



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

JOSÉ HENRIQUE FERREIRA NOBRE

TEORIAS EFETIVAS PARA FASES TOPOLÓGICAS  
EM  $2+1$  DIMENSÕES

---

Londrina  
2018



JOSÉ HENRIQUE FERREIRA NOBRE

TEORIAS EFETIVAS PARA FASES TOPOLÓGICAS  
EM  $2+1$  DIMENSÕES

Dissertação apresentada ao Departamento de Física  
da Universidade Estadual de Londrina, como requisito  
parcial à obtenção do título de Mestre em Física.  
Orientador: Prof. Dr. Pedro Rogério Sergi Gomes

Londrina  
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Nobre, José Henrique Ferreira.

Teorias Efetivas para Fases Topológicas em 2 + 1 Dimensões / José Henrique Ferreira Nobre. - Londrina, 2018.  
97 f. : il.

Orientador: Pedro Rogério Sergi Gomes.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

Inclui bibliografia.

1. Fases Topológicas - Tese. 2. Efeito Hall Quântico - Tese. 3. Teorias Efetivas - Tese. 4. Chern-Simons - Tese. I. Gomes, Pedro Rogério Sergi. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

JOSÉ HENRIQUE FERREIRA NOBRE

**TEORIAS EFETIVAS PARA FASES TOPOLÓGICAS  
EM 2+1 DIMENSÕES**

Dissertação apresentada ao departamento de Física da  
Universidade Estadual de Londrina, como requisito  
parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Pedro Rogério Sergi Gomes  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Antonio Edson Goncalves  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dra. Paula Fernanda Bienzobas  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2018.



*Dedico este trabalho, em especial a minha mãe, pai, irmão e sobrinha como prova de uma conquista da família, a minha namorada que me apoiou em diversos momentos, a meus dois afilhados que amo e “In Memoriam” a meus avós, João Barreto Nobre e Silvino Ferreira.*





# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me dado forças.

Agradeço aos meus pais, Aparecida e José que se dedicaram muito para que eu pudesse chegar até este momento, com muito suor, carinho, amor e apoio incondicional na minha vida.

A toda a minha família que sempre me apoiou, em especial a meu irmão João pelo companheirismo, a minha vó Maria, pelo imenso carinho e a minha madrinha Silvana e tia Rosana, pelas inúmeras conversas e conselhos, também aos familiares que mesmo distante sempre presentes.

Agradeço em especial a minha namorada Fabiana por ser uma pessoa maravilhosa, pelos incontáveis momentos de ajuda, pela paciência, carinho e pelo companheirismo nas horas felizes e nebulosas da vida.

Ao meu orientador professor Dr. Pedro Rogério Sergi Gomes, por sua paciência e dedicação em prol do meu trabalho e formação acadêmica, também por servir de inspiração, como o grande profissional e físico que é. Aos professores Antônio Edson e Paula por fazer parte da minha banca examinadora.

À todos os amigos que me auxiliaram neste período, os que participaram direta e indiretamente (às vezes até pela distância), em especial aos amigos da sala 25 , pelos grandiosos dias de estudos e a todas as pessoas ao meu redor que influenciaram na construção deste.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.



*"There are men who fight one day and are good.  
There are men who fight one year and are better.  
There are some who fight many years and they are  
better still. But there are some that fight their whole  
lives, these are the ones that are indispensable."  
Bertolt Brecht.*



NOBRE, José Henrique Ferreira. **Teorias Efetivas para Fases Topológicas em  $2 + 1$  Dimensões**. 2018. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

## Resumo

Esse trabalho é dedicado ao estudo do efeito Hall quântico e suas fases topológicas, caracterizadas pelas *filling fraction* do sistema. Inicialmente são apresentados os aspectos para a quantização do sistema Hall, que inclui o espectro de energia e a função de onda. Análises dos operadores de translações magnéticas e o sistema com bordas físicas são realizadas. Em seguida, são descritas duas abordagens para o efeito Hall quântico fracionário. A primeira, apresentada por uma teoria para o estado fundamental do sistema, descrita pela função de onda de Laughlin, com excitações dadas por quase-partículas e quase-buracos, de carga e estatística fracionária. Na segunda abordagem discutimos teorias efetivas em baixas energias, no qual resulta em uma teoria de calibre de Chern-Simons. Nesse método são estudadas propriedades descritas pelo Chern-Simons correspondente ao efeito Hall, com ênfase nos aspectos topológicos. Além disso, são discutidos teorias de campos que descrevem os estados de borda e como é estabelecida a correspondência entre o *bulk* e a borda.

**Palavras-chave:** Fases Topológicas. Teorias Efetivas. Efeito Hall Quântico. Chern-Simons



NOBRE, José Henrique Ferreira. **Effective Theories for Topological Phases in  $2 + 1$  Dimensions**. 2018. Dissertation (Master's Degree Dissertation) – State University of Londrina, Londrina, 2018.

## Abstract

This work is dedicated to the study of the quantum Hall effect and its topological phases, characterized by the filling fraction of the system. Initially the aspects for the quantisation of the system Hall are presented, that includes the specter of energy and the function of wave. Analyses of the operators of magnetic translations and the system with physical edges are carried through. After that, two approaches are described for the fractional quantum Hall effect. The first, presented by a theory for fundamental state of system, described by the Laughlin wave function, with excitations given by the quasi-particles and quasi-holes, of charge and fractional statistics. In the second approach we discuss effective theories at low energies, which results in a of Chern-Simons gauge theory. In this method described properties for the Chern-Simons corresponding to the Hall effect, with emphasis in the topological aspects. In addition, field theories describing edge states and how the established bulk-edge correspondence.

**Keywords:** Topological Phases. Effective Theories. Quantum Hall Effect. Chern-Simons.





# Lista de ilustrações

Figura 1 – Rotação por um ângulo $\varphi$ em relação a outra partícula. . . . .	28
Figura 2 – Transporte geométrico de uma partícula dada por um ângulo $\varphi = \pi$ . . .	29
Figura 3 – Transporte geométrico de uma partícula dada por um ângulo $\varphi = -\pi$ . . .	29
Figura 4 – Configuração experimental do sistema Hall. . . . .	31
Figura 5 – Gráfico de resistividade pelo campo magnético $\mathbf{B}$ . . . . .	33
Figura 6 – Gráfico que demonstra o efeito Hall quântico inteiro. No qual, von Klitzing recebeu o prêmio Nobel de 1985. Fonte: TONG, D. <i>Lectures on the quantum hall effect</i> . arXiv:1606.06687, 2016. . . . .	34
Figura 7 – Níveis energéticos de Landau. . . . .	36
Figura 8 – Propagação de elétrons na borda do sistema. . . . .	39
Figura 9 – Potencial confinante $V(x)$ . . . . .	39
Figura 10 – Transporte cíclico dado pelos operadores de translação magnética. . . .	46
Figura 11 – Níveis de Landau degenerado, representando uma <i>filling fraction</i> $\nu = 1$ . . . .	49
Figura 12 – Níveis de Landau degenerado, representando uma <i>filling fraction</i> $\nu = 2$ . . . .	50
Figura 13 – Níveis de Landau degenerado, representando uma <i>filling fraction</i> $\nu = 3$ . . . .	50
Figura 14 – Gráfico do campo magnético pela resistividade longitudinal e resistividade Hall. Fonte: JAIN, J. K. <i>Composite fermions</i> . New York. Cambridge University Press, 2007. . . . .	53
Figura 15 – Coleção de partículas com linhas de fluxo dadas por $\frac{e}{\kappa}$ . . . . .	77
Figura 16 – Transporte adiabático dado por um caminho C. . . . .	78
Figura 17 – Configuração do sistema Hall dado por uma variedade $\mathcal{M}$ e borda em $y = 0$ . . . . .	89



# Lista de abreviaturas e siglas

EHQ	Efeito Hall Quântico.
EHQI	Efeito Hall Quântico inteiro.
EHQF	Efeito Hall Quântico fracionário.
NL	Nível de Landau.
NLB	Nível de Landau mais baixo.
LLL	<i>Lowest Landau Level.</i>
Qb	Quase-buraco.
Qp	Quase-partícula.
CS	Chern-Simons.
MCS	Maxwell-Chern-Simons.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>SPIN E ESTATÍSTICA FRACIONÁRIA EM 2+1 DIMEN- SÕES . . . . .</b>	<b>25</b>
2.1	Spin em 3 + 1 e 2 + 1 Dimensões . . . . .	25
2.2	Estatística em 3 + 1 e 2 + 1 Dimensões . . . . .	27
<b>3</b>	<b>INTRODUÇÃO AO EFEITO HALL QUÂNTICO . . . . .</b>	<b>31</b>
3.1	Efeito Hall Clássico . . . . .	31
3.2	Quantização e Problema de Landau . . . . .	33
3.3	Função de Onda . . . . .	36
3.4	Estados de Borda . . . . .	38
3.5	Solução no Calibre Simétrico . . . . .	40
3.6	Álgebra Magnética . . . . .	44
3.7	Função de Onda de Muitas Partículas . . . . .	47
3.8	Fluido Incompressível . . . . .	48
<b>4</b>	<b>EFEITO HALL FRACIONÁRIO . . . . .</b>	<b>53</b>
4.1	O Papel das Interações e Porquê o Problema é não Perturbativo . . . . .	53
4.2	Função de Onda de Laughlin e Propriedades . . . . .	55
4.3	Analogia com o Plasma . . . . .	57
4.4	Excitações de Quase-Partículas e Quase-Buracos . . . . .	58
<b>5</b>	<b>TEORIA EFETIVA PARA O SISTEMA HALL . . . . .</b>	<b>65</b>
5.1	Teorias Efetivas de Baixas Energias . . . . .	65
5.2	Teoria Efetiva para o Sistema Hall . . . . .	68
5.3	Propriedades do Chern-Simons . . . . .	70
5.3.1	Aspectos Topológicos . . . . .	70
5.3.2	Teoria Topológica Massiva . . . . .	72
5.3.3	Estatística Fracionária . . . . .	74
5.4	Descrição Efetiva do Sistema Hall . . . . .	79
<b>6</b>	<b>TEORIA DE BORDA . . . . .</b>	<b>87</b>
6.1	Estados de Borda . . . . .	87
6.2	Correspondência <i>Bulk-Edge</i> . . . . .	88
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>93</b>

REFERÊNCIAS . . . . . 95

# 1 Introdução

A noção de fase topológica da matéria se desenvolveu a partir da descoberta do efeito Hall quântico fracionário (EHQF) [1], abrindo um novo capítulo da física da matéria condensada [2, 3, 4, 5]. O efeito Hall consiste de um conjunto de elétrons se movendo em um plano na presença de um campo magnético perpendicular. Enquanto os elétrons tentam descrever órbitas circulares, eles estão sujeitos a uma forte repulsão coulombiana e suas órbitas devem ser compatíveis com o princípio de exclusão de Pauli. Essa combinação de ingredientes geram padrões altamente organizados cujo resultado é uma série de fenômenos impressionantes, como a estrutura de platôs da resistividade elétrica e as excitações com estatística e cargas fracionárias.

A descrição microscópica desse sistema é complexa, pois trata de um problema fortemente acoplado em que os métodos perturbativos tradicionais não se aplicam. Ao longo dos anos, diversas abordagens vêm sendo desenvolvidas para melhor compreensão do problema. Em especial, mencionamos o método de Laughlin em que se postula a existência de uma função de onda compatível com as propriedades do sistema. A partir daí é possível entender quantitativamente vários aspectos do EHQF. Outra abordagem bastante elegante é por meio da construção de teorias efetivas de baixas energias. Partindo de considerações gerais é possível construir uma teoria de campos efetiva que incorporam várias propriedades físicas e ainda evidencia um ponto fundamental: a natureza topológica das fases.

O efeito Hall quântico (EHQ) exibe diferentes fases que podem ser identificadas por meio de uma quantidade chamada *filling fraction*, que é a razão entre o número de elétrons pelo número de estados em cada nível de Landau (NL). Porém, não é possível identificar nenhuma mudança ou quebra de simetria separando essas fases. Assim, esse sistema não pode ser descrito em termos da teoria geral de transições de fase de Landau, baseados na quebra de simetria, pois não há um parâmetro de ordem capaz de distinguir as fases. Precisamos introduzir novos conceitos para estudar e classificar tais fases, o que requer o uso intensivo de aspectos topológicos. Nesse sentido dizemos que essas fases são então topológicas.

O estudo dessas fases requer o uso de propriedades como a degenerescência do estado fundamental, carga e estatísticas fracionárias e a presença de estados de borda, todas baseadas em noções topológicas, as quais são robustas contra pequenas perturbações do sistema. Essas propriedades são universais e podem ser usadas na classificação das fases. Tipicamente essas fases topológicas são caracterizadas por um *bulk* com um *gap* de energia, e contendo estados de borda condutores (sem *gap*) protegidos por alguma simetria, como a reversão temporal [6].

Um aspecto interessante é a conexão entre a física do *bulk* e da borda. A descrição

em termos de uma teoria topológica baseada na ação de Chern-Simons (CS) incorpora todas as características mencionadas acima e ainda mostra como a teoria do *bulk* e da borda estão relacionadas, por meio da chamada correspondência *bulk-edge*. A ideia é que como o termo de CS é topológico, a hamiltoniana correspondente é nula e os graus de liberdade dinâmicos vivem somente nas bordas.

Convenções: métrica em um espaço-tempo curvo é representada por  $g_{\mu\nu}(x)$  ao passo que a métrica de Minkowski é  $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, \dots, -1)$ . A dimensionalidade do espaço-tempo é representada por  $D = d + 1$ , em que  $d$  é referente ao número de dimensões espaciais. Índices gregos correm sobre todas as coordenadas do espaço-tempo,  $\mu, \nu, \alpha \dots = 0, 1, 2, \dots, D - 1$ . Índices latinos correm sobre as coordenadas espaciais,  $i, j, k \dots = 1, 2, 3, \dots, D - 1$ . Trabalhamos em unidades tal que  $\hbar = c = 1$ .



## 2 Spin e Estatística Fracionária em 2+1 Dimensões

Neste capítulo abordamos como certas propriedades físicas dependem da dimensionalidade do espaço-tempo. Uma maneira natural de investigar tais aspectos é analisar as simetrias geométricas subjacentes. Discutimos também a noção de spin e estatística em baixas dimensões, em que o spin e a estatística não são quantizados em inteiro ou semi-inteiros, tal que as partículas não são classificadas apenas em bósons ou férmions, levando assim ao conceito de *anyons*, [7].

### 2.1 Spin em 3 + 1 e 2 + 1 Dimensões

Começamos a discussão deste trabalho analisando propriedades de spin e estatística de acordo com a dimensionalidade espacial considerada. Estudando o caso para três dimensões espaciais  $d = 3$ , temos três geradores de rotações  $J_i$  satisfazendo a álgebra

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (2.1)$$

em que  $\epsilon_{ijk}$  é o tensor de Levi-Civita e é definido como objeto completamente antissimétrico, com  $\epsilon_{123} \equiv 1$ .

É fácil verificar que  $[\mathbf{J}^2, J_i] = 0$ , assim escolhemos  $J_3$  para ser diagonalizado simultaneamente com o operador  $\mathbf{J}^2$ . Como consequência, podemos construir os autoestados  $|jm\rangle$ , que dispõem de relações de ortonormalidade dadas como

$$\langle j'm'|jm\rangle = \delta_{j'j}\delta_{m'm}.$$

Vamos parametrizar seus autovalores para os operadores  $\mathbf{J}^2$  e  $J_3$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{J}^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle \quad \text{e} \quad J_3|jm\rangle = m|jm\rangle. \quad (2.2)$$

Para determinar o espectro precisamos de outros dois operadores, esses são os responsáveis pelo levantamento e abaixamento dos estados. Os mesmos são definidos em termos dos operadores  $J_1$  e  $J_2$ ,

$$J_{\pm} \equiv J_1 \pm iJ_2, \quad (2.3)$$

note que  $J_{\pm}^{\dagger} = J_{\mp}$ , ou seja, não são Hermitianos. As regras de comutação envolvendo esses operadores são dadas por

$$[\mathbf{J}^2, J_{\pm}] = 0 \quad (2.4)$$

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad (2.5)$$

$$[J_+, J_-] = 2J_3. \quad (2.6)$$

Analisando o que ocorre quando atuamos os operadores  $\mathbf{J}^2$  e  $J_3$  sobre o estado  $J_{\pm}|jm\rangle$ . Como os operadores  $J_{\pm}$  e  $\mathbf{J}^2$  comutam, Eq (2.4), os estados  $|jm\rangle$  e  $J_{\pm}|jm\rangle$  exibem o mesmo autovalor,

$$\mathbf{J}^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{J}^2 J_{\pm}|jm\rangle = j(j+1) J_{\pm}|jm\rangle.$$

Por outro lado, o operador  $J_3$  não comuta com  $J_{\pm}$ , logo

$$J_3 J_{\pm}|jm\rangle = (m \pm 1) J_{\pm}|jm\rangle. \quad (2.7)$$

Note que  $J_{\pm}|jm\rangle$  é um autoestado de  $J_3$  com autovalor  $m \pm 1$ . Isso mostra que os operadores  $J_+$  e  $J_-$  levantam e baixam estados respectivamente,

$$J_{\pm}|jm\rangle = \alpha_{\pm}(jm) |jm \pm 1\rangle. \quad (2.8)$$

É simples mostrar que os coeficientes  $\alpha_{\pm}(jm)$  são dados por  $\alpha_{\pm}(jm) = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$ .

Assumindo que existem valores limites para  $m$ , que são representados por um autovalor máximo  $m_{m\acute{a}x}$  e um autovalor mínimo  $m_{m\acute{i}n}$ . Dessa forma temos estados tal que,

$$J_+|jm_{m\acute{a}x}\rangle = 0 \quad \text{e} \quad J_-|jm_{m\acute{i}n}\rangle = 0. \quad (2.9)$$

Analisando a Eq. (2.9), observamos que os coeficientes  $\alpha_{\pm}(jm)$  devem ser nulos para valores de  $m_{m\acute{a}x}$  e  $m_{m\acute{i}n}$ . Isso determina  $m_{m\acute{a}x} = j$  e  $m_{m\acute{i}n} = -j$ , o que nos leva a restrições para os valores de  $m$ . Dessa forma o autovalor do operador  $J_3$  obedece a condição  $-j \leq m \leq j$ .

Para determinarmos os possíveis valores para  $j$ , consideramos um estado  $|jm_0\rangle$  e atuando  $(J_+)^k$  levamos o estado até seu valor máximo de  $m$ , ou seja, atuando  $k$  vezes o operador  $J_+$ , obtemos

$$(J_+)^k |jm_0\rangle \sim |jm_0 + k\rangle, \quad (2.10)$$

tal que  $m_0 + k = m_{m\acute{a}x}$ . Atuando  $l$  vezes o operador  $J_-$  no estado  $|jm_0\rangle$ , de maneira a levamos o estado até o valor de  $m$  mínimo, temos

$$(J_-)^l |jm_0\rangle \sim |jm_0 - l\rangle, \quad (2.11)$$

tal que  $m_0 - l = m_{m\acute{i}n}$ . Com esses resultados podemos obter os valores para  $j$ . Ressaltando que  $k$  e  $l$  são dados por números inteiros e que  $m_{m\acute{a}x} = j$  e  $m_{m\acute{i}n} = -j$ . Dessa forma temos  $m_0 + k = j$  e  $m_0 - l = -j$ , implicando que

$$k + l = 2j. \quad (2.12)$$

Note que o lado esquerdo da Eq. (2.12) é dado por um número inteiro, assim o lado direito também dever ser um número inteiro, o que implica em valores de  $j$  dados por números

inteiros e semi-inteiros. Isso permite separarmos  $j$  em duas classes, em que valores inteiros representam bósons e semi-inteiros férmions,

$$\underbrace{j = 0, 1, 2, 3, \dots}_{\text{Bósons}} \quad \text{e} \quad \underbrace{j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots}_{\text{Férmions}} \quad (2.13)$$

Considerando o caso de 2 + 1 dimensões, analisamos o conteúdo de spin seguindo a discussão acima. Porém, para o caso de duas dimensões espaciais, temos somente rotações em um plano ( $xy$ ), resultando em apenas um gerador de rotação  $J_{xy}$ . Dessa forma não há uma segunda componente operatorial para formar os comutadores, da Eq. (2.1). Ou seja,  $J_{xy}$  possui uma regra de comutação trivial

$$[J_{xy}, J_{xy}] = 0. \quad (2.14)$$

Nesse caso temos uma álgebra abeliana, que implica  $j$  e  $m$  não possuem restrições e dessa forma em duas dimensões espaciais a representação para o spin não é fixada pela álgebra. Por meio dessa discussão podemos nos questionar a respeito das propriedades do spin em duas dimensões espaciais e maneiras de mostrar suas decomposições.

## 2.2 Estatística em 3 + 1 e 2 + 1 Dimensões

Como discutido acima, temos que a representação para o spin é arbitrária em duas dimensões, uma vez que a álgebra não impõe restrições. Dessa forma em duas dimensões espaciais o spin não é definido em números inteiros ou semi-inteiros e assim as partículas de uma maneira geral são denominadas *anyons*. Apesar de não existir na natureza partículas fundamentais com propriedades aniônicas, certos sistemas que ocorrem efetivamente em duas dimensões, exibem excitações com números quânticos fracionários. Um exemplo desse fenômeno é o EHQF, em que as excitações do estado fundamental possuem carga, spin e estatística fracionária.

Uma maneira conveniente de analisar o conteúdo de spin é explorando sua conexão com as propriedades de simetria das funções de onda de muitas partículas. Essa conexão é determinada pelo chamado teorema spin-estatística [8], estabelecendo que as funções de onda de um sistema de partículas bosônicas idênticas devem ser simétricas sob troca de quaisquer duas partículas de spin inteiro, por exemplo,

$$\Psi_B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n) = \Psi_B(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (2.15)$$

Para partículas fermiônicas de spin semi-inteiro as funções de onda são antissimétricas por permutações de partículas, por exemplo,

$$\Psi_F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n) = -\Psi_F(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (2.16)$$

Para esclarecer, analisamos as seguintes situações: definimos uma função de onda que descreve um sistema de duas partículas idênticas  $\Psi(1, 2)$ . Posteriormente assumimos que o deslocamento de uma partícula em torno da outra é dado por um ângulo  $\varphi$ , Figura 1. Note que as configurações são fisicamente equivalentes nos sistemas mostrados nas Figuras 1a) e 1b), dessa forma temos que as probabilidades dessas duas configurações são iguais

$$|\Psi(1, 2)|^2 = |\Psi'(1, 2)|^2. \quad (2.17)$$

Assim temos que as funções de onda de ambas as situações diferem apenas por uma fase, que deve ser dada em termos do ângulo  $\varphi$ . Assim podemos escrever,

$$\Psi'(1, 2) = e^{-i\nu\varphi}\Psi(1, 2), \quad (2.18)$$

em que  $\nu$  é denominado parâmetro da estatística.



Figura 1 – Rotação por um ângulo  $\varphi$  em relação a outra partícula.

Para melhor compreensão do parâmetro da estatística  $\nu$ , analisamos uma troca de partículas idênticas por meio de uma sequência de operações geométricas, considerando apenas a suposição de que elas não podem se sobrepor, (interação *hard-core*). Analisamos os seguintes caminhos:

i) Movendo a partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo  $\varphi = \pi$ , em seguida realizamos uma translação rígida do centro de massa, de modo a retornarmos para a configuração inicial, Figura 2.

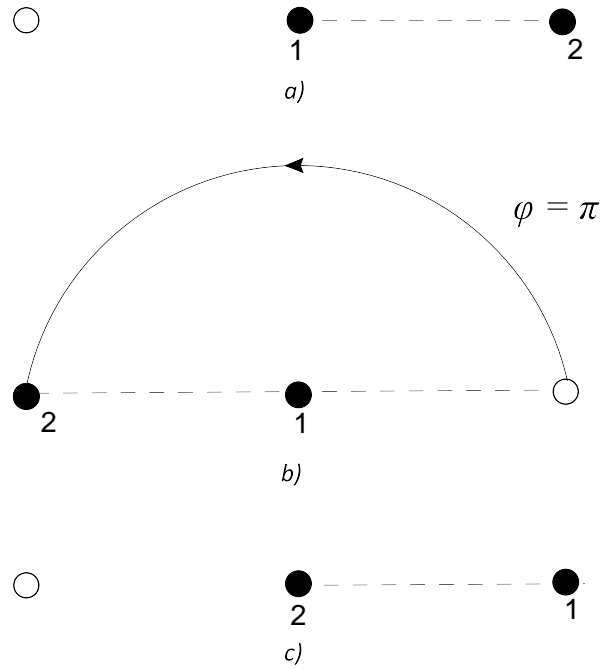


Figura 2 – Transporte geométrico de uma partícula dada por um ângulo  $\varphi = \pi$ .

ii) Movendo a partícula 2 em torno de 1, mas no sentido contrário ao modo anterior, de modo ao ângulo ser  $\varphi = -\pi$ , em seguida realizamos uma translação rígida do centro de massa, como mostra a Figura 3

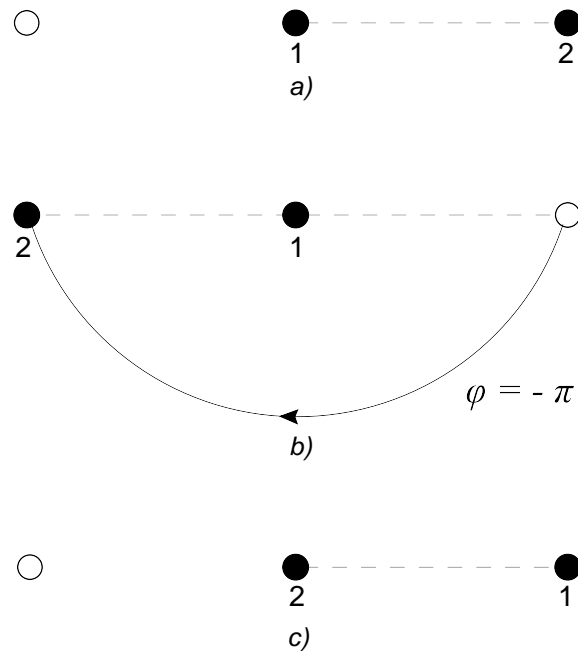


Figura 3 – Transporte geométrico de uma partícula dada por um ângulo  $\varphi = -\pi$ .

Os caminhos acima indicam uma diferença na estatística dependendo da dimensionalidade espacial. Isso porque em três dimensões espaciais, ou mais, não há diferença entre os dois caminhos, pois podemos ir do caminho 1 para o caminho 2 de forma contínua,

simplesmente levando a curva para uma terceira dimensão e rotacionando a mesma até ser equivalente ao caminho 2. Isso é feito para que em nenhum momento as partículas se sobreponham. Assim, não distinguindo o primeiro do segundo caso.

Portanto as funções de onda Eq. (2.18) devem ser equivalentes para três dimensões ou mais, o que corresponde a

$$e^{i\nu\pi} = e^{-i\nu\pi}. \quad (2.19)$$

A Eq. (2.19) impõe uma restrição sobre o parâmetro de estatística  $\nu$ , de modo que  $\nu = 0, 1$ . Para  $\nu = 0$  a função de onda é simétrica e o sistema é bosônico e para  $\nu = 1$  a função de onda é antissimétrica e o sistema fermiônico, o que mostra a não arbitrariedade de  $\nu$  em dimensões espaciais maiores ou iguais a três.

Notamos diferenças quando estudamos o caso para duas dimensões espaciais e, para observar isso realizamos a mesma análise de troca de partículas por meio de operações geométricas. Precisamos então, ir de i)  $\varphi = \pi$  para ii)  $\varphi = -\pi$ , porém não é possível realizar esse processo, pois em duas dimensões espaciais não conseguimos de forma contínua levar a curva de um caminho para outro. O que impede a realização desse processo é que em algum momento uma partícula irá sobrepor a outra e por hipótese isso não é permitido.

Em duas dimensões espaciais, os casos i) e ii) são fisicamente diferentes (topologicamente inequivalentes), não impondo restrições para os valores do parâmetro de estatística  $\nu$ . Levando a estatística  $\nu$  a princípio ser arbitrária, do mesmo modo que o spin.

Com as consequências da análise para spin e estatística, identificamos que para o caso de duas dimensões espaciais temos propriedades relevantes tais como, sistemas que podem ser descritos efetivamente como bidimensionais. Um exemplo desse tipo de sistema é o efeito Hall. O fenômeno será discutido com detalhes no decorrer do trabalho.

## 3 Introdução ao Efeito Hall Quântico

Neste capítulo discutimos o efeito Hall, abordando o caso clássico e realizando a quantização do sistema, obtendo o espectro de energia e a função de onda. Tratamos também uma ideia intuitiva acerca da teoria de bordas no efeito Hall e a ideia sobre transporte magnético do sistema. Estudamos como a resistividade elétrica é dada por uma série de platôs que são caracterizados pelo parâmetro denominado *filling fraction*.

### 3.1 Efeito Hall Clássico

Uma maneira de melhor entender o efeito Hall, é analisar um sistema descrito pela seguinte configuração: uma placa em que partículas realizam movimento restrito ao plano  $(xy)$  e um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  na direção  $z$ , perpendicular ao movimento. A placa é submetida a uma diferença de potencial na direção de  $x$ , gerando assim uma corrente. Como mostra a Figura 4.

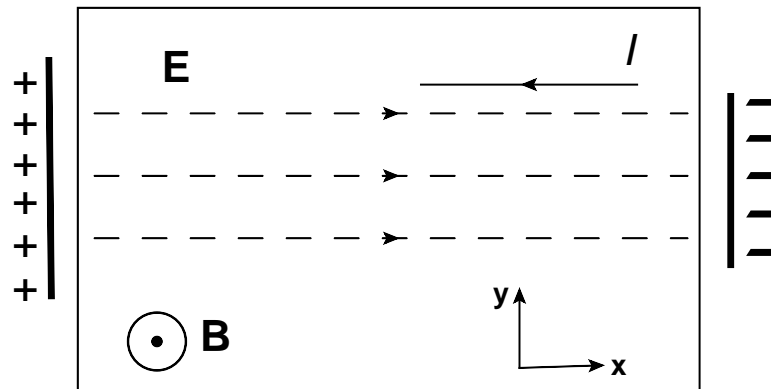


Figura 4 – Configuração experimental do sistema Hall.

Analisando essa configuração por etapas, observamos o surgimento de um desvio dos elétrons causado pela força magnética gerada pelo campo  $\mathbf{B}$ . Conseqüentemente a força gera um acúmulo de elétrons na extremidade superior da placa, produzindo uma diferença de potencial entre suas extremidades na direção  $y$ , conhecido como potencial Hall. O mesmo produz um campo elétrico que exerce uma força elétrica sobre as cargas, na direção  $y$ , porém com sentido contrário ao da força magnética. Rapidamente o sistema atinge um estado de equilíbrio dinâmico em que a força elétrica é igual a força magnética.

Utilizando o modelo de Drude para a configuração acima, descrevemos o sistema considerando interações entre elétrons e qualquer efeito que impeça o progresso dos elétrons, como um termo de força de atrito. Assim, as equações de movimento são dadas pela força

de Lorentz adicionada de um termo equivalente ao atrito

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{m}{\tau}\mathbf{v}, \quad (3.1)$$

em que  $\tau$  é o tempo de dispersão e pode ser pensado como o tempo médio das colisões. Dessa forma no equilíbrio, temos

$$\frac{\tau e}{m}\mathbf{E} = -\frac{\tau e}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \mathbf{v}. \quad (3.2)$$

Sabendo que o campo magnético uniforme é dado na direção de  $z$ ,  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  e que o movimento dos elétrons é restrito ao plano  $(xy)$ , logo a sua velocidade de uma forma geral pode ser escrita como  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ , reescrevemos a Eq. (3.2) como

$$\frac{\tau e}{m}E_x = -\frac{\tau e}{m}v_y B - v_x \quad (3.3)$$

$$\frac{\tau e}{m}E_y = \frac{\tau e}{m}v_x B - v_y. \quad (3.4)$$

Neste ponto definimos a frequência magnética  $\omega_B \equiv \frac{eB}{m}$ , como uma grandeza característica do problema. Utilizando a densidade de corrente  $\mathbf{j} = -nev$ , em que  $n$  é a densidade de números de partícula, obtemos

$$\frac{\tau e^2 n}{m}E_x = -\tau\omega_B j_y - j_x \quad (3.5)$$

$$\frac{\tau e^2 n}{m}E_y = \tau\omega_B j_x - j_y, \quad (3.6)$$

que pode ser reescrita em uma forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau\omega_B \\ -\tau\omega_B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \frac{\tau e^2 n}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Por meio desse resultado obtemos a condutividade e conseqüentemente a resistividade Hall. Para isso comparamos a Eq. (3.7) com a equação para densidade de corrente elétrica,  $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ , em que  $\sigma$  é a matriz de condutividade,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

os elementos  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{yx}$  são denominados condutividade Hall. Invertendo a matriz da Eq. (3.7), obtemos a condutividade como

$$\sigma = \frac{1}{m(1 + \tau\omega_B^2)} \begin{pmatrix} 1 & -\tau\omega_B \\ \tau\omega_B & 1 \end{pmatrix}.$$

Através desse resultado expressamos a resistividade ( $\rho$ ), da seguinte maneira

$$\sigma = \rho^{-1} = \frac{m}{\tau e^2 n} \begin{pmatrix} 1 & \tau\omega_B \\ -\tau\omega_B & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$



com suas componentes  $\rho_{xy}$  e  $\rho_{yx}$  denominadas resistividade Hall e,  $\rho_{xx}$  e  $\rho_{yy}$  a resistividade longitudinal. Dessa forma temos

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{\tau e^2 n} & \frac{B}{en} \\ -\frac{B}{en} & \frac{m}{\tau e^2 n} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Note que a resistividade Hall  $\rho_{xy}$  depende do campo magnético e de informações microscópicas do material como carga e densidade de número de elétrons,

$$\rho_{xy} = \frac{B}{en}. \quad (3.11)$$

Também observamos que  $\rho_{xx}$  depende do parâmetro de tempo de dispersão, mas não depende do campo magnético,

$$\rho_{yy} = \rho_{xx} = \frac{m}{\tau e^2 n}, \quad (3.12)$$

dessa forma ao analisar uma situação em que desprezamos a força que retarda o movimento, correspondente ao limite  $\tau \rightarrow \infty$ , a resistividade longitudinal tende a zero. Agora construindo um gráfico com as duas resistividades em função do campo magnético, obtemos a Figura 5.

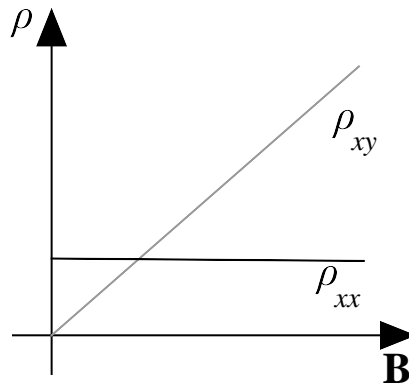


Figura 5 – Gráfico de resistividade pelo campo magnético  $\mathbf{B}$ .

Os experimentos realizados em 1980 por Von Klitzing, para a resistividade Hall, mostraram que a resistividade se dava por uma série de platôs em determinados números inteiros [9], Figura 6, diferindo do que vimos acima para o caso clássico. Essa informação mostra que o efeito Hall tem propriedades que não podem ser descritas apenas classicamente, requerendo assim uma descrição quântica.

## 3.2 Quantização e Problema de Landau

Os primeiros experimentos que exploraram o regime quântico do efeito Hall foram realizados em 1980 [9]. Como já mencionado, Von Klitzing obteve resultados experimentais

que mostraram que a resistividade Hall era caracterizada por uma série de platôs, Figura 6, diferindo do resultado obtido com o modelo de Drude, por conta desse modelo não descrever completamente o efeito usamos então uma teoria quântica.

A descrição quântica do efeito Hall envolve dois regimes distintos, denominados efeito Hall quântico inteiro (EHQI) e fracionário [10, 11]. Ambos foram primeiro descobertos experimentalmente.

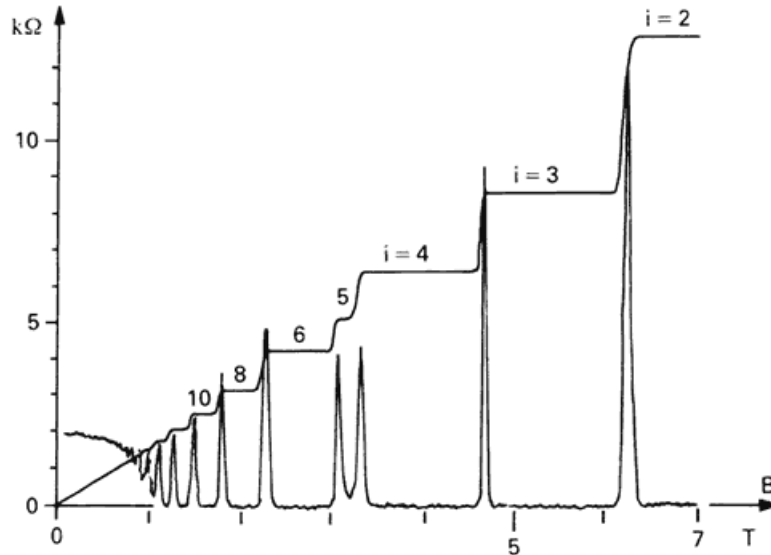


Figura 6 – Gráfico que demonstra o efeito Hall quântico inteiro. No qual, von Klitzing recebeu o prêmio Nobel de 1985. Fonte: TONG, D. *Lectures on the quantum hall effect*. arXiv:1606.06687, 2016.

Para descrever o sistema quanticamente vamos considerar um elétron livre em uma placa no plano  $(xy)$  e um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  perpendicular à placa, na direção de  $z$ . Com essas propriedades, podemos escrever de maneira geral a lagrangiana do sistema

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} + e\phi, \quad (3.13)$$

em que  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor,  $\phi$  o potencial escalar (elétrico) e  $e$  a carga do elétron. De forma geral, os potenciais se relacionam aos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  da seguinte forma

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Esses potenciais são campos de calibre e seguem as seguintes transformações

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\lambda \quad (3.15)$$

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Note que as transformações levam a uma lagrangiana que muda apenas por um termo de derivada total  $L \rightarrow L - e\frac{d\lambda}{dt}$ , deixando a ação e consequentemente as equações de movimento invariantes sobre transformações de calibre.

Para a fenomenologia o campo  $\phi$  pode ser desprezado, pois não há campo elétrico no sistema, logo a lagrangiana é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}. \quad (3.17)$$

O próximo passo é a obtenção da hamiltoniana, para isso precisamos definir o momento canônico, que pode ser extraído da lagrangiana Eq. (3.17)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i - eA_i. \quad (3.18)$$

Com a lagrangiana e o momento canônico obtidos podemos então escrever a hamiltoniana do sistema

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2. \quad (3.19)$$

Com esses resultados, podemos realizar a quantização do sistema afim de obter o espectro de energia, para isso é necessário levarmos os vetores em operadores e considerarmos as seguintes relações de comutação

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad (3.20)$$

$$[x_i, x_j] = 0 \quad (3.21)$$

$$[p_i, p_j] = 0, \quad (3.22)$$

dessa forma podemos escrever o hamiltoniano quântico,

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2. \quad (3.23)$$

Para a descrição da teoria o próximo passo é obter o espectro de energia, para isso definimos os operadores de criação e aniquilação, que são escritos em termos do momento mecânico do sistema,

$$\boldsymbol{\pi} \equiv m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}. \quad (3.24)$$

Logo, os operadores de aniquilação,  $a$  e criação,  $a^\dagger$  são dados da seguinte forma

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2eB}} (\pi_x - i\pi_y) \quad \text{e} \quad a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2eB}} (\pi_x + i\pi_y). \quad (3.25)$$

Note que a regra de comutação entre  $a$  e  $a^\dagger$  é dada por

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (3.26)$$

Conseqüentemente podemos escrever o hamiltoniano do sistema em termos desses operadores

$$H = \frac{\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2m} \quad (3.27)$$

$$= \hbar\omega_B \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (3.28)$$

em que  $\omega_B = \frac{eB}{m}$  é a frequência do sistema.

Após obtida a hamiltoniana quântica em termos dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$ , construímos os estados no espaço de Hilbert, de modo geral podemos escrever um estado com a atuação de  $a^\dagger$  da seguinte forma

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad (3.29)$$

em que o estado de vácuo  $|0\rangle$ , é aniquilado com a atuação do operador  $a|0\rangle = 0$ . Note que todo o espaço de Hilbert pode ser obtido com atuações dos operadores de criação e aniquilação, por meio das seguintes relações

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle \\ a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Com as considerações sobre os estados e o hamiltoniano, podemos por meio da equação de Schroedinger

$$H|n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (3.31)$$

finalmente obter o espectro de energia, esse dado por

$$E_n = \omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right) ; n \in \text{inteiros}. \quad (3.32)$$

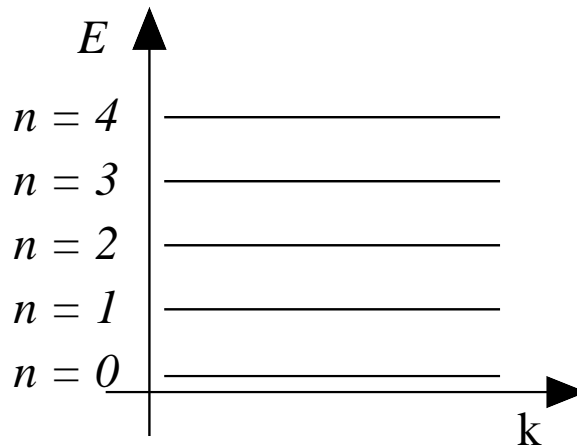


Figura 7 – Níveis energéticos de Landau.

Com o resultado do espectro, podemos dizer que na presença de um campo magnético os níveis de energia da partícula são igualmente espaçados, com o intervalo entre cada nível dado por  $\omega_B$  e proporcional ao campo magnético  $\mathbf{B}$ , Figura 7. Esses níveis de energia são denominados níveis de Landau.

### 3.3 Função de Onda

Com o espectro de energia obtido, vamos então construir a função de onda correspondente aos estados. Para isso adotamos um calibre, que satisfaz a propriedade do

sistema de considerar o campo magnético dado por  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ , sendo assim

$$\nabla \times \mathbf{A} = B\hat{z}. \quad (3.33)$$

Note que existem diversas escolhas de calibre que satisfazem a equação acima. Nesta seção optamos por usar o calibre de Landau, dado por

$$\mathbf{A} \equiv xB\hat{y}. \quad (3.34)$$

Após a escolha do calibre, reescrevemos a hamiltoniana da Eq. (3.23), para posteriormente obter a função de onda. Logo temos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + 2ep_y Bx + (eBx)^2) \\ &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + (p_y + eBx)^2). \end{aligned} \quad (3.35)$$

A escolha desse calibre nos leva à quebra de simetria rotacional e translacional na direção de  $x$ . Mas, torna manifesta a invariância translacional na direção de  $y$ , permitindo assim escrever autofunções que são simultaneamente funções do hamiltoniano e do operador  $p_y$ . Temos então que as funções de ondas possuem soluções de onda plana para a variável  $y$ , ou seja,

$$\psi_k(x, y) = e^{iky} \phi(x). \quad (3.36)$$

Ao aplicar o hamiltoniano da Eq. (3.35) na função de onda Eq. (3.36), temos

$$\begin{aligned} H\psi_k(x, y) &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + (p_y + eBx)^2) e^{iky} \phi(x) \\ &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + (k + eBx)^2) \psi_k(x, y) \\ &\equiv H_k \psi_k(x, y). \end{aligned} \quad (3.37)$$

A partir desse resultado é simples notar que o hamiltoniano pode ser escrito como sendo de um oscilador harmônico deslocado,

$$\begin{aligned} H_k &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{e^2 B^2}{2m} \left( \frac{k}{eB} + x \right)^2 \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_B^2}{2} (k\ell_B^2 + x)^2, \end{aligned} \quad (3.38)$$

em que  $\ell_B^2 = \frac{1}{eB}$  é definido como o comprimento magnético, essa é uma grandeza característica de fenômenos quânticos na presença de um campo magnético.

O fato do hamiltoniano da Eq. (3.38) ser o mesmo de um oscilador harmônico centralizado em  $x = -k\ell_B^2$ , resulta no mesmo autovalor de energia da Eq. (3.32),

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \omega_B. \quad (3.39)$$

Também retorna uma função de onda dependente de dois números quânticos  $n \in \mathbb{Z}$  e  $k \in \mathcal{R}$ , podendo ser escrita como

$$\psi_{n,k}(x,y) = C_n e^{iky} H_n(kl_B^2 + x) e^{-\frac{(kl_B^2 + x)^2 - 1}{2l_B^2}}, \quad (3.40)$$

em que  $H_n$  são os polinômios de Hermite e  $C_n$  as constantes de normalização.

A função de onda possuir dependência em dois números quânticos mostra uma degenerescência, pois a energia só depende do número quântico  $n$ , já o surgimento do segundo número quântico é devido à simetria translacional na direção de  $y$ .

Portanto, vamos discutir como obter o número de degenerescência do sistema. Para isso restringimos o plano à uma região finita, sendo essa dada por um retângulo de lados  $L_x$  e  $L_y$ . No entanto, realizar a restrição do sistema a um comprimento  $L_y$  se equivale à uma partícula na caixa, que por sua vez tem o momento  $k$  quantizado e dado por  $k = \frac{2\pi}{L_y} N_{deg}$ , em que  $N_{deg}$  representa o número de degenerescência do sistema e é dado por números inteiros. Agora ao restringirmos o sistema na direção de  $x$ , notamos algumas sutilezas, pois através da escolha de calibre a invariância translacional não fica manifesta nessa direção. Assim, utilizando que a exponencial da função de onda é localizada em  $x = -kl_B^2$  e que o sistema é confinado em  $0 \leq x \leq L_x$ , temos que  $k$  pode assumir valores entre  $0 \geq k \geq -\frac{L_x}{l_B^2}$ . Com essas constatações podemos escrever o número de degenerescência como

$$N_{deg} = \frac{L_y}{2\pi} \int_{-\frac{L_x}{l_B^2}}^0 dk = \frac{L_y L_x}{2\pi l_B^2} = \frac{eBA}{2\pi}, \quad (3.41)$$

em que  $A = L_y L_x$  é a área do sistema. Esse resultado mostra um número de degenerescência grande em cada nível de Landau, pois o campo magnético é intenso. Vemos no decorrer do trabalho que o número de degenerescência é responsável por interessantes aspectos da física do EHQ.

### 3.4 Estados de Borda

Após as construções do espectro de energia e das funções de onda, um aspecto importante que discutimos no trabalho são os estados de bordas. Esse efeito de borda ou modos de borda acontece em sistemas com tamanhos finitos. Analisamos de maneira intuitiva como entender esse efeito.

Para o sistema discutido na seção anterior em que as partículas descrevem movimentos orbitais na placa, temos que na borda as órbitas se chocam com os limites físicos, desse modo, ao longo dela as partículas realizam movimento apenas em uma direção, caracterizando assim uma corrente, Figura 8.

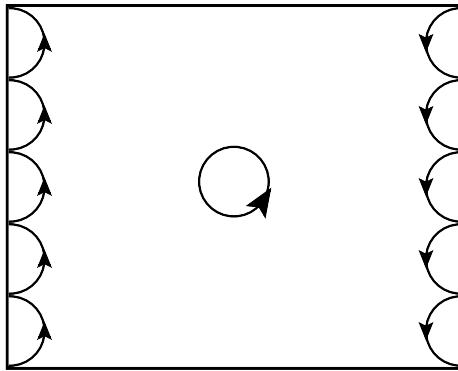


Figura 8 – Propagação de elétrons na borda do sistema.

Para descrever melhor esse sistema, abordamos um potencial confinante,  $V(x)$ , tal que desempenha o papel de borda física do sistema. Para escrever esse potencial analisamos a função de onda, dada na Eq. (3.40) que se dá em termos de exponenciais gaussianas com comprimento característico  $\ell_B$ . Portanto, tendo um potencial com comportamento suave na escala de  $\ell_B$ , Figura 9, podemos expandir o mesmo em torno da borda, no ponto  $x_0$ ,

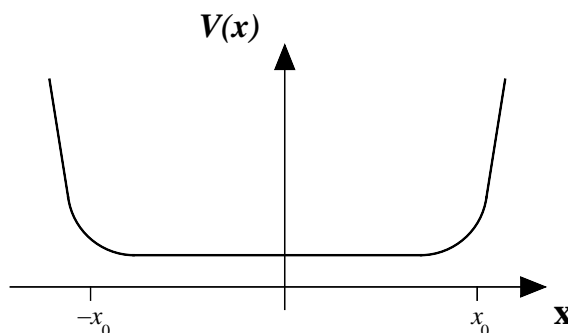


Figura 9 – Potencial confinante  $V(x)$ .

$$V(x) \sim V(x_0) + \frac{\partial V(x_0)}{\partial x} (x - x_0) + \dots$$

Considerando até a primeira ordem, o primeiro termo é uma constante que pode ser ignorada e o segundo termo é correspondente ao campo elétrico. De forma aproximada podemos escrever o potencial como  $V(x) \sim -Ex$  e a hamiltoniana como

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + (p_y + eBx)^2) - eEx. \quad (3.42)$$

Completando um quadrado na expressão acima podemos reescrever o hamiltoniano como o de um oscilador harmônico deslocado, como o realizado na seção anterior. Assim, as funções de onda são equivalentes a Eq. (3.40), porém com o argumento deslocado,

$$\psi_{n,k}(x, y) \rightarrow \psi_{n,k} \left( x - \frac{mE}{eB^2}, y \right). \quad (3.43)$$

Com o hamiltoniano e a função de onda, obtemos a energia do sistema, que depende linearmente de  $k$  em cada nível de Landau,

$$E_{n,k} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega_B + eE \left(k\ell_B^2 - \frac{eE}{m\omega_B^2}\right) + \frac{m}{2} \left(\frac{E}{B}\right)^2. \quad (3.44)$$

Note que ao desligarmos o campo elétrico, obtemos o mesmo resultado que anteriormente na Eq. (3.39).

Com a energia dependendo do momento temos uma velocidade no sistema, que surge na direção resultante do produto vetorial entre o campo elétrico e o magnético,  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Assim, para o sistema temos uma velocidade na direção de  $y$ , que pode ser calculada a partir de

$$v_y = -\frac{1}{eB} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \quad (3.45)$$

$$= \frac{E}{B}. \quad (3.46)$$

Com o resultado da Eq. (3.45), inferimos que o último termo da Eq. (3.44) é a energia cinética da partícula, que agora se movimenta na borda. Esse resultado equivale à discussão heurística realizada acima, em que temos movimento de cargas nas bordas, Figura 8.

As funções de onda Eq. (3.43) são caracterizadas por um momento  $k$  e estão em posições diferentes do espaço, assim para cada borda temos uma velocidade diferente. Para a borda direita  $v_y > 0$  e para a esquerda  $v_y < 0$ , então, em cada borda os estados são quirais, ou seja, realizam movimentos em direções opostas.

### 3.5 Solução no Calibre Simétrico

Nesta seção abordamos o problema de Landau utilizando outro calibre, pois no calibre de Landau obtivemos resultados com base em simetrias retangulares. Agora observamos quais os resultados obtidos por meio de simetrias circulares. Nesse calibre discutimos as funções de onda, a degenerescência e as consequências da álgebra. No decorrer do trabalho discutimos as propriedades do EHQ no calibre simétrico, definido como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B} \\ &= -\frac{1}{2} y B \hat{x} + \frac{1}{2} x B \hat{y}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Para obter as funções de onda, definimos novos operadores de criação e aniquilação, de modo que comutem com o hamiltoniano do sistema, Eq. (3.27). Dessa forma obtemos as autofunções que são simultaneamente funções do hamiltoniano e dos novos operadores. Para realizar esse processo primeiramente construímos a álgebra dos operadores, assim definimos outro operador de momento,

$$\tilde{\pi} \equiv \mathbf{p} - e\mathbf{A}, \quad (3.48)$$



que difere do momento mecânico pelo sinal de menos, significando que, em contraste com  $\boldsymbol{\pi}$ , esse novo momento não é um invariante de calibre.

Realizada a definição do operador e a fixação de calibre, obtemos a álgebra por trás desses novos operadores,

$$[\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y] = ieB \quad (3.49)$$

$$[\pi_i, \tilde{\pi}_j] = 0. \quad (3.50)$$

Utilizamos o momento  $\tilde{\pi}$  para encontrar o número quântico correspondente a degenerescência do problema de Landau. Definindo o segundo par de operadores de criação e aniquilação em termos desse operador, como

$$b \equiv \frac{1}{\sqrt{2eB}} (\tilde{\pi}_x + i\tilde{\pi}_y) \quad \text{e} \quad b^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2eB}} (\tilde{\pi}_x - i\tilde{\pi}_y). \quad (3.51)$$

Com essas definições realizadas, o próximo passo é escrever os estados e para isso, devemos abordar um operador que comute com a hamiltoniana, pois assim tratamos autofunções que diagonalizem simultaneamente a hamiltoniana e o operador que nos leva ao número quântico que corresponde a degenerescência. Portanto, escolhemos o operador  $L_z$ , que é a componente  $z$  do operador de momento angular, dado por

$$L_z = xp_y - yp_x. \quad (3.52)$$

Realizando algumas manipulações algébricas e utilizando as definições dos operadores de criação e aniquilação, escrevemos o momento angular na direção de  $z$ , como

$$L_z = a^\dagger a - b^\dagger b. \quad (3.53)$$

Note que com esse resultado é simples mostrar que a relação de comutação do mesmo com o hamiltoniano é  $[H, L_z] = 0$ . Podemos então, descrever estados que são simultaneamente autofunções de  $H$  e  $L_z$ . Dessa forma, temos um estado tal que

$$H|n, m\rangle = E_n|n, m\rangle \quad (3.54)$$

$$L_z|n, m\rangle = m|n, m\rangle. \quad (3.55)$$

Note que  $m$  é o autovalor do momento angular e também é o número quântico associado a degenerescência.

Para descrever esses estados de maneira geral, precisamos obter a álgebra dos operadores  $H$  e  $L_z$ . Assim, utilizando as Eqs. (3.28) e (3.53),

$$\begin{aligned} [H, a] &= a & [L, a] &= -a \\ [H, a^\dagger] &= -a^\dagger & [L, a^\dagger] &= a^\dagger \\ [H, b] &= 0 & [L, b] &= b \\ [H, b^\dagger] &= 0 & [L, b^\dagger] &= -b^\dagger. \end{aligned}$$

Observando os resultados acima concluímos que os operadores  $a$  e  $a^\dagger$ , abaixam e levantam em uma unidade o número quântico associado a energia  $n$ , pois os operadores possuem uma relação não trivial com o hamiltoniano, exatamente igual ao caso do oscilador harmônico. Note que  $a$  e  $a^\dagger$  também possuem relações de comutação diferentes de zero com o operador  $L_z$ , que também muda o número quântico associado a degenerescência. Para  $b$  e  $b^\dagger$  observamos que a energia não se altera, ou seja, apenas atuam na degenerescência. A partir dessas constatações definimos o estado fundamental da seguinte maneira  $|0, 0\rangle$ . Portanto, temos que o estado fundamental é aniquilado por  $a$  e  $b$

$$a|0, 0\rangle = 0 \quad \text{e} \quad b|0, 0\rangle = 0. \quad (3.56)$$

Por outro lado, o estado mais geral no espaço de Hilbert é obtido atuando os operadores de criação sobre o estado fundamental,

$$|n, m\rangle \equiv \frac{(b^\dagger)^{m+n} (a^\dagger)^n}{\sqrt{n!m!}} |0, 0\rangle. \quad (3.57)$$

Precisamos agora construir a função de onda do estado fundamental, para isso escrevemos equações diferenciais para os estados, utilizando o fato do estado de vácuo ser aniquilado pelo operador  $a$ , ou seja,  $a|0, m\rangle = 0$ . Realizamos esse processo da seguinte maneira, primeiramente escrevemos explicitamente o operador  $a$ ,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2eB}} (\pi_x - i\pi_y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2eB}} \left( -i(\partial_x - i\partial_y) + \frac{eB}{2}(-y - ix) \right), \end{aligned} \quad (3.58)$$

Agora realizando uma troca de variável, para tratar o problema de forma mais simples, em que definimos variáveis holomórficas e anti-holomórficas como

$$z \equiv x - iy \quad \text{e} \quad \bar{z} \equiv x + iy, \quad (3.59)$$

consequentemente temos as seguintes derivadas nesse novo conjunto de variáveis,

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \quad \text{e} \quad \bar{\partial}_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y). \quad (3.60)$$

Essas coordenadas são definidas como funções holomórficas e anti-holomórficas, ou seja,  $\partial_z z = \bar{\partial}_z \bar{z} = 1$  e  $\partial_z \bar{z} = \bar{\partial}_z z = 0$ . Por fim, reescrevemos os operadores de criação e aniquilação em termos de operadores diferenciais,

$$a = -i\sqrt{2} \left( l_B \bar{\partial}_z + \frac{z}{4l_B} \right) \quad \text{e} \quad a^\dagger = -i\sqrt{2} \left( l_B \partial_z - \frac{\bar{z}}{4l_B} \right). \quad (3.61)$$

Dessa forma podemos obter uma equação diferencial para o estado fundamental degenerado, no qual definimos a função de onda como

$$\psi_{0m}(z, \bar{z}) \equiv \langle z|0, m\rangle, \quad (3.62)$$

de modo que ao utilizarmos o operador de aniquilação no estado fundamental degenerado  $a|0, m\rangle = 0$ , temos

$$\begin{aligned} -i\sqrt{2} \left( l_B \bar{\partial}_z + \frac{z}{4l_B} \right) |0, m\rangle &= 0 \\ \langle z | \left( l_B \bar{\partial}_z + \frac{z}{4l_B} \right) |0, m\rangle &= 0 \\ l_B \bar{\partial}_z \psi_{0m}(z, \bar{z}) + \frac{z}{4l_B} \psi_{0m}(z, \bar{z}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

A resolução da equação diferencial é simples, mas devemos ressaltar a sutileza de que estamos trabalhando com variáveis holomórficas e anti-holomórficas, de modo que a constante de integração pode ser uma variável holomórfica. Levando isso em consideração escrevemos a solução mais geral possível como

$$\psi_{0m}(z, \bar{z}) = f(z) e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}, \quad (3.64)$$

em que  $f(z)$  é uma função holomórfica e definimos  $|z|^2 \equiv z\bar{z}$ . Para obter a forma funcional de  $f(z)$  devemos atuar o operador de aniquilação  $b$  na função de onda, lembrando que a atuação desse operador também leva a aniquilação do estado para  $m = 0$ . Portanto precisamos escrever  $b$  e  $b^\dagger$ , como

$$b = -i\sqrt{2} \left( l_B \partial_z + \frac{\bar{z}}{4l_B} \right) \quad \text{e} \quad b^\dagger = -i\sqrt{2} \left( l_B \bar{\partial}_z - \frac{z}{4l_B} \right). \quad (3.65)$$

Atuando o operador diferencial na Eq. (3.64), para  $m = 0$ ,

$$\begin{aligned} b\psi_{00}(z, \bar{z}) &= 0 \\ l_B (\partial_z f(z)) e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} - \frac{\bar{z}}{4l_B} f(z) e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} + \frac{\bar{z}}{4l_B} f(z) e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} &= 0 \\ \partial_z f(z) &= 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Com essa operação temos que  $f(z) = cte$ . Com todos esses resultados obtidos, podemos escrever a função de onda do estado fundamental como

$$\psi_{00}(z, \bar{z}) \sim e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \quad (3.67)$$

Para construir os estados fundamentais degenerados, atuamos o operador de criação na função de onda acima, assim,

$$\begin{aligned} \psi_{01}(z, \bar{z}) &= b^\dagger \psi_{00}(z, \bar{z}) \\ &\sim \frac{z}{2l_B} e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Note que, cada vez que atuamos o operador  $b^\dagger$  na função de onda, ganhamos um fator multiplicativo da forma  $\frac{z}{2l_B}$ . Portanto, podemos escrever a função de onda para os níveis de Landau mais baixo da seguinte forma

$$\psi_{0m}(z, \bar{z}) \sim (z)^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \quad (3.69)$$

A função de onda fornece uma base no estado fundamental, porém atuando com o operador  $a^\dagger$  é possível construir funções de onda para os demais níveis de Landau.

### 3.6 Álgebra Magnética

Nessa seção discutimos os operadores de translação magnética de modo a mostrar de maneira simples suas propriedades e como uma fase surge quando realizamos um transporte cíclico. Para descrever e discutir esses fatos, precisamos retornar as configurações discutidas inicialmente neste capítulo em que partículas realizam movimentos no plano  $(xy)$  na presença de um campo magnético  $\mathbf{B}$  na direção  $z$ . Esse sistema têm como equação de movimento clássica a seguinte expressão

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.70)$$

Para o caso em que temos o movimento restrito ao plano e o campo magnético perpendicular, podemos escrever

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -eB \frac{dy}{dt}; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -eB \frac{dx}{dt}. \quad (3.71)$$

Esses sistemas de equações diferenciais acopladas tem como solução as seguintes expressões

$$x(t) = X - r \sin(\omega_B t + \theta) \quad (3.72)$$

$$y(t) = Y + r \cos(\omega_B t + \theta), \quad (3.73)$$

em que  $X$  e  $Y$  são coordenadas do centro da órbita e  $r$  e  $\theta$  são constantes equivalentes ao raio da órbita e uma fase, respectivamente. As coordenadas do centro da órbita obedecem as equações de evolução do sistema na representação de Heisenberg,

$$i \frac{dX}{dt} = [X, H] = 0 \quad (3.74)$$

$$i \frac{dY}{dt} = [Y, H] = 0. \quad (3.75)$$

Assim às identificamos como constantes de movimento do sistema. Esses também podem ser escritos em termos dos operadores que manifestam a degenerescência do sistema Eq. (3.48). Para a demonstração disso partimos da Eq. (3.73), e podemos então escrever as constantes de movimento como

$$X = x(t) - \frac{1}{\omega_B} \frac{dy}{dt} \quad (3.76)$$

$$Y = y(t) + \frac{1}{\omega_B} \frac{dx}{dt}. \quad (3.77)$$

Utilizando o calibre simétrico Eq. (3.47) e as Eqs. (3.24) e (3.48), podemos reescrever as expressões para  $X$  e  $Y$ , como

$$X = \frac{1}{eB} (eBx - \pi_y) = -\frac{\tilde{\pi}_y}{eB} \quad (3.78)$$

$$Y = \frac{1}{eB} (\pi_x - eBy) = \frac{\tilde{\pi}_x}{eB}. \quad (3.79)$$

Podemos então obter a álgebra de  $X$  e  $Y$ , utilizando a Eq. (3.49) e a Eq. (3.20). Dessa forma temos relações de comutação com os operadores de posição  $x$  e  $y$ , dados por

$$\begin{aligned} [X, x] &= 0 \\ [X, y] &= il_B^2 \\ [Y, x] &= -il_B^2 \\ [Y, y] &= 0 \\ [X, Y] &= il_B^2. \end{aligned}$$

Com a álgebra determinada, podemos escrever os operadores que geram translações magnéticas no plano  $(xy)$ , com os geradores definidos como,

$$\tilde{\pi}_x = eBY \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}_y = -eBX. \quad (3.80)$$

Dessa forma o operador de translação magnética  $T(\mathbf{a})$ , que desloca um vetor  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ , é definido como

$$T(\mathbf{a}) \equiv e^{-i\mathbf{a}\cdot\tilde{\pi}}. \quad (3.81)$$

Para demonstrar que esse operador realmente realiza uma translação, definimos um vetor posição da seguinte maneira  $\mathbf{x} \equiv (x, y)$  e um vetor  $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2)$ . Com essas definições mostramos que ele desloca o operador posição da seguinte maneira

$$\begin{aligned} T^\dagger(\mathbf{a}) \mathbf{x} T(\mathbf{a}) &= e^{i\mathbf{a}\cdot\tilde{\pi}} \mathbf{x} e^{-i\mathbf{a}\cdot\tilde{\pi}} \\ &= e^{\frac{i}{l_B^2} \mathbf{a}\cdot(Y\hat{x}-X\hat{y})} \mathbf{x} e^{-\frac{i}{l_B^2} \mathbf{a}\cdot(Y\hat{x}-X\hat{y})} \\ &= e^{\frac{i}{l_B^2} \mathbf{a}\cdot(Y\hat{x}-X\hat{y})} \left( e^{-\frac{i}{l_B^2} \mathbf{a}\cdot(Y\hat{x}-X\hat{y})} \mathbf{x} + \left[ \mathbf{x}, e^{-\frac{i}{l_B^2} (a_1Y - a_2X)} \right] \right) \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Podemos mostrar mais propriedades dos operadores de translação magnética, uma delas é dada a partir da composição desse operador, ou seja, como ocorrem suscetivas translações. Para a demonstração desse fato precisamos definir dois vetores arbitrários,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , no plano  $(xy)$ . Com a definição desses vetores e usando a fórmula BCH (Baker, Campbell e Hausdorff),

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]},$$

note que, podemos ter mais termos de comutadores na exponencial, mas os comutadores que tratamos são dados por números, desse modo não possuem caráter operatorial, logo  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ . Com isso a regra de composição é

$$\begin{aligned} T(\mathbf{a}) T(\mathbf{b}) &= e^{-i\mathbf{a}\cdot\tilde{\pi}} e^{-i\mathbf{b}\cdot\tilde{\pi}} \\ &= e^{-i(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\tilde{\pi}} e^{-\frac{1}{2}a_i b_j [\tilde{\pi}_i, \tilde{\pi}_j]} \\ &= e^{-i(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\tilde{\pi}} e^{-\frac{i}{2l_B^2} a_i b_j \epsilon_{ij}}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

em que  $\epsilon_{ij}$  é o símbolo antissimétrico de Levi-Civita no plano, com  $\epsilon_{12} \equiv 1$ . Vale ressaltar que  $\tilde{\pi}_1 \equiv \tilde{\pi}_x$  e  $\tilde{\pi}_2 \equiv \tilde{\pi}_y$ .

Para analisar podemos reescrever a Eq. (3.83), da seguinte forma

$$T(\mathbf{a})T(\mathbf{b}) = T(\mathbf{a} + \mathbf{b})e^{-\frac{i}{2l_B^2}a_i b_j \epsilon_{ij}}, \quad (3.84)$$

assim temos, que uma composição de duas translações gera uma fase e para o melhor entendimento, vamos analisar uma translação cíclica, em que  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são dados na direção  $x$  e  $y$  respectivamente. Essas translações podem ser vistas na Figura 10.

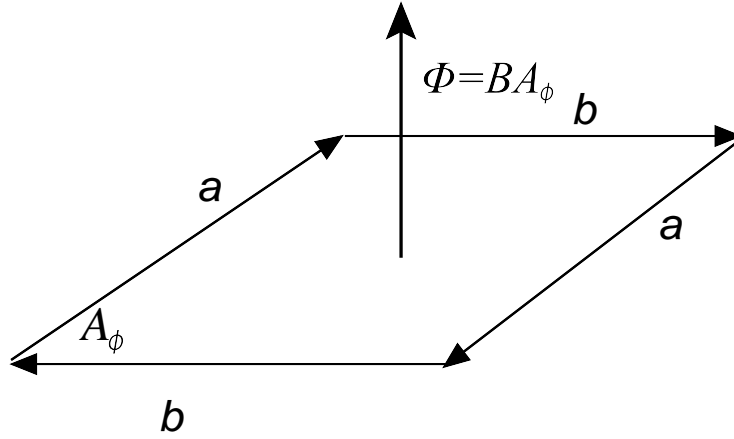


Figura 10 – Transporte cíclico dado pelos operadores de translação magnética.

Os operadores de translação magnética responsáveis por realizar as translações da Figura 10, devem ser escritos da seguinte maneira

$$T(-\mathbf{a})T(-\mathbf{b})T(\mathbf{a})T(\mathbf{b}).$$

Podemos utilizar a fórmula BCH, a Eq. (3.83) e a álgebra magnética para escrever esses conjuntos de operadores de translação da seguinte forma

$$\begin{aligned} T(-\mathbf{a})T(-\mathbf{b})T(\mathbf{a})T(\mathbf{b}) &= e^{i\mathbf{a}\cdot\tilde{\pi}}e^{i\mathbf{b}\cdot\tilde{\pi}}e^{-i\mathbf{a}\cdot\tilde{\pi}}e^{-i\mathbf{b}\cdot\tilde{\pi}} \\ &= e^{i\mathbf{a}\cdot\tilde{\pi}}e^{i\mathbf{b}\cdot\tilde{\pi}}e^{-i\mathbf{b}\cdot\tilde{\pi}}e^{-i\mathbf{a}\cdot\tilde{\pi}}e^{-\frac{i}{l_B^2}a_i b_j \epsilon_{ij}} \\ &= e^{-\frac{i}{l_B^2}a_i b_j \epsilon_{ij}}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Mostrando que se realizamos uma translação em uma superfície fechada, obtemos uma fase proporcional ao tamanho de cada translação, nesse caso  $a$  e  $b$ . Podemos ainda trabalhar nessa fase, levando o tensor de Levi-Civita de duas dimensões para três, ganhando mais um índice que será contraído com a direção  $\hat{z}$ , dessa forma o termo de fase pode ser reescrito como,

$$a_i b_j \hat{z} \epsilon_{kij} = \hat{z} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Essa equação equivale a uma área  $A_\phi$  que está delimitada pelas translações realizadas. Agora reescrevendo a Eq. (3.85), temos

$$T(-\mathbf{a})T(-\mathbf{b})T(\mathbf{a})T(\mathbf{b}) = e^{-ieBA_\phi}. \quad (3.86)$$

A fase é dada pelo fluxo magnético total através de uma área  $\Phi = BA_\phi$  e pode ser contextualizada com a fase do efeito Aharonov-Bohm. Para entender melhor esse fato, pensamos em uma superfície desse mesmo sistema, mas que tenhamos apenas um elétron em uma determinada área  $A_\phi$ , Figura 10. Agora, para calcular o fluxo magnético através dessa superfície, usamos

$$\Phi = \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = BA_\phi. \quad (3.87)$$

Por fim, podemos escrever a fase de um transporte magnético cíclico como a fase do efeito Aharonov-Bohm

$$\exp(-ie\Phi) = \exp\left(-ie \oint_C d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\right),$$

em que  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor e  $C$  é um contorno fechado.

Podemos também definir esse fluxo como sendo um número inteiro de uma quantidade característica de fluxo  $\phi_0$ ,

$$\Phi \equiv N_\phi \phi_0, \quad (3.88)$$

em que  $\phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e}$  ou em unidades naturais  $\phi_0 = 2\pi$ . Agora sabendo que o fluxo total é dado por  $\Phi = BA_\phi$ , podemos escrever esse número inteiro  $N_\phi$  como

$$N_\phi = \frac{BA_\phi}{\phi_0} = \frac{BA_\phi}{2\pi} e. \quad (3.89)$$

Note que esse resultado é o mesmo obtido para a degenerescência Eq. (3.41). Dessa forma, identificamos  $N_\phi$ , como sendo o número de degenerescência do sistema.

### 3.7 Função de Onda de Muitas Partículas

Nesta seção realizamos a generalização da função de onda de uma única partícula para descrever um sistema de muitas partículas, mas ainda no nível de Landau mais baixo (NLB). Para isso partimos da Eq. (3.69),

$$\psi(z_1 \dots z_N) = f(z_1 \dots z_N) e^{-\sum_{i=1}^N \frac{1}{4l_B^2} |z_i|^2}. \quad (3.90)$$

Para avançar nas generalizações devemos entender como essa função de onda deve ser. Deve ter contida em sua forma o fato de tratar de férmions, que são descritos por funções antissimétricas, sob troca de partícula, Eq.(2.16). Com isso ao analisar a equação acima, podemos observar que o termo que pode descrever uma troca de partícula do tipo  $z_i \rightarrow z_j$  e  $z_j \rightarrow z_i$ , é a função  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Portanto a mesma deve possuir caráter antissimétrico. Para que ela seja antissimetrizada utilizamos o método do determinante de

Slater, que é dado por

$$\psi(z_0, z_1, \dots, z_{N-1}) = \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \cdots & \psi_1(x_N) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \cdots & \psi_2(x_N) \\ \psi_3(x_1) & \psi_3(x_2) & \cdots & \psi_3(x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_N(x_1) & \psi_N(x_2) & \cdots & \psi_N(x_N) \end{vmatrix}. \quad (3.91)$$

Utilizando a equação acima, temos que o resultado do determinante de Slater para a função  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  é dado de forma geral por

$$f(z_0, z_1, \dots, z_{N-1}) = \begin{vmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_N^0 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_N^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (z_i - z_j). \quad (3.92)$$

Portanto, utilizando esse resultado para realizar a generalização para uma função de  $N$  partículas, temos que a função de onda do NLB pode ser escrita como

$$\psi(z_0, z_1, \dots, z_{N-1}) = \prod_{i < j}^{N-1} (z_i - z_j) e^{-\sum_{i=1}^N \frac{1}{4l_B^2} |z_i|^2}. \quad (3.93)$$

Note que o produtório deve correr em  $i < j$  e  $i \neq j$ . Outro ponto evidente na forma da função de onda é que ela estabelece o princípio de exclusão de Pauli, pois quando dois elétrons se sobrepõem o pré-fator desaparece.

### 3.8 Fluido Incompressível

Nesta seção realizamos a análise e discussão sobre uma quantidade importante da teoria, denominada fator de preenchimento ou *filling fraction* dada por  $\nu$ . Definimos o fator de preenchimento como sendo a razão do número de elétrons  $N_e$  pela degenerescência  $N_{deg}$ ,

$$\nu \equiv \frac{N_e}{N_{deg}}. \quad (3.94)$$

Para discutir mais sobre a *filling fraction*, analisamos um resultado já conhecido da teoria do EH, a resistividade Hall. Essa quantidade é dada pela Eq. (3.11),

$$\rho_{xy} = \frac{B}{en}. \quad (3.95)$$

em que  $n$  é densidade de elétrons,  $n = \frac{N_e}{A}$ . Realizando algumas manipulações algébricas e identificando o número de degenerescência como na Eq. (3.89), obtemos

$$\rho_{xy} = \frac{BA}{eN_e} = \frac{N_{deg}\phi_0}{eN_e} \quad (3.96)$$

$$= \frac{N_{deg}}{N_e} \frac{2\pi}{e^2} = \frac{2\pi}{e^2} \frac{1}{\nu}. \quad (3.97)$$



Por meio desse resultado vemos a importância do fator de preenchimento, pois ele aparece na resistividade Hall e conseqüentemente na condutividade. O que leva ao entendimento do porquê as medidas experimentais da resistividade Hall são dadas por uma série de platôs, Figura 6. Sendo que  $\nu$  é dado por números inteiros e fracionários o que distingue o efeito Hall em inteiro ou fracionário,

$$\underbrace{\nu = 1, 2, 3, \dots}_{\text{EHQ inteiro}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \dots}_{\text{EHQ fracionário}} \quad . \quad (3.98)$$

Para analisar mais a *filling fraction*, discutimos a incompressibilidade do sistema. Para isso é instrutivo considerar exemplos simples, em que um dado sistema possui estados com degenerescência igual a quatro, sabendo que o mesmo possui quatro elétrons, temos

$$\nu = \frac{N_e}{N_{deg}} = \frac{4}{4} = 1.$$

Esse sistema pode ser visto na Figura 11. Com esse exemplo é fácil observar que podemos obter de maneira simples  $\nu = 1, 2, 3, 4, \dots$ , apenas pensando que ao invés de quatro elétrons o sistema possui oito elétrons. Assim a *filling fraction* é dada por  $\nu = 2$ , Figura 12. Seguindo esse raciocínio, para um sistema com doze elétrons temos  $\nu = 3$ , Figura 13, e assim sucessivamente para obter os demais valores inteiros de  $\nu$ .

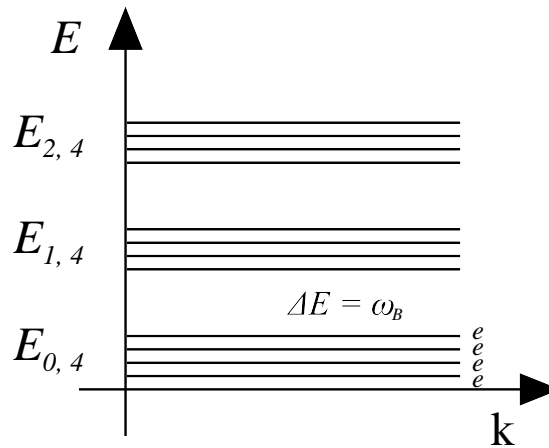


Figura 11 – Níveis de Landau degenerado, representando uma *filling fraction*  $\nu = 1$ .

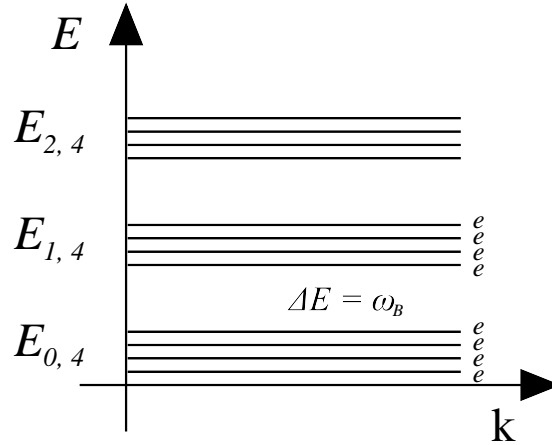


Figura 12 – Níveis de Landau degenerado, representando uma *filling fraction*  $\nu = 2$ .

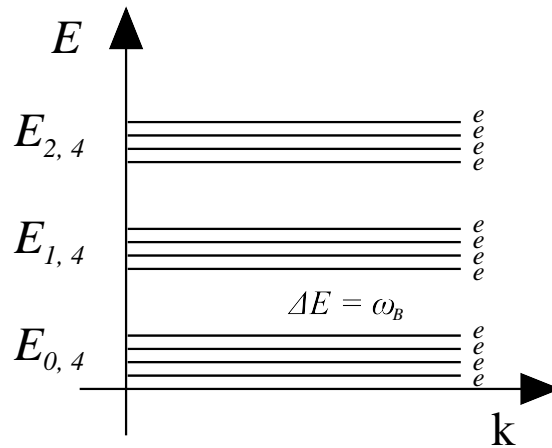


Figura 13 – Níveis de Landau degenerado, representando uma *filling fraction*  $\nu = 3$ .

Retornando a abordar a ideia de incompressibilidade, pensando nos níveis de Landau, em que o espectro de energia é dado pela Eq. (3.32), ao analisar um sistema com dois níveis de energia, Figura 11, percebemos que a diferença de energia entre eles é dada por

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \omega_B. \quad (3.99)$$

Note que existe um *gap* de energia entre os níveis de Landau, assim, quando os elétrons vão para o estado excitado há um gasto de energia proporcional ao campo magnético  $\mathbf{B}$ . Para prosseguir com o pensamento precisamos lembrar que a equação para o número de degenerescência é dada em termos da área, Eq. (3.89),

$$N_{deg} = \frac{eBA}{2\pi}. \quad (3.100)$$

Dessa expressão observamos que ao comprimir a área do sistema, consequentemente diminuimos o número de degenerescência. Desse modo, podemos pensar de forma intuitiva em um exemplo, que ao comprimir o sistema descrito pela Figura 11, fazemos com que

---

$N_{deg} = 4$ , diminua até  $N_{deg} = 3$  e um dos quatro elétrons deverá ir para o próximo nível, mas note que nesse processo ocorre um gasto de energia devido ao *gap*. Sendo assim, é impossível que o elétron se excite para um nível superior. Mostrando então, que o sistema deve ser incompressível.



## 4 Efeito Hall Fracionário

Nesta seção discutimos o porquê do efeito Hall quântico fracionário ser um dos problemas mais complexos da física da matéria condensada. Apresentamos uma teoria para o estado fundamental do sistema, descrita pela função de onda de Laughlin. Também discutimos excitações de quase-partículas (Qp) e quase-buracos (Qb), que são descritas por *anyons* de carga e estatística fracionária.

### 4.1 O Papel das Interações e Porquê o Problema é não Perturbativo

O fenômeno do EHQF foi descoberto em 1982 por Tsui e Störmer, quando nas medidas da resistividade Hall obtiveram valores fracionários para a *filling fraction*  $\nu$ , [1]. Os primeiros dados de  $\nu$  observados tinham valores de  $\nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$  e posteriormente  $\nu = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \dots$ , considerando o nível de Landau mais baixo. Atualmente, existem cerca de 80 platôs observados [10]. Alguns são mostrados na Figura 14.

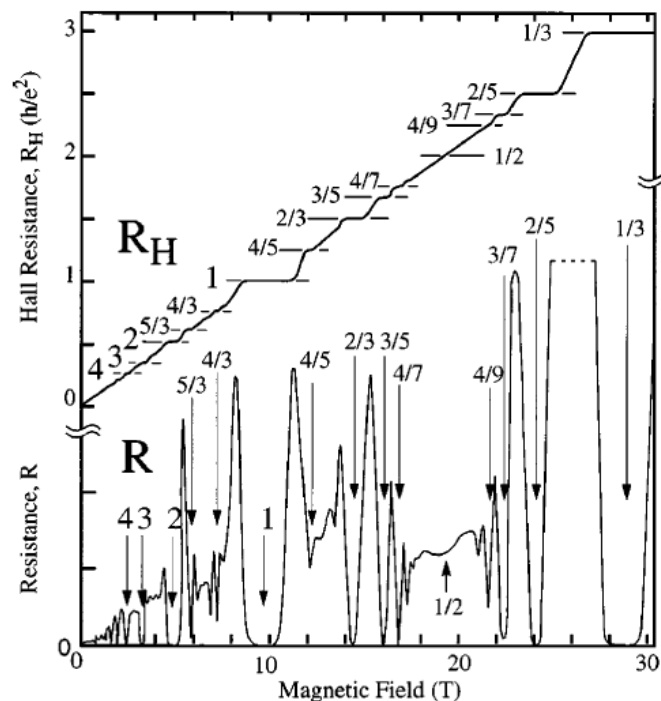


Figura 14 – Gráfico do campo magnético pela resistividade longitudinal e resistividade Hall. Fonte: JAIN, J. K. *Composite fermions*. New York. Cambridge University Press, 2007.

O EHQF é um dos problemas mais difíceis da física da matéria condensada. Um dos pontos que levam a isso é a não possibilidade de tratar a teoria através de métodos

perturbativos. Para entender porquê o problema não pode ser tratado perturbativamente, precisamos considerar a hamiltoniana que inclui todas as interações presentes no sistema

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} (i\nabla_i + e\mathbf{A}(r_i))^2 + \frac{e^2}{\epsilon} \sum_{i<j} \frac{1}{|r_i - r_j|} + \sum_i g\mu\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_i, \quad (4.1)$$

em que o primeiro termo é correspondente ao movimento de partículas na presença de um campo magnético  $\mathbf{B}$  constante (acoplamento mínimo), o segundo é o de interação de Coulomb, em que  $\epsilon$  é a constante dielétrica, e o terceiro é o termo de energia Zeeman.

Para prosseguir devemos ressaltar que para o EFQ consideramos o campo magnético intenso. Assim, temos que os spins estão todos alinhados à direção do campo, pois os spins ficam congelados e não constituem grau de liberdade dinâmico ao sistema, de modo a desprezarmos o termo de energia de Zeeman. Com essa constatação temos que a hamiltoniana do sistema é dada pelos termos de acoplamento mínimo e interação Coulombiana, ou seja,

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} (i\nabla_i + e\mathbf{A}(r_i))^2 + \frac{e^2}{\epsilon} \sum_{i<j} \frac{1}{|r_i - r_j|}. \quad (4.2)$$

Podemos ter uma ideia da relevância de cada termo realizando uma comparação entre os correspondentes termos de energia. Temos a energia do acoplamento mínimo dada por  $E_M \sim \omega_B$  e de interação de Coulomb  $V_C \sim \frac{e^2}{\epsilon l_B}$ . Portanto, ao analisarmos suas razões no limite em que  $\mathbf{B} \rightarrow \infty$ , temos

$$\frac{V_C}{E_M} = \frac{\frac{e^2}{\epsilon l_B}}{\omega_B} = \sqrt{\frac{e^3 m}{B \epsilon}} \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Note que para um campo magnético muito forte a interação de Coulomb é fraca e o termo predominante no hamiltoniano é a energia de acoplamento mínimo. Assim, podemos pensar no que acontece com o EHQF quando não levamos em conta a interação. Para isso, analisamos como ocorre a contagem de estados possíveis para partículas indistinguíveis, sendo que essa contagem é dada por

$$W = \frac{N_{deg}!}{N_e!(N_{deg} - N_e)!}. \quad (4.4)$$

A contagem é realizada partindo de uma amostra típica, de área igual a  $1 \text{ mm}^2$  que contém em média  $10^9$  elétrons. Assumindo uma *filling fraction* de  $\nu = \frac{2}{5}$ , calculamos o número de degenerescência,  $N_{deg} = 2,5 \times 10^9$ . Agora fazendo a contagem de estados, obtemos

$$W = \frac{2,5 \times 10^9!}{10^9!(2,5 \times 10^9 - 10^9)!} \sim 10^{7 \times 10^8},$$

que é um número extraordinariamente grande de estados. Para comparação, podemos realizar o mesmo processo para um exemplo fictício, em que o número de elétrons é 100,

assumindo novamente uma *filling fraction* de  $\nu = \frac{2}{5}$ , temos um número de degenerescência igual a 250. Com isso obtemos

$$W = \frac{250!}{100!(250-100)!} \sim 10^{72}.$$

Esse valor aproximado ao número de partículas do universo. Assim, mesmo para um exemplo com um número muito menor de elétrons e degenerescência, temos que a quantidade de estados possíveis é muito grande sem a interação. Logo, concluímos que a interação tem papel fundamental no EHQF.

Podemos também analisar o que acontece com o EHQI, ou seja, o que acontece quando abordamos um sistema com *filling fraction* inteira. Para isso, simplesmente temos que observar a definição de  $\nu$ , Eq. (3.94), de modo a constatarmos que  $N_e \sim N_{deg}$ , o que por consequência nos leva a um número de contagem de estados finito, com por exemplo no caso de  $\nu = 1$ , temos  $W = 1$ . Dessa forma podemos constatar que o EHQI é explicado sem a presença de interação.

Portanto, levando a interação como fator necessário para o EHQF e analisando novamente a Eq. (4.3) é possível notar que a energia de Coulomb não é suficiente para superar o *gap* de energia dado por  $\Delta E = \frac{eB}{m}$ , pois, o campo magnético é forte. Dessa forma temos que o efeito deve ser descrito no NLB. Consequentemente podemos desprezar o termo de acoplamento mínimo do hamiltoniano pois, o mesmo é uma constante na energia, sob o vínculo do potencial de Coulomb estar restrito ao estado fundamental. Considerando os pontos discutidos, reescrevemos o hamiltoniano Eq. (4.1) como

$$H = P_{LLL} \frac{e^2}{\epsilon} \sum_{i < j} \frac{1}{|r_i - r_j|} P_{LLL}, \quad (4.5)$$

em que  $P_{LLL}$  é o operador de projeção do nível de Landau mais baixo, (no qual LLL significa *Lowest Landau Level*). A construção explícita para o projetor pode ser observado em, [12].

Como o único termo no hamiltoniano é a interação de Coulomb e esse só acessa o NLB, não podemos realizar uma teoria de perturbação no sistema, pois a interação é o único termo relevante. Outra maneira de olhar essa afirmação, é o fato de não termos um parâmetro pequeno para realizar uma expansão, pois a unidade característica de energia do sistema é  $\frac{e^2}{\epsilon l_B}$ . A discussão até este ponto mostra uma teoria que não pode ser entendida como uma perturbação do estado fundamental, causada por uma interação fraca, com isso o problema deve ser solucionado exatamente, um dos fatos que torna difícil obter soluções para o EHQF.

## 4.2 Função de Onda de Laughlin e Propriedades

Como mencionado na seção acima, é extremamente difícil obter informações a partir de uma abordagem de teoria de perturbações. A ideia então é considerar uma abordagem

para o problema a partir de uma função de onda “tentativa” denominada função de onda de Laughlin, sua formulação parte do problema sem interação. Essa construção da função de onda se dá a partir do estado fundamental do problema de Landau,

$$\begin{aligned}\psi(z_1 \dots z_n) &= f(z_1 \dots z_n) e^{-\sum_{i=1}^N \frac{1}{4l_B^2} |z_i|^2} \\ &= \prod_{i < j}^{N-1} (z_i - z_j) e^{-\sum_{i=1}^N \frac{1}{4l_B^2} |z_i|^2}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Sendo assim, a proposta de Laughlin para a função de onda do estado fundamental é dada por

$$\psi_m(z_1, z_2 \dots z_N) = \prod_{i < j}^{N-1} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_{i=1}^N \frac{1}{4l_B^2} |z_i|^2}, \quad (4.7)$$

em que  $m = \frac{1}{\nu}$ , ou seja, o inverso da *filling fraction*. A ideia agora é demonstrar que a função descreve todas as propriedades do sistema.

A primeira propriedade é que a função descreve um sistema interagente, pois não podemos escrever uma função separada para cada elétron, ou uma separação de termos equivalente a Eq. (3.92), isso para  $m \neq 1$ . A segunda propriedade observada é de que a função fornece a interação repulsiva, ou seja, quando  $z_i \rightarrow z_j$  ela se anula com um zero de ordem  $m$ . A terceira propriedade é dada pela antissimetria da função de onda sob troca de dois férmions, mas note que isso ocorre para  $m = 1, 3, 5, 7, \dots$ , pois ao trocarmos  $z_i \rightarrow z_j$  e  $z_j \rightarrow z_i$ , temos um fator de  $(-1)^m$ . A quarta propriedade é proveniente da *filling fraction* ser  $\nu = \frac{1}{m}$ .

Para demonstrar essa última propriedade, consideramos a função de onda de Laughlin para uma partícula que se encontra na posição  $z_1$ ,

$$\psi_m(z_1) = \prod_{j=2}^N (z_1 - z_j)^m e^{-\sum_{i=1}^N \frac{1}{4l_B^2} |z_i|^2}. \quad (4.8)$$

Obtemos seu autovalor de momento angular,

$$L_z \psi_m(z_1) = mN \psi_m(z_1), \quad (4.9)$$

ou seja, o momento angular máximo da partícula é  $mN$ . Consequentemente temos o raio máximo da órbita da partícula, dado por,

$$r_m^2 = 2mNl_B^2. \quad (4.10)$$

Com esse resultado podemos escrever a área da órbita da partícula como  $A = \pi r_m^2 = 2\pi mNl_B^2$ . Por fim, reescrevendo  $\nu$  a partir da Eq. (3.94) e utilizando a área, temos

$$\nu = \frac{N}{N_\phi} = \frac{N\phi_0}{BA} = \frac{2\pi N}{B2\pi mNl_B^2} = \frac{1}{m}. \quad (4.11)$$

Essas propriedades dão suporte de que a função de onda de Laughlin é uma boa estimativa para descrever funções de onda para o EHQP, com as *filling fraction* dadas por  $\nu = \frac{1}{m}$ , sendo  $m$  dado por números inteiros ímpares.



### 4.3 Analogia com o Plasma

Muitas das consequências fenomenológicas da função de onda de Laughlin podem ser investigadas por meio da analogia com o plasma. A discussão dessa analogia pode ser baseada na interpretação da densidade de probabilidade  $|\Psi|^2$  como uma distribuição clássica de Boltzmann,

$$|\Psi|^2 = e^{-V_m}. \quad (4.12)$$

em que  $V_m$  é a energia potencial do sistema. Obtemos a densidade de probabilidade para a função de Laughlin, da seguinte maneira

$$|\psi_m(z_i)|^2 = \exp\left(2m \sum_{i<j}^{N-1} \ln |z_i - z_j|\right) \exp\left(-\frac{1}{2l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2\right). \quad (4.13)$$

Comparando a Eq. (4.13) e a Eq. (4.12) escrevemos o potencial  $V_m$  como

$$V_m = -2m \sum_{i<j}^{N-1} \ln |z_i - z_j| + \frac{1}{2l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2. \quad (4.14)$$

Realizamos a comparação com um plasma, que possui carga  $q$  e realiza movimento em um fundo neutralizante de densidade  $\rho$ . O potencial em questão é

$$V(z) = -q^2 \sum_{i<j}^{N-1} \ln |z_i - z_j| + \frac{\pi\rho q^2}{2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2, \quad (4.15)$$

em que o primeiro termo é proveniente da interação de Coulomb entre as partículas e o segundo termo corresponde a interação com o campo de fundo neutralizante.

Como as expressões para os potenciais contêm a mesma estrutura, consideramos  $V_m$  um potencial de plasma. Assim realizando a comparação termo a termo, das Eq.(4.14) e Eq. (4.15), obtemos a carga do plasma

$$q^2 = 2m. \quad (4.16)$$

Outra quantidade obtida é a densidade do fundo neutralizante, dada por

$$\rho = \frac{1}{\pi l_B^2 q^2} = \frac{1}{2\pi l_B^2} \frac{1}{m}. \quad (4.17)$$

Ao associar a densidade  $\rho$  com a densidade de elétrons do sistema Hall, observamos que  $\psi_m$  descreve um fluido com *filling fraction* dada por

$$\rho 2\pi l_B^2 = \frac{1}{m} = \nu. \quad (4.18)$$

O resultado dessa analogia nos retorna a *filling fraction* esperada para a teoria. Portanto, temos fortes argumentos que suportam identificar a função de onda de Laughlin como a função para o estado fundamental do efeito Hall quântico fracionário.

## 4.4 Excitações de Quase-Partículas e Quase-Buracos

Nesta seção descrevemos os resultados obtidos com a excitação de quase-partículas e quase-buracos, em que as mesmas são construídas a partir da função de onda de Laughlin do estado fundamental.

Para descrever uma excitação consideramos o sistema no estado fundamental, e então introduzimos um tubo de fluxo infinitesimal no ponto  $z_\alpha$ . Em seguida alteramos o fluxo adiabaticamente de modo a ir de um fluxo nulo até um valor final de uma unidade, ou seja,  $\Phi = 0 \rightarrow \Phi = \phi_0$ , fazendo com que o sistema permaneça no estado fundamental. Com essa variação, temos por meio da lei de Faraday o surgimento de um campo elétrico, conseqüentemente as partículas nas proximidades fluirão para dentro ou para fora do ponto, dependendo do sinal do fluxo, o que leva a gerar um acúmulo de carga no ponto  $z_\alpha$ .

Uma mudança de fluxo pode ser compensada por uma transformação de calibre, deixando o hamiltoniano em sua forma original porém, alterando a função de onda, para um estado excitado. Por meio desse fato temos que a excitação de uma Qp e Qb pode ser dada pelas suas correspondentes funções de onda

$$\psi_m^{+z_\alpha} = N_+ \prod_i (z_i - z_\alpha) \psi_m \quad \text{quase-buraco} \quad (4.19)$$

$$\psi_m^{-z_\alpha} = N_- \prod_i \left( 2l_B^2 \frac{\partial}{\partial z_i} - \bar{z}_\alpha \right) \psi_m \quad \text{quase-partícula}, \quad (4.20)$$

em que  $N_\pm$  é o fator de normalização e  $\psi_m$  a função de onda de Laughlin Eq.(4.7).

As funções de onda para as excitações podem ser interpretadas como uma descrição de um elétron percorrendo um caminho que contém  $N$  partículas e desse modo esse elétron observa  $N$  fluxos em todo  $z_j$ , com  $j \neq i$ . Agora quando ele realiza movimento ao redor de um Qb ele observa apenas uma unidade de fluxo [7].

Portanto, partimos das funções de onda que descrevem as excitações do estado fundamental para investigar as propriedades de carga e estatística dos Qb. Uma forma heurística de determinar a carga do quase-buraco é pensar em remover um elétron do sistema, de modo à função de Laughlin ser escrita como

$$\begin{aligned} \psi_m^{+z_\alpha}(z_1, z_2 \dots z_N) &= N_+ \prod_{i=1} (z_i - z_N)^m e^{-\frac{1}{4l_B^2}|z_N|^2} \prod_{i < j}^{N-1} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_{i=1} \frac{1}{4l_B^2}|z_i|^2} \\ &= \alpha_+ \prod_{i=1} (z_i - z_N)^m \psi_m. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Note que retiramos da função de onda o elétron na posição  $z_N$  e introduzimos a exponencial na constante de normalização. Temos então que a função dada na Eq. (4.21) é equivalente a função de onda de Qb de carga  $e$ , na posição  $z_N$ . No entanto essa mesma função pode ser pensada como a função de onda de  $m$  quase-buracos na mesma posição. Ou seja, a carga de  $m$  Qbs é igual a carga do elétron, assim concluímos que

$$q_b \cdot m = e \Rightarrow q_b = \frac{e}{m}. \quad (4.22)$$

Esse resultado nos leva a pensar que a fração  $\frac{e}{m}$  deve ser retirada ou adicionada ao sistema, para assim termos uma excitação de Qp e Qb.

Agora realizamos o cálculo da carga de forma mais precisa. A ideia é calcular a fase de Berry em um sistema em que a partícula é transportada adiabaticamente por um caminho fechado  $\Gamma$  e comparar esse resultado com a fase obtida na seção 3.6, onde uma fase era gerada por conta de um transporte cíclico de carga na presença de campo magnético, Eq. (3.85).

Para realizar essa comparação, primeiramente temos que obter a fase de Berry, para isso consideramos um sistema quântico descrito por um hamiltoniano dependente do tempo,  $H(t)$ . Na aproximação adiabática a hamiltoniana varia muito lentamente no tempo, de modo a termos a equação de Schroedinger da seguinte maneira

$$H_n(t) \Psi_n(x, t) = E_n(t) \Psi_n(x, t). \quad (4.23)$$

A evolução adiabática significa que o sistema permanece em seu autoestado, de modo que a função de onda adquira no máximo uma fase dependente do tempo. Podemos então escrever a função de onda como

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x, t) \exp\left(-i \int_{t_0}^t dt' E_n(t') - i\gamma_n(t)\right). \quad (4.24)$$

Note que a fase dada pelo termo  $-i \int_{t_0}^t dt' E_n(t')$  é a generalização de  $-iE_n t$ , que é o argumento da exponencial na solução da função de onda dependente do tempo. Assim identificamos a fase de Berry ou fase geométrica como sendo  $\gamma_n(t)$ .

Para obter explicitamente  $\gamma_n(t)$ , utilizamos a equação de Schroedinger dependente do tempo,

$$i \frac{\partial \Psi_n(x, t)}{\partial t} = H_n(t) \Psi_n(x, t),$$

substituindo a função de onda, Eq. (4.24), obtemos

$$\begin{aligned} \left( i \frac{\partial \psi_n(x, t)}{\partial t} + E_n(t) \psi_n(x, t) + \frac{d\gamma_n(t)}{dt} \psi_n(x, t) \right) &= H_n(t) \psi_n(x, t) \\ \frac{d\gamma_n(t)}{dt} \psi_n(x, t) &= -i \frac{\partial \psi_n(x, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

agora multiplicando a equação acima por  $\psi_n^*(x, t)$  e integrando no espaço, obtemos

$$\int d^2x \frac{d\gamma_n(t)}{dt} \psi_n^*(x, t) \psi_n(x, t) = -i \int d^2x \psi_n^*(x, t) \frac{\partial \psi_n(x, t)}{\partial t}, \quad (4.26)$$

$$\frac{d\gamma_n(t)}{dt} = -i \int d^2x \psi_n^*(x, t) \frac{\partial \psi_n(x, t)}{\partial t}. \quad (4.27)$$

Por fim utilizando a notação de Dirac, podemos escrever a fase de Berry como

$$\gamma_n(t) = -i \int_0^t dt' \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \right| \psi_n(t') \right\rangle. \quad (4.28)$$

Retornando para o caso em que supomos o Qb ser transportado adiabaticamente em torno de um caminho fechado  $\Gamma$ , de modo que sua posição dependa do tempo, podemos escrever a fase de Berry para quase-buraco como

$$\gamma_\alpha(t) = -i \int_0^t dt' \left\langle \psi_m^{+z_\alpha}(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \right| \psi_m^{+z_\alpha}(t') \right\rangle. \quad (4.29)$$

Para obter o resultado explícito da fase de Berry para o Qb, precisamos primeiramente da atuação da derivada temporal no estado  $\frac{\partial}{\partial t'} |\psi_m^{+z_\alpha}(t')\rangle$ . Para realizar isso primeiramente escrevemos o  $\ln \psi_m^{+z_\alpha}$ , como

$$\ln \psi_m^{+z_\alpha} = \ln \left( N_+ \prod_i (z_i - z_\alpha(t)) \psi_m \right), \quad (4.30)$$

posteriormente aplicamos uma derivada temporal em ambos os lados, de modo a obtermos

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \psi_m^{+z_\alpha}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \ln \left( N_+ \prod_i (z_i - z_\alpha(t)) \psi_m \right) \right] \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \psi_m^{+z_\alpha}(t)}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt} [\ln |z_i - z_\alpha(t)|] \psi_m^{+z_\alpha}(t). \quad (4.32)$$

Por meio desse resultado podemos reescrever a fase como

$$\gamma_\alpha(t) = -i \int_0^t dt' \left\langle \psi_m^{+z_\alpha}(t') \left| \sum_i \frac{d}{dt'} [\ln |z_i - z_\alpha(t')|] \psi_m^{+z_\alpha}(t') \right\rangle. \quad (4.33)$$

Prosseguindo nos cálculos definimos uma densidade de partículas no estado  $\psi_m^{+z_\alpha}(x, t)$ ,

$$\rho(z) \equiv \left\langle \psi_m^{+z_\alpha}(t') \left| \sum_i \delta^{(2)}(\hat{z}_i - z) \psi_m^{+z_\alpha}(t') \right\rangle. \quad (4.34)$$

Agora utilizando uma base coordenada,  $|z_1, z_2, \dots, z_N\rangle$ , em que sua relação de completeza é dada por

$$\int d^2 z_1 \dots d^2 z_N |z_1, z_2, \dots, z_N\rangle \langle z_1, z_2, \dots, z_N| = 1,$$

introduzindo então essa relação na densidade de partículas Eq. (4.34), obtemos

$$\rho(z) \equiv \int d^2 z_1 \dots d^2 z_N \sum_i \delta^{(2)}(z_i - z) |\psi_m^{+z_\alpha}(z, t')|^2. \quad (4.35)$$

Note que utilizamos a seguinte definição para a função de onda,

$$\psi_m^{+z_\alpha}(z, t') \equiv \langle z_1, z_2, \dots, z_N | \psi_m^{+z_\alpha}(t') \rangle.$$

Realizando o mesmo processo na fase de Berry Eq. (4.33), temos

$$\gamma_\alpha(t) = -i \int_0^t dt' d^2 z_1 \dots d^2 z_N \sum_i \frac{d}{dt'} [\ln |z_i - z_\alpha(t')|] |\psi_m^{+z_\alpha}(t')|^2. \quad (4.36)$$

Por fim, usando a expressão acima e a Eq. (4.35), reescrevemos a fase de Berry em termos de  $\rho$ ,

$$\gamma_\alpha(t) = -i \int_0^t dt' d^2z \frac{d}{dt'} [\ln |z - z_\alpha(t')|] \rho(z) \quad (4.37)$$

$$= -i \int_0^t dt' d^2z \frac{1}{z - z_\alpha(t')} \frac{dz_\alpha(t')}{dt'} \rho(z) \quad (4.38)$$

$$= -i \int d^2z \oint_\Gamma dz_\alpha \frac{1}{z - z_\alpha} \rho(z). \quad (4.39)$$

Note que  $\Gamma$  é a região onde acontece o transporte adiabático. Para resolver a integral devemos analisar o caso em que  $|z| < |z_\alpha|$ , nessa condição a integral não é nula. Com o pólo em  $z_\alpha = z$ , podemos resolver a integral por meio do teorema de resíduos,

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha(t) &= -i \int_{|z| < \Gamma} d^2z 2\pi i \rho(z) \\ &= 2\pi \int_{|z| < \Gamma} d^2z \rho(z) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$= 2\pi N_\Gamma, \quad (4.41)$$

em que  $N_\Gamma$  é o número de elétrons dentro da região  $\Gamma$ . Com esse resultado podemos realizar a comparação entre a fase de Berry e a fase obtida por meio de translações magnéticas em um caminho fechado, sendo assim

$$e^{-i\gamma} = e^{-iq\Phi_\Gamma}. \quad (4.42)$$

Por meio dessa relação e utilizando as Eqs. (3.86) e (3.94), podemos escrever

$$\begin{aligned} 2\pi N_\Gamma &= qN_\phi \phi_0 \\ q &= e \frac{N_\Gamma}{N_\phi} = \frac{e}{m}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Esse resultado mostra que a carga de um Qb assume valores fracionários, pois  $m$  é dado por números inteiros ímpares. Seguindo os mesmos raciocínios realizados acima, podemos obter um resultado equivalente para quase-partícula, com carga  $q = -\frac{e}{m}$ , [7].

O próximo resultado que devemos obter é a estatística de um Qb. Para mostrar isso precisamos considerar uma operação de troca entre dois quase-buracos. Dessa forma, levamos em conta um estado caracterizado por duas excitações de Qb, uma localizada no ponto  $z_\alpha$  e outra localizada no ponto  $z_\beta$ . Assim escrevemos a função de onda como uma generalização da Eq. (4.19),

$$\psi_m^{+z_\alpha+z_\beta} = N_{\alpha\beta} \prod_i (z_i - z_\alpha) (z_i - z_\beta) \psi_m, \quad (4.44)$$

em que  $N_{\alpha\beta}$  é a constante de normalização.

Considerando agora o transporte adiabático do Qb em  $z_\alpha$ , ao longo de um caminho fechado  $\Gamma$ , temos que a função de onda adquire uma fase de Berry como visto acima,

$$\gamma(t) = -i \int_0^t dt' \left\langle \psi_m^{+z_\alpha+z_\beta}(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \right| \psi_m^{+z_\alpha+z_\beta}(t') \right\rangle. \quad (4.45)$$

Para obter essa fase, realizamos o mesmo processo do cálculo anterior. O primeiro passo então é obter a derivada temporal de  $\ln \psi_m^{+z_\alpha+z_\beta}$ , esse é escrito como

$$\begin{aligned} \ln \psi_m^{+z_\alpha+z_\beta} &= \ln \left[ N_{\alpha\beta} \prod_i (z_i - z_\alpha) (z_i - z_\beta) \psi_m \right] \\ &= \sum_i \ln |z_i - z_\alpha(t)| + \sum_i \ln |z_i - z_\beta| + \ln(N_{\alpha\beta} \psi_m), \end{aligned} \quad (4.46)$$

assim aplicando a derivada temporal em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln \psi_m^{+z_\alpha+z_\beta} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_i \ln |z_i - z_\alpha(t)| + \sum_i \ln |z_i - z_\beta| + \ln N_{\alpha\beta} \psi_m \right] \\ \frac{\partial \psi_m^{+z_\alpha+z_\beta}}{\partial t} &= \sum_i \frac{d}{dt} [\ln |z_i - z_\alpha(t)|] \psi_m^{+z_\alpha+z_\beta}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Note que apenas o quase-buraco em  $z_\alpha$  varia no tempo, o que significa um resultado equivalente ao do cálculo realizado acima. Dessa forma ao definir uma densidade de carga no estado  $\psi_m^{+z_\alpha+z_\beta}$ , como

$$\rho(z) \equiv \left\langle \psi_m^{+z_\alpha+z_\beta}(t) \left| \sum_i \delta^{(2)}(\hat{z}_i - z) \right| \psi_m^{+z_\alpha+z_\beta}(t) \right\rangle, \quad (4.48)$$

obtemos o mesmo resultado da Eq. (4.40) para a fase de Berry, pois os cálculos são os mesmos, logo

$$\gamma(t) = 2\pi \int_{|z| < \Gamma} d^2z \rho(z). \quad (4.49)$$

Desse resultado, temos duas situações possíveis, a primeira é quando o ponto  $z_\beta$  não está no interior do contorno  $\Gamma$ , o que resulta na seguinte fase

$$\gamma(t) = 2\pi N_\Gamma. \quad (4.50)$$

Por outro lado, a segunda situação ocorre quando o contorno  $\Gamma$  inclui o Qb em  $z_\beta$ , fazendo com que seja retirado a fração de elétrons que corresponde ao quase-buraco. Dessa forma a fase de Berry é

$$\gamma(t) = 2\pi \left( N_\Gamma - \frac{1}{m} \right). \quad (4.51)$$

Com esses dois resultados, podemos observar que a função de onda adquire uma fase extra, dada por

$$e^{-i\Delta\gamma} = e^{i\frac{2\pi}{m}}. \quad (4.52)$$

Note que essa é a fase que surge de um transporte adiabático de um Qb em torno de outro por um ângulo de  $\varphi = 2\pi$ .

Para obter a estatística comparamos o resultado da fase Berry adquirida pela função de onda de um Qb com a fase obtida por troca de partícula, discutido na seção 2.2. Note que naquele contexto foi realizada uma rotação dada por um ângulo  $\varphi = \pi$ , assim considerando uma rotação de  $\varphi = 2\pi$  na Eq. (2.18) e comparando sua fase com a Eq. (4.52), temos

$$e^{i2\pi\nu} = e^{i\frac{2\pi}{m}}, \quad (4.53)$$

Assim a estatística é dada por números fracionário, da seguinte maneira

$$\nu = \frac{1}{m}. \quad (4.54)$$

Com esse resultado observamos que a estatística é dada pelo mesmo valor numérico da *filling fraction*. Desse modo, quando  $m = 1$  estamos com o nível de Landau mais baixo preenchido e os quase-buracos são férmions, o que é equivalente com os resultados para o EHQI. Para os demais valores de  $m$ , ou seja,  $m = 3, 5, 7, \dots$ , obtemos a estatística de quase-buraco como sendo fracionária e os mesmos são *anyons*. Obtemos o mesmo resultado para a quase-partícula, [7].





## 5 Teoria Efetiva para o Sistema Hall

Nesta seção discutimos teorias efetivas em regime de baixas energias, em que utilizamos ingredientes do grupo de renormalização [13]. Com isso identificamos os graus de liberdade e simetrias do sistema Hall em  $2 + 1$  dimensões, de modo a descrever uma teoria efetiva com o termo relevante dado pelo Chern-Simons. Discutimos as propriedades presentes no EHQ e os aspectos topológicos, descritos pelo CS, como invariância sob difeomorfismos e a estatística e carga fracionária, de modo a descrever as excitações de quase-partícula e quase-buraco [10].

### 5.1 Teorias Efetivas de Baixas Energias

Para discutir teorias efetivas precisamos entender que a física em diferentes escalas de comprimento ou energia é descrita por diferentes teorias. Para analisar um fluido macroscópico não precisamos conhecer a física atômica do sistema. Esse fato pode ser entendido analisando um exemplo simples, em que olhamos para um dado material e observamos uma superfície lisa, posteriormente olhamos para a mesma superfície através de um microscópio e observamos uma estrutura rugosa. Mostrando que em determinada escala o sistema será dado com certas simetrias e graus de liberdade, mas quando aumentamos a energia de observação obtemos propriedades distintas.

Para analisar como um sistema se comporta sob uma transformação de escala, podemos seguir a discussão baseada no grupo de renormalização [13]. Para isso, partimos de uma teoria de campos, dada por uma lagrangiana geral

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi, \dots, \{g_i\}), \quad (5.1)$$

que depende de um campo  $\varphi$ , derivadas de  $\varphi$  e um conjunto de parâmetros  $\{g_i\}$  (que podem ser vistos como parâmetros de acoplamento, interação, estrutura, massa, etc.). Agora para nos auxiliar na construção da lagrangiana, discutimos a ideia de teorias efetivas. A abordagem consiste em identificar os graus de liberdade relevantes em baixas energias e as simetrias envolvidas e assim descrever o sistema em termos de uma classe de operadores responsáveis pela dinâmica do sistema. Para implementar esse método em teoria quântica de campos, utilizamos o funcional gerador,

$$Z = \int D\varphi e^{iS(\varphi)}, \quad (5.2)$$

em que  $D\varphi$  é a medida de integração funcional e  $S(\varphi)$  é a ação dada em termos da lagrangiana, como

$$S(\varphi) = \int d^Dx \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi, \dots, \{g_i\}).$$

Realizamos a discussão supondo uma distinção entre altas e baixas energias. Para isso definimos uma escala de corte  $\Lambda$  que realiza essa suposição. A física que temos interesse tem energia característica dada por  $\mu$ , que é muito menor que a energia de corte  $\mu \ll \Lambda$ . Dessa forma dividimos o campo  $\varphi$  em duas partes

$$\varphi = \varphi_A + \varphi_B, \quad (5.3)$$

de forma que  $\varphi_A$  inclua as contribuições de altas energias ao passo em que  $\varphi_B$  corresponda à baixas energias. Uma maneira conveniente de fazer isso é considerando a transformada de Fourier dos campos, que permite escrever a medida de integração funcional, como

$$D\varphi \equiv \prod_k d\varphi(k).$$

Utilizando a ideia de separação de energia, dada pelo parâmetro de corte  $\Lambda$ , separamos o produtório da seguinte maneira

$$D\varphi \equiv \prod_k d\varphi(k) = \prod_{k < \Lambda} d\varphi_B(k) \prod_{k > \Lambda} d\varphi_A(k) = D\varphi_B D\varphi_A. \quad (5.4)$$

Com essas definições, o funcional gerador Eq. (5.2) pode ser reescrito como

$$Z = \int D\varphi_B D\varphi_A e^{iS(\varphi_B, \varphi_A)}. \quad (5.5)$$

Realizando a integração sobre as contribuições de altas energias obtemos uma ação efetiva para baixas energias,  $S_\Lambda(\varphi_B)$ ,

$$e^{iS_\Lambda(\varphi_B)} = \int D\varphi_A e^{iS(\varphi_B, \varphi_A)}, \quad (5.6)$$

assim escrevemos o funcional gerador, que define toda teoria, em termos da ação efetiva e dependendo explicitamente apenas de  $\varphi_B$ ,

$$Z = \int D\varphi_B e^{iS_\Lambda(\varphi_B)}. \quad (5.7)$$

O próximo passo é expandir a ação efetiva em termos de operadores locais construídos a partir de  $\varphi_B$ , para classificar e entender como podemos escrever a lagrangiana de um sistema. Podemos então, escrever a ação efetiva como

$$S_\Lambda(\varphi_B) = \int d^D x \sum_i g_i \mathcal{O}_i. \quad (5.8)$$

Assim, classificamos os termos da lagrangiana de acordo com a dimensionalidade da ação. Neste ponto vale lembrar que consideramos o sistema natural de unidades, em que  $\hbar = c = 1$ . Dessa forma temos dimensões dadas em unidades de massa para todos os elementos envolvidos. Começamos analisando a medida de integração, que possui em

unidades de massa uma dimensão  $(-D)$ . Consideremos a dimensão do operador  $\mathcal{O}_i = [\mathcal{O}_i]$ . Agora, sabendo que a ação é adimensional, temos que o parâmetro de estrutura  $g_i$  deve ter dimensionalidade

$$[g_i] = D - [\mathcal{O}_i]. \quad (5.9)$$

Podemos então escrever de maneira explícita a dependência do parâmetro de corte  $\Lambda$ . Para isso introduzimos um parâmetro adimensional, obtido a partir de  $g_i$  e  $\Lambda$ , da seguinte forma

$$l_i \equiv \Lambda^{[\mathcal{O}_i]-D} g_i. \quad (5.10)$$

Com isso definido podemos analisar os termos da ação efetiva, Eq. (5.8). Dessa forma estimamos a contribuição de um termo genérico para um processo que ocorre em uma energia  $\mu$

$$\int d^D x \mathcal{O}_i \sim \mu^{[\mathcal{O}_i]-D}. \quad (5.11)$$

Após essas definições sobre a dimensionalidade de cada termo, podemos retornar os resultados obtidos na ação efetiva Eq. (5.8), obtendo assim a ordem dos termos da lagrangiana,

$$l_i \left( \frac{\mu}{\Lambda} \right)^{[\mathcal{O}_i]-D}. \quad (5.12)$$

Com essa análise dimensional identificamos três classes de operadores, definidas como

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}_i] - D > 0 &\Rightarrow \text{irrelevante ou não renormalizável} \\ [\mathcal{O}_i] - D = 0 &\Rightarrow \text{marginal ou renormalizável} \\ [\mathcal{O}_i] - D < 0 &\Rightarrow \text{relevante ou super-renormalizável.} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para uma investigação com base na energia característica, temos que para  $\mu \rightarrow 0$  apenas os operadores nas classes marginal e relevante contribuem para a ação, os operadores dentro da classe irrelevante levam a termos da lagrangiana que são suprimidos, pelo fato da razão  $\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{[\mathcal{O}_i]-D}$  ser cada vez menor.

Para exemplificar essa discussão, utilizamos uma teoria de campos escalares  $\varphi$ , dada pela Eq. (5.1), ou seja, a lagrangiana depende do campo  $\varphi$ , suas derivadas e dos parâmetros da teoria. Assumimos por simplicidade que a mesma possui simetria de Lorentz e de paridade. Com essas considerações escrevemos a lagrangiana que descreve a teoria tendo como base a discussão acima, que usamos a análise de dimensionalidade para determinar a relevância de cada termo da lagrangiana. Para isso, primeiramente temos que encontrar a dimensão do campo em unidades de massa, dessa forma precisamos então, analisar o termo cinético da teoria do campo escalar, dado por  $\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$ . Note que esse termo tem duas derivadas e as mesmas possuem dimensionalidade igual a  $[\partial_\mu] = 1$ , em unidades de massa. Portanto a dimensão do campo  $\varphi$  é dada por

$$[\varphi] = \frac{D-2}{2}. \quad (5.14)$$

Realizamos o primeiro exemplo considerando  $D = 2$ , tal que o campo é adimensional, assim podemos escrever a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 - \lambda \varphi^4 - \xi \varphi^6 - \gamma \varphi^8 \dots, \quad (5.15)$$

Note que, os pontos significam que os termos continuam em uma série de potências do campo  $\varphi$  e que a dimensão dos parâmetros é  $[m^2] = [\lambda] = [\xi] = 2$ . Com isso e de um ponto de vista de grupo de renormalização a teoria é descrita por uma lagrangiana dada por parâmetros marginais ou renormalizáveis. Assim para descrever uma teoria de campos escalares em  $D = 2$  dimensões precisamos considerar termos do tipo  $\varphi^p$ , ou seja, considerar uma série de potencia de ordem  $p$  no campo  $\varphi$ .

Seguindo o mesmo raciocínio, agora consideramos  $D = 3$ , assim a dimensão do campo é dada por  $[\varphi] = \frac{1}{2}$ . Dessa forma podemos escrever a lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 - \lambda \varphi^4 - \xi \varphi^6 + irr. \quad (5.16)$$

Note que para esse caso os termos relevantes ou marginais nos levam a um limite de potência dos campos. Sendo que, os demais termos estão contidos em *irr*, termos irrelevantes para a teoria. Os termos dos parâmetros com dimensionalidade dada por  $[m^2] = 2$  e  $[\lambda] = 1$  são relevantes e  $[\xi] = 0$  são marginais.

Agora realizando a análise para  $D = 4$ , temos a lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 - \lambda \varphi^4 + irr. \quad (5.17)$$

Note que nesse caso temos  $[\varphi] = 1$ , assim o termo relevante para a teoria é  $\varphi^2$ , pois  $[m^2] = 2$ , e o termo  $\varphi^4$  é marginal, sendo  $\lambda$  adimensional. Esse exemplo resulta em algo extremamente conhecido que é a lagrangiana do campo escalar em quatro dimensões. Por meio desses exemplos foi possível mostrar como podemos obter a lagrangiana de uma teoria de campos efetiva em um regime de baixas energias, tendo o conhecimento da dimensionalidade do parâmetro do sistema, e não tendo informações sobre a física de altas energias.

## 5.2 Teoria Efetiva para o Sistema Hall

O efeito Hall quântico é constituído por elétrons que realizam movimentos restritos a um plano na presença de um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ , perpendicular ao movimento. Os elétrons na placa tendem a ficar o mais distante possível uns dos outros, por conta da repulsão Coulombiana, dessa forma levamos em consideração todos esses ingredientes para realizar uma abordagem de teoria de campos efetiva. Descrevemos os ingredientes fenomenológicos do EHQ, para construir uma teoria de campo efetiva em baixa energia.

A primeira consideração é proveniente de o fenômeno ocorrer em  $2 + 1$  dimensões. Isso porquê estamos considerando uma placa infinita, ou seja, sem bordas, em que os

elétrons estão restritos a movimentos no plano. A segunda consideração diz que o sistema deve ser descrito por meio de uma teoria efetiva local, que possua apenas operadores da classe marginais e relevantes Eq. (5.13). A terceira consideração é o fato da corrente eletromagnética  $J^\mu$  ter que ser conservada  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , podemos escrever a corrente como

$$J^\mu \sim \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho, \quad (5.18)$$

em que  $\epsilon^{\mu\nu\rho}$  é o símbolo completamente antissimétrico de Levi-Civita, definido  $\epsilon^{012} \equiv 1$ . O campo  $A_\mu$  é um campo vetorial arbitrário. Observe que a expressão acima é invariante sob a transformação de calibre

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (5.19)$$

simplesmente porque  $\epsilon^{\mu\nu\rho}$  é totalmente antissimétrico e  $\partial_\nu \partial_\rho$  simétrico. Com isso temos que  $A_\mu$  é de fato um campo de calibre. A quarta consideração é proveniente de estarmos interessados em física de baixas energias e conseqüentemente longas distâncias. Dessa forma investigamos o problema levando em conta a análise realizada na seção anterior. Com essa discussão sabemos que precisamos de operadores na classe relevante e marginal. Assim utilizando a Eq. (5.13) e o fato de estarmos trabalhando em  $D = 3$  dimensões, temos que os operadores presente na lagrangiana devem ter dimensões  $[\mathcal{O}_i] = 3$  em unidades de massa para ser marginais ou  $[\mathcal{O}_i] < 3$  para ser relevantes. Por último a quinta consideração, nos diz que a teoria não deve ser invariante sob paridade e reversão temporal. Isso porque o campo magnético externo quebra ambas as simetrias discretas, fazendo com que os elétrons realizem trajetórias em um dado sentido de propagação.

Com as considerações acima, podemos obter a forma da lagrangiana efetiva e essa será escrita em termos do campo de calibre  $A_\mu$ , que tem dimensão  $[A_\mu] = 1$  em unidades de massa. Agora, sabendo que o termo do operador na lagrangiana deve ter dimensões iguais ou menores que três em unidades de massa, podemos realizar combinações para escrever a lagrangiana.

Seguindo a ideia de que a ação deve ser um invariantes de calibre, e as demais considerações, temos na primeira tentativa simplesmente o campo  $A_\mu$ , mas logicamente esse não é um invariante de calibre. O próximo termo que tentaríamos escrever seria,  $\eta^{\nu\mu} A_\nu A_\mu$ , mas novamente esse não é um invariante de calibre. Temos que as combinações de multiplicações de campos  $A_\mu$  quebram a invariância de calibre. Dessa forma o próximo passo é realizar combinações com derivadas, sendo que essas tem uma unidade de massa. A primeira tentativa é o termo  $\eta^{\nu\mu} \partial_\nu A_\mu$ , novamente, o mesmo quebra a invariância de calibre. A próxima combinação é um termo do tipo  $A_\mu \partial_\nu A_\rho$ , que à primeira vista quebra a invariância de calibre, porém combinando o mesmo com o símbolo de Levi-Civita, temos um termo tanto invariante de calibre quanto invariante de Lorentz,

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (5.20)$$

Note que, invariância de Lorentz não é uma simetria do sistema, mas utilizamos acima nos termos que quebram a invariância de calibre por simplicidade. O termo acima possui

dimensão igual a três, ou seja, é um termo marginal. Vale ressaltar que o mesmo é invariante de calibre a menos de um termo de superfície

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\rho} \lambda \partial_\nu A_\rho).$$

Com essa discussão podemos por fim escrever a lagrangiana que descreve a teoria de EHQ, denominada lagrangiana de Chern-Simons,

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + \dots, \quad (5.21)$$

em que  $\kappa$  é uma constante a princípio arbitrária e os pontos correspondem à operadores da classe dos irrelevantes. Um exemplo é o termo de Maxwell,  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , que será considerado em breve, na discussão sobre dinâmica do campo de calibre.

Neste ponto devemos ressaltar que o campo de calibre  $A_\mu$  não equivale a nenhuma quantidade física, ele descreve fenômenos emergentes que refletem certas propriedades físicas. Entidades físicas como o campo magnético externo são incorporados no coeficiente  $\kappa$ . O CS possui outros aspectos importantes que reafirmam como sendo uma teoria que descreve o EHQ.

## 5.3 Propriedades do Chern-Simons

### 5.3.1 Aspectos Topológicos

Uma das propriedades obtidas por meio do CS são fases topológicas da matéria [5, 11], que atualmente se trata de um assunto central de pesquisa em física da matéria condensada. Entre suas várias propriedades especiais, essas fases são caracterizadas por um *bulk* com um *gap* de energia, ao mesmo tempo em que possuem graus de liberdade sem massa, se propagando ao longo das bordas. Exemplos de fases topológicas ocorrem no EHQ [3], em supercondutores e nos isolantes topológicos [6, 14].

Discutimos o fato do CS descrever aspectos topológicos, de modo a analisar a propriedade do Chern-Simons ser um invariante topológico, a qual decorre dele ser independente da métrica. Discutimos isso partindo da ideia de realizar uma transformação geral de coordenadas ou uma mudança de um espaço plano com a métrica  $\eta^{\mu\nu}$ , para espaços curvos com a métrica  $g^{\mu\nu}$ .

Começamos com uma teoria de campos em um espaço plano, de forma geral temos uma ação escrita como a Eq. (5.1). Agora escrevendo essa mesma ação em um espaço curvo, com uma métrica dada por  $g^{\mu\nu}$ , temos

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \varphi, \partial_\mu \varphi, \dots), \quad (5.22)$$

em que  $g \equiv \det g_{\mu\nu}$ . Podemos escrever alguns exemplos para demonstração, no qual as ações em um espaço curvo dependem explicitamente da métrica. Por exemplo no caso do

campo escalar,

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{m^2}{2} \varphi \right). \quad (5.23)$$

Note que a contração dos índices da lagrangiana é realizada com a métrica e o prefator  $\sqrt{-g}$  é necessário para compensar a transformação do elemento de volume. Outro exemplo é a ação de Maxwell

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} \right). \quad (5.24)$$

Para o caso do termo do CS, não é a métrica que realiza a contração, mas sim  $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$ . Dessa forma dizemos que a ação é independente da métrica. Mas para comprovar que ela é invariante por difeomorfismos, analisamos o que acontece com a ação sob transformações gerais de coordenadas. Para realizar a análise pensamos em uma transformação geral de coordenadas, em que um vetor segue a seguinte lei de transformação

$$A_\mu(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} A'_\alpha(x'). \quad (5.25)$$

Para o nosso caso Eq. (5.21), temos três vetores acoplados ao tensor  $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$ , logo, podemos escrever

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu(x) B_\nu(x) C_\rho(x) = \epsilon^{\mu\nu\rho} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\rho} A'_\alpha(x') B'_\beta(x') C'_\gamma(x'). \quad (5.26)$$

Note que o termo das derivadas juntamente com o tensor de Levi-Civita, deve ser proporcional a algo totalmente antissimétrico nos índices  $\alpha, \beta, \gamma$ , de modo a escrever

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\rho} = f(x, x') \epsilon^{\alpha\beta\gamma}, \quad (5.27)$$

em que  $f(x, x')$  é uma função arbitrária a ser determinada. Podemos obter a mesma fazendo uma escolha para os valores dos índices, como  $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2$ , temos então

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \frac{\partial x'^0}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^1}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^2}{\partial x^\rho} = f(x, x') \Rightarrow f(x, x') = \det \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|. \quad (5.28)$$

Com esse resultado reescrevemos a Eq. (5.26), como

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu(x) B_\nu(x) C_\rho(x) = \det \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A'_\alpha(x') B'_\beta(x') C'_\gamma(x').$$

Analisando o elemento de volume  $d^3 x$  e sabendo que se transforma como

$$d^3 x' = \det \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^3 x, \quad (5.29)$$

em que  $\det \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$  é o Jacobiano da transformação. Podemos por fim escrever

$$\begin{aligned} d^3 x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu(x) B_\nu(x) C_\rho(x) &= d^3 x \det \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A'_\alpha(x') B'_\beta(x') C'_\gamma(x') \\ d^3 x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu(x) B_\nu(x) C_\rho(x) &= d^3 x' \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A'_\alpha(x') B'_\beta(x') C'_\gamma(x'). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Esse processo mostra que a ação do CS também é invariante sob transformações gerais de coordenadas, sem a necessidade do fator  $\sqrt{-g}$ . Nesse contexto é dito que a ação

$$S_{CS} = \int_{\mathcal{M}} d^3x \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (5.31)$$

é topológica e invariante sob difeomorfismos.

Outro elemento importante que podemos obter para reafirmar que o CS é topológico é a hamiltoniana,  $H_{CS}$ . Uma maneira de obtê-la é utilizando uma transformada de Legendre da lagrangiana, de modo a escrever

$$\begin{aligned} H_{CS} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\mu A_\nu - \mathcal{L}_{CS} \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha (\partial_\beta A_\gamma) - \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Outra maneira de obter esse resultado é usando o tensor de energia e momento  $T^{\mu\nu}$ , no qual as componentes  $T^{00}$  e  $T^{0i}$  são conservadas sob invariância de translações no espaço-tempo. As mesmas descrevem a dinâmica do sistema e assim a hamiltoniana (energia) e o momento são quantidades conservadas, dadas da seguinte maneira

$$H \equiv \int d^2x T^{00} \quad (5.33)$$

$$P^i \equiv \int d^2x T^{0i}. \quad (5.34)$$

Para obter o tensor de energia e momento, de um espaço plano, podemos utilizar a derivada funcional da ação no espaço curvo em relação a métrica curva, ou seja

$$T^{\mu\nu} \sim \left. \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \right|_{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}}. \quad (5.35)$$

Seguindo essa expressão é fácil ver que  $T^{\mu\nu} = 0$ , isso porque a ação de CS é independente da métrica, como discutido acima Eq. (5.30). Dessa forma o hamiltoniano também é zero

$$H_{CS} = 0. \quad (5.36)$$

Os resultados obtidos acima nas Eqs. (5.32) e (5.36) é típico de teorias topológicas. A hamiltoniana ser nula também diz que o CS não proporciona dinâmica no sistema. No entanto quando consideramos sistemas com bordas não temos dinâmica no *bulk*, mas obtemos graus de liberdade dinâmico nas bordas. Isso é algo esperado no EHQ, como discutido na seção 3.4. Esse fenômeno é conhecido como correspondência *bulk-edge* [10].

### 5.3.2 Teoria Topológica Massiva

Neste ponto do trabalho, mostramos mais um resultado importante proveniente da teoria emergente descrita pelo CS. Esse fenômeno é dado quando adicionamos dinâmica ao



campo de calibre  $A_\mu$ , ou seja, introduzimos na lagrangiana um termo de Maxwell. Note que ambas produzem teorias invariantes de calibre em  $2+1$  dimensões. Levar o campo a ter uma dinâmica dá um surpreendente resultado, que é a geração de massa na teoria. Dessa forma podemos obter esse resultado partindo da lagrangiana de Maxwell-Chern-Simons (MCS) que é dada por

$$\mathcal{L}_{MCS} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{1}{4e^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (5.37)$$

A partir da lagrangiana podemos obter a equação de movimento para o campo  $A_\mu$ ,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{\kappa e^2}{2} \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (5.38)$$

Uma maneira para obter explicitamente a massa é calculando o propagador do campo  $A_\mu$ . Para isso, precisamos acrescentar um termo de fixação de calibre na lagrangiana de MCS. Escolhemos esse termo para ser  $\frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$ . Assim a lagrangiana é reescrita como

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{1}{4e^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (5.39)$$

Para prosseguir no cálculo do propagador, precisamos obter a equação de movimento da lagrangiana com o termo que fixa o calibre para a teoria, Eq. (5.39). A mesma é obtida realizando a derivada funcional da ação,  $\frac{\delta S_{MCS}}{\delta A_\nu} = 0$ . Dessa forma temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} + -\frac{\kappa e^2}{2} \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \lambda \partial^\nu \partial_\mu A^\mu &= 0 \\ [\eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha - (1 - \lambda) \partial^\nu \partial^\mu + \kappa e^2 \epsilon^{\nu\alpha\mu} \partial_\alpha] A_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Sabendo que o propagador  $\Delta_{\mu\nu}(x)$  deve satisfazer a equação

$$[\eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha - (1 - \lambda) \partial^\mu \partial^\nu + \kappa e^2 \epsilon^{\nu\alpha\mu} \partial_\alpha] \Delta_{\mu\rho}(x) = i\eta_\rho^\nu \delta^{(2)}(x), \quad (5.41)$$

e utilizando a transformada de Fourier para o escrever no espaço dos momentos

$$\Delta_{\mu\rho}(x) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \Delta_{\mu\rho}(k), \quad (5.42)$$

em que  $kx \equiv k_\mu x^\mu$ , obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-ikx} [-k^2 \eta^{\mu\nu} + (1 - \lambda) k^\mu k^\nu - i\kappa e^2 \epsilon^{\nu\alpha\mu} k_\alpha] \Delta_{\mu\rho}(k) &= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-ikx} i\eta_\rho^\nu \\ [-k^2 \eta^{\mu\nu} + (1 - \lambda) k^\mu k^\nu - i\kappa e^2 \epsilon^{\nu\alpha\mu} k_\alpha] \Delta_{\mu\rho}(k) &= i\eta_\rho^\nu. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Com esse resultado, precisamos agora encontrar um  $\Delta_{\mu\rho}(k)$  que possibilite inverter essa relação e conseqüentemente nos retorne o lado direito da Eq. (5.43). Para isso, escrevemos a forma mais geral possível para o propagador no espaço dos momentos,

$$\Delta_{\mu\rho}(k) = f(k^2) \eta_{\mu\rho} + g(k^2) \epsilon_{\mu\rho\alpha} k^\alpha + h(k^2) k_\mu k_\rho. \quad (5.44)$$

Note que  $f(k^2)$ ,  $g(k^2)$  e  $h(k^2)$  só podem depender de termos proporcionais à  $k^2$ , substituindo a Eq. (5.44) na Eq. (5.43), comparamos os termos equivalentes em ambos os lados, obtemos,

$$f(k^2) = -\frac{i}{k^2 - (\kappa e^2)^2} \quad (5.45)$$

$$g(k^2) = \frac{\kappa e^2}{k^2 (k^2 - (\kappa e^2)^2)} \quad (5.46)$$

$$h(k^2) = -\frac{i}{k^2 (k^2 - (\kappa e^2)^2)} + \frac{i}{\lambda} \frac{1}{(k^2)^2}. \quad (5.47)$$

Agora introduzindo as funções na Eq. (5.44), obtemos o propagador da teoria de MCS, como

$$i\Delta_{\mu\rho}(k) = \frac{1}{k^2 (k^2 - (\kappa e^2)^2)} (\eta_{\mu\rho} k^2 - k_\mu k_\rho - i (\kappa e^2) \epsilon_{\mu\rho\alpha} k^\alpha) + \frac{1}{\lambda} \frac{k_\mu k_\rho}{(k^2)^2}. \quad (5.48)$$

Com esse resultado identificamos a massa gerada pelo campo de calibre, que é a mesma dada pelo polo do propagador

$$m_{MCS} = \kappa e^2. \quad (5.49)$$

Podemos obter esse resultado de outra maneira, por meio das equações de movimento, dadas em termos do tensor dual definido por

$$G^\alpha \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (5.50)$$

Note que,  $G^\alpha$  é invariante de calibre e satisfaz  $\partial_\alpha G^\alpha = 0$ . Agora para obter as equações de movimento em termos do tensor dual, utilizamos a Eq. (5.38) e a definição de  $G^\alpha$ . Dessa forma podemos escrever a equação de movimento como

$$\left[ \partial_\mu \partial^\mu + (\kappa e^2)^2 \right] G^\alpha = 0. \quad (5.51)$$

Esse resultado pode ser comparado com a equação de Klein-Gordon, dada como equação de movimento para campos escalares. Assim identificamos a massa como sendo  $m_{MCS} = \kappa e^2$ . Também podemos analisar as unidades que são vinculadas ao termo  $\kappa e^2$ , ao olharmos para a ação de MCS ou para a lagrangiana Eq. (5.37), de maneira a identificar que o coeficiente de CS  $\kappa$ , é adimensional em unidades de massa e conseqüentemente  $e^2$  deve ter dimensão de uma unidade de massa, para contrabalançar as unidades de  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , que é  $[F^2] = 4$ . Dessa forma temos que o termo  $\kappa e^2$  realmente é uma massa, o que concretiza a ideia do CS nos levar a uma teoria topológica massiva.

### 5.3.3 Estatística Fracionária

Outra propriedade do CS que discutimos é a estatística. Como mencionado em seções anteriores a estatística em  $2+1$  dimensões tem algumas peculiaridades. Nesta seção

analisamos como o acoplamento do CS com partículas carregadas nos leva a ter estatística fracionária.

Para realizar o acoplamento entre as partículas e o CS, consideramos uma corrente conservada  $J^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ , em que  $J^0 = \rho$  é a densidade de carga elétrica e  $J^i = j^i$  é uma densidade de corrente elétrica. Utilizamos também o campo de calibre  $A_\mu$ , como sendo o campo que media as interações entre as partículas. O acoplamento entre essas duas quantidades deve ser  $A_\mu J^\mu$ , isso porque esse termo é um invariante de calibre, mas note que esse fato é verdadeiro por consequência da corrente ser conservada, ou seja,  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Dessa forma, podemos escrever a ação do CS acoplado com um sistema de partículas carregadas da seguinte forma

$$S = \int_v d^3x \left( \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - A_\mu J^\mu \right). \quad (5.52)$$

O próximo passo é obter as equações de movimento para o campo de calibre. Para isso é realizada a derivada funcional da ação  $\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = 0$ , dessa forma temos

$$\frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = J^\mu, \quad (5.53)$$

em que  $F_{\mu\nu}$  é o tensor de Maxwell em  $2 + 1$  dimensões. Em termos das componentes podemos escrever as equações de movimento como

$$J^0 = \rho = \frac{\kappa}{2\pi} B \quad (5.54)$$

$$J^i = j^i = \frac{\kappa}{2\pi} \epsilon^{ij} E_j. \quad (5.55)$$

Podemos escrever formas explícitas para  $\rho$  e  $\mathbf{j}$  considerando um sistema de  $N$  partículas pontuais carregadas. Dessa forma escrevemos  $\rho(x)$  e  $\mathbf{j}(x)$  como

$$\rho(x) \equiv \sum_{I=1}^N \frac{e}{2\pi} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I(t)) \quad (5.56)$$

$$\mathbf{j}(x) \equiv \sum_{I=1}^N \frac{e}{2\pi} \mathbf{v}_I(t) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I(t)), \quad (5.57)$$

em que  $\mathbf{v}_I(t) = \dot{\mathbf{x}}_I(t)$ , é a velocidade da  $i$ -ésima partícula.

Além de interação, precisamos atribuir dinâmica às partículas. Para isso consideramos um termo cinético, assim podemos escrever a ação total para o sistema,

$$S = \int_v d^3x \left( \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - A_\mu J^\mu \right) + \int dt \sum_{I=1}^N \frac{m}{2} \mathbf{v}_I^2(t). \quad (5.58)$$

Note que as equações de movimento para o campo Eq. (5.53) não mudam com o acréscimo do termo cinético.

Podemos escrever a ação total em termos de uma integral temporal, usando as definições para a densidade de carga  $\rho(x)$ , Eq (5.56), e densidade de corrente  $\mathbf{j}(x)$ , Eq. (5.57), como

$$S = \int dt \left\{ \sum_{I=1}^N \left( \frac{m}{2} \mathbf{v}_I^2(t) - eA_0(\mathbf{x}_I(t), t) - e\dot{\mathbf{x}}_I(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_I(t), t) \right) \right. \quad (5.59)$$

$$\left. - \frac{\kappa}{4\pi} \int d^2x (\epsilon^{ij} A_i E_j - A_0 B) \right\}. \quad (5.60)$$

Com esse resultado podemos então obter as equações de movimento para a partícula. Portanto, tomamos a derivada funcional da ação Eq. (5.59), porém, agora em relação a posição da  $j$ -ésima partícula, ou seja  $\frac{\delta S}{\delta x_I^j}$ , assim temos as equações de movimento dadas por

$$m\dot{v}_I^i(t) = e \left( E^i(\mathbf{x}_I(t), t) - \epsilon^{ij} v_I^j(t) B(\mathbf{x}_I(t), t) \right). \quad (5.61)$$

Note que o CS acoplado com partículas carregadas nos leva a força de Lorentz como equação de movimento, o que é equivalente à discussão da seção 3.2.

Depois de obtida a equação de movimento analisamos qual é a força que o campo exerce sobre uma única partícula. Para isso, utilizamos as equações de movimento para os campos Eq. (5.55) e as definições para as densidades Eqs. (5.56) e (5.57). Assim, podemos escrever a força de uma única partícula como

$$\begin{aligned} F^i &= \frac{2\pi e}{\kappa} (\epsilon^{ik} j^k(x) - \epsilon^{ij} v^j \rho(x)) \\ &= \frac{e^2}{\kappa} (\epsilon^{ik} v^k \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I(t)) - \epsilon^{ij} v^j \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I(t))) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Esse resultado diz que as partículas não sentem nenhuma força proveniente do campo  $A_\mu$ . Isso classicamente, porque ao analisarmos o fenômeno quanticamente, obtemos uma fase não nula no transporte adiabático de partículas. Para analisar esse fato abordamos uma região  $C_I$ , onde há apenas uma partícula. Agora calculando o fluxo nessa área, através da expressão

$$\Phi_I = \int_{C_I} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad (5.63)$$

em que a equação para o campo magnético  $B$  é dada por Eq. (5.54) e a densidade de carga, Eq. (5.56). Dessa forma,

$$\Phi_I = \frac{e}{\kappa} \int_{C_I} d^2x \sum_{I=1}^N e \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I(t)) = \frac{e}{\kappa}. \quad (5.64)$$

Esse resultado mostra que o efeito do CS se manifesta apenas quanticamente e o mesmo atribui um fluxo para cada partícula, Figura 15, ou seja, cada partícula passa a ter uma quantidade de fluxo  $\Phi_I = \frac{e}{\kappa}$ , como consequência da interação entre elas, mediada pelo

campo  $A_\mu$ . Isso leva ao importante fato de que a função de onda adquire uma fase do tipo Aharonov-Bohm,

$$\exp\left(ie \oint_C d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\right). \quad (5.65)$$

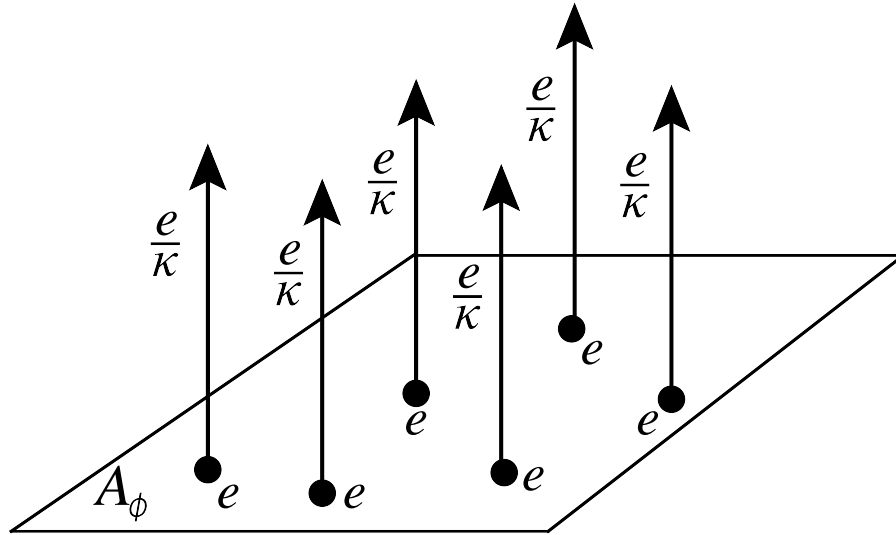


Figura 15 – Coleção de partículas com linhas de fluxo dadas por  $\frac{e}{\kappa}$ .

Com essas considerações, o próximo passo é determinar o potencial vetor. Para isso, vamos tratar o problema no calibre de Coulomb, que é definido por

$$A_0 = 0 \quad \text{e} \quad \partial_i A^i = 0. \quad (5.66)$$

Dessa forma reescrevemos as equações para as densidades de carga e corrente como

$$\rho = \frac{\kappa}{2\pi} \epsilon^{ij} \partial_i A_j \quad (5.67)$$

$$j^i = \frac{\kappa}{2\pi} \epsilon^{ij} \dot{A}_j. \quad (5.68)$$

Também podemos escrever o campo  $A_i$  partindo da escolha de calibre, ou seja,  $\partial_i A^i = 0$  implica em escrever  $A_i$  como

$$A^i = \epsilon^{ij} \partial_j \chi, \quad (5.69)$$

em que  $\chi$  é uma função a ser determinada. Agora substituindo a equação acima na densidade de carga Eq. (5.67),

$$\rho = \frac{\kappa}{2\pi} \nabla^2 \chi. \quad (5.70)$$

Com esse resultado podemos obter  $\chi$  e assim o campo  $A^i$ . Para isso utilizamos o método de funções de Green, dado por

$$\nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (5.71)$$

escrevendo a solução para  $\chi$  em termos de  $G$ , da seguinte forma

$$\chi(x) = \frac{2\pi}{\kappa} \int d^2y G(x-y) \rho(y). \quad (5.72)$$

A função de Green em duas dimensões é dada por

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) = \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.73)$$

Utilizando esse resultado e a densidade de carga da Eq. (5.56) na expressão para  $\chi$  temos

$$\chi(x) = \frac{e}{\kappa} \sum_{I=1}^N \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I(t)|. \quad (5.74)$$

Dessa forma podemos obter o potencial, simplesmente utilizando a Eq. (5.69),

$$A^i(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{\kappa} \sum_{I=1}^N \epsilon^{ij} \frac{x^j - x_I^j(t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I(t)|^2}. \quad (5.75)$$

Depois de obtido o potencial vetor  $\mathbf{A}$  podemos calcular a fase adquirida pela função de onda, através da Eq. (5.65). Para isso, analisamos um sistema descrito com duas partículas e movendo uma em torno da outra, seguindo o caminho  $C$ , como mostrado na Figura 16.

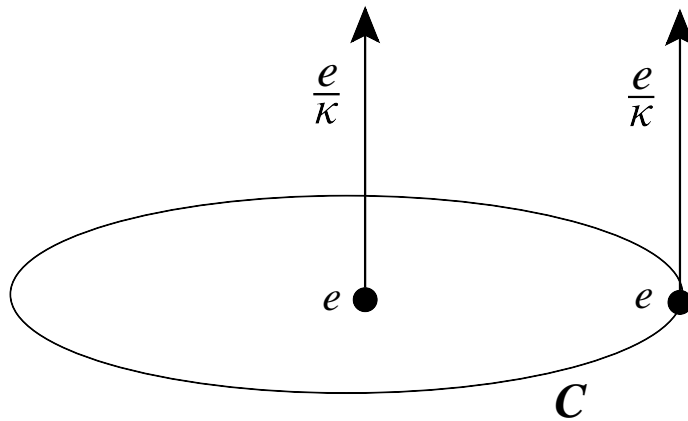


Figura 16 – Transporte adiabático dado por um caminho  $C$ .

Para realizar o cálculo parametrizamos o sistema em coordenadas polares e por simplicidade assumimos que a partícula 1 está na origem  $\mathbf{x}_1 = 0$  e a partícula 2 na posição  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{r}(t)$ . Com isso escrevemos o potencial como

$$A^i(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{\kappa} \epsilon^{ij} \frac{r^j(t)}{|\mathbf{r}(t)|^2}. \quad (5.76)$$

Outros elementos que precisamos parametrizar é o elemento de linha  $d\mathbf{x}$ , que pode ser escrito como  $d\mathbf{x} = r d\theta \hat{\theta}$ , e a quantidade  $\epsilon^{ij} r^j$  que pode ser vista como uma quantidade

na direção perpendicular ao raio, em coordenadas polares essa quantidade pode ser dada como  $r\hat{\theta}$ . Com todos os elementos já parametrizados podemos obter a fase

$$\begin{aligned} ie \oint_C d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} &= \frac{ie^2}{\kappa} \int_0^{2\pi} d\theta r \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} \frac{r}{r^2} \\ &= i \frac{2\pi e^2}{\kappa}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Esse resultado é a fase que a função de onda adquire, quando uma partícula realiza uma volta em torno da outra. Assim, comparando com a discussão realizada na seção 2.2, a qual mostra a fase adquirida por uma troca de partícula, Eq. (2.19). Note que naquele caso tínhamos apenas uma rotação por um ângulo  $\pi$ . Agora realizando a comparação das fases temos

$$\exp\left(i \frac{2\pi e^2}{\kappa}\right) = \exp(i2\pi\nu), \quad (5.78)$$

em que  $\nu$  é o parâmetro de estatística. Dessa forma, temos a estatística que uma partícula carregada adquire quando a interação é mediada por um campo de calibre  $A^\mu$ , dada por

$$\nu = \frac{e^2}{\kappa}. \quad (5.79)$$

Fazendo  $e = 1$ , temos que a estatística é uma quantidade dada por  $\nu = 1/\kappa$ , em que  $\kappa$  é o parâmetro do CS. Isso, juntamente com o discutido na seção 2.2 sobre troca de partículas, temos a origem da estatísticas aniônica. Portanto ao escolhermos  $\kappa$  apropriadamente para assumir valores discretos temos estatística fracionária. A demonstração que  $\kappa$  assume valores inteiros não é realizada neste trabalho, mas um dos fatos para o parâmetro do CS ser dado por números discretos tem explicações e aplicação no desenvolvimento de uma teoria não-abeliana de Chern-Simons [15].

## 5.4 Descrição Efetiva do Sistema Hall

Com todos os resultados acima e partindo das considerações gerais para o efeito Hall, concluimos que a teoria efetiva de baixas energias em  $2 + 1$  dimensões que descreve o EH é dada pela ação de CS,

$$S_{CS} = \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu \alpha_\rho. \quad (5.80)$$

Note que  $\alpha_\mu$  é o campo emergente de calibre, introduzido pela corrente conservada  $J^\mu$ ,

$$J^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \alpha_\rho. \quad (5.81)$$

Dessa forma, temos que a informação do campo magnético não está contida em  $\alpha_\mu$ , mas sim em  $\kappa$ , o coeficiente do termo de CS.

Portanto, vamos extrair informações sobre o sistema Hall a partir da teoria efetiva. Um dos elementos importantes no EHQ é a *filling fraction* ou fator de preenchimento Eq. (3.94). Logo, precisamos determinar o seu correspondente na teoria efetiva descrita pelo CS. Para isso, introduzimos um campo eletromagnético no sistema, de forma a variar o campo total, o que nos leva a um desequilíbrio. Assim o sistema tentará se reestabelecer. Essa ideia pode ser implementada, realizando o acoplamento do CS com um campo externo  $A_\mu$ , da seguinte maneira

$$S = \int d^3x \left( \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu \alpha_\rho - J^\mu A_\mu \right). \quad (5.82)$$

Note que, o termo  $J^\mu A_\mu$  é invariante de calibre e o campo  $A_\mu$  representa os campos externos.

Utilizando a corrente conservada Eq. (5.81), podemos reescrever a ação acima da seguinte forma

$$S = \int d^3x \left( \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu \alpha_\rho - \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu A_\rho \right). \quad (5.83)$$

O que nos leva à obter as equações de movimento para o campo  $\alpha_\mu$ , para isso realizamos,  $\frac{\delta S}{\delta \alpha_\mu} = 0$ , dessa forma obtemos

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha_\beta(x')} = \int d^3x \left( \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\beta\nu\rho} 2\partial_\nu \alpha_\rho(x) - \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\beta\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \right) \delta^{(3)}(x - x') = 0. \quad (5.84)$$

Realizando a derivada funcional da ação em relação ao campo e igualando o resultado a zero, obtemos as equações de movimento, dadas por

$$\kappa \epsilon^{\beta\nu\rho} \partial_\nu \alpha_\rho = \epsilon^{\beta\alpha\mu} \partial_\alpha A_\mu. \quad (5.85)$$

A ideia agora é determinar a ação efetiva para o campo externo  $A_\mu$ . Para isso, utilizamos a mesma ideia discutida na seção 5.1, em que obtemos a ação efetiva para a teoria de baixas energias, Eq. (5.6). Para esse caso temos a ação efetiva para o campo  $A_\mu$ , realizando a integração funcional sob o campo  $\alpha_\mu$

$$e^{iS_{ef}(A_\mu)} = \int D\alpha_\mu e^{iS(\alpha_\mu, A_\mu)}. \quad (5.86)$$

Podemos reescrever a equação acima com a ação Eq. (5.83), da seguinte forma

$$\begin{aligned} e^{iS_{ef}(A_\mu)} &= \int D\alpha_\mu \exp \left[ i \int d^3x \left( \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu \alpha_\rho - \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu A_\rho \right) \right] \\ &= \int D\alpha_\mu \exp \left[ \int d^3x \left( - \left( \frac{i\kappa}{4\pi} \right) \alpha_\mu P^{\mu\rho} \alpha_\rho + \alpha_\mu L^\mu \right) \right], \end{aligned} \quad (5.87)$$

em que definimos  $P^{\mu\rho}$  e  $L^\mu$  como sendo

$$\begin{aligned} P^{\mu\rho} &\equiv -\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \\ L^\mu &\equiv -\frac{i}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho. \end{aligned} \quad (5.88)$$



Para resolver a equação acima precisamos utilizar a generalização para integral gaussiana de várias variáveis, dada por

$$\int \prod dx_i e^{-\sum_{i,j} x_i M_{ij} x_j + \sum_i L_i x_i} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det M}} e^{-\frac{1}{4} \sum_{i,j} L_i M_{ij}^{-1} L_j}. \quad (5.89)$$

Note que, existe uma sutileza em utilizar a integral gaussiana, devido a inversa do operador  $P^{\mu\rho}$  não ser definida, ou seja o  $\det P^{\mu\rho} = 0$ . Com isso precisamos adicionar na lagrangiana um termo que fixa o calibre. Assim escolhemos o calibre de Lorentz de modo a adicionar o termo  $\lambda (\partial_\mu A^\mu)^2$ . Dessa forma reescrevemos a Eq. (5.88) como

$$\begin{aligned} e^{iS_{ef}[A_\mu]} &= \int D\alpha_\mu \exp \left[ i \int d^3x \left( \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu \alpha_\rho - \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu A_\rho - \lambda (\partial_\mu A^\mu)^2 \right) \right] \\ &= \int D\alpha_\mu \exp \left[ \int d^3x \left( -\alpha_\mu \left( \frac{i\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu - \lambda \partial^\mu \partial^\rho \right) \alpha_\rho + \alpha_\mu L^\mu \right) \right] \\ &= \int D\alpha_\mu \exp \left[ \int d^3x (-\alpha_\mu M^{\mu\rho} \alpha_\rho + \alpha_\mu L^\mu) \right], \end{aligned} \quad (5.90)$$

em que definimos o operador invertível  $M^{\mu\rho}$ , da seguinte forma

$$M^{\mu\rho} \equiv \frac{i\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu - \lambda \partial^\mu \partial^\rho.$$

Assim, para resolver a integração funcional utilizando a Eq. (5.89), precisamos obter a inversa do operador  $M^{\mu\nu}$ , que satisfaz a relação

$$M^{\mu\nu} [M]_{\nu\alpha}^{-1} = \eta_\alpha^\mu. \quad (5.91)$$

Sabendo que  $[M]_{\nu\alpha}^{-1}$  pode ser dada de forma geral por

$$[M]_{\nu\alpha}^{-1} = \alpha (\partial^2) \eta_{\nu\alpha} + \beta (\partial^2) \epsilon_{\nu\alpha\rho} \partial^\rho + \gamma (\partial^2) \partial_\nu \partial_\alpha,$$

em que  $\alpha (\partial^2)$ ,  $\beta (\partial^2)$  e  $\gamma (\partial^2)$  são funções a ser determinadas e dependem de  $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$ . Assim para determiná-las utilizamos a equação acima na relação dada pela Eq. (5.91) e comparando termo a termo ambos os lados da igualdade, de modo a

$$\alpha (\partial^2) = 0 \quad (5.92)$$

$$\beta (\partial^2) = \frac{4\pi i}{\kappa} \frac{1}{\partial^2} \quad (5.93)$$

$$\gamma (\partial^2) = -\frac{i}{\lambda} \frac{1}{(\partial^2)^2}. \quad (5.94)$$

Com as funções determinadas podemos escrever a inversa do operador  $M_{\mu\nu}$ , da seguinte forma

$$[M]_{\nu\alpha}^{-1} = \frac{4\pi i}{\kappa} \frac{\epsilon_{\nu\alpha\rho} \partial^\rho}{\partial^2} - \frac{i}{\lambda} \frac{1}{(\partial^2)^2} \partial_\nu \partial_\alpha. \quad (5.95)$$

Por fim podemos resolver a integração funcional, identificando quais os termos correspondentes na integração gaussiana, o que nos resulta em

$$\begin{aligned}
e^{iS_{ef}[A_\mu]} &\sim \exp \left[ -\frac{1}{4} \int d^3x L^\mu [M]_{\mu\nu}^{-1} L^\nu \right] \\
&\sim \exp \left[ \frac{i}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial^\rho}{\partial^2} - \frac{1}{4\lambda} \frac{1}{(\partial^2)^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) \epsilon^{\nu\sigma\lambda} \partial_\sigma A_\lambda \right] \\
&\sim \exp \left[ \frac{i}{4\pi\kappa} \int d^3x \epsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta \left( \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial^\rho}{\partial^2} \right) \epsilon^{\nu\sigma\lambda} \partial_\sigma A_\lambda \right] \\
&\sim \exp \left[ -\frac{i}{4\pi\kappa} \int d^3x \epsilon^{\mu\alpha\beta} A_\mu \partial_\alpha A_\beta \right].
\end{aligned} \tag{5.96}$$

Note que para realizar simplificações na integral, utilizamos integrações por partes e propriedades de antissimetria do símbolo de Levi-Civita. Com esses resultados podemos identificar a ação efetiva para o campo  $A_\mu$  como sendo

$$S_{ef}[A_\mu] = -\frac{1}{4\pi\kappa} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \tag{5.97}$$

O método utilizado acima é equivalente a usar a equação de movimento para o campo  $\alpha_\mu$  na ação. De modo que ao substituir a Eq. (5.85) na ação Eq. (5.83), temos

$$S_{ef}[A_\mu] = \int d^3x \left( \frac{1}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu A_\rho \right) \tag{5.98}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu A_\rho. \tag{5.99}$$

Agora realizando integrações por partes, desprezando termos de superfície e substituindo novamente a Eq. (5.85) obtemos a ação efetiva,  $S_{ef}[A_\mu]$ , tal que

$$S_{ef}[A_\mu] = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\rho \partial_\mu \alpha_\nu \tag{5.100}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\kappa} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \tag{5.101}$$

Note que, o resultado para a ação efetiva também é uma teoria de CS. De modo que com esse resultado podemos obter a corrente eletromagnética gerada pela variação ocorrida ao introduzir o campo externo. A corrente pode ser dada por

$$J_{el}^\mu \equiv -\frac{\delta S_{ef}}{\delta A_\mu}, \tag{5.102}$$

em que  $J^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ . Assim temos que a corrente é

$$J^\mu = \frac{1}{2\pi\kappa} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho. \tag{5.103}$$

Dessa forma, podemos por meio da densidade de carga, identificar a *filling fraction*. Para isso, primeiro obtemos a densidade de carga,  $J^0 = \rho$ ,

$$\rho = \frac{1}{2\pi\kappa} \epsilon^{0ij} \partial_i A_j \tag{5.104}$$

$$= \frac{1}{2\pi\kappa} B. \tag{5.105}$$

Agora escrevemos a *filling fraction*, que é dada pela razão entre o número de partículas e número de degenerescência, Eq. (3.94), que pode ser escrita como

$$\nu = \frac{N}{N_{deg}} = \frac{2\pi}{B}\rho. \quad (5.106)$$

Por fim, comparando as duas expressões Eqs. (5.106) e (5.104), obtemos que a *filling fraction* é dada pelo inverso do coeficiente do CS,

$$\nu = \frac{1}{\kappa}. \quad (5.107)$$

Podemos retirar desse resultado o fato de  $\kappa$  assumir o papel da *filling fraction* na teoria do EHQ inteiro e fracionário descrito pelo CS.

Outro resultado importante no EHQ são as excitações de quase-partículas e quase-buracos, portanto devemos obter como esse fenômeno é descrito com o CS. Para ver como isso ocorre, devemos lembrar que essas excitações possuem carga e estatística fracionária, logo esses resultados devem ser reproduzidos na teoria.

Na seção anterior mostramos que um dos aspectos descrito pelo CS, quando esse é acoplado com partículas carregadas é a estatística fracionária, assim nos resta mostrar como obter carga fracionária. Para obter esses resultados consideramos uma excitação que pode ser representada por meio de uma corrente  $J_q^\mu \equiv q\tilde{J}^\mu$ , em que  $q = \pm e$  e  $\tilde{J}^\mu$  pode ser escrito em termos de um campo vetorial

$$\tilde{J}^\mu \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\tilde{A}_\rho. \quad (5.108)$$

Essa corrente é introduzida na teoria através do acoplamento com o campo  $\alpha_\mu$ . Precisamos também introduzir o acoplamento que resultou em estatística fracionária. Que foi dado em termos de um acoplamento da corrente com campo  $\alpha_\mu$ , com o campo externo  $A_\mu$ . Dessa forma podemos escrever a ação que descreve a teoria com excitações de Qp e Qb, da seguinte maneira

$$S = \int d^3x \left( \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu \alpha_\rho - J^\mu A_\mu - q \tilde{J}^\mu \alpha_\mu \right). \quad (5.109)$$

Note que o acoplamento com o campo eletromagnético é dado pelo campo  $A_\mu$  e o acoplamento que representa a excitação é dado por  $q\tilde{J}^\mu\alpha_\mu$ . Também temos que a carga elétrica de excitação não é  $q$ . Assim o próximo passo é obtê-la, através da identificação do acoplamento da corrente de excitação com o campo eletromagnético. Para isso, precisamos da ação efetiva para o campo  $A_\mu$  e para a corrente de excitação  $\tilde{J}^\mu$ ,  $S_{ef}[A_\mu, \tilde{J}^\mu]$ .

Para obter a ação efetiva, realizamos o mesmo processo feito acima, em que utilizamos as equações de movimento do campo  $\alpha_\mu$ , na própria ação. Assim precisamos da equação de movimento para o campo, que pode ser obtida por meio da derivada funcional da ação em relação ao campo  $\alpha_\mu$ ,  $\frac{\delta S}{\delta \alpha_\mu} = 0$ . Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \alpha_\beta(x')} &= \int d^3x \left( \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\beta\nu\rho} 2\partial_\nu \alpha_\rho(x) - \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\beta\nu\rho} \partial_\nu A_\rho - q \tilde{J}^\beta \right) \delta^{(3)}(x-x') \\ 0 &= \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \alpha_\rho - \epsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta - 2\pi q \tilde{J}^\mu. \end{aligned}$$

Podemos rescrever essa equação utilizando a fórmula explícita para  $\tilde{J}^\mu$ , como

$$\kappa\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\alpha_\rho = \epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\left(A_\beta + 2\pi q\tilde{A}_\beta\right). \quad (5.110)$$

Por fim, podemos introduzir esse resultado na ação, Eq. (5.109), obtendo assim a ação efetiva  $S_{ef}[A_\mu, \tilde{J}^\mu]$ . Realizando esse processo e algumas manipulações algébricas, podemos escrever a ação efetiva como

$$S_{ef}\left[A_\mu, \tilde{J}^\mu\right] = \int d^3x \left( -\frac{1}{4\pi\kappa}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho - \frac{q}{k}\tilde{J}^\mu A_\mu - \frac{\pi q^2}{\kappa}\tilde{J}^\mu\tilde{A}_\mu \right). \quad (5.111)$$

Com a ação efetiva podemos obter a corrente elétrica conservada no sistema, e assim a carga das excitações. Logo temos que a corrente elétrica conservada pode ser obtida da Eq. (5.102). Fazendo uso dessa expressão, temos a corrente elétrica dada por

$$\begin{aligned} J_{\text{el}}^\mu &= -\frac{\delta S_{ef}}{\delta A_\mu} \\ J_{\text{el}}^\mu &= \frac{1}{2\pi\kappa}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho + \frac{q}{\kappa}\tilde{J}^\mu. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Temos que para um excitação pontual, localizada em um ponto  $\mathbf{x}$ , podemos escrever a densidade de carga de excitação como sendo  $\tilde{J}^0 = \delta^{(2)}(\mathbf{x})$ . Agora com essas constatações e a densidade de carga dada por,

$$J_{\text{el}}^0 = \frac{1}{2\pi\kappa}\epsilon^{0ij}\partial_i A_j + \frac{q}{\kappa}\tilde{J}^0, \quad (5.113)$$

podemos obter a carga total do sistema,

$$Q_t = \int d^2x J_{\text{el}}^0 \quad (5.114)$$

$$Q_t = \int d^2x \left( \frac{1}{2\pi\kappa}\epsilon^{0ij}\partial_i A_j + \frac{q}{\kappa}\tilde{J}^0 \right) \quad (5.115)$$

$$Q_t = \frac{1}{2\pi\kappa}BA_\phi + \frac{q}{\kappa}. \quad (5.116)$$

em que  $A_\phi$  é a área. Note que a carga total é dada pela carga de excitação, mais a carga fundamental do sistema,

$$Q_t = Q_f + Q_{ex}.$$

Analisando separadamente as cargas, podemos escrever a carga fundamental  $Q_f$  como sendo

$$Q_f = \frac{1}{2\pi\kappa}BA_\phi = \frac{\Phi}{2\pi}\nu = \frac{\Phi}{2\pi}\frac{N_e}{\frac{\Phi}{2\pi}} = N_e. \quad (5.117)$$

Note que, utilizando a forma explícita para a *filling fraction* obtemos que a carga fundamental é dada pelo número de elétrons no sistema. Agora analisando a carga de excitação, temos que

$$Q_{ex} = \frac{q}{\kappa} = \begin{cases} +\frac{e}{\kappa} & \text{quase-buraco} \\ -\frac{e}{\kappa} & \text{quase-partícula.} \end{cases} \quad (5.118)$$

Note que, para  $q = +e$  temos carga fracionária de uma excitação de quase-buraco e para  $q = -e$  temos carga fracionária de uma excitação de quase-partícula.

Com o discutido nesta seção temos um grande número de aspectos demonstrados para certificar a teoria de Chern-Simons, como a teoria efetiva de baixa energia que descreve o EHQ, de modo a explicitar a *filling fraction* e reproduzir alguns dos valores obtidos experimentalmente, também evidenciou os aspectos topológicos do sistema, com a apresentação de uma massa para a dinâmica do campo e a invariância sobre difeomorfismos, por fim as excitações do mesmo como sendo dados por *anyons*, com estatística e carga fracionária. Dessa forma o CS descreve com eficiência a teoria para o efeito Hall quântico.



## 6 Teoria de Borda

Nesta seção analisamos a teoria de borda do sistema Hall, de modo a descrever estados quirais sem massa. Discutimos também a teoria que descreve a correspondência entre *bulk* e a borda, analisando assim o termo de Chern-Simons na presença de uma borda física.

### 6.1 Estados de Borda

Para descrever uma teoria de bordas, definimos o sistema Hall em um placa finita, como na seção 3.4, onde mostramos que existem estados quirais sem massa nas bordas e caracterizando portanto um condutor. Podemos abordar esse sistema, por simplicidade, como uma placa com borda em  $y = 0$  e infinita na direção de  $x$ .

Partindo de uma teoria de campos, podemos descrever esses estados condutores por uma teoria de bósons quirais sem massa em  $(1 + 1)$  dimensões, isso porque a física discutida ocorre apenas na borda, ou seja, acontece apenas em uma dimensão espacial. Podemos escrever a lagrangiana da borda como

$$\mathcal{L}_R = \partial_0 \varphi_R \partial_1 \varphi_R - v (\partial_1 \varphi_R)^2 \quad (6.1)$$

$$\mathcal{L}_L = \partial_0 \varphi_L \partial_1 \varphi_L + v (\partial_1 \varphi_L)^2, \quad (6.2)$$

em que  $v$  é a velocidade de propagação e definimos  $\mathcal{L}_R$  como correspondente à propagação para a direita e  $\mathcal{L}_L$  para à esquerda. Cada uma delas descreve uma teoria para a borda com propagações em direções opostas.

A lagrangiana acima pode ser obtida a partir da decomposição de um bóson relativístico, ou seja, um campo bosônico relativístico sem massa levaria a uma combinação de dois bósons com quiralidades opostas. Mostramos como realizar essa decomposição de modo a obter as lagrangianas quirais, partindo da lagrangiana do campo escalar sem massa, em  $(1 + 1)$  dimensões

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \\ &= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_1 \phi)^2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Para realizar a decomposição utilizamos um campo auxiliar  $\rho$ , tal que

$$\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 \equiv (\partial_0 \phi) \rho - \frac{1}{2} \rho^2. \quad (6.4)$$

Utilizando a expressão acima podemos escrever a lagrangiana em termos do campo auxiliar,

$$\mathcal{L} = (\partial_0 \phi) \rho - \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{2} (\partial_1 \phi)^2. \quad (6.5)$$

Note que, utilizando a equação de movimento para  $\rho$ , dada por  $\rho = (\partial_0\phi)$ , obtemos a lagrangiana do campo escalar, Eq. (6.3), mostrando assim que as mesmas são equivalentes, ou seja, não alteram a física do problema.

Prosseguindo com o processo de desacoplamento da lagrangiana, definimos o campo  $\phi$  em duas partes, uma que descreve a propagação para a direita  $\varphi_R$  e uma para a esquerda  $\varphi_L$ . Definimos também o campo auxiliar,

$$\phi \equiv \varphi_R + \varphi_L \quad \text{e} \quad \rho \equiv \partial_1\varphi_R - \partial_1\varphi_L. \quad (6.6)$$

Agora, aplicando as relações na Eq. (6.5) e desprezando os termos de superfície da borda, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_0\varphi_R + \partial_0\varphi_L)(\partial_1\varphi_R - \partial_1\varphi_L) - \frac{1}{2}(\partial_1\varphi_R - \partial_1\varphi_L)^2 - \frac{1}{2}(\partial_1\varphi_R + \partial_1\varphi_L)^2 \\ &= \partial_0\varphi_R\partial_1\varphi_R - (\partial_1\varphi_R)^2 - \partial_0\varphi_L\partial_1\varphi_L - (\partial_1\varphi_L)^2 \\ &= \mathcal{L}_R - \mathcal{L}_L. \end{aligned} \quad (6.7)$$

O resultado é a soma de duas lagrangianas de bósons com quiralidades opostas. Vale ressaltar que estamos trabalhando em unidades naturais, de modo que a velocidade é  $v = 1$ . Assim descrevemos uma teoria de borda.

## 6.2 Correspondência *Bulk-Edge*

Com a definição de uma teoria que descreve a borda do sistema devemos agora estabelecer a conexão entre a teoria do *bulk* e os estados de borda.

Como já discutido em seções anteriores, a teoria de calibre que descreve o interior do EHQF, é uma teoria efetiva de baixa energia dada pelo CS, por outra lado a teoria de borda é dada pelos estados de bósons quirais, logo, a ideia é conectar essas duas teorias. O CS naturalmente engloba os estados de borda quando assumimos limites físicos ao espaço. Isso ocorre, pois a ação do CS é um invariante de calibre a menos de um termo de superfície

$$\delta S_{CS} = \int d^3x \frac{\kappa}{4\pi} \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\rho} \lambda \partial_\nu \alpha_\rho), \quad (6.8)$$

em que  $\lambda(x)$  é a função da transformação de calibre  $\alpha_\mu \rightarrow \alpha_\mu + \partial_\mu \lambda$ . Portanto, quando temos um espaço sem borda como por exemplo um plano infinito a variação acima é nula. Ao considerar bordas, a princípio quebramos a invariância de calibre. Com isso, a abordagem para descrever uma correspondência entre as teorias do *bulk* e da borda é iniciada com a ação total

$$S_T = S_{CS} + S_B, \quad (6.9)$$

tal que inclua o termo de CS e o termo de borda, de modo a tornar a teoria total um invariante de calibre, ou seja, a variação da ação por uma transformação de calibre, implica



na seguinte relação

$$\begin{aligned}\delta S_T &= \delta S_{CS} + \delta S_B = 0 \\ \delta S_{CS} &= -\delta S_B.\end{aligned}$$

A ideia aborda o fato de que fisicamente a variação de carga do *bulk* é compensada pela variação na borda, de modo a manter a existência de uma corrente conservada  $J^\mu$ , que é um dos principais pontos na construção da teoria efetiva de baixas energias.

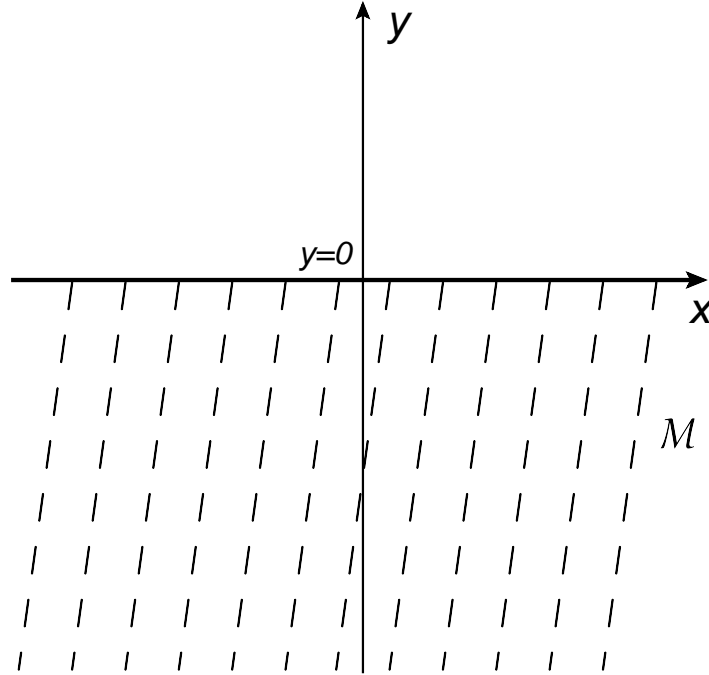


Figura 17 – Configuração do sistema Hall dado por uma variedade  $\mathcal{M}$  e borda em  $y = 0$ .

Para obter a ação de borda, primeiramente determinamos o termo de superfície do CS, levando em consideração um limite físico, que por simplicidade adotamos em  $y = 0$ , como mostra a Figura 17. Desse modo a variação da ação é

$$\begin{aligned}\delta S_{CS} &= \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu (\lambda \partial_\nu \alpha_\rho) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \int dx^0 dx^1 dx^2 \epsilon^{2\nu\rho} \partial_2 (\lambda \partial_\nu \alpha_\rho) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \int dx^0 dx^1 \lambda (\partial_0 \alpha_1 - \partial_1 \alpha_0) \Big|_{y=0}.\end{aligned}\quad (6.10)$$

Construindo agora a ação de maneira a cancelar a variação acima, utilizamos um campo escalar  $\varphi(t, x, y = 0) \equiv \varphi(t, x)$ , que transforma-se como,

$$\varphi \rightarrow \varphi + \lambda(x, t). \quad (6.11)$$

Escrevemos a ação de borda, como

$$S_B = - \int dx dt \frac{\kappa}{4\pi} \varphi (\partial_0 \alpha_1 - \partial_1 \alpha_0), \quad (6.12)$$

e observamos de maneira simples que sua variação é

$$\delta S_B = -\frac{\kappa}{4\pi} \int dx^0 dx^1 \lambda (\partial_0 \alpha_1 - \partial_1 \alpha_0).$$

Note que utilizamos a transformação de calibre dada por  $\alpha_\mu \rightarrow \alpha_\mu + \partial_\mu \lambda(x, t)$ . Com esse resultado podemos confirmar de forma simples que  $\delta S_T = 0$ .

Após obtida a  $S_B$ , devemos mostrar que ela pode ser escrita como a ação de um bóson quirial que, como visto na seção anterior descreve uma teoria de bordas. Para isso, utilizamos o fato de que os campos  $\varphi$ ,  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  não são independentes, pois a ação ainda possui simetrias locais. A simetria que analisamos se dá pela transformação de calibre,

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_0 + \partial_0 \xi \quad (6.13)$$

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + \partial_1 \xi, \quad (6.14)$$

em que  $\xi \equiv \xi(t, x)$  é definido na borda do sistema. Por meio da transformação podemos fixar apenas um campo  $\alpha_\mu$ , sendo que essa escolha envolve um ponto importante, devido que para uma teoria efetiva de baixa energia a velocidade de propagação na borda deve ser tratada como um dado externo ao problema, pois não temos informações microscópicas do sistema. Assim, introduzimos a velocidade de maneira conveniente por meio da fixação de calibre. Logo, podemos escolher

$$\alpha_0 = \pm v \alpha_1, \quad (6.15)$$

em que  $\pm v$  é a velocidade de propagação dos estados em cada direção. Utilizando essa escolha na ação de borda Eq. (6.12), obtemos

$$S_B = - \int dx dt \frac{\kappa}{4\pi} \varphi (\partial_0 - v \partial_1) \alpha_1. \quad (6.16)$$

Para a segunda fixação devemos observar o fato de que ainda existe uma simetria residual que preserva a escolha de calibre, Eq. (6.15). Essa transformação é

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_0 + \partial_0 \chi \quad (6.17)$$

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + \partial_1 \chi, \quad (6.18)$$

desde que  $(\partial_0 - v \partial_1) \chi = 0$ . Isso pode ser visto da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \alpha'_0 &= v \alpha'_1 \\ \alpha_0 + \partial_0 \chi &= v (\alpha_1 + \partial_1 \chi) \\ \alpha_0 + (\partial_0 - v \partial_1) \chi &= v \alpha_1. \end{aligned}$$

Essa condição implica em  $\chi = \chi(x + vt)$ . Para realizar uma escolha que satisfaça isso, precisamos antes olhar as equações de movimento para os campos, pois elas também nos

levam a fatos similares. Portanto, temos as equações de movimento para os campos dadas da seguinte maneira

$$(\partial_0 - v\partial_1)\alpha_1 = 0 \quad (6.19)$$

$$(\partial_0 - v\partial_1)\varphi = 0. \quad (6.20)$$

Note que as equações acima resultam em  $\alpha_1(x+vt)$  e  $\varphi(x+vt)$ , que é equivalente com o obtido para  $\chi$ . Dessa forma, usamos esses resultados para fixar totalmente o campo  $\alpha_1$ , de modo a

$$\alpha_1 = \partial_1\varphi. \quad (6.21)$$

Com essa escolha realizada, observamos que ela respeita as transformações de calibre iniciais, Eqs. (6.11) e (5.19), simplesmente substituindo elas na Eq. (6.16), temos a ação de borda em uma forma final,

$$S_B = \int dxdt \frac{\kappa}{4\pi} (\partial_0\varphi\partial_1\varphi - v(\partial_1\varphi)^2). \quad (6.22)$$

O resultado mostra que a ação de borda é igual a ação do bóson quiral, Eq. (6.1). Portanto, constatamos que a ação total descreve uma teoria que corresponde ao *bulk* e a borda.

Podemos realizar o processo de descrever a correspondência entre as teorias, por meio das equações de movimento para os campos de CS. Para demonstrar esse método alternativo partimos novamente da ação de CS,

$$S_{CS} = \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu \alpha_\rho. \quad (6.23)$$

Agora sabendo que a teoria CS deve se manter invariante de calibre, precisamos que a variação da Eq. (6.8) seja nula, o que devido à borda não ocorre. Temos então que anular o termo

$$\delta S_{CS} = \frac{\kappa}{4\pi} \int dx^0 dx^1 \lambda (\partial_0\alpha_1 - \partial_1\alpha_0) \Big|_{y=0}. \quad (6.24)$$

Para isso fixamos a função da transformação de calibre,  $\lambda(t, x, y=0) = 0$  na borda, o que resulta diretamente em  $\delta S_{CS} = 0$ . Por outro lado isso provoca alguns graus de liberdade serem dinâmicos. Com essa condição temos que a ação é invariante e deste modo podemos fixar o calibre. Utilizamos isso para introduzir a velocidade de propagação dos estados na borda, pois a mesma deve ser um dado externo, como já discutido, logo, escolhemos a fixação de calibre como

$$\alpha_0 = v\alpha_1. \quad (6.25)$$

No método alternativo, além da fixação dada pela escolha de calibre ainda podemos obter um vínculo por meio da equação de movimento para o campo  $\alpha_0$ , sendo que essa pode ser obtida da seguinte equação de movimento

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \alpha_\rho = 0. \quad (6.26)$$

Agora ao olhar a componente  $\mu = 0$  da equação acima, temos

$$\epsilon^{0ij}\partial_i\alpha_j = 0. \quad (6.27)$$

Note que é possível obter um vínculo, tal que  $\alpha_j$  possa ser escolhido como  $\alpha_j = \partial_j\varphi$ , satisfazendo assim automaticamente a Eq. (6.27). Por fim, substituímos a fixação acima e o vínculo na ação de CS, Eq. (6.23), obtendo assim

$$\begin{aligned} S &= \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3x (\epsilon^{0ij\rho}\alpha_\rho\partial_i\alpha_j + \epsilon^{i0j\rho}\alpha_i\partial_0\alpha_j + \epsilon^{ij0}\alpha_i\partial_j\alpha_0) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3x (-\epsilon^{021}\partial_2(\varphi\partial_0\partial_1\varphi) + v\epsilon^{021}\partial_2(\varphi\partial_1\partial_1\varphi)) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \int dxdt (\varphi\partial_0\partial_1\varphi - v\varphi\partial_1\partial_1\varphi) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \int dxdt (\partial_0\varphi\partial_1\varphi - v(\partial_1\varphi)^2) \Big|_{y=0}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Com isso mostramos que essa ação representa a ação do bóson quirial sem massa, Eq. (6.1). Esses dois métodos resultam na descrição de uma teoria que corresponde ao *bulk* e a borda.

A discussão até este ponto mostra inúmeros aspectos do CS, em que esse incorpora espontaneamente a natureza topológica do sistema, como carga e estatística fracionária e ainda a dinâmica na borda, de modo a relacionar estas teorias por meio da chamada correspondência *bulk-edge*. Com isso foi possível observar que o sistema se comporta como um condutor na borda, sendo essa dada por propriedades topológicas do sistema. Esses aspectos têm sido motivo de grande atividade em física da matéria condensada.

## 7 Considerações Finais

Ao longo do trabalho discutimos o efeito Hall quântico, onde demonstramos e analisamos a resistividade Hall e suas propriedades, evidenciando o porquê da mesma ser composta por uma série de platôs. De modo que os mesmos são caracterizados pela *filling fraction*, que é dada por números inteiros e fracionários, o que configura as fases topológicas do sistema Hall.

Apresentamos também os aspectos para a quantização do efeito Hall, com o intuito de obter o espectro de energia e a função de onda. Para obter esses resultados abordamos dois calibres, o de Landau e o simétrico, que nos proporcionaram realizar análises do sistema com bordas físicas e as propriedades dos operadores de translações magnéticas, que nos leva a adquirir uma fase, correspondente a carga e ao fluxo através de uma determinada área, o que equivale ao efeito Aharonov-bohm.

Demonstramos que para o efeito Hall quântico fracionário a interação entre elétrons desempenha papel fundamental, de modo que métodos perturbativos tradicionais não se aplicam ao problema. Portanto, adotamos duas abordagens para discutir o mesmo, a primeira foi a função de onda de Laughlin, em que a partir dessa foi possível obter a *filling fraction* fracionária e também entender vários aspectos do efeito Hall, como as excitações dadas por *anyons* com carga e estatística fracionárias.

A segunda abordagem discutida no trabalho foi descrever o sistema em baixas energias a partir de teorias efetivas. De modo a mostrar como construir a ação de uma maneira geral, por meio dos aspectos de grupo de renormalização, resultando para o caso do EHQ em uma teoria dada pelo termo de CS. Assim, demonstramos que com a teoria descrita por Chern-Simons é possível evidenciar a natureza topológica do sistema. Algumas das características que ficam manifestas são a invariância sob difeomorfismo, o fato do hamiltoniano ser nulo e as excitações do estado fundamental serem dadas por carga e estatística fracionária.

Analisamos também como é realizada a construção de uma teoria de borda para o sistema Hall, sendo ela descrita por bósons quirais sem massa. As propriedades da borda são incorporadas naturalmente pelo CS, o que possibilita abordar as características de uma teoria efetiva e, ainda mostrar como se relacionam a correspondência *bulk-edge*. Com esse estudo foi possível observar que o efeito Hall tem comportamento característico de um isolante no *bulk* e de um condutor na borda, que são propriedades topológicas do sistema. Esses aspectos têm sido motivo de vasto interesse nos últimos anos em questões como fases supersimétricas, supercondutores topológicos, isolantes topológicos e demais assuntos em grande atividade em física da matéria condensada [5, 16, 17].



# Referências

- [1] TSUI, D. C.; STORMER, H. L.; GOSSARD, A. C. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Physical Review Letters*, APS, v. 48, n. 22, p. 1559, 1982.
- [2] THOULESS, D. et al. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Physical Review Letters*, APS, v. 49, n. 6, p. 405, 1982.
- [3] WEN, X.-G. Topological orders and edge excitations in fractional quantum hall states. *Advances in Physics*, Taylor & Francis, v. 44, n. 5, p. 405–473, 1995.
- [4] WEN, X.-G. *Quantum field theory of many-body systems: from the origin of sound to an origin of light and electrons*. New York: Oxford University Press on Demand, 2004.
- [5] WITTEN, E. Three lectures on topological phases of matter. *arXiv preprint arXiv:1510.07698*, 2015.
- [6] HASAN, M. Z.; KANE, C. L. Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, v. 82, n. arXiv: 1002.3895, p. 3045, 2010.
- [7] LERDA, A. *Anyons: Quantum mechanics of particles with fractional statistics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 14.
- [8] WEINBERG, S. *The quantum theory of fields. Volume I, Foundations*. New York: Cambridge university press, 1995.
- [9] KLITZING, K. v.; DORDA, G.; PEPPER, M. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Physical Review Letters*, APS, v. 45, n. 6, p. 494, 1980.
- [10] TONG, D. Lectures on the quantum hall effect. *arXiv preprint arXiv:1606.06687*, 2016.
- [11] FRADKIN, E. *Field theories of condensed matter physics*. New York: Cambridge University Press, 2013.
- [12] JAIN, J. K. *Composite fermions*. New York: Cambridge University Press, 2007.
- [13] GOMES, P. R. Aspects of emergent symmetries. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 31, n. 10, p. 1630009, 2016.
- [14] KANE, C. L.; MELE, E. J. Quantum spin hall effect in graphene. *Physical review letters*, APS, v. 95, n. 22, p. 226801, 2005.

- [15] DUNNE, G. V. Aspects of chern-simons theory. In: *Aspects topologiques de la physique en basse dimension. Topological aspects of low dimensional systems*. Berlin: Springer, 1999. p. 177–263.
- [16] RYU, S. et al. Topological insulators and superconductors: tenfold way and dimensional hierarchy. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 12, n. 6, p. 065010, 2010.
- [17] GROVER, T.; SHENG, D.; VISHWANATH, A. Emergent space-time supersymmetry at the boundary of a topological phase. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 344, n. 6181, p. 280–283, 2014.
- [18] ZEE, A. *Quantum Field Theory in a Nutshell: (Second Edition)*. Princeton University Press, 2010. (In a Nutshell). ISBN 9781400835324. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=n8Mmbjtco78C>>.
- [19] TEO, J. C.; KANE, C. From luttinger liquid to non-abelian quantum hall states. *Physical Review B*, APS, v. 89, n. 8, p. 085101, 2014.
- [20] NEUPERT, T. et al. Wire deconstructionism of two-dimensional topological phases. *Physical Review B*, APS, v. 90, n. 20, p. 205101, 2014.
- [21] ZEE, A. Quantum hall fluids. In: *Field theory, topology and condensed matter physics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995. p. 99–153.
- [22] SON, D. T. The dirac composite fermion of the fractional quantum hall effect. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Oxford University Press, v. 2016, n. 12, 2016.
- [23] WEN, X.-G. Theory of the edge states in fractional quantum hall effects. *International journal of modern physics B*, World Scientific, v. 6, n. 10, p. 1711–1762, 1992.
- [24] HUANG, P.-H. et al. Non-abelian topological spin liquids from arrays of quantum wires or spin chains. *Physical Review B*, APS, v. 93, n. 20, p. 205123, 2016.
- [25] VAFA, C. Fractional quantum hall effect and m-theory. *arXiv preprint arXiv:1511.03372*, 2015.
- [26] ZAMOŁODCHIKOV, A. B. Irreversibility of the flux of the renormalization group in a 2d field theory. *JETP lett*, v. 43, n. 12, p. 730–732, 1986.
- [27] MACDONALD, A. H. Introduction to the physics of the quantum hall regime. *arXiv preprint cond-mat/9410047*, 1994.
- [28] MOORE, G.; READ, N. Nonabelions in the fractional quantum hall effect. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 360, n. 2-3, p. 362–396, 1991.



- 
- [29] FRADKIN, E. et al. A chern-simons effective field theory for the pfaffian quantum hall state. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 516, n. 3, p. 704–718, 1998.
- [30] BONDERSON, P.; GURARIE, V.; NAYAK, C. Plasma analogy and non-abelian statistics for ising-type quantum hall states. *Physical Review B*, APS, v. 83, n. 7, p. 075303, 2011.
- [31] GIRVIN, S. M. Introduction to the fractional quantum hall effect. In: *The Quantum Hall Effect*. Basel: Springer, 2005. p. 133–162.