



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

MATHEUS RODRIGUES MEDEIROS SILVA

ÓTICA GEOMÉTRICA EM ESPAÇOS-TEMPO  
CURVOS E GEOMETRIA DO CONE DE LUZ

---

Londrina  
2019



MATHEUS RODRIGUES MEDEIROS SILVA

**ÓTICA GEOMÉTRICA EM ESPAÇOS-TEMPO  
CURVOS E GEOMETRIA DO CONE DE LUZ**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira

Londrina

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Silva, Matheus.

Ótica geométrica em espaços-tempo curvos e geometria do cone de luz/ Matheus Silva. - Londrina, 2019.

78 f. : il.

Orientador: Thiago dos Santos Pereira.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2019. Inclui bibliografia.

1. Cosmologia 1 - Teses. 2. Espaços-tempo curvos. 2 - Teses. 3. Ótica Geométrica. 3 - Teses. 4. Astrometria. 4 - Teses. I. Pereira, Thiago. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Ótica geométrica em espaços-tempo curvos e geometria do cone de luz.

MATHEUS RODRIGUES MEDEIROS SILVA

**ÓTICA GEOMÉTRICA EM ESPAÇOS-TEMPO CURVOS E  
GEOMETRIA DO CONE DE LUZ**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Pietro Chimenti  
Universidade Estadual de Londrina- UEL

---

Prof. Dr. Carlos Molina Mendes  
Universidade de São Paulo- USP

Londrina, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.



*Dedico esta dissertação às pessoas mais importantes da minha vida, minha avó Iraci, meus pais, Almir e Sonia e à minha esposa Leticia, por todo o suporte que me deram.*



# Agradecimentos

Sou grato a Deus por todas as forças que me deu e por todas as oportunidades que se abriram no decorrer deste trabalho.

Nos primeiros meses do mestrado, antes mesmo de receber a primeira prestação da bolsa, eu pensava em apenas alugar um apartamento e levar somente os itens básicos até começar a transformar o apartamento em um lar, no entanto, minha família se juntou, fizeram uma vaquinha e me ajudaram a montar o apartamento com todos os itens que fornecessem aconchego para mim e minha esposa Leticia. Sou muito grato a toda minha família por toda ajuda que me deram no decorrer de todos estes anos de estudo, em especial, sou grato à minha vó, minha esposa e meus pais, por sempre acreditarem em mim e prestarem todo o suporte necessário.

Sou muito grato à UEL e a todos os funcionários, que sempre proporcionaram salas limpas para o estudo, um almoço e jantar delicioso no R.U., sou grato à secretaria da pós, por sempre estarem dispostos a ajudar com as questões burocráticas, em especial à Lúcia que sempre esteve pronta a ajudar.

Sou grato a Capes/Fundação Araucária pelo suporte financeiro durante esta pesquisa.

Sou grato aos professores Pietro Chimenti, Marcelo Costa e Carlos Molina por se disporem a compor a banca e contribuir com este trabalho.

Durante o início do mestrado tive muitas dificuldades com as disciplinas, no entanto, amigos se dispuseram a me ajudar, sou grato ao Luiz, Andres, Rodrigo, Lucas e Ladislau. Sou muito grato aos professores, Pedro, Paula e Thiago que ministraram as disciplinas do mestrado e tiveram bastante paciência comigo durante este período. Sou grato ao pessoal da sala 15, por compartilhar bons momentos de trabalho, à Débora, à Ana e ao Antônio. Sou grato a todos do Grupo de Física Teórica da UEL, em especial ao pessoal do grupo de Cosmologia, ao Victor, ao Renan, ao Richard com quem compartilhei o aprendizado de Relatividade Geral, ao Oton cuja importância foi fundamental no decorrer deste trabalho.

Por último gostaria de agradecer ao meu orientador Thiago dos Santos Pereira que foi fundamental para minha formação, no começo do mestrado esteve bem próximo durante os estudos de Relatividade Geral e fornecendo auxílio em todo o aporte matemático que eu não tive, o que foi importante pra mim não só no desenvolvimento desta dissertação, como também para enfrentar as primeiras disciplinas da pós. Além disso, o Thiago escolheu um tema que estivesse a altura das minhas aptidões, mas que não deixasse de ser um tema interessantíssimo. Não tenho como agradecer por tudo que o Thiago proporcionou na minha carreira como físico, espero continuar trabalhando com ele ao longo da minha carreira como Cosmologista.



*"No government has the right to decide on the truth of scientific principles, nor to prescribe in any way the character of the questions investigated. Neither may a government determine the aesthetic value of artistic creations, nor limit the forms of literary or artistic expressions. Nor should it pronounce on the validity of economic, historic, religious, or philosophical doctrines. Instead it has a duty to its citizens to maintain the freedom, to let those citizens contribute to further adventure and the development of the human race."*

*Richard P. Feynman.*



SILVA, MATHEUS. **Ótica geométrica em espaços-tempo curvos e geometria do cone de luz**. 2019. 78fls. Dissertação de Mestrado em Física– Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

## Resumo

Nos últimos anos, com os avanços tecnológicos, a cosmologia entrou em uma era de precisão observacional. Graças a estes avanços, novas janelas observacionais se abrem para a exploração do Universo. Um bom exemplo de uma nova área é a chamada Astrometria Relativística, a partir da qual podemos vincular a taxa de expansão e a geometria do Universo em “tempo real” usando medidas precisas da paralaxe e do redshift de objetos astrofísicos. Nesta dissertação buscamos descrever alguns destes observáveis astrométricos em termos de um sistema de coordenadas que explora ao máximo a geometria do cone de luz, e conhecido como coordenadas GLC (do inglês, Geodesic Light-cone Coordinates). Em particular, exploramos este sistema de coordenadas para o cálculo das variações temporais (conhecidas como *drifts*) do *redshift* e da paralaxe de objetos astrofísicos em uma geometria arbitrária e levando em conta suas velocidades peculiares.

**Palavras-chave:** Cosmologia 1. Espaços-tempo curvos 2. Ótica geométrica 3. Astrometria 4. Cosmologia em tempo real 5.



Silva, Matheus. **Geometric optics on curved spacetime and light cone geometry.** 2019. 78p. Physics Master's Dissertation– Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

## Abstract

In the last few years, with advances in technology, cosmology has entered into an observational precision era. Due to these advances, new observational windows open to the exploration of the Universe. A good example of a new field is the so-called Relativistic Astrometry, by means of which we can constrain the expansion rate and geometry of the Universe in “real time” by using precise measurements of the parallax and redshifts of astrophysical objects. In this dissertation, we have sought to describe some of these observables by using a coordinate system which explores to the maximum the light cone geometry, and known as Geodesic Light-cone Coordinates (GLC). In particular, we explored this coordinate system to compute time variations (known as drifts) of the redshift and parallax of astrophysical objects in an arbitrary geometry and including the contribution of their peculiar velocities.

**Keywords:** Cosmology 1. Curved spacetime 2. Geometric optics 3. Astrometry 4. Real-time cosmology 5.



# Lista de ilustrações

Figura 1	– Cone de luz do espaço-tempo de Minkowski, com uma das dimensões suprimidas. Perceba uma esfera de raio $r = t_0 - t$ , está imersa na intersecção da superfície de $t = cte = t_0$ . . . . .	41
Figura 2	– Representação gráfica das coordenadas GLC. O cone de luz é definido com base em um observador geodésico com linha de mundo $\mathcal{L}_0$ e quadri-velocidade $u$ . Note que o vetor de onda $k$ é paralelo à superfície do cone e segue geodésicas com $\theta^a = cte$ em um cone de luz definido por $w = cte$ . Figura reproduzida da Ref. [1]. . . . .	42
Figura 3	– Base vetorial $\partial_\tau$ proporcional ao vetor $k$ de onda conectando dois eventos $E$ e $E'$ . Figura reproduzida da Ref. [1]. . . . .	43
Figura 4	– Distância entre dois eventos na perspectiva do observador nas coordenadas de Fermi. Em que os ângulos destacados são iguais e possuem $45^\circ$ , as linhas de mesma cor possuem o mesmo tamanho. . . . .	47
Figura 5	– Drift do redshift associado a uma alteração do raio da esfera enquanto que o drift da direção está associado à velocidade $v^a$ das coordenadas GLC. . . . .	59
Figura 6	– Vetor sendo transladado sobre a superfície de uma esfera em uma trajetória fechada. Percebe-se que após a trajetória fechada, o vetor transladado não será paralelo ao original. . . . .	73



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>ÓTICA GEOMÉTRICA</b> . . . . .	<b>23</b>
2.1	Noções Básicas . . . . .	23
2.2	Eletromagnetismo . . . . .	24
2.3	Equações de Onda . . . . .	27
2.4	Ótica Geométrica no Espaço-Tempo de Minkowski . . . . .	28
<b>3</b>	<b>ÓTICA GEOMÉTRICA EM ESPAÇO-TEMPO CURVO</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1	Ótica Geométrica . . . . .	34
3.2	Redshift . . . . .	36
<b>4</b>	<b>COORDENADAS DE CONE DE LUZ</b> . . . . .	<b>39</b>
4.1	Base Coordenada e Métrica . . . . .	40
4.2	Liberdade de Calibre . . . . .	46
4.2.1	<b>Liberdade de Parametrização do Cone de Luz</b> . . . . .	<b>46</b>
4.2.2	<b>Liberdade de Escolha de Raios de Luz</b> . . . . .	<b>48</b>
4.2.3	<b>Transformações Conformes</b> . . . . .	<b>49</b>
4.3	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	50
4.4	Espaço-Tempo de FLRW em Coordenadas GLC . . . . .	52
<b>5</b>	<b>ASTROMETRIA</b> . . . . .	<b>55</b>
5.1	Minkowski . . . . .	55
5.2	Drift em Coordenadas GLC . . . . .	59
5.2.1	<b>Drift no Espaço-Tempo de Minkowski</b> . . . . .	<b>61</b>
5.3	Construção Geral . . . . .	62
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>67</b>
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>71</b>
	<b>APÊNDICE A – RESUMO DE RELATIVIDADE GERAL</b> . . . . .	<b>73</b>



# 1 Introdução

A cosmologia, enquanto ramo da física, visa responder grandes questões da humanidade sobre o Universo tais como sua origem, evolução e sua finitude no espaço e no tempo. Entretanto, mesmo nos anos seguintes à formulação da gravitação Newtoniana – a primeira teoria científica passível de ser aplicada às escalas cosmológicas – a cosmologia manteve o status de ramo especulativo da ciência. Foi só a partir de 1915, quando Einstein formulou sua teoria relativística da gravitação, que a cosmologia passa a ser vista como uma verdadeira disciplina da física teórica. Do ponto de vista observacional, a cosmologia passou por um momento de estagnação até que, em 1965, a Radiação Cósmica de Fundo (RCF) foi descoberta por Penzias e Wilson. Desde então, a RCF se tornou um dos principais observáveis em cosmologia, jogando luz sobre a natureza isotrópica e homogênea do Universo em escalas aproximadamente maiores que  $100 \text{ Mpc}^1$ . Nos últimos anos os satélites de alta precisão COBE [2], WMAP [3, 4] e o Planck [5], foram decisivos para o estabelecimento do Modelo Padrão de Cosmologia, o qual estabelece que o Universo é uma estrutura espacialmente homogênea e isotrópica com cerca de 13,8 bilhões de anos, composta por 68,3% de energia escura, 26,8% de matéria escura, 4,9% de matéria comum (bariônica) [5]. É importante enfatizar que todas estas observações são feitas no nosso cone de luz passado, ou seja, em uma pequena porção do Universo ao qual temos acesso.

Um dos problemas atuais da cosmologia consiste em explicar a discrepância nas medidas de  $H_0$  (i.e., a taxa atual da expansão do universo) obtidas pelos dados da RCF de um lado e, de outro, a partir das curvas de luminosidade de supernovas do tipo Ia. Por um lado, quando consideramos o modelo  $\Lambda$ CDM para explicar a RCF, encontramos uma taxa de expansão de  $H_0 = 67,8 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [5]. Por outro lado, o valor encontrado pela missão Hubble é de aproximadamente  $73,2 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [6]. Essa diferença pode indicar tanto a existência de uma nova física como a presença de algum erro sistemático na interpretação dos dados cosmológicos [7].

Uma maneira de entender melhor o que está acontecendo é procurar por uma medida independente da taxa de expansão do Universo. Com os avanços tecnológicos tornou-se possível estimar a taxa de expansão do Universo a partir de medidas da variação temporal do *redshift* — ou, usando um jargão da área, o *drift*<sup>2</sup> do *redshift* — de Quasares [8]. Este novo observável deu origem a uma nova área da cosmologia, conhecida como cosmologia em tempo real, a qual permite medir variações de observáveis cosmológicos em escalas de tempo da ordem de décadas. Medidas astrométricas recentes, tais como as fornecidas pela missão Gaia, prometem inferir o drift de redshift

<sup>1</sup>  $1 \text{ Mpc}$  equivale a  $3 \times 10^{19} \text{ Km}$ .

<sup>2</sup> Ou “deriva”, em português.

com precisão comparável às atuais medidas de  $H_0$  [9]. As medidas da cosmologia em tempo real ainda podem testar modelos cosmológicos com expansão anisotrópica, medindo o drift da paralaxe [10, 11], ou até mesmo prover uma maneira independente de medir a velocidade peculiar da terra com relação à RCF, sendo assim uma maneira de compreender melhor a origem da anisotropia dos termos de dipolo na RCF [12].

Um formalismo desenvolvido em Marcori et al. [13] permite calcular o drift destes observáveis a partir da integração da equação da geodésica da luz em espaços-tempo cosmológicos. Entretanto, os autores deste trabalho empregam uma construção que não explora completamente a geometria do cone de luz onde estas observações são feitas. Assim, o principal objetivo desta dissertação é adaptar o formalismo apresentado em [13] em termos das variáveis do cone de luz passado do observador, uma vez que, conforme demonstrado em [14], todo e qualquer observável cosmológico pode ser coordenatizado univocamente em termos da geometria do seu cone de luz. Para tanto, esta dissertação será organizada da seguinte forma. No capítulo 2 faremos uma breve revisão sobre ótica geométrica no contexto da relatividade restrita, a qual será generalizada para o contexto de espaços-tempo curvos no capítulo 3. No capítulo 4, faremos uma discussão sobre a geometria do cone de luz de um observador geodésico em um espaço-tempo arbitrário, a qual naturalmente nos levará à introdução das coordenadas de cone de luz, ou coordenadas GLC. Finalmente, após termos compreendido a geometria das coordenadas GLC, faremos uma exposição do formalismo de Marcori et al. [13] no capítulo 5, onde também iremos apresentar nossos principais resultados. Apresentaremos em seguida nossas conclusões no capítulo 6. Dado que o enfoque desta tese está na aplicação de um sistema de coordenadas ao cálculo de observáveis astrométricos, iremos assumir do leitor a familiaridade com a teoria da Relatividade Geral. Entretanto, para a conveniência do leitor, apresentamos no apêndice A um compêndio com os principais resultados de relatividade geral utilizados nesta dissertação.

Ao longo deste trabalho, utilizaremos a métrica com assinatura  $(-, +, +, +)$  e unidades nas quais  $c = 1$ . Índices gregos (e.g.  $\mu, \nu$ , etc) variam de 0 a 3, enquanto que índices latinos (e.g.,  $i, j$ , etc) variam de 1 a 3. Índices repetidos subentendem um sinal de soma.

## 2 Ótica Geométrica

### 2.1 Noções Básicas

Neste capítulo pretendemos construir uma versão do eletromagnetismo em que a invariância relativística seja evidente, para que, no próximo capítulo, possamos estender esta construção para um versão compatível com espaços-tempo curvos. Para isto definiremos escalares, vetores e tensores como elementos que são invariantes por transformações de Lorentz. Tensores arbitrários serão definidos em termos dos elementos de base dos espaços tangentes ( $\mathbf{e}_\mu$ ) e cotangentes ( $\mathbf{e}^\mu$ ). Por exemplo, um tensor de ordem arbitrária será escrito como

$$\mathbf{T} = T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \cdots \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta \cdots ,$$

em que suas componentes,  $T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots}$ , se transformam de maneira inversa aos elementos de base, de modo a garantir que  $\mathbf{T}$  permaneça invariante sob transformações lineares da forma:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu x^\nu . \quad (2.1)$$

Ou seja

$$\mathbf{T}(x) = \mathbf{T}'(x') \quad \rightarrow \quad T^{\mu'\nu'\dots}_{\alpha'\beta'\dots} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \cdots \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \cdots T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots} , \quad (2.2)$$

onde

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} = \delta_\nu^\mu , \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} = \delta_{\nu'}^{\mu'} . \quad (2.3)$$

O elemento de linha invariante é dado por:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j , \quad (2.4)$$

em que  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  é a métrica do espaço-tempo de Minkowski, e  $x^\mu = (t, x, y, z)$ . Partículas sem massa se deslocam em trajetórias com velocidade  $v \equiv \sqrt{\frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt}} = 1$ , e portanto com  $ds^2 = 0$ . Partículas massivas, por sua vez, se deslocam em trajetórias com velocidades inferiores a 1, e portanto com  $ds^2 < 0$ . O tempo próprio de observadores é definido como a grandeza positiva  $d\tau = \sqrt{-ds^2}$  e portanto:

$$\int d\tau = \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int dt \sqrt{1 - v^2} . \quad (2.5)$$

Seguindo esta construção, a ação de uma partícula livre relativística de massa  $m$  é dada por:

$$S[x^\mu] = -m \int d\tau(x^\mu) . \quad (2.6)$$

A aplicação do princípio de mínima ação ( $\delta S = 0$ ) com relação às trajetórias  $x^\mu$  nos leva à equação

$$\delta S = 0 \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (2.7)$$

a qual descreve o movimento relativístico de uma partícula livre.

## 2.2 Eletromagnetismo

Procuramos agora encontrar uma descrição para o campo eletromagnético a partir de uma ação geral de campos interagindo com uma partícula massiva. Para tanto, devemos levar em conta dois ingredientes: a invariância sob transformações de Lorentz (2.1) e a invariância de calibre. Uma ação possível é:

$$S = \int d\tau (-mc^2 + \alpha\phi + \beta u^\mu A_\mu + \gamma u^\mu u^\nu H_{\mu\nu} + \dots), \quad (2.8)$$

em que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes de acoplamento e:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.9)$$

é a quadri-velocidade da partícula, a qual, em virtude de (2.4), automaticamente satisfaz:

$$u_\mu u^\mu = -1. \quad (2.10)$$

Note que essa condição de normalização será automaticamente obedecida se:

$$u_\mu = -\partial_\mu \tau. \quad (2.11)$$

Essa última quantidade nos será útil quando construirmos as coordenadas GLC, no capítulo 4, onde veremos que a quantidade  $\tau(x^\mu)$  descreve hipersuperfícies de tempo constante, as quais representam uma das coordenadas de um evento no cone de luz.

Começaremos analisando os termos mais simples da ação. Para tanto devemos lembrar que nossa construção é puramente clássica, e na natureza não conhecemos campos escalares clássicos, portanto  $\phi = 0$ . Logo, analisaremos primeiro a dinâmica da partícula sob influência do campo  $A^\mu$  que, como vamos ver, corresponde ao acoplamento da partícula com campo eletromagnético. O último termo,  $H_{\mu\nu}$ , pode ser visto como um campo de spin-2 que corresponde a uma descrição linearizada de ondas gravitacionais. Porém, não é o objetivo desta dissertação discutir este termo, ou termos de *spin* mais altos, de modo que iremos truncar a ação a partir deste termo.

As equações de movimento são as equações de Euler-Lagrange, que também podem ser obtidas a partir do princípio de mínima ação, em que o movimento clássico corresponde à um extremo da ação:

$$\delta S = \delta \int d\tau (-m + \beta u^\mu A_\mu), \quad (2.12)$$

em que:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \rightarrow \quad -d\tau = u_\mu dx^\mu = -\partial_\mu \tau dx^\mu. \quad (2.13)$$

Temos também que:

$$\begin{aligned} \delta A^\mu &= A^\mu(x^\alpha + \delta x^\alpha) - A^\mu(x^\alpha) \\ &\approx \delta x^\alpha \partial_\alpha A^\mu. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Portanto, a variação da ação se torna:

$$\begin{aligned} \delta S &= m \int_a^b \delta(u_\mu dx^\mu) + \beta \int \delta(dx^\mu A_\mu) \\ &= m \left\{ \int_a^b d\tau \left[ (\delta u_\mu) u^\mu + u_\mu \frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu) \right] \right\} + \beta \int_a^b \delta(dx^\mu A_\mu) \\ &= m \left\{ \int_a^b d\tau \left[ \frac{1}{2} \delta(u_\mu u^\mu) + \frac{d}{d\tau} (u_\mu \delta x^\mu) - \delta x^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} \right] \right\} + \beta \int_a^b \delta(dx^\mu A_\mu) \\ &= \int_a^b d\tau \delta x^\mu \left[ -m \frac{du_\mu}{d\tau} \right] + \beta \int_a^b \delta(dx^\mu A_\mu) + \delta x^\mu u_\mu \Big|_a^b \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que, na última passagem, usamos  $\delta(u_\mu u^\mu) = \delta(-1) = 0$  e também o fato de que, por hipótese,  $\delta x^\mu$  se anula nos extremos da trajetória da partícula. Calculamos agora o segundo termo:

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(dx^\mu A_\mu) &= \int_a^b dx^\mu \delta x^\alpha \partial_\alpha A_\mu + \int_a^b A_\mu d(\delta x^\mu), \\ &= \int_a^b dx^\mu \delta x^\alpha \partial_\alpha A_\mu - \int_a^b \delta x^\mu dA_\mu + \delta x^\mu A_\mu \Big|_a^b \\ &= \int_a^b dx^\mu \delta x^\alpha \partial_\alpha A_\mu - \int_a^b \delta x^\mu \partial_\alpha A_\mu dx^\alpha + \delta x^\mu A_\mu \Big|_a^b \\ &= \int_a^b d\tau \delta x^\alpha u^\mu [\partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha] + \delta x^\mu A_\mu \Big|_a^b \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde usamos novamente o fato de que  $\delta x^\mu$  se anula nos extremos da trajetória. Rearranjando os índices e combinando este resultado com a etapa anterior, teremos:

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = \beta F_{\mu\alpha} u^\alpha, \quad (2.17)$$

em que  $F_{\mu\nu}$  é o tensor de Faraday:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.18)$$

e o lado direito da expressão (2.17) é equivalente à força de Lorentz. Portanto  $\beta = q$  e  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ , que são respectivamente os potenciais escalar e vetor do eletromagnetismo. Considerando agora o termo de superfície,  $\partial_\alpha S = P_\alpha$ , em que  $P_\alpha$  é o momento conjugado da partícula e é dado por:

$$P_\mu = m u_\mu + q A_\mu. \quad (2.19)$$

Nesta expressão, o primeiro termo é o momento intrínseco da partícula, enquanto o segundo termo é um momento devido à interação da partícula com o campo  $A^\mu$ . Como sabemos, na natureza o momento se conserva. Portanto, a conservação do momento total deste sistema implica necessariamente que o campo  $A^\mu$  deve possuir também momento intrínseco e, conseqüentemente, uma dinâmica também.

Para encontrar as equações dinâmicas do campo  $A^\mu$ , precisamos construir sua ação levando em conta dois ingredientes: a invariância da ação sob transformações de Lorentz (2.1) e a invariância sob transformações de calibre da forma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f. \quad (2.20)$$

Também devemos exigir que as equações sejam lineares nos campos e de no máximo de segunda ordem nas derivadas. Esses ingredientes nos levam à ação:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (2.21)$$

$$= \int d^4x (\alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \beta A_\mu J^\mu). \quad (2.22)$$

A invariância de calibre do primeiro termo fica evidente devido a antissimetria do tensor de Faraday (2.18):

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f \quad \Rightarrow \quad F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Já o segundo termo, aparentemente, viola a invariância de calibre. No entanto, sob uma transformação da forma (2.20) a lagrangiana ganha um termo adicional:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + (\partial_\alpha f) J^\alpha. \quad (2.24)$$

Mas, fazendo uma manipulação no segundo termo, obtemos:

$$(\partial_\alpha f) J^\alpha = \partial_\alpha (f J^\alpha) - f \partial_\alpha J^\alpha. \quad (2.25)$$

Quando integrado sobre o volume do espaço-tempo, o primeiro termo nessa expressão se torna um termo de superfície. Assim, assumindo que  $f J^\alpha$  se anula no infinito, este termo não afetará as equações de movimento. Já o segundo termo será nulo se admitirmos a validade da conservação de carga, i.e., se

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.26)$$

Portanto, a ação (2.22) será invariante de calibre desde que acopladas a cargas conservadas.

Para encontrar as equações de movimento do campo, extremizaremos a ação com relação ao campo  $A^\mu$ . Devido à antissimetria de  $F^{\mu\nu}$ , podemos escrever  $\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 4\partial_\mu (\delta A_\nu) F^{\mu\nu}$ , de modo que:

$$\delta S = \int d^4x [4\alpha \partial_\mu (\delta A_\nu) F^{\mu\nu} + \beta (\delta A_\mu) J^\mu]. \quad (2.27)$$

Integrando por partes e considerando que os campos vão a zero no infinito, encontramos  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -(\beta/4\alpha)J^\mu$ , em que  $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$  representa de maneira covariante a densidade de carga  $\rho$  e a densidade de corrente  $\mathbf{J}$ . Comparando com as equações de Maxwell em unidades naturais no formalismo covariante veremos que  $\alpha = -\frac{1}{4}$  e  $\beta = 1$ . Portanto:

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu. \quad (2.28)$$

As equações sem fonte (i.e., as equações homogêneas) são naturalmente satisfeitas devido a antissimetria de  $F^{\mu\nu}$ :

$$\partial_{[\mu} F_{\alpha\nu]} = 0. \quad (2.29)$$

Já as equações (2.28) representam as equações não homogêneas de Maxwell.

## 2.3 Equações de Onda

A partir da equação (2.28), as equações para a dinâmica de  $A^\mu$  se tornam:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = -J^\nu, \quad (2.30)$$

as quais podem ser formalmente resolvidas, passando para o espaço de Fourier:

$$A^\mu(x) = \int d^4k A^\mu(k) e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (2.31)$$

$$J^\mu(x) = \int d^4k J^\mu(k) e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (2.32)$$

em que  $k^\mu$  é o quadrimomento do fóton<sup>1</sup>. Assim, as equações para  $A^\mu$  se tornam equações algébricas:

$$(k^2 \delta_\mu^\nu - k^\nu k_\mu) A^\mu(k) = -J^\nu(k). \quad (2.33)$$

No entanto, esta equação é obviamente não inversível, pois para  $\nu = \mu$  o autovalor da matriz  $(k^2 \delta_\mu^\nu - k^\nu k_\mu)$  é nulo e a equação não será inversível. Podemos no entanto usar a liberdade de calibre (2.23) e fixar o calibre de Lorenz ( $\partial_\mu A^\mu = 0$ ) que, no espaço dos momentos, corresponde a  $k_\mu A^\mu = 0$ . Deste modo a equação se torna:

$$k^2 A^\mu(k) = -J^\mu(k). \quad (2.34)$$

Considerando o vácuo eletromagnético, ( $J^\mu = 0$ ) e por hipótese uma região em que o campo eletromagnético não seja nulo, isto é  $A^\mu \neq 0$ , a equação (2.34) se torna:

$$k^2 A^\mu(k) = 0. \quad (2.35)$$

<sup>1</sup> Essa nomenclatura é informal, pois a rigor não estamos introduzindo a mecânica quântica. Formalmente,  $k^\mu$  deve ser interpretado como o vetor tangente às geodésicas da luz.

Logo, essa igualdade só será satisfeita se  $k^2 = k_\mu k^\mu = 0$ . Ou seja, a luz se propaga em uma geodésica<sup>2</sup> nula. Além disso, devido à fixação de calibre:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow k_\mu A^\mu(k) = 0, \quad (2.36)$$

o que significa que o potencial  $A^\mu$  é ortogonal ao momento do fóton. Veremos na próxima seção que estas condições satisfazem naturalmente as hipóteses da ótica geométrica.

## 2.4 Ótica Geométrica no Espaço-Tempo de Minkowski

Atualmente a cosmologia passa por um estágio de pleno desenvolvimento das observações de alta precisão. Com exceção das ondas gravitacionais, todos os observáveis em cosmologia estão no espectro eletromagnético. Além disto, estas ondas eletromagnéticas se deslocam em regiões em que os comprimentos característicos do meio são maiores que o comprimento da onda. Podemos portanto utilizar a aproximação de ótica geométrica, que deve satisfazer as seguintes leis:

1. Raios de luz são descritos por geodésicas do tipo luz (ou nulas)<sup>3</sup>.
2. O vetor de polarização da onda é perpendicular aos raios de luz e é transportado paralelamente ao longo da geodésica.
3. A amplitude da onda é governada por um invariante adiabático<sup>4</sup>.

No entanto estas leis são válidas somente sob algumas circunstâncias, as quais precisamos quantificar. Seja  $\lambda$  o comprimento de onda da luz,  $k^\mu$  o quadrivetor de onda,  $\omega$  a frequência angular e  $f$  a frequência, tais que:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \omega = 2\pi f. \quad (2.37)$$

As leis acima serão válidas quando as dimensões espaciais  $\mathcal{D}$  e temporal  $\mathcal{T}$  forem maiores que as quantidades mencionadas, isto é no limite:

$$\mathcal{D} \gg \lambda \Rightarrow \mathcal{D} \gg \frac{1}{k}, \quad \mathcal{T} \gg \frac{1}{\omega}. \quad (2.38)$$

Além disso, as ondas devem se propagar em um meio homogêneo, ou em regiões pequenas o suficiente de modo que o meio possa ser considerado homogêneo.

Seja a equação de onda dada por:

$$\square A^\mu = 0. \quad (2.39)$$

<sup>2</sup> Para uma definição da equação da geodésica, veja o apêndice (A).

<sup>3</sup> Equivalente a dizer que a luz se desloca com velocidade constante na superfície do cone de luz.

<sup>4</sup> Equivalente a dizer que o número de *fótons* é conservado.

Estaremos interessados em empregar a aproximação de ótica geométrica em um formalismo covariante para ondas eletromagnéticas. Nossa intenção é parametrizar o potencial vetor separando-o em termos que possam ser desconsiderados na aproximação de ótica geométrica. Um ansatz possível é

$$A^\mu = (a^\mu + \epsilon b^\mu + \dots) e^{i\frac{\phi}{\epsilon}}, \quad (2.40)$$

em que  $a^\mu$  e  $b^\mu$  são vetores complexos e  $\epsilon \sim \mathcal{O}(\lambda/D, 1/\omega\mathcal{T})$  é um parâmetro pequeno. Nesta expressão,  $a^\mu$  é a parte da amplitude que independe de  $\lambda$ , enquanto que  $\epsilon b^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  são as correções da ótica geométrica dependentes de  $\lambda$ . Esse ansatz é motivado pela aproximação WKB, onde supõe-se que, em uma região de interesse, a amplitude da onda varia muito pouco em comparação à sua fase. Como já mencionado, o calibre de Lorenz parece ser bastante adequado para empregar a aproximação de ótica geométrica e portanto trabalharemos neste calibre. Por meio dele, constatamos que:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \longrightarrow \left[ \partial_\mu (a^\mu + \epsilon b^\mu) + \frac{i}{\epsilon} k_\mu (a^\mu + \epsilon b^\mu) \right] e^{i\frac{\phi}{\epsilon}} = 0, \quad (2.41)$$

onde introduzimos a definição

$$k_\mu \equiv \partial_\mu \phi. \quad (2.42)$$

Assumindo a consistência dessa aproximação ordem a ordem em  $\epsilon$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\epsilon^0) : \quad \partial_\mu a^\mu + ik_\mu b^\mu &= 0, \\ \mathcal{O}(\epsilon^{-1}) : \quad k_\mu a^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Podemos notar que, em ordem  $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ , o vetor de polarização definido por  $f^\mu \propto (\alpha a^\mu + \beta \epsilon b^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2))$  implicará em  $k_\mu f^\mu \propto \beta \epsilon k_\mu b^\mu \neq 0$ . Vemos assim que este termo não será nulo, em desacordo com a segunda lei da ótica geométrica. Isso nos mostra que o limite da ótica geométrica não será satisfeito em ordem  $\mathcal{O}(\epsilon^0)$  ou superior. Portanto, iremos truncar a amplitude do vetor (2.40) em ordem  $\epsilon^0$  e definir o vetor de polarização como  $f^\mu = \frac{a^\mu}{a}$ , em que  $a = (a_\mu a^\mu)^{\frac{1}{2}}$ . Agora é fácil ver que, em ordem  $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ , este novo vetor satisfaz a condição de ortogonalidade  $k_\mu f^\mu = 0$ .

Podemos agora aplicar o ansatz (2.40) na equação de onda (2.39):

$$\left[ \square a^\nu + 2\frac{i}{\epsilon} k^\mu \partial_\mu a^\nu + \frac{i}{\epsilon} \partial_\mu k^\mu a^\nu - \frac{k_\mu k^\mu}{\epsilon^2} a^\nu \right] e^{i\frac{\phi}{\epsilon}} = 0.$$

Separando os termos de mesma ordem em  $\epsilon$ , teremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\epsilon^{-1}) : \quad 2ik^\mu \partial_\mu a^\nu &= -ia^\nu \partial_\mu k^\mu, \\ \mathcal{O}(\epsilon^{-2}) : \quad k_\mu k^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Em ordem  $\epsilon^{-2}$ , vemos que esta aproximação satisfaz a hipótese 1. De fato, nesta aproximação a luz não sofre difrações ou refrações e, portanto, se desloca na superfície

do cone de luz. Podemos obter as leis restantes, reescrevendo o termo de ordem  $\epsilon^{-1}$  com  $a^v = a f^v$ :

$$2k^\mu \partial_\mu (f^v a) + f^v a \partial_\mu k^\mu = 2ak^\mu \partial_\mu f^v + f^v (2k^\mu \partial_\mu a + a \partial_\mu k^\mu) = 0. \quad (2.45)$$

Mas podemos multiplicar ambos os lados do termo de ordem  $\epsilon^{-1}$  por  $a^*_v$  na equação (2.44):

$$k^\mu \partial_\mu a^2 + a^2 \partial_\mu k^\mu = \partial_\mu (a^2 k^\mu) = 0. \quad (2.46)$$

Substituindo (2.46) em (2.45) multiplicada por  $a$ , veremos que:

$$k^\mu \partial_\mu f^v = 0. \quad (2.47)$$

Mas sendo  $k^\mu = dx^\mu / ds$  o vetor tangente à trajetória  $x^\mu(s)$  da luz, segue que:

$$k^\mu \partial_\mu f^v = \frac{df^v}{ds} = 0.$$

Portanto, a equação acima nos mostra que o vetor de polarização satisfaz a equação do transporte paralelo (para espaço-tempo plano). Finalmente, da equação (2.46), vemos que a lei de conservação mencionada na terceira lei da ótica geométrica é satisfeita, sendo  $a^2 k^\mu$  um invariante adiabático, i.e. para obter este resultado estamos considerando que a amplitude da onda varia de maneira adiabática, enquanto que a fase oscila muito. Em resumo, portanto, conseguimos exaurir todas as leis aplicando o ansatz da equação 2.40 e desprezando termos superiores à ordem  $\epsilon^{-1}$ .

## 3 Ótica geométrica em Espaço-Tempo Curvo

A necessidade de incorporar a física que conhecemos (como por exemplo termodinâmica, eletrodinâmica, ótica geométrica, etc.) em regiões curvas do espaço-tempo como, por exemplo, nas proximidades de buracos negros, ou de estrelas com grandes massas que distorcem significativamente o espaço-tempo ao seu redor, ou até mesmo em modelos cosmológicos, exige que as leis físicas conhecidas em geometrias planas sejam generalizadas para geometrias curvas. Dado que nesta dissertação trabalharemos com modelos que apresentam curvatura, discutiremos neste capítulo o acoplamento mínimo, o qual permite incluir os efeitos da gravitação na física e, em particular, no eletromagnetismo. Em seguida, discutiremos a aproximação de ótica geométrica em espaços-tempo curvos. Esta seção foi escrita com base na referência [15].

Em qualquer variedade diferenciável (pseudo) riemanniana com métrica  $g_{\mu\nu}$ , podemos sempre fazer uma transformação de coordenadas de modo que a métrica possa, em um ponto  $\mathcal{P}$  qualquer<sup>1</sup>, ser identificada com a métrica de Minkowski [16]. Deste modo, qualquer evento em  $\mathcal{P}$  se comportará como em um referencial localmente inercial e, assim, de acordo com o princípio da equivalência, pode ser descrito pelas leis da relatividade especial neste referencial. Ao reescrever as leis da física que regem este evento na forma covariante — onde agora o conceito de covariância é estendido para transformações gerais de coordenadas —, esta lei passará não somente a ser válida no ponto  $\mathcal{P}$  como também nas vizinhanças deste ponto. Dado que o Princípio de Equivalência estabelece que as leis da física devem ser as mesmas, esteja o observador em um referencial acelerado ou na presença de um campo gravitacional, o procedimento descrito pode ser usado para generalizar a física para espaços-tempo curvos (i.e., variedades riemannianas). O procedimento geral, conhecido como princípio de acoplamento mínimo, consiste em formular as leis da física em uma forma covariante por transformações de Lorentz, e válidas localmente. Em seguida, procuramos pela extensão mais simples possível desta lei e que seja covariante por um conjunto arbitrário de transformações. Para tanto, propõe-se as seguintes regras: o elemento de volume infinitesimal  $d^4x$  deverá ser substituído por:

$$d^4x \rightarrow \sqrt{|g|}d^4x. \quad (3.1)$$

Derivadas parciais,  $\partial_\mu$ , serão substituídas por derivadas covariantes:

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu, \quad (3.2)$$

<sup>1</sup> Exceto, possivelmente, em pontos de singularidade.

com a condição de que, no caso de funções escalares, a derivada covariante se reduz à derivada parcial. No entanto, para vetores a derivada covariante é escrita como:

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} V^{\alpha}, \quad (3.3)$$

em que a  $\Gamma$  é a conexão sem torção e compatível com a métrica que satisfaz (para mais detalhes, veja o apêndice A):

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} (\partial_{\mu} g_{\alpha\lambda} + \partial_{\alpha} g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\mu\alpha}). \quad (3.4)$$

A chamada hipótese de torção nula, equivale à condição  $\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi = \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} \phi$  para qualquer função escalar  $\phi$ .

Agora podemos prosseguir nossa discussão com objetivo de apresentar o eletromagnetismo em espaços-tempo curvos e então obter o limite de ótica geométrica na propagação da luz. A título de ilustração, vamos considerar o caso de uma teoria escalar. O princípio de acoplamento mínimo aplicado à ação de um campo escalar  $\phi$  nos diz que:

$$- \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi + V \right) \rightarrow - \int \sqrt{|g|} d^4x \left( \frac{1}{2} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\mu} \phi + V \right). \quad (3.5)$$

Extremizando a ação com respeito a  $\phi$ , para encontrar a equação de movimento deste campo em espaços curvos, encontramos:

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int \sqrt{|g|} d^4x \left( \nabla_{\mu} \delta \phi \nabla^{\mu} \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta \phi \right) \\ &= - \int \sqrt{|g|} d^4x \left[ \nabla_{\mu} (\delta \phi \nabla^{\mu} \phi) + \left( -\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \delta \phi \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que no primeiro passo ao aplicar a variação, foi considerado que a métrica  $g_{\mu\nu}$  não possui dependência nos campos. Na última passagem foi feita uma integração por partes e agora o termo de superfície será desconsiderado. Desta forma as equações de movimento podem ser escritas como:

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi \equiv \square \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (3.7)$$

Diferentemente do que ocorre em espaços planos, não se pode em geral introduzir soluções de ondas planas ou reescrever a equação no espaço de Fourier de modo a encontrar equações algébricas, sem levar a curvatura do espaço em consideração. Na próxima seção serão discutidas condições para implementar o limite de ótica geométrica em espaços curvos, e esta afirmação ficará mais clara.

Para campos eletromagnéticos acoplados com a quadricorrente será necessário redefinir a quadricorrente. Seja em uma hipersuperfície de  $x^0 = cte$ , a métrica dada por  $h_{ij}$ , de modo que o elemento de volume destas hipersuperfícies seja escrito como:

$$\sqrt{h} dx^1 dx^2 dx^3 \equiv \sqrt{h} dV. \quad (3.8)$$

onde  $h$  é o determinante da métrica  $h_{ij}$ . Em coordenadas síncronas as componentes  $g_{0i}$  da métrica são nulas [17] e deste modo a métrica é escrita como:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + h_{ij}dx^i dx^j. \quad (3.9)$$

Calculando o determinante da métrica  $g_{\mu\nu}$ , utilizando para tanto o teorema de Laplace, vemos que:

$$g = -A^{00} + g_{0i}A^{0i}, \quad (3.10)$$

em que  $A^{0\alpha}$  é o cofator dos elementos  $\alpha$  da linha 0 da matriz. Para o cálculo do determinante, como estamos nas coordenadas síncronas, precisaremos calcular apenas o cofator  $A^{00}$  que é dado por  $A^{00} = (-1)^0 h$ . Portanto

$$h = |g|. \quad (3.11)$$

Em termos da métrica  $h_{ij}$ , a carga elétrica líquida associada à distribuição de carga  $\rho$  será escrita como:

$$q = \int \sqrt{h} dV \rho. \quad (3.12)$$

Deste modo:

$$dq dx^\mu = \rho \sqrt{h} d^4x \frac{dx^\mu}{dx^0}. \quad (3.13)$$

A covariância deste elemento de integração não é evidente. Mas reescrevendo a equação acima, lembrando que  $|g| = h$ , encontramos:

$$dq dx^\mu = \sqrt{|g|} d^4x \rho \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.14)$$

Assim a quadricorrente pode ser escrita como:

$$J^\mu = \rho u^\mu, \quad (3.15)$$

onde  $u^\mu = dx^\mu / d\tau$  é a quadri-velocidade de um observador comóvel com a quadricorrente.

Podemos agora escrever o tensor eletromagnético, a ação, e reobter as equações de movimento do eletromagnetismo em um espaço-tempo curvo. Pelo princípio de acoplamento mínimo, a eq. (2.18) fica:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (3.16)$$

Já a ação do campo eletromagnético, generalizada para espaços-tempo curvos, fica:

$$S = \int \sqrt{|g|} \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right) d^4x. \quad (3.17)$$

Extremizando esta ação com respeito às variações virtuais de  $A^\mu$ , encontramos:

$$\delta S = \int \sqrt{|g|} d^4x [\delta A_\mu J^\mu + \nabla_\mu (\delta A_\nu) F^{\mu\nu}]. \quad (3.18)$$

Integrando por partes o segundo termo e levando em consideração que  $\delta A_\mu$  se anula no infinito, chegamos finalmente em:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu. \quad (3.19)$$

Esta equação também segue da aplicação do princípio de acoplamento mínimo diretamente em (2.28).

### 3.1 Ótica Geométrica

Como já mencionado, em um espaço-tempo geral, as soluções de equações tais como a equação (3.7) ou a equação (3.19) não podem ser dadas diretamente por expansões no espaço de Fourier. Isso acontece pois os modos de Fourier são definidos em função das simetrias do espaço-tempo de fundo. Numa situação geral, o espaço-tempo de interesse pode ter poucas, ou mesmo nenhuma simetria, o que impossibilita a generalização dos modos de Fourier. Isso não será uma limitação para o nosso trabalho, pois estaremos interessados em soluções aproximadas da Eq. (3.19) no limite de ótica geométrica. Para tanto, a aproximação utilizada deve ser consistente com as leis fundamentais da ótica geométrica, 1, 2, 3. O limite para obtenção destas leis será dado em torno de três comprimentos característicos do sistema físico:

- O comprimento de onda como medido por um observador em um referencial inercial  $\lambda$ .
- O comprimento típico  $\mathcal{L}$  sobre o qual as amplitudes, polarizações e os comprimentos das ondas variam.
- O raio de curvatura  $\mathfrak{R}$  do espaço-tempo (ou, de maneira equivalente, a magnitude de uma componente típica do tensor de curvatura do espaço-tempo) através do qual as ondas se propagam.

Assim, podemos definir uma quantidade  $L_0$  tal que<sup>2</sup>:

$$L_0 \equiv \min[\mathfrak{R}^{-\frac{1}{2}}, \mathcal{L}]. \quad (3.20)$$

Outra quantidade a ser definida é dada por:

$$\epsilon = \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{L_0}\right) \ll 1, \quad (3.21)$$

que será útil ao expandir a amplitude da onda em potências de  $\epsilon$ . Reescrevendo a equação (3.19):

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu) &= \square A^\nu + \nabla^\nu(\nabla_\mu A^\mu) - g^{\nu\alpha}[\nabla_\mu, \nabla_\alpha]A^\mu \\ &= \square A^\nu + \nabla^\nu(\nabla_\mu A^\mu) - g^{\nu\alpha}R^\mu_{\sigma\mu\alpha}A^\sigma \\ &= -J^\nu. \end{aligned} \quad (3.22)$$

<sup>2</sup> Note que o raio de curvatura tem unidades de  $1/(\text{comprimento})^2$ .

No calibre de Lorenz  $\nabla_\mu A^\mu = 0$ , e usando  $R^\mu_{\sigma\mu\alpha} = R_{\sigma\alpha}$ , essa equação se simplifica:

$$\square A^\nu - R^\nu_\mu A^\mu = -J^\nu. \quad (3.23)$$

Considerando ondas eletromagnéticas no vácuo, ficamos com:

$$\square A^\nu - R^\nu_\mu A^\mu = 0. \quad (3.24)$$

Podemos, assim como no capítulo anterior, propor uma solução da forma:

$$A^\mu = (a^\mu + \epsilon b^\mu + \dots) e^{i\frac{\phi}{\epsilon}}. \quad (3.25)$$

Substituindo esta expressão no calibre de Lorenz para espaços curvos  $\nabla_\mu A^\mu = 0$ , encontramos:

$$\left[ \nabla_\mu (a^\mu + \epsilon b^\mu + \dots) + i \frac{\partial_\mu \phi}{\epsilon} (a^\mu + \epsilon b^\mu) \right] e^{i\frac{\phi}{\epsilon}} = 0. \quad (3.26)$$

Comparando os termos de mesma ordem em  $\epsilon$ :

$$\mathcal{O}(\epsilon^{-1}) : k_\mu a^\mu = 0, \quad (3.27)$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^0) : \nabla_\mu a^\mu = -ik_\mu b^\mu,$$

em que, novamente,  $k_\mu = \partial_\mu \phi$ . Definindo o vetor de polarização como  $f^\mu \equiv \frac{a^\mu}{a}$ , percebemos que para satisfazer a segunda lei da ótica geométrica (o vetor de polarização deve ser perpendicular ao vetor de onda e deve satisfazer a equação de transporte paralelo ao longo da geodésica), deveremos desconsiderar termos de ordem mais alta que  $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$  para obter da equação (3.27):

$$k_\mu f^\mu = 0. \quad (3.28)$$

Na equação de onda iremos desconsiderar o termo  $R^\nu_\mu A^\mu = 0$ , já que a ordem mais baixa deste termo é  $\epsilon^0$ , pois,  $R^\nu_\mu = \mathcal{O}(\epsilon^0)$  i.e. este termo independe de  $\lambda$ . Substituindo agora o *ansatz* (3.25) na equação de onda (3.24) teremos:

$$\left[ -\square a^\mu - \frac{2i}{\epsilon} k_\alpha \nabla^\alpha a^\mu - \frac{i}{\epsilon} (\nabla_\alpha k^\alpha) a^\mu + \frac{1}{\epsilon^2} k_\alpha k^\alpha a^\mu \right] e^{i\frac{\phi}{\epsilon}} = 0.$$

Comparando novamente termos de mesma ordem:

$$\mathcal{O}(\epsilon^{-2}) : k_\alpha k^\alpha = 0, \quad (3.29)$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^{-1}) : 2k^\alpha \nabla_\alpha a^\mu + a^\mu \nabla_\alpha k^\alpha = 0. \quad (3.30)$$

A equação (3.29) satisfaz a lei (1) da ótica geométrica. De fato os raios de luz seguem geodésicas nulas. Reescrevendo a equação (3.30) com  $a^\mu = a f^\mu$ :

$$0 = a k^\alpha \nabla_\alpha f^\mu + f^\mu (k^\alpha \nabla_\alpha a + \frac{1}{2} a \nabla_\alpha k^\alpha). \quad (3.31)$$

No entanto, multiplicando a equação (3.30) por  $a_\mu^*$ :

$$\begin{aligned} 2a_\mu^* k^\alpha \nabla_\alpha a^\mu + a^2 \nabla_\alpha k^\alpha &= k^\alpha \nabla_\alpha a^2 + a^2 \nabla_\alpha k^\alpha, \\ &= \nabla_\alpha (a^2 k^\alpha), \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Da equação acima, teremos a lei de conservação para a quantidade  $a^2 k^\alpha$ , ou seja, a lei 3 da ótica geométrica é satisfeita. Além disto, substituindo a equação (3.32) na equação (3.31) multiplicada por  $a$ , veremos que o vetor de polarização satisfaz a equação de transporte paralelo ao longo da geodésica:

$$k^\alpha \nabla_\alpha f^\mu = 0, \tag{3.33}$$

e a lei (2) da ótica geométrica é satisfeita. Isto é, o vetor de polarização  $f^\mu$  é perpendicular aos raios de luz e é transportado paralelamente ao longo da geodésica. Exaurimos assim todas as leis da ótica geométrica com o *ansatz* (3.25) no calibre de Lorenz.

## 3.2 Redshift

Em 1929, analisando o redshift de várias galáxias, Hubble foi capaz de medir a taxa de expansão do Universo [18]. Nesta seção apresentaremos o redshift para que mais adiante possamos explorar o drift do redshift em aplicações astrométricas, como uma alternativa para a medida da taxa de expansão do Universo.

Em espaços-tempo curvos e, em particular, em espaços-tempo cosmológicos, não podemos comparar vetores em pontos diferentes do espaço-tempo, já que esta comparação depende da escolha de uma curva que conecta estes pontos e, em geral, esta escolha não é única. Conseqüentemente, não podemos falar em velocidades relativas entre as galáxias. No entanto, existe uma noção bem definida de distanciamento destas galáxias em função da expansão do universo. De fato, as galáxias estão se deslocando em um movimento de queda livre com a expansão do Universo. Neste sentido o redshift cosmológico não é um efeito Doppler usual, resultante de velocidades intrínsecas da fonte, mas sim um efeito resultante da própria expansão do universo. Apesar disso, o redshift também é observado por uma mudança na frequência da luz emitida com relação à luz observada. Substituindo, na equação usual do efeito Doppler, a velocidade relativa  $v$  pelo redshift  $z$ , e lembrando que estamos trabalhando com  $c = 1$ , encontramos:

$$\omega_o = \left( \frac{c}{c+v} \right) \omega_s \quad \rightarrow \quad \omega_o = \left( \frac{1}{1+z} \right) \omega_s, \tag{3.34}$$

em que os subíndices  $s$  e  $o$  designam fonte e observador, respectivamente. Da definição (2.42), sabemos que  $k_\mu = \partial_\mu \phi$ . Se agora projetarmos este vetor ao longo da

quadrivelocity  $u^\mu = dx^\mu / d\tau$ , segue que

$$u_{s,o}^\mu k_\mu = \frac{d\phi}{d\tau_{s,o}} \equiv -\omega_{s,o}, \quad (3.35)$$

em que  $\phi$  é a fase da onda,  $u_\mu^{s,o}$  é a quadrivelocity da fonte ( $s$ ) ou observador ( $o$ ), e  $\omega_{s,o}$  é a frequência do fóton do ponto de vista da fonte ou do observador. Portanto teremos o redshift dado por:

$$1 + z = \frac{u_\mu^s k^\mu}{u_\mu^o k^\mu} = \frac{d\phi}{d\tau_s} \frac{d\tau_o}{d\phi}, \quad (3.36)$$

ou seja:

$$\frac{d\tau_o}{d\tau_s} = 1 + z. \quad (3.37)$$

A equação acima será utilizada adiante para análise dos graus de liberdade da métrica nas coordenadas GLC e também quando formos calcular o drift do redshift.



## 4 Coordenadas de Cone de Luz

O Modelo Cosmológico Padrão, ou modelo  $\Lambda$ CDM<sup>1</sup> estabelece que o atual Universo é constituído por 68,3% [5] de energia escura, responsável por sua expansão acelerada, e 26,8% [5] de matéria escura, responsável pela formação de estruturas em grandes escalas<sup>2</sup>. A existência da energia e matéria escuras implicam no chamado problema da coincidência, que consiste em explicar a razão para o fato das densidades de energia e de matéria escuras serem hoje da mesma ordem de magnitude (68,3% e 26,8%, respectivamente), o que implica que a expansão acelerada deve ter começado apenas mais recentemente na história do Universo. Do contrário, caso a densidade de energia relacionada à energia escura fosse de maior ordem, a expansão acelerada do Universo teria se iniciado muito antes, potencialmente impedindo a formação de estruturas que hoje observamos [19]. Uma das possíveis soluções a esse problema esta no efeito conhecido como *backreaction* gravitacional, que é relacionado ao fato de que pequenas perturbações do conteúdo material do Universo homogêneo poderiam efetivamente imitar o comportamento de um fluido responsável pela expansão acelerada do Universo.

A questão do uso de *backreaction* para a explicação da energia escura é ainda um tema em pleno desenvolvimento, além de bastante controverso (veja, e.g., as Refs. [20, 21]). No entanto, o principal caminho para sua implementação é desenvolver um procedimento covariante e invariante de calibre para o cálculo de valores esperados de grandezas cosmológicas. Uma importante contribuição nesta direção foi apresentada em [22, 23]. Com o intuito de desenvolver um formalismo geral e invariante de calibre para calcular valores esperados de sinais do tipo luz, estes autores introduziram o sistema de coordenadas de cone de luz para observadores geodésicos, também conhecido como coordenadas GLC<sup>3</sup> [14]. Um sistema de coordenadas similar, e conhecido como coordenadas observacionais, já havia sido introduzido por Maartens e Ellis e são apresentadas didaticamente no livro [24]. As coordenadas GLC foram usadas em diversas aplicações na literatura: na reconstrução da métrica do espaço-tempo diretamente a partir de observações [25, 26]; na determinação do efeito de inomogeneidades na relação redshift-distância em espaços-tempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [27, 28, 29]; no efeito das inomogeneidades cosmológicas para a interpretação do diagrama de Hubble [30, 31, 32]; no cálculo de lentes gravitacionais [33, 34]; na contagem do número de galáxias [35] e até mesmo na cinemática de propagação de partículas relativísticas [36].

<sup>1</sup> Acrônimo para *Lambda Cold Dark Matter*, na sigla em inglês.

<sup>2</sup> Os 4,9% restantes são compostos de matéria bariônica, radiação eletromagnética e neutrinos.

<sup>3</sup> Geodesic Light-Cone Coordinates, na sigla em inglês.

Nas seções seguintes, faremos a construção do sistema de coordenadas GLC e analisaremos seus graus de liberdade seguindo os passos da referência [1]. Em seguida, com o intuito de ganhar familiaridade com estas coordenadas, verificaremos a métrica de FLRW em coordenadas GLC, utilizando um formalismo que facilita a transformação de coordenadas e é útil para espaços-tempo que possuem uma estrutura mais complicada. No próximo capítulo, estaremos interessados em aplicar este sistema de coordenadas no cálculo de observáveis astrométricos.

## 4.1 Base Coordenada e Métrica

O sistema de coordenadas GLC consiste em coordenatizar um evento  $E(x^\mu)$  qualquer em termos das propriedades do cone de luz de um observador geodésico (com de linha de mundo  $\mathcal{L}_0$ ) que detecta este evento. Como mostraremos abaixo, qualquer evento em um cone de luz pode ser descrito por quatro funções: uma função  $w(x^\mu)$  que rotula hipersuperfícies do tipo-luz (ou seja, o cone de luz), uma função  $\tau(x^\mu)$  que descreve o tempo próprio do evento (e, portanto, menor que o tempo próprio do observador no instante da detecção), e por duas funções  $\theta^a$ , com  $a = 1, 2$ , que podem ser interpretadas como sendo a direção do evento no cone de luz passado.

Antes de apresentar a construção detalhada, vamos considerar como exemplo o caso de um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, tal como o espaço-tempo de Minkowski. Neste caso, podemos imaginar que  $w \equiv t_0$  caracteriza o tempo próprio do observador que vê o evento, ao passo que  $\tau \equiv t$  descreve a hipersuperfície de tempo constante na qual o evento foi emitido. Por conta da simetria do espaço-tempo de Minkowski, os pontos com  $t = \text{cte}$  definem uma esfera ao redor do observador, caracterizando todos os eventos acessíveis a ele através de fótons que se deslocam em trajetórias especificadas por  $\theta^a = \text{cte}$ . Portanto, os parâmetros  $t_0$  e  $t$  definem, neste caso, uma superfície bidimensional que para o caso de Minkowski corresponde a uma esfera, e que possui raio  $r = t_0 - t$  caracterizado pelo tempo de deslocamento dos fótons da superfície da esfera até o observador, como representado na figura 1. Partindo das coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , a métrica de Minkowski nas coordenadas GLC fica

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dr^2 + r^2 d^2\Omega \\ &= dt_0^2 - 2dtdt_0 + (t_0 - t)^2 d^2\Omega. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Veremos adiante como este resultado surge a partir de um formalismo sistemático e aplicável a qualquer espaço-tempo.

<sup>4</sup> Mostraremos mais adiante que este caso corresponde à uma fixação de calibre das coordenadas GLC.

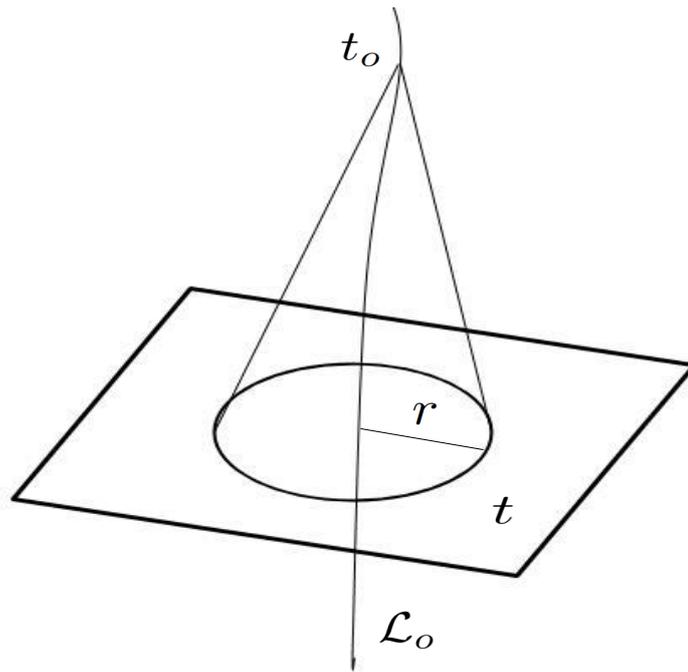


Figura 1 – Cone de luz do espaço-tempo de Minkowski, com uma das dimensões suprimidas. Perceba uma esfera de raio  $r = t_0 - t$ , está imersa na intersecção da superfície de  $t = cte = t_0$ .

Como vimos para o caso específico de Minkowski, no sistema de coordenadas GLC um evento é descrito pelas coordenadas  $x^\mu = (\tau, w, \theta^a)$ . Assumiremos que o espaço-tempo pode ser fatiado em hipersuperfícies de tempo próprio  $\tau = cte^5$  e localizaremos qualquer evento no cone de luz passado de um observador geodésico através da geodésica da luz que conecta o evento e o observador. Para tanto, a coordenada  $w$  que especifica o cone de luz passado deve ser uma coordenada nula i.e.,  $\partial_\mu w \partial^\mu w = 0$ . Assim, a luz se desloca da hipersuperfície  $\tau$  ao qual o evento pertence, sobre o cone de luz definido por  $w$ . Eventos na superfície de  $\tau = cte$  e  $w = cte$ , são coordenatizados pelos ângulos  $\theta^a$ . A superfície do cone de luz é portanto descrita por uma 1-forma de onda  $k_\mu \propto \partial_\mu w$  nula. Dado que, nas coordenadas GLC, a própria função  $w$  é usada como uma das coordenadas, segue que

$$k_\mu \propto \delta_\mu^w, \quad (4.2)$$

e, portanto,  $k^w = 0$ . Além disso, como vimos em (2.11), a hipersuperfície de  $\tau = cte$  possui uma 1-forma normal dada por  $u_\mu = -\partial_\mu \tau$ . Porém, novamente,  $\tau$  é uma das coordenadas de interesse, de modo que

$$u_\mu = -\delta_\mu^\tau \quad (4.3)$$

<sup>5</sup> Para mais detalhes sobre essa construção, ver [24].

o que implica que  $u^\tau = 1$ , em virtude da normalização  $u^\mu u_\mu = -1$ . Finalmente, geodésicas de fótons são descritas por  $\theta^a = cte$ , em que  $\theta^a$  coordenatiza a posição dos eventos na superfície bidimensional formada por  $w = cte = \tau$ , conforme ilustrado na figura 2.

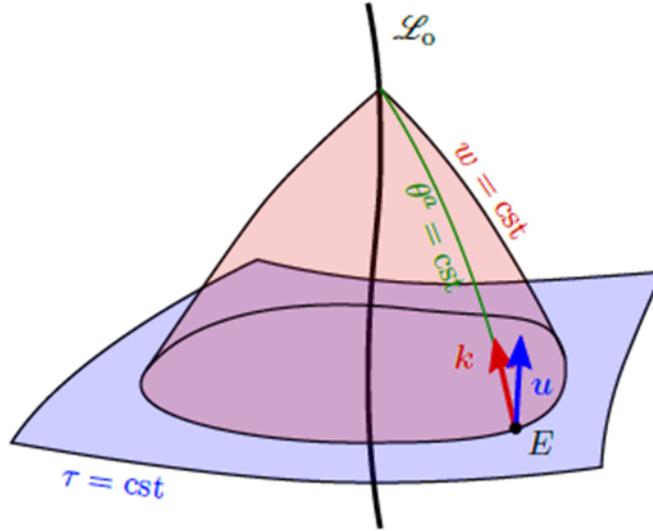


Figura 2 – Representação gráfica das coordenadas GLC. O cone de luz é definido com base em um observador geodésico com linha de mundo  $\mathcal{L}_0$  e quadri-velocidade  $u$ . Note que o vetor de onda  $k$  é paralelo à superfície do cone e segue geodésicas com  $\theta^a = cte$  em um cone de luz definido por  $w = cte$ . Figura reproduzida da Ref. [1].

O sistema de coordenadas GLC descreve, portanto, eventos que ocorrem no cone de luz de um observador geodésico. Por construção, este sistema é mal definido em regiões de lentes gravitacionais fortes em que um mesmo evento pode ser visto por fótons que percorrem trajetórias diferentes (i.e., imagens múltiplas). Nestes casos, um mesmo evento possui múltiplas coordenadas, de modo que a relação entre evento e coordenadas deixa de ser inversível.

Para dar o primeiro passo na construção destas coordenadas, podemos escolher como base coordenada a base formada pelos vetores  $(\partial_\tau, \partial_w, \partial_a)$ . Considere agora dois eventos  $E$  e  $E'$  infinitamente próximos, e pertencentes ao mesmo cone. Logo, teremos  $E = E(\tau, w, \theta^a)$  e  $E' = E'(\tau + d\tau, w, \theta^a)$ . Como estes eventos estão no mesmo cone de luz, e na mesma geodésica  $\theta^a = cte$  que conecta os eventos ao observador, segue que:

$$\partial_\tau \propto k, \quad (4.4)$$

assim como mostra a Figura 3. Portanto o vetor de onda é tal que

$$k^\mu \propto \delta_\tau^\mu. \quad (4.5)$$

Isso contrasta com o resultado (4.2) para a 1-forma de onda, onde vimos que  $k_\mu \propto \delta_\mu^w$ . Portanto, segue que a métrica do espaço-tempo neste sistema de coordenadas é não-diagonal, já que  $k_w = g_{w\tau}k^\tau$ .

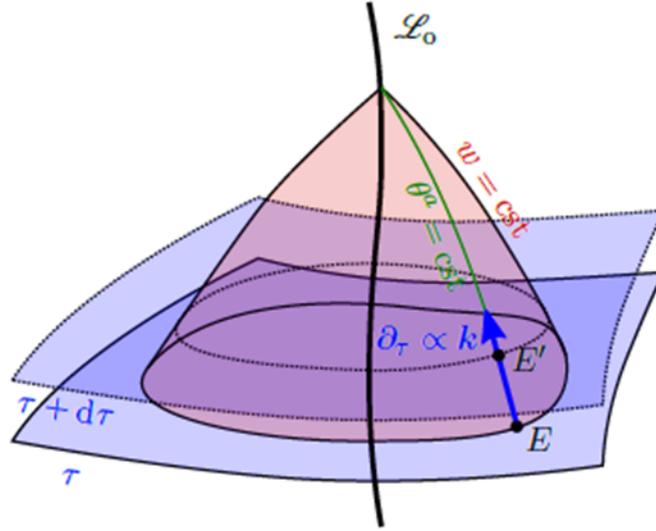


Figura 3 – Base vetorial  $\partial_\tau$  proporcional ao vetor  $\mathbf{k}$  de onda conectando dois eventos  $E$  e  $E'$ . Figura reproduzida da Ref. [1].

Resta-nos agora calcular os coeficientes de proporcionalidade, com intuito de obter os componentes da métrica. A partir da definição de frequência

$$u_\mu k^\mu \equiv -\omega \quad (4.6)$$

e usando (4.3), segue que

$$k^\tau = \omega. \quad (4.7)$$

O vetor de base  $\partial_\tau$  pode agora ser reescrito como:

$$\partial_\tau = \omega^{-1} \mathbf{k}. \quad (4.8)$$

Mas como  $\mathbf{k}$  é um vetor do tipo luz, temos que:

$$g_{\tau\tau} = \mathbf{g}(\partial_\tau, \partial_\tau) = \omega^{-2} \mathbf{g}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 0, \quad (4.9)$$

que é uma outra característica importante desta métrica. Além da não diagonalidade, o elemento  $g_{\tau\tau}$  desta métrica é nulo, o que implica em muitas simplificações em cálculos de observáveis cosmológicos, como veremos mais adiante.

Como a 1-forma  $\mathbf{k}$  que determina a hipersuperfície do cone de luz satisfaz (4.2), encontramos:

$$\begin{aligned} g_{\tau a} &= \mathbf{g}(\partial_\tau, \partial_a) \\ &= \omega^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{k}, \partial_a) \\ &= \omega^{-1} k_a \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para encontrar os demais componentes da métrica, iremos decompor o vetor de onda  $k$  como a soma de um vetor  $d$  paralelo à hipersuperfície de  $\tau = cte$  e a quadrivelocidade do observador,  $u$ , que é perpendicular a esta hipersuperfície:

$$k = \omega(u + d), \quad (4.11)$$

em que  $d$  representa a direção espacial de propagação de um fóton com momento  $k$ , no referencial de um observador fundamental. Este vetor satisfaz as seguintes relações de ortonormalidade:

$$d^\mu d_\mu = 1, \quad d^\mu u_\mu = 0, \quad (4.12)$$

além de ser ortogonal a  $\partial_a$ :

$$g(d, \partial_a) = g(\omega^{-1}k, \partial_a) - g(u, \partial_a) = 0 + 0, \quad (4.13)$$

onde usamos o fato de que o primeiro termo do lado direito é nulo devido à relação de proporcionalidade da 1-forma de onda, e o segundo é nulo devido ao fato de  $\partial_a$  pertencer à hipersuperfície de  $\tau = cte$ . Como os vetores  $\partial_w, \partial_1, \partial_2, d$ , são todos tangentes à hipersuperfície tridimensional definida por  $\tau = cte$ , eles não são independentes entre si. E como  $\partial_a$  é ortogonal à  $d$ , podemos expandir  $\partial_w$  como combinação linear destes dois vetores:

$$\partial_w = -Yd - U^a \partial_a, \quad (4.14)$$

em que  $Y$  e  $U^a$  correspondem à 3 graus de liberdade da métrica que serão de fundamental importância para a aplicação das coordenadas GLC em astrometria. Para compreender melhor estes graus de liberdade podemos imaginar  $d$ , a linha de visada, em função dos vetores de base  $\partial_w$  e  $\partial_a$ . Em um universo em que  $U^a = 0$ , podemos ver que  $Y$  está associado à dilatação do cone de luz e portanto à expansão do universo (este resultado será demonstrado explicitamente para a métrica de FLRW a seguir). Já para universos em que  $U^a \neq 0$  vemos que a direção de observação irá mudar e portanto isto estará associado à anisotropias e/ou inomogeneidades do espaço-tempo. Antecipando resultado dos próximos capítulos, devemos esperar que o drift do redshift devido à geometria do espaço-tempo ocorra em universos em que  $Y \neq cte$  e o drift da direção de observação (paralaxe e aberração) ocorra para universos em que  $U^a \neq 0$ .

Podemos agora encontrar os próximos componentes da métrica em termos destes graus de liberdade:

$$g_{\tau w} = g(\partial_\tau, \partial_w) = -Y. \quad (4.15)$$

Como já havíamos antecipado,  $g_{\tau w}$  deveria ser não nulo e portanto a métrica não é diagonal.

Ainda utilizando a equação (4.14) teremos:

$$g_{ww} = g(\partial_w, \partial_w) = d^\mu d_\mu Y^2 + g_{ab} U^a U^b = Y^2 + U^2. \quad (4.16)$$

A componente associada ao drift da direção de observação, será dada por:

$$g_{wa} = \mathbf{g}(\partial_w, \partial_a) = -g_{ab}U^b \equiv -U_a. \quad (4.17)$$

Finalmente, a parte angular da métrica (i.e., a métrica induzida na superfície de  $\tau = cte$  e  $w = cte$ ) será definida como

$$g_{ab} = \mathbf{g}(\partial_a, \partial_b) \equiv \gamma_{ab}. \quad (4.18)$$

Em particular, para o caso do espaço-tempo de Minkowski,  $\gamma_{ab}d\theta^a d\theta^b = d\Omega^2$ .

Em resumo, portanto, o elemento de linha no sistema de coordenadas GLC é escrito como:

$$ds^2 = Y^2 dw^2 - 2Y dw d\tau + \gamma_{ab}(d\theta^a - U^a dw)(d\theta^b - U^b dw), \quad (4.19)$$

em que,  $\gamma^{ab}$  é definido de maneira que  $\gamma^{ab}\gamma_{bc} = \delta_c^a$ . Mais adiante será explorada as liberdades de calibre da métrica, que estão presentes em  $Y, U^a$  e  $\gamma_{ab}$ . Agora demonstraremos que  $\gamma_{ab}$  é singular na linha de mundo do observador  $\mathcal{L}_o$ , assim como as coordenadas esféricas também possuem uma singularidade na origem.

Sejam os eventos ocorrendo em uma região bem próxima de  $\mathcal{L}_o$  de maneira que o espaço possa ser considerado localmente plano. O tempo de separação entre os eventos e  $\mathcal{L}_o$  é o tempo de deslocamento dos fótons ( $\tau_o - \tau$ ), em que  $\tau_o$  é o tempo em que o observador recebe o fóton. Lembrando que para o espaço-tempo de Minkowski a intersecção das superfícies de  $\tau$  e  $w$  constantes, é uma esfera  $S^2$  com as coordenadas  $\theta^a$  e raio  $(\tau_o - \tau)$ . A distância entre os eventos pode ser calculada em coordenadas esféricas, tal que:

$$ds^2 \sim (\tau_o - \tau)^2 d\Omega^2, \quad (4.20)$$

o que também é escrito nas coordenadas de cone de luz:

$$ds^2 = \gamma_{ab}d\theta^a d\theta^b, \quad (4.21)$$

logo:

$$\gamma_{ab} = \mathcal{O}(\tau_o - \tau)^2, \quad (4.22)$$

ou seja, de fato  $\gamma_{ab}$  é singular na linha de mundo  $\mathcal{L}_o$ , assim podemos esperar que os vetores de Killing de rotação em coordenadas GLC sejam singulares na origem, assim como o são em coordenadas esféricas para  $r = 0$ .

Como já mencionamos uma das características interessantes das coordenadas GLC, é a não diagonalidade da métrica (4.19), a métrica e a sua inversa terão a seguinte relação matricial:

$$g_{\mu\nu}^{GLC} = \begin{pmatrix} 0 & -Y & 0 \\ -Y & Y^2 + U^2 & -(U_b) \\ 0 & -(U_a)^T & \gamma_{ab} \end{pmatrix} \quad g_{GLC}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & -Y^{-1} & -Y^{-1}(U^b) \\ -Y^{-1} & 0 & 0 \\ -Y^{-1}(U^a)^T & 0 & \gamma^{ab} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Devido a esta não diagonalidade, a quadrivelocidade da partícula terá componentes nas direções espaciais, podemos ver isto na figura (3), o quadrimomento que possui apenas a componente  $k^\tau$ , varia sobre o cone de luz, enquanto que a quadrivelocidade é perpendicular à hipersuperfície de  $\tau = cte$ .

Das componentes da 1-forma de velocidade  $u_\mu = -\delta_\mu^\tau$ , podemos calcular as componentes da quadrivelocidade de um observador geodésico:

$$\begin{aligned} u^\mu &= -g^{\mu\nu} \delta_\nu^\tau \\ &= -g^{\mu\tau}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

da primeira linha da métrica (4.23), teremos a quadrivelocidade:

$$u^\mu = \left( 1, \frac{1}{Y'}, \frac{U^a}{Y} \right), \quad (4.25)$$

é interessante observar que apesar do quadrimomento só possuir a componente  $k^\tau$ , a quadrivelocidade possui componentes em todos os vetores de base e portanto devido a decomposição do vetor  $k$  equação (4.11), a direção de observação terá que cancelar as demais componentes e portanto:

$$d^\mu = \left( 0, -\frac{1}{Y'}, -\frac{U^a}{Y} \right). \quad (4.26)$$

Utilizaremos a expressão acima para calcular os observáveis astrométricos. Esperamos que o drift do redshift esteja relacionado à componente  $d^w$  e o drift da direção de observação esteja relacionado à componente  $d^a$ .

## 4.2 Liberdade de Calibre

Na construção anterior, omitimos uma definição precisa do parâmetro  $w$  que define o cone de luz, bem como uma definição precisa dos ângulos  $\theta^a$ . Vale notar que estes ângulos não necessariamente estão relacionados aos ângulos apropriados para observação e isto depende da escolha de calibre [37, 38]. A liberdade na escolha destas coordenadas permite transformações de coordenadas que preservam o elemento de linha (4.19). Portanto, constituem uma liberdade de calibre das coordenadas GLC.

### 4.2.1 Liberdade de Parametrização do Cone de Luz

Podemos parametrizar o cone de luz por escolhas apropriadas de  $w$  de modo a preservar (4.19). De fato, fazendo uma transformação da forma  $w \rightarrow w'(w)$ , as funções  $Y$  e  $U^a$  se transformarão do seguinte de modo:

$$Y \rightarrow Y' = Y \frac{dw}{dw'} \quad U_a \rightarrow U'_a = U_a \frac{dw}{dw'}, \quad (4.27)$$

de maneira que a métrica (4.19) terá a mesma estrutura se escrita em termos das novas coordenadas. É evidente desta construção que  $w$  pode ser redefinido de tal maneira que  $Y$  seja igual a 1, pelo menos em alguma região do espaço-tempo. Esta escolha de calibre corresponde ao caso em que parametrizamos o cone de luz, pelo tempo em que o observador recebe os fótons,  $w = \tau_o$ , ou seja, ao caso em que o tempo próprio do observador no decorrer de dois eventos define o cone de luz.

Já utilizamos esta escolha de calibre quando apresentamos a métrica de Minkowski em coordenadas GLC. Utilizaremos também este calibre, para cálculo dos observáveis astrométricos, em que um evento será coordenado por  $x_s^\mu = (\tau_s, \tau_o, \theta_s^a)$  em que os subscritos, (s) são para designar as coordenadas da fonte.

E esta escolha de calibre será chamada de calibre temporal em que  $Y_o = 1$ . Para provar esta afirmação iremos considerar dois eventos  $E$  e  $E'$ , separados por  $dx^\mu$ , de modo que os eventos estejam bem próximos de  $\mathcal{L}_o$ , deste modo com uma escolha adequada de sistema de coordenadas o espaço pode ser considerado localmente plano e poderemos trabalhar com a geometria euclidiana. As coordenadas de Fermi [39] possuem a propriedade de serem localmente planas. Utilizando as coordenadas de Fermi e considerando dois eventos correspondentes a duas emissões de luz,  $E$  e  $E'$ , observadas em  $\mathcal{L}_o$ .

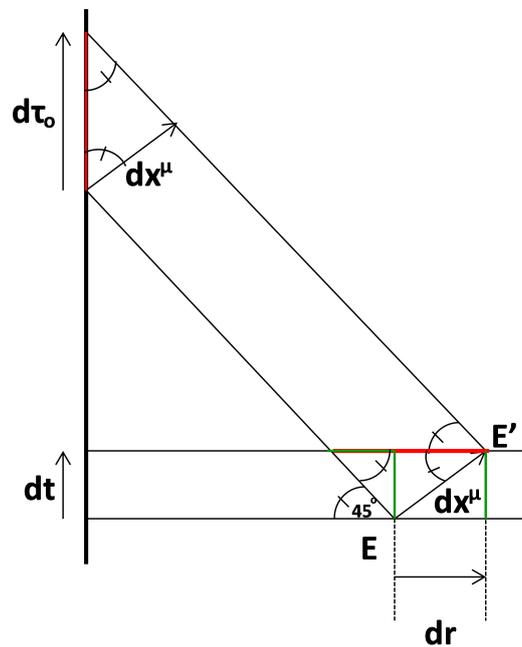


Figura 4 – Distância entre dois eventos na perspectiva do observador nas coordenadas de Fermi. Em que os ângulos destacados são iguais e possuem  $45^\circ$ , as linhas de mesma cor possuem o mesmo tamanho.

Podemos escrever a 1-forma de onda  $k$  nas coordenadas  $(t, r, \theta^a)$  de Fermi [39]

e comparar com as coordenadas de cone de luz:

$$\begin{aligned} k_\mu dx^\mu &= k_w^o dw, \\ k_\mu dx^\mu &= k_t dt + k_r dr = -\omega_o(dt + dr) = -\omega_o d\tau_o, \end{aligned} \quad (4.28)$$

em que na última passagem teremos  $d\tau_o = dr + dt$ , pode-se perceber pela figura 4 que os raios de luz formam ângulos de  $45^\circ$  com  $dr$  e, portanto, por igualdade de triângulos vemos que os triângulos com hipotenusa  $d\tau_o$  são semelhantes e compostos pelo triângulo de hipotenusa  $dx^\mu$  e pelo triângulo isósceles de lado  $dt$ . Assim vemos que o lado  $d\tau_o$  corresponde à soma  $(dt + dr)$ . O observador mede a distância entre ambos eventos pelo tempo decorrido entre a observação de ambos eventos. Comparando:

$$\begin{aligned} k_w^o dw &= -\omega_o d\tau_o \\ &= (u_\mu k^\mu)_o d\tau_o \\ &= (u_w k^w)_o d\tau_o \\ &= (g^{w\tau} u_\tau k^w) d\tau_o \\ &= (-Y)_o^{-1} k_w^o d\tau_o, \end{aligned} \quad (4.29)$$

logo:

$$\frac{d\tau_o}{dw} = Y|_{\mathcal{L}}, \quad (4.30)$$

acabamos de mostrar que a escolha de calibre de modo que  $Y = 1$  satisfaz a condição em que  $\tau_o$ , o tempo próprio do observador, define o cone de luz.

É interessante observar da equação (3.37) em que discutimos o redshift no capítulo de ótica geométrica em espaços-tempo curvos, que neste calibre  $Y^{-1} = 1 + z$ , já que:

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{d\tau_o}{d\tau_s} = 1 + z, \quad (4.31)$$

isto vem de  $Y_o = 1$ .

### 4.2.2 Liberdade de Escolha de Raios de Luz

A segunda liberdade de calibre esta em como parametrizar os ângulos  $\theta^a$ , e como transferir esta parametrização de um cone de luz para outro. Pode ser feita uma transformação da forma  $\theta^a \rightarrow \varphi^\alpha(w, \theta^a)$ , de modo que preserve a métrica:

$$d\theta^a = \frac{\partial \theta^a}{\partial w} dw + \frac{\partial \theta^a}{\partial \varphi^\alpha} d\varphi^\alpha. \quad (4.32)$$

Substituindo no elemento invariante:

$$\begin{aligned} ds^2 &= Y^2 dw^2 - 2Y d\tau dw \\ &+ \gamma_{ab} (\partial_\alpha \theta^a \partial_\beta \theta^b) [d\varphi^\alpha - (-\partial_w \varphi^\alpha + \partial_a \varphi^\alpha U^a) dw] [d\varphi^\beta - (-\partial_w \varphi^\beta + \partial_b \varphi^\beta U^b) dw], \end{aligned} \quad (4.33)$$

assim, redefinindo:

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta} &= \gamma_{ab}(\partial_\alpha\theta^a\partial_\beta\theta^b), \\ U^\alpha &= -\partial_w\varphi^\alpha + \partial_a\varphi^\alpha U^a,\end{aligned}\tag{4.34}$$

ou seja a métrica é invariante sobre reparametrização dos ângulos.

### 4.2.3 Transformações Conformes

As transformações conformes da métrica, nos ajudarão a absorver o fator de escala na métrica de FLRW, facilitando a transformação de coordenadas. Sabe-se que geodésicas nulas não são afetadas por transformações conformes, i.e. dado dois vetores do tipo luz, o elemento de linha entre eles é dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0 \Rightarrow d\tilde{s}^2 = \Omega^{-2}ds^2 = 0,\tag{4.35}$$

logo, as curvas de  $w$  e  $\theta^a$  constantes serão geodésicas nulas tanto no sistema de coordenadas original quanto no transformado. A transformação é dada por:

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2\tilde{g}_{\mu\nu}.\tag{4.36}$$

Transformações conformes são transformações que preservam ângulos [40] e portanto o produto escalar deve ser preservado, deste modo, uma transformação conforme satisfaz  $\partial_\tau(d\tau) = \partial_{\tilde{\tau}}(d\tilde{\tau})$ , ou seja:

$$\tilde{g}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} \stackrel{!}{=} g_{\tau\tau} \rightarrow \tilde{g}(\partial_{\tilde{\tau}},\partial_{\tilde{\tau}}) = \Omega^{-2}g(\partial_\tau,\partial_\tau),\tag{4.37}$$

assim, a coordenada  $\tau$  necessita ser renormalizada, tal que satisfaça a exigência da primeira igualdade, então:

$$\partial_{\tilde{\tau}} = \Omega\partial_\tau \Rightarrow d\tilde{\tau} = \Omega^{-1}d\tau.\tag{4.38}$$

A métrica é reescrita como:

$$\begin{aligned}d\tilde{s}^2 &= \Omega^{-2}ds^2 \\ &= \Omega^{-2}[Y^2dw^2 - 2dw d\tau + \gamma_{ab}(d\theta^a - U^a dw)(d\theta^b - U^b dw)] \\ &= \Omega^{-2}Y^2dw^2 - 2\Omega^{-1}Ydw d\tilde{\tau} + \Omega^{-2}\gamma_{ab}(d\theta^a - U^a dw)(d\theta^b - U^b dw).\end{aligned}\tag{4.39}$$

Portanto, as coordenadas e componentes da métrica se transformam como:

$$\begin{aligned}w &= \tilde{w}, \\ \theta^a &= \tilde{\theta}^a, \\ d\tau &= \Omega d\tilde{\tau},\end{aligned}\tag{4.40}$$

enquanto os graus de liberdade se transformam como:

$$\begin{aligned} Y &= \Omega \tilde{Y}, \\ U^a &= \tilde{U}^a, \\ \gamma_{ab} &= \Omega^2 \tilde{\gamma}_{ab}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

no entanto, no calibre temporal,  $\tilde{w} = \tilde{\tau}_o$ . E o dicionário de transformações se torna:

$$\begin{aligned} dw &= \Omega_o d\tilde{w}, \\ \theta^a &= \tilde{\theta}^a, \\ d\tau &= \Omega d\tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

os graus de liberdade:

$$\begin{aligned} Y &= \left( \frac{\Omega}{\Omega_o} \right) \tilde{Y}, \\ U^a &= \Omega_o^{-1} \tilde{U}^a, \\ \gamma_{ab} &= \Omega^2 \tilde{\gamma}_{ab}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

utilizaremos estas transformações na seção abaixo, para  $\Omega(t) = a(t)$ , em que  $a(t)$  é o fator de escala para métrica de FLRW.

### 4.3 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

A cosmologia observacional estabelece que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas i.e. acima de 100Mpc, pois sabemos que em pequenas escalas existem estruturas astrofísicas como aglomerados de galáxias, estrelas, etc. Uma descrição mais realista do Universo consiste no espaço-tempo de FLRW perturbado, no entanto neste capítulo trabalharemos com o espaço-tempo de FLRW não perturbado para ganharmos uma intuição com as coordenadas GLC, para no próximo capítulo tentarmos aplicá-las ao cálculo de observáveis astrométricos.

A métrica de FLRW pode ser escrita como:

$$ds^2 = -dt^2 + R(t)^2 d\sigma^2, \quad (4.44)$$

em que  $R(t)$  representa o fator de escala e  $d\sigma^2 = \gamma_{ij}(u) du^i du^j$ , sendo esta a métrica na fatia espacial tridimensional da hipersuperfície de  $t = cte$ , esta métrica está escrita no sistema de coordenadas comóveis já que não possui termos cruzados do tipo  $dt du^i$  e além disso  $dt$  não depende de  $u^i$ . Isto significa que observadores que permanecem em geodésicas com  $u^i = cte$  são comóveis, um observador na terra por exemplo, não é comóvel e devido a isto não vemos a RCF completamente isotrópica e devemos portanto retirar este efeito em análises como as da RCF em que aparecem termos de dipolo anisotrópicos [41].

A métrica de FLRW possui fatias espaciais maximamente simétricas, nestes espaços o tensor de Riemann satisfaz<sup>6</sup>:

$$R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (4.45)$$

em que  $k = \frac{R}{6}$ , contraindo com  $\gamma^{ik}$ :

$$R_{jl} = 2k\gamma_{jl}. \quad (4.46)$$

Devido a simetria esférica podemos reescrever a parte espacial como:

$$d\sigma^2 = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.47)$$

em que  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ , calculando os tensores de Ricci para esta métrica e utilizando a equação (4.46), obtém-se  $\beta = -\frac{1}{2} \ln(1 - kr^2)$ <sup>7</sup>.

A métrica de FLRW pode ser reescrita como:

$$ds^2 = -dt^2 + R(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (4.48)$$

no entanto, podemos normalizar  $k$  para  $\{+1, 0, -1\}$  e reescrever a componente radial da métrica como:

$$d\Xi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (4.49)$$

Resolvendo para os três valores de  $k$ , encontramos:

$$\begin{aligned} r(k = +1) &= \text{sen}(\Xi) \\ r(k = 0) &= \Xi \\ r(k = -1) &= \text{senh}(\Xi), \end{aligned} \quad (4.50)$$

substituindo na expressão da métrica, percebemos que  $k = 1$ , corresponde a um espaço com curvatura positiva,  $k = 0$ , espaço plano e  $k = -1$  espaço com curvatura negativa. No entanto, estaremos interessados no caso  $k = 0$  e portanto a métrica é escrita como:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (4.51)$$

Em que  $a(t)$  é um fator de escala adimensional, dado por  $a(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)}$ . O comportamento do fator de escala é calculado através da equação de Friedmann, que para a métrica de FLRW com secção espacial plana, possui a seguinte forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (4.52)$$

A taxa de expansão do Universo é dada por,  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , e  $\rho$  é a densidade de energia do conteúdo de matéria e energia do Universo.

<sup>6</sup> A demonstração desta equação pode ser encontrada em [42].

<sup>7</sup> Todos os passos são desenvolvidos em [43].

A equação 4.52 satisfaz às equações de Einstein para a métrica de FLRW e com tensor energia momento dado por um fluido perfeito e isotrópico, com equação de estado:

$$\rho = \omega p, \quad (4.53)$$

em que  $p$  é a pressão do fluido.

## 4.4 Espaço-Tempo de FLRW em Coordenadas GLC

Com intuito de facilitar o procedimento de transformação de coordenadas, é feita uma transformação conforme na métrica de FLRW, em que  $\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv a^{-2}(t)g_{\mu\nu}$ , deste modo o elemento de linha será dado por:

$$d\tilde{s}^2 = -d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (4.54)$$

em que,  $dt = a d\eta$ .

O espaço-tempo de FLRW é naturalmente folheado como fatias planas tridimensionais, em hipersuperfícies de tempo constante. Ou seja, pela equação (4.54) o espaço-tempo de FLRW é naturalmente folheado em fatias de  $\eta = cte$ . Sendo assim, uma escolha imediata para a coordenada temporal de GLC corresponde à  $\tilde{\tau} = \eta$  e além disso, trabalhando no calibre temporal  $\tilde{\omega} = \eta_0$ .

Resta-nos ainda a liberdade de escolha dos ângulos  $\theta^a$ , que serão escolhidos de maneira a coordenar um fóton que cruza a linha de mundo do observador em  $\eta_0$ . A direção espacial de propagação do fóton é dada por:

$$\tilde{\mathbf{d}}_0 = -D^i(\theta, \varphi)\tilde{\mathbf{e}}_i = -\text{sen}\theta\text{cos}\varphi\tilde{\mathbf{e}}_1 - \text{sen}\theta\text{sen}\varphi\tilde{\mathbf{e}}_2 - \text{cos}\theta\tilde{\mathbf{e}}_3. \quad (4.55)$$

Estabelecendo o mapa entre as coordenadas comóveis e GLC conforme:

$$(\eta, x, y, z) \rightarrow (\eta, \eta_0, \theta, \varphi). \quad (4.56)$$

Uma das maneiras de obter este mapa, consiste em integrar o vetor de onda com respeito ao parâmetro afim:

$$x^i = \int_{\tilde{\lambda}_0}^{\tilde{\lambda}} d\tilde{\lambda}' \tilde{k}^i, \quad (4.57)$$

sabendo que:

$$\tilde{\mathbf{k}}(\tilde{\tau}) = \frac{d}{d\tilde{\lambda}}(\tilde{\tau}) = \tilde{\omega}\partial_{\tilde{\tau}}(\tilde{\tau}) \rightarrow d\tilde{\lambda} = \tilde{\omega}^{-1}d\tilde{\tau}, \quad (4.58)$$

e portanto:

$$x^i = \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' \tilde{\omega}^{-1} \delta^{ij} \tilde{k}_j, \quad (4.59)$$

conforme resumo de relatividade geral no apêndice A,  $k_i$  é constante ao longo de sua geodésica, devido à existência de um vetor de Killing de translação espacial dado por

$\tilde{\xi}_\mu^{(i)} = \delta_\mu^{(i)}$  em que o índice ( $i$ ) nomeia vetores e não componentes de vetores. Este vetor deve satisfazer à equação de Killing A.17. Logo:

$$\tilde{k}_i = \tilde{k}_i^0 = \tilde{\omega}_0 \tilde{d}_i^0 = -\tilde{\omega}_0 D_i(\theta, \varphi). \quad (4.60)$$

Além disso, o fato de  $\tilde{k}$  ser nulo permite escrever:

$$\tilde{\omega}^2 = \delta^{ij} \tilde{k}_i \tilde{k}_j = D_i(\theta, \varphi) D^i(\theta, \varphi) = 1, \quad (4.61)$$

deste modo, tem-se uma relação explícita entre as coordenadas comóveis e as coordenadas GLC conformes:

$$x^i(\eta, \eta_o, \theta, \varphi) = -D^i(\theta, \varphi) \int_{\eta_o}^{\eta} d\eta' = (\eta_o - \eta) D^i(\theta, \varphi). \quad (4.62)$$

As componentes da expansão de  $dx^i$  nas novas coordenadas serão dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial \eta} &= -D^i(\theta, \varphi), \\ \frac{\partial x^i}{\partial \eta_o} &= D^i(\theta, \varphi), \\ \frac{\partial x^i}{\partial \theta^a} &= (\eta_o - \eta) \frac{\partial D^i}{\partial \theta^a}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

O elemento invariante nas coordenadas conformes GLC, fica:

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= -d\eta^2 + \delta_{ij} \left[ -D^i d\eta + D^i d\eta_o + (\eta_o - \eta) \frac{\partial D^i}{\partial \theta^a} d\theta^a \right] \\ &\quad \times \left[ -D^j d\eta + D^j d\eta_o + (\eta_o - \eta) \frac{\partial D^j}{\partial \theta^b} d\theta^b \right], \end{aligned} \quad (4.64)$$

em que os termos cruzados, envolvendo  $d\theta^a d\eta$  ou  $d\theta^a d\eta_o$  são nulos, pois:

$$D_i \partial_a D^i = \frac{1}{2} \partial_a (D_i D^i) = 0. \quad (4.65)$$

A métrica se reduz à:

$$d\tilde{s}^2 = d\eta_o^2 - 2d\eta d\eta_o + (\eta - \eta_o)^2 \delta_{ij} \partial_a D^i \partial_b D^j (d\theta^a d\theta^b), \quad (4.66)$$

a parte angula é dada por:

$$\partial_a D^i d\theta^a \rightarrow \partial_\theta D^i \Rightarrow (+\cos\theta \cos\varphi, +\cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta),$$

$$\partial_\varphi D^i \Rightarrow (-\sin\theta \sin\varphi, +\sin\theta \cos\varphi, 0), \quad (4.67)$$

os produtos serão dados por:

$$\begin{aligned} \partial_\theta D^i \partial_\theta D_i &= 1, \\ \partial_\varphi D^i \partial_\varphi D_i &= \sin^2\theta, \\ \partial_\theta D^i \partial_\varphi D_i &= 0, \end{aligned} \quad (4.68)$$

a forma final da métrica, fica:

$$d\tilde{s}^2 = d\eta_0^2 - 2d\eta d\eta_0 + (\eta_0 - \eta)^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (4.69)$$

Por identificação da forma geral do elemento de linha GLC (4.69), e pelo dicionário conforme (4.43) verifica-se que os graus de liberdade serão fixados em:

$$\begin{aligned} \tilde{Y} = 1 &\rightarrow Y = \frac{a(t)}{a(t_0)}, \\ \tilde{U}_a = U_a &= 0, \\ \tilde{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} &= (\eta_0 - \eta)^2 \delta_{ij} \partial_a D^i \partial_b D^j. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Podemos observar na métrica (4.69) que para escrever o espaço-tempo de FLRW em coordenadas GLC, podemos fazer a substituição  $r = \eta_0 - \eta$ , o mesmo vale para Minkowski, como já fizemos no início deste capítulo, isto nos será útil adiante para calcular observáveis astrométricos no espaço de Minkowski em coordenadas GLC.

A equação (4.70) mostra que o redshift é dado por:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}, \quad (4.71)$$

o que está de acordo com os livros textos [43] e também com a nossa discussão do calibre temporal.

## 5 Astrometria

A astrometria é o ramo da astronomia que consiste em medir a posição de objetos astrofísicos como galáxias, quasares, etc. Nos dias atuais a astrometria alcançou um grande avanço tecnológico, medindo em tempo real a posição de objetos astrofísicos<sup>1</sup>, e fornecendo com grande precisão a medida de observáveis astrofísicos, tais como a paralaxe e a aberração da luz, e cosmológicos, tais como o redshift. Com a missão Gaia, se tornou possível testar geometrias cosmológicas de maneira independente das técnicas atuais [10, 9]. Além disso, a missão Gaia também nos permite medir, de maneira independente das técnicas atuais (e.g., CMB e supernovas), a taxa de expansão do Universo, podendo assim nos ajudar a compreender a origem da tensão nas medidas de  $H_0$  obtidas pela missão Planck e as obtidas através de Supernovas do tipo Ia. Um outro dado importante que poderíamos obter através destas medidas é a velocidade peculiar da terra com relação à superfície de último espalhamento da RCF, o que em princípio nos permite inferir o valor do dipolo primordial da RCF, com importantes desdobramentos para a inflação cosmológica [12].

Para ser possível obter os resultados mencionados acima devemos calcular a variação temporal (drift) dos observáveis de interesse cosmológico. Em um formalismo desenvolvido por Marcori et al. [13], o drift destes observáveis foi obtido a partir da comparação de um mesmo observável integrado sobre duas geodésicas do tipo luz separadas por um intervalo de tempo  $\delta\tau$ . Com isso, foi possível calcular neste formalismo o drift da direção de observação e do redshift de objetos astrofísicos (e.g., um quasar) para os espaços-tempo de Minkowski, FLRW e Bianchi I, com e sem a inclusão das velocidades peculiares das fontes. Esboçaremos aqui o cálculo para Minkowski com velocidades peculiares, com o objetivo de explorarmos o formalismo e adaptá-lo para o sistema coordenadas GLC. Nosso objetivo final é o cálculo destes observáveis de uma maneira completamente geral em termos dos graus de liberdade da métrica GLC.

### 5.1 Minkowski

Para seguirmos a construção do formalismo desenvolvido em [13], precisaremos de um resultado conhecido da geometria diferencial. Seja  $\zeta^\mu$  um vetor de Killing e  $k^\mu$  o quadri-momento de uma partícula, então  $k^\mu \zeta_\mu$  é uma constante ao longo da geodésica

<sup>1</sup> A título de ilustração, a missão europeia Gaia [<http://sci.esa.int/gaia/>] tem tecnologia capaz de repetir 100 medidas da posição angular de um mesmo objeto ao longo de um período 5 anos, com precisão de  $10 \mu\text{arcsec}$  [10].

da partícula [16]:

$$k^\lambda \nabla_\lambda (k^\mu \xi_\mu) = \xi_\mu k^\lambda \nabla_\lambda (k^\mu) + k^\lambda k^\mu \nabla_{(\lambda} \xi_{\mu)} = 0, \quad (5.1)$$

onde usamos que o primeiro termo é nulo, pois na aproximação de ótica geométrica o quadrimomento do fóton é transportado paralelamente, a qual apresentamos no apêndice A. O segundo termo é nulo pois satisfaz a equação de Killing A.17. Em particular, para os vetores de Killing de translação da métrica de Minkowski,  $\xi^\mu = \delta_i^\mu$ , segue que a componente  $k^i$  do vetor de onda é constante:

$$k^i = \frac{dx^i}{d\lambda} = \text{cte}, \quad (5.2)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro afim ao longo da geodésica do fóton.

Iniciaremos os cálculos, decompondo o vetor de onda na quadrivelocidade do observador e em um vetor paralelo à hipersuperfície de  $\tau = \text{cte}$ , assim como já fizemos no capítulo anterior na equação (4.11). No entanto, naquele capítulo estávamos interessados na direção de propagação da luz, enquanto que aqui estaremos interessados na direção de observação. Portanto, introduziremos o vetor  $\mathbf{n} = -\mathbf{d}$ , em termos do qual nossa decomposição fica:

$$\mathbf{k} = \omega(\mathbf{u} - \mathbf{n}), \quad (5.3)$$

em que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ .

Neste ponto será importante ressaltar que no caso estático, como o espaço-tempo de Minkowski, tanto o drift do redshift quanto o drift da direção de observação serão trivialmente nulos. No entanto, se o observador e a fonte possuírem velocidades peculiares, mesmo para o espaço-tempo de Minkowski, vai ocorrer o drift do redshift e da direção de observação, devido às velocidades peculiares. Logo, pretendemos incluir estas velocidades através de:

$$\mathbf{u} \longrightarrow \tilde{\mathbf{u}} \approx \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad (5.4)$$

onde estamos desconsiderando termos não lineares em  $\mathbf{v}$ , pois não estaremos trabalhando com velocidades relativísticas. Portanto, em ordem linear em  $\mathbf{v}$  a condição (2.10) exige que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ .

Para observadores não geodésicos<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} k^\mu &= \tilde{\omega}(\tilde{u}^\mu - \tilde{n}^\mu) \\ &= \omega(u^\mu - n^\mu), \end{aligned} \quad (5.5)$$

em que  $\tilde{\omega}$  é a frequência medida por um observador que possui velocidade peculiar não nula e  $\tilde{n}^\mu$  é sua direção de observação. Ao escrever o projetor  $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ ,

<sup>2</sup> Apesar do abuso de linguagem de chamarmos o observador de não geodésico, ele ainda assim será geodésico, pois estará sob ação apenas da gravitação e as velocidades  $v^i$  serão consideradas apenas como perturbações na métrica.

e comparar a quantidade  $h^{\mu\nu}k_\nu$  relacionada a observadores com e sem velocidades peculiares, teremos o seguinte dicionário:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= \omega \left(1 + v^i n_i\right), \\ \tilde{n}^i &= n^i + \perp_j^i v^j,\end{aligned}\tag{5.6}$$

em que  $\perp_j^i = \delta_j^i - n_j n^i$ , o qual projeta um vetor perpendicularmente a  $\mathbf{n}$ , e portanto  $\tilde{n}^\mu n_\mu = n^\mu n_\mu = 1$ . Notemos também que a existência de vetores de Killing de translação espacial implica em  $n_i = n_i^o = cte$  ao longo da geodésica da luz.

A partir de (5.2) podemos integrar a geodésica da luz diretamente:

$$k^i = \frac{dx^i}{d\lambda} = -\tilde{\omega}_o (\tilde{n}_o^i - v_o^i),\tag{5.7}$$

em que o subscrito (o) é para designar quantidades constantes ao longo da geodésica.

Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\lambda} &= \omega \frac{dx^i}{dt} \\ &= -\tilde{\omega}_o (\tilde{n}_o^i - v_o^i).\end{aligned}\tag{5.8}$$

Utilizando o dicionário (5.6), segue que:

$$\frac{dx^i}{dt} = \perp_j^i v^j - \tilde{n}_o^i.\tag{5.9}$$

Essa equação pode ser imediatamente integrada, fornecendo:

$$x_o^i - x_s^i = (\perp_j^i v_o^j - \tilde{n}_o^i)(t_o - t_s),\tag{5.10}$$

em que os subscritos são usados para denotar a posição do observador (o) e da fonte (s).

Para a segunda geodésica a posição do observador/fonte será  $x_{o/s}^i(t + \delta t) = x_{o/s}^i(t) + v_{o/s}^i \delta t_{o/s}$  e a velocidade do observador será  $v^i(t_o + \delta t_o) = v^i(t_o) + \dot{v}^i \delta t_o$ , e portanto teremos:

$$\begin{aligned}x_o^i + v_o^i \delta t_o - x_s^i - v_s^i \delta t_s &= -(\tilde{n}^i + \delta \tilde{n}^i - \perp_j^i v_o^j - \perp_j^i \dot{v}_o^j \delta t_o)(t_o + \delta t_o - t_s - \delta t_s) \\ &= (\perp_j^i v_o^j - \tilde{n}^i)(t_o + \delta t_o - t_s - \delta t_s) + (\perp_j^i \dot{v}_o^j \delta t_o - \delta \tilde{n}^i)(t_o - t_s),\end{aligned}\tag{5.11}$$

em que na segunda passagem desconsideramos termos de segunda ordem em  $\delta$ . Multiplicando por  $n_i$ , teremos:

$$\frac{\delta t_s}{\delta t_o} = 1 - n_i (v_s^i - v_o^i).\tag{5.12}$$

Para obter a expressão acima consideramos que a variação na direção  $\delta \tilde{n}^i$  deve ser perpendicular à direção de observação  $\tilde{n}^i$ , o que decorre diretamente de  $\delta(\tilde{n}_i \tilde{n}^i) = 0$ .

Levando em consideração a equação (5.12) e comparando as equações, (5.10) e (5.11) teremos:

$$\frac{\delta \tilde{n}^i}{\delta t_o} = \perp_j^i \frac{v_s^j - v_o^j}{(t_o - t_s)} + \perp_j^i \dot{v}_o^j. \quad (5.13)$$

Obtemos portanto a variação da direção de observação ao longo do tempo devido à relação entre a velocidade do observador e da fonte e também devido à aceleração do observador.

O primeiro termo da equação (5.13) corresponde ao drift da paralaxe e o segundo ao drift da aberração da luz. É interessante observar que o primeiro termo é inversamente proporcional à distância entre observador e fonte, ou seja, para fontes mais distantes a contribuição deste termo para (5.13) é atenuada, como mostrado na referência [13].

Calcularemos agora o drift do redshift. Por definição, o redshift é:

$$1 + z = \frac{\omega_s}{\omega_o} = \frac{\tilde{u}_\mu^s k^\mu}{\tilde{u}_\mu^o k^\mu}, \quad (5.14)$$

logo:

$$1 + z = 1 + n_i (v_s^i - v_o^i), \quad (5.15)$$

o que já era esperado da equação (5.12), pois, como vimos no capítulo de ótica geométrica em espaços-tempo curvos,  $\frac{d\tau_s}{d\tau_o} = 1 + z$ . Teremos portanto:

$$\frac{\delta z}{\delta t_o} = -(1 + z)n_i \dot{v}_o^i + n_i \dot{v}_s^i. \quad (5.16)$$

Podemos ver que o drift do redshift é não nulo apenas para fontes e observadores acelerados. Este resultado também é plausível, já que o espaço-tempo de fundo é estático.

Para estender este formalismo para as coordenadas GLC, precisaremos primeiro compreender estes resultados. Primeiramente o que vemos é que o drift do redshift é paralelo à linha de visada enquanto que o drift da direção de observação é perpendicular à linha de visada. Da perspectiva de um observador no espaço-tempo de Minkowski, eventos em uma hipersuperfície de tempo próprio constante e que pertencem ao mesmo cone de luz passado do observador, estão em uma superfície esférica:

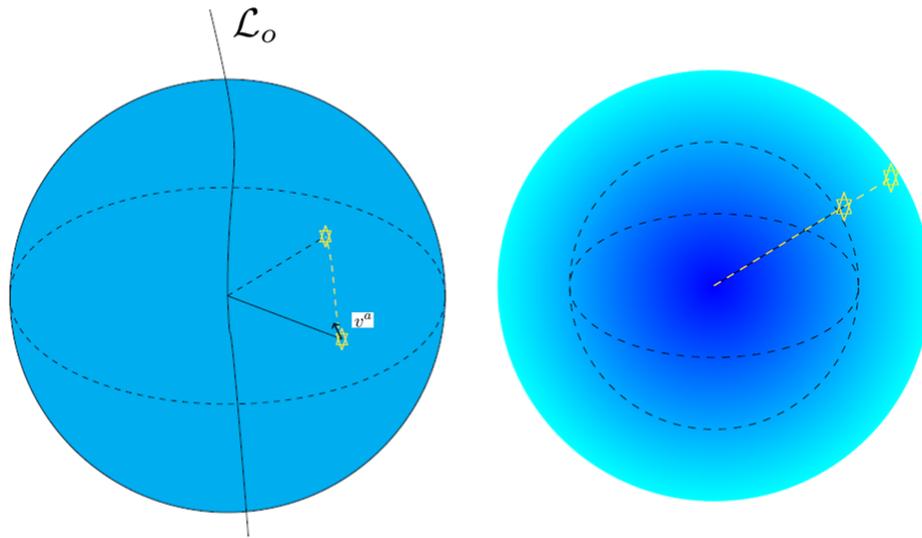


Figura 5 – Drift do redshift associado a uma alteração do raio da esfera enquanto que o drift da direção está associado à velocidade  $v^a$  das coordenadas GLC.

Vemos na figura acima que o drift da direção de observação está associado a uma rotação do cone de luz ou então à anisotropias e/ou inhomogeneidades do espaço-tempo. Portanto, este efeito está adaptado às coordenadas GLC, pois ele pode ser compreendido pelo desalinhamento da linha de visada com relação ao vetor  $\partial_w$ , na direção do vetor  $\partial_a$  como já vimos na equação (4.14), i. e. este efeito está associado ao grau de liberdade  $U^a$  da métrica do sistema de coordenadas GLC. O drift do redshift é identificado com uma dilatação do cone de luz, devido à expansão do Universo, ou então à aceleração peculiar do observador e da fonte.

## 5.2 Drift em Coordenadas GLC

Como vimos na seção anterior o drift do redshift e da direção de observação estão totalmente adaptados à geometria do cone de luz e, portanto, o cálculo destes observáveis nas coordenadas GLC deve ser bastante simples. No entanto, devido ao fato das coordenadas GLC serem adaptadas ao cone de luz, teremos  $k^\mu = \omega \delta_\tau^\mu = \text{cte}$ , para qualquer espaço-tempo (veja a eq. (4.7)). Por isso devemos buscar outras maneiras de implementar o formalismo de Marcori et al. [13], já que o procedimento como vimos, consiste em integrar a equação da geodésica em duas trajetórias sucessivas, separadas por um  $\delta\tau$ . Percebemos que o artifício deste formalismo é integrar a equação da geodésica, para no final relacionar a posição da fonte com a direção de observação.

Uma maneira alternativa de prosseguirmos com este formalismo para as coordenadas GLC consiste em integrar a quadrivelocidade da fonte afim de obter sua posição. Isto será útil, pois no sistema de coordenadas GLC a posição do evento em que os fótons foram emitidos são solução da equação da geodésica:

$$\begin{aligned} k^w &= 0 \Rightarrow w = cte, \\ k^a &= 0 \Rightarrow \theta^a = cte^a, \end{aligned} \quad (5.17)$$

ou seja, as constantes que representam  $w$  e  $\theta^a$  são as condições iniciais de cada geodésica. Portanto, é imediato ver que para o espaço-tempo de Minkowski o drift da direção de observação será nulo quando observadores e fonte forem estáticos, pois, neste caso  $\delta\theta^a = 0$ . Considerando apenas o movimento da fonte<sup>3</sup>, teremos novamente  $\tilde{u}_s^\mu = u_s^\mu + v_s^\mu$ , em que, para um espaço-tempo geral,  $u^\mu = \left(1, \frac{1}{Y}, \frac{U^a}{Y}\right)$ , e a condição de ortogonalidade  $u^\mu v_\mu = 0$ , implica em  $v^\tau = 0$ .

Para Minkowski, como já vimos na equação (4.1),  $Y = 1$  e  $U^a = 0$ . Escreveremos portanto,  $v^\mu = (0, v^w, v^a)$ , além disso observamos da decomposição do vetor de onda 4.11 que, como  $k^\mu = \omega \delta_\tau^\mu$ , então,  $n^\mu = u^\mu - \omega^{-1} k^\mu = (0, \frac{1}{Y}, \frac{U^a}{Y})$ . Portanto, em coordenadas GLC teremos que integrar as equações da quadrivelocidade da fonte:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= n^w = \frac{1}{Y}, \\ \frac{d\theta^a}{d\tau} &= n^a = \frac{U^a}{Y}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Podemos observar primeiramente que no espaço-tempo de Minkowski a métrica é escrita como:

$$ds^2 = dw^2 - 2dtdw + (w - t)^2 d\Omega^2, \quad (5.19)$$

em que a substituição feita foi  $r = w - t$ , e portanto:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dw}{dt} - 1. \quad (5.20)$$

Como discutido na seção anterior esperamos que  $\frac{dr}{dt}$  seja proporcional ao redshift. Nas coordenadas comóveis  $g_{\mu\nu} n^\mu v^\nu = n_i v^i$ , que é proporcional ao redshift, para o espaço-tempo de Minkowski, como vimos na equação (5.15). No entanto, nas coordenadas GLC:

$$g_{\mu\nu} v^\mu n^\nu = Y n^w v^w = v^w, \quad (5.21)$$

e portanto,  $\frac{dr}{dt} = v^w$ , que é proporcional ao redshift para o espaço-tempo de Minkowski. Nesta construção heurística que estamos fazendo, vemos que  $\frac{dw}{dt} = 1 + z$  o que já

<sup>3</sup> O espaço-tempo de Minkowski é plano e portanto podemos trivialmente comparar vetores em pontos diferentes. Deste modo podemos considerar apenas a velocidade da fonte como sendo a velocidade relativa entre observador e fonte.

<sup>4</sup> No capítulo anterior quando escrevemos a métrica de Minkowski nas coordenadas GLC (4.1) fizemos a substituição  $r = t_0 - t$ , além disso, no calibre temporal  $w = t_0$ , logo fazendo a substituição  $r = w - t$ , obtemos a métrica 5.19.

havia sido obtido tanto na seção (3.2) quando deduzimos a equação (3.37), quanto no calibre temporal 4.2.1, quando deduzimos a equação (4.31) na aproximação de ótica geométrica. Portanto esperamos que o drift da direção, que é perpendicular à linha de visada, seja proporcional à  $v^a$ .

### 5.2.1 Drift no Espaço-Tempo de Minkowski

Agora pretendemos calcular os drifts no espaço-tempo de Minkowski, considerando a velocidade peculiar da fonte. Para isso teremos que resolver as equações (5.18) em duas geodésicas separadas por um  $\delta t$  e portanto por um  $\delta w$  também. Da equação (5.20) vimos por argumentos heurísticos que  $\frac{dr}{dt}$  será proporcional ao redshift, e portanto esperamos que para  $\frac{dr}{dt} = cte$ , não ocorra redshift, assim como já apresentado na figura 5.

Considerando velocidades peculiares, as equações de movimento para a fonte serão:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= 1 + v_s^w, \\ \frac{d\theta^a}{dt} &= v_s^a.\end{aligned}\tag{5.22}$$

Logo, para Minkowski, teremos que o redshift é nulo quando  $v^w = 0$ . Além disto, vale observar que as coordenadas estão de tal maneira aptadas ao problema que:

$$z = v_s^w,\tag{5.23}$$

o que é equivalente à equação (5.15), pois, como já vimos  $v_i n^i = v^w$ , para o caso particular do espaço-tempo de Minkowski. O drift do redshift será dado por:

$$\frac{\delta z}{\delta t} = \dot{v}_s^w.\tag{5.24}$$

A equação (5.24) é análoga à equação (5.16), para  $v_o^\mu = 0$ .

Integrando a componente  $\theta^a$  da quadrivelocidade da fonte (5.22) obtemos movimento da fonte em dois cones de luz sucessivos:

$$\theta^a(t + \delta t) - \theta^a(t) = \int_t^{t+\delta t} dt v_s^a,\tag{5.25}$$

logo:

$$\frac{\delta \theta^a}{\delta t} = v_s^a.\tag{5.26}$$

Vemos nesta construção que o drift da direção de observação é nulo quando  $v^a = 0$  para o espaço-tempo de Minkowski e assim recuperamos os resultados já encontrados nas seções anteriores.

### 5.3 Construção Geral

Nosso objetivo nesta seção é calcular o drift do redshift e da direção de observação de maneira geral, i.e. para geometrias arbitrárias. Na seção anterior consideramos apenas a velocidade peculiar da fonte para calcular a variação da posição, e por isso iremos agora relacionar a posição da fonte com a posição do observador. Uma maneira de fazer isso é notar que a direção de observação depende da posição da fonte  $n^\mu(\tau_s, \tau_o, \theta_s^a)$ . Consideraremos as equações do quadrimomento do fóton para obter o drift em termos da direção de observação  $n$ :

$$\begin{aligned} n^w &= \frac{1}{Y} + v^w, \\ n^a &= \frac{U^a}{Y} + v^a. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Para prosseguir, podemos expandir estas quantidades em dois cones de luz diferentes e obter a variação da direção de observação:

$$\begin{aligned} n^w(t + \delta t, w + \delta w, \theta^a + \delta \theta^a) - n^w(t, w, \theta^a) &= \delta \left( \frac{1}{Y} \right) + \delta v^w, \\ &= -Y^{-2} (\partial_t Y \delta t + \partial_w Y \delta w + \partial_a^s Y \delta \theta_s^a) \\ &\quad + \partial_w v_o^w \delta w. \end{aligned} \quad (5.28)$$

No lado esquerdo temos  $\delta n^w$  e, como vimos no calibre temporal,  $w = \tau_o$ . Então teremos  $n^w = \frac{d\tau_o}{d\tau_s} = 1 + z$ , e portanto,  $\delta n^w = \delta z$ .

Como discutimos quando introduzimos as coordenadas GLC, estas coordenadas são singulares no observador e portanto estaremos considerando a expansão de  $\delta \theta^a$  na equação (5.28) apenas como uma mudança de posição da fonte, devido à própria natureza do espaço-tempo e/ou de velocidades peculiares. Agora, para relacionarmos  $\delta \tau_o$  com  $\delta \tau_s$  e  $\delta \theta_s^a$  e com isso obter a mudança da direção de observação em função da mudança de posição da fonte, precisaremos considerar a quadrivelocidade da fonte,  $u_s^\mu = (1, \frac{1}{Y}, \frac{U_s^a}{Y})$ . Para a componente  $w$  teremos:

$$\frac{\delta w}{\delta \tau_s} = \frac{1}{Y} + v_s^w, \quad (5.29)$$

ou:

$$\frac{\delta \tau_s}{\delta w} = Y(1 - Yv_s^w). \quad (5.30)$$

Estaremos interessados também em  $\frac{\delta \theta_s^a}{\delta w}$ . Utilizando a regra da cadeia:

$$\frac{d\theta_s^a}{dw} = (1 - Yv_s^w) (U_s^a + Yv_s^a), \quad (5.31)$$

teremos:

$$\frac{\delta \theta_s^a}{\delta w} = U_s^a - v_s^w Y U_s^a + Y v_s^a. \quad (5.32)$$

Substituindo as equações (5.30) e (5.32) na equação (5.28) poderemos calcular o drift do redshift com relação ao tempo próprio  $w = \tau_o$  do observador. A resposta será dada por:

$$\frac{\delta z}{\delta w} = -Y^{-2} [Y (1 - Yv_s^w) \partial_\tau Y + \partial_w Y + \partial_a Y (U_s^a - v_s^w Y U_s^a + Y v_s^a)] + \partial_w v_o^w. \quad (5.33)$$

A expressão acima já foi calculada no trabalho de Gasperini et al. [14], também nas coordenadas GLC, expandindo  $1 + z$  em termos dos graus de liberdade da métrica de GLC, sem fixar o calibre. A expressão obtidas por eles foi ligeiramente diferente da nossa:

$$\frac{\delta z}{\delta \tau_o} = (1 + z) \tilde{H}_o + \frac{1}{Y_o} \partial_{w_o} (1 + z) + \partial_{\tau_s} \ln(1 + z) + \frac{U_s^a}{Y_o} \partial_a^s (1 + z), \quad (5.34)$$

em que:

$$\tilde{H}_o = \frac{1}{Y_o} \partial_{\tau_o} Y_o. \quad (5.35)$$

No entanto, a expressão (5.34) foi calculada sem fixar o calibre associado ao cone de luz. No calibre temporal, lembramos que  $1 + z = Y^{-1}$  e  $Y_o = 1$ . Portanto, quando tomamos como nula as velocidades peculiares  $v^a = v^w = 0$  na equação (5.33) que encontramos calculando uma pequena variação temporal na componente  $w$  da direção de observação, vemos que nossa expressão corresponde à expressão (5.34) encontrada em [14].

Esperamos portanto, encontrar o drift da direção fazendo o mesmo procedimento acima para a componente  $a$  da direção de observação:

$$\begin{aligned} \frac{\delta n^a}{\delta w} &= \frac{1}{Y} \left\{ Y (1 - Yv_s^w) \partial_\tau U^a + \partial_w U^a + (U_s^b - v_s^w Y U_s^b + Y v_s^b) \partial_b U^a \right\} \\ &\quad - \frac{U^a}{Y^2} \left\{ Y (1 - Yv_s^w) \partial_\tau Y + \partial_w Y + (U_s^b - v_s^w Y U_s^b + Y v_s^b) \partial_b Y \right\} \\ &\quad + \partial_w v_o^a. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Vemos na expressão acima que a maneira como construímos o drift levou a uma expressão que contém tanto o drift do redshift quanto o da direção:

$$\begin{aligned} \frac{\delta n^a}{\delta w} &= \frac{1}{Y} \left\{ Y (1 - Yv_s^w) \partial_\tau U^a + \partial_w U^a + (U_s^b - v_s^w Y U_s^b + Y v_s^b) \partial_b U^a \right\} \\ &\quad + U^a \frac{\delta z}{\delta w} \\ &\quad + \partial_w v_o^a. \end{aligned} \quad (5.37)$$

No entanto, isto era esperado, já que, apesar de em Minkowski o *split* do espaço-tempo satisfazer à condição (1+2+1), para um espaço-tempo geral isto já não é mais verdade, pois  $\partial_w$  não será perpendicular a  $\partial_a$ , para  $U^a$  diferente de zero, como vimos na equação (4.14). No entanto para  $U^a = 0$ , recuperamos o *split* (1+2+1).

As equações (5.33) e (5.36), são respectivamente o drift do redshift e o drift da direção de observação com todas as contribuições, seja de velocidades peculiares ou devido à estrutura do espaço-tempo, e podem ser ajustadas para casos especiais.

A liberdade de calibre para parametrizar o cone de luz, foi escolhida como  $w = \tau_0$ , no entanto, não definimos os ângulos  $\theta^a$ . No capítulo anterior quando escrevemos a métrica de FLRW nas coordenadas GLC, fixamos estes ângulos, para parametrizar a direção de propagação da luz que atinge o observador  $\mathcal{L}_0$ . A escolha dos ângulos  $\theta^a$  será definida, após a fixação deste calibre, assim como os graus de liberdade da métrica  $\Upsilon$  e  $U^a$ , também terão suas estruturas funcionais fixadas após a escolha do espaço-tempo de fundo.

As expressões (5.33) e (5.36) podem ser empregadas em uma tentativa de direta reconstrução da geometria do espaço-tempo a partir das observações. Ou então podem ser empregadas como um guia simplificado para obtenção do drift em diferentes espaços-tempo, bastando apenas escrever o espaço-tempo em coordenadas GLC e no calibre temporal e substituir seus valores nas equações (5.33) e (5.36).

## 6 Conclusão

As aproximações de ótica geométrica são satisfeitas em cosmologia quando estamos lidando com regiões grandes o suficiente do espaço-tempo, de modo que os comprimentos característicos do meio sejam bem superiores às dimensões em que o comprimento de onda varie. Estas aproximações são de grande importância na construção das coordenadas GLC.

Neste trabalho apresentamos uma dedução das coordenadas GLC, seguindo a construção apresentada em [1]. Discutimos também os seus graus de liberdade e então escrevemos o espaço-tempo de FLRW em coordenadas GLC. Esta revisão nos deu condição para desenvolvermos nosso objetivo final que era o de empregar o procedimento introduzido por [13] para o cálculo dos observáveis astrométricos no espaço-tempo de Minkowski. Estes cálculos serviram de suporte para o nosso objetivo de calcular o drift do redshift e o drift da direção de observação de maneira completamente genérica.

Como resultado, obtivemos expressões para os observáveis astrométricos no espaço-tempo de Minkowski em coordenadas GLC, os quais concordam com aqueles encontrados na referência [13]. Ao comparar a componente  $w$  da direção de observação para duas geodésicas distintas encontramos uma expressão geral para o drift do redshift considerando velocidades peculiares da fonte e do observador. Para velocidades peculiares nulas, nossa expressão se reduz à expressão já encontrada na literatura em [14] quando escrita no calibre temporal. Isto nos serviu de guia para acreditar que nossos resultados estão corretos. Além disto quando repetimos o procedimento para a componente  $n^a$  da direção de observação encontramos uma expressão para o drift da direção em termos dos graus de liberdade da métrica, considerando velocidades peculiares.

Com estas expressões esperamos contribuir para o estado da arte da cosmologia em tempo real, oferecendo uma expressão sem geometria pré-determinada, permitindo reconstruir a métrica através de observações astrométricas, além de também oferecer um procedimento alternativo para o cálculo de observáveis astrométricos para diferentes métricas de espaço-tempo.

Como perspectivas futuras esperamos escrever a expressão do drift da direção que encontramos para diferentes geometrias e comparar com os resultados da literatura, como um *check* de consistência desta equação.



# Referências

- [1] FLEURY, P.; NUGIER, F.; FANIZZA, G. Geodesic-light-cone coordinates and the bianchi i spacetime.
- [2] MATHER, J. C. A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cosmic background explorer (cobe) satellite. *Astrophysical Journal*, v. 354, 1990.
- [3] HINSHAW, G. et al. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Data processing, sky maps, and basic results.
- [4] KOMATSU, E. et al. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological interpretation.
- [5] COLLABORATION, P. et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. 2018.
- [6] RIESS, A. G. et al. A 2.4% DETERMINATION OF THE LOCAL VALUE OF THE HUBBLE CONSTANT. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 826, n. 1, p. 56, jul 2016.
- [7] RIESS, A. G. et al. Large magellanic cloud cepheid standards provide a foundation for the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond  $\Lambda$ CDM.
- [8] LISKE, J. et al. Cosmic dynamics in the era of extremely large telescopes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 386, n. 3, p. 1192–1218, may 2008.
- [9] QUERCELLINI, C. et al. Real-time cosmology. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 521, n. 3, p. 95–134, dec 2012.
- [10] QUERCELLINI, C.; QUARTIN, M.; AMENDOLA, L. Possibility of detecting anisotropic expansion of the universe by very accurate astrometry measurements. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 102, n. 15, apr 2009.
- [11] QUERCELLINI, C. et al. Cosmic parallax as a probe of late time anisotropic expansion. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 80, n. 6, sep 2009.
- [12] BEL, J.; MARINONI, C. Proposal for a real-time detection of our acceleration through space. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 121, n. 2, jul 2018.

- [13] MARCORI, O. H. et al. Direction and redshift drifts for general observers and their applications in cosmology. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 2, jul 2018.
- [14] GASPERINI, M. et al. Light-cone averaging in cosmology: formalism and applications.
- [15] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. Princeton Univers. Press, 2017. ISBN 0691177791. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/28672241/charles\\_w\\_misner\\_kip\\_s\\_t\\_horne\\_john\\_a\\_rchibald\\_w\\_h\\_e\\_e\\_l\\_e\\_r\\_g\\_r\\_a\\_v\\_i\\_t\\_a\\_t\\_i\\_o\\_n](https://www.ebook.de/de/product/28672241/charles_w_misner_kip_s_t_horne_john_a_rchibald_w_h_e_e_l_e_r_g_r_a_v_i_t_a_t_i_o_n)>
- [16] WEINBERG. *Gravitation and Cosmology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1972. ISBN 0471925675.
- [17] LANDAU, E. M. L. D. *Classical Theory of Fields*. [S.l.]: Elsevier LTD, Oxford, 1995. ISBN 0750627689.
- [18] HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, mar 1929.
- [19] RASANEN, S. Backreaction of linear perturbations and dark energy. 2004.
- [20] ISHIBASHI, A.; WALD, R. M. Can the acceleration of our universe be explained by the effects of inhomogeneities? *Class. Quant. Grav.*, v. 23, p. 235–250, 2006.
- [21] BUCHERT, T. et al. Is there proof that backreaction of inhomogeneities is irrelevant in cosmology? *Class. Quant. Grav.*, v. 32, p. 215021, 2015.
- [22] GASPERINI, M.; MAROZZI, G.; VENEZIANO, G. Gauge invariant averages for the cosmological backreaction. 2009.
- [23] GASPERINI, M.; MAROZZI, G.; VENEZIANO, G. A covariant and gauge invariant formulation of the cosmological "backreaction". 2010.
- [24] ELLIS, G. F. R.; MAARTENS, R.; MACCALLUM, M. A. H. *Relativistic Cosmology*. Cambridge University Press, 2017. ISBN 0521381150. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/14876696/george\\_f\\_r\\_ellis\\_r\\_o\\_y\\_m\\_a\\_a\\_r\\_t\\_e\\_n\\_s\\_m\\_a\\_l\\_c\\_o\\_l\\_m\\_a\\_h\\_m\\_a\\_c\\_c\\_a\\_l\\_l\\_u\\_m\\_r\\_e\\_l\\_a\\_t\\_i\\_v\\_i\\_s\\_t\\_i\\_c\\_c\\_o\\_s\\_m\\_o\\_l\\_o\\_g\\_y](https://www.ebook.de/de/product/14876696/george_f_r_ellis_r_o_y_m_a_a_r_t_e_n_s_m_a_l_c_o_l_m_a_h_m_a_c_c_a_l_l_u_m_r_e_l_a_t_i_v_i_s_t_i_c_c_o_s_m_o_l_o_g_y)>
- [25] BESTER, H. L. et al. What's inside the cone? numerically reconstructing the metric from observations.
- [26] BESTER, H. L.; LARENA, J.; BISHOP, N. T. Towards the geometry of the universe from data.

- [27] BEN-DAYAN, I. et al. Backreaction on the luminosity-redshift relation from gauge invariant light-cone averaging.
- [28] BEN-DAYAN, I. et al. The second-order luminosity-redshift relation in a generic inhomogeneous cosmology.
- [29] MAROZZI, G. The luminosity distance-redshift relation up to second order in the poisson gauge with anisotropic stress.
- [30] BEN-DAYAN, I. et al. Do stochastic inhomogeneities affect dark-energy precision measurements? 2012.
- [31] BEN-DAYAN, I. et al. Average and dispersion of the luminosity-redshift relation in the concordance model. 2013.
- [32] BEN-DAYAN, I. et al. The value of  $h_0$  in the inhomogeneous universe. 2014.
- [33] FANIZZA, G.; NUGIER, F. Lensing in the geodesic light-cone coordinates and its (exact) illustration to an off-center observer in lemaître-tolman-bondi models. 2015.
- [34] FANIZZA, G. et al. A new approach to the propagation of light-like signals in perturbed cosmological backgrounds. 2015.
- [35] DIO, E. D. et al. Galaxy number counts to second order and their bispectrum. 2014.
- [36] FANIZZA, G. et al. Time of flight of ultra-relativistic particles in a realistic universe: a viable tool for fundamental physics?
- [37] MITSOU, E.; SCACCABAROZZI, F.; FANIZZA, G. Observed angles and geodesic light-cone coordinates. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 35, n. 10, p. 107002, apr 2018.
- [38] FANIZZA, G. et al. Observation angles, fermi coordinates, and the geodesic-light-cone gauge. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2019, n. 01, p. 004–004, jan 2019.
- [39] POISSON, E. *A Relativist's Toolkit*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 0521537800. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/6946912/eric\\_poisson\\_ar\\_relativist\\_stoolkit.html](https://www.ebook.de/de/product/6946912/eric_poisson_ar_relativist_stoolkit.html)>.
- [40] ARFKEN, G.; WEBER, H.; HARRIS, F. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier, 2012. ISBN 9780123846549. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=qLFo\\_Z-PoGIC](https://books.google.com.br/books?id=qLFo_Z-PoGIC)>.

- [41] CARROLL, S. M.; TSENG, C.-Y.; WISE, M. B. Translational invariance and the anisotropy of the cosmic microwave background. *Physical Review D*, APS, v. 81, n. 8, p. 083501, 2010.
- [42] WEINBERG, S. *Cosmology*. OUP Oxford, 2008. (Cosmology). ISBN 9780191523601. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=nqQZdgo2ofsC>>.
- [43] CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Pearson, 2003. ISBN 0805387323.
- [44] MITSOU, E.; SCACCABAROZZI, F.; FANIZZA, G. Observed angles and geodesic light-cone coordinates.
- [45] FANIZZA, G. et al. An exact jacobi map in the geodesic light-cone gauge. *JCAP* 11 (2013) 019, 2013.
- [46] THORNE, R. D. B. K. S. *Modern Classical Physics*. Princeton Univers. Press, 2017. ISBN 0691159025. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/20614966/kip\\_sthorne\\_ogerdablandford\\_modern\\_classical\\_physics.h](https://www.ebook.de/de/product/20614966/kip_sthorne_ogerdablandford_modern_classical_physics.h)>.
- [47] D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, 1992. ISBN 0198596863. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/3242195/ray\\_dinverno\\_introducing\\_einstein\\_srrelativity.html](https://www.ebook.de/de/product/3242195/ray_dinverno_introducing_einstein_srrelativity.html)>.
- [48] QUERCELLINI, C.; QUARTIN, M.; AMENDOLA, L. Possibility of detecting anisotropic expansion of the universe by very accurate astrometry measurements. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 102, n. 15, apr 2009.

# Apêndices



# APÊNDICE A – Resumo de Relatividade Geral

Apresentamos abaixo os principais resultados sobre a teoria da relatividade geral, que serão utilizados nesta dissertação.

Em espaços planos, vetores, tensores e seus duais, naturalmente pertencem ao mesmo espaço tangente e assim as operações de soma e produto entre estes objetos são triviais. Uma variedade pseudoriemanniana é uma variedade diferenciável, equipada com um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , simétrico e de rank  $(0,2)$ , que define o produto interno usual e portanto as noções de distância nestes espaços. Em espaço-tempo curvos, vetores devem ser comparados apenas localmente, ou seja, no mesmo espaço tangente, pois, diferentemente do que ocorre em espaços planos, em espaços curvos, quando arrastamos um vetor ao longo de duas trajetórias diferentes podemos obter resultados diferentes.

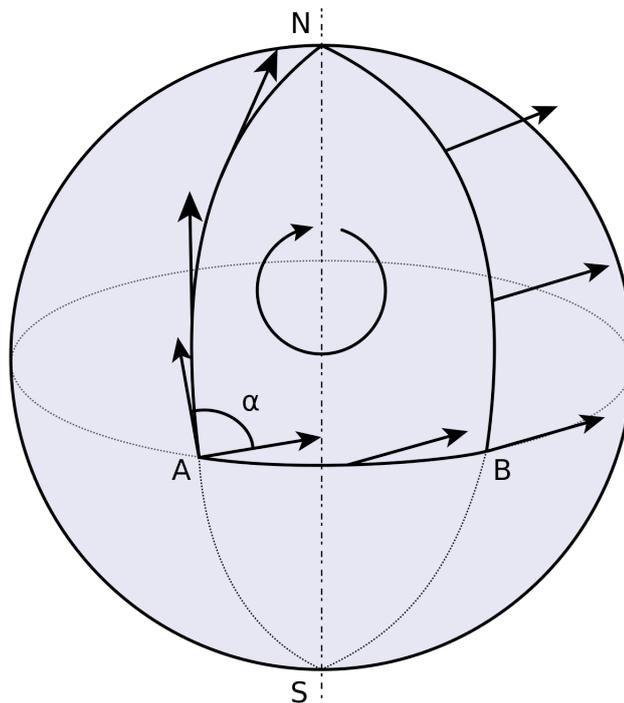


Figura 6 – Vetor sendo transladado sobre a superfície de uma esfera em uma trajetória fechada. Percebe-se que após a trajetória fechada, o vetor transladado não será paralelo ao original.

A figura 6 mostra que diferentemente do que ocorre em espaços planos o transporte de um vetor em espaços curvos não é arbitrário. Mais adiante, definiremos algumas maneiras de transportar um vetor em um espaço curvo.

Como dissemos, uma variedade pseudoriemanniana é dotada de métrica, a qual estabelece a noção de distância. A métrica permite relacionar componentes de vetores com seus duais (1-formas) i.e. a métrica pode ser utilizada para descer índices:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad (\text{A.1})$$

ou seja, esperamos que possamos também realizar a operação inversa  $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$ , no entanto, para isto a operação deve ser inversível:

$$A^\mu = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} A^\nu, \quad (\text{A.2})$$

então,  $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$ , ou seja, a métrica possui inversa.

As componentes de um tensor devem satisfazer a seguinte lei de transformação:

$$\mathbf{T}(x) = \mathbf{T}'(x') \quad \rightarrow \quad T^{\mu'\nu'\dots}_{\alpha'\beta'\dots} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \dots \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \dots T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots}, \quad (\text{A.3})$$

no entanto, a derivada parcial de um tensor se transforma como:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu'} A^{\nu'} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \left( \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} A^\nu \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu A^\nu + A^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \left( \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

vemos que devido ao segundo termo, a transformação acima não satisfaz uma lei de transformação tensorial, e portanto deveremos introduzir uma nova derivada que satisfaz uma lei de transformação.

A nova derivada deverá possuir um termo adicional, para cancelar o segundo termo da equação (A.4). Em espaços planos a derivada parcial é um mapa de tensores de posto  $(k, l)$  em tensores  $(k, l + 1)$ , logo estamos buscando por um operador que estabelece o mesmo mapa em espaços curvos. E satisfaça as propriedades já conhecidas da derivada parcial:

- linearidade:  $\partial_\mu(A + B) = \partial_\mu A + \partial_\mu B$ ;
- regra do produto de Leibniz:  $\partial_\mu(AB) = A\partial_\mu B + B\partial_\mu A$ .

Logo, este operador deve se reduzir à derivadas parciais em espaços planos, ou quando atuar sobre um escalar, já que derivadas parciais de escalares se transformam da maneira apropriada. Teremos portanto:

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu A^\alpha, \quad (\text{A.5})$$

em que  $\Gamma_{\mu\alpha}^\nu$  é conhecida como conexão e deve se transformar de modo que a derivada covariante  $\nabla$  mapeie tensores do tipo  $(k, l)$  em tensores  $(k, l + 1)$ , logo:

$$\Gamma_{\mu'\alpha'}^{\nu'} A^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\nu'} \partial x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^{\mu'}} \Gamma_{\mu\alpha}^\nu A^\alpha - A^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \left( \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \right), \quad (\text{A.6})$$

ou seja, a lei de transformação acima é uma lei não tensorial para garantir que a derivada covariante de um tensor se transforme de maneira adequada.

Como já mencionado, sob a hipótese de torção livre, a derivada covariante de um escalar deve se reduzir à derivada parcial:

$$\nabla_\mu (A_\alpha B^\alpha) = \partial_\mu (A_\alpha B^\alpha). \quad (\text{A.7})$$

Por outro lado, utilizando a regra do produto:

$$A_\alpha \left( \partial_\mu B^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha B^\nu \right) + B^\alpha \left( \partial_\mu B^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^\nu A_\nu \right) = \partial_\mu (A_\alpha B^\alpha), \quad (\text{A.8})$$

logo vemos que para satisfazer a igualdade,  $\Gamma = -\tilde{\Gamma}$ .

A conexão que utilizamos em relatividade geral é livre de torção  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$  e compatível com a métrica i.e.  $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ . Estas condições resultam em uma conexão única, conhecida como símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.9})$$

Como pode ser observado, a conexão (A.9) é nula para espaços planos como o de Minkowski, sob uma escolha adequada de coordenadas, em que as componentes da métrica são constantes.

Dado que a arbitrariedade de trajetórias no arraste de um tensor, leva a diferentes tensores, iremos definir o transporte paralelo. O transporte paralelo é uma maneira de transportar o vetor ao longo de uma curva, mantendo o mesmo constante. Em espaços-tempos planos, o transporte paralelo deve satisfazer:

$$\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \partial_\mu T_{\gamma\nu}^{\alpha\beta\dots} = 0, \quad (\text{A.10})$$

em que  $x^\mu(\lambda)$  é a curva sobre a qual estamos interessados em transportar o vetor e  $\lambda$  é o parâmetro ao longo da curva, logo esta é uma derivada direcional. Em espaços-tempo curvos, a equação acima deve ser substituída pelo análogo covariante:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu T_{\gamma\nu}^{\alpha\beta\dots} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Em relatividade geral a métrica é sempre transportada paralelamente ao longo das curvas, já que, utilizamos a conexão compatível com a métrica. Neste caso, a noção de produto interno é a mesma ao longo de toda a curva:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu (g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta) = \frac{dx^\mu}{d\lambda} B_\alpha \nabla_\mu A^\alpha + A_\beta \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu B^\beta.$$

Agora estamos prontos para definir geodésicas, que são curvas as quais o vetor tangente é transportado paralelamente ao longo delas, ou seja:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0, \quad (\text{A.12})$$

ou melhor:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (\text{A.13})$$

vemos imediatamente que esta equação se reduz à noção de linhas retas em espaços planos, já que para espaços planos a conexão é nula. O mesmo acontece em relatividade geral, a geodésica é a trajetória de observadores em queda livre, ou seja, sem nenhuma força atuando sobre eles.

Além da derivada covariante podemos introduzir a derivada de Lie. A derivada usual é definida por:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \quad (\text{A.14})$$

no entanto, mais uma vez lembramos que a simples generalização da equação acima levaria à inconsistências, já que em espaços curvos não podemos simplesmente arrastar um vetor de um ponto a outro. Então para definir a derivada de Lie, faremos uso do conceito de curvas de integrais  $x(\lambda)$ , em que  $\lambda$  é um parâmetro que varia sobre estas curvas, também definidas como curvas de congruência, que são uma família de curvas que não devem se cruzar, isto se faz necessário, pois em cada ponto de cada curva teremos um vetor tangente  $\xi = \frac{dx}{d\lambda}$  e este vetor deve possuir uma correspondência unívoca com os pontos da curva, i.e. dado um vetor, podemos obter a curva.

Agora podemos comparar dois vetores em pontos diferentes de uma mesma curva, fazendo uma mudança de coordenadas ativa, i.e. arrastando o vetor de um ponto a outro sobre esta curva, e então poderemos definir a derivada de Lie como:

$$\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu} = \lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} \frac{T_{\mu\nu}(x) - T'_{\mu\nu}(x)}{\delta\lambda}, \quad (\text{A.15})$$

em que  $T'_{\mu\nu}(x)$  é um vetor que originalmente pertencia ao ponto  $x^{\mu'} = x^\mu + \delta\lambda \xi^\mu$  e sob uma mudança de coordenadas foi arrastado ao ponto  $x^\mu$ .

A derivada de Lie da métrica é dada por:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \quad (\text{A.16})$$

quando a derivada de Lie da métrica na direção do vetor  $\xi$  é nula i.e.  $g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x)$ . O vetor  $\xi$  é chamado de vetor de Killing e está associado às simetrias da métrica.

A equação de Killing é dada por:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad (\text{A.17})$$

para espaços-tempo como o de Minkowski, em que a métrica é dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (\text{A.18})$$

vemos que a métrica é independente de  $(t, x, y, z)$  e portanto, teremos 4 vetores de Killing associados à translações espaciais e temporais. Para cada um destes vetores conseguimos associar uma quantidade conservada. No caso da propagação de ondas eletromagnéticas teremos:

$$k^\mu \nabla_\mu (k^\nu \xi_\nu) = \xi_\nu k^\mu \nabla_\mu k^\nu + k^\mu k^\nu \nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0, \quad (\text{A.19})$$

em que o primeiro termo se deve ao transporte paralelo de  $k^\mu$  e o segundo devido à equação de Killing (A.17).

A curvatura de um espaço é medida pelo tensor de Riemann, se considerarmos uma trajetória fechada, composta respectivamente pelas curvas  $u^\mu(\lambda)$ ,  $v^\mu(\beta + c)$ ,  $u^\mu(\lambda + c)$ ,  $v^\mu(\beta)$ , em que  $c$  é uma constante, podemos intuir sobre a curvatura de um espaço. Como já mencionamos o caso da esfera na figura 6, aqui pretendemos levar um vetor de um ponto à outro de uma trajetória fechada de duas maneiras diferente, uma delas é fazendo o transporte paralelo ao longo de  $u^\mu(\lambda)$  e depois de  $v^\mu(\beta + c)$ , a segunda é fazendo o transporte ao longo de  $v^\mu(\beta)$  e depois, ao longo de  $u^\mu(\lambda + c)$ , e então subtraímos ambos:

$$\begin{aligned} v^\alpha \nabla_\alpha (u^\mu \nabla_\mu V^\lambda) - u^\mu \nabla_\mu (v^\alpha \nabla_\alpha V^\lambda) &= u^\mu v^\alpha [\nabla_\alpha, \nabla_\mu] V^\lambda + \\ &v^\alpha (\nabla_\alpha u^\mu) \nabla_\mu V^\lambda - u^\mu (\nabla_\mu v^\alpha) \nabla_\alpha V^\lambda, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

no entanto, mesmo que escolhermos trajetórias em que os dois últimos termos se cancelem, ainda restará o comutador das derivadas covariantes, que estará relacionado à curvatura do espaço-tempo em questão:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\mu] V^\lambda = R^\lambda_{\sigma\alpha\mu} V^\sigma. \quad (\text{A.21})$$

Um cálculo longo, no entanto direto, mostra que o tensor de Riemann é dado por:

$$R^\lambda_{\sigma\alpha\mu} = \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\alpha\sigma} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{\mu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\alpha\sigma}. \quad (\text{A.22})$$

Algumas vezes é útil reescrever um tensor a partir de suas partes irreduzíveis, neste caso o tensor de Ricci e o escalar de Ricci possuem toda informação sobre os traços do tensor de Riemann, e eles são dados respectivamente por:

$$R_{\mu\nu} = R^\beta_{\mu\beta\nu}, \quad (\text{A.23})$$

podemos decompor novamente em:

$$R_{\mu\nu} = \widehat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.24})$$

em que  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ , é o escalar de Ricci.

As equações de campo de Einstein relacionam o conteúdo de matéria e energia do Universo  $T_{\mu\nu}$ , com a geometria do espaço-tempo representada pelo tensor  $G_{\mu\nu}$ :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.25})$$

em que o tensor energia-momento satisfaz a lei de conservação:

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.26})$$

Deste modo, o tensor de Einstein também deve satisfazer uma lei de conservação deste tipo, um outro tensor que satisfaz a mesma lei de conservação é dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (\text{A.27})$$

já que, o tensor de Ricci satisfaz:

$$\nabla_{\mu}R^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2}\nabla_{\nu}R, \quad (\text{A.28})$$

e portanto o tensor também satisfaz  $\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$ . Foge do foco deste apêndice apresentar argumentos que de fato as equações de campo de Einstein (A.25) são as equações da gravitação e de fato reproduzem as equações da gravitação newtoniana no limite de campo fraco. Nosso objetivo neste apêndice é apenas introduzir algumas das ferramentas que utilizamos ao longo desta dissertação.