad (5.87)$$

mientras que al calcular la variación de la acción (5,85) con respecto a $\delta g^{\mu\nu}$ se obtiene el tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \partial_\beta \varphi \partial_\alpha \varphi - V(\varphi) \right]. \quad (5.88)$$

Asumiendo que $\varphi \equiv \varphi(t)$, comparando componente a componente el tensor $T_{\mu\nu}$ con el tensor de energía-momento FRW, se obtienen las expresiones correspondientes para la densidad (ρ_φ) y la presión (P_φ) dadas respectivamente por

$$\rho_\varphi = -\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \quad \text{y} \quad P_\varphi = -\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi). \quad (5.89)$$

Lo que permite reescribir las ecuaciones de Friedmann como

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = -\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad \text{y} \quad 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (5.90)$$

que al combinar estas expresiones se encuentra la expresión

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (5.91)$$

donde se asumió $8\pi G/3 = 1$. Restringiendo la presión al comportamiento bastante exótico exhibido por la ecuación

$$P = -\frac{A}{\rho}, \quad (5.92)$$

se puede construir un modelo que sea una fuente de Materia-Energía Oscura por medio de un fluido perfecto denominado Gas de Chaplygin donde P , ρ son la presión y la densidad del fluido galáctico respectivamente y A es una constante (KAMENSCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001; BILIC; TUPPER; VIOLLIER, 2002; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006). Dicha restricción permite, mediante la combinación de (4,27) y (5,92), encontrar la ecuación diferencial

$$\frac{\rho d\rho}{\rho^2 - A} = -\frac{da^3}{a^3}, \quad (5.93)$$

cuya solución

$$\rho = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}, \quad (5.94)$$

donde B es una constante. La expresión (5,94) muestra cómo es la variación de la densidad del fluido galáctico con respecto al parámetro de expansión (a) y exhibe comportamientos asintóticos cuando se toman los siguientes casos: en el primer caso, se considera ($A \ll B/a^6$) de donde se obtiene $a \ll (B/A)^{\frac{1}{6}} \rightarrow \rho = \sqrt{B}/a^3$ condición que es consistente con el modelo dominado por Matéria Oscura. En el segundo caso, se considera A ($A \gg B/a^6$) de donde se obtiene $a \gg (B/A)^{\frac{1}{6}}$ y por lo tanto $\rho \approx -P \approx \sqrt{A}$, esta condición es consistente con un universo dominado por Energía Oscura. Es evidente que este modelo ofrece la posibilidad de contemplar la unificación de los fenómenos de Materia Oscura con la Energía Oscura.

Una vez que el universo descrito por este modelo comienza a entrar en fase de expansión acelerada ya no puede escapar de dicha fase. De hecho, la ecuación (5,91) implica que considerar $\ddot{a} > 0$ es equivalente a considerar $a^6 > B/2A$ donde evidentemente la fase de expansión se conserva por la evolución del tiempo en dicho universo. En algunos estudios, la expansión acelerada deduce que el valor observado de la constante cosmológica (efectiva) aumentará hasta $1,2\Lambda$. Dicho de otra manera, la constante cosmológica fue menor en el pasado, hecho que en principio podría ser observado (KAMENSCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001).

Mediante la combinación de las expresiones (5,89), (5,92) y (5,94) se obtiene la expresión

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{B}{a^6 \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}}. \quad (5.95)$$

Como B es una constante positiva requerirá, por consistencia del modelo, que la densidad de energía cinética sea una cantidad negativa, eso implica comportamientos de campos Fantasmas. Lo anterior nos conduce a resultados muy importantes, como por ejemplo, al combinar las

expresiones (5,89) y (5,95) se obtiene

$$V(a) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{A + \frac{B}{a^6}} + \frac{A}{\sqrt{A + \frac{B}{a^6}}} \right\}, \quad (5.96)$$

que es la expresión para el potencial que tiene un rol central en este modelo del Gas de Chaplygin; con parámetro a que hace posible describir la evolución de la densidad ρ_φ , del potencial $V(\varphi)$ y de la presión P_φ , y consecuentemente, nos permite determinar la expresión para la evolución del propio campo φ . Esto hace más que necesario encontrar una expresión matemática para dicho parámetro, que se logra al escribir la primera expresión de (5,90) (radio de expansión de Hubble) como

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{da}{dt} \right]^2 \\ &= \rho_a \\ &= \sqrt{A + \frac{B}{a^6}} \end{aligned}$$

en el que se despreció el término de curvatura ($k = 0$). Mediante la regla de la cadena se puede reescribir la derivada temporal en términos del parámetro a , que conduce a la expresión

$$d\varphi = \frac{\sqrt{B} da}{a \sqrt{A a^6 + B}}, \quad (5.97)$$

cuya solución viene dada por

$$a^6 = \frac{4B e^{6\varphi}}{A(1 - e^{6\varphi})^2}, \quad (5.98)$$

y que conduce al potencial

$$V(\varphi) = \frac{\sqrt{A}}{2} \left(\cosh 3\varphi + \frac{1}{\cosh 3\varphi} \right). \quad (5.99)$$

La expresión (5,99) no depende de la constante de integración B y por lo tanto es consistente con la ecuación de estado (5,92). Sumado a lo anterior, la cosmología de Chaplygin ofrece una posibilidad interesante para explicar las observaciones actuales sobre la expansión del universo. Además, un campo mínimamente acoplado con este potencial es equivalente al modelo de Gas Chaplygin (KAMENSCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006).

5.1.7. Campo de la K-esencia y del Dilatón

Los modelos que se presentan en esta sección nacen también de la teoría de cuerdas producto de la dependencia que tiene la métrica con las cuerdas que viven sobre la variedad M por medio de la transformación conformal

$$\hat{g}^{\mu\nu} = C_g B_g^{-1}(\phi) g^{\mu\nu}, \quad (5.100)$$

que dota a los campos en la métrica tradicional de la teoría de campos de la capacidad de describir interacciones, lo que hace que los campos satisfagan condiciones dinámicas que garanticen la invarianza de la teoría sobre la hoja de mundo (PIAZZA; TSUJIKAWA, 2004). Este hecho es descrito por medio de la acción efectiva para bajas energías dada por

$$S_{EF} = \hat{S}_{GD} + \hat{S}_M, \quad (5.101)$$

donde la acción gravi-dilatónica (\hat{S}_{GD}) viene dada por

$$\hat{S}_{GD} = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left\{ \frac{B_g(\phi)}{\alpha'} \hat{R} + \frac{B_\phi(\phi)}{\alpha'} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \hat{V}(\phi) + \dots + \frac{1}{\alpha'} \mathcal{O}(\alpha'^2) \right\}, \quad (5.102)$$

donde \hat{R} es el escalar de curvatura espacio-tiempo relativo a la métrica $\hat{g}^{\mu\nu}$, ϕ es un campo 4-dimensional, $\hat{V}(\phi)$ es el potencial de interacción (PIAZZA; TSUJIKAWA, 2004). Y donde la acción de materia viene dada por

$$\hat{S}_M \equiv \hat{S}_{mat}(\hat{g}_{\mu\nu}, \phi, \psi_i), \quad (5.103)$$

En la expresión (5,103) el término ψ_i es un Campo de Materia que se acopla al Campo del Dilatón ϕ (PIAZZA; TSUJIKAWA, 2004). La variación de \hat{S}_M con respecto a $\delta g^{\mu\nu}$ tiene como resultado

$$\frac{\delta \hat{S}_M}{\delta \hat{g}^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \hat{T}_{\mu\nu}. \quad (5.104)$$

La acción efectiva (Gravi-Dilatónica) representa el punto de partida para una Cosmología de Cuerdas (ALVES, 2017). Mediante la introducción de un Campo Canónicamente definido como φ , el potencial $V(\varphi)$ y la transformación conformal (5,100), se puede reducir la acción efectiva a la acción de Einstein

$$\begin{aligned} S_E &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_{Pl}^2}{2} R + \epsilon X - V(\varphi) + \dots + \mathcal{O}(\alpha'^2) \right\} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_{Pl}^2}{2} R + \mathcal{L}(\varphi, X) \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\varepsilon}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi = -M_{Pl}^2\left[\frac{3}{2B_g(\phi)}\frac{dB_g(\phi)}{d\phi} - \frac{B_\phi(\phi)}{B_g(\phi)}\right]\frac{g^{\mu\nu}}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi \\ X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi \quad ; \quad V(\varphi) = C_g^2B_g^{-2}(\phi)\hat{V}(\phi) \end{array} \right.$$

Si toma el valor $\varepsilon = 1$ conlleva a que φ se comporte como un campo escalar que pertenece a la teoría clásica de campos (PIAZZA; TSUJIKAWA, 2004).

5.1.7.1. Modelo del Campo de la K-esencia

En este modelo se asume que la densidad lagrangeana es una función dada por

$$\mathcal{L}(\varphi, X) = f(\varphi)\hat{P}(X), \quad (5.105)$$

presentada de esa forma en algunos estudios (JORGE; MIMOSO; WANDS, 2007; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006). Al realizar una expansión de la función $\hat{P}(X)$ alrededor del punto $X_0 = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \hat{P}(X) &= \hat{P}(X)\Big|_{X_0=0} + \frac{d\hat{P}(X)}{dX}\Big|_{X_0=0}X + \frac{d^2\hat{P}(X)}{dX^2}\Big|_{X_0=0}X^2 + \dots + \mathcal{O}(X^3) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1X + \alpha_2X^2 + \dots + \mathcal{O}(X^3). \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $\alpha_0 = 0$, tomando la expansión hasta segundo orden y a los fines de garantizar campos descritos en la teoría clásica de campos se escogen los valores $\alpha_1 = -1$ y $\alpha_2 = 1$ que permiten escribir la lagrangeana como

$$\mathcal{L}(\varphi, X) = f(\varphi)(-X + X^2), \quad (5.106)$$

lo que posibilita reescribir la acción (S_E) como

$$S_E = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{R}{2} + f(\varphi)(-X + X^2)\right\}. \quad (5.107)$$

donde se asumió $M_{Pl}^2 = 1$. Al calcular la variación de (5,107) con respecto $\delta g^{\mu\nu}$ obteniendo el tensor de energía momento

$$kT_{\mu\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}(\varphi, X)}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\varphi, X)g_{\mu\nu}. \quad (5.108)$$

Teniendo en cuenta que

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 1 \quad ; \quad \frac{\delta \mathcal{L}(\varphi, X)}{\delta g^{\mu\nu}} = [\mathcal{L}(\varphi, X)]_{;X} (-\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) \\ \\ U_\beta = \sigma \frac{\partial_\beta \varphi}{\sqrt{2X}} \quad \text{Con } \sigma \text{ como una función de signo.} \end{array} \right. \text{ y}$$

Lo que permite finalmente escribir el tensor $T_{\mu\nu}$ como

$$T_{\mu\nu} = -2X[\mathcal{L}(\varphi, X)]_{;X} U_\mu U_\nu - \mathcal{L}(\varphi, X) g_{\mu\nu}, \quad (5.109)$$

que comparando las componente del tensor $T_{\mu\nu}$ con las componente del tensor de energía-momento FRW se obtienen las expresiones para la densidad y la presión dadas por

$$P(\varphi, X) = f(\varphi)(-X + X^2) \text{ y } \rho(\varphi, X) = f(\varphi)(-X + 3X^2), \quad (5.110)$$

de la que se deduce la ecuación de estado

$$\omega_X = \frac{1 - X}{1 - 3X}. \quad (5.111)$$

Para determinar el régimen de expansión acelerada vamos a determinar en qué rango de valores debe estar la variable X , tomando en cuenta el régimen de expansión en los modelos del universo dominado por materia o por radiación que se da en el intervalo $-1/3 < \omega_X < -1$. Para $\omega_X < -1$ se encuentra que $X > 1/2$, mientras que para $\omega < -1/3$ se encuentra que $X < 2/3$. Las expresiones anteriores permiten determinar cómo influyen estos valores en la forma del potencial que se determina por medio de la ecuación de movimiento

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (5.112)$$

Sustituyendo las expresiones de densidad, presión y por medio de algunos procedimientos algebraicos encontramos la ecuación diferencial

$$\frac{1}{f(\varphi)} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \frac{(1 - 6X)\dot{X}}{(1 - 3X)\dot{\varphi}} + 3H \frac{1 + \omega_X}{\dot{\varphi}} = 0. \quad (5.113)$$

Con el fin de encontrar una solución para esta ecuación diferencial con relación a los valores constantes que puede tomar X para el régimen de expansión acelerada se asume directamente $X = \text{constante}$ lo que permite determinar que

$$d\varphi = \frac{U_0}{\sigma} \sqrt{2X} dt \rightarrow \varphi = \frac{U_0}{\sigma} \sqrt{2X} (t - t_0), \quad (5.114)$$

y teniendo en cuenta la expresión para H dado por (4,34) la ecuación diferencial (5,113) se reduce a

$$\frac{df(\varphi)}{f(\varphi)} = -\frac{2(1 + \omega_X)}{(1 + \omega_m)} \frac{d\varphi}{\varphi}, \quad (5.115)$$

cuya solución viene dada por

$$f(\varphi) \propto (\varphi - \varphi_0)^{-\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{2(1 + \omega_X)}{(1 + \omega_m)}. \quad (5.116)$$

De la expresión (5,116) se desprende que si se toma el valor $\omega_X = -1 \rightarrow \alpha = 0$ se tiene un potencial constante ($f(\varphi) = \text{cote}$) lo que ocurre precisamente si $X = 1/2$. Para cuando el universo es dominado por radiación $\omega_X = \omega_m \rightarrow \alpha = 2$ que conlleva a la función

$$f(\varphi) \propto (\varphi - \varphi_0)^{-2}. \quad (5.117)$$

Es evidente entonces que X juega un papel crucial para determinar el valor del campo de k-escencia φ lo que permite asegurar que φ se comporta como energía oscura si $0 \leq \alpha \leq 2$, que se produce en la región $1/2 < X < 2/3$.

5.1.7.2. Modelo del Campo de la Dilatón

En este modelo se toma la densidad lagrangeana propuesta en el trabajo de Piazza y Tsujikawa (2004), dada por

$$\mathcal{L}(\varphi, X) = -X + c_1 e^{\lambda\varphi} X^2 - c_2 e^{-\lambda_1\varphi}, \quad (5.118)$$

denominado modelo Dilatónico de Condensado Fantasma que es motivado por la corrección dilatónica de orden superior a nivel de árbol en la acción efectiva para bajas energías perteneciente a la Teoría de Cuerdas, donde c_1 , c_2 , λ , λ_1 son constantes positivas, $e^{\lambda\varphi}$ es el término de acoplamiento de orden superior y donde el tercer término de la densidad lagrangeana (5,118) se corresponde con un potencial $V \propto e^{-\lambda_1\varphi}$.

La densidad lagrangeana (5,118) considera que cuando el Campo Dilatón $\varphi \rightarrow \infty$ ocurre un desacoplamiento efectivo entre dicho campo con el Campo Gravitatorio. Este es el denominado escenario fuera de control, ya que para estos valores el potencial que controla la interacción desaparece y las funciones de acoplamiento

$$B_i(\varphi) = c_i + \mathcal{O}(e^{-\varphi}) \quad \text{con} \quad e^{\varphi} \gg 1, \quad (5.119)$$

tienden a valores constantes ($B_i(\varphi) \rightarrow \text{cote}$), que conduce a la lagrangeana

$$\mathcal{L}(\varphi, X) = -X + c_1 e^{\lambda \varphi} X^2. \quad (5.120)$$

Sustituyendo (5,120) en la acción S_E y repitiendo los cálculos hechos en el modelo del Campo de la K-esencia se obtienen las expresiones para la densidad y la presión

$$\rho(\varphi, X) = -X + 3c_1 e^{\lambda \varphi} X^2 \text{ y } P(\varphi, X) = -X + c_1 e^{\lambda \varphi} X^2, \quad (5.121)$$

y por consiguiente la ecuación de estado vendrá dada por

$$\omega_{(\varphi, X)} = \frac{1 - c_1 e^{\lambda \varphi} X}{1 - 3c_1 e^{\lambda \varphi} X}. \quad (5.122)$$

Modelo que solo con una modificación del campo se reduce al modelo de la k-esencia con potencial $f(\varphi) \propto (\varphi - \varphi_0)^{-\alpha}$. Como la función matemática del potencial es conocida en este modelo se necesita conocer en qué franja de valores de energías es posible un régimen de expansión acelerada que corresponde a los modelos de universo (dominado por materia o dominado por radiación) contemplados en el modelo cosmológico, donde la ecuación de estado pertenece a la región $-1 < \omega_{(\varphi, X)} < -1/3$. Como ya fue discutido en la sección 5.1.4, en estos modelos de campos fantasmas existen inestabilidades (UV) que obligan a estudiar la estabilidad de este modelo (JAMES; SANGYONG; GUY, 2004).

Para tal fin, vamos a estudiar la estabilidad de este modelo proponiendo un campo dinámico $\varphi(t, X)$ que tiene una pequeña perturbación alrededor de un campo de fondo $\varphi_0(t)$ que es solución de la ecuación de movimiento, y además cumple que $\varphi_0 \neq 0$ y $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ (PIAZZA; TSUJIKAWA, 2004; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006). Tal campo es definido por

$$\varphi(t, X) \equiv \varphi_0(t) + \delta\varphi(t, X) \quad (5.123)$$

Para estudiar la dinámica de este sistema se realiza la expansión de la lagrangeana $P(\varphi, X)$ hasta el segundo orden en $\delta\varphi$ y se encuentra la expresión para el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \xi_1 \frac{\delta(\dot{\varphi})^2}{2} + \xi_2 \frac{(\nabla\delta\varphi)^2}{2} - \xi_3 \frac{(\delta\varphi)^2}{2} \quad (5.124)$$

donde ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 son dados respectivamente por

$$\xi_1 \equiv P_{;\dot{\varphi}}(\varphi, X) + 2XP_{;\dot{\varphi};\dot{\varphi}}(\varphi, X); \quad \xi_2 \equiv P_{;X}(\varphi, X) \text{ y } \xi_3 \equiv P_{;\varphi}(\varphi, X). \quad (5.125)$$

Para que el hamiltoniano sea positivo definido ($\mathcal{H} > 0$) se debe cumplir $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ y $\xi_3 \geq 0$. Mientras la inestabilidad de este modelo aparece como un coeficiente de $(k/a)^2$ donde a es el

factor de escala y k es el momento comóvil, para la estabilidad basta solo con hacer el estudio del signo positivo de la velocidad del sonido ($c_s^2 = \xi_2/\xi_1$). Es decir, el modelo es estable si para los posibles casos $\xi_1; \xi_2 \geq 0$ o $\xi_1; \xi_2 < 0$ lo que garantiza que la razón ξ_2/ξ_1 sea positiva en presencia de energías fantasmas, ya que para la mayoría de este tipo de Campos Fantasmas la densidad lagrangeana viene dada normalmente por una expresión del tipo

$$P(\varphi, X) = -X - V(\varphi), \quad (5.126)$$

que implicaría evidentemente que $\xi_1 < 0$ y $\xi_2 < 0$. Sin embargo, al considerar una densidad lagrangeana que contenga un término cuadrático de energía cinética (X^2) la situación es diferente. Consideremos la densidad lagrangeana con términos de orden superior efectivamente desacoplada de la gravedad en el escenario fuera de control

$$P(\varphi, X) = -X + X^2, \quad (5.127)$$

de donde se encuentra que

$$\xi_1 = -1 + 6X; \text{ y } \xi_2 = -1 + 2X, \quad (5.128)$$

lo que conduce a que la velocidad del sonido sea positiva ($c_s^2 > 0$) si $\xi_1 > 0 \rightarrow X \geq 1/2$ y $\xi_2 \geq 0 \rightarrow X \geq 1/6$, es decir, el sistema está completamente estable a nivel cuántico para valores de $X \geq 1/2$. La otra condición que satisface el requerimiento de la velocidad del sonido es $\xi_1 < 0 \rightarrow X < 1/2$ y $\xi_2 < 0 \rightarrow X < 1/6$, condición que nos garantiza que el sistema tenga perturbaciones clásicamente estables si la energía cinética se encuentra en la faja de valores $0 < X < 1/6$.

Las condiciones anteriores son suficientes para sistemas cuya densidad de energía es relativamente mayor a la escala de Planck donde la condición $|X| \gg X^2$ es satisfecha. Este hecho refleja que la condición anterior es una condición debil, ya que para densidades de energía relativas a la escala de Planck esta condición no garantiza la estabilidad cuántica. Esta deficiencia es superada al considerar el modelo del Condensado Fantasma, es decir, cuando la densidad lagrangeana contempla el término de acoplamiento en el escenario del dilatón fuera de control dado por

$$P(\varphi, X)_{;X} = -1 + 2c_1 e^{\lambda\varphi} X \text{ y } \rho(\varphi, X)_{;X} = -1 + 6c_1 e^{\lambda\varphi} X. \quad (5.129)$$

Al combinar las expresiones (5,129) se obtiene que la velocidad del sonido

$$c_s^2 = \frac{1 - 2c_1 e^{\lambda\varphi} X}{1 - 6c_1 e^{\lambda\varphi} X}. \quad (5.130)$$

Cuando se exige $c_s^2 > 0$ se encuentra la condición de estabilidad cuántica $c_1 e^{\lambda\phi} X \geq 1/2$ que garantiza el régimen de expansión acelerada del universo sin inestabilidades de vacío. Además, se hace evidente que $e^{\lambda\phi}$ puede ser arbitrariamente grande lo que garantiza la estabilidad incluso si X es mucho menor que la escala de Planck. Es decir, que lo anterior representa una condición fuerte para la estabilidad del universo y hace que el modelo del Campo Dilatón sea un buen candidato para energía oscura.

6 CONCLUSIÓN

En la presente tesis se realizó una exploración detallada de los modelos que dan una explicación al fenómeno de la Energía Oscura, como lo son el modelo de la Constante cosmológica o Λ CDM que explica dicha energía simplemente como el precio de tener espacio, es decir, la energía fundamental intrínseca de un volumen mínimo de espacio volumétrico. Además de considerar la constante cosmológica Λ como la densidad Materia Oscura Fría en un universo plano de tipo FRW, responsable de impedir que el universo colapse a causa de la fuerza gravitatoria.

También se presentó una exploración detallada de los modelos de campos dinámicos tales como el modelo del campo de la Quinta Esencia y del campo Fantasma, surgidos a partir de la densidad lagrangeana en (5,41). Además, mediante procedimientos algebraicos se determinó la correspondiente función para el potencial que conduce a la ley de expansión del tipo $a(t) \propto t^\beta$. Esto permitió concluir para el modelo del campo de la Quinta Esencia ($\dot{\phi}^2/2 > 0$), que ofrece una explicación para la energía oscura al considerar un régimen de Balanceo Lento (Slow Roll). Aunque con carentes pruebas para atribuir a dicho campo la responsabilidad de generar una expansión acelerada en un universo en el cual existe tanto Energía como Materia oscura.

Por otro lado, con el modelo del campo Fantasma ($\dot{\phi}^2/2 < 0$) se explicó el fenómeno de la Energía Oscura por medio de un potencial que permite oscilaciones amortiguadas de los campos Fantasmas sobre su punto máximo ($\phi = 0$), en un cierto período de tiempo en el que el movimiento cesa y el campo se asienta en la parte superior del potencial para imitar el comportamiento consistente con la ecuación de estado $\omega = 1$. Potencial escogido a conveniencia para evitar que el universo tenga un gran desgarre (Big Rip). Sin embargo, dicho modelo tiene otro problema más severo, que son las inestabilidades cuánticas ultravioletas (UV) que resultan imposibles de ignorar.

Todo esto obligó a los cosmólogos a buscar modelos alternativos a partir de la teoría de cuerdas o Teoría M mediante la compactificación de dimensiones extras en una 3-Brana contenida en un 3 + 1-Bulk, donde tales dimensiones pueden tener tamaños comparables a 0,1mm. Ello condujo a una acción efectiva para bajas energías que ofreció la posibilidad de construir una cosmología de cuerdas, que derivó en modelos como el del campo Taquión, deducido a partir de la acción (5,70).

Dicho modelo ofrece una descripción donde los campos de Taquiones conducen al potencial de auto interacción (5,83) relacionado a una ley de expansión como la que se consideró en los modelos de campos escalares ($a(t) \propto t^\beta$) responsable de generar la expansión acelerada, aunque no es el único que puede generar este régimen; incluso un potencial que obedece una ley de evolución cosmológica más general como por ejemplo $V(\phi) \propto \phi^{-n}$ también lo consigue.

En este mismo enfoque de la cosmología de cuerdas se contempló la acción (5,84) para construir el modelo del Gas de Chaplygin, que permitió determinar la expresión para el potencial (5,99). Potencial que rige la expansión acelerada que coincide con las observaciones actuales y es el único que parece resolver la discrepancia entre la Energía y la Materia Oscura, pero con la limitación de describir solo universos abiertos a causa de la incapacidad que tiene dicho universo de detenerse una vez que empieza a acelerar y en el que la constante cosmológica efectiva aumentará (o que fue menor en el pasado). A pesar de esto, en la actualidad no se tiene garantía que demuestre que la presión obedezca a la expresión (5,92).

Los dos últimos modelos construidos en el campo de la cosmología de cuerdas fueron el del campo de la K-esencia y el del campo Dilatón. Para el modelo del campo de la K-esencia, deducido a partir de la acción (5,107), se puede concluir que ofrece la descripción de un modelo cosmológico por medio de un parámetro puramente cinético $X = -\dot{\phi}^2/2$ en una cosmología de FRW espacialmente plana. Esto permitió determinar la forma del potencial (5,118) y cuándo dicho campo se comporta como Energía Oscura.

Mientras que, en el modelo del campo Dilatón -construido a partir de la acción S_E , cuando se le introduce la lagrangeana (5,118) y se considera el escenario del Dilatón fuera de control- se encontró que cuando la lagrangeana se escribe como la forma general (5,126) y se tiene en cuenta el requerimiento de la solución de escala, dicha lagrangeana está determinada unívocamente por la expresión (5,127). En este escenario, el término cinético negativo y el potencial de tipo campana hace que el dilatón evolucione hacia el valor máximo del potencial con ecuación de estado $\omega \leq -1$. Por otro lado, el término X^2 asegura la estabilidad de las fluctuaciones cuánticas por medio de la restricción $\omega \geq -1$.

A pesar de que los modelos anteriores cuenten con una estructura matemática muy elegante, y de los grandes aportes que ellos ofrecen en la comprensión de nuestro universo, actualmente no existe ninguna medición experimental que demuestre que los campos sean el verdadero origen de la Energía Oscura. Por lo tanto, ellos solamente representan un buen intento realizado en el campo de la cosmología moderna. En contraposición a esto, la plena coincidencia que existe entre el modelo Λ DCM con la hipótesis del Big Bang, permite explicar las observaciones de la radiación cósmica de fondo, así como la estructura a gran escala del universo y las observaciones de supernovas, hacen que el modelo Λ CDM sea el único modelo vigente que arroja un poco de claridad sobre la expansión acelerada de un universo FRW plano.

BIBLIOGRAFÍA

- AGUIRREGABIRIA, J.; LAZKOZ, R. Tracking solutions in tachyon cosmology. *Physical Review D*, v. 69, 2004. 107
- ALVES, A. Dualidade do fator de escala e cosmologias pré-big-bang. Universidade Federal do Espírito Santo (Brasil), Disponível em:<http://repositorio.ufes.br/handle/10/7385>. Acesso em: 22 ene. 2020., 2017. 93, 99, 111
- BILIC, N.; TUPPER, G. B.; VIOLLIER, R. D. Dark matter, dark energy and the chaplygin gas. *Dark matter in astro- and particle physics. Proceedings of the International Conference DARK 2002, Cape Town, South Africa, 4 - 9 February 2002*. H. V. Klapdor-Kleingrothaus, R. D. Viollier (eds.). *Physics and astronomy online library*, SPRINGER, p. 306–311, 2002. 106, 109
- CARROLL, M. S.; HOFFMAN, M.; TRODDEN, M. Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than 1? *Physical Review D*, v. 68, n. 2, 2003. 104
- CHOUDHURY, T. R.; PADMANABHAN, T. Cosmological parameters from supernova observations: A critical comparison of three data sets. *Astronomy and Astrophysics*, v. 429, p. 807–818, 2005. 90
- COPELAND, E.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific Publishing Company, v. 15, n. 11, p. 1753—1935, 2006. 9, 12, 76, 78, 79, 85, 86, 91, 92, 93, 99, 104, 107, 109, 110, 112, 115
- GRON, O.; SIGBJORN, H. Einstein's general theory of relativity with modern applications in cosmology. SPRINGER, 2007. 12, 14, 51, 65, 67, 74, 76, 78, 81, 82, 84, 93
- ISLAM, J. N. An introduction to mathematical cosmology-second edition, research centre for mathematical and physical sciences, university of chittagong, bangladesh. 2001. 67, 78, 81, 93
- JAMES, C. M.; SANGYONG, J.; GUY, M. D. The phantom menaced: Constraints on low-energy effective ghosts. *Physical Review D*, v. 70, n. 4, 2004. 9, 104, 105, 115
- JANSENN, B. Teoría de la relatividad general. Dpto de Física Teórica y del Cosmos, Edificio Mecenas, Campus de Fuente Nueva Universidad de Granada, 18071 Granada, España, 2013. 9, 12, 14, 15, 16, 56, 67, 93
- JASSAL, H. K.; BAGLA, J. S.; PADMANABHAN, T. Observational constraints on low redshift evolution of dark energy: How consistent are different observations? *PHYSICAL REVIEW D*, American Physical Society, v. 72, n. 10, 2005. 90
- JORGE, P.; MIMOSO, J. P.; WANDS, D. On the dynamics of k-essence models. *Journal of Physics*, v. 66, 2007. 112
- KAMENSHIK, A.; MOSCHELLA, U.; PASQUIER, V. An alternative to quintessence. *Physics Letters B*, v. 511, p. 265–268, 2001. 109, 110
- KNOP, R. A. et al. New constraints on ω_M , ω_Λ , and w from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with hst1. *The Astrophysical Journal, Volume 598, Number 1*, v. 598, n. 1, 2003. 90

- LIDDLE, A. An introduction to modern cosmology-third edition. Institute for Astronomy, University of Edinburgh, Abbreviate to 'UK', United Kingdom, 2015. 9, 84, 86, 93
- LIDDLE, A.; SCHERRER, R. A classification of scalar field potentials with cosmological scaling solutions. *Physical Review D*, v. 59, 1999. 102
- MAIA, F. J. M. Algumas aplicações de campos escalares em cosmologia. Universidad de São Paulo Instituto de Física-FIMPE, São Paulo (Brasil), 2000. 99
- NODELSON, S. Modern cosmology. *Sand Diego C.A: Academic press*, Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/1282338>>. Acesso em: 8 mai. 2020., p. 440, 2003. 9, 92
- PADMANBHAN, T. Cosmological constant - the weight of the vacuum. *Physics Reports*, ELSEVIER, v. 380, p. 235–320, 2003. 90
- PANDA, S. et al. Inflation from d3-brane motion in the background of d5-branes. *Physical Review D*, v. 73, n. 8, 2006. 106
- PARANPREET, A.; SAMI, M.; DADHICH, N. Cosmological dynamics of phantom field. *Physical Review D*, v. 68, 2003. 104
- PERLMUTTER, S. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 517, p. 565–586., 1999. 90
- PIAZZA, F.; TSUJIKAWA, S. Dilatonic ghost condensate as dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 07, n. 004, 2004. 111, 112, 115
- RANGEL, P. Fundamentos da teoria clássica de campos. Universidade Federal Fluminense Instituto de Física, Niterói-RJ (Brasil), 2012. 98
- RESTREPO, D. El lagrangiano del modelo estándar. Universidad de Antioquia Instituto de Física, Antioquia (Colombia), 2012. 98
- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, v. 116, n. 3, 1998. 9, 87, 89, 90, 91
- RIESS, A. G. et al. Type ia supernova discoveries at $z > 1$ from the hubble space telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society., v. 607, n. 2, p. 665–687, 2004. 87, 89, 90
- RUBACOV, V. A. Large and infinite extra dimensions. *Physics Uspekhi*, v. 44, n. 9, p. 871–893, 2001. 105
- SAHNI, V. Dark matter and dark energy. *The Physics of the Early Universe, Edited by E. Papantonopoulos. Lecture Notes in Physics, vol. 653. Berlin: Springer, 2004., p.141*, SPRINGER, v. 653, p. 141, 2004. 90
- SAMI, M. Phantom field and the fate of universe. *The European Physical Journal C*, v. 76, n. 7, p. 9, 2016. 104
- SCHUTZ, B. F. Geometrical methods of mathematical physics. Cambridge University, 32 East-57th street, New York, USA, 1980. 14
- SUNDRUM, R. Effective field theory for a three-brane universe. *Physical Review, D*, v. 59, n. 8, 1999. 108

SÁNCHEZ, I. E. Soluciones de einstein de materia y energía oscura asintóticamente de sitter. Universidad de Buenos Aires-UBA (Argentina), Disponível em: <https://digital.bl.fcen.uba.ar>. Acesso em: 10 nov. 2019., 2015. 9, 12, 64, 66, 72, 87, 92, 93, 99, 106

TONRY, J. L. et al. Cosmological results from high-z supernovae. *The Astrophysical Journal*, v. 594, n. 1, 2003. 12, 90