



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

FELIPE OLIVEIRA FRANCO

**PERTURBAÇÕES TENSORIAIS EM UNIVERSOS
ANISOTROPICAMENTE CURVOS**

Londrina
2017

FELIPE OLIVEIRA FRANCO

**PERTURBAÇÕES TENSORIAIS EM UNIVERSOS
ANISOTROPICAMENTE CURVOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Física.

Orientador: Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira

Londrina
2017

Página com a catalogação elaborada pela biblioteca central.

FELIPE OLIVEIRA FRANCO

**PERTURBAÇÕES TENSORIAIS EM UNIVERSOS
ANISOTROPICAMENTE CURVOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Pedro Rogério Sergi Gomes
Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Carlos André Hernaski
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 24 de Fevereiro de 2017.

Dedico este trabalho ao gato de Schrödinger

AGRADECIMENTOS

Agradeço profundamente à todas as pessoas que me ajudaram e me apoiaram, direta ou indiretamente, a conclusão deste trabalho bem como todo por todo o período em que estudei na Universidade Estadual de Londrina.

Primeiramente gostaria de agradecer a toda minha família. Em especial, meu pai Aloísio, minha mãe Sandra, meus irmãos Fernando e Luciano, e também Ozzy, Fiona e Junior; por todo apoio e motivação ao longo de meu mestrado e de minha graduação.

Agradeço também meus amigos: Gabriel Tazima, Daniel Neves, Felipe Soares Sá, Helder Anizelli, Lucas Gabriel dos Santos, Ladislau Tavares, Ennio Ruiz, Neusmar Junior, Eduardo Carolensky, Victor Coronell, Davincy Tovar, José Castro, Luis Felipe Rico, Mateus Lazaro, Poliane Cristina de Farias, Henrique Nobre, Fernando Sandi Pinto, Alamzeb Khan, Antonio Francisco Junior, Gustavo Santos, Wesley Fontana, Edgar Candales, Rafael Molari, Anderson Morais e José Carlos.

Agradeço Oton Marcori por ser um grande colega de trabalho, que me ajudou em todos os meus momentos no mestrado, e como amigo pessoal no qual tenho um grande respeito. Renan Alves de Oliveira por ser um amigo único me ajudando tanto profissionalmente e mais ainda pessoalmente, te admiro como irmão. Alisson Henrique Dal Col, por esses seis anos em que estivemos juntos como colegas de universidade e também como amigos, não tenho como agradecer por tudo o que fez por mim. E Alexis David Saldivar por todo o aprendizado que compartilhou comigo, se tornando em muito pouco tempo uma pessoa muito importante para mim.

Gostaria de agradecer os professores: Alexandre Urbano, Antonio Edson Gonçalves, Edson Laureto, José Leonil Duarte, Mario Cesar Baldiotti, Paula Fernanda Bienzobaz, Sérgio A. Carias de Oliveira, Veríssimo M. de Aquino, Gilberto Carlos Sanzovo; por tudo o que pude aprender com eles.

Agradeço Pedro Rogério Sergi Gomes e Carlos André Hernaski por aceitarem serem parte da banca examinadora desse trabalho e bem como por contribuir para esse trabalho em si.

Sou grato a Universidade Estadual de Londrina por me fornecer a oportunidade de fazer o que realmente gosto, pelo incentivo motivacional para me tornar um físico. Agradeço a CAPES pelo incentivo financeiro em minha formação, desde de minha iniciação científica até meu mestrado.

Por último gostaria de agradecer a pessoa mais importante para mim nesse mestrado, o meu orientador Thiago dos Santos Pereira. Realmente não tenho como agradecer por todo esse tempo que trabalhamos juntos, por toda a ajuda, orientação, compreensão e inspiração. Grande parte do que sou hoje, como físico e como pessoa, se deve a essa nossa relação.

*Mother, I tried, please believe me
I'm doing the best that I can
I'm ashamed of the things I've been put through
I'm ashamed of the person I am*

Isolation - Joy Division

OLIVEIRA FRANCO, Felipe. **Perturbações Tensoriais em Universos Anisotropicamente Curvos**. 2017. 49 páginas. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

RESUMO

Além de se expandir anisotropicamente, o universo pode também ser anisotrópico ao nível de sua curvatura (espacial). Em particular, modelos com curvatura anisotrópica explicam tanto a fenomenologia do modelo Λ CDM quanto a isotropia e homogeneidade da CMB em primeira aproximação (espaço-tempo de fundo). Assim, eles oferecem um exemplo interessante e viável onde o princípio cosmológico não é justificado a partir dos dados observacionais. Neste trabalho extraímos a dinâmica linear das perturbações tensoriais em duas classes de cosmologias com curvatura espacial anisotrópica. Duas dificuldades surgem em comparação com o mesmo cálculo em cosmologias isotrópicas. A primeira delas vem do fato de que as duas polarizações do tensor não se comportam como um campo de spin-2, mas sim como os componentes irreduzíveis de spin-0 e spin-1 de um campo tensorial simétrico, transverso e sem-traço, cada um com sua própria dinâmica. A segunda dificuldade acontece porque as perturbações métricas são algebricamente acopladas, e, portanto, não se pode ignorar modos escalares e vetoriais focando apenas nos modos tensoriais — mesmo que estejamos interessado neste último — sob o risco de se obter as equações de movimento erradas. Nós ilustramos nossos resultados encontrando soluções analíticas e avaliando os espectros de potência das polarizações tensoriais em um universo dominado pela radiação. Concluimos com alguns comentários sobre como esses modelos poderiam ser confrontados com experiências futuras sobre polarização da CMB.

Palavras-chave: Princípio cosmológico. Anisotropia espacial. Ondas gravitacionais.

OLIVEIRA FRANCO, Felipe. **Tensor Perturbations in Anisotropically Curved Cosmologies**. 2017. 49 pages. Thesis (Master in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

ABSTRACT

Besides expanding anisotropically, the universe can also be anisotropic at the level of its (spatial) curvature. In particular, models with anisotropic curvature and isotropic expansion leads both to a Λ CDM-like phenomenology and to an isotropic and homogeneous CMB at the background level. Thus, they offer an interesting and viable example where the cosmological principle does not follow from the isotropy of observational data. In this work we extract the linear dynamics of tensor perturbations in two classes of cosmologies with anisotropic spatial curvature. Two difficulties arise in comparison to the same computation in isotropic cosmologies. First, the two tensor polarizations do not behave as a spin-2 field, but rather as the spin-0 and spin-1 irreducible components of a symmetric, traceless and transverse tensor field, each with its own dynamics. Second, because metric perturbations are algebraically coupled, one cannot ignore scalar and vector modes and focus just on tensors — even if one is only interested in the latter — under the penalty of obtaining the wrong equations of motion. We illustrate our results by finding analytical solutions and evaluating the power-spectra of tensor polarizations in a radiation dominated universe. We conclude with some comments on how these models could be constrained with future experiments on CMB polarization.

Keywords: Cosmological principle, spatial anisotropy, gravitational waves.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	MODELO DE FUNDO	15
2.1	DINÂMICA <i>shear-free</i>	16
3	DECOMPOSIÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO	18
3.1	DECOMPOSIÇÃO 1+3 DO ESPAÇO-TEMPO	18
3.1.1	Cinemática	20
3.2	1+2+1 SPACETIME SPLITTING	21
3.2.1	Cinemática	23
3.3	DICIONÁRIO ENTRE AS DECOMPOSIÇÕES 1+3 E 1+2+1	24
4	ONDAS GRAVITACIONAIS	26
4.1	TRANSFORMAÇÃO CONFORME	26
4.2	CASO FLRW	27
4.3	CASOS BIII E KS	29
5	EQUAÇÕES DINÂMICAS E SOLUÇÕES	33
5.1	AUTOFUNÇÕES ESPACIAIS	34
5.2	SOLUÇÕES E ESPECTROS DE POTÊNCIA	37
6	CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES FINAIS	40
A	MISCELÂNEA	42
A.1	TRANSFORMAÇÕES CONFORMES	42
A.2	VETORES DE KILLING EM \mathcal{M}^2	43
A.3	TENSOR DE EINSTEIN PERTURBADO	44
	REFERÊNCIAS	46

LISTA DE FIGURAS

3.1	<p>Comparação esquemática entre as decomposições 1+3 (esquerda) e 1+2+1 (direita). Σ_τ representa as hipersuperfícies tridimensionais a tempo constante. A superfície bidimensional \mathcal{M}^2 definida com métrica $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ é representada no painel direito por uma curva fechada (vermelha).</p>	22
3.2	<p>Relação entre os graus de liberdade das decomposições 1+3 e 1+2+1. Letras maiúsculas latinas (azul) referem-se a decomposição 1+3, enquanto as letras maiúsculas caligráficas (magenta) se referem a decomposição 1+2+1. Observe que as variáveis \mathcal{B} e \mathcal{C} contribuem tanto para um modo escalar (B) quanto para um modo transversal sem-traço ($H_{\mu\nu}$) da decomposição 1+3. Veja o texto para mais detalhes.</p>	25
5.1	<p>Evolução dos modos X (linha tracejada) e Ω (ponto-tracejada linha) nos modelos BIII (esquerda) e KS (direita) correspondem ao mais longo comprimento de onda possível (veja equação (5.15)). Os gráficos também mostram a evolução das perturbações quando $q_* = 20$, caso em que X e Ω correspondem a evolução isotrópica. As linhas verticais no painel direito representam o tempo de colapso no modelo fechado para diferentes raios de curvatura. Observe que $X(q_* = \sqrt{2})$ é constante no modelo KS para toda a evolução. Consulte o texto para detalhes. Para esses gráficos, utilizamos $qC_{1,2}/a_0 = 1$.</p>	39
5.2	<p>Espectro de potência P_X e P_Ω em BIII (esquerda) e KS (direita), com os mesmos valores de parâmetros e cores utilizados na figura (5.1). As linhas verticais tracejadas no painel direito representam o tempo de colapso para cada raio de curvatura. As amplitudes foram arbitrariamente normalizadas.</p>	39

INTRODUÇÃO

A recente detecção de ondas gravitacionais através de um sistema binário de buracos negros pelas colaborações LIGO e VIRGO [1, 3, 2] é indiscutivelmente um marco na história da ciência. Além de confirmar Relatividade Geral como uma teoria completa das interações gravitacionais, elas representam o nascimento de uma nova era de observação para físicos e astrônomos, dos quais novos recursos insondáveis do universo podem surgir.

Do ponto de vista da cosmologia, a detecção de ondas gravitacionais de processos astrofísicos renovam nossa esperança de que as ondas gravitacionais primordiais também possam ser detectadas no futuro. Tal descoberta teria um impacto enorme na cosmologia, uma vez que as ondas gravitacionais primordiais são a impressão digital de um (e ainda não totalmente compreendido) estágio inflacionário do universo. Enquanto o caminho que conduz a essa descoberta ainda está sendo trabalhado, há uma série de fenômenos cosmológicos intimamente ligados a física das ondas gravitacionais primordiais que podem nos ajudar a medi-las indiretamente. Por exemplo, a dinâmica das ondas gravitacionais primordiais devem deixar uma impressão tanto no espectro de temperatura da radiação cósmica de fundo (CMB), que foi medida com uma grande precisão pelos satélites WMAP [15] e Planck [7], quanto no espectro de polarização do modos- B , sendo esse último o principal objetivo das atuais e futuras observações da CMB [31, 6, 5]. Por este motivo, é uma tarefa crucial investigar a dinâmica das ondas gravitacionais sob determinadas hipóteses cosmológicas e compara-las com os dados cosmológicos.

De fato, uma das hipóteses centrais, justificada pela distribuição de galáxias do Sloan Digital Sky Survey [34] e pelas flutuações de temperatura do CMB medidas satélite Planck [8], é que para escalas acima de 100 Mpc a distribuição espacial média da matéria no universo é isotrópica. Tal simetria esférica em torno de nós, juntamente com o princípio copernicano - no qual afirma que não ocupamos uma posição privilegiada no universo - constitui a hipótese fundamental da cosmologia moderna conhecida como Princípio Cosmológico. Com base nesse princípio, a cosmologia teve um avanço incrível nas últimas décadas, tanto do ponto de vista teórico como observacional, culminando em um modelo cosmológico de concordância muito bem sucedido, o modelo Λ CDM.

Embora tenha muito sucesso em descrever a estrutura em larga escala do universo - mesmo que vários problemas ainda persistam [19] - não se devemos esquecer que o modelo Λ CDM depende profundamente de suposições ainda não testadas sobre as simetrias da distribuição de matéria em escalas cosmológicas. Assim, tais pressupostos não devem nos impedir de consideramos modelos cosmológicos alternativos que são compatíveis com os dados atuais. Na verdade, nos últimos anos vários autores têm considerado a possibilidade de desistir do Princípio Cosmológico de uma forma ou de outra. Como exemplo temos os *large void models* que tentam ajustar o espectro da CMB assumindo que nossa galáxia se encontra

(suficientemente) perto do centro de um universo esférico simétrico [29, 44, 16, 56]; e modelos cosmológicos espacialmente homogêneos, mas anisotrópicos, que são justificados como uma explicação para as anomalias estatísticas da CMB [20, 30, 51, 52] ou como um meio de restringir o impacto da anisotropia espacial nos dados da CMB [38, 36, 37, 50]. O interesse em modelos inhomogêneos e anisotrópicos tem de fato uma história mais rica anterior aos dados modernos da CMB - veja, por exemplo, [11, 10, 9, 12, 13].

O trabalho aqui desenvolvido busca contribuir para essa tarefa investigando um classe de modelos homogêneos mas espacialmente anisotrópicos, de modo que suas hiper-superfícies de tempo constante tem uma direção privilegiada, mas que, no entanto, preserva - em primeira ordem, isto é, sem incluir perturbações - a isotropia da CMB. Isso é possível porque a anisotropia desses espaço-tempos resulta da curvatura das seções espaciais, e não da cinemática de expansão [46, 47]. Especificamente, nos concentramos em duas soluções particulares das equações de Einstein com estas propriedades, as métricas Bianchi tipo III (BIII) e Kantowski-Sachs (KS). Em 1993, Mimoso e Crawford [40] mostraram que essas métricas admitem uma expansão geodésica, irrotacional e isotrópica (expansão *shear-free*), desde que o tensor de estresse anisotrópico do conteúdo de matéria e energia do universo esteja em proporção direta a parte elétrica do tensor de Weyl. A relação entre o tensor energia-momento e a condição *shear-free* foram explorados a fundo em [25, 39]. Um resultado análogo também foi encontrado por Carneiro e Marugán [21, 22] que através um campo escalar anisotrópico específico é possível equilibrar a anisotropia da curvatura espacial. Sob esta condição, o fator de escala tem a mesma dinâmica de um modelo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker espacialmente curvo (FLRW) de tal modo que a métrica pode ser escrita em uma forma conformalmente estática. Consequentemente a radiação eletromagnética, e.g. CMB, é isotrópica de acordo com observações [27, 23], mesmo que a geometria seja fundamentalmente anisotrópica. Assim, estes os modelos demonstram uma importante lição: contrariamente à crença comum, as simetrias dos dados cosmológicos não implicam necessariamente nas simetrias da geometria cósmica [25].

A fenomenologia de fundo das cosmologias *shear-free* BIII e KS foi originalmente explorada nas referências [40, 21]. Em [35], o impacto de uma curvatura espacial direcional sobre a distribuição de supernovas de tipo Ia também foi investigado. A teoria linear e invariante de calibre de perturbações cosmológicas em tais modelos foi demonstrada ser viável em [46], e de diversas maneiras equivalente a teoria padrão de perturbação em espaço-tempos FLRW, embora as assinaturas observacionais esperadas sejam, naturalmente, diferentes [47]. Neste trabalho, motivado pela recente detecção de ondas gravitacionais, nos concentramos na dinâmica linear das perturbações tensoriais nesses modelos. Começamos assim com o capítulo §2 revisando brevemente os aspectos geométricos e dinâmicos das geometrias com curvatura anisotrópica. Como nosso objetivo é encontrar a dinâmica das perturbações tensoriais nos espaço-tempos com, como veremos a seguir, uma simetria rotacional residual, e depois comparar nossos resultados com as perturbações tensoriais nos espaço-tempos FLRW, apresentamos em §3 uma descrição sistemática da decomposição irreduzível de tensores simétricos

nas decomposições espaciais 1+3 e 1+2+1, juntamente com um dicionário que conecta um ao outro. Com isso será possível identificar os graus de liberdade genuínos dos modos tensoriais em um espaço-tempo com curvatura anisotrópica, esta identificação é feita em §4. Em seguida, usamos a teoria de linear perturbações para encontrar as equações de movimento dos modos tensoriais em §5, apresentando algumas aplicações simples. Como veremos, diferentemente do que acontece com a teoria da perturbações nos espaços-tempos FLRW, esta tarefa exige que mantenhamos todos os graus de liberdade durante os cálculos - incluindo aqueles que não estão relacionados a ondas gravitacionais - uma vez que os acoplamentos algébricos entre modos diferentes não podem ser ignorados, sob o risco obtermos a dinâmica errada das ondas gravitacionais. Finalmente, concluímos e damos algumas perspectivas de novos desenvolvimentos em §6.

Ao longo deste trabalho, derivadas com relação ao tempo serão denotadas por ponto, e.g. $\dot{T}_{\beta\dots}^{\alpha\dots} \equiv u^\mu \nabla_\mu T_{\beta\dots}^{\alpha\dots}$, enquanto as derivadas ao longo da direção privilegiada por linha, e.g. $T'_{\beta\dots}^{\alpha\dots} \equiv N^\mu \nabla_\mu T_{\beta\dots}^{\alpha\dots}$. Também adotamos unidades tais que $c = 1 = 8\pi G$, e a assinatura da métrica $(-, +, +, +)$.

MODELO DE FUNDO

Neste trabalho, estamos interessados em uma classe homogênea e conformalmente estáticas de geometrias descritas pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = a^2(\eta) [-d\eta^2 + \gamma_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j], \quad (2.1)$$

onde η é o parâmetro de tempo conforme e $\gamma_{ij}(\mathbf{x})$ é a métrica espacial. Por causa da condição $\partial_\eta \gamma_{ij}(\mathbf{x}) = 0$, estes modelos não possuem *shear*, e assim a expansão é isotrópica. No entanto, ainda podemos ter anisotropias espaciais se γ_{ij} descrever variedades cuja curvatura (espacial) é dependente da direção. Uma vez que as variedades unidimensionais são trivialmente planas, os exemplos mais simples possíveis (isto é, sem invocar topologias não triviais) são dados por métricas nos espaços da forma $\mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, onde \mathcal{M}^2 é um espaço bidimensional maximalmente simétrico. Adotando um sistema de coordenadas onde a reta real coincide com o eixo- z , temos

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = \mathcal{S}_{ab}(x^c) dx^a dx^b + dz^2, \quad (2.2)$$

onde $\{a, b, c\}$ assumem os valores de 1 ou 2, e \mathcal{S}_{ab} é a métrica em \mathcal{M}^2 . Devido à simetria residual desses espaços, é conveniente empregar coordenadas cilíndricas para que

$$ds^2 = a^2(\eta) [-d\eta^2 + d\rho^2 + S_\kappa^2(\rho) d\varphi^2 + dz^2], \quad (2.3)$$

onde a função $S_\kappa(\rho)$ é definida como

$$S_\kappa(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}\rho). \quad (2.4)$$

Note que, para $\kappa < 0$, esta parametrização resulta em $S_\kappa = \sinh(\sqrt{|\kappa|}\rho)/\sqrt{|\kappa|}$, exatamente como deveria. Adotamos uma convenção onde o fator de escala é adimensional e as coordenadas comoveis têm dimensão de comprimento. Assim, o parâmetro de curvatura κ tem unidades de (comprimento)⁻², sendo ele negativo, positivo ou nulo. Topologicamente, isso significa que \mathcal{M}^2 corresponde a 2-pseudo-esfera \mathbb{H}^2 ($\kappa < 0$), a 2-esfera \mathbb{S}^2 ($\kappa > 0$) ou o 2-plano \mathbb{R}^2 ($\kappa = 0$). Em cosmologia, isto nos leva as chamadas soluções de Bianchi tipo III (BIII), Kantowski-Sachs (KS) e Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker plano (FLRW), respectivamente. O caso plano está incluso apenas por consistência, uma vez que nos permite verificar a validade de nossos resultados no limite em que $|\kappa| \ll 1$. Assim, no que se segue tratamos κ como um parâmetro livre.

DINÂMICA *shear-free*

A família de espaço-tempos descrita por (2.3) são geralmente conhecidas como espaço-tempos com curvatura anisotrópica, ou espaço-tempos *shear-free*. Esses adjetivos decorrem do fato já mencionado que a expansão do espaço-tempo é isotrópica mesmo que a métrica seja genuinamente anisotrópica. Entretanto, como os modelos anisotrópicos não podem simultaneamente ter uma expansão isotrópica e um conteúdo de matéria de fluido perfeito [40]. Modelos anisotrópicos *shear-free* só podem ser construído através de tensor energia-momento imperfeito da forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

com as condições $u^\mu \pi_{\mu\nu} = 0 = \pi^\mu{}_\mu$. No sistema de coordenadas (2.3), as equações de Einstein de fundo são

$$\begin{aligned} \frac{3\mathcal{H}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} &= \rho_f + \rho, \\ \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{\mathcal{H}}}{a^2} &= -p_f - p - \pi^1{}_1, \\ \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{\mathcal{H}}}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} &= -p_f - p - \pi^3{}_3, \end{aligned}$$

onde ρ_f e p_f são respectivamente a densidade de energia e a pressão dos fluidos perfeitos que compõe o conteúdo de matéria neste universo. Observe que a simetria residual da métrica implica que $\pi^1{}_1 = \pi^2{}_2$, enquanto que a condição *shear-free* em $\pi_{\mu\nu}$ implica que $\pi^3{}_3 = -2\pi^1{}_1$. A consistência entre as duas últimas equações exige ainda que

$$\pi^1{}_1 = \frac{\kappa}{3a^2}. \quad (2.6)$$

Esta é a chamada condição *shear-free*, e da imposição de métrica (2.3) segue que ela satisfaz as equações de Einstein¹. Do ponto de vista fenomenológico, o modelo mais simples de implementação desta condição é provavelmente um campo escalar não-massivo com a Lagrangiana

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{\alpha}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi, \quad (2.7)$$

onde α é uma constante. Escrito na forma (2.5), o tensor de energia-momento do campo ϕ nos fornece

$$\rho = \frac{\alpha}{2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi, \quad p = -\frac{1}{3}\rho, \quad \pi^\mu{}_\nu = \alpha\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{2}{3}(\delta^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu)\rho. \quad (2.8)$$

A condição $u_\mu\pi^\mu{}_\nu = 0$ implica que $\partial_\eta\phi = 0$ o que nos diz que ϕ não possui dinâmica. É fácil verificar que $\phi = z$ satisfaz esta condição, bem como a equação de onda $\square\phi = 0$ [21]. Isso

¹Isto é equivalente a exigir que $\pi_{\mu\nu} = 2E_{\mu\nu}$, onde $E_{\mu\nu}$ é a parte elétrica do tensor de Weyl. Veja referência [40]

implica que

$$\pi^1_{\ 1} = -\frac{2}{3}\rho = 2p = -\frac{\alpha}{3a^2}, \quad (2.9)$$

que, quando comparado com (2.6), temos $\alpha = -\kappa$. Observe que, embora ϕ seja inhomogêneo, sua densidade de energia, pressão e o estresse não são, de modo que a homogeneidade do fundo é preservada. Esse campo poderia ser fenomenologicamente justificado, por exemplo, através de uma descrição em teoria de campos de um sólido inflando o universo [28, 14]. Outra explicação seria um campo de 3-formas (Kalb-Ramond) [35] e, em geral, soluções *shear-free* podem ser obtidas com campos de calibre p -forma [55]. Felizmente a forma precisa do campo que conduz a uma expansão *shear-free* não afeta a dinâmica de perturbações tensoriais, como veremos a seguir. As equações de fundo então são descritas por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= \frac{\rho_f a^2}{3} - \frac{\kappa}{2}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{1}{6}(\rho_f - 3p_f)a^2 - \frac{\kappa}{2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Embora não esteja escrita na sua forma padrão, estas equações são essencialmente as equações de Friedmann em um espaço-tempo de fundo com curvatura $\kappa/2$ (veja, por exemplo, [41]). Como κ é um parâmetro livre, é conveniente introduzir um raio de curvatura R_c através da relação

$$|\kappa| \equiv \frac{1}{R_c^2} = 2H_0^2 |\Omega_{\kappa 0}| = \frac{2}{L_c^2}, \quad (2.11)$$

sendo H_0 o valor atual do parâmetro de Hubble medido no tempo físico e $L_c = H_0^{-1} |\Omega_{\kappa 0}|^{-1/2}$ é o raio de curvatura das métricas FLRW.

DECOMPOSIÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO

Nosso objetivo principal é descrever a dinâmica das perturbações tensoriais evoluindo a métrica (2.3), com a dinâmica de fundo sendo descrita por (2.10). No entanto, devido ao espaço de fundo não ser maximalmente simétrico, a própria definição de perturbações tensoriais precisa ser revisada. Assim, começamos esta seção, recordando brevemente as definições e propriedades da decomposição 1+3 do espaço-tempo, seguindo pela revisão da menos conhecida decomposição 1+2+1. Essas decomposições serão ainda relacionadas com a chamada a decomposição Escalar-Vetor-Tensor (em inglês *SVT decomposition*) na próxima seção afim de encontrarmos a uma definição adequada para ondas gravitacionais nestes espaço-tempos com curvatura espacial anisotrópica. Esclarecemos que a nosso objetivo aqui não é realizar uma caracterização completamente covariante da dinâmica das ondas gravitacionais - ao leitor interessado neste assunto sugerimos as referências [32, 33, 26, 24, 45]. Ao invés disso, usamos uma abordagem covariante apenas para identificar os modos tensoriais "puros" em espaço-tempos com curvatura espacial anisotrópica, posteriormente adotamos uma abordagem mais direta baseada em um escolha específica de coordenadas para encontrar a dinâmica das ondas gravitacionais.

Uma vez que a introdução de uma nova decomposição algébrica traz consigo uma variedade de novos objetos, é importante introduzir uma notação conveniente que evite confusão devido a grande quantidade de termos. Assim, adotamos a convenção onde os tensores espaço-temporais (i.e., não projetados, definidos espaço-tempo) serão representados por letras minúsculas (latinas ou gregas); e.g., a^μ , $g_{\mu\nu}$. Em qualquer decomposição irreduzível 1+3, cada termo será representado por uma letra latina maiúscula. Assim, objetos como V_μ , $T_{\mu\nu}$ e assim por diante são, por definição, ortogonais a quadrivelocidade dos observadores u^μ , enquanto que A , B e denotam escalares ao longo de u^μ . Da mesma forma, em qualquer decomposição irreduzível 1+2+1, cada termo será representado por um letra latina caligráfica. Por isso, termos como \mathcal{V}_μ , $\mathcal{T}_{\mu\nu}$, e assim por diante são ortogonais tanto em relação a u^μ e N^μ (a curvatura na direção privilegiada); da mesma forma, \mathcal{A} , \mathcal{B} e assim por diante são escalares ao longo de u^μ ou N^μ . A única exceção a esta regra é a métrica espacial totalmente projetada $\gamma_{\mu\nu}$, que mantivemos para ser compatível com à literatura padrão. Além disso, nos referimos a vetores como a_μ , V_μ e \mathcal{V}_μ como sendo 4-, 3- e 2-vetor, respectivamente. Ocasionalmente, também nos referimos (embora seja um abuso de linguagem) a tensores $g_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ e $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ como sendo 4-, 3- e 2-tensor, respectivamente.

DECOMPOSIÇÃO 1+3 DO ESPAÇO-TEMPO

Em cosmologias FLRW com um fluido perfeito como conteúdo de matéria, o fluxo a geodésico de matéria define naturalmente uma congruência de curvas tipo-tempo

$x^\mu(\tau)$ de modo que os observadores em queda livre, com tempo próprio τ , são totalmente caracterizados pela sua quadrivelocidade $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, normalizada de modo que $u^\mu u_\mu = -1$. Esse campo vetorial naturalmente define dois tensores de projeção

$$t^\mu{}_\nu \equiv -u^\mu u_\nu, \quad \gamma^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu, \quad (3.1)$$

de tal modo que todos os índices são manipulados com a métrica $g_{\mu\nu}$. É fácil verificar que $t_{\mu\nu}$ projeta qualquer tensor na direção do tempo, enquanto que $\gamma_{\mu\nu}$ projeta qualquer tensor no subespaço ortogonal à u^μ . Além disso, temos as seguintes propriedades

$$t^\mu{}_\lambda t^\lambda{}_\nu = t^\mu{}_\nu, \quad t^\mu{}_\mu = 1, \quad \gamma^\mu{}_\lambda \gamma^\lambda{}_\nu = \gamma^\mu{}_\nu, \quad \gamma^\mu{}_\mu = 3, \quad u^\mu \gamma_{\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

Em geral, o tensor $\gamma_{\mu\nu}$ atua como sendo a métrica local dos referenciais inerciais, uma vez que para quaisquer dois 3-vetores A^μ e B^μ o produto escalar entre eles é dado por $g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \gamma_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$. No entanto, estamos interessados no caso em que u^μ seja ortogonal as hipersuperfícies espaciais em todos os pontos², isto significa que $\gamma_{\mu\nu}$ é portanto a métrica nessas hipersuperfícies espaciais (denotamos tais hipersuperfície como Σ_τ - veja a figura 3.1).

Dado os projetores acima, qualquer 4-vetor v^μ pode ser covariantemente decomposto em um grau de liberdade (d.o.f, do inglês *degrees of freedom*) escalar no tempo além de um 3-vetor (3 d.o.f) ortogonal à quadrivelocidade :

$$v^\mu = -V u^\mu + V^\mu, \quad u_\mu V^\mu = 0, \quad (3.3)$$

onde $V \equiv u_\mu v^\mu$ e $V^\mu \equiv \gamma^\mu{}_\nu v^\nu$. Da mesma forma, qualquer tensor (simétrico) de rank-2 $h_{\mu\nu}$ pode ser unicamente decomposto em dois escalares A e B (1 d.o.f cada), um 3-vetor C_μ (3 d.o.f) e um 3-tensor sem-traço $H_{\mu\nu}$ (5 d.o.f)

$$h_{\mu\nu} = 2A u_\mu u_\nu + B \gamma_{\mu\nu} + 2C_{(\mu} u_{\nu)} + H_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

onde por definição

$$u^\mu C_\mu = 0 = u^\mu H_{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = 0. \quad (3.5)$$

Em termos de suas componentes irreduzíveis, os 10 d.o.f de $h_{\mu\nu}$ são divididos em 1+1+3+5 componentes na decomposição 1+3. Reciprocamente, estes modos: escalares, 3-vetor e 3-tensor sem-traço podem ser extraídos de $h_{\mu\nu}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} A &= u^\alpha u^\beta h_{\alpha\beta}/2, & C_\mu &= -u^\alpha \gamma_\mu{}^\beta h_{\alpha\beta}, \\ B &= \gamma^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}/3, & H_{\mu\nu} &= \left(\gamma_\mu{}^\alpha \gamma_\nu{}^\beta - \frac{1}{3} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} \right) h_{\alpha\beta} \equiv h_{\langle\alpha\beta\rangle} \end{aligned} \quad (3.6)$$

²Isto equivale a assumir que o teorema de Frobenius ($u_{[\nu} \nabla_\lambda u_{\mu]} = 0$) seja válido

Observe que essas equações definem implicitamente operadores de extração de maneira que quando aplicado em $h_{\mu\nu}$ obtem-se um modo específico. Em particular, a última equação define o seguinte operador de projeção

$$P_{\mu}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta} \equiv \left(\gamma_{\mu}^{\alpha} \gamma_{\nu}^{\beta} - \frac{1}{3} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} \right), \quad (3.7)$$

que extrai o componente sem-traço do tensor $h_{\mu\nu}$. Este o operador será crucial para obtermos os graus de propagação da liberdade de ondas gravitacionais na seção a seguir.

Cinemática

A existência dos projetores (3.1) nos permite definir duas importantes derivadas para campos tensoriais:

$$\dot{q}_{\nu_1 \dots}^{\mu_1 \dots} \equiv u^{\lambda} \nabla_{\lambda} q_{\nu_1 \dots}^{\mu_1 \dots}, \quad \text{and} \quad D_{\rho} q_{\nu_1 \dots}^{\mu_1 \dots} \equiv \gamma_{\rho}^{\lambda} \gamma_{\alpha_1}^{\mu_1} \dots \gamma_{\nu_1}^{\beta_1} \dots \nabla_{\lambda} q_{\beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots}, \quad (3.8)$$

onde $q_{\nu_1 \dots}^{\mu_1 \dots}$ é um 4-tensor arbitrário. Essas derivadas medem as variações ao longo e ortogonalmente à quadrivelocidade u^{μ} , respectivamente. Note que, em particular, para qualquer campo escalar φ , tem-se que $\nabla_{\mu} \varphi = -u_{\mu} \dot{\varphi} + D_{\mu} \varphi$.

Uma quantidade cinemática central na decomposição 1+3 é a derivada covariante da quadrivelocidade dos observadores fundamentais:

$$\nabla_{\mu} u_{\nu} \equiv -u_{\mu} A_{\nu} + K_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

onde $A_{\mu} \equiv \dot{u}_{\mu}$ é a aceleração do observador e $K_{\mu\nu} \equiv D_{\mu} u_{\nu}$ é a curvatura extrínseca das hipersuperfícies espaciais. Este último mede as deformações espaciais de curvas de tipo-tempo, que podem ser divididas em: expansão (K^{μ}_{μ}), *shear* ($K_{\langle\mu\nu\rangle}$) e vorticidade ($K_{[\mu\nu]}$) da congruência de curvas. Aqui estamos interessados em observadores geodésicos em universos irrotacionais e *shear-free*, de modo que, a partir de agora, estabelecemos

$$A_{\mu} = K_{\langle\mu\nu\rangle} = K_{[\mu\nu]} = 0. \quad (3.10)$$

Em outras palavras, $K_{\mu\nu}$ é um tensor de "traço puro" nos modelos que estamos considerando, medindo apenas a expansão de congruências de tipo-tempo:

$$K_{\mu\nu} \equiv \frac{\Theta}{3} \gamma_{\mu\nu} \quad (3.11)$$

onde Θ é um escalar que mede a expansão global das geodésicas. Isso reflete o fato de que, do ponto de vista cinemático, os universos *shear-free* se comportam exatamente como os universos

de FLRW [21]. Sob tais condições é fácil verificar as relações abaixo

$$\dot{\gamma}_{\mu\nu} = 0 = D_\alpha \gamma_{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

1+2+1 SPACETIME SPLITTING

A decomposição 1+3 do espaço-tempo é bastante geral, no sentido em que não depende das simetrias específicas das hipersuperfícies de tempo constante Σ_τ (painel esquerdo da figura 3.1). No entanto, se Σ_τ tem uma direção espacial privilegiada, como é o caso dos espaço-tempos LRS (do inglês *locally rotationally symmetric spacetimes*) com curvatura anisotrópica, então podemos covariantemente decompor $\gamma_{\mu\nu}$ em componentes ao longo e ortogonalmente a essa direção. Sendo N^μ um 3-vetor (unitário) que aponta nessa direção, ele define naturalmente dois tensores de projeção em Σ_τ :

$$N^\mu{}_\nu \equiv N^\mu N_\nu, \quad \text{and} \quad \mathcal{S}^\mu{}_\nu \equiv \gamma^\mu{}_\nu - N^\mu N_\nu, \quad (3.13)$$

onde qualquer tensor espacial pode ser projetado na direção espacial privilegiada através de $N^\mu{}_\nu$ e na superfície bidimensional ortogonal a essa direção com $\mathcal{S}^\mu{}_\nu$. Das definições acima é fácil ver que

$$N^\mu{}_\lambda N^\lambda{}_\nu = N^\mu{}_\nu, \quad N^\mu{}_\mu = 1, \quad \mathcal{S}^\mu{}_\lambda \mathcal{S}^\lambda{}_\nu = \mathcal{S}^\mu{}_\nu, \quad \mathcal{S}^\mu{}_\mu = 2, \quad \mathcal{S}^\mu{}_\nu N^\nu = 0. \quad (3.14)$$

Sendo projetores espaciais, eles também satisfazem

$$N^\mu{}_\nu u^\nu = 0 = \mathcal{S}^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (3.15)$$

No caso particular em que estamos interessados, onde $\Sigma_\tau = \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ define a métrica em duas dimensões do subespaço \mathcal{M}^2 e é, em todos os pontos, ortogonal à N^μ - veja o painel direito na figura 3.1.

Dado os vetores u^μ e N^μ , e a métrica $\mathcal{S}_{\mu\nu}$, podemos agora realizar uma decomposição irreduzível de tensores em termos de escalares, 2-vetores e 2-tensores sem-traço, onde a condição sem-traço agora está definida em relação a $\mathcal{S}_{\mu\nu}$. Começamos notando que qualquer 4-vetor v^μ pode ser unicamente escrito em termos de dois escalares e um 2-vetor

$$v^\mu = -V u^\mu + \mathcal{U} N^\mu + \mathcal{V}^\mu, \quad N_\mu \mathcal{V}^\mu = u_\mu \mathcal{V}^\mu = 0, \quad (3.16)$$

onde $V \equiv u_\mu v^\mu$, $\mathcal{U} \equiv N_\mu v^\mu$ e $\mathcal{V}^\mu \equiv \mathcal{S}^\mu{}_\nu v^\nu$. Uma comparação direta com (3.3) revela que $V^\mu = \gamma^\mu{}_\nu v^\nu = (\mathcal{S}^\mu{}_\nu + N^\mu N_\nu) v^\nu = \mathcal{V}^\mu + \mathcal{U} N^\mu$, exatamente como deve ser, uma vez que a nova decomposição apenas afeta a projeção espacial das quantidades.

Generalizando, a decomposição 1+2+1 em partes irreduzíveis de qualquer ten-

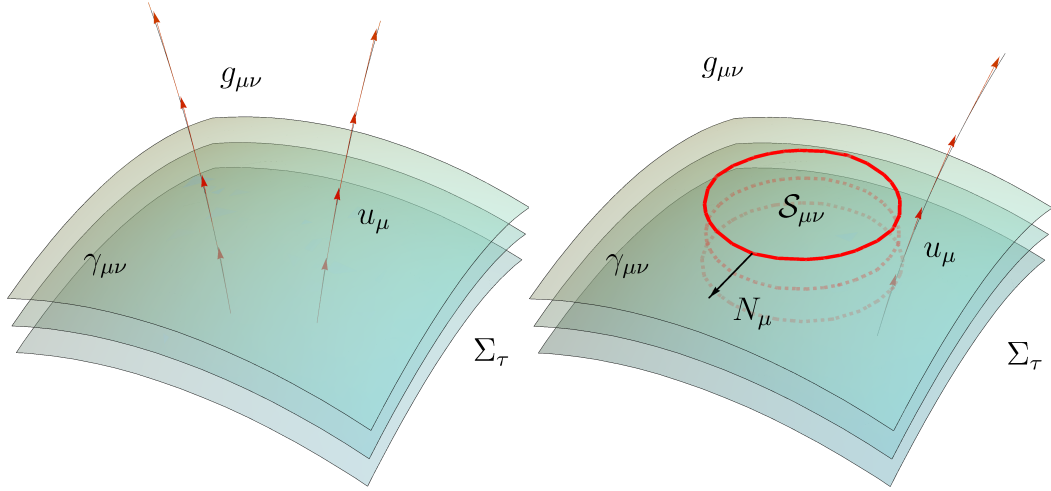


Figura 3.1: Comparação esquemática entre as decomposições 1+3 (esquerda) e 1+2+1 (direita). Σ_τ representa as hipersuperfícies tridimensionais a tempo constante. A superfície bidimensional \mathcal{M}^2 definida com métrica $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ é representada no painel direito por uma curva fechada (vermelha).

sor simétrico de rank-2 é dada por

$$h_{\mu\nu} = 2\mathcal{A}u_\mu u_\nu + \mathcal{B}\mathcal{S}_{\mu\nu} + 2\mathcal{C}N_\mu N_\nu + 2\mathcal{Q}N_{(\mu}u_{\nu)} + 2\mathcal{E}_{(\mu}u_{\nu)} + 2\mathcal{F}_{(\mu}N_{\nu)} + \mathcal{G}_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

sendo que

$$u^\mu \mathcal{E}_\mu = N^\mu \mathcal{E}_\mu = u^\mu \mathcal{F}_\mu = N^\mu \mathcal{F}_\mu = 0, \quad \text{and} \quad u^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu} = N^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu} = 0 = \mathcal{S}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Observando o lado direito de (3.18) somos tentados a concluir que $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ tem apenas um grau de liberdade independente. No entanto, esta conclusão é falsa pois a condição $N^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu} = 0$ elimina apenas três variáveis uma vez que a condição $u^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu} = 0$ é implementada³. Assim, concluímos que $h_{\mu\nu}$ divide em 1+1+1+1+2+2+2 partes irreduzíveis na decomposição 1+2+1. Portanto, dado $h_{\mu\nu}$, estas componentes irreduzíveis podem ser extraídas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= u^\alpha u^\beta h_{\alpha\beta}/2, & \mathcal{E}_\mu &= -u^\alpha \mathcal{S}_\mu^\beta h_{\alpha\beta}, \\ \mathcal{B} &= \mathcal{S}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}/2, & \mathcal{F}_\mu &= N^\alpha \mathcal{S}_\mu^\beta h_{\alpha\beta}, \\ \mathcal{C} &= N^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}/2, & \mathcal{G}_{\mu\nu} &= \left(\mathcal{S}_\mu^\alpha \mathcal{S}_\nu^\beta - \frac{1}{2} \mathcal{S}_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\alpha\beta} \right) h_{\alpha\beta} \equiv h_{\{\alpha\beta\}}. \\ \mathcal{Q} &= -u^\alpha N^\beta h_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

³Para ver como isso acontece, suponha que adotemos coordenadas como que $u^\mu = \delta_0^\mu$ e $N^\nu = \delta_{nu_*}^\nu$, para algum $\nu_* \neq 0$ fixo. Então $u^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu} = 0$ nos diz que $\mathcal{G}_{0\nu_*} = 0$. Mas, dado que $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ é simétrico, a equação $N^\nu \mathcal{G}_{\nu 0} = 0$ não fornece nenhuma informação. Como esta última é uma condição tensorial, este resultado é válido em qualquer sistema de coordenadas.

Cinemática

A introdução dos projetores N^μ e $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ nos permite definir duas novas derivadas projetadas [24]:

$$q'^{\mu_1 \dots}_{\nu_1 \dots} \equiv N^\lambda D_\lambda q^{\mu_1 \dots}_{\nu_1 \dots}, \quad \mathcal{D}_\rho q^{\mu_1 \dots}_{\nu_1 \dots} \equiv \mathcal{S}_\rho{}^\lambda \mathcal{S}^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \mathcal{S}^{\beta_1}_{\nu_1} \dots D_\lambda q^{\alpha_1 \dots}_{\beta_1 \dots}, \quad (3.20)$$

onde $q^{\mu_1 \dots}_{\nu_1 \dots}$ é um 4-tensor arbitrário. É importante notar que essas definições são feitas com relação ao operador projetado espacialmente D_μ , e não para a derivada covariante ∇_μ . Devido ao fato de que $\mathcal{S}_{\mu\alpha} \gamma^\alpha{}_\nu = \mathcal{S}_{\mu\nu}$, isso não tem nenhum efeito na definição do operador D_μ . No entanto, ele altera a definição da derivada ao longo de N^μ já que, para qualquer vetor 3 espacial V_μ , tem-se

$$\begin{aligned} V'_\mu &= N^\lambda D_\lambda V_\mu \\ &= N^\lambda (\gamma_\lambda{}^\alpha \gamma_\mu{}^\beta \nabla_\alpha V_\beta) \\ &= N^\alpha \nabla_\alpha V_\mu + u_\mu u^\beta (N^\alpha \nabla_\alpha V_\beta). \end{aligned}$$

Em outras palavras, essa definição garante que $u^\mu V'_\mu = 0$, como se pode facilmente verificar.

Em analogia com (3.9), também será necessário encontrar a decomposição irreduzível do tensor projetado $D_\mu N_\nu$. Temos que⁴

$$D_\mu N_\nu = N_\mu \mathcal{A}_\nu + \mathcal{K}_{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

onde $\mathcal{A}_\nu \equiv N'_\nu$ mede a aceleração do observador ao longo de N_ν e $\mathcal{K}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{D}_\mu N_\nu$ é a curvatura extrínseca de \mathcal{M}^2 . Em analogia com $K_{\mu\nu}$, $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ mede as deformações de uma congruência de curvas ao longo da direção privilegiada. Da maneira análoga ao formalismo 1+3, tais deformações podem ser separadas em: expansão ($\mathcal{K}^\mu{}_\mu$), *shear-free* ($\mathcal{K}_{\{\mu\nu\}}$) e torção ($\mathcal{K}_{[\mu\nu]}$). Contudo, é importante ressaltar que as quantidades definidas por $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ não são exatamente as mesmas do que as definidas por $K_{\mu\nu}$. $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ define deformações de curvas tipo-espaço hipersuperfície Σ_τ , enquanto que $K_{\mu\nu}$ define as deformações conforme o tempo evolui, conectando assim Σ_τ a $\Sigma_{\tau+d\tau}$. Além disso, enfatizamos que o termo de torção $\mathcal{K}_{[\mu\nu]}$ é identicamente zero em virtude da nossa escolha de $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ como a métrica global em \mathcal{M}^2 (i.e., o teorema de Frobenius). Como os espaços-tempos BIII e KS são espacialmente homogêneos, temos que

$$\mathcal{K}^\mu{}_\mu = 0 = \mathcal{K}_{\{\mu\nu\}}. \quad (3.22)$$

Pelo mesmo motivo, não devemos experimentar nenhuma aceleração conforme viajamos ao longo de N^μ , pois isso implicaria uma posição preferida no espaço. Assim,

⁴Ao derivar esta expressão, usamos $N^\beta D_\alpha N_\beta = -N^\beta D_\alpha N_\beta = 0$.

impomos

$$\mathcal{A}_\mu = 0. \quad (3.23)$$

Claramente, essa conclusão não seria o mesmo se trabalhássemos, por exemplo, em um espaço-tempo de Schwarzschild, onde existem acelerações radiais [24]. Em resumo, concluímos que

$$D_\mu N_\nu = 0 \quad (3.24)$$

modelos cosmológicos BIII e KS. No entanto note que isso não implica em $\nabla_\mu N_\nu$ seja nulo. De fato

$$\nabla_\mu N_\nu = u_\nu N^\alpha K_{\mu\alpha} - u_\mu \dot{N}_\nu. \quad (3.25)$$

Por fim, segue das eqs. (3.24) e (3.10) que

$$\dot{\mathcal{S}}_{\mu\nu} + 2\dot{N}_{(\mu}N_{\nu)} = 0 = \mathcal{S}'_{\mu\nu}, \quad D_\alpha S_{\mu\nu} = 0 = \mathcal{D}_\alpha S_{\mu\nu}. \quad (3.26)$$

Esses resultados serão usados na próxima seção para identificar os graus de liberdade das ondas gravitacionais em tais modelos.

DICIONÁRIO ENTRE AS DECOMPOSIÇÕES 1+3 E 1+2+1

Até aqui vimos as decomposições irredutíveis de um tensor simétrico de rank-2 nos modos 1+3 e também nos modos 1+2+1, nos resta agora encontrar qual a relação entre essas duas decomposições, ou seja, como os graus de liberdade no formalismo 1+3 se arranjam no formalismo 1+2+1 e vice-versa. A resposta pode ser facilmente obtida mediante a aplicação os projetores que foram implicitamente definidos nas eqs. (3.6) na decomposição (3.17). Como resultado temos

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{A}, & C_\mu &= \mathcal{Q}N_\mu + \mathcal{E}_\mu, \\ B &= \frac{2}{3}(\mathcal{B} + \mathcal{C}), & H_{\mu\nu} &= \frac{(\mathcal{B} - 2\mathcal{C})}{3}(\mathcal{S}_{\mu\nu} - 2N_\mu N_\nu) + 2\mathcal{F}_{(\mu}N_{\nu)} + \mathcal{G}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Podemos também obter as relações inversas aplicando os projetores implicitamente definidos em (3.19) no tensor (3.4)

$$\begin{aligned} A &= A, & \mathcal{E}_\mu &= \mathcal{S}_\mu^\alpha C_\alpha, & \mathcal{G}_{\mu\nu} &= \left[\mathcal{S}_\mu^\alpha \mathcal{S}_\nu^\beta - \frac{1}{2} \mathcal{S}_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\alpha\beta} \right] H_{\alpha\beta}, \\ \mathcal{B} &= B + \mathcal{S}^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} / 2, & \mathcal{F}_\mu &= N^\alpha \mathcal{S}_\mu^\beta H_{\alpha\beta}, \\ \mathcal{C} &= (B + N^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}) / 2, \\ \mathcal{Q} &= N^\alpha C_\alpha. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Estas relações estão resumidas no diagrama da figura 3.2. Chamamos a atenção do leitor para o acoplamento algébrico entre os modos 1+2+1 escalares \mathcal{B} e \mathcal{C} com os modos 1+3 B e $H_{\mu\nu}$. De

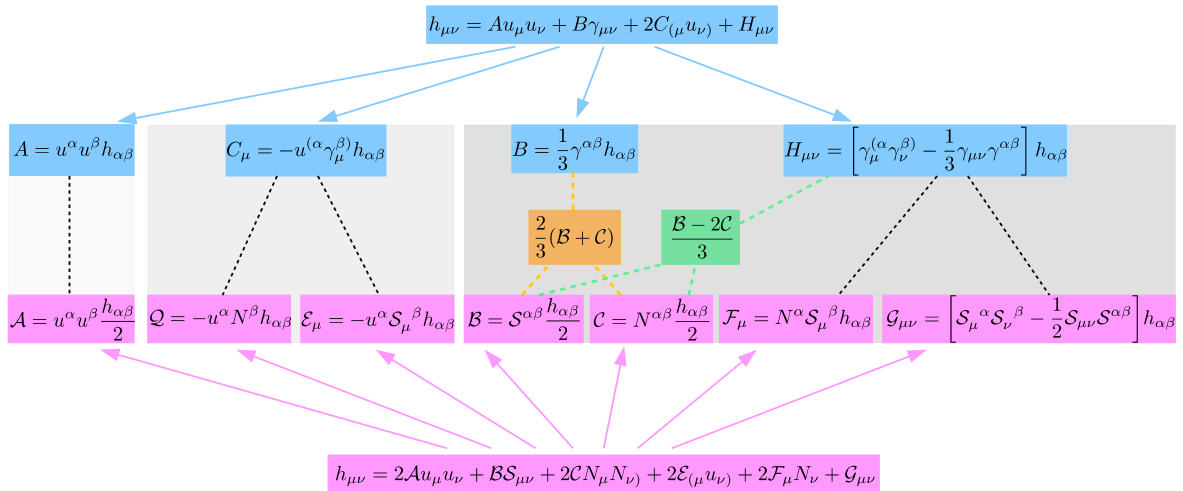


Figura 3.2: Relação entre os graus de liberdade das decomposições 1+3 e 1+2+1. Letras maiúsculas latinas (azul) referem-se a decomposição 1+3, enquanto as letras maiúsculas caligráficas (magenta) se referem a decomposição 1+2+1. Observe que as variáveis B e C contribuem tanto para um modo escalar (B) quanto para um modo transversal sem-traço ($H_{\mu\nu}$) da decomposição 1+3. Veja o texto para mais detalhes.

fato, de (3.27) vemos que duas combinações independentes de B e C contribuem para B e $H_{\mu\nu}$, elas são quantidades de natureza bastante diferentes na decomposição 1+3. Voltaremos a esta questão na próxima seção, pois, como veremos, ela é central para nossas considerações.

Concluimos esta seção enfatizando que os resultados acima são completamente gerais, e pode ser aplicado a qualquer espaço-tempo cuja topologia das seções espaciais são da forma $\Sigma_{\tau} = \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$. Por exemplo, na referência [24] a decomposição 1+2+1 foi usada para investigar a evolução das ondas gravitacionais em espaço-tempos Schwarzschild, onde $\Sigma_{\tau} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Aliás, note que esses espaço-tempos têm a mesma topologia espacial como o universo Kantowski-Sachs que consideramos aqui. A principal diferença entre estes dois espaço-tempos é o conjunto de isometrias: o primeiro descreve um espaço-tempo estático e não homogêneo, enquanto que o último representa um universo espacialmente homogêneo em expansão.

ONDAS GRAVITACIONAIS

Passamos agora para uma das nossas principais tarefas, que é a identificação dos graus de liberdade tensoriais genuínos nos espaço-tempos com curvatura anisotrópica. Como um exercício de aquecimento - e também para elucidar as dificuldades desta tarefa - recordamos brevemente como isso é feito em universos FLRW na seção §4.2, para posteriormente avançarmos para os casos mais desafiantes dos espaço-tempos BIII e KS em § 4.3. Antes disso, no entanto, exploramos o caráter estático da família de métricas (2.1) para simplificar alguns de nossos cálculos. Mais detalhes podem ser encontrados no Apêndice §A.1.

TRANSFORMAÇÃO CONFORME

Ambos os espaço-tempos considerados neste trabalho estão conformalmente relacionados com uma métrica estática (de fundo) - veja (2.1). Por esse motivo, definindo perturbações métricas, é aconselhável separar as perturbações do setor dinâmico e do setor estático. Definimos assim

$$\delta g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}, \quad \text{and} \quad \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \equiv a^2 h_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é dado por (3.4) ou (3.17). Sob uma transformação de coordenadas da forma

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - \xi^\mu, \quad (4.2)$$

onde ξ^μ é o vetor (infinitesimal) de calibre⁵,

$$\xi^\mu \equiv u^\mu T + J^\mu \quad (4.3)$$

cada setor se transforma como (veja Apêndice §A.1)

$$\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu} + 2\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}, \quad (4.4)$$

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu} \rightarrow \delta \tilde{g}_{\mu\nu} + a^2 (2\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} + 2g_{\mu\nu} \mathcal{H}T). \quad (4.5)$$

No setor estático, muitas quantidades cinemáticas são exatamente nulas, o que torna o cálculo de (4.4) trivial. O efeito da expansão pode ser posteriormente incluído usando (4.5). De fato, no setor estático temos

$$K_{\mu\nu} = 0 = \dot{N}_\mu \quad (4.6)$$

⁵Note que não incluímos o sinal de menos na componente de temporal de ξ^μ para respeitar a literatura padrão, onde $\xi^\mu = (T, L^i)$ em um *frame* comovel [43, 53].

o que simplifica muito os cálculos das transformações de calibre. Uma vez que isso seja alcançado, podemos converter de volta para o setor dinâmico usando (4.5) de maneira que (veja §A.1)

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{\mu\nu} &= a (K_{\mu\nu} + \mathcal{H}\gamma_{\mu\nu}) , \\ \tilde{\nabla}_\mu \tilde{N}_\nu &= a (\nabla_\mu N_\nu + \mathcal{H}N_\mu u_\nu) .\end{aligned}$$

CASO FLRW

Em universos FLRW, a hipersuperfície de tempo constante Σ_τ descreve uma subvariedade maximalmente simétrica e, como já vimos, o formalismo 1+3 nos permite identificar de forma única os graus de liberdade tensoriais das perturbações métricas $\delta g_{\mu\nu}$ através de um 3-tensor sem-traço, como $H_{\mu\nu}$ em (3.4). No entanto note que $H_{\mu\nu}$ tem em geral cinco graus de liberdade, três a mais do que os dois estados de polarização das ondas gravitacionais. Essa discrepância, como é sabido, é devido ao fato de que $H_{\mu\nu}$ é composto de campos de espinoriais 0, 1 e 2, dos quais apenas os últimos corresponde a ondas gravitacionais, enquanto as outras duas correspondem para modos de calibre puro. Na verdade, para um subespaço maximalmente simétrico Σ_τ , $H_{\mu\nu}$ pode ser decomposto unicamente como

$$H_{\mu\nu} = \left(D_\mu D_\nu - \frac{1}{3} \gamma_{\mu\nu} \nabla^2 \right) 2E + 2D_{(\mu} E_{\nu)} + E_{\mu\nu} , \quad (4.7)$$

tal que

$$\nabla^2 \equiv D^\mu D_\mu , \quad D^\mu E_\mu = 0 = D^\mu E_{\mu\nu} . \quad (4.8)$$

Esta é a formulação covariante da decomposição SVT e ela é única a menos de condições de contorno no infinito [53]. Esta decomposição divide as cinco componentes de $H_{\mu\nu}$ em: um escalar E (1 d.o.f), um 3-vector transverso E_μ (2 d.o.f) e um 3-tensor transverso sem-traço $E_{\mu\nu}$ (2 d.o.f). Através da decomposição 1+3 da transformação (4.4) pode-se provar que tanto E quanto E_μ são modos de calibre puro. Usando as condições (3.10), além do fato de que $K_{\mu\nu} = 0$ no setor estático da métrica, obtemos a transformação das perturbações da métrica

$$\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu} - 2u_\mu u_\nu \dot{T} + 2u_{(\mu} D_{\nu)} T + 2D_{(\mu} J_{\nu)} - 2u_{(\mu} \dot{J}_{\nu)} . \quad (4.9)$$

Agora projetamos ambos os lados desta expressão com $P_\mu^\alpha{}_\nu^\beta$ (veja a equação (3.7)) para encontrarmos

$$H_{\mu\nu} \rightarrow H_{\mu\nu} + 2D_{(\mu} J_{\nu)} - \frac{2}{3} \gamma_{\mu\nu} D^\alpha J_\alpha . \quad (4.10)$$

Além disso, considerando a decomposição SVT do vetor J_α ,

$$J_\alpha = D_\alpha L + L_\alpha , \quad \text{where} \quad D^\alpha L_\alpha = 0 , \quad (4.11)$$

e comparando com o resultado (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E + L, \\ E_\mu &\rightarrow E_\mu + L_\mu, \\ E_{\mu\nu} &\rightarrow E_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Finalmente, precisamos voltar para as perturbações dinâmicas $\delta\tilde{g}_{\mu\nu}$ usando (4.5). Mas, como isso equivale a adicionarmos um traço em (4.9), que naturalmente desaparece ao projetarmos com o operador $P_\mu^\alpha{}_\nu^\beta$, concluímos que as transformações (4.12) se mantêm válidas em geral. Claramente, E e E_μ podem ser eliminados, escolhendo um calibre no qual $L = -E$ e $L_\mu = -E_\mu$, enquanto que $E_{\mu\nu}$ permanece invariante de calibre. O 2 d.o.f em $E_{\mu\nu}$ representam as duas polarizações das ondas gravitacionais e suas equações de movimento podem ser encontradas linearizando as equações de Einstein sob a métrica de fundo. Neste ponto é conveniente adotarmos um sistema de coordenadas comovel dado por

$$u_\mu = -\delta_\mu^0, \quad \gamma_{\mu\nu} = \text{diag}(0, \gamma_{ij}) \quad (4.13)$$

e fixarmos o calibre escolhendo $E = 0 = E_\mu$, de modo que o elemento de linha mais geral possível para as perturbações do tensor em (2.1) é simplesmente dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2 (g_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu, \\ &= a^2 [-d\eta^2 + (\gamma_{ij} + E_{ij}) dx^i dx^j]. \end{aligned}$$

Note que neste caso podemos focar somente na evolução do modo $E_{\mu\nu}$, pois as outras componentes de $\delta g_{\mu\nu}$ não se acoplam (de forma algébrica ou dinâmica) em primeira ordem. Depois de um longa série de cálculos, mas conhecida na literatura, e.g. [43], encontramos a equação que descreve a evolução das ondas gravitacionais nesse universo

$$\ddot{E}_{ij} + 2\mathcal{H}\dot{E}_{ij} - \nabla^2 E_{ij} = 0, \quad (4.14)$$

onde, lembramos ao leitor, os pontos representam derivativas com relação ao tempo conforme.

Além do fato desse modo ser amortecido pela expansão do universo, a mais notável característica da equação acima é que ela é válida para ambos os estados de polarização. Esta é uma consequência direta do fato que o espaço de fundo é maximalmente simétrico e, como veremos, isso não é mais verdade com a presença de curvatura espacial anisotrópica. Em particular, observamos que em um universo dominado por radiação, onde o fator de escala evolui como $a = a_0\eta$, a equação (4.14) tem uma solução regular em $\eta = 0$ que no espaço de Fourier é dado por

$$E_{ij}(q, \eta) = C_{ij} \frac{\sqrt{q\eta}}{a(\eta)} J_{1/2}(q\eta), \quad (4.15)$$

onde q é o número de onda de Fourier.

CASOS BIII E KS

A discussão anterior baseou-se na identificação das ondas gravitacionais através das componentes de spin-2 invariantes de calibre das perturbações métricas. Como vimos, quando Σ_τ é maximalmente simétrico, somos capazes de definir um modo único com essas características (que chamamos de $E_{\mu\nu}$), tornando a identificação com as ondas gravitacionais direta. Se tentarmos estender esta ideia para o caso $\Sigma_\tau = \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, uma tentativa ingênua seria identificar ondas gravitacionais como sendo descritas por $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ uma vez que, como já vimos, este modo tem 2 d.o.f e é o único tensor sem-traço relacionado com o modo $H_{\mu\nu}$ - que é conhecido por conter os graus de liberdade das ondas gravitacionais. No entanto, existem dois sérios problemas com essa abordagem. O primeiro problema é que, em espaço-tempos com uma direção privilegiada, a decomposição SVT (4.7) já não é mais apropriada, assim nesses nossos casos temos que recorrer a uma decomposição SV (do inglês *scalar-vector decomposition*) que, por construção, não pode acomodar um tensor transverso sem-traço como $E_{\mu\nu}$ [46]. Isso significa que os dois graus de liberdade originalmente contidos em $E_{\mu\nu}$ devem ser redistribuídos nos modos irredutíveis da decomposição SV, mas *a priori* não há como adivinhar como essa tarefa é feita. Em segundo lugar, as equações (3.27) e (3.28) mostram que existe um acoplamento algébrico entre as variáveis 1+2+1 e 1+3. Isto nos diz que não podemos nos concentrar na evolução de um modo particular e definir os outros como nulos, como se foi feito em (4.14). Na verdade, uma situação semelhante ocorre nos modelos de Bianchi I: usando a teoria de perturbações, descobrimos que as perturbações vetoriais não possuem dinâmica e surgem apenas como um vínculo entre escalares e tensores [48]. Assim, mesmo que os modos vetoriais não cresçam à medida que o tempo evolui⁶, eles não podem ser desconsiderados desde o início, pois isso resultaria em equações de movimento erradas para escalares e tensores.

Com base na discussão acima, nossa abordagem aqui será a seguinte: primeiramente, no setor estático, fazemos a decomposição 1+2+1 de (4.4) mantendo todos os seus graus da liberdade. Isso nos permitirá construir corretamente variáveis invariante de calibre e encontrar as suas equações de movimento corretas. Com estas transformações podemos usar (3.19) para extrair a transformação das variáveis $(\mathcal{B} - \mathcal{C})$, \mathcal{F}_μ e $\mathcal{G}_{\mu\nu}$, que estão diretamente relacionadas com $H_{\mu\nu}$ - veja (3.28). Isto nos permite identificar quais desses modos se comportam como modos de calibre puro e aqueles que representam perturbações físicas. Surpreendentemente, encontramos que $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ é um modo de calibre puro, o que nos diz que nossa primeira intuição estava totalmente errada. Assim, o próximo passo é decompor (4.4) nos modos irredutíveis 1+2+1. Entretanto, como (4.9) já está escrito em termos dos modos 1+3, tudo o que precisamos fazer é decompor seus componentes espaciais em suas 2+1 componentes. Portanto

⁶Se esses modos não forem inicialmente "alimentados", como é geralmente o caso.

devemos escrever o 3-vector de calibre J_μ como

$$J_\mu = \mathcal{J}N_\mu + \mathcal{J}'_\mu, \quad (4.16)$$

onde $\mathcal{J}_\mu N^\mu = 0$. Em seguida, precisamos decompor o tensor $D_{(\mu}J_{\nu)}$ em suas 2+1 componentes. Primeiro, observamos que, para qualquer campo escalar e , em particular, para \mathcal{J} , temos $D_\mu \mathcal{J} = \mathcal{J}'N_\mu + \mathcal{D}_\mu \mathcal{J}$ (lembre-se das definições feitas em (3.20)). Além disso, temos

$$\begin{aligned} D_\mu \mathcal{J}_\nu &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha \mathcal{J}_\beta, \\ &= \mathcal{S}_\mu^\alpha \mathcal{S}_\nu^\beta D_\alpha \mathcal{J}_\beta + \mathcal{S}_\mu^\alpha N_\nu N^\beta D_\alpha \mathcal{J}_\beta + N_\mu N^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha \mathcal{J}_\beta, \\ &= \mathcal{D}_\mu \mathcal{J}_\nu + N_\mu \mathcal{J}'_\nu, \end{aligned}$$

onde usamos (3.24). Combinando todos os termos, usando (3.23) e novamente (3.24), encontramos que

$$D_\mu J_\nu = \mathcal{J}'N_\mu N_\nu + N_\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{J} + \mathcal{D}_\mu \mathcal{J}_\nu + N_\mu \mathcal{J}'_\nu, \quad (4.17)$$

e, em particular, $D_\alpha J^\alpha = \mathcal{J}' + \mathcal{D}_\alpha \mathcal{J}^\alpha$. Essas igualdades agora podem ser usadas para reescrever (4.9)

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &\rightarrow \delta g_{\mu\nu} - 2u_\mu u_\nu \dot{T} + 2u_{(\mu} N_{\nu)} T' + 2u_{(\mu} \mathcal{D}_{\nu)} T - 2u_{(\mu} N_{\nu)} \dot{\mathcal{J}} - 2u_{(\mu} \dot{\mathcal{J}}_{\nu)} \\ &\quad + 2\mathcal{J}'N_\mu N_\nu + 2N_{(\mu} \mathcal{D}_{\nu)} \mathcal{J} + 2\mathcal{D}_{(\mu} \mathcal{J}_{\nu)} + 2N_{(\mu} \mathcal{J}'_{\nu)}. \end{aligned}$$

Ao derivar essa transformação, também usamos o fato de que $\dot{N}_\mu = 0$, o que é verdadeiro no setor estático. Temos que $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ e com (3.19), a projeção nas variáveis 1+2+1 nos diz que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} - \dot{T}, & \mathcal{E}_\mu &\rightarrow \mathcal{E}_\mu + \mathcal{D}_\mu T - \dot{\mathcal{J}}_\mu, \\ \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{B} + \mathcal{D}_\alpha \mathcal{J}^\alpha, & \mathcal{F}_\mu &\rightarrow \mathcal{F}_\mu + \mathcal{D}_\mu \mathcal{J} + \mathcal{J}'_\mu, \\ \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} + \mathcal{J}', & \mathcal{G}_{\mu\nu} &\rightarrow \mathcal{G}_{\mu\nu} + 2\mathcal{D}_{(\mu} \mathcal{J}_{\nu)} - \mathcal{S}_{\mu\nu} \mathcal{D}_\alpha \mathcal{J}^\alpha. \\ \mathcal{Q} &\rightarrow \mathcal{Q} + T' - \dot{\mathcal{J}}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde também usamos o fato de que $\mathcal{S}'_{\mu\nu} = 0$ e $\dot{\mathcal{S}}_{\mu\nu} = 0$, sendo o último verdadeiro para a métrica estática. Neste ponto, o próximo passo lógico seria realizar a decomposição SVT de \mathcal{E}_μ , \mathcal{F}_μ , \mathcal{J}_μ e $\mathcal{G}_{\mu\nu}$.

No entanto, $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ não pode ser decomposto da mesma maneira como (4.7) pois, em duas dimensões, não há nenhum 2-tensor transversal sem-traço⁷. No entanto, ainda podemos usar a decomposição SV da seguinte forma

$$\mathcal{E}_\mu = \mathcal{D}_\mu \mathcal{E} + \hat{\mathcal{E}}_\mu, \quad \mathcal{D}_\mu \hat{\mathcal{E}}^\mu = 0,$$

⁷Em duas dimensões, um tensor simétrico sem-traço possui 2 componentes. A condição de transversalidade elimina mais duas componentes, resultando assim em um tensor nulo (ou seja, trivial).

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\mu &= \mathcal{D}_\mu \mathcal{L} + \widehat{\mathcal{L}}_\mu, & \mathcal{D}_\mu \widehat{\mathcal{L}}^\mu &= 0, \\
\mathcal{F}_\mu &= \mathcal{D}_\mu \mathcal{F} + \widehat{\mathcal{F}}_\mu, & \mathcal{D}_\mu \widehat{\mathcal{F}}^\mu &= 0, \\
\mathcal{G}_{\mu\nu} &= 2\Delta_{\mu\nu} \mathcal{G} + 2\mathcal{D}_{(\mu} \widehat{\mathcal{G}}_{\nu)}, & \mathcal{D}_\mu \widehat{\mathcal{G}}^\mu &= 0,
\end{aligned}$$

onde $\Delta_{\mu\nu} \equiv (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \frac{1}{2} \mathcal{S}_{\mu\nu} \Delta^2)$ e $\Delta^2 \equiv \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}^\alpha$. Usando esta decomposição em (4.18) e reescrevendo as perturbações dinâmicas $\delta\tilde{g}_{\mu\nu}$, finalmente encontramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} - \dot{T} - \mathcal{H}T, & \widehat{\mathcal{E}}_\mu &\rightarrow \widehat{\mathcal{E}}_\mu - \dot{\widehat{\mathcal{L}}}_\mu, \\
\mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{B} + \Delta^2 \mathcal{L} + 2\mathcal{H}T, & \widehat{\mathcal{F}}_\mu &\rightarrow \widehat{\mathcal{F}}_\mu + \widehat{\mathcal{L}}'_\mu, \\
\mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} + \mathcal{J}' + \mathcal{H}T, & \widehat{\mathcal{G}}_\mu &\rightarrow \widehat{\mathcal{G}}_\mu + \widehat{\mathcal{L}}_\mu. \\
\mathcal{Q} &\rightarrow \mathcal{Q} + T' - \dot{\mathcal{J}}, & & \\
\mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} + T - \dot{\mathcal{L}}, & & \\
\mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} + \mathcal{J} + \mathcal{L}', & & \\
\mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} + \mathcal{L}, & &
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Isso completa a tarefa de encontrar as transformações de calibre os modos 1+2+1 em termos das componentes escalares e vetoriais. Usando as relações acima podemos agora construir as seguintes variáveis invariantes de calibre⁸:

$$\begin{aligned}
\Phi &\equiv -\mathcal{A} - \frac{1}{a} \left[a \left(\mathcal{E} + \dot{\mathcal{G}} \right) \right]', & \Omega_\mu &\equiv \widehat{\mathcal{F}}_\mu - \widehat{\mathcal{G}}'_\mu, \\
2\Psi &\equiv \mathcal{B} - 2\mathcal{H} \left(\mathcal{E} + \dot{\mathcal{G}} \right) - \Delta^2 \mathcal{G}, & \Gamma_\mu &\equiv \widehat{\mathcal{G}}_\mu + \widehat{\mathcal{E}}_\mu, \\
\Pi &\equiv \mathcal{Q} + \dot{\mathcal{J}} - \left(\mathcal{E} + 2\dot{\mathcal{G}} \right), & & \\
3X &\equiv (\mathcal{B} - 2\mathcal{C}) + 2(\mathcal{F} - \mathcal{G}')' - \Delta^2 \mathcal{G}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Pelo lema de Stewart-Walker [54], sabemos que as equações (linearizadas) de Einstein podem ser escritas em termos dessas seis variáveis. Na prática, porém, é mais fácil trabalhar em um calibre específico onde

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathcal{G} = 0 = \widehat{\mathcal{G}}_\mu, \tag{4.21}$$

pois as equações finais podem ser convertidas trivialmente de volta para as variáveis invariantes de calibre⁹. Observe também que esta escolha fixa completamente o calibre.

Nos resta agora nos perguntarmos, onde estão os graus de liberdade das ondas gravitacionais? Da última das equação de (3.27) e as definições (4.20), podemos facilmente

⁸A partir deste ponto, não há necessidade de manter nossa convenção especial para a notação das variáveis, portanto podemos arbitrariamente escolher letras para definir variáveis invariantes de calibre.

⁹Isso ocorre porque, no calibre (4.21), as perturbações métricas são iguais às variáveis invariantes do calibre. Pelo lema Stewart-Walker, sabemos que as equações finais podem ser escritas somente em termos das variáveis invariantes do calibre. Assim, escolhendo um calibre arbitrário, apenas variáveis invariantes de calibre permaneceram, e elas podem ser abstraídas das equações obtidas no calibre original [43].

escrever $H_{\mu\nu}$ como uma soma de variáveis dependentes de calibre com termos invariantes de calibre:

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{3} [\Delta^2 \mathcal{G} - 2(\mathcal{F} - \mathcal{G}')'] (\mathcal{S}_{\mu\nu} - 2N_\mu N_\nu) + 2 \left[\mathcal{D}_{(\mu} \mathcal{F} + \widehat{\mathcal{G}}'_{\mu)} \right] N_\nu + \mathcal{G}_{\mu\nu} \\ + X (\mathcal{S}_{\mu\nu} - 2N_\mu N_\nu) + 2\Omega_{(\mu} N_{\nu)}.$$

Esta expressão deve portanto ser contrastada com (4.7). Claramente, X e Ω_μ representam as duas perturbações físicas que procuramos, enquanto que os termos restantes representam modos de calibre (não físicos). No sistema de coordenadas definido por (4.21), temos que

$$H_{\mu\nu} = X (\mathcal{S}_{\mu\nu} - 2N_\mu N_\nu) + 2\Omega_{(\mu} N_{\nu)}. \quad (4.22)$$

É interessante notar que os modos \mathcal{E} e $\widehat{\mathcal{E}}_\mu$ não contribuem para ondas gravitacionais. Na verdade, estes correspondem os modos vetoriais habituais da teoria de perturbação padrão (FLRW). Concluimos, portanto, a nossa primeira tarefa principal, que foi encontrar as variáveis físicas que descrevem ondas gravitacionais em espaço-tempos BIII e KS. Este resultado nos diz que, quando $\Sigma_\tau = \mathcal{M}^2 \times \mathbb{R}$, as componentes originais de spin-2 $H_{\mu\nu}$ agora se comportam como um campo de spin-0 (X) e um campo spin-1 (Ω_μ). Qualitativamente, esse resultado é fácil de entender. Como \mathbb{R} tem apenas uma dimensão, ele só admite modos de propagação escalar. Já para \mathcal{M}^2 podemos ter modos escalares e vetoriais, mas, como vimos, o modo escalar é na verdade um modo de calibre puro. Finalmente, note que *a priori* não há razão para esperar que esses campos tenham a mesma dinâmica e, como veremos, eles não terão.

EQUAÇÕES DINÂMICAS E SOLUÇÕES

A equação (4.22) é o primeiro resultado principal deste trabalho. Nossa segunda tarefa é encontrar as equações de movimento para X e Ω_μ . Como ressaltado anteriormente, devido a acoplamentos algébricos entre escalares e vetores, essas equações não podem ser obtidas impondo que as demais perturbações sejam nulas, portanto devemos trabalhar as perturbações métricas mais gerais possíveis. No calibre (4.21), temos que

$$\begin{aligned}\delta\tilde{g}_{\mu\nu} &= a^2 h_{\mu\nu} \\ &= -2\Phi u_\mu u_\nu + 2\Psi \mathcal{S}_{\mu\nu} + (2\Psi - 3X)N_\mu N_\nu + 2\Pi N_{(\mu} u_{\nu)} + 2\Gamma_{(\mu} u_{\nu)} + 2\Omega_{(\mu} N_{\nu)}.\end{aligned}$$

Adotando um sistema de coordenadas definido por

$$u_\mu = -\delta_\mu^0, \quad \mathcal{S}_{\mu\nu} = (0, \mathcal{S}_{ab}, 0), \quad N_\mu = \delta_\mu^z, \quad (5.1)$$

onde os índices a, b assumem os valores 1 e 2, o elemento de linha correspondente é escrito como

$$\begin{aligned}ds^2 &= a^2 \left[-(1 + 2\Phi)d\eta^2 - 2\Gamma_a d^a x d\eta - 2\Pi dz d\eta \right. \\ &\quad \left. + (1 + 2\Psi) \mathcal{S}_{ab} dx^a dx^b + 2\Omega_a dx^a dz + (1 + 2\Psi - 3X) dz^2 \right].\end{aligned} \quad (5.2)$$

Este é o elemento de linha mais geral para perturbações lineares em BIII e KS spacetimes, e contendo tanto perturbações escalares como vetoriais. As componentes linearizadas do tensor de Einstein são apresentadas no Apêndice §A.3, juntamente com as expressões linearizadas para o tensor energia-momento do campo escalar anisotrópico, e agora nos concentremos na construção das equações de movimento. Primeiramente vejamos como obter a equação para X . Da equação (A.20) vemos que, na ausência de estresse anisotrópico nas perturbações do fluido perfeito, sua componente escalar obedece

$$\mathcal{D}_{(a} \mathcal{D}_{b)} Z = 0, \quad (a \neq b), \quad (5.3)$$

onde $Z \equiv 2\Psi - 3X + 2\Phi$. Como esta é uma equação de Killing, podemos escrever $\mathcal{D}_a Z$ como sendo

$$\mathcal{D}_a Z = f_i(\eta, z) \zeta_a^i, \quad (5.4)$$

onde o ζ_a^i são os três vetores de Killing em \mathcal{M}^2 . Dado a forma explícita desses vetores em um sistema de coordenadas, é fácil mostrar que derivadas parciais de Z só comutam se $f_i = 0$, o que implica então que $Z = 0$ (veja o Apêndice §A.2 para a prova formal). Concluímos assim

que

$$2\Psi + 2\Phi = 3X. \quad (5.5)$$

Em seguida, subtraímos a equação (A.22) a partir do traço de (A.20) e usando (A.21) para eliminar Π . Usando (5.5) finalmente obtemos a equação desejada

$$\ddot{X} + 2\mathcal{H}\dot{X} - (\nabla^2 + 2\kappa)X = 0, \quad (5.6)$$

Podemos agora encontrar a equação dinâmica para Ω_a . Da componente vetorial da equação (A.20) obtemos que $\mathcal{D}_{(a}Z_{b)} = 0$, onde $Z_a \equiv \Omega'_a + \dot{\Gamma}_a + 2\mathcal{H}\Gamma_a$ e $a \neq b$. Mais uma vez, isso implica que $Z_a = g_i(\eta, z)\zeta_a^i$ sendo g_i uma função arbitrária. No caso hiperbólico (BIII), o fato de que as perturbações cosmológicas vão à zero em no infinito, fixa $g_i = 0$, pois não existem vetores Killing com tal propriedade [53]. No caso esférico (KS), não há "infinito espacial" de modo que Z_a não é único. No entanto, é claro que $g_i\zeta_a^i$ não representa perturbações cosmológicas, e não há perda de generalidade novamente ajustando $g_i = 0$. Utilizamos assim a relação

$$\dot{\Gamma}_a + 2\mathcal{H}\Gamma_a = -\Omega'_a \quad (5.7)$$

na equação (A.21), o que nos permite obter o seguinte equação para o componente vetorial:

$$\ddot{\Omega}_a + 2\mathcal{H}\dot{\Omega}_a - (\nabla^2 + \kappa)\Omega_a = 0. \quad (5.8)$$

As equações (5.6) e (5.8) resumem nossa tarefa de encontrar a dinâmica das perturbações tensoriais nos espaço-tempos com curvatura anisotrópica, e é interessante que neste momento, podemos compará-las com eqs. (4.14). Como foi antecipado, nos casos anisotrópicos cada modo tem sua própria dinâmica, sendo que a diferença é mais prominente em grande escala cosmológicas, onde o efeito da curvatura anisotrópica é maior. Em pequenas escalas ($\nabla^2 \gg \kappa$), a dinâmica dos dois modos se torna degenerada e nós recuperamos (4.14). Note, no entanto, que esta não é a única diferença entre estas equações e e a equações para o caso isotrópico. Na verdade, o Laplaciano em (5.6) e em (5.8) têm diferentes espectros que aparecem como diferentes assinaturas no espectro de potência de cada perturbação. Desta maneira devemos agora investigar estas questões em detalhes.

AUTOFUNÇÕES ESPACIAIS

Para resolvermos as equações dinâmicas e avaliarmos os espectros de potência das ondas gravitacionais, precisamos saber como realizar a análise de Fourier em espaços com curvatura anisotrópica. Isso exige que conheçamos as autofunções $\phi_{\mathbf{q}}$ do Laplaciano nessas geometrias, que são soluções da equação do autovalor

$$\nabla^2\phi_{\mathbf{q}} = -q^2\phi_{\mathbf{q}}, \quad q \equiv |\mathbf{q}| \in \mathbb{R}^+. \quad (5.9)$$

Para as métricas descritas por (2.3), temos que

$$\nabla^2 = \kappa \left[\frac{1}{\sin \bar{\rho}} \partial_{\bar{\rho}} (\sin \bar{\rho} \partial_{\bar{\rho}}) + \frac{1}{\sin^2 \bar{\rho}} \partial_{\varphi}^2 + \partial_{\bar{z}}^2 \right], \quad (5.10)$$

onde $\bar{\rho} \equiv \sqrt{\kappa} \rho$ e $\bar{z} \equiv \sqrt{\kappa} z$. Observe que para $\kappa = -|\kappa|$ temos automaticamente o Laplaciano do modelo de BIII. As autofunções são dadas por [47, 4, 17]

$$\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} N_{\ell m} P_{-1/2+i\ell}^m (\cosh \bar{\rho}) e^{im\varphi} e^{ik\bar{z}}, & \text{(BIII)} \\ N_{\ell m} P_{\ell}^m (\cos \bar{\rho}) e^{im\varphi} e^{ik\bar{z}}, & \text{(KS)} \end{cases} \quad (5.11)$$

onde k (que não deve ser confundido com o parâmetro de curvatura κ) é real, m é um número inteiro e ℓ é real (BIII) ou inteiro (KS), mas sempre positivo. Essas funções são ortonormais se definirmos $N_{\ell m}$ como sendo

$$N_{\ell m} = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \sqrt{(-1)^m \ell \tanh \pi \ell \frac{\Gamma(i\ell-m+1/2)}{\Gamma(i\ell+m+1/2)}}, & \text{(BIII)} \\ \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}, & \text{(KS)} \end{cases} \quad (5.12)$$

Pode-se também verificar que no limite $\rho \ll 1$ e $\ell \gg 1$, $\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ se torna

$$\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) \approx \ell^{1/2} J_m(\ell\rho) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikz}}{\sqrt{2\pi}} \quad (5.13)$$

que, não surpreendentemente, são as autofunções de um universo FLRW plano em coordenadas cilíndricas. Além disso, percebemos que os autovalores q^2 são m -independentes (refletindo a rotação residual simetria dessas geometrias) e dados por

$$q^2 = \frac{1}{R_c^2} \begin{cases} \ell^2 + k^2 + \frac{1}{4}, & \text{(BIII, } \ell \text{ real)} \\ (\ell + 1/2)^2 + k^2 - \frac{1}{4}, & \text{(KS, } \ell \text{ integer)} \end{cases} \quad (5.14)$$

onde usamos (2.11). Verificamos assim que, em ambos os casos, q tem um limite inferior fundamental dado por¹⁰

$$qR_c \equiv q_* \geq \begin{cases} (1/2), & \text{(BIII)} \\ \sqrt{2}. & \text{(KS)} \end{cases} \quad (5.15)$$

Ressaltamos que podemos prever os limites (em que nossos modelos são válidos) para as observações de q usando dados recentes da CMB. Os últimos limites para curvatura espacial FLRW calculados pela equipe *Planck*, usando os dados CMB, fornecem $\Omega_{\kappa 0} = -0.005_{-0.017}^{+0.016}$ com 95%

¹⁰No caso aberto, o maior modo possível tem $\ell = k = 0$. No entanto, $\ell = 0$ é na verdade um monopolo e, portanto, é removido do espectro. Com isso neste caso $\ell - 1 = k = 0$.

de nível de confiança [7]. Isso se traduz em

$$R_c \gtrsim 6.7H_0^{-1} \quad (\text{BIII}) \quad \text{and} \quad R_c \gtrsim 4.7H_0^{-1} \quad (\text{KS}), \quad (5.16)$$

ou equivalentemente

$$qH_0^{-1} \gtrsim 0.07 \quad (\text{BIII}) \quad \text{and} \quad qH_0^{-1} \gtrsim 0.3 \quad (\text{KS}). \quad (5.17)$$

O fato de que as restrições para R_c são mais fracas que as de L_c (veja equação (2.11)) é uma consequência direta da suposição de anisotropia estatística dos dados. Em grandes escalas, onde a variância cósmica domina, os coeficientes multipolares de temperatura $a_{\ell m}$ com ℓ fixo e com diferentes m diferentes se correlacionam [47], o que significa que existe uma restrição mais fraca no espectro de temperatura C_ℓ do que no caso de modelos isotrópicos¹¹.

Dadas as autofunções (5.11), qualquer perturbação escalar Q pode ser formalmente decomposta em

$$Q(\eta, \mathbf{x}) = \int d\mu_{\mathbf{q}} Q_{\mathbf{q}}(\eta) \phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}), \quad (5.18)$$

com a relação inversa dada por

$$Q_{\mathbf{q}}(\eta) = \int \sqrt{\gamma} d^3\mathbf{x} Q(\eta, \mathbf{x}) \phi_{\mathbf{q}}^*(\mathbf{x}). \quad (5.19)$$

Aqui, $\mu_{\mathbf{q}}$ formalmente representa a medida de integração definida pela topologia de cada espaço (veja [47] para os detalhes). A decomposição de um campo vetorial transverso Q_a é essencialmente o mesmo se reconhecermos que um 2-vetor transverso (i.e., definido em duas dimensões) é fundamentalmente um campo escalar e, como tal, pode ser escrito como

$$Q_a = \epsilon_{ab} \mathcal{D}^b Q \quad (5.20)$$

onde ϵ_{ab} é o tensor totalmente antissimétrico (símbolo de Levi-Civita) em \mathcal{M}^2 . Como ϵ_{ab} é covariantemente conservado, isso automaticamente garante que $\mathcal{D}^a Q_a = 0$. Assim, na prática, estamos lidando somente com campos escalares e, a partir de agora, podemos esquecer o índice a em qualquer vetor transverso. Antes de prosseguir, é interessante apresentar duas variáveis redimensionadas

$$x \equiv aX, \quad \omega \equiv a\Omega, \quad (5.21)$$

¹¹Quando a isotropia espacial é válida, $C_\ell = (2\ell + 1)^{-1} \sum_m |a_{\ell m}|^2$ é uma soma de $2\ell + 1$ números independentes.

de maneira que elas simplificam as equações de movimento (no espaço de Fourier)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\mathbf{q}} + \left(q^2 - \frac{\ddot{a}}{a} - 2\kappa \right) x_{\mathbf{q}} &= 0, \\ \ddot{\omega}_{\mathbf{q}} + \left(q^2 - \frac{\ddot{a}}{a} - \kappa \right) \omega_{\mathbf{q}} &= 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Vemos portanto que os termos de frequência destes osciladores (isto é, os termos entre parênteses) são totalmente isotrópicos, pois que não dependem de \mathbf{q} , mas apenas em seu módulo. Isso é novamente um reflexo da expansão isotrópica do espaço-tempo fundo, mas também do fato de que a decomposição 1+2+1 é adaptada às simetrias do espaço-tempo fundo, de modo que não surja nenhum acoplamento de modo dinâmico. Em particular, isso implica que a quantização das perturbações x e ω durante a inflação podem ser realizadas da mesma maneira que a quantização de campos livres em espaço-tempos FLRW curvos [42], e ainda o espectro de potência de cada perturbação dependerá apenas de q . No entanto, destacamos que o espectro de potência "total" (aquele o definido através do modo tensorial completo (4.22)) certamente será uma função do vetor completo \mathbf{q} , ao invés de ser uma função apenas q , uma vez que sua definição exige que corrijamos a direção da curvatura anisotrópica através de algum ângulo no céu. Em outras palavras, ainda estamos livres para corrigir a orientação de \mathbb{R} relativo à \mathcal{M}^2 . Isto implica ainda em uma função de correlação angular anisotrópica e em termos "fora da diagonal" da matriz de covariância da temperatura da CMB [47].

SOLUÇÕES E ESPECTROS DE POTÊNCIA

Como uma aplicação simples de nossos resultados, vamos encontrar soluções analíticas das equações (5.22) em alguns regimes cosmológicos bem conhecidos. O caso mais simples e mais importante é o da era da radiação para o qual $p_f = \rho_f/3$, pois nesse caso a equação (2.10) torna-se simplesmente

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{2} = -\frac{\epsilon}{2R_c^2}, \quad \epsilon = \text{sign}(\kappa). \quad (5.23)$$

Neste regime, o fator de escala evolui como

$$a(\eta) = a_0 \begin{cases} \sqrt{2}R_c \sinh\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}R_c}\right) & (\text{BIII}, \epsilon = -1), \\ \sqrt{2}R_c \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}R_c}\right) & (\text{KS}, \epsilon = +1), \end{cases} \quad (5.24)$$

onde a_0 é uma constante de integração. Observe que nós normalizamos estas soluções de modo que $a(\eta) = a_0\eta$ quando $R_c \gg 1$, que é a solução correta para o caso isotrópico. Se definirmos

$\beta^2 \equiv 1 - 3\epsilon/2q_*^2$ e $\gamma^2 \equiv 1 - \epsilon/2q_*^2$, as soluções regulares em $\eta = 0$ são

$$X(q, \eta) = C_1 \frac{\sqrt{q\eta}}{a(\eta)} J_{1/2}(\beta q\eta), \quad \Omega(q, \eta) = C_2 \frac{\sqrt{q\eta}}{a(\eta)} J_{1/2}(\gamma q\eta), \quad (5.25)$$

onde $C_{1,2}$ são constantes de integração. Essas soluções se diferem da solução (4.15) em dois aspectos. Em primeiro lugar, as funções de Bessel agora têm uma dependência explícita do raio de curvatura através dos fatores β e γ , que no caso isotrópico ambos são iguais a um. Em segundo lugar, o fator de escala agora possui um comportamento completamente diferente do caso FLRW plano dominado pela radiação. Uma consequência particularmente interessante dessas soluções é que, em um universo KS, a perturbação com comprimento de onda infinita do modo X é constante no tempo. Isso ocorre porque, nos espaços KS, o maior comprimento de onda tem $q_* = \sqrt{2}$, o que implica que $\beta = 1/2$. Como $J_{1/2}(u/2) = 2 \sin(u/2) / (\sqrt{\pi}u)$, imediatamente obtemos que $X = qC_1/a_0\sqrt{\pi}$ para todos os tempos. Isso é mostrado na figura (5.1) juntamente com algumas outras soluções para valores diferentes do parâmetro q_* . Por motivos de ilustração adotamos $qC_{1,2}/a_0 = 1$ nestes gráficos. Como a dinâmica dos modos X e Ω é isotrópica, podemos definir seus espectros de potência simplesmente como

$$P_X = q^3 |X(q, \eta)|^2, \quad P_\Omega = q^3 |\Omega(q, \eta)|^2. \quad (5.26)$$

Em grandes escalas, tanto X quanto Ω são constantes, e o espectro de potência se comporta como q^3 . À medida que o modo atravessa o horizonte do Hubble (i.e., quando $q\eta \gtrsim 1$) a amplitude da cada perturbação se comporta quase que linearmente com q . Isso continua até o ponto onde curvatura passa a afetar o comportamento do fator de escala, com isso a amplitude cresce ou decresce, dependendo se a expansão continua para sempre ou se enfrenta um recolapso. Isto é mostrado numericamente na figura (5.2).

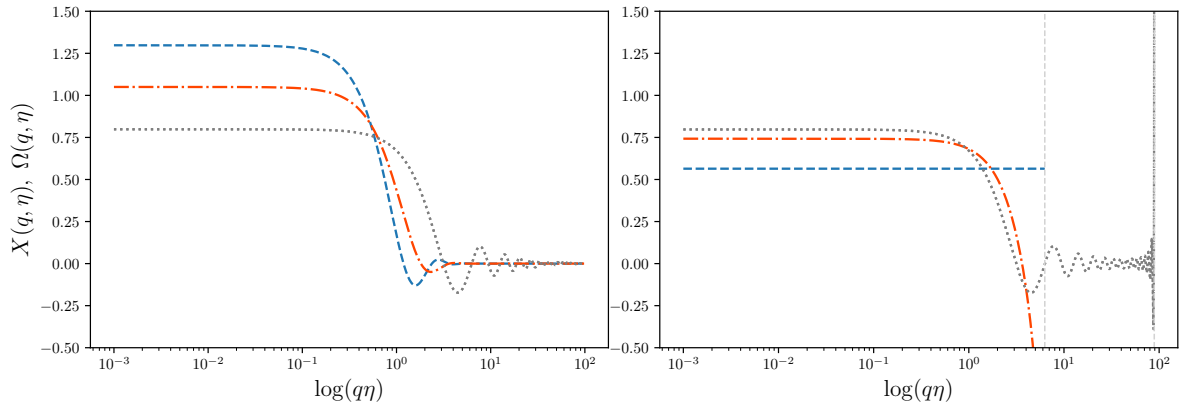


Figura 5.1: Evolução dos modos X (linha tracejada) e Ω (ponto-tracejada linha) nos modelos BIII (esquerda) e KS (direita) correspondem ao mais longo comprimento de onda possível (veja equação (5.15)). Os gráficos também mostram a evolução das perturbações quando $q_* = 20$, caso em que X e Ω correspondem a evolução isotrópica. As linhas verticais no painel direito representam o tempo de colapso no modelo fechado para diferentes raios de curvatura. Observe que $X(q_* = \sqrt{2})$ é constante no modelo KS para toda a evolução. Consulte o texto para detalhes. Para essas gráficos, utilizamos $qC_{1,2}/a_0 = 1$.

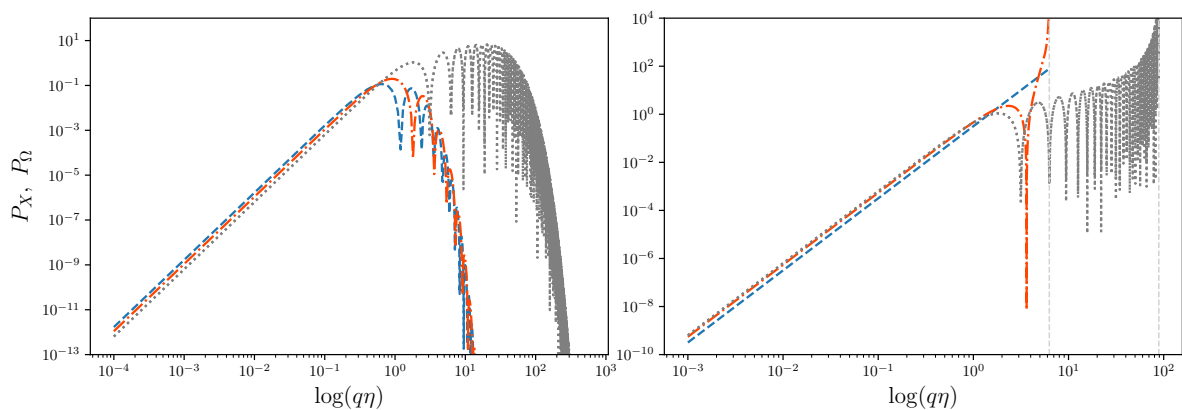


Figura 5.2: Espectro de potência P_X e P_Ω em BIII (esquerda) e KS (direita), com os mesmos valores de parâmetros e cores utilizados na figura (5.1). As linhas verticais tracejadas no painel direito representam o tempo de colapso para cada raio de curvatura. As amplitudes foram arbitrariamente normalizadas.

CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES FINAIS

A detecção de ondas gravitacionais pela colaboração Ligo/Virgo abre uma infinidade de novas oportunidades para astrofísica e cosmologia. Embora a detecção direta das ondas gravitacionais primordiais ainda possa demorar, o impacto das perturbações tensoriais na temperatura e os espectros de polarização da CMB já podem nos ajudar a restringir modelos do universo primordial. Nesta tese, exploramos uma classe particular de modelos onde a suposição de isotropia espacial foi abandonada de forma que a CMB ainda permaneça isotrópica em primeira aproximação. Tais modelos oferecem um exemplo interessante onde as simetrias do universo não seguem as simetrias dos dados cosmológicos, como geralmente é postulado. Em particular, as soluções Bianchi tipo III e Kantowski-Sachs com um conteúdo de matéria de fluido imperfeito levam à mesma expansão de um universo curvo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Aqui focamos na construção teórica de ondas gravitacionais lineares nesses modelos. Ao fazê-la, encontramos que a principal dificuldade é separar os graus de liberdade físicos dos de calibre na presença de curvatura espacial anisotrópica, que requer o uso de uma decomposição adaptada às simetrias do espaço-tempo. Além disso, a presença de acoplamentos algébricos entre modos impede que ignoremos as perturbações não relacionadas as ondas gravitacionais. Em particular, tendo mantido apenas as variáveis X e Ω_a na expansão (5.2), teríamos obtido as equações de movimento erradas.

Duas assinaturas específicas de ondas gravitacionais surgem neste contexto. Primeiro, os modos de polarização da onda se comportam como componentes irreduzíveis de spin-0 e spin-1 de um tensor transverso e sem-traço, ao invés de duas componentes de um campo de spin-2. Cada polarização tem sua própria dinâmica que difere do caso usual (isotrópico); sendo essa diferença é maior em escalas perto do raio de curvatura. Segundo, a presença de um raio de curvatura nestes modelos implica naturalmente em limites superiores ao tamanho de uma onda gravitacional. Em particular, descobrimos que a maior onda correspondente ao modo de polarização X em um universo KS é constante no tempo. No entanto, esse efeito pode ser facilmente escondido no fundo estocástico da radiação gravitacional e, portanto, difícil de se detectar.

Gostaríamos de concluir comentando algumas aplicações do formalismo aqui apresentado. O efeito Sachs-Wolfe integrado prevê uma variação de temperatura dada por $\Delta T/T = -\int e^i e^j \partial_\eta E_{ij} d\eta$ [49]. Claramente, na presença de curvatura anisotrópica ele receberá diferentes contribuições dos modos de polarização X e Ω , que, por sua vez, afetarão a amplitude do espectro tensorial para grandes ângulos da CMB. Além disso, por causa do limite superior para o comprimento máximo de uma onda, deve-se esperar encontrar um deficit no espectro do tensorial em grandes ângulos, de forma semelhante ao que acontece com o espectro do tensorial em universos FLRW fechados [18]. Em segundo lugar, uma vez que o espectro de potência total das perturbações tensoriais depende da direção do vetor N^μ , pode-se espe-

rar anisotropias na razão escalar/tensor na inflação, que pode ser usado como uma assinatura adicional para eliminar esses modelos. Por fim, também pode-se esperar encontrar assinaturas provenientes do efeito direto das ondas gravitacionais na polarização dos módulos- B da CMB. Adiamos essas análises a um trabalho futuro.

MISCELÂNEA

Reunimos aqui algumas fórmulas e resultados úteis que foram usados no texto principal.

TRANSFORMAÇÕES CONFORMES

Damos aqui alguns detalhes sobre as expressões envolvendo as transformações conforme. Na família de métricas em que estamos interessados, a métrica dinâmica (de fundo) $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é conformalmente relacionada à métrica estática $g_{\mu\nu}$ através de

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x^\lambda) = a^2 g_{\mu\nu}(x^\lambda), \quad \tilde{g}^{\mu\nu}(x^\lambda) = a^{-2} g^{\mu\nu}(x^\lambda), \quad (\text{A.1})$$

onde $a = a(\eta)$ é o fator de escala e $x^\lambda = (\eta, \mathbf{x})$. As quadrivelocidades associadas a cada uma das métrica estão relacionadas a entre si através de $d\tilde{\tau} = a d\tau$. Isso implica que

$$\tilde{u}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}} = \frac{1}{a} \frac{dx^\mu}{d\tau} = a^{-1} u^\mu. \quad (\text{A.2})$$

Por consistência, seguem as seguintes relações

$$\tilde{u}_\mu = a u_\mu, \quad \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = a^2 \gamma_{\mu\nu}, \quad \tilde{N}_\mu = a N_\mu, \quad \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\nu} = a^2 \mathcal{S}_{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

No entanto, observe que $\tilde{\gamma}_\mu{}^\nu = \gamma_\mu{}^\nu$ e $\tilde{\mathcal{S}}_\mu{}^\nu = \mathcal{S}_\mu{}^\nu$. Como ambas as métricas descrevem espaço-tempo homogêneos, $\tilde{\gamma}_\mu{}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha a = \tilde{D}_\mu a = 0$, implicando em

$$\tilde{\nabla}_\mu a = -\tilde{u}_\mu \tilde{u}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha a = -u_\mu u^\alpha \nabla_\alpha a = \nabla_\mu a. \quad (\text{A.4})$$

Em particular, no sistema de coordenadas comovel de métrica (2.1), $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, e temos que

$$\nabla_\mu a = -u_\mu \dot{a}, \quad \text{where} \quad \dot{a} = \frac{da}{d\eta}. \quad (\text{A.5})$$

Dada a transformação de calibre de $\delta g_{\mu\nu}$, podemos encontrar a respectiva transformação para $\delta \tilde{g}_{\mu\nu}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{g}_{\mu\nu} &\rightarrow \delta \tilde{g}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi(\tilde{g}_{\mu\nu}), \\ &= \delta \tilde{g}_{\mu\nu} + a^2 \left(\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu} \frac{1}{a} \xi^\alpha \nabla_\alpha a \right). \end{aligned}$$

Escrevendo $\xi^\mu = u^\mu T + J^\mu$ e usando (A.4), segue então

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu} \rightarrow \delta\tilde{g}_{\mu\nu} + a^2 (\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu}\mathcal{H}T) , \quad (\text{A.6})$$

onde $\mathcal{H} = \dot{a}/a$ é a função Hubble conforme.

As derivadas $\tilde{\nabla}_\mu$ e ∇_μ serão, em geral, diferentes quando atuadas em tensores, pois

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \frac{1}{a} (2\delta_{(\mu}^\alpha \nabla_{\nu)} a - g_{\mu\nu} \nabla^\alpha a) , \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - (2\delta_{(\mu}^\alpha u_{\nu)} - g_{\mu\nu} u^\alpha) \mathcal{H} . \end{aligned}$$

Em particular, isso implica que a curvatura extrínseca da métrica dinâmica e da estática estão relacionada por

$$\tilde{K}_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\mu \tilde{u}_\nu = a (K_{\mu\nu} + \mathcal{H}\gamma_{\mu\nu}) . \quad (\text{A.7})$$

Do mesmo modo, a derivada covariante do vetor \tilde{N}_μ é dado por

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{N}_\nu = a (\nabla_\mu N_\nu + \mathcal{H}N_\mu u_\nu) . \quad (\text{A.8})$$

VETORES DE KILLING EM \mathcal{M}^2

Variiedades bidimensionais maximalmente simétricas de curvatura constante podem ser representadas pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = d\rho^2 + S_\kappa^2(\rho)d\varphi^2 \quad (\text{A.9})$$

onde $S_\kappa(\rho) = \sin(\sqrt{\kappa}\rho)/\sqrt{\kappa}$. Estes espaços admitem três vetores de Killing

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)} &= \partial_\varphi , \\ \zeta^{(2)} &= \cos\varphi\partial_\rho - \sqrt{\kappa}\cot(\sqrt{\kappa}\rho)\sin\varphi\partial_\varphi , \\ \zeta^{(3)} &= \sin\varphi\partial_\rho + \sqrt{\kappa}\cot(\sqrt{\kappa}\rho)\cos\varphi\partial_\varphi . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Retornando a equação (5.4) vemos que

$$\partial_\rho Z = f_2 \cos\varphi + f_3 \sin\varphi , \quad \partial_\varphi Z = f_1 + (-f_2 \sin\varphi + f_3 \cos\varphi) \sqrt{\kappa} \cot(\sqrt{\kappa}\rho) . \quad (\text{A.11})$$

Claramente, a igualdade $\partial_\varphi\partial_\rho Z = \partial_\rho\partial_\varphi Z$ é válida para ρ e φ arbitrários apenas quando $f_2 = f_3 = 0$. Além disso, como as perturbações cosmológicas são definidas como flutuações do valor médio (monopolo) das quantidades cosmológicas, eles não têm um monopolo. Mas se f_1 é claramente um monopolo, uma vez que não depende de ρ e φ , temos que $f_1 = 0$. Concluimos assim que $\partial_\rho Z = 0 = \partial_\varphi Z$, o que implica que Z é uma constante. Porém como Z não pode

possuir um monopolo, finalmente concluimos que $Z = 0$.

TENSOR DE EINSTEIN PERTURBADO

Damos aqui uma breve visão geral da teoria linear de perturbações. Mais detalhes podem ser encontrados na referência [46]. Como de costume, nós escrevemos a métrica e sua inversa como

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.12})$$

de modo que

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.13})$$

No sistema de coordenadas (2.3) temos que

$$g_{00} = -a^2, \quad g_{ab} = a^2 \mathcal{S}_{ab}, \quad g_{zz} = a^2 \quad (\text{A.14})$$

e conseqüentemente

$$g^{00} = -a^{-2}, \quad g^{ab} = a^{-2} \mathcal{S}^{ab}, \quad g^{zz} = a^{-2}. \quad (\text{A.15})$$

As perturbações métricas são parametrizadas como

$$\begin{aligned} \delta g_{00} &= -2a^2 \Phi, \\ \delta g_{0a} &= -a^2 \Gamma_a, \\ \delta g_{0z} &= -a^2 \Pi, \\ \delta g_{ab} &= 2a^2 \mathcal{S}_{ab} \Psi, \\ \delta g_{az} &= a^2 \Omega_a, \\ \delta g_{zz} &= a^2 (2\Psi - 3X). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Assim tais perturbações podem ser usadas para linearizar todos os tensores formando as equações (perturbadas) de Einstein. O resultado final é dada por

$$\begin{aligned} a^2 \delta G^0_0 &= 6\mathcal{H}^2 \Phi - 2\mathcal{H}\Pi' - 3\mathcal{H}(2\dot{\Psi} - \dot{X}) + \frac{1}{2} \mathcal{D}^c \mathcal{D}_c (4\Psi - 3X) + 2\kappa\Psi + 2\Psi'' \\ &= a^2 \delta T^0_0, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} a^2 \delta G^0_a &= \mathcal{D}_b \mathcal{D}_{[a} \Gamma^{b]} - \frac{1}{2} \Gamma''_a - \kappa \Gamma_a - \frac{1}{2} \dot{\Omega}'_a + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a \Pi' + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a (4\dot{\Psi} - 3\dot{X}) - 2\mathcal{H} \mathcal{D}_a \Phi \\ &= a^2 \delta T^0_a, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$a^2 \delta G^0_z = -2\mathcal{H}\Phi' + 2\dot{\Psi}' - \frac{1}{2} \mathcal{D}^a \mathcal{D}_a \Pi = a^2 \delta T^0_z, \quad (\text{A.19})$$

$$a^2 \delta G^a_b = \delta^a_b \left[2\Phi \left(\mathcal{H}^2 + 2\dot{\mathcal{H}} \right) + 2\mathcal{H}\dot{\Phi} + \Psi'' - 2\mathcal{H}\Pi' - \frac{1}{2} (4\ddot{\Psi} - 3\ddot{X}) - \mathcal{H}(4\dot{\Psi} - 3\dot{X}) \right]$$

$$\begin{aligned}
& +\Phi'' - \dot{\Pi}' + \frac{1}{2}\mathcal{D}^c\mathcal{D}_c(2\Psi - 3X + 2\Phi) \Big] - \frac{1}{2}\mathcal{D}^{(a}\mathcal{D}_{b)}(2\Psi - 3X + 2\Phi) \\
& + \mathcal{D}^{(a}\Omega'_b) + \mathcal{D}^{(a}\dot{\Gamma}_b) + 2\mathcal{H}\mathcal{D}^{(a}\Gamma_b) = a^2\delta T^a_b, \tag{A.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^2\delta G^z_a &= -\mathcal{D}_a(\Phi' + \Psi') + \mathcal{H}\mathcal{D}_a\Pi + \frac{1}{2}\mathcal{D}_a\dot{\Pi} + \mathcal{H}\Gamma'_a + \frac{1}{2}\dot{\Gamma}'_a + \frac{1}{2}\ddot{\Omega}_a + \mathcal{H}\dot{\Omega}_a - \frac{\kappa}{2}\Omega_a - \frac{1}{2}\mathcal{D}^c\mathcal{D}_c\Omega_a \\
&= a^2\delta T^z_a, \tag{A.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^2\delta G^z_z &= 2\Phi(\mathcal{H}^2 + 2\dot{\mathcal{H}}) + 2\mathcal{H}\dot{\Phi} + \mathcal{D}^c\mathcal{D}_c(\Phi + \Psi) - 2(\ddot{\Psi} + 2\mathcal{H}\dot{\Psi} - \kappa\Psi) \\
&= a^2\delta T^z_z. \tag{A.22}
\end{aligned}$$

Lembramos ao leitor que um ponto e um linha significam $\partial\eta$ e ∂z , respectivamente.

As componentes perturbadas não-nula do tensor energia-momento são

$$\begin{aligned}
a^2\delta T^0_0 &= \kappa(-\Psi + 3X/2 + \delta\phi'), \\
a^2\delta T^0_z &= \kappa(\Pi + \delta\phi'), \\
a^2\delta T^a_b &= \kappa(-\Psi + 3X/2 + \delta\phi')\delta^a_b, \\
a^2\delta T^z_a &= -\kappa\mathcal{D}_a\delta\phi, \\
a^2\delta T^z_z &= \kappa(\Psi - 3X/2 - \delta\phi').
\end{aligned}$$

Observe que não estamos perturbando as outras componentes do tensor energia-momento. Isto é equivalente ao pressuposto de que o estresse anisotrópico perturbado dos fluidos restantes são insignificantes, o que é uma boa aproximação em grandes escalas.

REFERÊNCIAS

- [1] ABBOTT, B. P., ABBOTT, R., ABBOTT, T. D., ABERNATHY, M. R., ACERNESE, F., ACKLEY, K., ET AL. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.* *116* (Feb 2016), 061102.
- [2] ABBOTT, B. P., ET AL. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.* *116*, 24 (2016), 241103.
- [3] ABBOTT, B. P., ET AL. GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2. *Phys. Rev. Lett.* *118*, 22 (2017), 221101.
- [4] ADAMEK, J., CAMPO, D., AND NIEMEYER, J. C. Anisotropic Kantowski-Sachs Universe from Gravitational Tunneling and its Observational Signatures. *Phys. Rev. D* *82* (2010), 086006.
- [5] ADE, P. A. R., ET AL. A Measurement of the Cosmic Microwave Background B-Mode Polarization Power Spectrum at Sub-Degree Scales with POLARBEAR. *Astrophys. J.* *794*, 2 (2014), 171.
- [6] ADE, P. A. R., ET AL. Detection of *B*-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2. *Phys. Rev. Lett.* *112*, 24 (2014), 241101.
- [7] ADE, P. A. R., ET AL. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.* *594* (2016), A13.
- [8] ADE, P. A. R., ET AL. Planck 2015 results. XVI. Isotropy and statistics of the CMB. *Astron. Astrophys.* *594* (2016), A16.
- [9] BARROW, J. D. Cosmological limits on slightly skew stresses. *Phys. Rev. D* *55* (1997), 7451–7460.
- [10] BARROW, J. D., FERREIRA, P. G., AND SILK, J. Constraints on a primordial magnetic field. *Phys. Rev. Lett.* *78* (1997), 3610–3613.
- [11] BARROW, J. D., JUSZKIEWICZ, R., AND SONODA, D. H. Universal rotation - How large can it be? *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* *213* (1985), 917–943.
- [12] BARROW, J. D., AND MAARTENS, R. Anisotropic stresses in inhomogeneous universes. *Phys. Rev. D* *59* (1999), 043502.
- [13] BARROW, J. D., AND MAARTENS, R. Kaluza-Klein anisotropy in the CMB. *Phys. Lett. B* *532* (2002), 153–158.

- [14] BARTOLO, N., MATARRESE, S., PELOSO, M., AND RICCIARDONE, A. Anisotropy in solid inflation. *JCAP* 1308 (2013), 022.
- [15] BENNETT, C. L., ET AL. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results. *Astrophys. J. Suppl.* 208 (2013), 20.
- [16] BISWAS, T., NOTARI, A., AND VALKENBURG, W. Testing the void against cosmological data: Fitting CMB, BAO, SN and H_0 . *JCAP* 1011 (2010), 030.
- [17] BLANCO-PILLADO, J. J., AND SALEM, M. P. Observable effects of anisotropic bubble nucleation. *JCAP* 1007 (2010), 007.
- [18] BONGA, B., GUPT, B., AND YOKOMIZO, N. Tensor perturbations during inflation in a spatially closed Universe. *JCAP* 1705, 05 (2017), 021.
- [19] BULL, P., ET AL. Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead. *Phys. Dark Univ.* 12 (2016), 56–99.
- [20] CAMPANELLI, L., CEA, P., AND TEDESCO, L. Ellipsoidal universe can solve The CMB quadrupole problem. *Phys.Rev.Lett.* 97 (2006), 131302.
- [21] CARNEIRO, S., AND MENA MARUGÁN, G. A. Anisotropic cosmologies containing isotropic background radiation. *Phys.Rev. D* 64 (2001), 083502.
- [22] CARNEIRO, S., AND MENA MARUGÁN, G. A. An anisotropic cosmological model with isotropic background radiation. *Lect. Notes Phys.* 617 (2003), 302.
- [23] CLARKSON, C. A., AND BARRETT, R. Does the isotropy of the CMB imply a homogeneous universe? Some generalized EGS theorems. *Classical Quant. Grav.* 16 (1999), 3781–3794.
- [24] CLARKSON, C. A., AND BARRETT, R. K. Covariant perturbations of Schwarzschild black holes. *Class. Quant. Grav.* 20 (2003), 3855–3884.
- [25] COLEY, A. A., AND MCMANUS, D. J. On space-times admitting shear - free, irrotational, geodesic timelike congruences. *Class. Quant. Grav.* 11 (1994), 1261–1282.
- [26] DUNSBY, P. K. S., BASSETT, B. A. C. C., AND ELLIS, G. F. R. Covariant analysis of gravitational waves in a cosmological context. *Class. Quant. Grav.* 14 (1997), 1215–1222.
- [27] EHLERS, J., GEREN, P., AND SACHS, R. K. Isotropic solutions of the Einstein-Liouville equations. *J. Math. Phys.* 9 (1968), 1344.
- [28] ENDLICH, S., NICOLIS, A., AND WANG, J. Solid Inflation. *JCAP* 1310 (2013), 011.

- [29] GARCÍA-BELLIDO, J., AND HAUGBOELLE, T. Confronting Lemaitre-Tolman-Bondi models with observational cosmology. *JCAP 0804* (2008), 003.
- [30] GÜMRÜKÇÜOĞLU, A., CONTALDI, C. R., AND PELOSO, M. CMB anomalies from relic anisotropy. 1641–1646.
- [31] HANSON, D., ET AL. Detection of B-mode Polarization in the Cosmic Microwave Background with Data from the South Pole Telescope. *Phys. Rev. Lett.* *111*, 14 (2013), 141301.
- [32] HAWKING, S. W. Perturbations of an expanding universe. *Astrophys. J.* *145* (1966), 544–554.
- [33] HOGAN, P. A., AND ELLIS, G. F. R. Propagation of information by electromagnetic and gravitational waves in cosmology. *Classical and Quantum Gravity* *14*, 1A (1997), A171.
- [34] HOGG, D. W., EISENSTEIN, D. J., BLANTON, M. R., BAHCALL, N. A., BRINKMANN, J., GUNN, J. E., AND SCHNEIDER, D. P. Cosmic homogeneity demonstrated with luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal* *624*, 1 (2005), 54.
- [35] KOIVISTO, T. S., MOTA, D. F., QUARTIN, M., AND ZLOSNIK, T. G. On the possibility of anisotropic curvature in cosmology. *Phys.Rev. D* *83* (2011), 023509.
- [36] MAARTENS, R., ELLIS, G. F., AND STOEGER, WILLIAM R., S. Limits on anisotropy and inhomogeneity from the cosmic background radiation. *Phys.Rev. D* *51* (1995), 1525.
- [37] MAARTENS, R., ELLIS, G. F., AND STOEGER, WILLIAM R., S. Anisotropy and inhomogeneity of the universe from $\Delta(T) / T$. *Astron.Astrophys.* *309* (1996), L7.
- [38] MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, E., AND SANZ, J. $\delta t/t$ and the isotropy of the universe. *Astron.Astrophys.* *300* (1995), 346.
- [39] MCMANUS, D. J., AND COLEY, A. A. Shear - free irrotational, geodesic, anisotropic fluid cosmologies. *Class. Quant. Grav.* *11* (1994), 2045–2058.
- [40] MIMOSO, J. P., AND CRAWFORD, P. Shear-free anisotropic cosmological models. *Classical Quant. Grav.* *10* (1993), 315.
- [41] MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, Oxford, 2005.
- [42] MUKHANOV, V., AND WINITZKI, S. *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [43] MUKHANOV, V. F., FELDMAN, H. A., AND BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions. *Phys. Rept.* *215* (1992), 203.

- [44] NADATHUR, S., AND SARKAR, S. Reconciling the local void with the CMB. *Phys.Rev. D83* (2011), 063506.
- [45] OSANO, B., PITROU, C., DUNSBY, P., UZAN, J.-P., AND CLARKSON, C. Gravitational waves generated by second order effects during inflation. *JCAP 0704* (2007), 003.
- [46] PEREIRA, T. S., CARNEIRO, S., AND MARUGÁN, G. A. M. Inflationary Perturbations in Anisotropic, Shear-Free Universes. *JCAP 1205* (2012), 040.
- [47] PEREIRA, T. S., MARUGÁN, G. A. M., AND CARNEIRO, S. Cosmological Signatures of Anisotropic Spatial Curvature. *JCAP 1507* (2015), 029.
- [48] PEREIRA, T. S., PITROU, C., AND UZAN, J.-P. Theory of cosmological perturbations in an anisotropic universe. *JCAP 0709* (2007), 006.
- [49] PETER, P., AND UZAN, J.-P. *Primordial Cosmology* . Oxford Graduate Texts. Oxford Univ. Press, Oxford, 2009.
- [50] PITROU, C., PEREIRA, T. S., AND UZAN, J.-P. Predictions from an anisotropic inflationary era. *JCAP 0804* (2008), 004.
- [51] PONTZEN, A., AND CHALLINOR, A. Bianchi model CMB polarization and its implications for CMB anomalies. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 380* (2007), 1387.
- [52] RODRIGUES, D. C. Anisotropic cosmological constant and the CMB quadrupole anomaly. *Phys.Rev. D77* (2008), 023534.
- [53] STEWART, J. M. Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models. *Classical Quant. Grav. 7* (1990), 1169.
- [54] STEWART, J. M., AND WALKER, M. Perturbations of spacetimes in general relativity. *Proc. Roy. Soc. Lond. A341* (1974), 49.
- [55] THORSRUD, M. *Balancing Anisotropic Curvature with Gauge Fields in a Class of Shear-Free Cosmological Models*, to appear (2017).
- [56] YOO, C.-M., NAKAO, K.-I., AND SASAKI, M. CMB observations in LTB universes: Part I: Matching peak positions in the CMB spectrum. *JCAP 1007* (2010), 012.