



**UNIVERSIDADE
Estadual de LONDRINA**

LUIS FELIPE PINERES RICO

**ANÁLISE DA CONSISTÊNCIA E ESTABILIDADE DE
MODELOS VETORIAIS.**

LONDRINA-PR

2017

LUIS FELIPE PINERES RICO

**ANÁLISE DA CONSISTÊNCIA E ESTABILIDADE DE
MODELOS VETORIAIS.**

Dissertação de mestrado apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Rogério Sergi Gomes.

Coorientador: Prof. Dr. Carlos André Hernaski.

LONDRINA-PR

2017

Luis Felipe Pineres Rico

Análise da consistência e estabilidade de modelos vetoriais./ Luis Felipe Pineres Rico. – Londrina-PR, 2017-

74 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Rogério Sergi Gomes.

Coorientador: Prof. Dr. Carlos André Hernaski.

– Universidade Estadual de Londrina, 2017.

1. Modelos vetoriais. 2. Consistência espectral. I.PhD Pedro R. Gomes. II. PhD. Carlos Andre Hernaski III. Universidade Estadual de Londrina. IV. Faculdade de Ciencias Exatas. V. Título de Mester

CDU 02:141:005.7

LUIS FELIPE PINERES RICO

**ANÁLISE DA CONSISTÊNCIA E ESTABILIDADE DE
MODELOS VETORIAIS.**

Dissertação de mestrado apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Pedro Rogério Sergi Gomes.
Universidade Estadual de Londrina
Orientador

Prof. Dr. Carlos Andre Hernaski.
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Antonio Edson Gonçalves.
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Mario Baldiotti.
Universidade Estadual de Londrina

Londrina-PR, 9 de Agosto de 2017

AGRADECIMENTOS

- A minha esposa Katia Arrieta, minha mãe, meu pai, minha sogra, meus irmãos, a toda minha família, pelo carinho, amor, compreensão, apoio e presença nos momentos difíceis.
- Ao meu orientador, Carlos Hernaski pela dedicação nesta dissertação.
- Aos membros da banca pelas sugestões e correções.
- À CAPES pelo apoio financeiro.
- A meus amigos: Rodrigo, Paulinha, Gabriel e Carlos pelas conversas e pelo apoio.
- A todos aqueles que de alguma forma me ajudaram.

Esta Dissertação é dedicada à paz na Colômbia.

“A arte de vencer se aprende nas derrotas”- Simón Bolívar.

L. F. PINERES. **Análise da consistência e estabilidade de modelos vetoriais.** 74 p. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina–PR, 2017

RESUMO

O objetivo deste trabalho é analisar um modelo com um campo vetorial que apresenta simetria de Lorentz, e discutir questões como causalidade, estabilidade e unitariedade. Para esta análise usamos o método dos vínculos de Dirac, que mostra como se obtém a dinâmica de sistemas singulares apresentados nesta dissertação. Para estabelecer uma relação entre energia e momento para o campo vetorial, analisamos a equação do movimento por meio de uma transformada de Fourier no espaço de momento, onde provamos a consistência espectral do modelo. Por último os resultados são verificados formulando o mecanismo de Stueckelberg, que consiste em introduzir um novo campo escalar χ , de tal forma que a nova ação tem simetria de calibre, mas ainda é dinamicamente equivalente à ação original. Portanto, pode-se expressar os graus de liberdade usando um novo campo, chamado campo de Stueckelberg. O mecanismo de Stueckelberg é usado para converter os vínculos de segunda classe, presentes na Lagrangeana inicial, para vínculos de primeira classe.

Palavras-chave: Unitariedade, estabilidade, modelos vetoriais, bóson de Goldstone.

ABSTRACT

The goal of this work is to analyze a model with a vector field, and to discuss issues such as causality, stability and unitarity. To do the analysis we use the Dirac method, which teaches how to obtain the dynamics of singular systems presented in this dissertation. To establish a relation between energy and momentum for the vector field, we analyze the equation of motion by means of a Fourier transform in the momentum space, where we prove the spectral consistency of the model. Finally, the results are verified by formulating the Stueckelberg mechanism, which consists in introducing a new scalar field χ , in such a way that the new action has gauge symmetry, but is still dynamically equivalent to the original action. And therefore, being able to express degrees of freedom using a new field, called Stueckelberg's field. The Stueckelberg mechanism is used to convert the second-class constraints present in the initial Lagrangian to first-class constraints.

Keywords: Unitarity, stability, vector models, Goldstone Bosons.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	FORMALISMO DE DIRAC	21
2.1	Formalismo Lagrangeano: Sistemas regulares e singulares . . .	21
2.2	Formalismo Hamiltoniano	22
2.3	Método de Dirac	23
2.4	Vínculos de primeira classe e invariância de Gauge	28
3	MECANISMO DE HIGGS ABELIANO	31
3.0.1	Quebra espontânea da simetria para um campo escalar real .	31
3.1	Quebra espontânea da simetria para um campo escalar complexo	32
3.2	Mecanismo de Higgs Abelianos para o eletromagnetismo . . .	33
3.2.1	Setor de Higgs do modelo padrão	34
4	MODELO VETORIAL	41
4.1	Formalismo Hamiltoniano	42
4.2	Dinâmica do campo vetorial	44
4.2.1	Relação entre energia e momento para um campo vetorial A_μ	48
4.3	Graus de liberdade do campo vetorial A_μ	50
4.4	Mecanismo de Stueckelberg	54
4.5	Quebra espontânea da simetria de Lorentz	56
5	CONCLUSÃO	59
	APÊNDICES	61
	APÊNDICE A – DENSIDADE HAMILTONIANA	63
	APÊNDICE B – RELAÇÃO ENTRE ENERGIA E MOMENTO PARA UM CAMPO VETORIAL A_μ	65
	APÊNDICE C – A CONSTRUÇÃO DE OSTROGRADSKY	67
C.1	Construção Hamiltoniana	67
C.1.1	A construção de Ostrogradsky para duas derivadas.	68
C.1.2	A construção de Ostrogradsky para n derivadas	70
	REFERÊNCIAS	73

1 INTRODUÇÃO

As simetrias são muito importantes para a determinação das leis físicas que descrevem certos sistemas. Uma interessante conexão entre simetrias e constantes de movimento é explicitada no Teorema de Noether [1]. Este estabelece que a cada simetria contínua da Lagrangeana de um sistema físico corresponde uma quantidade que se conserva durante a evolução dinâmica do sistema. Podemos citar como exemplos familiares desta relação, as conservações da energia, do momento linear e angular, que estão associadas às invariâncias sob translações temporais, translações espaciais e rotações, respectivamente.

Assim, o conceito de simetria é muito interessante, e por sua vez, amplamente utilizado na maioria dos sistemas físicos. Na mecânica quântica, as simetrias estão associadas à degenerescência dos níveis de energia. Por exemplo, para descrever os estados quânticos do átomo de hidrogênio, as simetrias de translação temporal e simetria de rotação espacial são exploradas.

Na teoria da Relatividade Restrita, a validade das leis da Física se verificam quando referenciais inerciais distintos descrevem os fenômenos de maneiras semelhantes. Enquanto a conexão entre sistemas de referência é feita através das transformações de Lorentz [2]. Portanto, a simetria de Lorentz é um requisito fundamental para formular uma teoria relativística. As propriedades da mecânica quântica e o grupo de Lorentz são a base para a formulação da Teoria Quântica de Campos, que descreve as partículas como excitações no espaço-tempo, resultando na formulação do Modelo Padrão da Física de partículas (MP), que descreve as partículas elementares e suas interações, com exceção da interação gravitacional, sendo visto como um modelo consistente invariante sob o grupo de Poincaré e nos grupos de simetrias internas $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ [3]. Por outro lado, a gravitação possui um grupo de simetria espaço-temporal mais geral que é difeomorfismo. No entanto, a simetria de Poincaré ainda está presente como um grupo de simetria do espaço tangente à variedade do espaço-tempo.

Muitos dos candidatos a teorias fundamentais, como a teoria das cordas, as teorias de campos não comutativos, topologia não-trivial do espaço-tempo, *loop quantum gravity* e cenários de branas possuem espaço para descrever uma fase onde as simetrias CPT e simetria de Lorentz são quebradas [4]. Nestas teorias a simetria de Lorentz é quebrada na escala de Planck.

Os efeitos fenomenológicos podem ser sistematicamente estudados usando o formalismo do Modelo padrão Estendido [5]. Neste contexto, os Lagrangeanos usuais do MP e da teoria geral da relatividade de Einstein são suplementados por operadores que violam a simetrias de Lorentz. No setor não-gravitacional, esses operadores são construídos considerando

todos os operadores do MP contraídos com tensores de fundo de forma invariante sob transformações de coordenadas. O setor gravitacional, por sua vez, segue a mesma ideia, mas considerando operadores e tensores sob o grupo de difeomorfismo [5].

Uma maneira elegante de originar esses tensores de fundo é por meio da quebra espontânea da simetria de Lorentz. Este mecanismo é uma generalização do que ocorre no Modelo Padrão com o campo escalar de Higgs que adquire valor no vácuo diferente de zero. A possibilidade de violação espontânea da simetria de Lorentz foi sugerida inicialmente em 1989 nos trabalhos de Kostelecký e Samuel no contexto da teoria de cordas [6]. Neste caso, ao invés de um campo escalar, tensores não triviais podem assumir valores no vácuo diferentes de zero, que em baixas energias são vistos como tensores de fundo dando origem a uma anisotropia do espaço tempo.

Os exemplos mais simples de teorias de campo com quebra espontânea da simetria de Lorentz são os modelos chamados de *Bumblebee*, definidos com diferentes formas do potencial e termos cinéticos para o campo vetorial, e com diferentes acoplamentos com a matéria e com a gravidade [7],[8].

Os termos do MP são baseados em três princípios fundamentais: a causalidade, unitariedade e estabilidade assegurando a consistência do modelo. No espaço de Fock a violação destes princípios pode ser vista como a presença de partículas chamadas ghosts e táquions. Os ghosts podem ser interpretados como um sinal errado no termo cinético da Lagrangeana, e os táquions como um sinal errado no termo potencial da Lagrangeana. Em outras palavras, um táquion seria uma partícula de massa negativa, enquanto um ghost apresenta energia cinética negativa. Além disso, a definição do propagador de ghost com a prescrição usual de Feynman $i\epsilon$ resulta numa teoria não-unitária com estados de norma negativa. Se o propagador for definido com a prescrição oposta, a unitariedade pode ser preservada, porém isso induz a uma instabilidade na propagação de estados de energia negativa [9]. Assim, na Teoria de Campos, modelos que apresentam termos como ghosts ou táquions são fisicamente inaceitáveis, pois indicam uma instabilidade no modelo.

O principal objetivo desta pesquisa é analisar um modelo vetorial com simetria de Lorentz à partir da formulação Hamiltoniana, provando que se o modelo vetorial apresenta ghosts ou táquions haverá problemas com a teoria formulada. Sendo atestado que a teoria não tenha esses problemas podemos calcular os graus de liberdade dinâmicos e a relação de dispersão entre energia e momento e, assim, analisar a estabilidade, causalidade e unitariedade. A ideia é adquirir uma familiaridade com os conceitos e as análises utilizadas.

Em trabalhos futuros espera-se empregar essa análise para um modelo com quebra espontânea da simetria Lorentz, onde pretendemos estudar as propriedades da Eletrodinâmica onde o fóton é entendido como um bóson de Goldstone. Aplicaremos o método de realizações não-lineares para o grupo de Lorentz para caracterizar uma possível fase da Física de partículas. Serão analisados a estabilidade, causalidade e unitariedade de um modelo

vetorial com quebra espontânea da simetria de Lorentz.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: No capítulo 1 apresentamos os sistemas vinculados e seu tratamento clássico. No capítulo 2, o mecanismo de Higgs abeliano [3],[12], é estudado devido a sua relação com a quebra espontânea da simetria do grupo $U(1)$ e sua estreita relação com o mecanismo de Stueckelberg [11],[13]. E, finalmente, se estuda (*the boson goldstone equivalence*) [15], a importância deste último está em relacionar processos envolvendo bósons de calibre com bósons Goldstone. No capítulo 3, apresentamos um modelo vetorial no espaço de Minkowski, considerando simetria de Lorentz, e analisamos a estabilidade, causalidade e unitariedade deste modelo a partir da formulação Hamiltoniana. A ideia deste capítulo é analisar se o modelo vetorial apresenta ghosts ou táquions. Assim, desta análise obtemos três sistemas físicos interessantes. O primeiro correspondente à Lagrangeana de Maxwell, que descreve um campo vetorial não massivo com dois graus de liberdade. Enquanto o segundo é a Lagrangeana de Proca, que descreve um campo vetorial massivo com três graus de liberdade e, finalmente, a “Lagrangeana Escalar”, assim chamada porque propaga no máximo um grau de liberdade [10]. Apresentamos a análise dos graus de liberdade de cada modelo que foram calculados a partir da utilização do formalismo de vínculos de Dirac [8], verificando os cálculos quando o campo vetorial foi descomposto para cada sistema. E, por último, foi encontrada a relação de dispersão entre energia e momento. No capítulo 4 é analisado o mecanismo de Stueckelberg, verificando os graus de liberdades dinâmicos de cada modelo calculado no capítulo 2, o interessante sobre este mecanismo está na restauração da simetria de calibre, os vínculos e a relação com o teorema de equivalência discutido no capítulo 2.

Ao longo de todo o trabalho utilizamos as unidades naturais ($c = \hbar = 1$) e as propriedades do espaço de Minkowski, com assinatura da métrica $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$.

2 FORMALISMO DE DIRAC

Neste capítulo se estuda o tratamento de sistemas vinculados ou singulares. Os sistemas vinculados se caracterizam por apresentarem ambiguidades nas soluções das equações de movimento. Exemplos de teorias singulares têm-se no eletromagnetismo, a gravitação e as teorias de cordas. Nos sistemas singulares, impossibilita-se a passagem do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano de forma unívoca como analisamos neste capítulo. Para tratá-los no formalismo Hamiltoniano, usa-se o método dos vínculos de Dirac [14], [16],[17], que mostra como obter a dinâmica de tais sistemas, sem ambiguidades.

2.1 Formalismo Lagrangeano: Sistemas regulares e singulares

Considera-se um campo escalar $\varphi(x)$, definido num espaço-tempo $(D + 1)$. A equação de movimento do campo $\varphi(x)$ são derivadas a partir da ação

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi)dV, \quad (2.1)$$

onde \mathcal{L} é a densidade Lagrangeana do sistema, e $dV = d^{D+1}x$ é um elemento de volume no espaço-tempo $(D + 1)$ dimensional. A equação de movimento é obtida quando seleciona-se, entre todas as trajetórias possíveis de $\varphi(x)$, aquelas que obedecem

$$\delta S = 0. \quad (2.2)$$

Considera-se que a densidade Lagrangeana dependa no máximo de derivadas primeiras nos campos $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi, x^\mu)$. Portanto, a equação de movimento é:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0. \quad (2.3)$$

Para classificar as soluções da equação de Euler-Lagrange podemos escrever (2.3) explicitando as acelerações como

$$\partial_\mu = (\partial_\mu\varphi) \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) + (\partial_\mu\partial_\nu\varphi) \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu\varphi)} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right), \quad (2.4)$$

substituindo (2.4), a equação (2.3) torna-se [16]

$$W^{\mu\nu} [\partial_\mu\partial_\nu\varphi] = V(\varphi, \partial_\alpha\varphi, x^\alpha), \quad (2.5)$$

onde o termo $V(\varphi, \partial_\alpha \varphi, x^\alpha)$ é definido pela equação

$$V(\varphi, \partial_\alpha \varphi, x^\alpha) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi) \partial \varphi} (\partial_\mu \varphi) - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi) \partial x^\mu}, \quad (2.6)$$

enquanto o termo $W^{\mu\nu}$ é chamado de matriz Hessiana

$$W^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi) \partial_\nu \varphi}. \quad (2.7)$$

A equação (2.5) pode ser resolvida para as acelerações se a matriz $W^{\mu\nu}$ é invertível. Dentro do formalismo Lagrangeano a matriz Hessiana divide a densidade de Lagrangeana em duas categorias:

A primeira corresponde aos sistemas regulares, para o caso de $\text{Det} |W^{\mu\nu}| \neq 0$. As equações de movimento podem ser resolvidas para as acelerações e não há ambiguidade nas soluções. E os sistemas singulares quando $\text{Det} |W^{\mu\nu}| = 0$ não existem soluções únicas para as equações de movimento.

2.2 Formalismo Hamiltoniano

Quando se quer passar do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano, define-se o momento canonicamente conjugado π associado ao campo φ como:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)}. \quad (2.8)$$

Para relacionar os formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano é necessário o π para fazer uma transformação de Legendre

$$H_c(\varphi, \pi, x^\mu) = \int \pi \partial_0 \varphi d^D x - L(\varphi, \partial_0 \varphi, x^\mu). \quad (2.9)$$

No caso, de sistemas regulares o formalismo pode-se aplicar, e esta Hamiltoniana é o gerador da evolução temporal chamada Hamiltoniana canônica H_c .

Enquanto, que em sistemas singulares temos que a matriz Hessiana pode ser expressa em termos do momento canônico como

$$\text{Det} |W^{00}| = \text{Det} \left| \frac{\partial \pi}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \right| = 0. \quad (2.10)$$

Isto implica que as velocidades não podem ser obtidas de forma única a partir das coordenadas e momentos, portanto existem vínculos entre os momentos. Além disso, não se pode utilizar os formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano usuais. Na próxima seção será apresentado, dentro do formalismo Hamiltoniano, o tratamento deste problema.

2.3 Método de Dirac

A transformação de Legendre é a ferramenta para passar do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano como foi analisado na seção anterior para sistemas regulares. Para isto, os momentos canônicos devem incluir velocidades em suas expressões para que a passagem do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano se dê de forma unívoca. Esta seção será dedicada ao tratamento do sistemas singulares. A descrição Hamiltoniana para um sistema físico vinculado é conseguida através do método de Dirac. No caso deste sistema aparecem expressões que dependem exclusivamente de variáveis do espaço de fase, da forma:

$$\Omega^k = \pi^k - f(\varphi_a, \partial_i \varphi_a, \pi^i) = 0, \quad (2.11)$$

sendo $k = 1, \dots, r$ os números de momentos que não dependem das velocidades, porque se assim fora, poderíamos isolar pelo menos um momento em termos das velocidades [16]. Enquanto que Ω^k é denominado vínculo primário do sistema e como consequência, apenas $(n - r)$ velocidades podem ser expressas em termos dos momentos canônicos. Os vínculos descrito em (2.11) definem uma subvariedade do espaço de fase chamada superfície de vínculos, sobre a qual está restrito o movimento.

Neste caso, de sistemas singulares, o gerador da evolução temporal do sistema é dada pela Hamiltoniana total H_T :

$$H_T(\varphi_a, \pi^a, x^\mu) = H_c + \int \mu_k \Omega^k, \quad (2.12)$$

onde H_c inclui as relações (2.9) (velocidades que podem ser expressas em termos dos momentos canônicos) e μ_k são multiplicadores de Lagrange que estão relacionados às velocidades indeterminadas.

As equações de movimento Hamiltonianas podem ser obtidas a partir do princípio de Hamilton.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\int (\pi^l \partial_0 \varphi_l - \mu_k \Omega^k) d^D x - H_c \right] dt. \quad (2.13)$$

Usando as equações de Euler-Lagrange (2.3), temos

$$\partial_0 \varphi^l(x) = \frac{\partial H_c}{\partial \pi_l} + \mu^k \frac{\partial \Omega_k}{\partial \pi_l} = \{ \varphi^l(x), H_T(y) \}, \quad (2.14)$$

$$\partial_0 \pi_l(x) = - \frac{\partial H_c}{\partial \varphi^l} - \mu^k \frac{\partial \Omega_k}{\partial \varphi^l} = \{ \pi_l(x), H_T(y) \}. \quad (2.15)$$

Para trabalhar com sistemas singulares usando parênteses de Poisson é necessário calculá-los primeiro e depois usar as relações de vínculo. Dirac incorporou este procedimento

definindo o que se chama de igualdade fraca (\approx), que é usado em relações de igualdade somente válidas na superfície de vínculos [14]. A igualdade fraca permite escrever as equações de movimento em forma de parênteses de Poisson, sem ambiguidades:

$$\partial_0 \varphi^l(x) \approx \{ \varphi^l(x), H_T(y) \}, \quad (2.16)$$

$$\partial_0 \pi_l(x) \approx \{ \pi_l(x), H_T(y) \}. \quad (2.17)$$

Escrevem-se também os vínculos como igualdades fracas da forma:

$$\Omega_k \approx 0. \quad (2.18)$$

As equações (2.18) devem-se preservar ao longo do tempo, quer dizer deve impor-se condições de consistência

$$\partial_0 \Omega_k \approx \{ \Omega_k, H_T(y) \} \approx 0. \quad (2.19)$$

Desta imposição podem surgir três tipos de resultado:

1. A expressão se anula identicamente.
2. Aparecem expressões que são funções das variáveis do espaço de fase.
3. Aparecem expressões que impõem restrições sobre os multiplicadores de Lagrange μ_k .

No segundo caso, o que se obtém é uma nova geração de vínculos, os quais são chamados vínculos secundários. Esta denominação vem do fato das equações de movimento terem sido usadas para obtê-los. Os vínculos secundários (θ_m) devem também satisfazer condições de consistência:

$$\partial_0 \theta_m \approx \{ \theta_m, H_T(y) \} \approx 0. \quad (2.20)$$

Deste processo pode-se obter os vínculos da teoria, deve repetir-se até que não apareça mais nenhuma geração de vínculos na teoria.

De acordo com o papel que desempenham os vínculos dentro da teoria, temos outro critério importante de classificação. Tal critério está baseado na definição de função de primeira classe.

Uma função $\lambda(x)$ é de primeira classe se satisfaz a seguinte condição

$$\{\lambda(x), \nu_m(y)\} \approx 0, \quad (2.21)$$

onde ν_m são todos os vínculos que aparecem na teoria. No caso contrário, a função $\lambda(x)$ é chamada de segunda classe. Assim, obtemos os vínculos de primeira e segunda classe da teoria, que têm papéis distintos: os vínculos de primeira classe estão relacionados com as simetrias de calibre do modelo, enquanto os de segunda classe são graus de liberdade espúrios (não são observáveis) da teoria.

A importância dos vínculos num modelo encontra-se na descrição do número de graus de liberdade dinâmicos. Os números de graus de liberdade dinâmicos n em sistemas singulares são calculados a partir dos vínculos da teoria. Dado um sistema descrito por N_i graus de liberdade e com n_1 , e n_2 vínculos de primeira e segunda classe, respectivamente, o número de graus de liberdade dinâmicos é dado por $n = N_i - n_1 - \frac{n_2}{2}$. Isto acontece porque um grau de liberdade é descrito por um par (q_i, p_i) do espaço de fase. No caso de vínculos de primeira classe só precisa-se fixar a coordenada q_i do par (q_i, p_i) , porque não tem dinâmica ($p_i = 0$), então devemos impor n_1 vínculos. Enquanto, os vínculos de segunda classe, temos dependência entre os graus de liberdade (q_i, p_i) e (q_j, p_j) , precisa-se ter dois vínculos para eliminar cada grau de liberdade, portanto temos que impor n_2 (pares) vínculos.

Como exemplo de um sistema singular temos o eletromagnetismo de Maxwell, sendo descrito pela Lagrangeana de Maxwell

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

onde o tensor eletromagnético é definido como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Para provar que o sistema é vinculado, calcula-se a matriz Hessiana, onde obtemos

$$W^{\nu\lambda} = \eta^{\mu\nu}\eta^{\mu\lambda} - \eta^{\nu\lambda}\eta^{\mu\mu}. \quad (2.23)$$

Assim, provamos que o sistema é vinculado. Os vínculos do sistema são calculados a partir dos momentos canônicos

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 A_\mu} = -F^{0\mu}. \quad (2.24)$$

Portanto, os vínculos que apresenta o modelo são:

$$\Pi^0 \approx 0. \quad (2.25)$$

$$\partial_i \Pi^i \approx 0. \quad (2.26)$$

Quando $\mu = 0$ na equação (2.24), temos um vínculo primário que é dado pela equação (2.25). Enquanto o vínculo secundário é descrito por (2.26), que é originado pela condição de consistência do vínculo primário. Os vínculos da teoria correspondem a vínculos de primeira classe

$$\{\Pi^0, \partial_i \Pi^i\} \approx 0. \quad (2.27)$$

Portanto, apenas dois dos quatros graus de liberdade realmente se propagam no modelo. A dinâmica dos campos é governada pela Hamiltoniana estendida.

Usando a fixação de calibre, processo que transforma os vínculos de primeira classe em funções de segunda classe, pode-se obter os mesmos graus de liberdade. A fixação de calibre consiste em introduzir no modelo, para cada vínculo de primeira classe, uma nova função do espaço de fase chamada de vínculo externo (ou calibre), de acordo com o procedimento de Dirac.

Vamos escolher, no caso de Maxwell, os seguintes calibres, o primeiro corresponde à calibre de Coulomb

$$\partial_i A^i = 0, \quad (2.28)$$

e outro corresponde a:

$$A^0 = 0. \quad (2.29)$$

Assim, associa-se para cada vínculo de primeira classe um calibre, no caso do eletromagnetismo de Maxwell temos:

- $\Gamma_1 = \Pi^0 \approx 0.$
- $\Gamma_2 = \partial_i \Pi^i \approx 0.$
- $\Gamma_3 = A^0 \approx 0.$
- $\Gamma_4 = \partial_i A^i \approx 0.$

Que tornam-se vínculos de segunda classe no sistema.

Um mecanismo com a finalidade de eliminar os graus de liberdade espúrios presentes no modelo foi proposto por Dirac, cuja estrutura fundamental é chamada de parênteses de Dirac [14]:

$$\{A(x), B(y)\}_D = \{A(x), B(y)\} - \int \{A(x), \beta_i(z)\} \Delta_{ij}^{-1} \{\beta_j(w), B(y)\} dz dw, \quad (2.30)$$

onde $A(x)$, $B(y)$ são quaisquer funções do espaço de fase, e Δ_{ij}^{-1} é a matriz inversa dos vínculos de segunda classe, conhecida como matriz de Dirac.

A matriz de Dirac é definida como

$$\Delta_{ij} = \{\beta_i(x), \beta_j(y)\}, \quad (2.31)$$

sendo β_i os vínculos de segunda classe.

O cálculo da matriz de Dirac é definida à partir da Hamiltoniana total H_t do sistema singular no espaço de fase estendido da seguinte maneira:

$$H_t = H_c + u^a \beta_a, \quad (2.32)$$

onde os multiplicadores de Lagrange são dados por u^a , os vínculos β_a e H_c é definida como a Hamiltoniana que inclui as relações das velocidades que podem ser expressas em termos dos momentos canônicos. A evolução dinâmica dos vínculos β_b é dado por

$$\dot{\beta}_b \approx \{\beta_b, H_t\} \approx 0, \quad (2.33)$$

substituindo (2.32) na equação (2.33), temos

$$\dot{\beta}_b \approx \{\beta_b, H_c\} + u^a \{\beta_b, \beta_a\} + \beta_a \{\beta_b, u^a\}, \quad (2.34)$$

na superfície de vínculos ($\beta_a \approx 0$) temos que os termos que contribuem são:

$$\dot{\beta}_b \approx \{\beta_b, H_c\} + u^a \{\beta_b, \beta_a\} \approx 0, \quad (2.35)$$

definindo a matriz $\Delta_{ab} = \{\beta_a(x), \beta_b(y)\}$, se o $\text{Det}\Delta_{ab} \neq 0$, temos que os multiplicadores de Lagrange tornam-se

$$u^a \approx -\Delta_{ab}^{-1} \{\beta_b, H_c\}, \quad (2.36)$$

onde obtemos que a evolução dinâmica dos vínculos β_b é dado por

$$\dot{\beta}_b \approx \{\beta_b, H_c\} - \{\beta_b, \beta_a\} \Delta_{ab}^{-1} \{\beta_b, H_c\}, \quad (2.37)$$

para qualquer variável do espaço de fase g a evolução dinâmica é:

$$\dot{g} \approx \{g, H_c\} - \{g, \beta_a\} \Delta_{ab}^{-1} \{\beta_b, H_c\}. \quad (2.38)$$

O cálculo da matriz inversa de Dirac é obtida pela expressão:

$$\int d^3\tau \Delta(\zeta, \tau)_{ij} \Delta^{-1}(\tau, \kappa)^{jk} = \delta_i^k \delta^3(\zeta, \kappa). \quad (2.39)$$

Entre algumas das propriedades da matriz de Dirac temos:

$$\Delta^{ab} \Delta_{bc}^{-1} = \delta_c^a. \quad (2.40)$$

Os parênteses de Dirac permitem escrever as equações de movimento e as relações de vínculo novamente como igualdades fortes. Eles apresentam as mesmas propriedades dos parênteses de Poisson.

2.4 Vínculos de primeira classe e invariância de Gauge

Os modelos que apresentam densidade Lagrangeana singular, de modo geral, caracterizam uma simetria de calibre, como veremos a seguir. Investigaremos a relação entre vínculos de primeira classe e invariância de calibre [16].

Portanto, suponha uma variável dinâmica da teoria a , com valor inicial a_0 . O valor da variável dinâmica a será calculado num instante infinitesimal δt . Fazendo uma transformação de Taylor até primeira ordem, tem-se:

$$\begin{aligned} a(\delta t) &= a_0 + (\partial_0 a) \delta t \\ &= a_0 + \delta t \left(\left\{ a(x), \int \mathcal{H}_t(y) d^D y \right\} \right) \\ a(\delta t) &= a_0 + \delta t \left(\left\{ a(x), \int \mathcal{H}_t(y) d^D y \right\} + \int \mu_\alpha \{ a(x), \Omega^\alpha(y) \} d^D y \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Sendo Ω^α os vínculos primários de primeira classe ¹ (os vínculos de segunda classe já foram eliminados da teoria através dos parênteses de Dirac, portanto os únicos multiplicadores realmente arbitrários estão relacionados aos vínculos de primeira classe).

Enquanto, pegamos outros valores μ'_α para estes coeficientes, o que fornecerá um $a(\delta t)$ diferente, da forma.

$$a'(\delta t) = a_0 + \delta t \left(\left\{ a(x); \int \mathcal{H}_c(y) d^D y \right\} + \int \mu'_\alpha \{ a(x); \Omega^\alpha(y) \} d^D y \right). \quad (2.42)$$

¹ Conjetura de Dirac: De acordo com a Hamiltoniana total (2.32), apenas os vínculos primários de primeira classe são geradores de transformações de calibre, porque cada vínculo primário tem um multiplicador de Lagrange associado. Dirac postulou que todos os vínculos de primeira classe são geradores de transformações de calibre. Este postulado é conhecido como a conjectura de Dirac.

A diferença entre (2.41) e (2.42) será:

$$\Delta a = \delta t \int (\mu_\alpha - \mu'_\alpha) \{a(x); \Omega^\alpha(y)\} d^D y. \quad (2.43)$$

Chamando $\delta t (\mu_\alpha - \mu'_\alpha) = \epsilon_\alpha$, tem-se

$$\Delta a(\delta t) = \int \epsilon_\alpha(y) \{a(x); \Omega^\alpha(y)\} d^D y, \quad (2.44)$$

sendo ϵ_α um infinitesimal. A expressão anterior, indica que pode-se fazer uma transformação infinitesimal numa variável dinâmica a utilizando como geradores os vínculos primários de primeira classe. Em particular, para um observável, esta transformação não afetará o estado físico. Tal transformação é chamada de transformação de calibre.

Na verdade, os vínculos secundários de primeira classe também são os geradores desta transformação [14]. Se chamamos G_n a todos os vínculos de primeira classe, a transformação infinitesimal de calibre mais geral pode ser expressa como [14]

$$\delta_\epsilon F = \epsilon^a \{F, G_a\}, \quad (2.45)$$

com os vínculos G_a são de primeira classe obtemos que

$$\{G_a, G_b\} = C_{ab}^c G_c \approx 0. \quad (2.46)$$

No capítulo 3, implementa-se o formalismo de Dirac para descrever a dinâmica do modelo vetoriais.

3 MECANISMO DE HIGGS ABELIANO

Neste capítulo apresentamos o mecanismo de Higgs [3], [12], o teorema de Goldstone [3], e por último o princípio de equivalência [15]. Portanto, primeiro examinaremos a noção da quebra espontânea da simetria para uma simetria discreta.

3.0.1 Quebra espontânea da simetria para um campo escalar real

Se o Lagrangeano é invariante sob um grupo de transformações, mas o estado fundamental do sistema não é invariante sob este grupo, então temos uma quebra espontânea da simetria.

Consideramos um modelo chamado ϕ^4 , que descreve a dinâmica de um campo real escalar com auto-interação

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi). \quad (3.1)$$

A parte cinética fica no primeiro termo, e o potencial $V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$, onde λ é uma constante do acoplamento, e μ corresponde a uma constante proporcional à massa. Por enquanto sabemos que o sistema possui simetria ($\phi \rightarrow -\phi$).

As equações de Euler Lagrange obtidas da Lagrangeana (3.1) são dadas por

$$(\square + \mu^2)\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 = 0. \quad (3.2)$$

A densidade Hamiltoniana corresponde a

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \{ \Pi^2 + (\nabla\phi)^2 \} + V(\phi), \quad (3.3)$$

o sistema é estável, devido que \mathcal{H} é positiva definida.

No tratamento clássico, o estado fundamental é o estado de energia mínima que corresponde ao estado de vácuo no formalismo da mecânica quântica. A importância deste estudo é analisar se há uma quebra de simetria, para isso calculamos o valor mínimo do potencial

$$\phi_0 = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (3.4)$$

Onde obtemos três pontos mínimos, para os seguintes casos, como ($\mu^2 > 0$)

$$\phi_0 = 0, \quad (3.5)$$

e para ($\mu^2 < 0$)

$$\phi_0 = \pm \sqrt{-\frac{6\mu^2}{\lambda}}. \quad (3.6)$$

O estado fundamental está degenerado, cada estado possível transforma-se no outro pela simetria do sistema. Em virtude, dessa simetria é irrelevante o valor de ϕ_0 , para estudar em torno do estado fundamental escolhido, fazemos a seguinte mudança para o campo escalar

$$\phi = \phi - v, \quad (3.7)$$

com $v = \sqrt{-\frac{6\mu^2}{\lambda}}$, a Lagrangeana (3.1) torna-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - \frac{\lambda v}{3!} \phi^3 + c. \quad (3.8)$$

Onde este modelo descreve a interação de terceira e quarta ordem de um campo escalar de massa $m = \sqrt{2}\mu$. Neste caso, o teorema de Goldstone não é válido, porque a simetria é de tipo discreta.

3.1 Quebra espontânea da simetria para um campo escalar complexo

Um bóson carregado de spin 0 é representado pela Lagrangeana de um campo escalar complexo Φ

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi^*)(\partial^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2, \quad (3.9)$$

onde μ é a massa do bóson e λ é um parâmetro positivo. O primeiro termo corresponde a energia cinética, enquanto o segundo termo é energia potencial da forma:

$$V(\Phi) = \mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4, \quad (3.10)$$

Para $\mu^2 < 0$, o valor de mínimo de energia é dado por:

$$\frac{\partial V}{\partial |\Phi|} = 0 \quad (3.11)$$

$$v^2 = |\Phi|^2, \quad (3.12)$$

com $v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}}$. O campo Φ pode ser expresso mediante dois novos campos reais $\tau(x)$ e $\rho(x)$ como:

$$\Phi = \frac{(\tau(x) + v) + i\rho(x)}{\sqrt{2}}. \quad (3.13)$$

Usando (3.13), a Lagrangeana (3.9) torna-se

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \tau \partial^\mu \tau + \mu^2 \tau^2 \right] + \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \mathcal{L}_{int}, \quad (3.14)$$

onde \mathcal{L}_{int} contém termos de interação no máximo de ordem quarta e auto-interação dos campos ρ e τ

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4} \tau^4 - \frac{\lambda}{4} \rho^4 - \lambda v (\tau^3 + \tau \rho^2) - \frac{\lambda^2}{2} \tau^2 \rho^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda}. \quad (3.15)$$

O fator de acoplamento $\frac{\lambda}{4}$ indica a auto-interação entre quatro bósons τ e correspondem ao fator de vértice em um diagrama de Feynman, se indica quão forte é a interação.

Assim, podemos concluir da equação (3.15) que o campo τ é massivo ($m_\tau^2 = 2|\mu^2|$), enquanto que não temos um termo de massa para o campo ρ . Esta partícula corresponde a um bóson chamado, *bóson de Goldstone*. Sempre que uma simetria global contínua é quebrada espontaneamente, o espectro contém uma partícula não massiva, de spin-zero que corresponde a um *bóson de Goldstone*.

3.2 Mecanismo de Higgs Abelian para o eletromagnetismo

Nesta seção consideramos um campo escalar complexo acoplado a um campo eletromagnético. Descreve-se, primeiro a Lagrangeana de Maxwell, que é associada a um campo vetorial de spin 1,

$$\mathcal{L}_{maxwell} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

O tensor eletromagnético é dado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Enquanto, que para uma partícula de spin 0, temos um campo escalar complexo

$$\mathcal{L}_{escalar} = (\partial_\mu \Phi^*)(\partial^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^* \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^* \Phi)^2. \quad (3.17)$$

Para descrever a interação entre os dois campos, usamos uma derivada covariante da forma $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$. Onde o termo de massa para o campo vetorial é originado

pela derivada covariante, quando o campo escalar adquire um valor de mínima energia diferente de zero.

A Lagrangeana total é descrita por:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi^*)(D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^* \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^* \Phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Onde obtemos um Lagrangeano invariante sob a transformação local $U(1)$

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\xi(x)} \phi(x). \quad (3.19)$$

Assim, temos que, se $\phi(x) \rightarrow e^{i\chi(x)} \varphi(x)$ (3.18) torna-se [12]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varphi^2 (qA_\mu - \partial_\mu \chi)^2 - \lambda (\varphi \varphi^* - v^2)^2. \quad (3.20)$$

Portanto o campo de Higgs e φ , agora tomando $\lambda \gg 1$ é $\varphi = v$, (3.20) reduz-se:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{v^2}{2} (qA_\mu - \partial_\mu \chi)^2, \quad (3.21)$$

onde a fase χ do campo complexo escalar é associado à mecanismo de Stuckelberg, que restaura a simetria gauge do $U(1)$ no caso massivo da forma

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \xi(x), \quad (3.22)$$

$$\chi \rightarrow \chi + q\xi(x). \quad (3.23)$$

Além disso, os graus de liberdades correspondem dois para o campo vetorial e um para o campo escalar. Onde χ é um bóson de Goldstone.

O teorema de Goldstone estabelece que dado um grupo contínuo de simetria G de uma teoria, e H a simetria do vácuo ($H \subseteq G$), então existem $Dim(\frac{G}{H}) = Dim(G) - Dim(H)$ excitações sem massa chamadas bósons de Goldstone.

Por exemplo, seja G o grupo de simetria $SO(n)$ e H $SO(n-1)$, a $Dim(G)$ corresponde os números de geradores, onde temos $\frac{n(n-1)}{2}$ para $SO(n)$ e para o grupo H , temos $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ geradores ($Dim(H)$). Assim, temos $n-1$ bósons de Goldstone.

3.2.1 Setor de Higgs do modelo padrão

O bóson de Higgs é uma partícula proposto em 1964 por Higgs, Brout, Englert, e utilizada mais tarde por Steven Weinberg (1967) e Abdus Salam (1968) para explicar porque outras partículas, por exemplo, bósons W e Z , têm massa. Na teoria eletrofraca, formulada em

1962 por Sheldon Glashow, havia um paradoxo sobre as partículas W e Z . Em primeiro lugar, as interações fracas requerem que tais partículas tivessem massas altas. Além disso, a simetria de calibre impor que suas massas forem nulos. Esta contradição desaparece se as massas dos bósons forem aparente, isto é, se as suas massas forem adquiridas através de um mecanismo externo, chamado mecanismo de Higgs.

Considere a densidade Lagrangeana que descreve a física do setor de Higgs

$$\mathcal{L}_{Higgs} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (3.24)$$

onde o potencial de Higgs está dado por:

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (3.25)$$

com $\mu^2 < 0$ origina uma quebra espontânea da simetria, além disso para que o mínimo potencial seja estável deve se cumprir que $\lambda > 0$. Enquanto ao valor de mínima energia:

$$\langle \Phi \rangle_0 = \frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0. \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi \rangle_0 &= \frac{\partial}{\partial \Phi} (\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2) = 0 \\ \langle \Phi \rangle_0 &= \frac{v}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde $v = (\sqrt{2} G_F)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = 246$ GeV, é denominado valor esperado em vácuo, e está relacionada com a constante de Fermi G_F [3].

Para executar uma quebra de simetria usamos um dobrete escalar que pertence ao setor de Higgs, que consiste em um único campo escalar complexo $\Phi(x)$, dobrete abaixo $SU(2)_L$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi^\dagger \\ \Phi^0 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Parametrizando o campo escalar temos:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H(x)+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\Phi^\dagger(x) = \left(0 \quad \frac{H(x)+v}{\sqrt{2}} \right). \quad (3.30)$$

Define-se a derivada covariante, D_μ da forma

$$U(1)_Y \rightarrow B_\mu,$$

$$SU(2)_L \rightarrow W_\mu^i, i = 1, 2, 3, \quad (3.31)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{1}{2} \sigma_i W_\mu^i + ig_1 \frac{1}{2} Y B_\mu, \quad (3.32)$$

onde $Y = 1$ é o número quântico da hipercarga, σ_i as matrizes de Pauli e o acoplamento dos grupos $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$ são g e g_1 respectivamente.

Escrevendo D_μ da forma matricial temos

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} + \frac{ig_1}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} \\ &= \partial_\mu + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{g_1}{g} B_\mu & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 + \frac{g_1}{g} B_\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Onde o Lagrangeano de Higgs torna-se:

$$\mathcal{L}_{Higgs} = D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (3.34)$$

onde o termo cinético

$$D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{g^2}{8} \left[|W_\mu^1 + iW_\mu^2|^2 + \left| -W_\mu^3 + \frac{g_1}{g} B_\mu \right|^2 \right] (H + v)^2, \quad (3.35)$$

e o potencial de Higgs

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{\mu^2}{2} (H + v)^2 + \frac{\lambda}{4} (H + v)^4. \quad (3.36)$$

Analisando o potencial de Higgs,

$$\begin{aligned} V(\Phi^\dagger \Phi) &= \frac{\mu^2}{2} (H^2 + 2Hv + v^2) + \frac{\lambda}{4} (H^4 + 4H^3v + 6H^2v^2 + 4Hv^3 + v^4) \\ &= \frac{1}{2} (\mu^2 + 3\lambda v^2) H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4 + \left(\frac{\mu^2 v^2}{2} + \frac{\lambda v^4}{4} \right) + (\mu^2 v + \lambda v^3) H, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde os termos indicam com auto-interação o bosón de Higgs ($\frac{\lambda}{4} H^4$), auto acoplamento do bosón de Higgs a quarto ordem ; $(\lambda v H^3)$, autoacoplamento do bosón de Higgs a terceira ordem ; $(\frac{1}{2} (\mu^2 + 3\lambda v^2) H^2)$, fator de massa.

Por outro lado podemos escrever \mathcal{L}_{Higgs} da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_{Higgs} = \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H + \frac{g^2}{8}\left[W_\mu^+W_\mu^- + \left|-W_\mu^3 + \frac{g_1}{g}B_\mu\right|^2\right](H+v)^2, \quad (3.38)$$

onde

$$\begin{aligned} W_\mu^+ &= W_\mu^1 + iW_\mu^2, \\ W_\mu^- &= W_\mu^1 - iW_\mu^2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Pode-se comparar uma densidade Lagrangeana escalar real que descreve as partículas de spín 0.

$$\mathcal{L}_{escalar} = \partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}M_h^2\Phi^2. \quad (3.40)$$

Tendo em conta que

$$\mathcal{L}_o = \partial_\mu H\partial^\mu H - \frac{1}{2}(\mu^2 + 3\lambda v^2)H^2, \quad (3.41)$$

então

$$M_H = -(\mu^2 + 3\lambda v^2)H^2,$$

e substituindo o valor esperado temos:

$$M_H = \sqrt{-2\mu^2}. \quad (3.42)$$

Sendo este termo associado com a massa do Higgs.

Por outro lado a massa dos bósons W^\pm e os fatores de acoplamento com o campo de Higgs são dados a partir da seguinte Lagrangeana de interação.

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g^2}{8}W_\mu^+W_\mu^-H^2 + \frac{g^2v}{4}W_\mu^+W_\mu^-H + \frac{g^2v^2}{8}W_\mu^+W_\mu^-. \quad (3.43)$$

Definindo a massa do bóson W , $M_{W^\pm} = \frac{gv}{4}$, o acoplamento a segundo ordem com o bosón de Higgs é dado por $\frac{g^2}{8}$, e $\frac{g^2v}{4}$ a primeira ordem.

A massa do bosón Z^0 e os fatores de acoplamento com o campo de Higgs são dados por

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{gg_1}{8}B_\mu^2(H+v)^2 - \frac{g^2}{8}W_\mu^3, \quad (3.44)$$

definindo W_μ^3 , B_μ [3] como:

$$B_\mu = \cos\theta_w A_\mu - \sin\theta_w Z_\mu,$$

$$W_\mu^3 = \text{sen}\theta_w A_\mu + \text{cos}\theta_w Z_\mu. \quad (3.45)$$

De forma matricial pode-se representar a equação anterior como

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cos}\theta_w & \text{sen}\theta_w \\ -\text{sen}\theta_w & \text{cos}\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

onde θ_w é denominado ângulo de Weinberg e está relacionado com as constantes de acoplamento g, g_1 da seguinte maneira:

$$\text{sen}\theta_w = \frac{g_1}{\sqrt{g^2 + g_1^2}}, \quad \text{cos}\theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g_1^2}}. \quad (3.47)$$

Assim os campos Z_μ, A_μ possuem uma partícula mediadora da interação Z^0, γ respectivamente, com massas

$$M_z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g_1^2}. \quad (3.48)$$

$$M_\gamma = 0. \quad (3.49)$$

De modo que a quebra espontânea da simetria e o setor Higgs resolve o problema da massa das partículas, a adição de uma nova partícula para o modelo padrão, o bóson de Higgs. Este é o mecanismo de Higgs, pelo que existe um campo escalar (campo de Higgs), que permeia todo o universo e todas as partículas que interagem, resultando uma massa associada para cada partícula. Hoje, o mecanismo de Higgs é considerado como a origem da massa de todas as partículas elementares, mas foi identificado o paradoxo teórico em relação às partículas W e Z antes de as partículas terem sido detectadas. O modelo padrão é uma teoria não-Abeliana baseada nos grupos $SU(2)_L \otimes SU(3)_C \otimes U(1)_Y$.

O mecanismo de Higgs é utilizado para formular distintos processos que envolvem bósons vetoriais massivos.

Por exemplo, para calcular o espalhamento $\sigma(W_l^+(p_1)Z_l(p_2) \rightarrow W_l^+(p_3)Z_l(p_4))$ [15].

O teorema de equivalência de bóson de Goldstone nos diz que a amplitude para emissão ou absorção de um bóson de calibre polarizado longitudinalmente é igual à amplitude para emissão ou absorção do bóson de Goldstone em altas energias [15]. Existindo uma relação entre o teorema de equivalência e o mecanismo de Higgs. Em altas energias, pode-se optar por ver o espectro como um bóson de calibre massivo com 3 graus de liberdade (3 polarizações independentes) ou ver o espectro como um bóson de calibre sem massa (2 graus de liberdade) e um bóson de Goldstone (1 grau de liberdade) para um total de 3 graus de liberdade. O mecanismo de Higgs é exatamente esse processo, onde temos uma simetria global $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ que no Modelo Padrão é quebrado em $U(1)_{EM}$. Assim, no final do dia, parece que se perde 3 graus de liberdade, mas não é realmente o que

acontece. Na verdade se produz 3 bósons de Goldstones. Estes, por sua vez, originam a massa para os bósons da interação fraca (W, Z). Em altas energias, podemos pensar em W, Z como massivos, ou como 3 bósons de Goldstone.

Para entender o teorema de equivalência, pode-se calcular o espalhamento acima mencionado. Onde a matriz de transição \mathcal{M} é originada por 3 diagramas: um de uma troca de W de canal- s , um de um canal- u , e o último do vértice de 4 pontos [15].

Os modos longitudinais dos bósons vetoriais são dados pelos bósons de Goldstone, que possuem propagadores sem massa. Portanto, o que queremos calcular é o espalhamento de bósons de Goldstone. As interações do bóson de Goldstone são dadas substituindo os campos vetoriais da forma $W_\mu^a \rightarrow \frac{1}{f_\pi} \partial_\mu \pi^a + \dots$. Então, espalhar os bósons de Goldstone deve ser muito semelhante à dispersão dos modos longitudinais com os bósons vetoriais W e Z [15]. O fato de ter o mesmo resultado no processo de espalhamento para bósons de calibre longitudinal como os bósons de Goldstone em alta energia não é uma coincidência. Isso acontece pelo teorema da equivalência do bóson Goldstone. Assim o cálculo de diagramas envolvendo campos escalares é, em geral, muito mais fácil do que calcular diagramas com bósons vetoriais massivos. Concluindo que este teorema é útil para estudar o espalhamento de bóson e a violação da unitariedade. A prova está em fazer a substituição $gW_\mu = \frac{1}{v} \partial_\mu \pi$ [15].

O teorema de equivalência tem uma relação estrita com o mecanismo de Stueckelberg. Primeiro, o mecanismo de Stueckelberg captura uma fase do mecanismo de Higgs em altas energias. O campo escalar implementado no mecanismo de Stueckelberg corresponde ao bóson de Goldstone usado no teorema de equivalência. E por último, a análise da unitariedade pode ser feita a partir do bóson de Goldstone.

No capítulo 4, discute-se o mecanismo de Stueckelberg e sua aplicação num modelo vetorial.

4 MODELO VETORIAL

Neste capítulo, o modelo considerado descreve a dinâmica de um campo vetorial A_μ com simetria de Lorentz. Estamos interessados em analisar a estabilidade do modelo. Assim, consideramos uma Lagrangeana quadrática em A_μ e discutiremos a questão da estabilidade no formalismo Hamiltoniano. Com isso, analisamos o espectro de graus de liberdade dinâmicos e as condições para que a evolução dinâmica seja realizada com uma Hamiltoniana positiva-definida.

Considere a ação quadrática de um campo A_μ , contendo no máximo duas derivadas

$$S[A_\mu] = \int d^4x \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu), \quad (4.1)$$

onde a Lagrangeana $\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu)$ é dada por

$$\mathcal{L} = \beta_1(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \beta_2(\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta_3(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) + \beta_4 A_\mu A^\mu + J_\mu A^\mu. \quad (4.2)$$

onde os quatros primeiros termos correspondem à dinâmica do campo vetorial livre, o que permite discutir o espectro e estabilidade da teoria, enquanto o último termo indica uma interação originada pela corrente J_μ . Nossa discussão é restrita apenas para a dinâmica do campo livre por isso tomamos $J_\mu = 0$.

Considerando condições de contorno para o campo A_μ de modo que não haja contribuições de fronteira, podemos desconsiderar derivadas totais. Fazendo uso da integração por partes, o segundo termo difere do terceiro por uma derivada total, por esse motivo são equivalentes.

Portanto a Lagrangeana (4.2) é reduzida a:

$$\mathcal{L} = \beta_1(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \beta_2(\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta_4 A_\mu A^\mu. \quad (4.3)$$

Onde β_i , ($i = 1, 2$) são constantes adimensionais, e β_4 é uma constante com unidades de massa. O modelo não apresenta simetria de calibre para valores arbitrários das constantes, e portanto pode descrever até 4 graus de liberdade dinâmicos.

As equações de Euler Lagrange obtidas da Lagrangeana (4.2) são dadas por

$$(\beta_1 \square A^\gamma + \beta_2 \partial^\gamma \partial_\mu A^\mu) = \beta_4 A^\gamma. \quad (4.4)$$

Estas equações dão informações sobre os graus de liberdade dinâmicos e os possíveis vínculos que apresenta a teoria que restringe esses graus de liberdade. O formalismo Hamiltoniano é útil para analisar estas questões que serão discutidas nas seções seguintes.

4.1 Formalismo Hamiltoniano

Nesta seção é estudado o formalismo Hamiltoniano para o modelo vetorial, para analisar questões como estabilidade do modelo. A instabilidade tem relações com os modos não-físicos, e a questão mais sutil corresponde a presença de excitação taquiônica no espectro do modelo. O modelo também pode ser instável se houver ghosts em seu espectro. Estes são caracterizados por ter energia cinética negativa. O vácuo quântico, por exemplo, poderia espontaneamente irradiar partículas de energia positiva e negativa. Além disso, a estabilidade está relacionada ao fato de que a densidade Hamiltoniana deve ser positiva-definida ou se estiver limitado por baixo.

A densidade Hamiltoniana \mathcal{H} derivada a partir da ação (4.4) via a transformada de Legendre é

$$\mathcal{H} = \Pi^\gamma \partial_0 A_\gamma - \mathcal{L}. \quad (4.5)$$

Onde Π^γ são os momentos canônicos, calculados à partir da expressão

$$\Pi^\gamma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\gamma)} = 2 \left\{ \beta_1 \partial^0 A^\gamma + \beta_2 \eta^{0\gamma} \partial_\mu A^\mu \right\}. \quad (4.6)$$

A componente temporal e as componentes espaciais do momento canônico são, respectivamente

$$\Pi^0 = 2(\beta_1 + \beta_2)(\partial_0 A_0) + (2\beta_2 \partial_i A^i), \quad (4.7)$$

$$\Pi^i = 2\beta_1 \partial^0 A^i. \quad (4.8)$$

A partir das equações (4.7) e (4.8), as derivadas temporais das componentes temporal e espaciais do campo vetorial A^μ são, em sequência

$$\partial_0 A_0 = \alpha_1 \Pi^0 + \alpha_2 \partial_i A^i, \quad (4.9)$$

e

$$\partial_0 A_i = \alpha_3 \Pi^i, \quad (4.10)$$

onde os coeficientes α_i são definidos por

$$\alpha_1 = \frac{1}{2(\beta_1 + \beta_2)}, \quad (4.11)$$

$$\alpha_2 = \frac{-\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)}, \quad (4.12)$$

e

$$\alpha_3 = \frac{-1}{2\beta_1}. \quad (4.13)$$

Nas equações (4.11 - 4.13), para garantir a validade dos coeficientes α_i temos que $\beta_1 \neq 0$ e $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$.

Portanto a densidade Hamiltoniana \mathcal{H} (em detalhes ver apêndice A.1) será:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \left[\frac{1}{2} \Pi^0 - \beta_2 (\partial_i A_i) \right]^2 - \frac{1}{4\beta_1} (\Pi^i)^2 - \beta_2 (\partial_i A_i) (\partial_j A_j) - \beta_4 A_\mu A^\mu \\ - \beta_1 \left\{ (\partial_i A_0)^2 + (\partial_i A_j)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

A Hamiltoniana H é obtida a partir da equação:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (4.15)$$

A densidade Hamiltoniana é definida se são respeitadas as condições $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$ em (4.14). Para saber se a densidade Hamiltoniana \mathcal{H} é positiva definida e estável, devem ser analisadas algumas configurações do sistema:

- $\Pi^i = \partial_i A_\mu = A_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 > 0$.

Assim, obtemos $\beta_1 + \beta_2 > 0$. Mas temos uma contradição para a seguinte configuração

- $\Pi^i = A_0 = A_\mu A^\mu = 0, \Pi^0 = 2\beta_2 \partial_i A^i \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 < 0$.

Podemos concluir que o sistema não é estável porque a densidade Hamiltoniana não é positiva-definida.

4.2 Dinâmica do campo vetorial

Para garantir que a densidade Hamiltoniana seja positiva-definida usamos a seguinte condição:

$$\beta_1 + \beta_2 = 0, \quad (4.16)$$

com (4.16) em (4.4) a densidade Lagrangeana é reduzida a

$$\mathcal{L} = \beta_1 \left\{ \partial_\mu A_\nu (\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A^\mu)^2 \right\} + \beta_4 A_\mu A^\mu. \quad (4.17)$$

A equação de movimento é dada por

$$\beta_1 (\square A^\gamma - \partial^\gamma \partial_\mu A^\mu) = \beta_4 A^\gamma. \quad (4.18)$$

As componentes do momentos canônicos são

$$\Pi^0 = 2\beta_2 \partial_i A^i, \quad (4.19)$$

$$\Pi^i = 2\beta_1 \partial^0 A^i. \quad (4.20)$$

A equação (4.19) corresponde a um vínculo do campo, pois não temos uma relação entre a componente temporal do momento e a derivada temporal da componente temporal do campo vetorial.

A Lagrangeana em termos das componentes é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \beta_1 \left[(\partial_i A_0)^2 + (\partial_i A_j)^2 \right] + \beta_4 A_\mu A^\mu \\ & + \beta_2 \left[(\partial_i A_i)(\partial_j A_j) - 2(\partial_i A_i)(\partial_0 A_0) \right] - \frac{1}{4\beta_1} (\Pi^i)^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Finalmente, obtém-se a densidade Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{-1}{4\beta_1} (\Pi^i)^2 - \beta_1 \{ (\partial_i A_0)^2 + (\partial_i A_j)^2 \} + \beta_2 (\partial_i A_i)(\partial_j A^j) - \beta_4 A_\mu A^\mu. \quad (4.22)$$

Dirac argumentou que as teorias com vínculos de primeira classe têm graus de liberdade redundantes ou não-físicos. Dirac afirma que, em uma teoria com n campos, se houver n_1 vínculos de primeira classe e n_2 vínculos de segunda classe, o número de graus físicos independentes de liberdade é $n - n_1 - \frac{n_2}{2}$. Esse argumento de contagem baseado na conjectura de Dirac é válido para teorias com sistemas regulares de vínculos [16].

Uma vez que os modos não físicos foram eliminados, aplicando os vínculos (ou impondo condição de calibre), a evolução de um sistema físico é determinada pelas equações de movimento para os campos físicos e momentos, sujeito às condições iniciais para essas quantidades. Em geral, a estabilidade de uma teoria é analisada, a partir da Hamiltoniana do sistema, verificando se esta é positiva-definida.

O vínculo é obtido tomando $\gamma = 0$ na equação de movimento definida em (4.18)

$$2\beta_1\partial_i\partial^i A^0 - \partial_i\Pi^i = 2\beta_4 A^0. \quad (4.23)$$

Assim, podemos ver que a partir de (4.19) e (4.23), os vínculos do sistema são

$$\chi = \Pi^0 - 2\beta_2\partial_i A^i, \quad (4.24)$$

$$\Phi = 2\beta_1\partial_i\partial^i A^0 - \partial_i\Pi^i - 2\beta_4 A^0. \quad (4.25)$$

Devemos calcular

$$\{\chi(x), \Phi(y)\}. \quad (4.26)$$

Se a equação (4.26) se anula temos que os vínculos são de primeira classe caso contrário, são de segunda classe. Para provar a relação entre os vínculos usamos as seguintes regras entre campos e momentos (no formalismo dos parênteses de Poisson):

$$\{A^\mu(x, t), A^\nu(y, t)\} = \{\Pi^\mu(x, t), \Pi^\nu(y, t)\} = 0, \quad (4.27)$$

$$\{A^\mu(x, t), \Pi^\nu(y, t)\} = \delta^{\mu\nu}\delta^{(3)}(x - y). \quad (4.28)$$

Portanto, substituindo (4.24) e (4.25) e usando as regras de comutação descritas por (4.27) e (4.28) em (4.26), temos

$$\{\chi(x), \Phi(y)\} \approx 2\beta_4\delta^{(3)}(x - y). \quad (4.29)$$

Podemos ver que (4.29) indica-nos que estes dois vínculos χ, Φ correspondem a vínculos de segunda classe, e temos $N_{v.p} = 0$, $N_{v.s} = 2$, onde $N_{v.p}$, $N_{v.s}$ designam números de vínculos primeira e segunda classe respectivamente). Além disso, os números de graus de liberdade dinâmicos são definidos por $\#_{Gld} = \#_{Gl} - N_{v.p} - \frac{N_{v.s}}{2} = 3$

Além disso, pode-se obter a densidade Hamiltoniana, utilizando os vínculos descritos nas equações (4.24),(4.25), onde (4.22) torna-se

$$\mathcal{H} = \frac{-1}{4\beta_1}(\Pi^i)^2 - \beta_1\{(\partial_i A_j)^2 - (\partial_i A_i)^2\} - \beta_1(\partial_0 A_0)(\partial_j A^j) + \beta_4 A_i^2. \quad (4.30)$$

Esta Hamiltoniana \mathcal{H} é estável e positiva definida com estas condições:

- $\beta_1 < 0$.
- $\beta_4 > 0$.

Concluindo que os graus de liberdade dinâmicos ($\#_{Gld}$) são três e que correspondem à um campo vetorial massivo e a Lagrangeana corresponde à Proca.

No caso $\beta_4 = 0$, temos que (4.29) seja nula. Portanto os vínculos são de primeira classe e temos dois graus de liberdade, o que indica que estamos estudando um campo vetorial não massivo, pois para $\beta_4 = 0$ esta Lagrangeana corresponde a Maxwell.

Fazendo o mesmo estudo para a condição $\beta_1 = 0$, temos que a Lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = \beta_2(\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta_4 A_\mu A^\mu. \quad (4.31)$$

A equação de movimento é dada por

$$\beta_2 \partial^\gamma \partial_\mu A^\mu = \beta_4 A^\gamma, \quad (4.32)$$

enquanto, os momentos canônicos são:

$$\Pi^\gamma = 2\beta_2 \eta^{0\gamma} \partial_\mu A^\mu. \quad (4.33)$$

As componentes dos momentos canônicos:

$$\Pi^0 = 2\beta_2 \{ \partial_0 A_0 - \partial_i A_i \}, \quad (4.34)$$

$$\Pi^i = 0. \quad (4.35)$$

A equação (4.35) descreve um vínculo do sistema, enquanto, outro vínculo é obtido à partir da equação de movimento. Por outro lado, temos a densidade Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\beta_2}(\Pi^0)^2 + \Pi^0 \partial_i A_i - \beta_4 A_\mu A^\mu. \quad (4.36)$$

O segundo vínculo é obtido por meio da análise da componente espacial da equação de movimento:

$$\beta_2 \partial^i \partial_\mu A^\mu = \beta_4 A^i. \quad (4.37)$$

Portanto, temos

$$\Phi^i = \partial^i \Pi^0 - 2\beta_4 A^i. \quad (4.38)$$

E o primeiro vínculo

$$\chi^i = \Pi^i, \quad (4.39)$$

originando três vínculos devido às componentes espaciais do momento ($i = 1, 2, 3$). Concluimos que

$$\{\chi^i(x), \Phi^j(y)\} \approx 2\beta_4 \delta^{ij} \delta^{(3)}(x - y). \quad (4.40)$$

Se $\beta_4 \neq 0$, temos $N_{v.p} = 0$, $N_{v.s} = 6$, portanto

$$\#_{Gld} = \#_{Gl} - N_{v.p} - \frac{N_{v.s}}{2} = 1. \quad (4.41)$$

Assim, obtemos no máximo um grau de liberdade. No caso em que $\beta_4 = 0$, os vínculos são de primeira classe, $N_{v.p} = 4$, $N_{v.s} = 0$. Três vínculos são originados por Π^i e o outro por $\partial^i \Pi^0$, concluindo que não temos graus de liberdade.

Além disso, podemos obter a densidade Hamiltoniana na superfície dos vínculos, utilizando as equações (4.38), (4.39), onde (4.36) torna-se:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\beta_2} (\Pi^0)^2 - \frac{1}{4\beta_4} (\partial_i \Pi^0)^2 - \beta_4 A_0^2. \quad (4.42)$$

Com

- $\beta_4 < 0$.
- $\beta_2 > 0$.

Podemos concluir que o sistema é estável, pois \mathcal{H} é positiva-definida.

Toda a análise fica na seguinte tabela, onde nós estudamos os números de graus de liberdade usando os números de vínculos do sistema.

Teoria	n.p	n.s	#Gld
$\mathcal{L} = \beta_1(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \beta_2(\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta_4 A_\mu A^\mu$	0	0	4
$\mathcal{L}_{proca} = \beta_1[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A^\mu)^2] + \beta_4 A_\mu A^\mu$	0	2	3
$\mathcal{L}_{maxwell} = \beta_1[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A^\mu)^2]$	2	0	2
$\mathcal{L}_{\beta_1} = \beta_2(\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta_4 A_\mu A^\mu$	0	6	1
$\mathcal{L}_{\beta_1} = \beta_2(\partial_\mu A^\mu)^2$	4	0	0

Tabela 1 – Números de graus de liberdade, onde n.p são os números de vínculos de primeira classe e , n.s de segunda classe.

4.2.1 Relação entre energia e momento para um campo vetorial A_μ

Para estabelecer uma relação entre energia e momento para o campo vetorial, devemos analisar a equação do movimento por meio de uma transformada de Fourier no espaço de momento:

$$A^\gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int A^\gamma(k) e^{ik^\sigma x_\sigma} d^4k. \quad (4.43)$$

Substituindo (4.43) em (4.6), obtemos

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \left[\int \{ -\beta_1 k^\rho k_\rho A^\gamma(k) - \beta_2 k^\gamma k_\mu A^\mu(k) \} e^{ik^\sigma x_\sigma} d^4k \right] = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \beta_4 A^\gamma(k) e^{ik^\sigma x_\sigma} d^4k. \quad (4.44)$$

Expressando o campo $A^\gamma = \delta_\mu^\gamma A^\mu$, vemos que (4.44) fica

$$\frac{-1}{(2\pi)^4} \left[\int \{ \beta_1 k^\rho k_\rho \delta_\mu^\gamma + \beta_2 k^\gamma k_\mu + \beta_4 \delta_\mu^\gamma \} A^\mu(k) e^{ik^\sigma x_\sigma} d^4k \right] = 0. \quad (4.45)$$

De uma forma mais compacta (4.45) torna-se

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \left[\int \{ C_\mu^\gamma \} A^\mu(k) e^{ik^\sigma x_\sigma} d^4k \right] = 0. \quad (4.46)$$

Onde C_μ^γ são os elementos da matriz de um operador

$$C_\mu^\gamma = \beta_1 k^\rho k_\rho \delta_\mu^\gamma + \beta_2 k^\gamma k_\mu + \beta_4 \delta_\mu^\gamma. \quad (4.47)$$

Usando a seguinte relação para a métrica de Minkowski $\delta_\mu^\gamma = \eta^{\gamma\alpha} \eta_{\alpha\mu}$, podemos escrever os elementos da matriz C_μ^γ :

$$C_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}(\beta_1 k^\rho k_\rho + \beta_4) + \beta_2 k_\mu k_\nu. \quad (4.48)$$

Por outro lado, a relação entre a energia e o momento está em analisar se esse operador C , se pode ser invertível, uma maneira de testar isso é se o seu determinante, for $Det(C) = 0$.

Para isso, usamos a seguinte relação:

$$Det(C) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta} \varepsilon^{\tau\sigma\lambda\omega} C_{\alpha\tau} C_{\beta\sigma} C_{\gamma\lambda} C_{\theta\omega}. \quad (4.49)$$

Substituindo (4.48) em (4.49), temos

$$Det(C) = M^3 \{M + \beta_2 k^2\} = 0, \quad (4.50)$$

com $M = (\beta_1 k^2 + \beta_4)$. Enquanto, as seguintes expressões entre energia e momento para a Lagrangeana geral

$$M = (\beta_1 k^2 + \beta_4) = 0 \implies k^2 = -\frac{\beta_4}{\beta_1}, \quad (4.51)$$

e

$$M + \beta_2 k^2 = (\beta_1 + \beta_2)k^2 + \beta_4 = 0 \implies k^2 = -\frac{\beta_4}{(\beta_1 + \beta_2)}. \quad (4.52)$$

Enquanto para os casos especiais, tais como $\beta_1 = 0$ e $\beta_4 \neq 0$, escrevemos os elementos de matriz:

$$C_{\mu\nu} = \beta_4 \eta_{\mu\nu} + \beta_2 k_\mu k_\nu, \quad (4.53)$$

e fazendo os mesmos cálculos, temos duas importantes relações entre energia e momento para $\beta_1 = \beta_4 = 0$

$$\beta_2 k^2 + \beta_4 = 0 \implies k^2 = -\frac{\beta_4}{\beta_2} = 0. \quad (4.54)$$

Para a outra condição $\beta_1 + \beta_2 = 0$, $\beta_4 \neq 0$, os elementos de matriz ficam:

$$C_{\mu\nu} = (\beta_1 k^2 + \beta_4) \eta_{\mu\nu} - \beta_1 k_\mu k_\nu, \quad (4.55)$$

portanto as seguintes expressões entre energia e momento se torna

$$M = (\beta_1 k^2 + \beta_4) = 0. \quad (4.56)$$

Assim, temos duas densidades Lagrangeanas. A primeira corresponde à Lagrangeana de Proca com relações de energia e momento da forma

$$k^2 = -\frac{\beta_4}{\beta_1}. \quad (4.57)$$

E outra corresponde à Lagrangeana de Maxwell, com relações de energia e momento dada por

$$k^2 = 0. \quad (4.58)$$

Resumindo os resultados na seguinte tabela

Teoria	k^2
$\mathcal{L} = \beta_1(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \beta_2(\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta_4 A_\mu A^\mu$	$-\frac{\beta_4}{(\beta_1 + \beta_2)}$
$\mathcal{L}_{proca} = \beta_1[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A^\mu)^2] + \beta_4 A_\mu A^\mu$	$\frac{-\beta_4}{\beta_1}$
$\mathcal{L}_{maxwell} = \beta_1[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A^\mu)^2]$	0
$\mathcal{L}_{\beta_1} = \beta_2(\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta_4 A_\mu A^\mu$	$-\frac{\beta_4}{\beta_2}$
$\mathcal{L}_{\beta_1} = \beta_2(\partial_\mu A^\mu)^2$	0

Tabela 2 – Relação de dispersão para cada modelo.

4.3 Graus de liberdade do campo vetorial A_μ

Através da decomposição das componentes espaciais e temporal do campo vetorial, podemos calcular o número de graus de liberdade dinâmicos.

Portanto, para a primeira condição, $\beta_1 = 0$ denominado “Modelo Escalar massivo” [2], a decomposição fica

$$\mathcal{L} = \beta_2 [(\partial_0 A_0)^2 + 2(\partial_0 A_0)(\partial_i A^i) + (\partial_i A^i)^2] + \beta_4 [A_0^2 - A_i^2]. \quad (4.59)$$

As componentes espaciais pode ser expressa em termos longitudinal e transversal

$$A_i = A_i^L + A_i^\perp. \quad (4.60)$$

Tomando a divergência em (4.60), o termo que contribui corresponde à parte longitudinal

$$\partial^i A_i = \partial^i A_i^L = \phi, \quad (4.61)$$

devido que a parte transversal ($\partial^i A_i^\perp = 0$). Por outro lado, as componentes transversais podem ser expressas por

$$A_i^\perp = B_i. \quad (4.62)$$

Enquanto, para expressar a parte longitudinal do campo vetorial, pode-se entender esta, como a solução da equação de Poisson $\partial_j \partial^j A_i^L = \partial_i \phi$. Portanto, com a condição assintótica habitual que os campos desaparecem no infinito, o inverso formal do laplaciano (função de Green) tem a forma explícita $\nabla_x^{-2} \delta^3(x-y) = \frac{1}{\nabla_x^2} \delta^3(x-y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}$. Assim, definindo este operador integral, temos que a parte longitudinal é dada por:

$$A_i^L = \frac{\partial_i \phi}{\partial_j \partial^j}. \quad (4.63)$$

Então, substituindo (4.62) e (4.63) em (4.59), temos que a Lagrangeana torna-se

$$\mathcal{L} = \beta_2 \left[(\partial_0 A_0)^2 + 2(\partial_0 A_0)\phi + \phi^2 \right] + \beta_4 \left[A_0^2 - B_i^2 - \left(\frac{\partial_i \phi}{\partial_j \partial^j} \right)^2 \right]. \quad (4.64)$$

Podemos ver que (4.64) descreve dois campos auxiliares B_i , ϕ . Portanto, a dinâmica fica no campo A_0 . Por isso, calculamos as equações de movimento para componentes espaciais

$$B_i = 0, \quad (4.65)$$

$$\phi = -\frac{\beta_2 \partial_j^2 \dot{A}_0}{\beta_2 \partial_j^2 + \beta_4}. \quad (4.66)$$

Com $\beta_2 \partial_j^2 + \beta_4 \neq 0$, temos que a Lagrangeana é reduzida a

$$\mathcal{L} = \dot{A}_0 \left[\frac{\beta_2 \beta_4}{\beta_2 \partial_j^2 + \beta_4} \right] \dot{A}_0 + \beta_4 A_0^2. \quad (4.67)$$

Redefinindo o campo A_0 a partir de um campo escalar χ

$$A_0 = \left[\frac{\beta_2 \partial_j^2 + \beta_4}{\beta_4} \right]^{\frac{1}{2}} \chi. \quad (4.68)$$

Com $\beta_2 > 0$, $\beta_4 < 0$ e expressando a derivada espacial em termos do momento linear ($p = -i\partial_k$), vemos que $\frac{\beta_2 \partial_j^2 + \beta_4}{\beta_4} > 0$. Portanto, substituindo (4.68) em (4.67) obtemos

$$\mathcal{L} = \beta_2 \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \beta_4 \chi^2. \quad (4.69)$$

A equação (4.69) corresponde a Lagrangeana de um campo escalar real massivo da forma $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{m^2}{2}\chi^2$. Assim, para a condição $\beta_1 = 0$, temos um grau de liberdade correspondente a um campo escalar com um fator de massa $m^2 = -2\beta_4$.

Da mesma forma fazemos o tratamento para a condição $\beta_1 + \beta_2 = 0$. Portanto a Lagrangeana em (4.4) toma a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \beta_1 \left[(\partial_j A_i)^2 - (\partial_0 A_i)^2 - (\partial_j A_0)^2 - 2(\partial_0 A_0)(\partial_i A^i) - (\partial_i A^i)(\partial_j A^j) \right] \\ + \beta_4 \left[A_0^2 - A_i^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Em seguida, notamos que a dinâmica está nas componentes espaciais. Por isso, calcularemos a equação de movimento para a componente A_0

$$A_0 = \frac{\beta_1 \partial_0 \phi}{\beta_1 \partial_k \partial^k - \beta_4}, \quad (4.71)$$

onde ϕ está dado por (4.61), com $\beta_1 \partial_k \partial^k - \beta_4 \neq 0$ e usando as equações (4.62), (4.63) e (4.71) a equação (4.70) torna-se da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_\phi. \quad (4.72)$$

Com

$$\mathcal{L}_\phi = \phi \left[\frac{-\beta_1 \beta_4 (\partial_0^2 + \partial_k \partial^k) + \beta_4^2}{\partial_m \partial^m (\beta_1 \partial_k \partial^k - \beta_4)} \right] \phi, \quad (4.73)$$

e

$$\mathcal{L}_B = \beta_1 \left[(\partial_j B_i)^2 - (\partial_0 B_i)^2 \right] + \beta_4 B^i B_i, \quad (4.74)$$

assim, introduzindo um novo campo ξ

$$\phi = \left(\frac{\partial_m \partial^m (\beta_1 \partial_k \partial^k - \beta_4)}{2\beta_1 \beta_4} \right)^{\frac{1}{2}} \xi. \quad (4.75)$$

Com $\beta_4 > 0$ e $\beta_1 < 0$ temos que $\frac{\partial_m \partial^m (\beta_1 \partial_k \partial^k - \beta_4)}{2\beta_1 \beta_4} > 0$. Portanto, substituindo (4.75) em (4.73), obtemos a Lagrangeana correspondente a um campo escalar massivo

$$\mathcal{L}_\xi = \frac{1}{2}\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{m_\xi^2}{2}\xi^2, \quad (4.76)$$

de massa $m_\xi = \sqrt{-\frac{\beta_4}{\beta_1}}$. Enquanto que para a componente transversal:

$$\mathcal{L}_B = \beta_1 \left[(\partial_j B_i)^2 - (\partial_0 B_i)^2 \right] + \beta_4 B^i B_i. \quad (4.77)$$

Nessa condição os graus de liberdade correspondente a Maxwell, ficam na componente transversal com $\beta_4 = 0$ devido a que $\phi = 0$, [11, 12]. No caso de Proca temos contribuição do termo transversal e longitudinal.

4.4 Mecanismo de Stueckelberg

O mecanismo de Stueckelberg consiste em introduzir um novo campo escalar χ , de tal forma que a nova ação tem simetria de calibre, mas ainda é dinamicamente equivalente à ação original. E portanto, pode expressar os graus de liberdade usando um novo campo, chamado campo de Stueckelberg. O mecanismo de Stueckelberg é usado para converter os vínculos de segunda classe presentes na Lagrangeana inicial para vínculos de primeira classe. Neste formalismo, a simetria $U(1)$ é restaurada ao preço de introduzir explicitamente um campo de Stueckelberg que se transforma de tal maneira para tornar invariante. A simetria de calibre garante que o campo vetorial A_μ propaga-se somente 2 graus de liberdade, enquanto o campo de Stueckelberg χ propaga o terceiro [12].

Considerando nosso sistema, descrito pela equação (4.4)

$$\mathcal{L}_i = \beta_1(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \beta_2(\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta_4 A_\mu A^\mu. \quad (4.78)$$

Fazendo a transformação do campo mediante

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi, \quad (4.79)$$

onde a Lagrangeana fica

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_i + (\beta_1 + \beta_2) \left\{ 2\Box\chi(\partial_\mu A^\mu) + (\Box\chi)^2 \right\} + \beta_4 \left\{ -2\chi(\partial_\mu A^\mu) + (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) \right\}, \quad (4.80)$$

Portanto, concluímos que como consequência do conhecido teorema de Ostrogradsky [18], (ver apêndice C), $(\beta_1 + \beta_2) = 0$, para garantir a unitariedade da teoria. Pois, não estamos interessados em um modelo com derivadas superiores, geralmente essas teorias conduzem a ghosts, e portanto, a problemas de instabilidade e unitariedade.

Em seguida, fazemos uma mudança de escala para o campo de Stueckelberg da forma

$$\chi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-2\beta_4}} \chi, \quad (4.81)$$

com o objetivo de normalizar o termo cinético associado ao campo χ , temos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_i + \beta_4 \left\{ -2\chi(\partial_\mu A^\mu) + (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) \right\}, \quad (4.82)$$

onde finalmente chegamos a

$$\mathcal{L} = \beta_1 \left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A^\mu)^2 \right] + \beta_4 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) + \sqrt{-2\beta_4} \chi(\partial_\mu A^\mu). \quad (4.83)$$

Analisando o limite de $\beta_4 \rightarrow 0$, para assim poder dissociar o campo vetorial. Portanto, vemos que o número de graus de liberdade se conserva no limite. Dois graus de liberdade associados ao campo vetorial e um grau de liberdade corresponde ao campo de Stueckelberg. Assim, podemos descrever um campo vetorial massivo

$$\mathcal{L} = \beta_1 \left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A^\mu)^2 \right] - \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi). \quad (4.84)$$

Para a condição $\beta_1 = 0$ em (4.4), vamos fazer a mesma análise, portanto

$$\mathcal{L} = \beta_2 (\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta_4 A_\mu A^\mu. \quad (4.85)$$

Aplicando a transformação do campo vetorial (4.79) e usando a decomposição do campo descrito em (4.62) e (4.63), vemos que (4.85) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \beta_2 \left[\dot{A}_0^2 + 2\dot{A}_0\phi + \phi^2 + 2\dot{A}_0\Box\chi + 2\phi\Box\chi + (\Box\chi)^2 \right] \\ & + \beta_4 \left[A_0^2 - 2\dot{A}_0\chi - 2\phi\chi + (\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\chi) + \left(\frac{\partial_i\phi}{\partial^j\partial_j} \right) \left(\frac{\partial^i\phi}{\partial^j\partial_j} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.86)$$

onde a componente transversal não contribui, devido a equação de movimento ($B_i = 0$), sendo um campo auxiliar, como corresponde também para a componente longitudinal. Portanto, a dinâmica fica na componente temporal. Para isso, calculamos a equação de movimento para a componente longitudinal

$$\phi = \frac{\partial^j\partial_j \left(\beta_2(\dot{A}_0 + \Box\chi) - \beta_4\chi \right)}{\beta_4 - \beta_2\partial^j\partial_j}. \quad (4.87)$$

Em seguida usando (4.87) em (4.86), a Lagrangeana se reduz

$$\mathcal{L} = \beta_2 \left(\dot{A}_0 + \Box\chi \right)^2 + \beta_4 A_0^2 + \beta_4 \partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - 2\beta_4\dot{A}_0\chi + \partial^k\partial_k \left(\frac{\left(\beta_2(\dot{A}_0 + \Box\chi) - \beta_4\chi \right)^2}{\beta_4 - \beta_2\partial^j\partial_j} \right). \quad (4.88)$$

Desta forma, (4.88) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = A_0\Omega A_0 + \chi\Delta\chi + \dot{A}_0\Psi\chi, \quad (4.89)$$

com

$$\Omega = \frac{-\beta_4\beta_2(\partial_0^2 + \partial^j\partial_j) + \beta_4^2}{\beta_4 - \beta_2\partial^j\partial_j}, \quad (4.90)$$

$$\Psi = \frac{2\beta_4(\beta_2\Box - \beta_4)}{\beta_4 - \beta_2\partial^j\partial_j}, \quad (4.91)$$

$$\Delta = \frac{\beta_4\beta_2\partial_0^4}{\beta_4 - \beta_2\partial^j\partial_j} - \beta_4\partial_0^2. \quad (4.92)$$

Com $\beta_4 - \beta_2\partial^j\partial_j \neq 0$, para o limite de $\beta_4 \rightarrow 0$ não temos dinâmica. Portanto, nenhum grau de liberdade se propaga.

Agora podemos encontrar a dinâmica para a condição $\beta_2 \rightarrow 0$. Então, temos

$$\mathcal{L} = \beta_4 [\partial_0\chi + A_0]^2. \quad (4.93)$$

Conclui-se que a dinâmica está no campo escalar de Stueckelberg, onde se propaga ao máximo um grau de liberdade.

4.5 Quebra espontânea da simetria de Lorentz

Para a construção de modelos fundamentais, a simetria de Lorentz é um pilar fundamental. Desvios menores dessa simetria podem ser detectados. Desta forma, a violação da simetria CPT e Lorentz pode ocorrer em muitos dos candidatos para teorias fundamentais, como as teorias de campo não comutativas [7].

Os efeitos fenomenológicos podem ser sistematicamente estudados usando o formalismo do Modelo padrão Estendido. Neste contexto, os Lagrangeanos usuais do Modelo Padrão e da teoria geral da relatividade de Einstein são suplementados por operadores que violam a simetrias de Lorentz. No setor não-gravitacional, esses operadores são construídos considerando todos os operadores do Modelo Padrão contraídos com tensores de fundo de forma invariante sob transformações de coordenadas. O setor gravitacional, por sua vez, segue a mesma ideia, mas considerando operadores e tensores sob o grupo de difeomorfismo [5].

Como consequências desta quebra espontânea da simetria de Lorentz, podem surgir, modos associados aos bósons de Nambu-Goldstone (NG) e bósons de Higgs [7]. Como exemplo de um modelo que apresenta violação da simetria de Lorentz temos "os modelos de *bumblebee*" [8], onde temos modos extras advindos do mecanismo de quebra de espontânea de Lorentz, que corresponde à condensação no vácuo de um campo vetorial [7, 8]. Por outro lado, para entender o papel dos modos de NG no problema da estabilidade e causalidade, parece ser relevante considerar a quantização de modelos que apresentam violação espontânea das simetrias de Lorentz e CPT.

Os modelos *bumblebee* foram estudados como uma alternativa à teoria de calibre $U(1)$ do eletromagnetismo na descrição consistente do fóton. Neste caso, a ausência de massa para

o fóton não está relacionada à invariância do sistema por uma simetria local, mas é ao invés disso associada a sua identificação como um bóson de NG.

5 CONCLUSÃO

Apresentamos neste trabalho um modelo vetorial com simetria de Lorentz, que descreve a dinâmica de um campo vetorial livre. Conceitos básicos são discutidos na teoria dos campos como: estabilidade, causalidade e unitariedade, usando um formalismo Hamiltoniano.

O método de Dirac para hamiltonização de sistemas lagrangianos singulares é uma ferramenta poderosa para análise e investigação de modelos atuais na física teórica.

Analisamos as condições para que a evolução dinâmica seja realizada com uma Hamiltoniana positiva-definida. Desta análise, obtemos três sistemas físicos interessantes: Lagrangeana de Maxwell que origina as equações de Maxwell que não fazem qualquer referência a uma massa para o campo eletromagnético, e uma vez que descrevem precisamente os fenômenos que observamos na escala clássica é razoável imaginar que mesmo em uma teoria quantizada não deve surgir uma massa associada ao quantum do campo. Isso fica explícito na formulação Lagrangeana da teoria em consequência da ausência do chamado termo de massa. A Lagrangeana de Maxwell descreve ao fóton como um campo vetorial não massivo e com 2 graus de liberdade. Enquanto a Lagrangeana de Proca corresponde a um campo vetorial massivo, com 3 graus de liberdade dinâmicos, além disso não é invariante de calibre, problema para a teoria, pois a simetria de calibre é considerada fundamental nas teorias que descrevem as partículas elementares conhecidas. E, finalmente, a Lagrangeana Escalar, assim é chamada porque propaga no máximo um grau de liberdade [10].

Os graus de liberdade dinâmicos dos sistemas foram calculados usando o formalismo de vínculos Dirac, verificando os resultados com a decomposição do campo vetorial em componentes espaciais e temporais. Além disso, o mecanismo de Stueckelberg utilizou-se para provar que alguns graus de liberdade estão contidos no campo da Stueckelberg tomando uma condição de calibre adequado. A utilidade deste mecanismo está para restaurar a simetria de calibre e é útil para a eliminação dos graus de liberdade impuros do modelo.

A ideia futura é poder originar uma quebra da simetria de Lorentz e analisar a estabilidade, causalidade e unitariedade do modelo. E poder entender o fóton como um bóson Goldstone.

Apêndices

APÊNDICE A – DENSIDADE HAMILTONIANA

A densidade Hamiltoniana \mathcal{H} é definida por

$$\mathcal{H} = \Pi^\gamma \partial_0 A_\gamma - \mathcal{L}. \quad (\text{A.1})$$

Onde Π^γ são os momentos canônicos

$$\Pi^\gamma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\gamma)} = 2 \left\{ \beta_1 \partial^0 A^\gamma + \beta_2 \eta^{0\gamma} \partial_\mu A^\mu \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Assim, as componentes temporal e espaciais do momento canônico são, respectivamente:

$$\Pi^0 = 2(\beta_1 + \beta_2)(\partial_0 A_0) + (2\beta_2 \partial_i A^i), \quad (\text{A.3})$$

$$\Pi^i = 2\beta_1 \partial^0 A^i. \quad (\text{A.4})$$

Sabemos que as equações (A.3) e (A.4) descrevem a dinâmica deste campo vetorial. Portanto, calcule-se $\partial_0 A_0$ e $\partial_0 A_i$

$$\partial_0 A_0 = \alpha_1 \Pi^0 + \alpha_2 \partial_i A^i, \quad (\text{A.5})$$

$$\partial_0 A_i = \alpha_3 \Pi^i. \quad (\text{A.6})$$

Desta forma, o primeiro termo da densidade Hamiltoniana ficaria

$$\Pi^\mu \partial_0 A_\mu = \left\{ \alpha_1 (\Pi^0)^2 + \alpha_2 (\Pi^0) (\partial_i A^i) \right\} + \alpha_3 (\Pi^i)^2. \quad (\text{A.7})$$

Por outro lado, expressando a densidade Lagrangeana nas componentes do campo temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\beta_1 + \beta_2)(\partial_0 A_0)^2 + \beta_1 \left\{ (\partial_i A_0)^2 + (\partial_i A_j)^2 - (\partial_0 A_i)^2 \right\} + \beta_4 A_\mu A^\mu \\ & + \beta_2 \left\{ (\partial_i A_i)(\partial_j A_j) - 2(\partial_0 A_0)(\partial_i A_i) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

e usando as componentes do momento canônico dados por (A.5) e (A.6), a equação (A.8) torna-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4(\beta_1 + \beta_2)} (\Pi^0)^2 - \frac{(\beta_2)^2}{(\beta_1 + \beta_2)} (\partial_i A_i)^2 - \frac{1}{4\beta_1} (\Pi^i)^2 + \beta_4 A_\mu A^\mu$$

$$+\beta_2(\partial_i A_i)(\partial_j A_j) + \beta_1 \left\{ (\partial_i A_0)^2 + (\partial_i A_j)^2 \right\}. \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, substituindo (A.7) e (A.9), a equação (A.1) que corresponde à densidade Hamiltoniana fica

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \left[\frac{1}{2} \Pi^0 - \beta_2 (\partial_i A_i) \right]^2 - \frac{1}{4\beta_1} (\Pi^i)^2 - \beta_2 (\partial_i A_i)(\partial_j A_j) - \beta_4 A_\mu A^\mu \\ - \beta_1 \left\{ (\partial_i A_0)^2 + (\partial_i A_j)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

APÊNDICE B – RELAÇÃO ENTRE ENERGIA E MOMENTO PARA UM CAMPO VETORIAL A_μ

A relação entre energia e momento para um campo vetorial foi calculada a partir da equação (4.43) em (4.6), onde obtemos

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int [\beta_1 \square A^\gamma(k) + \beta_2 \partial^\gamma \partial_\mu A^\mu(k)] e^{ik^\sigma x_\sigma} d^4k = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \beta_4 A^\gamma(k) e^{ik^\sigma x_\sigma} d^4k. \quad (\text{B.1})$$

Os termos que contribuem são

$$\beta_1 \square A^\gamma = \frac{-\beta_1}{(2\pi)^4} \int k^\rho k_\rho A^\gamma(k) e^{ik^\sigma x_\sigma} d^4k, \quad (\text{B.2})$$

$$\beta_2 \partial^\gamma \partial_\mu A^\mu = \frac{-\beta_2}{(2\pi)^4} \int k^\gamma k_\mu A^\mu(k) e^{ik^\sigma x_\sigma} d^4k, \quad (\text{B.3})$$

$$\beta_4 A^\gamma = \frac{\beta_4}{(2\pi)^4} \int A^\gamma(k) e^{ik^\sigma x_\sigma} d^4k. \quad (\text{B.4})$$

Cálculo do determinante

$$\text{Det}(C) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta} \varepsilon^{\tau\sigma\lambda\omega} \{H(\eta, \beta, k) + F(\eta, \beta, k) + G(\eta, \beta, k)\}, \quad (\text{B.5})$$

onde os termos são

$$H(\eta, \beta, k) = M^4 \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\sigma} \eta_{\gamma\lambda} \eta_{\theta\omega}, \quad (\text{B.6})$$

$$F(\eta, \beta, k) = M^3 \beta_2 \{ \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\sigma} (\eta_{\gamma\lambda} k_\theta k_\omega + \eta_{\theta\omega} k_\gamma k_\lambda) + \eta_{\gamma\lambda} \eta_{\theta\omega} (\eta_{\alpha\tau} k_\beta k_\sigma + \eta_{\beta\sigma} k_\alpha k_\tau) \}, \quad (\text{B.7})$$

$$G(\eta, \beta, k) = (\beta_2)^4 k_\alpha k_\tau k_\beta k_\sigma k_\theta k_\omega k_\gamma k_\lambda + (M\beta_2)^2 \chi(\eta, \beta, k) + M(\beta_2)^3 \Lambda(\eta, \beta, k). \quad (\text{B.8})$$

Enquanto, os termos $\chi(\eta, \beta, k)$, $\Lambda(\eta, \beta, k)$ são definidos por

$$\chi(\eta, \beta, k) = (\eta_{\alpha\tau} k_\beta k_\sigma + \eta_{\beta\sigma} k_\alpha k_\tau) (\eta_{\gamma\lambda} k_\theta k_\omega + \eta_{\theta\omega} k_\gamma k_\lambda) + \eta_{\alpha\tau} \eta_{\beta\sigma} (k_\theta k_\omega k_\gamma k_\lambda)$$

$$+\eta_{\gamma\lambda}\eta_{\theta\omega}(k_{\beta}k_{\sigma}k_{\alpha}k_{\tau}), \quad (\text{B.9})$$

$$\Lambda(\eta, \beta, k) = k_{\theta}k_{\omega}k_{\gamma}k_{\lambda}(\eta_{\alpha\tau}k_{\beta}k_{\sigma} + \eta_{\beta\sigma}k_{\alpha}k_{\tau}) + k_{\beta}k_{\sigma}k_{\alpha}k_{\tau}(\eta_{\gamma\lambda}k_{\theta}k_{\omega} + \eta_{\theta\omega}k_{\gamma}k_{\lambda}). \quad (\text{B.10})$$

Podemos ver que os únicos termos que contribuem são

$$\text{Det}(C) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}\varepsilon^{\tau\sigma\lambda\omega}\{H(\eta, \beta, k) + F(\eta, \beta, k)\} = 0, \quad (\text{B.11})$$

porque temos um produto simétrico e antissimétrico para este último termo $G(\eta, \beta, k)$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}\varepsilon^{\tau\sigma\lambda\omega}G(\eta, \beta, k) = 0. \quad (\text{B.12})$$

Vamos analisar como esses termos contribuem, para o primeiro temos

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}\varepsilon^{\tau\sigma\lambda\omega}H(\eta, \beta, k) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}\varepsilon^{\tau\sigma\lambda\omega}\{M^4\eta_{\alpha\tau}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\gamma\lambda}\eta_{\theta\omega}\} = M^4\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\theta}. \quad (\text{B.13})$$

Enquanto que o segundo termo

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}\varepsilon^{\tau\sigma\lambda\omega}F(\eta, \beta, k) = M^3\beta_2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}\{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\omega}k_{\theta}k^{\omega} + \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\theta}k_{\gamma}k^{\lambda} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\theta}k_{\beta}k^{\sigma} + \varepsilon_{\tau\beta\gamma\theta}k_{\alpha}k^{\tau}\}. \quad (\text{B.14})$$

Tendo em conta a relação entre o tensor Levi-Civita

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\theta} = -(4!), \quad (\text{B.15})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\omega} = -(3!)\delta_{\omega}^{\theta}, \quad (\text{B.16})$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -(2!)\{\delta_{\alpha}^{\mu}\delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu}\delta_{\alpha}^{\nu}\}. \quad (\text{B.17})$$

Finalmente, usando as equações (B.15), (B.16), (B.17) em (B.13) e (B.14), o determinante fica

$$\begin{aligned} \text{Det}(C) &= -(4!)M^4 + 4M^3\beta_2(-3!)k^2 = 0 \\ \text{Det}(C) &= -(4!)\{M^4 + M^3\beta_2k^2\} = 0 \\ \text{Det}(C) &= M^3\{M + \beta_2k^2\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

APÊNDICE C – A CONSTRUÇÃO DE OSTROGRADSKY

Nesta seção apresenta-se a construção de Ostrogradsky. Primeiro, estudamos o caso usual de uma Lagrangeana com primeira derivadas no tempo, enquanto, o caso da Lagrangeana com segundas derivadas no tempo é apresentado. E por último uma revisão do caso geral de uma Lagrangeana com N derivadas do tempo [18].

C.1 Construção Hamiltoniana

Dada a Lagrangeana $L = L(x, \dot{x})$ que depende no máximo de uma derivada temporal. A equação de Euler-Lagrange correspondente é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0. \quad (\text{C.1})$$

Se a Lagrangeana é não-degenerada $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^2} \neq 0$, podemos escrever (C.1) da forma

$$\ddot{x} = \mathcal{F}(x, \dot{x}) \Rightarrow x(t) = \mathcal{X}(t, x_0, \dot{x}_0), \quad (\text{C.2})$$

onde $x_0 = x(0)$ e $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$ são condições iniciais no sistema, portanto deve haver duas coordenadas canônicas, X e P , considerados como:

$$X = x, \quad (\text{C.3})$$

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}. \quad (\text{C.4})$$

O sistema é regular quando se pode inverter a transformação do espaço de fase (C.3) e (C.4) para resolver \dot{x} em termos de X, P . Isto é, que existem a velocidade $V(X, P)$ de tal modo que:

$$V(X, P) = \dot{x}, \quad (\text{C.5})$$

a Hamiltoniana canônica é obtida via transformada de Legendre em \dot{x}

$$H_c = P\dot{x} - L(x, \dot{x}) = PV(X, P) - L(X, V(X, P)). \quad (\text{C.6})$$

Podemos verificar que a evolução das variáveis canônicas são:

$$\dot{X} = \frac{\partial H_c}{\partial P} = V(X, P). \quad (\text{C.7})$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H_c}{\partial X} = \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (\text{C.8})$$

Neste caso, a Hamiltoniana gera a evolução do tempo. Quando a Lagrangeana não tem dependência explícita do tempo, H é uma quantidade conservada associada a energia. Quando o sistema não é regular, é denominado um sistema singular, não existem soluções únicas para as equações de movimento. Além disso a H_c não é o gerador da evolução temporal. O verdadeiro gerador da evolução temporal do sistema é a chamada Hamiltoniana total H_t .

O exemplo mais familiar corresponde a um oscilador harmônico de massa m e frequência w , cuja densidade Lagrangeana é descrita por

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{mw^2}{2}x^2. \quad (\text{C.9})$$

A equação de movimento é

$$\ddot{x} + w^2x = 0, \quad (\text{C.10})$$

a solução da equação é dada por

$$x(t) = x_0\cos(wt) + \frac{\dot{x}_0}{w}\text{sen}(wt). \quad (\text{C.11})$$

Enquanto as variáveis canônicas do sistemas são:

$$X = x. \quad (\text{C.12})$$

$$P = m\dot{x}. \quad (\text{C.13})$$

E a densidade Hamiltoniana correspondente

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{mw^2}{2}X^2. \quad (\text{C.14})$$

A Hamiltoniana $H(X, P)$ é limitado por baixo, positiva-definida.

C.1.1 A construção de Ostrogradsky para duas derivadas.

Considere um sistema que é descrito pela Lagrangeana $L(x, \dot{x}, \ddot{x})$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (\text{C.15})$$

onde a Lagrangeana é não-degenerada para $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}^2} \neq 0$, podemos escrever () da forma

$$\ddot{x} = \mathcal{F}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}) \Rightarrow x(t) = \mathcal{X}(t, x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0), \quad (\text{C.16})$$

como temos quatro condições iniciais devemos ter quatro coordenadas canônicas. As escolhas de Ostrogradsky para estes são:

$$X_1 = x. \quad (\text{C.17})$$

$$X_2 = \dot{x}. \quad (\text{C.18})$$

$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}}. \quad (\text{C.19})$$

$$P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}. \quad (\text{C.20})$$

Para resolver \ddot{x} em termos de x_1, x_2 e P_2 , temos que existe uma aceleração $A(X_1, X_2, P_2)$.

O Hamiltoniano de Ostrogradsky é obtido por uma transformada de Legendre em $\dot{x} = x^{(1)}$ e $\ddot{x} = x^{(2)}$

$$H(X_1, X_2, P_1, P_2) = \sum_{i=1}^2 P_i x^{(i)} - L = P_1 X_1 + P_2 X_2 - L(X_1, X_2, A(X_1, X_2, P_2)). \quad (\text{C.21})$$

As equações de evolução temporal são aquelas sugeridas pela notação:

$$\dot{X}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}. \quad (\text{C.22})$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial X_i}. \quad (\text{C.23})$$

Para verificar se eles geram a evolução para cada variável, temos

$$\dot{X}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_1} = X_2. \quad (\text{C.24})$$

A equação de evolução para X_2 reproduz

$$\dot{X}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_2} = A + P_2 \frac{\partial A}{\partial P_2} - \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial H}{\partial P_2}. \quad (\text{C.25})$$

A equação anterior, torna-se:

$$\dot{X}_2 = A. \quad (\text{C.26})$$

Enquanto a equação de evolução para P_2 é dada por:

$$\dot{P}_2 = - \left(P_1 + P_2 \frac{\partial A}{\partial X_2} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial A}{\partial X_2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \right) = -P_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \quad (\text{C.27})$$

E a evolução para P_1 :

$$\dot{P}_1 = - \left(P_2 \frac{\partial A}{\partial X_1} - \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial A}{\partial X_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (\text{C.28})$$

O Hamiltoniano de Ostrogradsky é linear no momento canônico em P_1 , o que significa que nenhum sistema desta forma pode ser estável, devido que a Hamiltoniana não é positiva definida e limitada por baixo.

C.1.2 A construção de Ostrogradsky para n derivadas

Considere uma Lagrangeana $L(x, \dot{x}, \dots, x^n)$, que depende das n -derivadas de x . A equação de Euler-Lagrange é linear

$$\sum_{i=0}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^i \frac{\partial L}{\partial X^i} = 0. \quad (\text{C.29})$$

Enquanto, o espaço de fase canônica deve, portanto, possuir coordenadas $2N$ coordenadas, que Ostrogradsky escolhe da forma:

$$X_i = x^{i-1}. \quad (\text{C.30})$$

$$\sum_{j=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^{j-i} \frac{\partial L}{\partial X^j} = 0. \quad (\text{C.31})$$

A Hamiltoniana de Ostrogradsky tem a forma:

$$\sum_{i=0}^n P_i X^{(i)} - L = P_1 X_2 + P_2 X_3 + \dots + P_{N-1} X_N + P_N A(X_1, \dots, P_N) - L(X_1, \dots, X_n, A). \quad (\text{C.32})$$

A construção de Ostrogradsky para n derivadas implica que o Hamiltoniano seja linear em P_1, P_2, \dots, P_{N-1} . Assim a teoria apresenta instabilidade.

- A instabilidade de Ostrogradsky impulsiona a variável dinâmica para um tipo especial de dependência do tempo, e não um valor numérico especial.
- A mesma variável dinâmica de Ostrogradsky carrega operadores de criação e de aniquilação de energia positiva e negativa.
- Se um sistema que sofre da instabilidade de Ostrogradsky interage, então o estado vazio pode decair em uma coleção de excitações de energia positiva e negativa.

A instabilidade de Ostrogradsky indica um problema com a energia cinética, e manifesta-se pela variável dinâmica que desenvolve uma dependência temporal no modelo. Verificando que a energia é limitada por baixo para valores constantes da variável dinâmica não estabelece de forma alguma que um sistema esteja livre da instabilidade de Ostrogradsky.

REFERÊNCIAS

- [1] E. Fabri and L.E. Picasso. *Quantum Field Theory and Approximate Symmetries*, Phys. Rev. Lett. 16 (1966).
- [2] S. M. Carroll *Lecture Notes on General Relativity*. (1997).
- [3] S. F. Novaes, *Standard Model: An Introduction*, arXiv: 0001283v1 [hep-ph] (2000).
- [4] V.A. Kostelecky and N.Russell, *Tables summarizing experimental data in tests of Lorentz and CPT symmetry*, arXiv:0801.0287 [hep-ph] (2017).
- [5] D. Colladay and V.A. Kostelecky, *Lorentz- violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D 58,116002 (1998)
- [6] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Photon and graviton masses in string theories*, Phys.Rev. Lett. 66 , 1811 (1991).
- [7] C.A. Hernaski *Quantization and stability of bumblebee electrodynamics* Phys. Rev. Lett. D 90, 124036 (2014).
- [8] R. Bluhm, N. L. Gagne, R. Potting, and A. Vrublevskis *Constraints and Stability in Vector Theories with Spontaneous Lorentz Violation*, arXiv: 08024071v3 [hep-ph](2008).
- [9] J. M. Cline, S. Jeon, G. D. Moore, *The phantom menaced: constraints on low-energy effective ghosts*, arXiv: 0311312v4 [hep-ph](2004).
- [10] S. M. Carroll, T. R. Dulaney, M. I. Gresham, and H. Tam *Instabilities in the Æther*, arXiv: 0812.1049v3 (2009).
- [11] K. Hinterbichler, *Theoretical Aspects of Massive Gravity*, arXiv: 11053735v2 [hep-th](2011).
- [12] C. Rham, *Massive Gravity*, Living Rev. Relativity, 17, (2014).
- [13] H. Ruegg and M. Ruiz-Altaba *The Stueckelberg Field*, arXiv: 0304245v2 [hep-th] (2003).
- [14] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Hamburg, (1982).
- [15] M. D. Schwartz *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge university press (2014).

- [16] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, (1964).
- [17] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1992).
- [18] R. P. Woodard *The Theorem of Ostrogradsky*, arxiv: 1506.02210v2 [hep-ph] (2015)
- [19] C. A. Hernaski *Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry with an antisymmetric tensor*, arxiv: 1608.00829v1 [hep-ph] (2016).