



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

LUIS GUSTAVO TOMAZ SILVA

A inflação do gás de Chaplygin generalizado com  
viscosidade

---

Londrina  
2018

LUIS GUSTAVO TOMAZ SILVA

**A inflação do gás de Chaplygin generalizado com  
viscosidade**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira  
Coorientador: Prof. Dr. Sergei Odintsov  
Coorientador: Prof. Dr. Emilio Elizalde

Londrina  
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Silva, Luis Gustavo Tomaz.

A inflação do gás de Chaplygin generalizado com viscosidade / Luis Gustavo Tomaz Silva. - Londrina, 2018.  
51 f. : il.

Orientador: Thiago dos Santos Pereira.

Coorientador: Sergei Odintsov.

Coorientador: Emilio Elizalde.

Tese (Doutorado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

Inclui bibliografia.

1. Energia Escura - Tese. 2. Inflação - Tese. 3. Modelos de fluido - Tese. I. Pereira, Thiago dos Santos. II. Odintsov, Sergei. III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título.

LUIS GUSTAVO TOMAZ SILVA

**A inflação do gás de Chaplygin generalizado com  
viscosidade**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira  
UEL – Londrina – PR

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Paula Fernanda Bienzobaz  
UEL – Londrina – PR

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Christiane Frigério Martins  
UEL – Londrina – PR

---

Prof. Dr. Antonio Edson Gonçalves  
UEL – Londrina – PR

---

Prof. Dr. Mario Cesar Baldiotti  
UEL – Londrina – PR

Londrina, 01 de outubro de 2018.



*A Deus e à minha família.*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, ao Prof. Andrey Bytsenko por aceitar ser meu orientador quando o orientador original não pode. Tenho que agradecer-lo também por ter me apresentado os Professores Sergei Odintsov e Emilio Elizalde do Institute of Space Sciences da Espanha, que gentilmente aceitaram me orientar no período de 2015/2016 que passei na Espanha. Muita gratidão tenho para com os professores da Espanha pois após a aposentadoria do Prof. Bytsenko por motivos médicos, eles continuaram a me co-orientar remotamente. Não posso deixar de agradecer também o Prof. Thiago Pereira, que participou de grande parte da minha formação. Orientou-me no mestrado e, na saída do Prof. Bytsenko, assumiu como meu orientador no final do doutorado.

Agradeço às Professoras que integraram a banca da minha qualificação, Dra. Paula Bienzobaz e Christiane Martins. As observações feitas foram de grande ajuda para a composição final da presente tese.

Aos amigos feitos no período do mestrado e que até hoje perderam, Rodrigo Luna, Flavio Franchello, Antonio Carlos e Rodrigo Nagata. A eles agradeço pela companhia, amizade, ajuda e incentivo durante todo o período de mestrado e doutorado.

Ao apoio da fundação CAPES com financiamento do doutorado e do estágio no exterior.

*What we learn from experience depends on the kind of philosophy we bring to experience. It is therefore useless to appeal to experience before we settle, as well as we can, the philosophical question. Similarly the result of our historical enquiries will depend on the philosophical views we have been holding before we even began to look at evidence. The philosophical question must therefore come first.*

C. S. Lewis,

SILVA, L. G. T. **A inflação do gás de Chaplygin generalizado com viscosidade**. 2018. 50 f. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, 2018.

## RESUMO

A proposta do trabalho é analisar um modelo geral de um fluido imperfeito para reproduzir a aceleração cósmica observada atualmente. O modelo de um fluido do tipo gás de Chaplygin generalizado com viscosidade foi estudado. Os parâmetros do modelo inflacionário foram ajustados a fim de reproduzir os dados mais recentes da sonda Planck. A influência do termo de gás de Chaplygin no modelo é discutida. As condições de rolagem lenta e o teste para a saída do estágio inflacionário do universo foram aplicados para determinar os intervalos admissíveis dos parâmetros do fluido.

**Palavras-chave:** Matéria escura; Inflação; Modelos de fluido

SILVA, L. G. T. **A generalized Chaplygin gas Inflation with viscosity.** 2018. 50 p. Thesis (Doctoral in Physics) – State University of Londrina, 2018.

## **ABSTRACT**

This work intends to analyze a general model of an imperfect fluid to reproduce the cosmic acceleration observed today. The generalized Chaplygin gas with viscosity model was studied. The inflationary model parameters were adjusted in order to reproduce the most recent data from the Planck probe. The influence of the Chaplygin gas term on the model is discussed. The slow roll condition and the exit from inflation were applied to determine the admissible range of the fluid parameters.

**Key words:** Dark Energy; Inflation; Fluid models

## SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 A cosmologia da matéria e da energia escura</b>	<b>11</b>
1.1 A evolução cósmica . . . . .	11
1.1.1 A dinâmica da expansão . . . . .	13
<b>2 Equação de estado da energia escura</b>	<b>17</b>
2.1 Equação de estado de um fluido não homogêneo . . . . .	17
2.1.1 Modelos de fluido para a energia escura . . . . .	19
<b>3 A Inflação e seus observáveis</b>	<b>23</b>
3.1 Inflação . . . . .	23
3.1.1 A aproximação de rolagem lenta . . . . .	24
3.1.2 Os observáveis dos modelos inflacionários . . . . .	25
3.2 Reconstrução dos observáveis dos modelos inflacionários em função das quantidades do modelo de fluido . . . . .	26
<b>4 Fluido viscoso com gás de Chaplygin generalizado</b>	<b>29</b>
4.1 Análise dos parâmetros do fluido segundo o modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	29
4.1.1 Os parâmetros de rolagem lenta . . . . .	30
4.1.2 Os observáveis dos modelos inflacionários . . . . .	34
4.1.3 Término da inflação . . . . .	36
4.2 Comparação com os últimos modelos estudados . . . . .	40
<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>41</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>42</b>
<b>APÊNDICES</b>	<b>46</b>
<b>A Componentes da Equação de Einstein</b>	<b>47</b>
<b>B Reconstrução do campo escalar</b>	<b>49</b>

# Introdução

O universo como é compreendido hoje é consequência de séculos de observação e contemplação. Embora os primeiros investigadores não dispunham do aparato que a comunidade científica atual goza, não podemos subestimar seus esforços para compreender o universo no qual vivemos. Os gregos, há mais de 500 anos A.C. já se preocupavam em compreender o universo, sua estrutura e o que o permeia, valendo-se do único aparato possível naquela época, a contemplação filosófica.

O avanço tecnológico tornou possível fazer inferências e testar teorias de um universo cada vez mais distante do que era observado séculos atrás. Nas últimas décadas o avanço nos aparatos observacionais foi tanto que hoje há um modelo que se propõe a explicar a evolução do universo desde o Big Bang<sup>1</sup> até os dias atuais. Nesse *Modelo Cosmológico Padrão* o universo expandiu de um aglomerado extremamente quente e denso de partículas elementares com distribuição isotrópica. Se no início a alta densidade não permitia a radiação viajar livremente pelo universo, a expansão, e o conseqüente resfriamento, do universo permitiram a formação de átomos e a radiação é liberada para percorrer o espaço livremente. Essa Radiação Cósmica de Fundo (RCF) carrega a impressão do universo primordial. O universo continua a expandir e a instabilidade gravitacional causa a formação de estruturas observadas no céu como planetas, estrelas, galáxias, etc.

Observações feitas dos corpos celestes como as Supernovas do tipo Ia, a radiação de micro-ondas cósmicas de fundo e as estruturas de grande escala corroboraram para formular o modelo cosmológico apresentado acima, onde o universo possui uma geometria espacial plana e distribuição homogênea de matéria em grandes escalas<sup>2</sup>, expandindo aceleradamente evoluindo segundo a Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Entretanto, nesse modelo somente algo em torno de 5 por cento de todo o conteúdo energético do universo é matéria ordinária. Aproximadamente 25 por cento é matéria escura fria e os 70 por cento restantes é energia escura introduzida na parte material da equação de Einstein para reproduzir o efeito da aceleração cósmica [1]. Nesse contexto, a constante cosmológica - um fluido de pressão negativa caracterizado pela letra  $\Lambda$  - desempenha o papel da energia escura no universo atual. Devido à essas características o modelo recebe o nome de modelo  $\Lambda$ CDM<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup>O Big Bang é a teoria que descreve a origem do universo.

<sup>2</sup>Escala maior que 100 Mpc (1 Mpc  $\simeq 3,08 \times 10^{24}$  cm)

<sup>3</sup>Cold Dark Matter, em inglês

Embora o modelo se adeque muito bem aos últimos dados cosmológicos fornecidos pela sonda Planck [1, 2], ainda existem aspectos a serem melhor compreendidos. Para explicar a expansão acelerada duas classes de teorias são comumente utilizadas. As teorias de gravidade modificada, onde a parte geométrica da equação de Einstein é alterada e a aceleração cósmica é prevista sem a introdução de fluidos exóticos [3–5]. A outra consiste na introdução da energia escura como um fluido sem alterar a equação de Einstein. Entretanto a origem dessa energia ainda é um mistério e portanto um objeto de muito interesse para a comunidade científica. Nesse contexto dois tipos de abordagens são utilizadas. Uma consiste na descrição da ação na teoria do campo escalar onde um campo minimamente acoplado à gravidade e auto-interagente com o potencial é introduzido [6]. A outra considera a matéria e energia escura como aspectos de um mesmo fluido [7]. Nessa tese a última abordagem foi adotada, ou seja, uma equação de estado exótica foi utilizada considerando os fluidos mais influentes nessa abordagem, o gás de Chaplygin [8–20] e o fluido viscoso [21–30].

O gás de Chaplygin foi introduzido no contexto da aerodinâmica para descrever as forças que atuam na asa de um avião [31]. Em seguida começou a receber atenção na cosmologia por ser capaz de reproduzir, no passado, o comportamento da matéria escura e, no presente, o comportamento da energia escura [8, 9, 12]. Em seguida o gás foi generalizado a fim de descrever uma maior quantidade de modelos possíveis para a expansão acelerada do universo [10, 11, 13–15]. Ultimamente modificações estão sendo sugeridas para reproduzir com cada vez mais fidelidade as condições de um universo em expansão acelerada [16–20].

Por outro lado um fluido viscoso é um fluido mais realista do que o fluido perfeito adotado pelo Modelo Cosmológico Padrão e é capaz de apresentar diversos cenários futuros do universo [22, 23, 27]. Além disso, a viscosidade no fluido mostrou-se compatível com os modelos inflacionários e os dados cosmológicos fornecidos pela sonda Planck [21, 24–26, 29, 30]. Naturalmente o gás de Chaplygin viscoso é um fluido que está sendo considerado em pesquisas recentes para modelos de energia escura [32–35].

Nessa tese será analisado o gás de Chaplygin generalizado considerando a viscosidade do fluido. Análise essa que está sintetizada Ref. [36]. Para restringir os parâmetros do modelo segundo os dados cosmológicos mais recentes da observados pela sonda Planck [1, 2] os dois principais observáveis dos modelos inflacionários, a saber, o índice escalar espectral  $n_s$  e a razão tensor-escalar da densidade de flutuações  $r$ , foram utilizados na representação dos modelos de fluido, assim como apresentado na Ref. [37].

A presente tese é iniciada apresentando a evolução do universo segundo o modelo  $\Lambda$ CDM no Cap. 1. Em seguida, no Cap. 2, a equação de estado



e os principais modelos de fluido para a energia escura são discutidos. Uma breve introdução da teoria do universo inflacionário e a reconstrução dos observáveis dos modelos inflacionários estão expostos no Cap. 3. Finalmente, no Cap. 4 o fluido do tipo gás de Chaplygin generalizado com termo de viscosidade é analisado e seus parâmetros são restringidos a fim de reproduzir os dados observados.

# Capítulo 1

## A cosmologia da matéria e da energia escura

### 1.1 A evolução cósmica

As observações cosmológicas realizadas nas últimas décadas indicam que o universo observável ( $\sim 3000$  Mpc) é homogêneo e isotrópico. (Em escalas menores que 100 Mpc encontra-se um espaço não homogêneo com galáxias e aglomerados de galáxias). Essa é uma das mais importantes características do universo, pois garante que as medidas realizadas na Terra podem representar o universo como um todo. Homogeneidade significa que as condições físicas são as mesmas em qualquer hipersuperfície escolhida, e isotropia significa que as condições físicas são idênticas em todas as direções de um ponto de tal hipersuperfície. Além disso, isotropia em todos os pontos implica em homogeneidade [38].

Além de ser homogêneo e isotrópico, o universo também está em expansão. Isso quer dizer que a distância física,  $\mathbf{s}$ , entre dois objetos aumenta de acordo com o fator de escala  $a(t)$  com o passar do tempo, ou seja

$$\mathbf{s} = a(t)\mathbf{x} . \quad (1.1)$$

Aqui a variável  $\mathbf{x}$  é conhecida como distância comóvel. As coordenadas comóveis são tais que não são afetadas pela expansão, conseqüentemente elas são temporalmente independentes. Então derivando a Eq. (1.1) com respeito ao tempo a lei de Hubble é obtida

$$\dot{\mathbf{s}} = H(t)\mathbf{x} , \quad H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} . \quad (1.2)$$

Essa lei afirma que a velocidade de recessão entre as galáxias é proporcional às distâncias entre elas. A Eq. (1.2) é válida em escalas maiores que 100 Mpc onde o universo é homogêneo e isotrópico e preserva tais características do espaço. Em escalas menores, onde a matéria é concentrada, o movimento é dominado pelo campo gravitacional que resulta, por exemplo, no movimento intrínseco em vez da expansão de Hubble. Embora inicialmente o parâmetro tenha sido proposto

como uma constante, hoje sabe-se que é dependente do tempo e atualmente vale  $H_0 = 67,8 \pm 0,9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [1]. (O índice “0” refere-se ao valor da quantidade hoje).

A métrica que preserva a homogeneidade e isotropia do espaço em evolução temporal é a de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.3)$$

onde  $d\Omega^2$  é a métrica da esfera bidimensional de raio unitário e  $K$  é a curvatura das hipersuperfícies de tempo constante que pode assumir valores,  $K = 1$  para um universo fechado,  $K = 0$  para o plano e  $K = -1$  no caso de universo aberto. Uma vez que os dados observacionais indicam que o universo possui geometria espacialmente plana [1], a métrica adotada é a seguinte

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j, \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde  $x \equiv (t, x, y, z)$  são as coordenadas do evento,  $\delta_{ij}$  é a métrica tridimensional de curvatura nula<sup>1</sup> e  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo.

O *Modelo Cosmológico Padrão*, também conhecido como Modelo  $\Lambda$ CDM<sup>2</sup>, é um muito modelo consistente com as observações cosmológicas [1]. O modelo assume que o universo evolui segundo a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, onde as variáveis dinâmicas que caracterizam o campo gravitacional são as componentes da métrica  $g_{\mu\nu}$  (Eq. (1.4)) que obedecem as equações de Einstein [38]

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad \kappa^2 \equiv 8\pi G. \quad (1.5)$$

Na Eq. (1.5)  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  é o tensor de Einstein expresso em termos do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e do escalar de curvatura  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ .

Em grandes escalas todo o conteúdo energético do universo pode ser aproximado a um fluido perfeito que é descrito pelo tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)v_\mu v_\nu + P g_{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

Uma vez que nas escalas de validade do modelo as interações entres os diferentes fluidos presentes no espaço podem ser desprezadas, a densidade de energia  $\rho$  e a

<sup>1</sup>Observe que nesse caso a métrica se identifica com o delta de Kronecker.

<sup>2</sup>Sigla em inglês para Lambda Cold Dark Matter.

pressão  $P$  é a soma das densidades e pressões dos fluidos,

$$\rho = \sum_i \rho_i, \quad P \equiv \sum_i P_i, \quad (1.7)$$

com  $i = \{\text{radiação, matéria, constante cosmológica}\}$  e  $v_\mu = (-1, 0, 0, 0)$  é a quadri-velocidade no referencial de repouso do fluido. As componentes da equação de Einstein, bem como seus resultados respeitando as características do universo consideradas nesse trabalho, estão apresentadas no Apêndice A.

### 1.1.1 A dinâmica da expansão

As equações de Friedmann derivam das equações de Einstein (Eq. (1.5)) aplicadas à métrica (1.4) e com elas pode-se determinar duas funções substanciais para o estudo da evolução do universo, a saber, o fator de escala  $a(t)$ , e a densidade de energia  $\rho(t)$ . Usando os resultados apresentados no Apêndice A as equações de Einstein fornecem

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho, \quad (1.8)$$

$$-(2\dot{H} + 3H^2) = \kappa^2 P, \quad (1.9)$$

que combinando fica

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}(\rho + P). \quad (1.10)$$

A Eq. (1.10) junto com a Eq. (1.8) são as conhecidas equações de Friedmann. Derivando a Eq. (1.8) com respeito ao tempo e substituindo na Eq. (1.10) resulta na equação de continuidade para o fluido

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (1.11)$$

Essa equação também é resultado da lei de conservação do tensor de energia-momento, ou seja,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , para  $\nu = 0$  [39]. Essa equação de continuidade pode ser resolvida usando uma equação de estado<sup>3</sup> que relaciona a densidade de energia e a pressão da seguinte forma

$$P = \omega\rho, \quad (1.12)$$

onde  $\omega$  é conhecida como parâmetro de estado e seu valor depende das características do fluido. Com isso, a solução da equação de continuidade para qualquer

---

<sup>3</sup>Uma equação de estado expressa parâmetros intensivos em termos de parâmetros extensivos independentes [40].

valor constante de  $\omega$  fica

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (1.13)$$

onde  $a_0 = 1$  é a normalização feita para o fator de escala hoje.

### Os três estágios da evolução cósmica

Se as observações que resultaram na lei de Hubble mostram que as galáxias estão se afastando umas das outras, então uma conclusão bem plausível é que todo o conteúdo do universo estava concentrado no passado distante. Segundo a teoria do Big Bang, o universo primordial era extremamente quente e denso a ponto de não permitir que a radiação viajasse livre pelo espaço. A temperatura era tão elevada que as forças nucleares não era capaz de unir as partículas e o universo era permeado por uma “sopa” de partículas elementares que impedia a propagação da radiação, que era o fluido dominante. A evolução do universo é caracterizada pela sua expansão, o que causa seu resfriamento, e quando chega a uma temperatura de aproximadamente 0,05 Mev os núcleos mais leve, como os de Hélio, começam a se formar. Quando o universo atinge a temperatura próxima de 1 eV átomos de hidrogênio são formados e os fótons que estavam em equilíbrio térmico conseguem finalmente viajar livres pelo espaço formando a Radiação Cósmica de Fundo (RCF). Detectável até os dias atuais essa radiação é uma impressão do estado do universo primordial [38].

Entretanto observações recentes mostraram que o universo não está apenas expandindo, mas expandindo aceleradamente. A maneira mais comum de reproduzir essa característica é construir um modelo onde o parâmetro de Hubble é constante [41], pois, a própria definição do parâmetro de Hubble Eq. (1.2) fornece

$$a(t) = a_c e^{H_c t}, \quad (1.14)$$

e o universo expande exponencialmente e é conhecido como universo de de Sitter. Além disso a Eq. (1.9) fornece  $P = -\rho$ , ou seja, a pressão do fluido responsável pela expansão acelerada tem que ter pressão negativa,  $\omega = -1$  e substituindo na equação de continuidade (1.11) vê-se diretamente que a densidade de energia de tal fluido também é constante com o tempo. Esse fluido hipotético e chamado de constante cosmológica com densidade  $\rho_\Lambda = \Lambda/\kappa^2$  (Veja a Eq. (1.8)).

As quantidades referentes a cada tipo de fluido ocupante do universo são mais fáceis de serem visualizadas quando representadas em termos da densidade crítica hoje<sup>4</sup> dada por  $\rho_{cr,0} \equiv 3H_0^2/\kappa^2$ , e a primeira equação de Fried-

---

<sup>4</sup>Em linhas gerais, a densidade crítica é a densidade necessária para que o universo tenha

mann (Eq. (1.8)) fornece

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1, \quad \Omega_i \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{cr,0}}. \quad (1.15)$$

É um resultado conhecido da Mecânica Estatística que para um gás de fótons a pressão equivale a um terço da densidade de energia [42], ou seja,  $\omega_r = 1/3$ . A matéria<sup>5</sup> é um fluido que não exerce pressão,  $\omega_m = 0$ , e a constante cosmológica exige que  $\omega_\Lambda = -1$ . Substituindo esses parâmetros na Eq. (1.13) a densidade fracionária de cada fluido é obtida

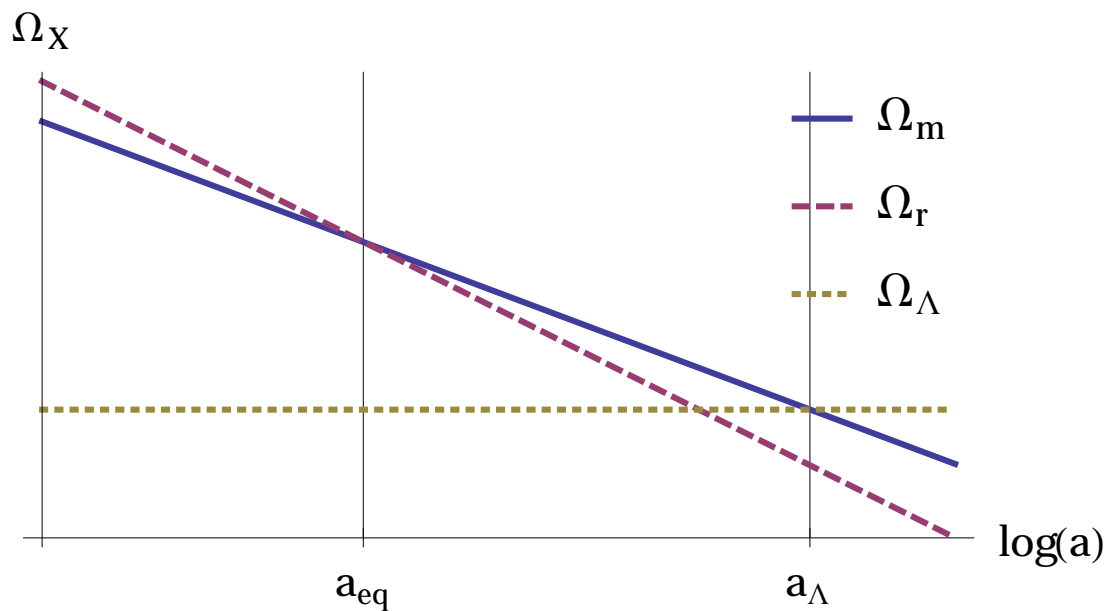
$$\Omega_i(a) = \begin{cases} \Omega_{r,0}/a^4 & \text{para a radiação,} \\ \Omega_{m,0}/a^3 & \text{para a matéria,} \\ \Lambda/(\kappa^2 \rho_{cr,0}) = \text{cte.} & \text{para a constante cosmológica.} \end{cases} \quad (1.16)$$

Essas relações ilustram as diferentes eras do universo, caracterizadas pelo domínio de diferentes fluidos conforme o fator de escala evolui. Com o avanço do tempo, o fator de escala aumenta e a densidade de energia da matéria se torna dominante sobre os outros fluidos a partir do instante de igualdade entre matéria e radiação  $a_{eq}$ . Mas a densidade da matéria também é decrescente, e o universo evolui até o momento de igualdade entre matéria e energia escura  $a_\Lambda$  e, em seguida, a constante cosmológica prevalece e o universo entra no estágio de expansão acelerada (Fig. 1.1).

---

uma geometria de curvatura nula.

<sup>5</sup>O termo matéria aqui refere-se tanto à matéria bariônica quanto à matéria escura fria, uma vez que ambas tem pressão nula.



**Figura 1.1** – Os três estágios da evolução do universo é devido aos diferentes fluidos que prevalece na evolução do universo. Primeiro a radiação (em linha tracejada), depois do momento de igualdade entre radiação e matéria,  $a_{eq}$ , a matéria (em linha contínua) se torna dominante até se tornar inferior que a constante cosmológica (em linha pontilhada) a partir de  $a_\Lambda$ .

# Capítulo 2

## Equação de estado da energia escura

### 2.1 Equação de estado de um fluido não homogêneo

Embora o universo de de Sitter forneça uma solução exata no background de FLRW e apresente a expansão acelerada observada nos dados cosmológicos (Eq. (1.14)), as observações mostram que o parâmetro de estado da energia escura pode oscilar em torno do valor  $-1$  [1]. Frente a esse comportamento, uma abordagem bastante utilizada, e que será empregada neste trabalho, é modificar a equação de estado da energia escura de tal maneira que ela reproduza o universo dominado por matéria e evolua até descrever o universo dominado pela energia escura [21, 26]. Para realizar tal abordagem é necessário considerar um fluido mais geral do que o considerado no modelo  $\Lambda$ CDM, ou seja um fluido imperfeito.

Considerando a temperatura constante, o tensor de energia-momento de um fluido imperfeito é dado por [23, 38]

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu + (P - G(H))h_{\mu\nu} - 2\eta\sigma_{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

onde  $G(H)$  é uma função genérica de  $H$  e representa a viscosidade de volume,  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + v_\mu v_\nu$  é o tensor de projeção,  $\eta$  é o coeficiente do tensor de cisalhamento  $\sigma_{\mu\nu}$ . Entretanto serão considerados somente fluidos isotrópicos, o que significa que  $\eta = 0$  e o tensor (2.1) fica

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu + (P - G(H))h_{\mu\nu} , \quad (2.2)$$

onde

$$P_{ef} = P - G(H) , \quad (2.3)$$

é a pressão efetiva. Aqui, a fim de realizar correções em torno da energia de vácuo ( $P = -\rho$ ) introduz-se uma função arbitrária  $F(\rho)$  de forma que a pressão efetiva



pode ser escrita como

$$P_{ef} = -\rho + F(\rho) - G(H) . \quad (2.4)$$

Combinando as Eqs (2.4) e (1.10) nota-se que a função  $G(H)$  pode não só depender do parâmetro de Hubble, mas também de suas derivadas,

$$G(H) = F\left(\frac{3H^2}{\kappa^2}\right) - \frac{2}{\kappa^2}\dot{H} . \quad (2.5)$$

Por outro lado, usando a pressão dada pela Eq. (2.4) na equação de continuidade (1.11), obtêm-se

$$\dot{\rho} + 3H(F(\rho) - G(H)) = 0 , \quad (2.6)$$

que pode ser escrita unicamente em termos da densidade de energia usando a Equação de Friedmann (1.8),

$$\dot{\rho} + 3\kappa\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left(F(\rho) - G\left(\kappa\sqrt{\frac{\rho}{3}}\right)\right) = 0 . \quad (2.7)$$

Enfim, tanto a função  $F(\rho)$  pode ser expressa em termos do parâmetro de Hubble, quanto a função  $G(H)$  pode ser expressa em termos da densidade de energia devido as Equações de Friedmann. Então, sem perda de generalidade, podemos chamar  $f(\rho) = F(\rho) - G(H)$  e trabalhar com uma equação simplificada da pressão

$$P = -\rho + f(\rho) . \quad (2.8)$$

Se o parâmetro de estado é dado pela razão entre a pressão e energia (Eq. (1.12)), para a energia escura a Eq. (2.8) fornece

$$\omega = -1 + \frac{f(\rho)}{\rho} , \quad (2.9)$$

e a razão  $f(\rho)/\rho$  irá regular o desvio do modelo em relação à constante cosmológica.

Usando a Eq. (2.8) na Eq. (1.11) a equação do fator de escala com respeito à densidade e energia pode ser obtida

$$\int \frac{da}{a} = -\frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{f(\rho)} . \quad (2.10)$$

A equação de continuidade (1.11) fornece a equação para o tempo,

$$\int dt = -\frac{1}{\kappa\sqrt{3}} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}f(\rho)} . \quad (2.11)$$

Essas duas últimas equações fornecem o principal comportamento do modelo investigado, como a maneira que o universo evolui com o fator de escala (Eq. (2.10)) e possíveis singularidades que podem ocorrer em tempos futuros ( $t \rightarrow \infty$ ) ou remotos ( $t \rightarrow 0$ ) (Eq. (2.11)).

### 2.1.1 Modelos de fluido para a energia escura

Vamos agora investigar alguns modelos vigentes para a energia escura que ajudaram a construir o modelo analisado nesse trabalho.

#### Expansão em torno da equação de estado de vácuo

A alteração mais simples que se pode fazer do modelo original é a expansão em torno da própria equação de estado da constante cosmológica, conhecida também como estado de vácuo (Eq. (1.12)), dada por [23, 43–45]

$$P = -\rho - A\rho^\alpha, \quad (2.12)$$

onde  $A$  e  $\alpha$  são constantes. Aplicando na Eq. (2.10) e resolvendo para a densidade de energia  $\rho$  encontra-se

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + 3\tilde{A}(1 - \alpha) \ln \frac{a}{a_0}\right)^{1/(1-\alpha)}, \quad (2.13)$$

onde  $\tilde{A} \equiv A\rho_0^{\alpha-1}$ . Aplicando a Eq. (2.12) na equação de estado (2.8) o parâmetro  $\omega$  em função do fator de escala é obtido

$$\omega = -1 - \frac{\tilde{A}}{(1 + 3\tilde{A}(1 - \alpha) \ln \frac{a}{a_0})}. \quad (2.14)$$

Fazendo  $a = a_0$  observe que o valor do parâmetro  $\omega$ , se ele será maior, menor ou igual a  $-1$ , dependerá do parâmetro  $A$  do modelo. Mais especificamente, a quantidade  $\tilde{A}$  determina o comportamento que a densidade de energia escura tem com a expansão do universo [43].

#### O gás de Chaplygin generalizado

Outra equação de estado utilizada no estudo de modelos de fluidos é a equação de estado do gás de Chaplygin originalmente proposta no contexto da aerodinâmica [31]. O modelo ganhou atenção na cosmologia, pois viu-se que é possível aplicá-lo na cosmologia de FLRW e obter a transição de um universo dominado por poeira, com fluido de pressão nula, para o universo de de Sitter,

com expansão acelerada, sem hipóteses *ad hoc* [8–18].

A equação de estado do fluido de Chaplygin generalizada é dada por

$$P = -\frac{B}{\rho^\beta}, \quad (2.15)$$

onde  $B$  e  $\beta$  são constantes positivas e o modelo original é restaurado quando  $\beta = 1$ . Aplicando o gás de Chaplygin (2.15) na equação de continuidade (1.11) encontra-se

$$\rho = \left( B + \frac{\tilde{B}}{a^{3(1+\beta)}} \right)^{1/(1+\beta)}, \quad (2.16)$$

onde  $\tilde{B}$  é uma constante de integração. O comportamento assintótico da Eq. (2.16) fornece

$$\rho \sim \tilde{B}/a^3, \quad \text{para } a \ll 1, \quad (2.17)$$

$$\rho \sim B^{1/(1+\beta)}, \quad \text{para } a \gg 1. \quad (2.18)$$

Isso significa que no universo primordial ( $a \ll 1$ ), quando a matéria escura dominava sobre as outras espécies de fluido, o gás de Chaplygin apresenta um comportamento tal que  $\rho \propto a^{-3}$ . E conforme o universo evolui, e o fator de escala aumenta, a energia escura se torna dominante e a densidade de energia se aproxima de uma constante, como no caso do universo de de Sitter.

O modelo de gás de Chaplygin pode ser estendido para obter mais possibilidades de comportamento da energia escura [16] de tal forma que sua pressão total é reescrita

$$P = P_\Lambda + P_{\text{gC}}, \quad (2.19)$$

onde  $P_\Lambda = -\rho$  é a pressão da constante cosmológica e  $P_{\text{gC}} = -B\rho^{-\beta}$  é termo de gás de Chaplygin que pode ser entendido como um termo de perturbação sobre o estado de vácuo, assim como feito na Eq. (2.12).

O parâmetro  $\beta$  na Eq. (2.19) pode ser restringido aplicando a estabilidade do fluido frente a perturbações de pressão, e aplicando também a causalidade. Por estabilidade entende-se que velocidade do som no fluido  $c_s^2$  seja positiva, ou seja,  $c_s^2 \equiv \partial P_{\text{gC}}/\partial \rho \geq 0$ . E por causalidade, essa velocidade deve ser menor que a velocidade da luz, definida como uma unidade no sistema de unidades naturais, então  $c_s^2 \leq 1$ . A primeira condição fornece<sup>1</sup>

$$\frac{\beta B}{\rho^{\beta+1}} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \beta > 0. \quad (2.20)$$

---

<sup>1</sup>O valor  $\beta = 0$  é excluído do intervalo, pois nesse caso a pressão seria constante e não evoluiria com a expansão temporal do universo.

Já a causalidade induz que

$$\frac{\beta B}{\rho^{\beta+1}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \beta \leq 1, \quad (2.21)$$

onde a Eq. (2.18) foi utilizada. Portanto o intervalo  $0 < \beta \leq 1$  garante que o modelo fique dentro do domínio da cosmologia padrão. Ainda, na Ref. [10] foi mostrado que as flutuações de densidade de energia só fazem sentido dentro desse intervalo.

Comparando a Eq. (2.19) com a Eq. (2.8) conclui-se que  $f(\rho) = -B\rho^{-\beta}$ . Entretanto, ainda mais termos podem ser adicionados a fim de proporcionar os ajustes necessários para descrever o universo primordial, bem como sugerido na Ref. [20].

### Fluido viscoso

Os dois tipos de fluidos citados anteriormente são exemplos de fluido perfeito. Entretanto fluidos imperfeitos podem ser mais realistas e reproduzir aspectos do universo inflacionário com mais naturalidade. Uma classe de fluido imperfeito muito utilizada é a de fluidos viscosos dependentes do tempo caracterizados por um termo proporcional do parâmetro de Hubble ( $\sim H^\gamma$ ), ou suas derivadas.

O modelo de fluido viscoso, assim como o gás de Chaplygin, é capaz de evoluir o universo da matéria para a energia escura assumindo a equação de estado

$$P = -\rho - A\rho^\alpha + \zeta H^\gamma, \quad (2.22)$$

onde os parâmetros do modelo  $A$ ,  $\zeta$ ,  $\alpha$ , e  $\gamma$  são constantes positivas. Usando a equação de Friedmann (1.8) a pressão pode ser escrita unicamente em termos da densidade de energia,

$$P = -\rho - A\rho^\alpha + \tilde{\zeta}\rho^{\gamma/2}, \quad \tilde{\zeta} \equiv \zeta \frac{\kappa}{\sqrt{3}}, \quad (2.23)$$

Como exemplo, vamos escolher os valores  $\alpha = \gamma = 1$ . Pela Eq. (2.8) nesse caso a Eq. (2.10) fornece a seguinte solução para  $\rho$ ,

$$\rho = \frac{a^{-3A/2} + \tilde{\zeta}}{A}. \quad (2.24)$$

Supondo  $A = 2$ , o resultado semelhante ao fornecido pelo gás de Chaplygin

(Eqs. (2.17) e (2.18)) é obtido,

$$\rho \sim (a^{-3} + \tilde{\zeta})/2, \quad \text{para } a \ll 1, \quad (2.25)$$

$$\rho \sim \tilde{\zeta}/2, \quad \text{para } a \gg 1. \quad (2.26)$$

Além disso, o modelo tem a capacidade de reproduzir o parâmetro de estado tanto  $\omega < -1$  quanto  $\omega > -1$ , dependendo de como os parâmetros do modelo são ajustados [22]. Ele reproduz os tipos de singularidades futuras [22, 23] além de reproduzir alguns modelos inflacionários [24–28, 30].

Visto o sucesso do modelo de gás de Chaplygin em desempenhar o papel da energia escura e uma vez que a extensão para um modelo mais genérico contribui para reproduzir os dados cosmológicos, parece razoável adotar tal modelo para investigar o período inflacionário do universo. Além disso a viscosidade tem grandes influências na evolução do universo. Conseqüentemente o desejo de estudar um modelo de fluido viscoso com termo de gás de Chaplygin generalizado motivou esse trabalho. Entretanto, obter soluções analíticas considerando um modelo generalizado mostrou ser uma tarefa complicada principalmente pelo fato de que nesse caso não é possível obter soluções analíticas das Eqs. (2.10) e (2.11) e as soluções numéricas requerem que os parâmetros do modelo sejam predefinidos. Mas uma ferramenta apresentada nas Refs. [37, 46] ajudou a contornar esse problema, a saber, a reconstrução do campo escalar na representação do modelo de fluidos. Essa reconstrução está apresentada no capítulo seguinte (Cap. 3) e com mais detalhes no Apêndice B.

# Capítulo 3

## A Inflação e seus observáveis

### 3.1 Inflação

O universo descrito pelo modelo  $\Lambda$ CDM e corroborado pelos dados fornecidos pela sonda Planck [1, 2] apresenta uma distribuição de matéria homogênea e isotrópica. Além disso, a RCF, responsável em nos transmitir a impressão mais antiga do nosso universo, indica que o universo jovem também era homogêneo e isotrópico. Considerando o fato de que o universo evolui de acordo com a lei de Hubble perguntas acerca de suas condições iniciais surgem naturalmente [38].

As condições iniciais não são um problema de fato, uma vez que os modelos evolutivos do universo não excluem nem apontam para determinadas condições. Entretanto os dados mostram a necessidade de um ajuste fino no início do universo. O *problema no horizonte* destaca o fato de a RCF apresentar baixas flutuações da temperatura em todo o espaço, ou seja, em regiões casualmente desconexas. Já o *problema da planura* indaga como o conteúdo energético do universo é tão próximo do necessário para que o universo seja plano. A Inflação, ou seja, um período de expansão acelerada antes da era de domínio da radiação, se mostrou crucial para amenizar esses problemas [47].

Para implementar a inflação um campo escalar homogêneo  $\phi = \phi(t)$  conhecido como *Inflaton* que evolui sob a ação de uma função potencial  $V(\phi)$  [48] é considerado

$$S[\phi] = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right]. \quad (3.1)$$

A variação da ação (3.1) com relação à métrica fornece o tensor de energia-momento

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \left[ \frac{1}{2} \partial^\lambda \phi \partial_\lambda \phi + V(\phi) \right] \delta^\mu{}_\nu. \quad (3.2)$$

Tratando o *Inflaton* como um fluido perfeito a comparação da Eq. (3.2) com o tensor de energia-momento para um fluido perfeito (Eq. (1.6)) nos fornece [39]

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.3)$$

Nesse contexto a equação de continuidade (Eq. (1.11)) toma a forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 , \quad (3.4)$$

onde a linha (') significa a derivada com respeito ao argumento, e.g.,  $V'(\phi) \equiv \partial V(\phi)/\partial\phi$ . Consequentemente as equações de Friedmann (Eqs. (1.8) e (1.10)) para o campo escalar  $\phi$  ficam

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho_\phi , \quad \dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}\dot{\phi}^2 . \quad (3.5)$$

### 3.1.1 A aproximação de rolagem lenta

A abordagem mais simples para analisar a inflação é a aproximação de rolagem lenta. Essa abordagem é útil pois permite estudar a inflação analisando os parâmetros (de rolagem lenta) resultantes da aproximação, sem precisar, com isso, especificar o potencial [49].

Aproximação de rolagem lenta implica que o campo escalar varia muito pouco durante a fase inflacionária do universo, ou seja, ele satisfaz as condições

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) , \quad \ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} . \quad (3.6)$$

A primeira condição implica em a energia cinética ser muito menor que a potencial. Enquanto que a segunda é necessária para que a inflação ocorra durante um período grande de tempo [50]. Este, por sua vez, é estimado na teoria inflacionária pela razão entre o fator de escala no final,  $a_f$ , e no início,  $a_i$ , da inflação. Por se tratar de uma quantidade muito grande o logaritmo é tomado para fornecer o numero de e-folds  $N$  [48],

$$N \equiv \ln \left( \frac{a_f}{a_i} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt . \quad (3.7)$$

Com a aproximação de rolagem lenta (Eq. (3.6)) a equação de continuidade (3.4) e a primeira equação de Friedmann (Eq. (3.5)) para o campo escalar são reescritas

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi) , \quad H^2 \simeq \frac{\kappa^2}{3}V(\phi) . \quad (3.8)$$

A segunda equação de Friedmann (Eq. (3.5)) pode ser reescrita convenientemente como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{3}\dot{\phi}^2 + H^2 = H^2(1 - \epsilon) , \quad (3.9)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro de rolagem lenta definido como

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (3.10)$$

Uma vez que para ocorrer a inflação é necessário que o fator de escala do universo esteja acelerado,  $\ddot{a} > 0$  a Eq. (3.9) mostra que o parâmetro tem que obedecer a condição  $\epsilon < 1$ .

Um segundo parâmetro é retirado diretamente da segunda condição (Eq. (3.6))

$$\eta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}, \quad (3.11)$$

e a inflação ocorre desde que  $|\eta| < 1$ .

Com a ajuda das Eqs. (3.8) é possível reescrever os parâmetros de rolagem lenta unicamente em termos do potencial,  $V(\phi)$ , e suas derivadas

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2\kappa^2} \left( \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2, \quad \eta \equiv \frac{1}{\kappa^2} \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}. \quad (3.12)$$

### 3.1.2 Os observáveis dos modelos inflacionários

O grande triunfo da Inflação é fornecer uma teoria para a origem das estruturas observadas hoje no universo. Basicamente flutuações quânticas no *Inflaton*, amplificadas no período inflacionário, seriam capazes de dar origem às estruturas de largas escalas [51].

A inflação também gera tanto um espectro de perturbações de densidades quanto de ondas gravitacionais, e ambos podem gerar anisotropias na RCF. As amplitudes desses espectros são caracterizadas pelas seguintes quantidades no espaço de Fourier [52]

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_0) \left( \frac{k}{k_0} \right)^{n_s-1}, \quad (3.13)$$

e

$$\mathcal{P}_h(k) = \mathcal{P}_h(k_0) \left( \frac{k}{k_0} \right)^{n_t}, \quad (3.14)$$

onde  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_0)$  e  $\mathcal{P}_h(k_0)$  são constantes de normalização no ponto  $k_0$ . Na Eq. (3.13) a quantidade  $n_s$  é um dos observáveis dos modelos inflacionários conhecido como índice espectral escalar e especifica a dependência das perturbações com a escala. Como exemplo, o espectro independente de escala, ou exatamente plano, corresponde a  $n_s = 1$  e é conhecido como espectro de Harrison-Zeldovich [53, 54]. O índice  $n_t$  corresponde ao espectro tensorial gerado pelas ondas gravitacionais.

Outro observável é retirado das Eqs. (3.13) e (3.14) e indica a



relação da amplitude das ondas gravitacionais e as perturbações de densidade

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_h(k_0)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_0)}, \quad (3.15)$$

chamado de razão tensor-escalar.

Uma análise das quantidades sob a aproximação de rolagem lenta fornece os observáveis em função dos parâmetros em primeira ordem como [52]

$$n_s - 1 \sim -6\epsilon + 2\eta, \quad r = 16\epsilon. \quad (3.16)$$

Os dados fornecidos pela sonda Planck forneceu  $n_s = 0,968 \pm 0,006$  (68 % CL) e  $r < 0,11$  (95 % CL) [1, 2].

Embora seja um modelo hipotético, a teoria do universo inflacionário prevê quantidades que podem ser observadas hoje em dia. Isso significa que os modelos propostos para a aceleração cósmica devem ser capazes de reproduzir seus observáveis. A seguir será apresentado uma ferramenta crucial para comparar o modelo proposto nessa tese com os dados cosmológicos recentes.

## 3.2 Reconstrução dos observáveis dos modelos inflacionários em função das quantidades do modelo de fluido

Agora o procedimento tal como foi feito nas Refs. [37, 46, 25] será reproduzido. O método consiste basicamente em primeiro reescrever os parâmetros de rolagem lenta em função do parâmetro de Hubble e suas derivadas com respeito o número de e-folds (Eq. (3.7)). Em seguida a descrição do modelo de fluido é adotada para reescrever o parâmetro de Hubble. Com isso os observáveis do modelo inflacionário correspondentes podem ser finalmente reescritos na representação do modelo de fluido. Esse procedimento está reproduzido com mais detalhes no Apêndice B.

Usando as Eqs. (1.8) e (1.9) junto com as quantidades da Eq. (3.3) obtêm-se as relações

$$\frac{3}{\kappa^2} H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.17)$$

$$-\frac{1}{\kappa^2} (3H^2 + 2\dot{H}) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.18)$$

Substituindo o campo escalar  $\phi$  por um novo campo escalar  $\varphi$  dependente do campo antigo,  $\phi = \phi(\varphi)$ , as seguintes quantidades podem ser definidas das

Eqs. (3.17) e (3.18)

$$\omega(\varphi) = -\frac{2}{\kappa^2} \frac{H'(N)}{H(N)} \Big|_{N=\varphi}, \quad (3.19)$$

$$V(\varphi) = \frac{1}{\kappa^2} H(N)^2 \left( 3 + \frac{H'(N)}{H(N)} \right) \Big|_{N=\varphi}, \quad (3.20)$$

onde  $\omega(\varphi) \equiv (d\phi/d\varphi)^2 > 0$  e, como solução da equação de movimento para  $\phi$  ou  $\varphi$ , o novo campo  $\varphi$  é identificado com o número de e-folds  $N$ .

Nessa nova representação a densidade de energia e a pressão (Eqs. (1.8) e (1.9)) são dadas, em função de  $H(N)$  e suas derivadas, por [25, 46]

$$\rho(N) = \frac{3}{\kappa^2} H(N)^2, \quad (3.21)$$

$$P(N) = -\frac{1}{\kappa^2} (2H(N)H'(N) + 3H(N)^2), \quad (3.22)$$

no background de FLRW.

Valendo-se da Eq. (2.8), a lei de conservação pode então ser reescrita,

$$\rho'(N) + 3f(\rho) = 0, \quad (3.23)$$

e combinando com a Eq. (3.22) a seguinte relação é encontrada

$$\frac{2}{\kappa^2} H(N)^2 \left[ \left( \frac{H'(N)}{H(N)} \right)^2 + \frac{H''(N)}{H(N)} \right] = 3f'(\rho)f(\rho). \quad (3.24)$$

A equação acima permite finalmente expressar os parâmetros de rolagem lenta (Eq. (3.12)) em função de  $\rho(N)$ ,  $f(\rho)$  e suas derivadas.

$$\epsilon = \frac{3}{2} \frac{f(\rho)}{\rho(N)} \left( \frac{f'(\rho) - 2}{2 - f(\rho)/\rho(N)} \right)^2, \quad (3.25)$$

$$\eta = \frac{3}{2 - f(\rho)/\rho(N)} \left[ \left( \frac{f(\rho)}{\rho(N)} + f'(\rho) \right) \left( 1 - \frac{1}{2} f'(\rho) \right) - f(\rho) f''(\rho) \right]. \quad (3.26)$$

Consequentemente, da mesma maneira feita na Ref. [46], os observáveis dos modelos inflacionários (Eq. (3.16)) nessa nova representação se tornam

$$\begin{aligned} n_s &\sim 1 - 9 \frac{f(\rho)}{\rho(N)} \left( \frac{2 - f'(\rho)}{2 - f(\rho)/\rho(N)} \right)^2 + \frac{6}{2 - f(\rho)/\rho(N)} \\ &\times \left[ \left( \frac{f(\rho)}{\rho(N)} + f'(\rho) \right) \left( 1 - \frac{1}{2} f'(\rho) \right) - f(\rho) f''(\rho) \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$r = 24 \frac{f(\rho)}{\rho(N)} \left( \frac{f'(\rho) - 2}{2 - f(\rho)/\rho(N)} \right)^2. \quad (3.28)$$

A vantagem de se trabalhar com essa abordagem é de não precisar calcular as integrais como as das Eqs. (2.10) e (2.11). Pois no caso do gás de Chapligyn generalizado não homogêneo analisado no Cap. 4 tais integrais não podem ser resolvidas analiticamente.

# Capítulo 4

## Fluido viscoso com gás de Chaplygin generalizado

### 4.1 Análise dos parâmetros do fluido segundo o modelo $\Lambda$ CDM

Neste capítulo será analisado um fluido não-homogêneo com termo de Gás de Chaplygin e viscosidade volumosa. Tal fluido corresponde ao seguinte ansatz:

$$P = -\rho + A\rho^\alpha - B\rho^{-\beta} - \zeta(H), \quad \zeta(H) = \bar{\zeta}H^{2\gamma}. \quad (4.1)$$

As constantes positivas  $A$ ,  $B$ ,  $\bar{\zeta}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os parâmetros de modelo inflacionário que precisam ser ajustadas de maneira que reproduzam os dados observados pela sonda PLANCK [1, 2]. O intuito aqui é manter os parâmetros a fim de analisar um fluido mais genérico diferentes dos que analisados nas Refs. [34, 33, 32, 35]. Os principais resultados obtidos a seguir foram apresentados em [36].

A Eq. (2.8) e usando a Eq. (1.8) mostram que a função  $f(\rho)$  do fluido (4.1) é a seguinte

$$f(\rho) = A\rho^\alpha - B\rho^{-\beta} - \tilde{\zeta}\rho^\gamma, \quad \tilde{\zeta} \equiv \bar{\zeta} \left( \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \right)^{2\gamma}. \quad (4.2)$$

Se os parâmetros forem definidos da seguinte maneira  $\alpha = \gamma = 1$ ,  $\beta = 1/2$  e  $\tilde{\zeta} = 3\bar{\zeta}$  o mesmo modelo analisado nas Refs. [32, 33] é obtido.

Para o fluido (4.2) quando a densidade de energia é muito alta a viscosidade do fluido prevalece e dois cenários são observados

$$f(\rho \gg 1) \approx A\rho^\alpha, \quad \text{para } \alpha > \gamma, \quad (4.3)$$

$$f(\rho \gg 1) \approx -\tilde{\zeta}\rho^\gamma, \quad \text{para } \alpha < \gamma. \quad (4.4)$$

No regime  $\rho \ll 1$  o termo de gás de Chaplygin prevalece

$$f(\rho \ll 1) \approx -B\rho^{-\beta}. \quad (4.5)$$

Das Eqs. (4.3) e (4.5) nota-se que para  $\alpha > \gamma$  a função  $f(\rho)$  desse modelo pode mudar de sinal. Isso implica que, segundo a Eq. (2.9), o parâmetro de estado da energia escura pode assumir valores tanto  $\omega_\Lambda > -1$  quanto  $\omega_\Lambda < -1$ .

Devido à quantidade de parâmetros no modelo (Eq. (4.2)), restringi-los segundo os dados observacionais é uma tarefa muito difícil. Também, calcular o fator de escala (Eq. (2.10)) ou obter uma expressão para o tempo (Eq. (2.11)) não é possível mantendo a generalidade desejada. Logo, o que será feito é verificar a capacidade do modelo reproduzir os dados fixando a menor quantidade de parâmetros possíveis. O importante será observar como a relação entre os parâmetros interferem nos resultados.

### 4.1.1 Os parâmetros de rolagem lenta

É sabido que para ocorrer a inflação os parâmetros de rolagem lenta (Eq. (3.12)) devem obedecer a condição  $\epsilon, |\eta| < 1$  (veja o Cap. 3). Como não é possível resolver as equações de Friedmann sem perder a generalidade dos parâmetros inflacionários desse modelo, então a Eq. (4.2) será substituída nas Eqs. (3.25), (3.26), (3.27) e (3.28) e os valores para os parâmetros serão verificados numericamente afim de obedecer as condições de rolagem lenta.

A Eq. (3.25) fornece a expressão do parâmetro  $\epsilon$  para um fluido viscoso com o termo de gás de Chaplygin

$$\epsilon = \frac{3}{2} \left( A\rho^{\alpha-1} - B\rho^{-\beta-1} - \tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1} \right) \left( \frac{2 - \alpha A\rho^{\alpha-1} - \beta B\rho^{-\beta-1} + \gamma\tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}}{2 - A\rho^{\alpha-1} + B\rho^{-\beta-1} + \tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}} \right)^2. \quad (4.6)$$

#### Regime de grandes valores de $\rho$

Quando a densidade de energia for grande o termo de gás de Chaplygin  $B\rho^{-\beta}$  se torna desprezível, então

$$\epsilon \approx \frac{3}{2} \left( A\rho^{\alpha-1} - \tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1} \right) \left( \frac{2 - \alpha A\rho^{\alpha-1} + \gamma\tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}}{2 - A\rho^{\alpha-1} + \tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}} \right)^2, \quad \text{para } \rho \gg 1, \quad (4.7)$$

e a condição de rolagem lenta será satisfeita dependendo da relação entre as constantes  $A, \tilde{\zeta}, \alpha$  e  $\gamma$ .

Se  $\gamma < 1$ , o termo de viscosidade desaparece com o aumento de

$\rho$ , de modo que

$$\begin{aligned}\epsilon &\approx \frac{3}{2}A\rho^{\alpha-1} \left( \frac{2 - \alpha A\rho^{\alpha-1}}{2 - A\rho^{\alpha-1}} \right)^2, \\ \epsilon &\approx \frac{3}{2}\alpha^2 A\rho^{\alpha-1}, \quad \text{para } \rho \rightarrow \infty.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Nesse regime, para manter a condição de rolagem lenta,  $\epsilon < 1$ , o parâmetro  $\alpha$  terá que ter o limite superior  $\alpha \leq 1$  (Fig. 4.1a), pois impede que a Eq. (4.8) aumente com o crescimento de  $\rho$ . Um caso simplificado, com  $\alpha = 1$  implica em  $A < 2/3$ .

Se  $\gamma = 1$ , o parâmetro de viscosidade é preservado

$$\epsilon \approx \frac{3}{2}(A\rho^{\alpha-1} - \tilde{\zeta}) \left( \frac{2 - \alpha A\rho^{\alpha-1} + \tilde{\zeta}}{2 - A\rho^{\alpha-1} + \tilde{\zeta}} \right)^2. \quad (4.9)$$

O limite de  $\alpha$  é o mesmo que no caso anterior para impedir que o parâmetro  $\epsilon$  alcance o valor unitário e a condição de rolagem lenta continue respeitada (Fig. 4.1b). Nesse caso, para  $\alpha = 1$ ,  $A - \tilde{\zeta} < 2/3$ .

Se  $\gamma > 1$ , assumindo que o segundo termo entre parênteses da Eq. (4.7) tenda a um para altas densidades de energia nesse caso deve-se ter

$$\epsilon \approx \frac{3}{2}(A\rho^{\alpha-1} - \tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}), \quad \text{para } \rho \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

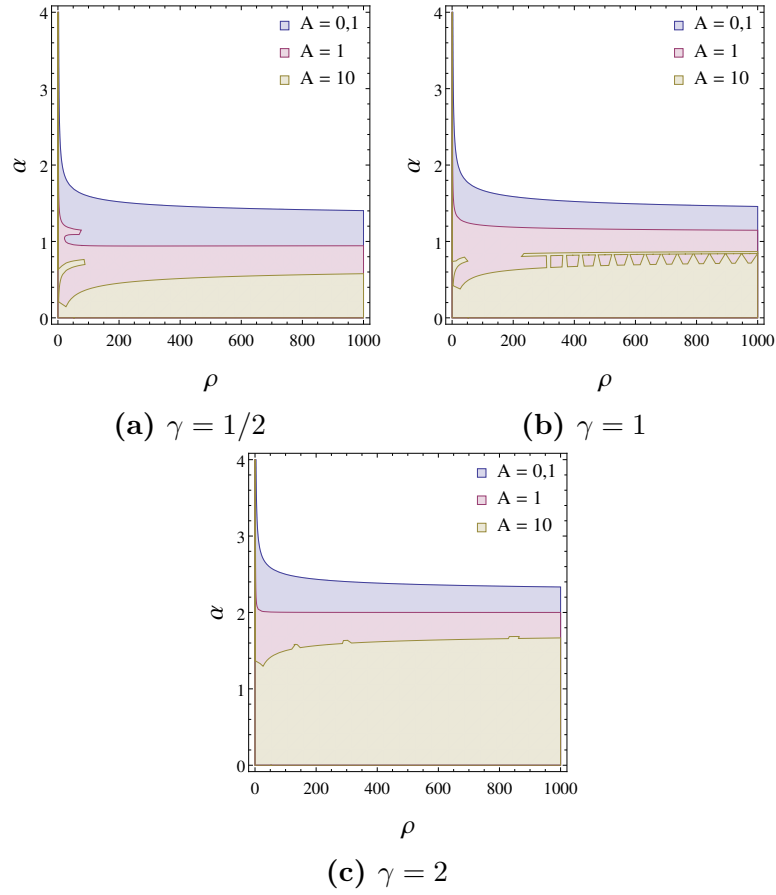
Nesse caso, assumindo  $A = \tilde{\zeta}$  os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  terão que ser iguais, dessa maneira a Eq. (4.10) permanece menor que a unidade (Fig. 4.1c).

### Regime de pequenos valores de $\rho$

Quando a densidade de energia do fluido for pequena os termos de gás de Chaplygin ( $B\rho^{-\beta}$ ) prevalecerão sobre os outros na Eq. (4.6) de modo que

$$\epsilon \approx -\frac{3}{2}B\rho^{-(\beta+1)} \left( \frac{2 - \beta B\rho^{-(\beta+1)}}{2 + B\rho^{-(\beta+1)}} \right)^2, \quad \text{para } \rho \ll 1. \quad (4.11)$$

Note que, mesmo se  $\alpha$  e/ou  $\gamma$  forem menores que um, o termo de gás de Chaplygin terá maior influência no parâmetro  $\epsilon$ , uma vez que o expoente da densidade de energia que acompanha esse termo será sempre menor. Isso permite com que os outros parâmetros tenham a liberdade de assumir valores cada vez maiores conforme  $\rho$  diminua. Se a densidade de energia for muito pequena,  $\rho \ll 1$ , nenhuma restrição sobre os parâmetros pode ser feita, uma vez que Eq. (4.11) sempre será negativa e a condição de rolagem lenta será satisfeita. Restrições começam a aparecer no parâmetro  $\alpha$ , por exemplo, se  $A$  for muito maior que  $B$



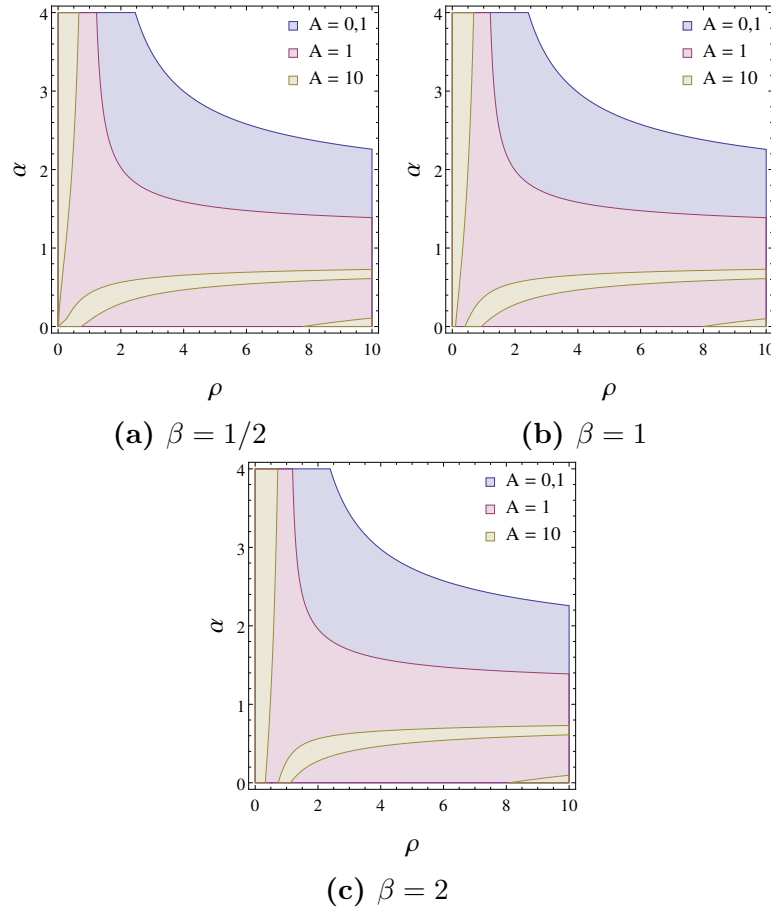
**Figura 4.1** – Região onde  $\epsilon < 1$  assumindo  $\rho \gg 1$ . Os parâmetros foram fixados em  $B = 1$  e  $\tilde{\zeta} = 1$ .

e  $\tilde{\zeta}$  porque esse é o único termo positivo na equação de estado e concorre com os outros coeficientes, deixando a função menos negativa (Fig. 4.2).

Observe também que se o sinal que acompanha o termo de gás de Chaplygin fosse escolhido como positivo não haveria valores permitidos para os parâmetros uma vez que  $\epsilon$  seria positivamente muito grande quando  $\rho \ll 1$ , a menos que  $B \ll 1$ , mas o gás de Chaplygin seria irrelevante para o modelo (veja a Eq. (4.11)).

Outra condição que precisa ser satisfeita é  $|\eta| < 1$ , onde, nesse caso, o parâmetro  $\eta$  é dado por

$$\eta = \frac{3}{2 - A\rho^{-1+\alpha} + B\rho^{-1-\beta} + \tilde{\zeta}\rho^{-1+\gamma}} \left[ (A(1 + \alpha)\rho^{-1+\alpha} - B(1 - \beta)\rho^{-1-\beta} - \tilde{\zeta}(1 + \gamma)\rho^{-1+\gamma}) \left( 1 - \frac{1}{2}(A\alpha\rho^{-1+\alpha} + B\beta\rho^{-1+\beta} - \tilde{\zeta}\gamma\rho^{-1+\gamma}) \right) - (A\rho^\alpha - B\rho^{-\beta} - \tilde{\zeta}\rho^\gamma)(A(-1 + \alpha)\alpha\rho^{-2+\alpha} + B(-1 - \beta)\beta\rho^{-2-\beta} - (-1 + \gamma)\gamma\tilde{\zeta}\rho^{-2+\gamma}) \right]. \quad (4.12)$$



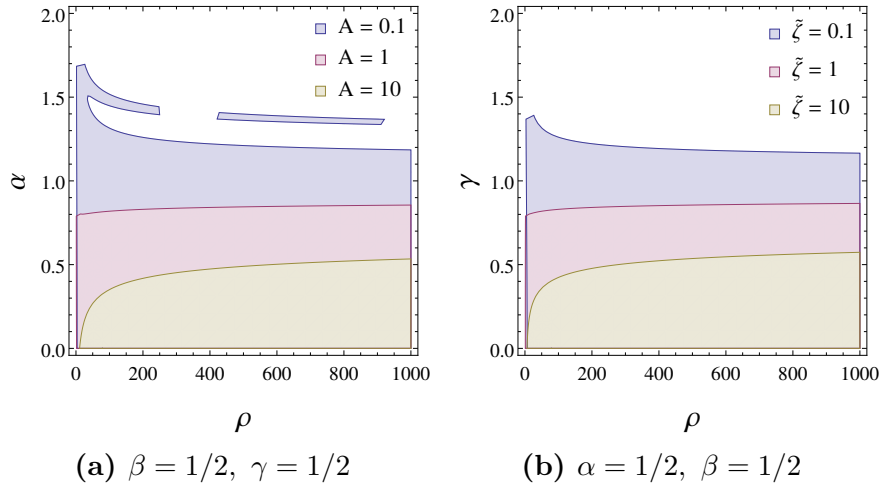
**Figura 4.2** – Região onde  $\epsilon < 1$  para pequenos valores de  $\rho$ . Os parâmetros foram fixados em  $B = 1$  e  $\tilde{\zeta} = 1$ .

Dada a quantidade de termos da Eq. (4.12) várias combinações dos parâmetros irão satisfazer a condição de rolagem lenta. Basicamente, é fácil ver que desde que  $\alpha \lesssim 1$  e  $\gamma \lesssim 1$  a condição de rolagem lenta será satisfeita quando a densidade de energia for consideravelmente grande. Caso contrário os termos com expoentes  $\alpha$  e  $\gamma$  irão crescer e violar a condição  $|\eta| < 1$ .

Nas Figs. 4.3a e 4.3b pode-se notar um limite superior dos parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  próximo a um. Desde que todos os coeficientes sejam da mesma ordem e magnitude, os termos de gás Chaplygin não afetam na restrição dos demais parâmetros. Observa-se também que o aumento dos coeficientes  $A$  e  $\tilde{\zeta}$  abaixam os limites superiores de  $\alpha$  e  $\gamma$  respectivamente.

Pela análise desenvolvida até agora pode-se afirmar que os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  aproximam do valor 1 conforme a densidade de energia aumenta. Essa aproximação ocorre de valores maiores ( $\alpha \rightarrow 1^+$ ) se  $A < \tilde{\zeta}$ , ou de valores menores ( $\alpha \rightarrow 1^-$ ) se  $A > \tilde{\zeta}$  (Figs. 4.1 e 4.3). Para  $A = \tilde{\zeta}$  os limites superiores de  $\alpha$  e  $\gamma$  estão próximos da unidade desde quando  $\rho$  começa a aumentar (Fig. 4.2). Entretanto se um desses parâmetros for maior que um o limite se torna o próprio parâmetro, ou seja  $\alpha \rightarrow \gamma$  quando  $\rho \rightarrow \infty$ , como mostra a Fig. 4.1c.





**Figura 4.3** – Região onde  $|\eta| < 1$ . Os parâmetros foram fixados em  $B = 1$  e  $\tilde{\zeta} = 1$  na Fig. 4.1a e  $A = 1$  e  $B = 1$  na Fig. 4.3b.

Por outro lado a análise de  $\eta$  mostra que tanto  $\alpha$  quanto  $\gamma$  tem que ser  $\leq 1$  se  $A < \tilde{\zeta}$ , e para  $A > \tilde{\zeta}$  o limite superior de  $\alpha$  alcança a unidade por valores inferiores ( $\alpha \rightarrow 1^-$ ). Isso acontece porque a condição  $|\eta| < 1$  envolve o módulo do parâmetro, e o coeficiente de viscosidade não pode contribuir para o parâmetro diminuir.

### 4.1.2 Os observáveis dos modelos inflacionários

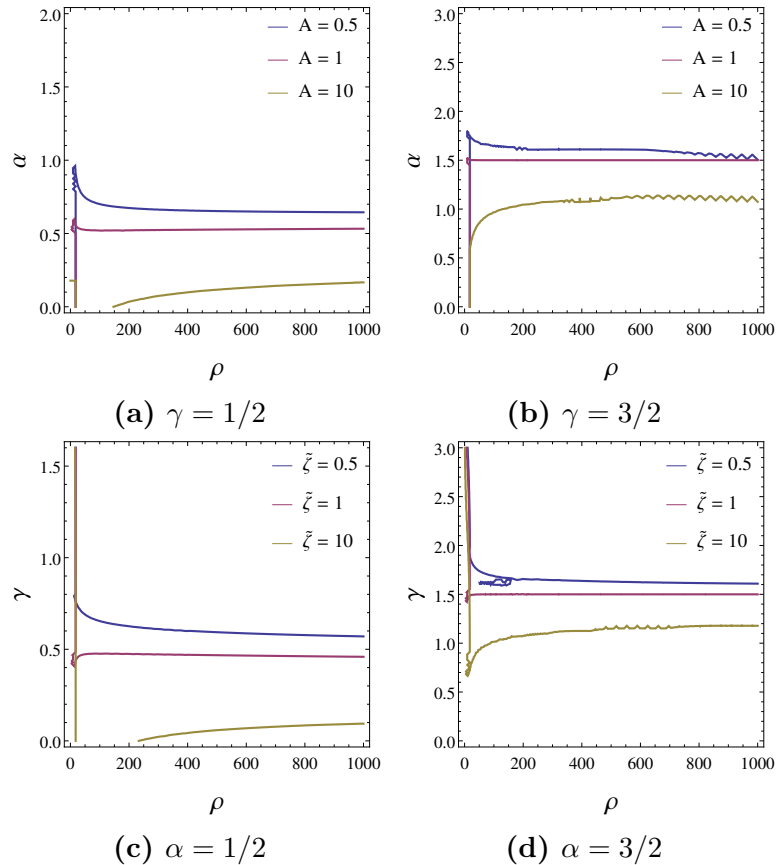
Além dos parâmetros de rolagem lenta, os observáveis do modelo inflacionário, Eq. (3.16), também podem ser utilizados para fixar os parâmetros do modelo de fluido analisado nesse trabalho, uma vez que suas respectivas representações no modelo de fluidos foram obtidas, Eqs (3.27) e (3.28). A respeito desses observáveis a sonda PLANCK forneceu os seguinte resultados,  $n_s = 0,968 \pm 0,006$  (68% CL) e  $r < 0,11$  (95% CL) [1, 2].

Embora a condição em  $n_s$  seja bastante restritiva, os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  estão sujeitos aos coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $\tilde{\zeta}$  e não se pode estimar um valor

específico para eles. Aplicando a Eq. (4.1) na (3.27) tem-se

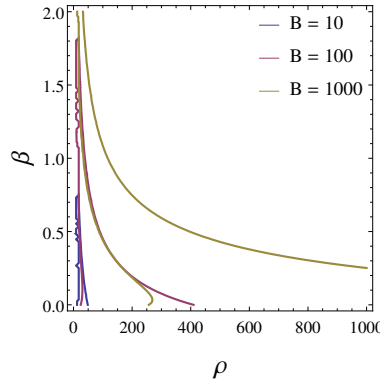
$$\begin{aligned}
n_s \sim & 1 - 9(A\rho^{\alpha-1} - B\rho^{-\beta-1} - \tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}) \left( \frac{2 - \alpha A\rho^{\alpha-1} - \beta B\rho^{-\beta-1} + \gamma\tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}}{2 - A\rho^{\alpha-1} + B\rho^{-\beta-1} + \tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}} \right)^2 \\
& + \frac{6}{2 - A\rho^{\alpha-1} + B\rho^{-\beta-1} + \tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}} \left[ ((\alpha + 1)A\rho^{\alpha-1} - (1 - \beta)B\rho^{-\beta-1} \right. \\
& \left. - (\gamma + 1)\tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}) \left( 1 - \frac{\alpha A\rho^{\alpha-1} + \beta B\rho^{-\beta-1} - \gamma\tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}}{2} \right) - (A\rho^\alpha - B\rho^{-\beta} - \tilde{\zeta}\rho^\gamma) \right. \\
& \left. \times \left( \alpha(\alpha - 1)A\rho^{\alpha-2} - \beta(\beta + 1)B\rho^{-\beta-2} - \gamma(\gamma - 1)\tilde{\zeta}\rho^{\gamma-2} \right) \right]. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Nesse caso, como mostra a Fig. (4.4), observa-se que  $\alpha \sim \gamma$  para  $A = \tilde{\zeta}$ . Para  $A$  maior, ou menor, que  $\tilde{\zeta}$  os parâmetros tendem a se igualar quando  $\rho \rightarrow \infty$ .



**Figura 4.4** – Curva  $n_s = 0,968$ . Os parâmetros foram fixados  $A = B = 1$  e  $\beta = 1/2$ .

A Fig. 4.5 já mostra como o peso do gás de Chaplygin deve ser grande, comparado com os outros termos, para contribuir para os dados observacionais quando  $\rho \gg 1$ . Nesse caso, parece razoável afirmar que  $0 < \beta \lesssim 1/2$  desde que o peso do gás de Chaplygin seja grande ( $B \gg 1$ )



**Figura 4.5** – Curva  $n_s = 0,968$ . Os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $\tilde{\zeta}$  foram fixados em 1.

Para o parâmetro  $r$  a equação é menos extensa,

$$r = 24 \left( A\rho^{\alpha-1} - B\rho^{-\beta-1} - \tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1} \right) \left( \frac{2 - \alpha A\rho^{\alpha-1} - \beta B\rho^{-\beta-1} + \gamma\tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}}{2 - A\rho^{\alpha-1} + B\rho^{-\beta-1} + \tilde{\zeta}\rho^{\gamma-1}} \right)^2, \quad (4.14)$$

onde foi aplicado a Eq. (4.2) na (3.28). Para  $\rho \ll 1$  poucas restrições podem ser feitas, uma vez que o termo negativo da Eq. (4.14) prevalece e o resultado  $r < 0,11$  sempre será alcançado.

Aqui o mesmo comportamento anterior é observado, ou seja,  $\alpha \rightarrow \gamma$ . Entretanto, para  $r < 0,11$  se observa o limite  $\alpha \leq \gamma$  para  $A = \tilde{\zeta}$ , mesmo para valores de  $\alpha$  e  $\gamma$  menores que um. Se  $A > \tilde{\zeta}$  o limite  $\alpha \leq \gamma$  só é alcançado quando  $\rho \rightarrow \infty$ . Para  $A < \tilde{\zeta}$  o parâmetro  $\alpha$  pode ultrapassar o valor de  $\gamma$  (Fig. 4.6). No entanto a análise de  $\epsilon$  forneceu o limite superior de  $\alpha$  e  $\gamma$  igual a um. Essas relações fornecem dois cenários

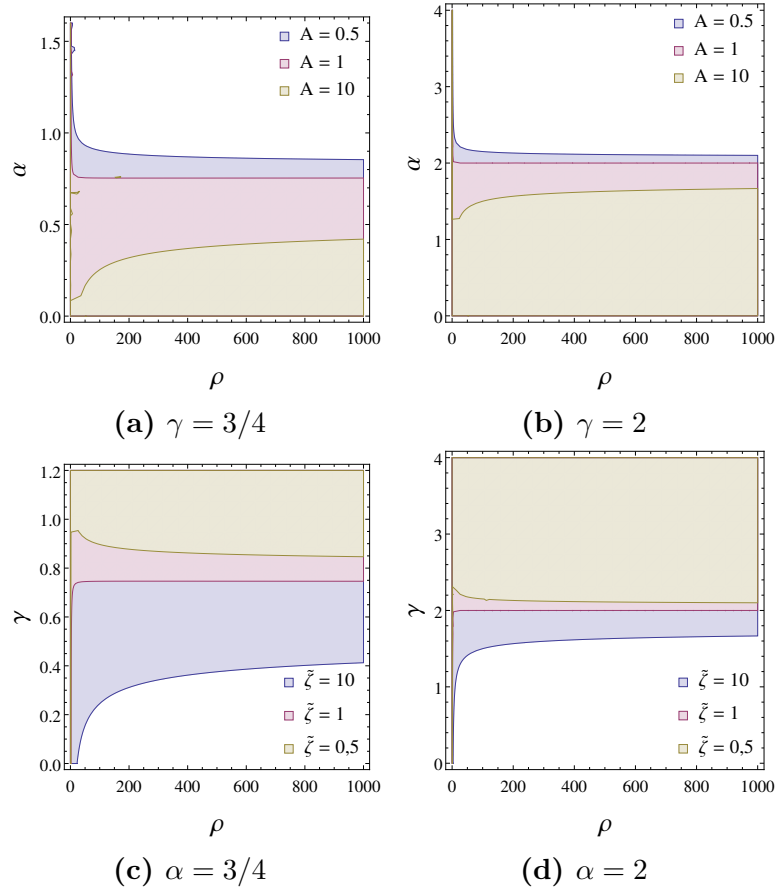
$$A \geq \tilde{\zeta} \Rightarrow 0 < \alpha \leq \gamma, \quad \alpha \leq \gamma < 1. \quad (4.15)$$

$$A < \tilde{\zeta} \Rightarrow 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (4.16)$$

O método empregado não favoreceu restringir os parâmetros referentes ao gás de Chaplygin, uma vez que na maioria dos casos quando  $\rho \ll 1$  uma faixa muito grande de valores para os parâmetros são possíveis. No entanto, o teste a seguir se mostrará útil para determinar o limite inferior de  $\beta$ .

### 4.1.3 Término da inflação

O modelo de fluido precisa não somente reproduzir o estado inflacionário do universo, imitando a energia escura, mas também precisa ser capaz de sair do estágio inflacionário e continuar evoluindo para os regimes de reaquecimentos seguintes. Isso garante que o universo não expanda de maneira indeterminada. Em outras palavras, é preciso analisar a instabilidade na correspondente



**Figura 4.6** – Região que satisfaz  $r < 0, 11$ . Os parâmetros foram fixados  $A = B = 1$  e  $\beta = 1/2$ .

condição de de Sitter onde o parâmetro de Hubble é constante,  $H = H_{inf}$ . O método utilizado na Ref. [25] será reproduzido adiante onde o parâmetro de Hubble é escrito como

$$H = H_{inf} + H_{inf}\delta(t), \quad (4.17)$$

onde  $\delta(t) \ll 1$  é uma pequena perturbação definida como

$$\delta(t) \equiv e^{\lambda t}. \quad (4.18)$$

Aqui,  $\lambda$  é uma constante que fornecerá informação sobre a instabilidade da solução de de Sitter. Reescrevendo a Eq. (3.24) com respeito ao tempo cósmico  $t$  e

aplicando a Eq. (4.2) resulta em

$$\begin{aligned} \ddot{H} - \frac{\kappa^4}{2} \left[ \alpha A^2 \left( \frac{3}{\kappa^2} \right)^{2\alpha} H^{4\alpha-1} - \beta B^2 \left( \frac{3}{\kappa^2} \right)^{-2\beta} H^{-4\beta-1} + \gamma \tilde{\zeta}^2 \left( \frac{3}{\kappa^2} \right)^2 H^{4\gamma-1} \right. \\ \left. - (\alpha - \beta) AB \left( \frac{3}{\kappa^2} \right)^{\alpha-\beta} H^{2(\alpha-\beta)-1} - (\alpha - \gamma) A \tilde{\zeta} \left( \frac{3}{\kappa^2} \right)^{\alpha+\gamma} H^{2(\alpha+\gamma)-1} \right. \\ \left. - (\beta - \gamma) A \tilde{\zeta} \left( \frac{3}{\kappa^2} \right)^{-\beta+\gamma} H^{2(\gamma-\beta)-1} \right] = 0 . \quad (4.19) \end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (4.17) junto com a Eq. (4.18) na Eq. (4.19) e tomando os termos de primeira ordem em  $\delta(t)$  resulta finalmente em

$$\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\kappa^4}{H_{inf}} Q = 0 , \quad (4.20)$$

onde foi definido

$$\begin{aligned} Q \equiv \alpha(4\alpha - 1)A^2 \left( \sqrt{3} \frac{H_{inf}}{\kappa} \right)^{4\alpha} + \beta(4\beta - 1)B^2 \left( \sqrt{3} \frac{H_{inf}}{\kappa} \right)^{-4\beta} \\ + \gamma(4\gamma - 1)\tilde{\zeta}^2 \left( \sqrt{3} \frac{H_{inf}}{\kappa} \right)^{4\gamma} - (\alpha - \beta)[2(\alpha - \beta) - 1]AB \left( \sqrt{3} \frac{H_{inf}}{\kappa} \right)^{2(\alpha-\beta)} \\ - (\alpha + \gamma)[2(\alpha + \gamma) - 1]A\tilde{\zeta} \left( \sqrt{3} \frac{H_{inf}}{\kappa} \right)^{2(\alpha+\gamma)} \\ - (\beta - \gamma)[2(\gamma - \beta) - 1]B\tilde{\zeta} \left( \sqrt{3} \frac{H_{inf}}{\kappa} \right)^{2(\gamma-\beta)} . \quad (4.21) \end{aligned}$$

Fazendo  $\alpha = \beta = \gamma = 1/4$  a quantidade  $Q$  se torna nula, independente dos valores dos coeficientes, e a solução de de Sitter é recuperada.

A Eq. (4.20) tem duas soluções

$$\lambda = \lambda_{\pm} \equiv \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\kappa^2}{H_{inf}} \sqrt{Q} . \quad (4.22)$$

Soluções positivas da Eq. (4.20) permitem que  $\delta(t)$  se torne cada vez maior a media que o universo evolui temporalmente. Como resultado o estágio inflacionário chega a seu fim. Para obter soluções reais é necessário que  $Q > 0$ , então as regiões em que  $Q$  é positivo foram plotadas e estão apresentadas na Fig. 4.7 para  $H_{inf}/\kappa \ll 1$  e  $H_{inf}/\kappa \gg 1$ .

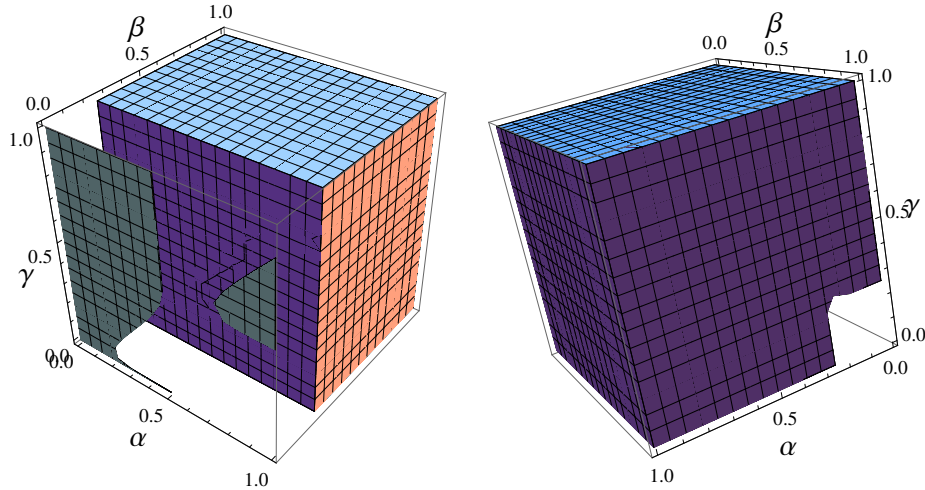
Para  $H_{inf}/\kappa \ll 1$ , apenas o limite inferior  $\beta \geq 1/4$  é observado enquanto os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  não são restringidos (Fig. 4.7a). Para  $H_{inf}/\kappa \gg 1$  os limites  $\gamma \geq 1/4$  e  $\alpha \geq 1/4$  são estabelecidos enquanto  $\beta$  fica livre para assumir qualquer valor no intervalo de 0 a 1. Esse valor é o mesmo que substituindo na

Eq. (4.21) fornece o resultado de de Sitter, é o valor mínimo que os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  podem ter. Considerando as o resultado obtido na seção anterior, Eqs. (4.15) e (4.16), a faixa de valores dos parâmetros do modelo de fluido (4.2) pode ser resumida da seguinte forma

$$A \geq \tilde{\zeta} \Rightarrow \begin{cases} 1/4 \leq \alpha \leq \gamma \leq 1, \\ 1/4 \leq \beta \leq 1, \end{cases} \quad (4.23)$$

e

$$A < \tilde{\zeta} \Rightarrow \begin{cases} 1/4 \leq \alpha \leq 1, \\ 1/4 \leq \beta \leq 1, \\ 1/4 \leq \gamma \leq 1. \end{cases} \quad (4.24)$$



(a)  $H_{inf}/\kappa = 10^{-5}$ .

(b)  $H_{inf}/\kappa = 10^{10}$ .

**Figura 4.7** – Região onde  $Q > 0$  com  $A = 10$ ,  $B = 10^3$  e  $\tilde{\zeta} = 1$ .

Embora não tenha sido possível limitar os valores dos coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $\tilde{\zeta}$  dois cenários diferentes foram observados,  $A \geq \tilde{\zeta}$  e  $A < \tilde{\zeta}$ . Lembrando que se  $\alpha > \gamma$  a função  $f(\rho)$  pode mudar de sinal (Eq. (4.3)) e pelas Eqs. (4.23) e (4.24) pode-se ver que isso só irá ocorrer se  $A < \tilde{\zeta}$ , pois caso contrário  $\alpha \geq \gamma$ . Entretanto, analisando a saída do estágio inflacionário foi possível estabelecer um limite inferior para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\tilde{\zeta}$ . Os limites superiores de  $\alpha$  e  $\gamma$  já foram encontrados na análise do parâmetro de rolagem lenta  $\epsilon$ , mas o limite superior de  $\beta$  não foi encontrado, mas é razoável assumir os limites comumente adotados no estudo do modelo de gás de Chaplygin, Eq. (2.21).

## 4.2 Comparação com os últimos modelos estudados

O fluido viscoso com o termo de gás de Chaplygin despertou o interesse entre os pesquisadores recentemente. Comumente o que se faz é fixar os expoentes da Eq. (4.1) e usar os fenômenos cosmológicos conhecidos para estimar os valores dos coeficientes que reproduzem os dados observados. Na Ref. [32], por exemplo, seus autores adotaram uma equação de estado do tipo

$$P = A\rho - \frac{B}{\rho^\beta} - \sqrt{3}\zeta\kappa\rho^{1/2}, \quad (4.25)$$

com  $\beta = 1/2$ . Logo em seguida, os mesmos autores estudaram um modelo um pouco mais complexo nas Refs. [33, 34]. O parâmetro  $B$  do modelo anterior, Eq. (4.25), é substituído por uma função dependente da densidade de energia  $\rho$  [55],

$$B \rightarrow \frac{B}{1+w} - 1 + \left( \rho^{1+\beta} - \frac{B}{1+w} \right)^{-w}, \quad (4.26)$$

onde o novo parâmetro  $w$  é restringido pelo teste de estabilidade comentado na seção 2.1.1 dessa tese.

Na Ref. [35] o fluido viscoso com o termo de gás de Chaplygin foi considerado em um universo de  $D$  dimensões

$$P = A\rho - \frac{B}{\rho^\beta} - (D-1)H\xi_0\rho^\nu, \quad (4.27)$$

onde a primeira equação de Friedmann (Eq. (1.8)) é dada por

$$H^2 = \frac{2\rho}{(D-1)(D-2)} - \frac{K}{a^2}. \quad (4.28)$$

Aqui  $K$  é o parâmetro que define a geometria do universo (Eq. (1.3)). Dois cenários foram estudados, com  $\nu = 1/2$  e  $\nu \neq 1/2$ , onde foi feito  $\beta = 1$  no primeiro cenário. Aplicando as propriedades do universo considerado  $D = 4$  e  $K = 0$  os cenários seriam  $\nu = 1$  e  $\nu \neq 1$ . O mesmo modelo foi analisado na Ref. [?] no cenários de Branas um espaço quadridimensional.

Como visto acima, o fluido adotado nessa tese vem sendo estudado ultimamente em diferentes abordagens de se investigar os fenômenos cosmológicos. Além disso, os parâmetros empregados estão dentro do resultado obtido nas Eqs. (4.23) e (4.24).

# Conclusões e perspectivas

Foi analisado, nesse trabalho, um fluido imperfeito a fim de reproduzir os dados mais recentes observados pela sonda Planck [1, 2] a respeito da aceleração cósmica. O modelo proposto foi de um fluido do tipo gás de Chaplygin generalizado com viscosidade (Eq. (4.2)). Para realizar tal tarefa foi usado o procedimento de reconstrução do campo escalar com o propósito de descrever os parâmetros de rolagem lenta e, conseqüentemente, os observáveis do modelo inflacionário na representação do modelo de fluido baseado nas Refs. [25, 37, 46]. Além da comparação com os dados cosmológicos o teste para verificar se o modelo admite que o universo saia do estágio inflacionário, assim como feito na Ref. [25], ajudou a restringir os parâmetros do modelo.

Basicamente, o modelo estudado depende de potências da densidade de energia,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  com os respectivos coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $\tilde{\zeta}$ . Enquanto as condições de rolagem lenta forneceram os limites superiores de  $\alpha$  e  $\gamma$  (Seç. 4.1.1), a análise do término da inflação forneceu os limites inferiores para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  (Seç. 4.1.3). Já os dados fornecidos pela sonda Planck contribuíram para estabelecer uma relação  $\alpha \leq \gamma$ , além de explicitar dois cenários que são  $A \geq \tilde{\zeta}$  e  $A < \tilde{\zeta}$  (Seç. 4.1.2). As Eqs. (4.23) e (4.24) resumem esses resultados.

Uma possível extensão desse trabalho seria propor um fluido com parâmetros respeitando os intervalos estabelecidos pela análise feita. Usando os dados observados das Super Novas do tipo Ia (SNeIa), da radiação cósmica de fundo (RCF) e os parâmetros de melhor ajuste, é possível estimar os coeficientes do modelo, tal como fez Pourhassan com o modelo proposto na Ref. [34]. Pré-estabelecidos os parâmetros será possível também estudar as singularidades futuras que o modelo reproduz, bem como analisar a passagem da barreira fantasma,  $\omega = -1$  (quando a soma da pressão e da energia do fluido se torna positiva,  $f(\rho) > 0 \Rightarrow \omega > -1$ ), assim como feito por Nojiri e Odintsov com o modelo de fluido imperfeito na Ref. [22]. A Teoria de Perturbações Cosmológicas também pode ser utilizada para verificar se o modelo de fluido é capaz de produzir estruturas (não-homogeneidades) no universo [10].



# Referências Bibliográficas

- [1] ADE, P. A. R. et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, v. 594, p. A13, 2016.
- [2] ADE, P. A. R. et al. Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.*, v. 594, p. A20, 2016.
- [3] MYRZAKULOV, R.; SEBASTIANI, L.; ZERBINI, S. Some aspects of generalized modified gravity models. *Int. J. Mod. Phys.*, v. D22, p. 1330017, 2013.
- [4] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. *eConf*, v. C0602061, p. 06, 2006. [Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.4,115(2007)].
- [5] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unified cosmic history in modified gravity: from F(R) theory to Lorentz non-invariant models. *Phys. Rept.*, v. 505, p. 59–144, 2011.
- [6] PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The Cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, v. 75, p. 559–606, 2003.
- [7] BAMBA, K.; CAPOZZIELLO, S.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests. *Astrophys. Space Sci.*, v. 342, p. 155–228, 2012.
- [8] KAMENSHCHIK, A. YU.; MOSCHELLA, U.; PASQUIER, V. An Alternative to quintessence. *Phys. Lett.*, v. B511, p. 265–268, 2001.
- [9] BILIC, N.; TUPPER, G. B.; VIOLLIER, R. D. Unification of dark matter and dark energy: The Inhomogeneous Chaplygin gas. *Phys. Lett.*, v. B535, p. 17–21, 2002.
- [10] BENTO, M. C.; BERTOLAMI, O.; SEN, A. A. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy matter unification. *Phys. Rev.*, v. D66, p. 043507, 2002.
- [11] BENTO, M. D. C.; BERTOLAMI, O.; SEN, A. A. Generalized Chaplygin gas and CMBR constraints. *Phys. Rev.*, v. D67, p. 063003, 2003.
- [12] KHALATNIKOV, I. M.; KAMENSHCHIK, A. YU. Open static Chaplygin universe. *Submitted to: Phys. Lett. B*, 2003.

- [13] SZYDLOWSKI, M.; CZAJA, W. Stability of FRW cosmology with generalized Chaplygin gas. *Phys. Rev.*, v. D69, p. 023506, 2004.
- [14] GORINI, V.; KAMENSHCHIK, A.; MOSCHELLA, U.; PASQUIER, V. The Chaplygin gas as a model for dark energy. In: . c2004. p. 840–859.
- [15] GUO, Z.-K.; ZHANG, Y.-Z. Cosmology with a variable Chaplygin gas. *Phys. Lett.*, v. B645, p. 326–329, 2007.
- [16] MENG, X.-H.; HU, M.-G.; REN, J. Cosmology with extended chaplygin gas media and  $w = -1$  crossing. 2005.
- [17] LINDER, E. V.; SCHERRER, R. J. Aetherizing Lambda: Barotropic Fluids as Dark Energy. *Phys. Rev.*, v. D80, p. 023008, 2009.
- [18] MAZUMDER, N.; BISWAS, R.; CHAKRABORTY, S. FRW Cosmological model with Modified Chaplygin Gas and Dynamical System. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 51, p. 2754–2758, 2012.
- [19] XU, L.; LU, J.; WANG, Y. Revisiting Generalized Chaplygin Gas as a Unified Dark Matter and Dark Energy Model. *Eur. Phys. J.*, v. C72, p. 1883, 2012.
- [20] POURHASSAN, B.; KAHYA, E. O. Extended Chaplygin gas model. *Results Phys.*, v. 4, p. 101–102, 2014.
- [21] CAPOZZIELLO, S.; CARDONE, V. F.; ELIZALDE, E.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Observational constraints on dark energy with generalized equations of state. *Phys. Rev.*, v. D73, p. 043512, 2006.
- [22] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Inhomogeneous equation of state of the universe: Phantom era, future singularity and crossing the phantom barrier. *Phys. Rev.*, v. D72, p. 023003, 2005.
- [23] BREVIK, I.; ELIZALDE, E.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Viscous Little Rip Cosmology. *Phys. Rev.*, v. D84, p. 103508, 2011.
- [24] MYRZAKULOV, R.; SEBASTIANI, L. Inhomogeneous viscous fluids for inflation. *Astrophys. Space Sci.*, v. 356, n. 1, p. 205–213, 2015.
- [25] BAMBA, K.; ODINTSOV, S. D. Inflation in a viscous fluid model. *Eur. Phys. J.*, v. C76, n. 1, p. 18, 2016.
- [26] BREVIK, I.; TIMOSHKIN, A. V. Viscous Coupled Fluids in Inflationary Cosmology. *J. Exp. Theor. Phys.*, v. 122, n. 4, p. 679–684, 2016.

- [27] HARO, J.; PAN, S. Bulk viscous quintessential inflation. 2015.
- [28] NORMANN, B. D.; BREVIK, I. General Bulk-Viscous Solutions and Estimates of Bulk Viscosity in the Cosmic Fluid. *Entropy*, v. 18, p. 215, 2016.
- [29] BREVIK, I.; GRØN, Ø.; DE HARO, J.; ODINTSOV, S. D.; SARIDAKIS, E. N. Viscous Cosmology for Early- and Late-Time Universe. *Int. J. Mod. Phys.*, v. D26, n. 14, p. 1730024, 2017.
- [30] MOHAN, N. D. J.; SASIDHARAN, A.; MATHEW, T. K. Bulk viscous matter and recent acceleration of the universe based on causal viscous theory. *Eur. Phys. J.*, v. C77, n. 12, p. 849, 2017.
- [31] CHAPLYGIN, S. *On Gas Jet, Scientific notes of the Department of Physico-mathematical Science of Moscow University, Issue*, v. 21, p. 1–112, 1904. cited By 1.
- [32] SAADAT, H.; POURHASSAN, B. FRW bulk viscous cosmology with modified Chaplygin gas in flat space. *Astrophys. Space Sci.*, v. 343, p. 783–786, 2013.
- [33] SAADAT, H.; POURHASSAN, B. FRW bulk viscous cosmology with modified cosmic Chaplygin gas. *Astrophys. Space Sci.*, v. 344, p. 237–241, 2013.
- [34] POURHASSAN, B. Viscous Modified Cosmic Chaplygin Gas Cosmology. *Int. J. Mod. Phys.*, v. D22, p. 1350061, 2013.
- [35] BENAOUUM, H. B. Modified Chaplygin Gas Cosmology with Bulk Viscosity. *Int. J. Mod. Phys.*, v. D23, n. 10, p. 1450082, 2014.
- [36] ELIZALDE, E.; SILVA, L. G. T. Inhomogeneous imperfect fluid inflation. *Astrophys. Space Sci.*, v. 362, n. 1, p. 7, 2017.
- [37] BAMBA, K.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Reconstruction of scalar field theories realizing inflation consistent with the Planck and BICEP2 results. *Phys. Lett.*, v. B737, p. 374–378, 2014.
- [38] MUKHAOV, V. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [39] WEINBERG, S. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [40] CALLEN, H. *Thermodynamics: an introduction to the physical theories of equilibrium thermostatics and irreversible thermodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1960.

- [41] DODELSON, S. *Modern cosmology*. Academic Press.
- [42] PATHRIA, R. K. *Statistical mechanics*. Butterworth-Heinemann, 1996.
- [43] STEFANCIC, H. Expansion around the vacuum equation of state - Sudden future singularities and asymptotic behavior. *Phys. Rev.*, v. D71, p. 084024, 2005.
- [44] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. The Final state and thermodynamics of dark energy universe. *Phys. Rev.*, v. D70, p. 103522, 2004.
- [45] FRAMPTON, P. H.; LUDWICK, K. J.; SCHERRER, R. J. The Little Rip. *Phys. Rev.*, v. D84, p. 063003, 2011.
- [46] BAMBA, K.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.; SÁEZ-GÓMEZ, D. Inflationary universe from perfect fluid and  $F(R)$  gravity and its comparison with observational data. *Phys. Rev.*, v. D90, p. 124061, 2014.
- [47] GUTH, A. H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.*, v. D23, p. 347–356, 1981.
- [48] LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [49] PETER, P.; UZAN, J.-P. *Primordial cosmology*. Oxford University Press, 2009.
- [50] BAUMANN, D. Inflation. In: . c2011. p. 523–686.
- [51] MUKHANOV, V. F. Gravitational Instability of the Universe Filled with a Scalar Field. *JETP Lett.*, v. 41, p. 493–496, 1985. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.41,402(1985)].
- [52] LINDE, A. D. Inflationary Cosmology. *Lect. Notes Phys.*, v. 738, p. 1–54, 2008.
- [53] HARRISON, E. R. Fluctuations at the threshold of classical cosmology. *Phys. Rev.*, v. D1, p. 2726–2730, 1970.
- [54] ZELDOVICH, YA. B. Gravitational instability: An Approximate theory for large density perturbations. *Astron. Astrophys.*, v. 5, p. 84–89, 1970.
- [55] GONZALEZ-DIAZ, P. F. You need not be afraid of phantom energy. *Phys. Rev.*, v. D68, p. 021303, 2003.

# Apêndices

# Apêndice A

## Componentes da Equação de Einstein

Esse apêndice é dedicado a obter as quantidades mais básicas para expor o modelo  $\Lambda$ CDM no background de Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW) e seus resultados principais como feito no Cap. 1.

Seja a métrica de FLRW, que descreve um universo homogêneo e isotrópico em expansão,

$$g_{\mu\nu} = (-1, a^2\delta_{ij}) , \quad g^{\mu\nu} = (-1, a^{-2}\delta^{ij}) , \quad a = a(t) , \quad (\text{A.1})$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. O Símbolo de Christoffel, dado por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g_{\nu\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) , \quad (\text{A.2})$$

calculado a partir da métrica de FLRW (A.1) tem as seguintes componentes

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij} , \quad (\text{A.3})$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i = H\delta_j^i , \quad (\text{A.4})$$

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{00}^i = \Gamma_{jk}^i = 0 , \quad (\text{A.5})$$

onde  $\dot{a} \equiv \partial a / \partial t$  e  $H \equiv \dot{a}/a$ , que é o parâmetro de Hubble.

O tensor de Ricci, ou tensor de curvatura, é dado por

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} , \quad (\text{A.6})$$

e com a ajuda dos símbolos de Christoffel, Eqs. (A.3) e (A.4), os seguintes resultados são obtidos,

$$R_{00} = -3(\dot{H} + H^2) , \quad (\text{A.7})$$

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\delta_{ij} = a^2(\dot{H} + 3H^2)\delta_{ij} , \quad (\text{A.8})$$

$$R_{0i} = R_{i0} = 0 , \quad (\text{A.9})$$

bem como o traço,

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2) . \quad (\text{A.10})$$

O tensor de energia-momento, que descreve o conteúdo material do universo segundo a Teoria da Relatividade Geral, é caracterizado por grandezas que descrevem o fluido como a densidade de energia  $\rho$ , a pressão  $P$  e a quadri-velocidade  $v_\mu$ ,

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho)v_\mu v_\nu + P g_{\mu\nu} , \quad v_\mu = (-1, 0) , \quad (\text{A.11})$$

com as componentes no background de FLRW (Eq. (A.1)) dadas por

$$T_{00} = \rho , \quad (\text{A.12})$$

$$T_{ij} = a^2 P \delta_{ij} , \quad (\text{A.13})$$

e o traço

$$T = -\rho + 3P . \quad (\text{A.14})$$

# Apêndice B

## Reconstrução do campo escalar

Será exposto aqui de forma mais detalhada o procedimento, primeiramente apresentado nas Ref. [37, 46], da reconstrução do campo escalar a fim de reescrever os observáveis dos modelos inflacionários na representação do modelo de fluidos apresentados na Sec. 3.2.

Inicialmente o inflaton  $\phi$  (Sec. 3.1) é redefinido por um novo campo escalar  $\varphi$ , sendo que o campo original depende do novo, ou seja,  $\phi = \phi(\varphi)$  e  $\varphi$  é identificado com o número de e-folds  $N$ . Com isso as equações do campo gravitacional (Eqs. (3.17) e (3.18)) se tornam, respectivamente

$$\frac{3}{\kappa^2} H^2(N) = \frac{1}{2} \omega(\varphi) H^2(N) + V(\phi(\varphi)) , \quad (\text{B.1})$$

$$-\frac{1}{\kappa^2} (3H^2(N) + 2H'(N)H(N)) = \frac{1}{2} \omega(\varphi) H^2(N) - V(\phi(\varphi)) . \quad (\text{B.2})$$

Por simplicidade e para não sobrecarregar as equações a linha sobrescrita foi definida como a derivada com relação à quantidade que está entre parenteses, e.g.  $H'(N) \equiv \partial H(N)/\partial N$ . Nas Eqs. (B.1) e (B.2) foram utilizadas a definição do número de e-folds

$$N \equiv \ln(a_f/a_i) = \int_{t_i}^{t_f} H dt , \quad (\text{B.3})$$

e a quantidade  $\omega(\varphi)$ , definida como

$$\omega(\varphi) \equiv \left( \frac{d\phi}{d\varphi} \right)^2 > 0 . \quad (\text{B.4})$$

Usando a Eq. (B.4) os parâmetros de rolagem lenta (Eq. (3.12)) podem ser reescritos em função do campo  $\varphi$  como se segue

$$\epsilon = \frac{1}{2\kappa^2\omega} \left( \frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)} \right)^2 , \quad (\text{B.5})$$

$$\eta = -\frac{1}{\kappa^2\omega} \left( \frac{1}{2} \frac{\omega'(\varphi)}{\omega(\varphi)} \frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)} - \frac{V''(\varphi)}{V(\varphi)} \right) . \quad (\text{B.6})$$

Subtraindo as Eqs. (B.1) e (B.2) e resolvendo para o potencial



obtêm-se

$$V(\varphi) = \frac{1}{\kappa^2} H^2(N) \left( 3 + \frac{H'(N)}{H(N)} \right) \Big|_{N=\varphi} . \quad (\text{B.7})$$

Por outro lado, a soma das Eqs. (B.1) e (B.2) resulta em

$$\omega(\varphi) = - \frac{2}{\kappa^2} \frac{H'(N)}{H(N)} \Big|_{N=\varphi} , \quad (\text{B.8})$$

e os parâmetros (B.5) e (B.6) podem ser reescritos

$$\epsilon = - \frac{1}{4} \frac{H(N)}{H'(N)} \left( 3 + \frac{H'(N)}{H(N)} \right)^{-2} \left[ 6 \frac{H'(N)}{H(N)} + \frac{H''(N)}{H(N)} + \left( \frac{H'(N)}{H(N)} \right)^2 \right]^2 , \quad (\text{B.9})$$

$$\eta = - \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{H'(N)}{H(N)} \right)^{-1} \left[ 9 \frac{H'(N)}{H(N)} + 3 \frac{H''(N)}{H(N)} + 3 \frac{H''(N)}{H'(N)} + \frac{H'''(N)}{H'(N)} + \frac{1}{2} \left( \frac{H'(N)}{H(N)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{H''(N)}{H'(N)} \right)^2 \right] , \quad (\text{B.10})$$

O próximo passo é escrever o parâmetro de Hubble e suas derivadas em termos das quantidades do fluido encontradas na equação de estado (1.12)

$$P(N) = -\rho(N) + f(\rho) , \quad (\text{B.11})$$

onde  $f(\rho)$  é uma função arbitrária de  $\rho$ . A densidade de energia  $\rho(N)$  e a pressão  $P(N)$  são descritas pelas equações de Friedmann que no universo de FLRW são dadas pelas Eqs. (1.8) e (1.10), mas utilizando a Eq. (3.7) elas podem ser apresentadas respectivamente como

$$\rho(N) = \frac{3}{\kappa^2} (H(N))^2 , \quad (\text{B.12})$$

$$P(N) = - \frac{1}{\kappa^2} (2H(N)H'(N) + 3H^2(N)) . \quad (\text{B.13})$$

Com isso a lei de conservação (Eq. (1.11)) é reescrita

$$\rho'(N) + 3f(\rho) = 0 . \quad (\text{B.14})$$

Combinando as Eqs. (B.11), (B.12), (B.13) e (B.14) a fórmula para transcrever os parâmetros de Hubble e suas derivadas na representação do modelo de fluido é obtida

$$\frac{2}{\kappa^2} H^2 \left[ \left( \frac{H'(N)}{H(N)} \right)^2 + \frac{H''(N)}{H(N)} \right] = 3f'(\rho)f(\rho) . \quad (\text{B.15})$$

Finalmente, a Eq. (B.15) permite reescrever as Eqs. (B.9) e (B.10) como

$$\epsilon = \frac{3}{2} \frac{f(\rho)}{\rho(N)} \left( \frac{f'(\rho) - 2}{2 - f(\rho)/\rho(N)} \right)^2, \quad (\text{B.16})$$

$$\eta = \frac{3}{2 - f(\rho)/\rho(N)} \left[ \left( \frac{f(\rho)}{\rho(N)} + f'(\rho) \right) \left( 1 - \frac{1}{2} f'(\rho) \right) - f(\rho) f''(\rho) \right]. \quad (\text{B.17})$$

e conseqüentemente os observáveis dos modelos inflacionários (Eq. (3.16))

$$n_s - 1 \sim \frac{6}{(2 - f(\rho)/\rho(N))^2} \left[ \left( 2 - \frac{f(\rho)}{\rho(N)} \right) \left( \frac{f(\rho)}{\rho(N)} + f'(\rho) \right) \left( 1 - \frac{1}{2} f'(\rho) \right) - \frac{3f(\rho)}{2\rho(N)} (f'(\rho) - 2)^2 - 2f(\rho) f''(\rho) \right], \quad (\text{B.18})$$

$$r = 24 \frac{f(\rho)}{\rho(N)} \left( \frac{f'(\rho) - 2}{2 - f(\rho)/\rho(N)} \right)^2. \quad (\text{B.19})$$

